UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A - 27/04/2005

Exercícios de Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

1. Como no caso das equações lineares de 1a. ordem, existe um Teorema que garante a existência e unicidade de solução para equações lineares de 2a. ordem num intervalo em que os coeficientes são contínuos:

   Teorema. O problema de valor inicial

   $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

   para $p(t), q(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 tem uma única solução neste intervalo.

   Baseado no Teorema acima, determine um intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm solução, sem resolvê-los:

   (a) $\begin{cases} (t^2-1)\dfrac{d^2y}{dt^2} + (t-2)y = t \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} (t^2-1)\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + ty = t^2 \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y'_0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} (t^2-t)\dfrac{d^2y}{dt^2} + (t+1)\dfrac{dy}{dt} + y = e^t \\ y(-1) = y_0, \quad y'(-1) = y'_0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} (t^2-t)\dfrac{dy}{dt} + (t+3)\dfrac{dy}{dt} + 2y = \cos t \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y'_0 \end{cases}$

2. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

   $$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + bt\frac{dy}{dt} + cy = 0. \tag{1}$$

   em que b e c são constantes reais.

   Mostre que existem valores constantes de r tais que $y(t) = t^r$ é uma solução de (1). Além disso mostre que $y(t) = t^r$ é solução da equação (1) se, e somente se,

   $$r(r-1) + br + c = 0, \tag{2}$$

   A equação (2) é chamada **equação indicial de** (1).

3. Mostre que se a equação indicial (2) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(t) = t^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (1) e portanto

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$$

é a solução geral de (1), para $t > 0$.

4. Se a equação indicial (2) tem duas raízes complexas, $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, use a fórmula de Euler para escrever a solução geral complexa em termos das soluções reais, para $t > 0$,

$$u(t) = t^\alpha \cos(\beta \ln t) \quad \text{e} \quad v(t) = t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln t).$$

Mostre que estas soluções são soluções fundamentais de (1) e portanto

$$y(t) = c_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + c_2 t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln t)$$

é a solução geral de (1), para $t > 0$.

5. Se a equação indicial (2) tem somente um raíz real, $r_1 = \dfrac{1-b}{2}$, determine uma segunda solução linearmente independente da forma $y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)t^{\frac{1-b}{2}}$, para $t > 0$. Mostre que $y_1(t) = t^{\frac{1-b}{2}}$ e $y_2(t) = t^{\frac{1-b}{2}} \ln t$ são soluções fundamentais de (1) e portanto a solução geral de (1), para $t > 0$, é

$$y(t) = c_1 t^{\frac{1-b}{2}} + c_2 t^{\frac{1-b}{2}} \ln t.$$

6. Use os exercícios anteriores para encontrar a solução geral das seguintes equações:

   (a) $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$

   (b) $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$

   (c) $t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$

7. Desenhe no plano complexo o maior círculo com centro na origem onde $P(z) \neq 0$ e dê um intervalo onde a equação tem uma solução em série de potências de t, em que $P(t)$ é o coeficiente de y'' na equação diferencial

   (a) $(4 - t^2)y'' + 2y = 0.$

   (b) $(3 - t^2)y'' - 3ty' - y = 0.$

(c) $(1-t)y'' + ty' - y = 0$.

(d) $(2+t^2)y'' - ty' + 4y = 0$.

8. Uma massa de 100 gramas estica uma mola de 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Encontre a freqüência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico.

   (a) Se a massa é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.

   (b) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola de 1 centímetro e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.

   (c) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 2 centímetros e depois é solta.

9. Uma massa de 100 gramas estica uma mola de 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado.

   (a) Para quais valores da constante de amortecimento γ o sistema é super-amortecido, tem um amortecimento crítico e é sub-amortecido.

   (b) Suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 gramas·centímetros por segundos^2 quando a velocidade é de 10 centímetros por segundo. Se a massa é puxada para baixo mais 2 centímetros e depois é solta, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico. Qual o valor do quase-período?

10. Uma massa de 100 gramas estica uma mola de 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento com uma força externa de $9600\cos(6t)$ determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

11. Uma massa de 100 gramas estica uma mola de 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento com uma força externa de $1000\cos(\omega t)$ para ω igual a freqüência de ressonância determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

12. Uma massa de 100 gramas estica uma mola de 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Suponha que o amortecedor exerce uma força de 4200 gramas·centímetros por segundos^2 quando a velocidade é de 1 centímetro por segundo. Se a massa está sob a ação de uma força externa de $26000\cos(6t)$ determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico, considerando somente a solução estacionária.

Solução

1. (a)

$$p(t) = 0$$
$$q(t) = \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$
$$f(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 0$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $-1 < t < 1$.

(b)

$$p(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$
$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$
$$f(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$
$$q(t) = \frac{1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$
$$f(t) = \frac{e^t}{t^2-t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = -1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t < 0$.

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$
$$q(t) = \frac{2}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$
$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2-t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

2. Substituindo-se $y = t^r$, $\dfrac{dy}{dt} = rt^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r(r-1)t^{r-2}$ em (1) obtemos

$$t^2 r(r-1)t^{r-2} + btrt^{r-1} + ct^r = 0.$$

$$\left(r(r-1) + br + c\right) t^r = 0.$$

Assim $y = t^r$ é solução da equação (1) se, e somente se, r é solução da equação

$$r(r-1) + br + c = 0.$$

3.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} t^{r_1} & t^{r_2} \\ r_1 t^{r_1-1} & r_2 t^{r_2-1} \end{bmatrix} \\
&= t^{r_1-1} t^{r_2-1} \det \begin{bmatrix} t & t \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = t^{r_1-1} t^{r_2-1} t \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\
&= (r_2 - r_1) t^{r_1+r_2-1} \neq 0, \quad \text{para todo } t > 0.
\end{aligned}$$

4. Neste caso, para $t > 0$, pela fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= t^{r_1} = e^{r_1 \ln t} = e^{(\alpha + i\beta)\ln t} = e^{\alpha \ln t} \left(\cos(\beta \ln t) + i \operatorname{sen}(\beta \ln t)\right) \\
&= t^\alpha \left(\cos(\beta \ln t) + i \operatorname{sen}(\beta \ln t)\right) \quad \text{e} \\
y_2(t) &= t^{r_2} = e^{r_2 \ln t} = e^{(\alpha - i\beta)\ln t} = e^{\alpha \ln t} \left(\cos(-\beta \ln t) + i \operatorname{sen}(-\beta \ln t)\right) \\
&= t^\alpha \left(\cos(\beta \ln t) - i \operatorname{sen}(\beta \ln t)\right)
\end{aligned}$$

são soluções complexas da equação diferencial (1).

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2} \\
&= C_1 t^\alpha \left(\cos(\beta \ln t) + i \operatorname{sen}(\beta \ln t)\right) + C_2 t^\alpha \left(\cos(\beta \ln t) - i \operatorname{sen}(\beta \ln t)\right) \\
&= (C_1 + C_2) t^\alpha \cos(\beta \ln t) + i(C_1 - C_2) t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln t)
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = C_2 = 1/2$, temos que a solução $u(t) = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ e tomando $C_1 = -\dfrac{i}{2}$ e $C_2 = \dfrac{i}{2}$, temos a solução $v(t) = t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln t)$.

$$\det\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} t^{\alpha}\cos(\beta\ln t) & t^{\alpha}\,\mathrm{sen}(\beta\ln t) \\ t^{\alpha-1}\left(\alpha\cos(\beta\ln t)-\beta\,\mathrm{sen}(\beta\ln t)\right) & t^{\alpha-1}\left(\alpha\,\mathrm{sen}(\beta\ln t)+\beta\cos(\beta\ln t)\right) \end{bmatrix} =$$

$$t^{2\alpha-1}\left(\alpha\det\begin{bmatrix} \cos(\beta\ln t) & \mathrm{sen}(\beta\ln t) \\ \cos(\beta\ln t) & \mathrm{sen}(\beta\ln t) \end{bmatrix} + \beta\det\begin{bmatrix} \cos(\beta\ln t) & \mathrm{sen}(\beta\ln t) \\ -\mathrm{sen}(\beta\ln t) & \cos(\beta\ln t) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \beta t^{2\alpha-1} \neq 0, \quad \text{para todo } t>0.$$

5.

$$y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)t^{\frac{1-b}{2}}.$$

Como

$$y'(t) = v'(t)t^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(t)t^{\frac{-1-b}{2}} \quad \text{e}$$

$$y''(t) = v''(t)t^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(t)t^{\frac{-1-b}{2}} - \frac{1-b^2}{4}v(t)t^{\frac{-3-b}{2}},$$

Substituindo na equação (1):

$t^2(v''(t)t^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(t)t^{\frac{-1-b}{2}} - \frac{1-b^2}{4}v(t)t^{\frac{-3-b}{2}}) + bt(v'(t)t^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(t)t^{\frac{-1-b}{2}}) + cv(t)t^{\frac{1-b}{2}} = 0$

$$t^{\frac{5-b}{2}}v''(t) + t^{\frac{3-b}{2}}v'(t) = 0.$$

$$tv''(t) + v'(t) = 0.$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$tw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln|w| + \ln|t|\right) = 0$$

$$\ln|tw(t)| = \tilde{c}_1$$

$$w(t) = v'(t) = c_1 t^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(t)$:

$$v(t) = c_1 \int t^{-1} dt = c_1 \ln t + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(t) = \ln t$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(t) = v(t) y_1(t) = t^{\frac{1-b}{2}} \ln t$$

Vamos mostrar que

$$y_1(t) = t^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{r_1} \ln t$$

são soluções fundamentais da equação diferencial (1).

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} t^{r_1} & t^{r_1} \ln t \\ r_1 t^{r_1 - 1} & (1 + r_1 \ln t) t^{r_1 - 1} \end{bmatrix} \\
&= t^{2r_1 - 1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln t \\ r_1 & (1 + r_1 \ln t) \end{bmatrix} \\
&= t^{2r_1 - 1} \neq 0, \quad \text{para todo } t > 0.
\end{aligned}$$

6. (a) Equação indicial:

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 t^{-2} + c_2 t^{-1}$$

(b) $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$ Equação indicial:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t$$

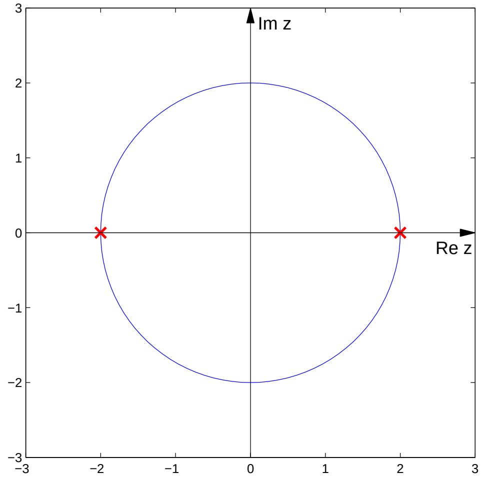
(c) $t^2 y'' + 3ty' + 5y = 0$ Equação indicial:

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

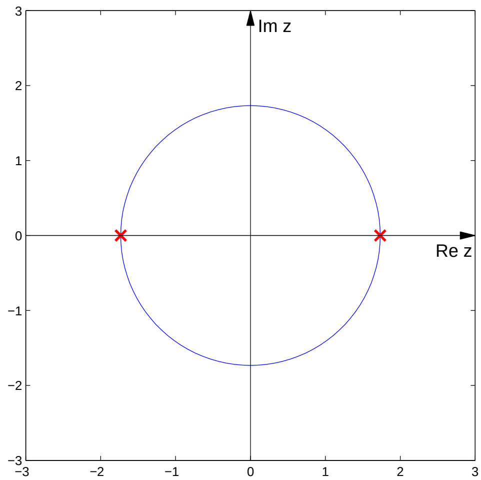
Solução geral:

$$y(t) = c_1 t^{-1} \cos(2 \ln t) + c_2 t^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln t)$$

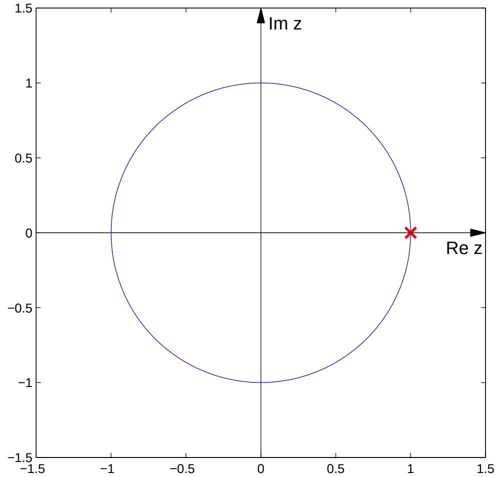
7. (a) $P(z) = 4 - z^2 = 0$, se, e somente se, $z = \pm 2$.
A equação tem solução geral escrita em série de potências de t para $|t| < 2$.



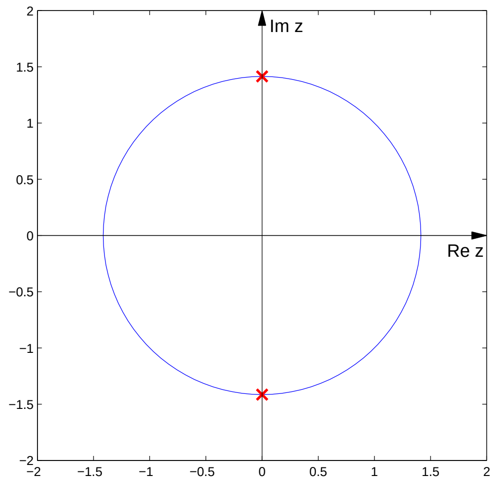
(b) $P(z) = 3 - z^2 = 0$, se, e somente se, $z = \pm\sqrt{3}$.
A equação tem solução geral escrita em série de potências de t para $|t| < \sqrt{3}$.



(c) $P(z) = 1 - z = 0$, se, e somente se, $z = 1$.
A equação tem solução geral escrita em série de potências de t para $|t| < 1$.



(d) $P(z) = 2 + z^2 = 0$, se, e somente se, $z = \pm\sqrt{2}i$.
A equação tem solução geral escrita em série de potências de t para $|t| < \sqrt{2}$.



8. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 10i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A freqüência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{100}} = 10.$$

O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \text{ segundos}$$

(a) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -4. \end{cases}$$

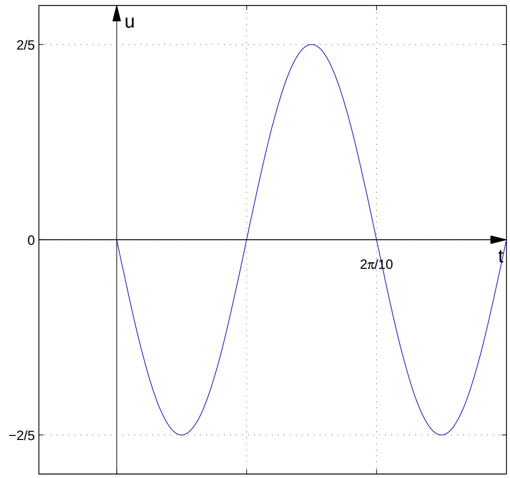
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 = c_1, \\ u'(0) = -4 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(10t)$$

A amplitude é igual a 2/5.



(b) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 10. \end{cases}$$

$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 = c_1, \\ u'(0) = 10 = 10c_2. \end{cases}$$

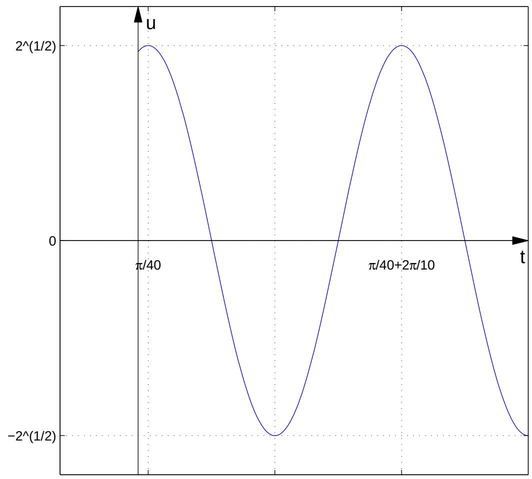
Logo $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}, \quad \delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\cos(10t) + \operatorname{sen}(10t) = \sqrt{2}\cos(10t - \pi/4)$$

A amplitude é igual a $\sqrt{2}$.



(c) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

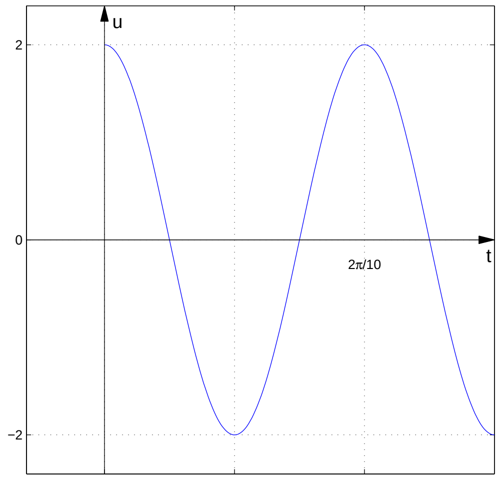
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2\cos(10t)$$

A amplitude é igual a 2.



9. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + \gamma u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + \gamma r + 10^4 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot 10^6$$

(a)
- Se $\gamma > 2 \cdot 10^3$ o sistema é super-amortecido.
- Se $\gamma = 2 \cdot 10^3$ o o sistema tem um amortecimento crítico.
- Se $\gamma < 2 \cdot 10^3$ o sistema é sub-amortecido

(b) Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{10^4}{10} = 10^3$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^3 u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + 10^3 r + 10^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -5 \pm 5\sqrt{3}\, i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t) + c_2 e^{-5t}\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t)$$

A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + 10u' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$u'(t) = e^{-5t}\left((5\sqrt{3}c_2 - 5c_1)\cos(5\sqrt{3}\,t)(-5\sqrt{3} - 5c_2)\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t)\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 5\sqrt{3}c_2 - 5c_1. \end{array} \right.$$

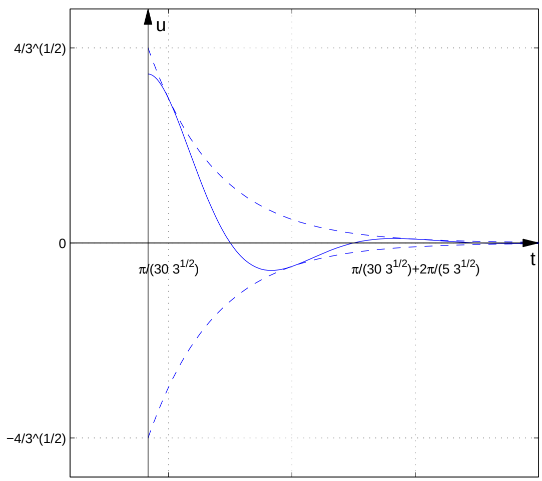
Logo $c_1 = 2$ e $c_2 = 2/\sqrt{3}$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \delta = \arccos\frac{c_1}{R} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{3}e^{-5t}\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t - \pi/6)$$

A quase-freqüência é igual a $5\sqrt{3}$ e o quase-período é igual a $2\pi/5\sqrt{3}$.



10.
$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 9600\cos(6t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \operatorname{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 3/2$ e $B_0 = 0$.
A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t) + \frac{3}{2}\cos(6t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = -3/2, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

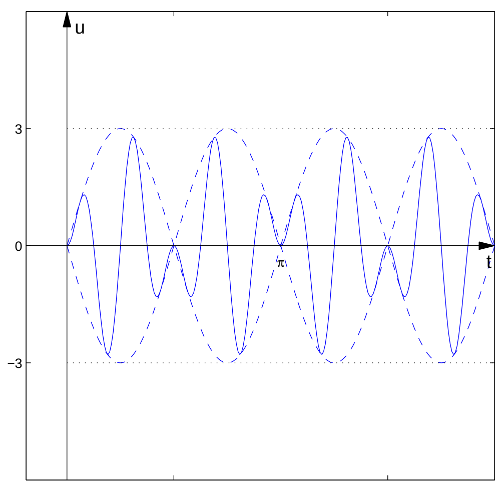
$$u(t) = \frac{3}{2}\left(\cos(6t) - \cos(10t)\right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = 3 \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(8t)$$



11.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 10^3 \cos(10t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = t(A_0 \cos(10t) + B_0 \operatorname{sen}(10t))$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 0$ e $B_0 = 1/2$.

A solução geral da equação é

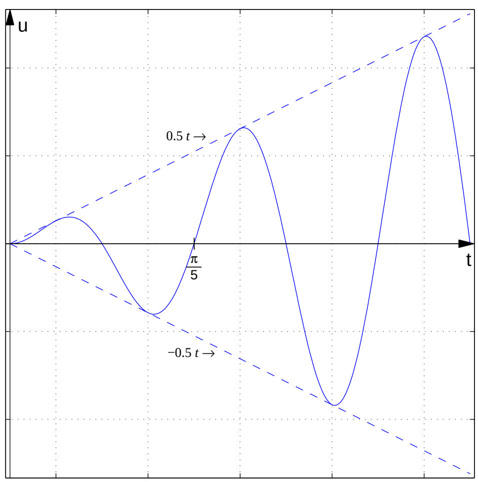
$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t) + \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$



12. Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{4200}{1} = 4200$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 4200u' + 10^4 u = 26000\cos(6t)$$

A solução estacionária é a solução particular da equação não homogênea

$$u_p(t) = A_0\cos(6t) + B_0\,\mathrm{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos

$$A_0 = 16/65, \quad B_0 = 63/65,$$

$$R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1, \quad \delta = \arccos\frac{A_0}{R} = \arccos\frac{16}{65} \approx 1,32.$$

$$u_p(t) = \frac{16}{65}\cos(6t) + \frac{63}{65}\,\mathrm{sen}(6t) = \cos(6t - 1,32)$$