Transformada de Laplace de Funções Possivelmente Descontínuas

Reginaldo J. Santos

http://www.mat.ufmg.br/~regi

Departamento de Matemática-ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais

Função de Heaviside

Seja a uma constante positiva. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

Função de Heaviside

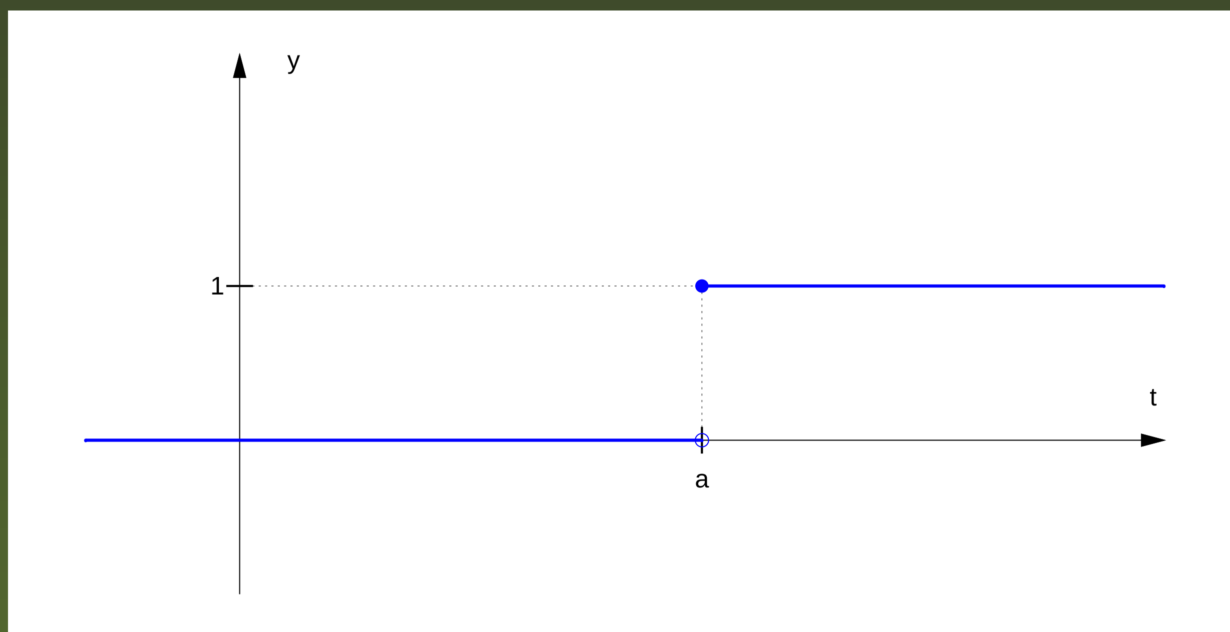
Seja a uma constante positiva. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

Função de Heaviside

Seja a uma constante positiva. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$



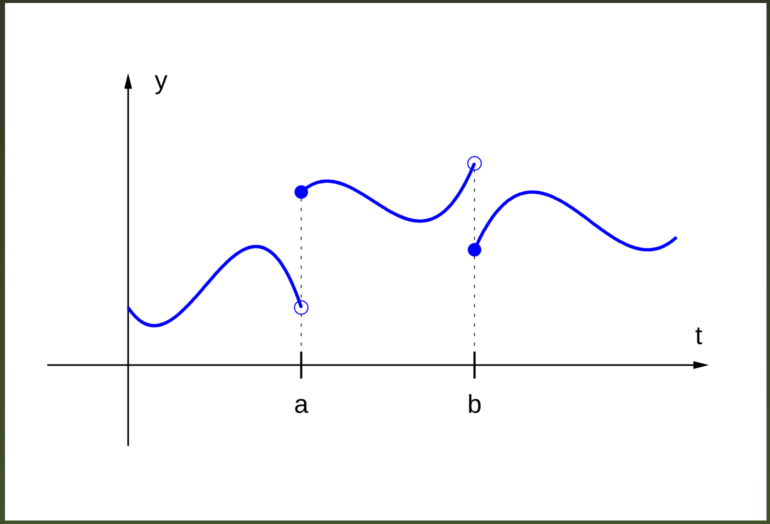
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

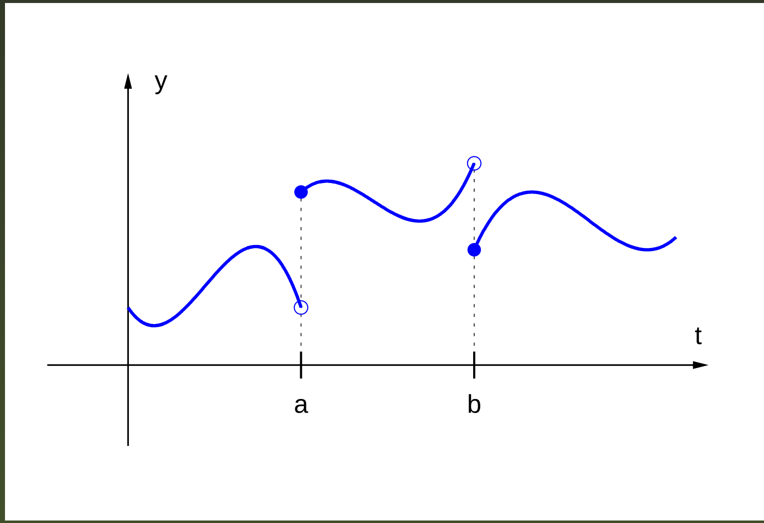
$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases}.$$



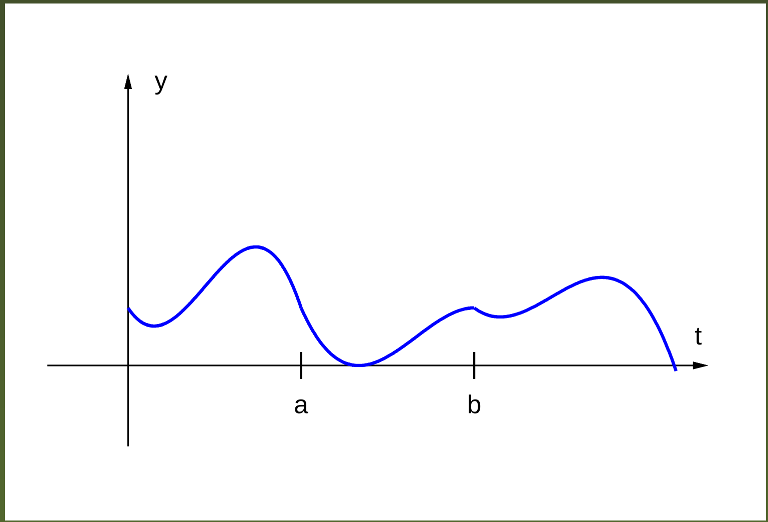
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \le t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \le t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \ge b \end{cases}.$$



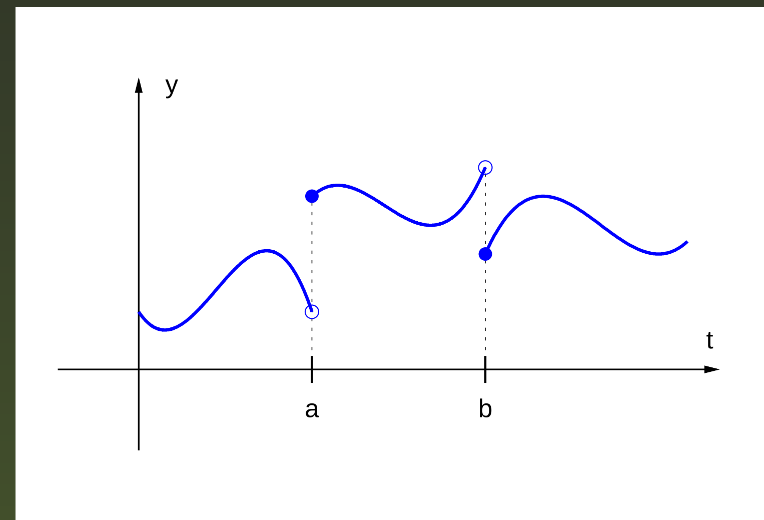
$$f(t) = \ f_1(t)$$



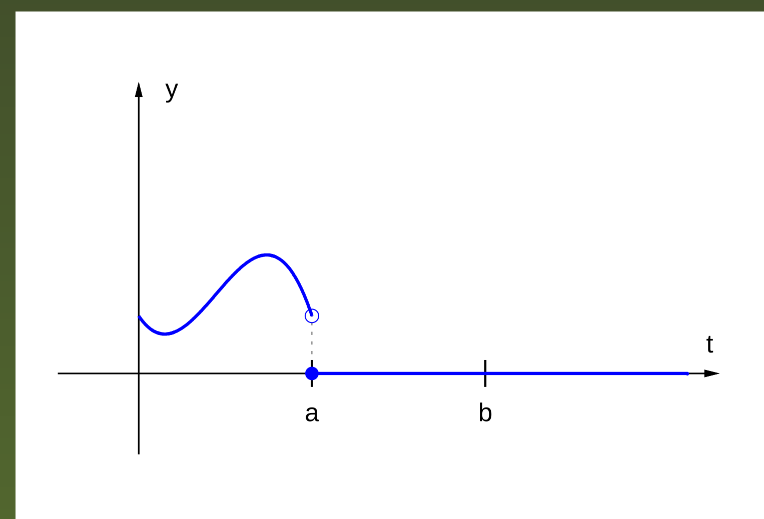
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases}.$$



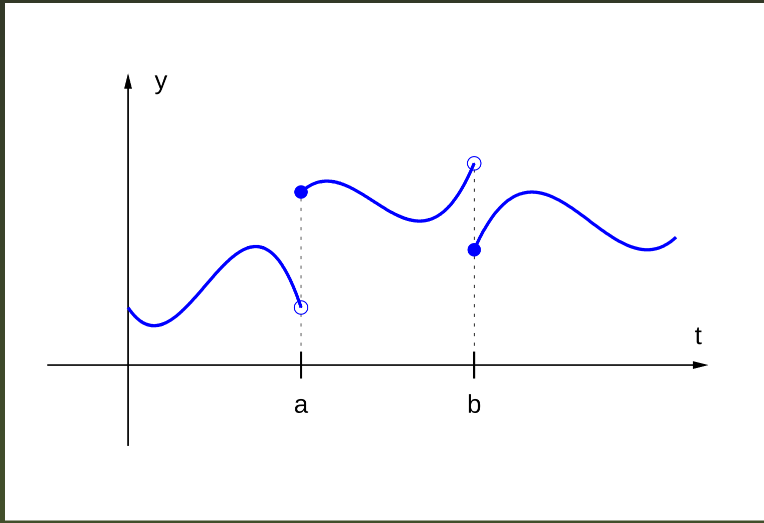
$$f(t) = \; f_1(t) - u_a(t) f_1(t)$$



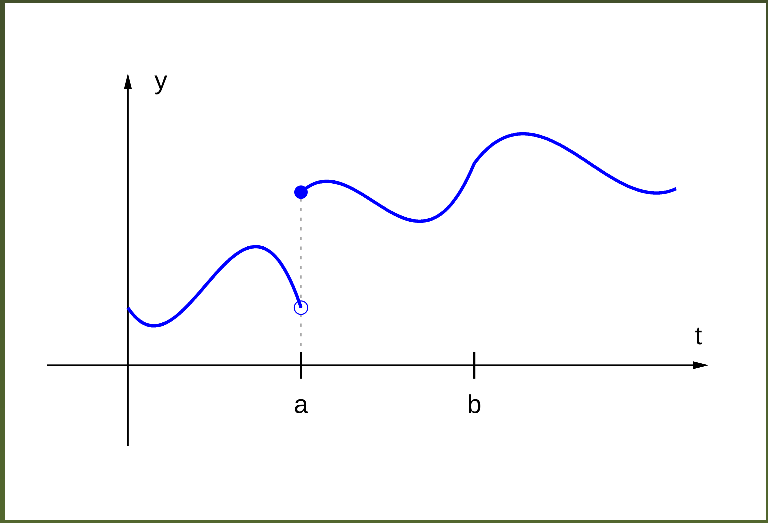
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases} .$$



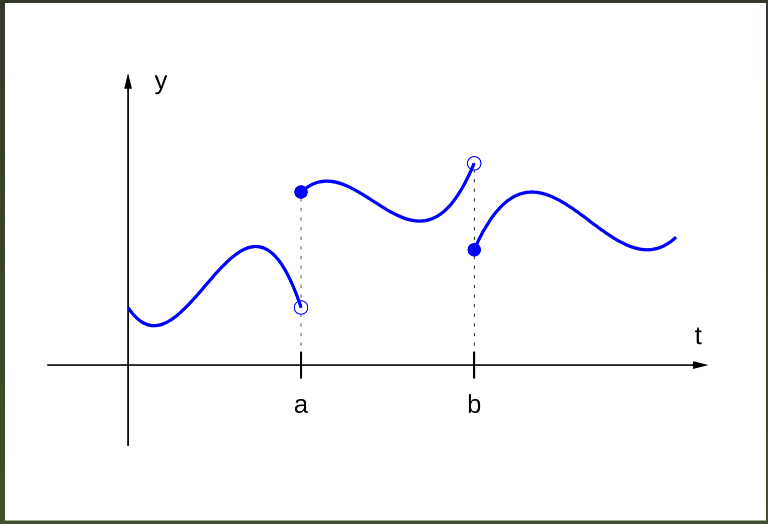
$$f(t) = f_1(t) - u_a(t) f_1(t) + u_a(t) f_2(t)$$



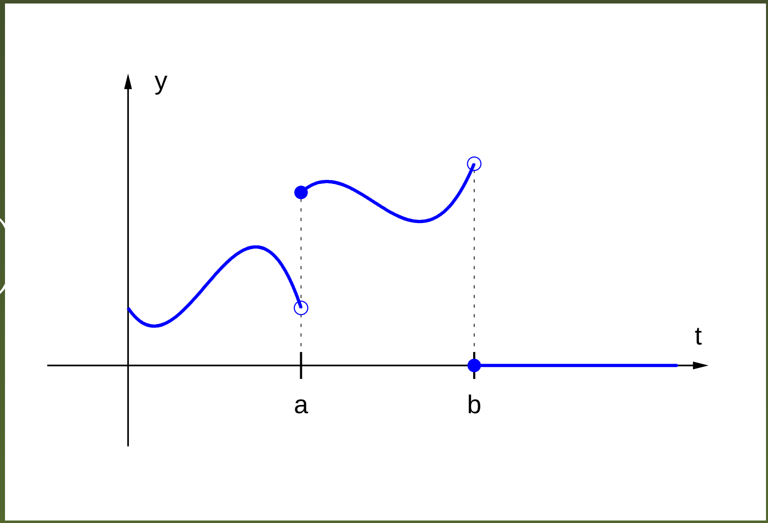
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \le t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \le t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \ge b \end{cases} .$$



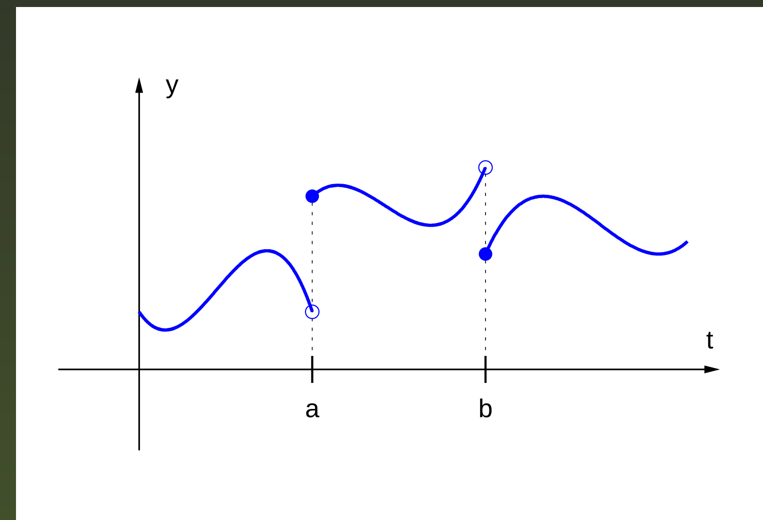
$$f(t) = f_1(t) - u_a(t)f_1(t) + u_a(t)f_2(t) - u_b(t)f_2(t)$$



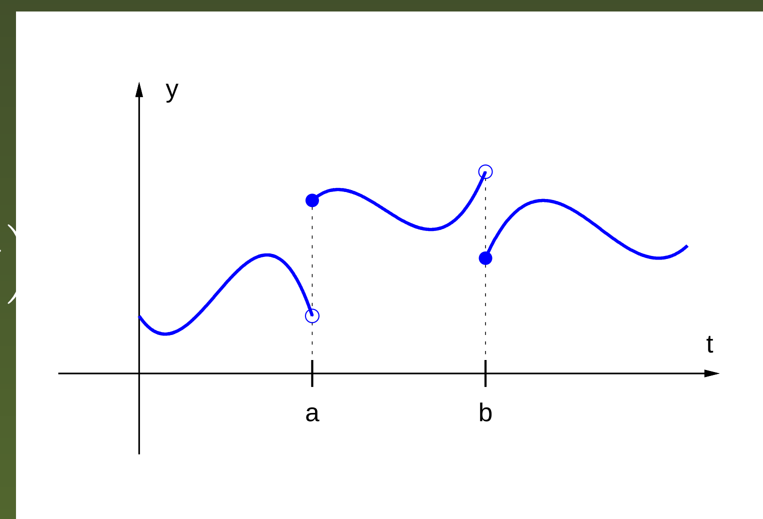
Funções em Termos de $u_a(t)$

Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \le t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \le t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \ge b \end{cases} .$$



$$f(t) = \begin{aligned} & f_1(t) - u_a(t)f_1(t) \\ & + u_a(t)f_2(t) - u_b(t)f_2(t) \\ & + u_b(t)f_3(t). \end{aligned}$$



2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

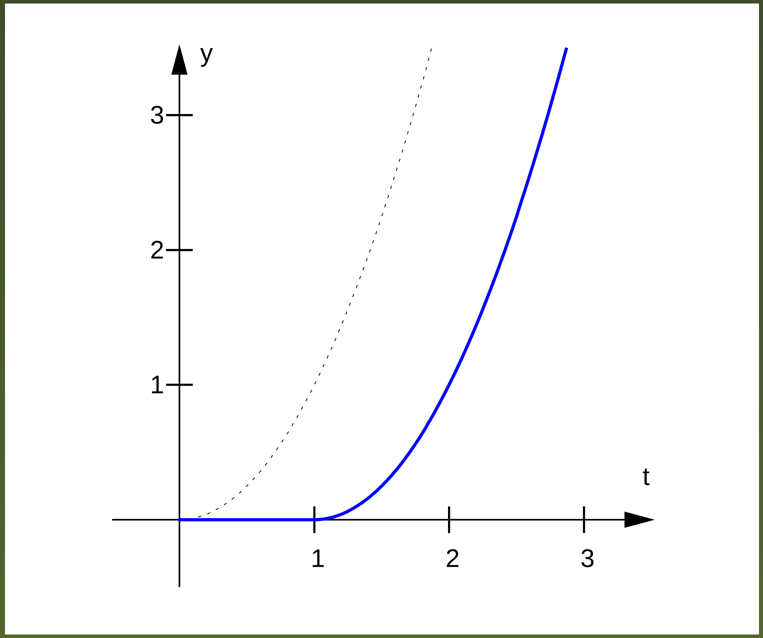
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 1.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ (t-1)^2, & t \ge 1 \end{cases}$$



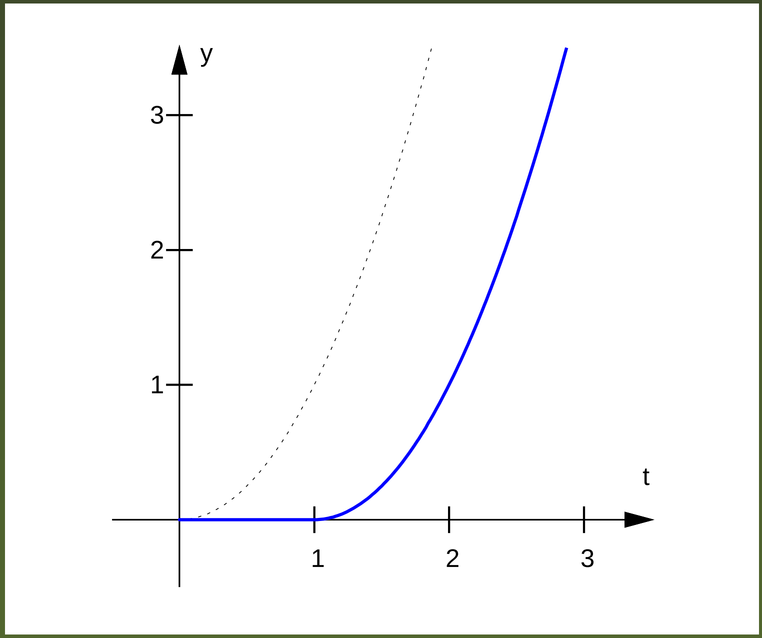
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 1.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ (t-1)^2, & t \ge 1 \end{cases}$$
$$= u_1(t)(t-1)^2$$



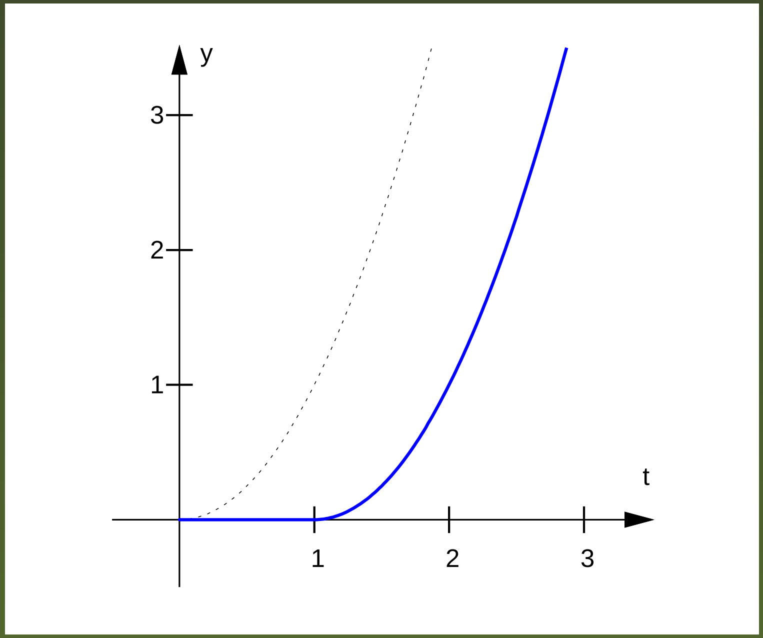
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 1.

$$f(t) = u_1(t)(t-1)^2 = u_1(t)g(t-1),$$



2º Teorema de Deslocamento

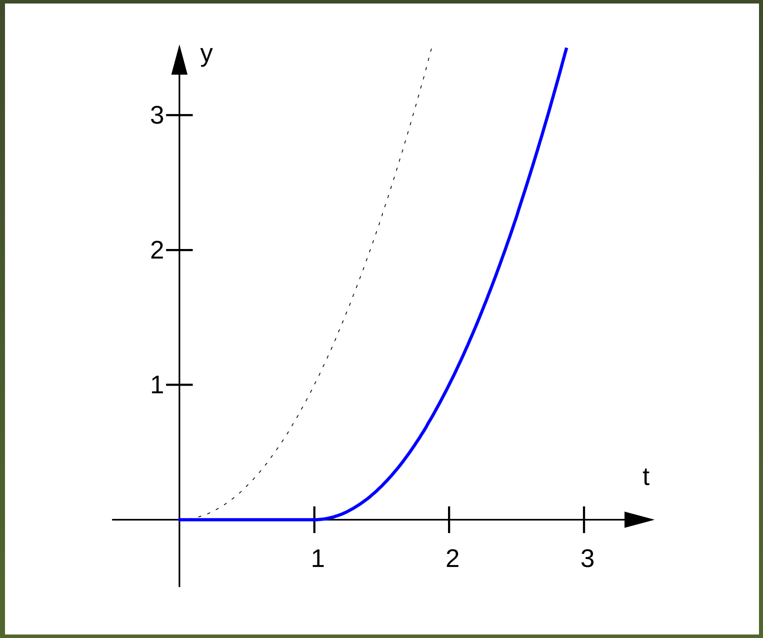
Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 1.

$$f(t) = u_1(t)(t-1)^2 = u_1(t)g(t-1),$$

em que $g(t) = t^2$.



2º Teorema de Deslocamento

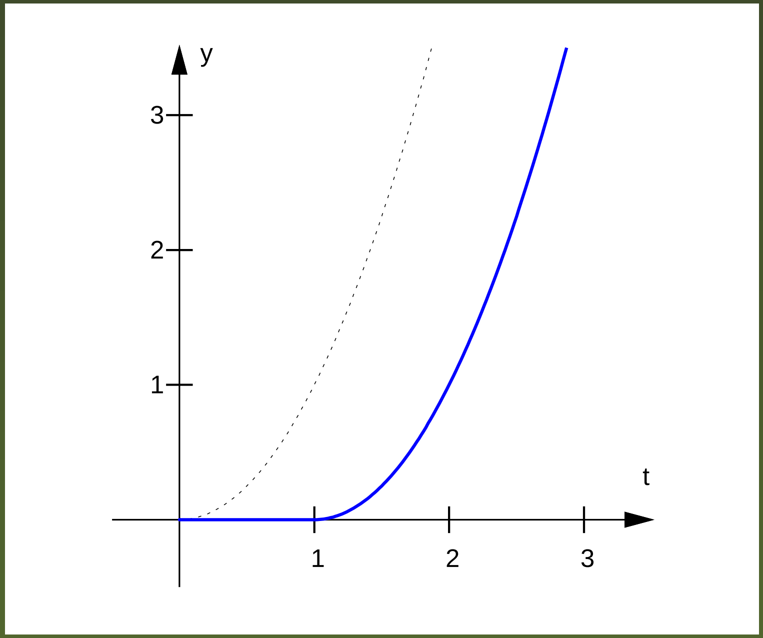
Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 1.

$f(t) = u_1(t)(t-1)^2 = u_1(t)g(t-1)$, em que $g(t) = t^2$.

$$F(s) = e^{-s}\frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-s}}{s^3}.$$



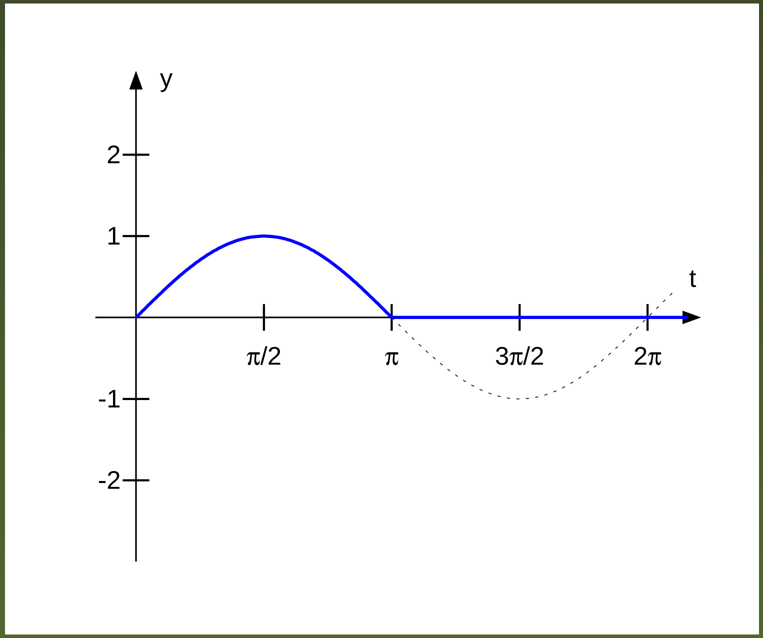
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$



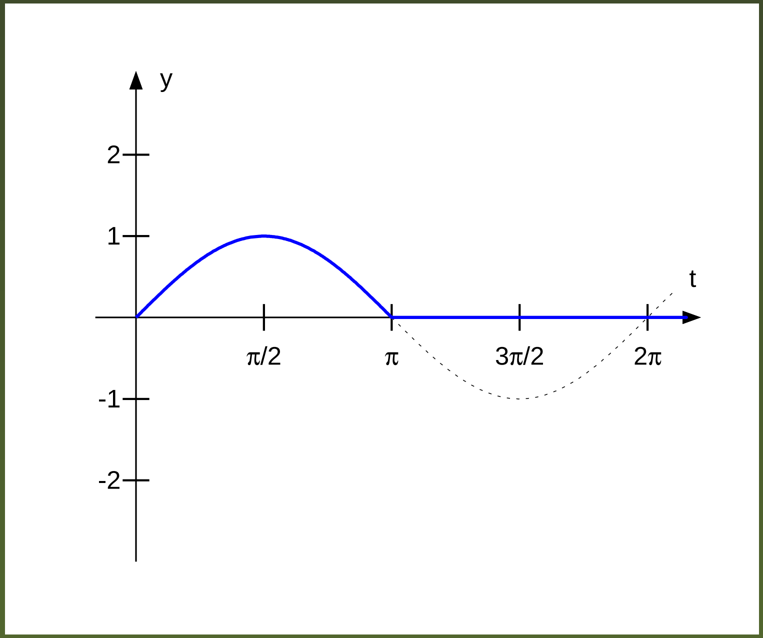
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$
$$= \operatorname{sen} t - u_\pi(t)\operatorname{sen} t$$



2º Teorema de Deslocamento

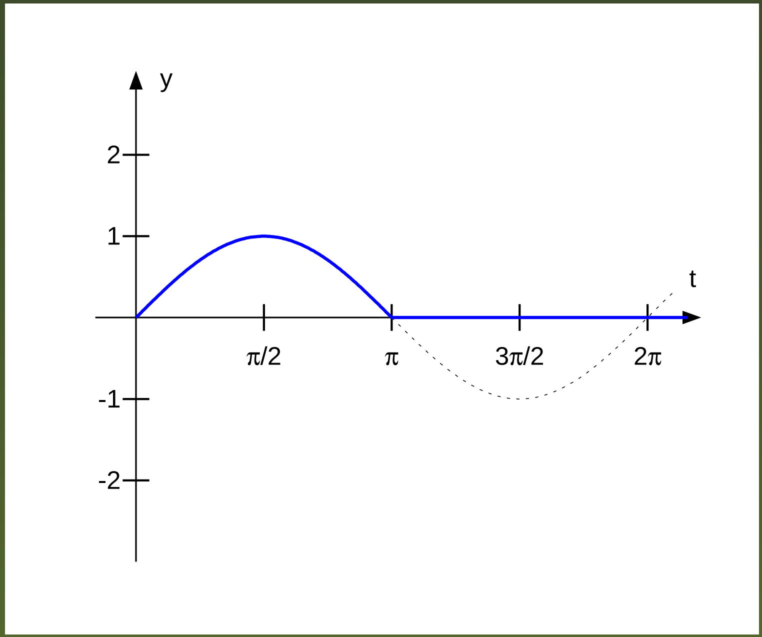
Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t) \operatorname{sen} t,$$

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi]$$



2º Teorema de Deslocamento

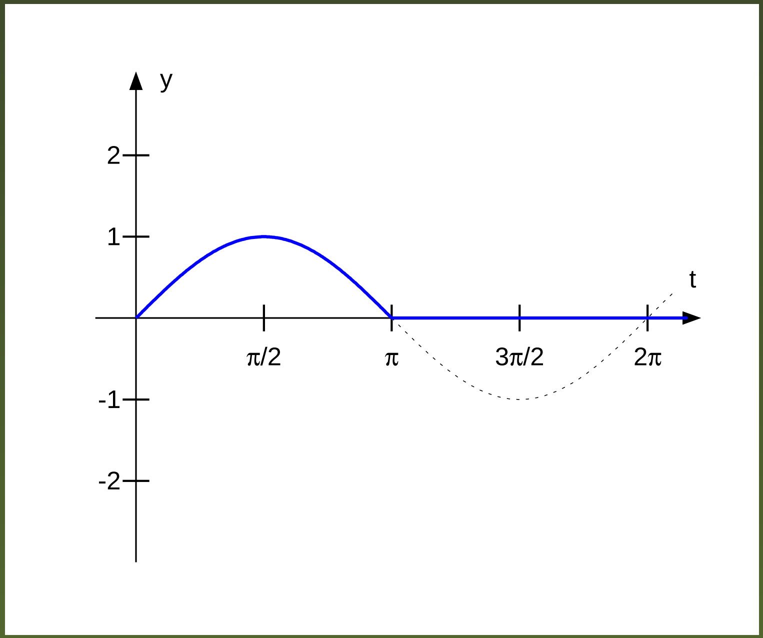
Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t)\operatorname{sen} t,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t = & \ \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi] \\ = & \ \operatorname{sen}(t-\pi)\cos\pi \\ & + \cos(t-\pi)\operatorname{sen}\pi \end{aligned}$$



2º Teorema de Deslocamento

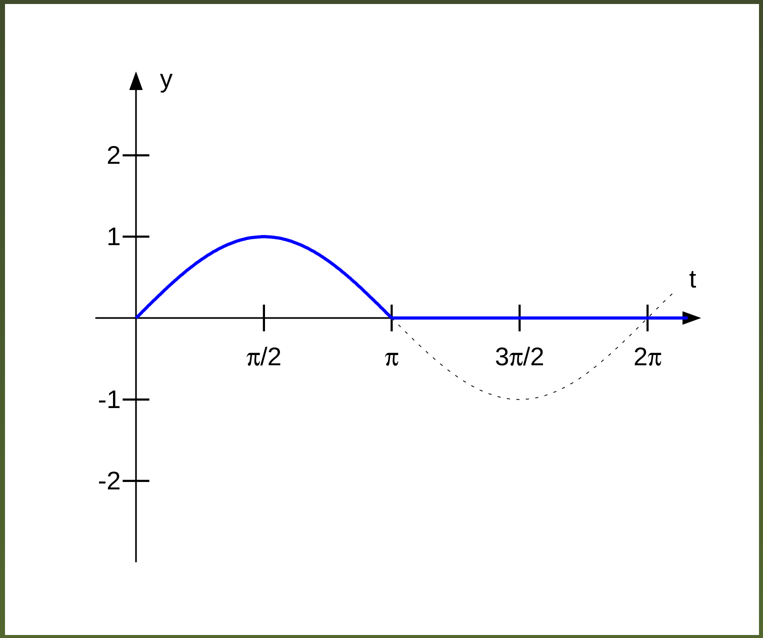
Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t)\operatorname{sen} t,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t = \ & \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi] \\ = \ & \operatorname{sen}(t-\pi)\cos\pi \\ & + \cos(t-\pi)\operatorname{sen}\pi \\ = \ & -\operatorname{sen}(t-\pi).\end{aligned}$$



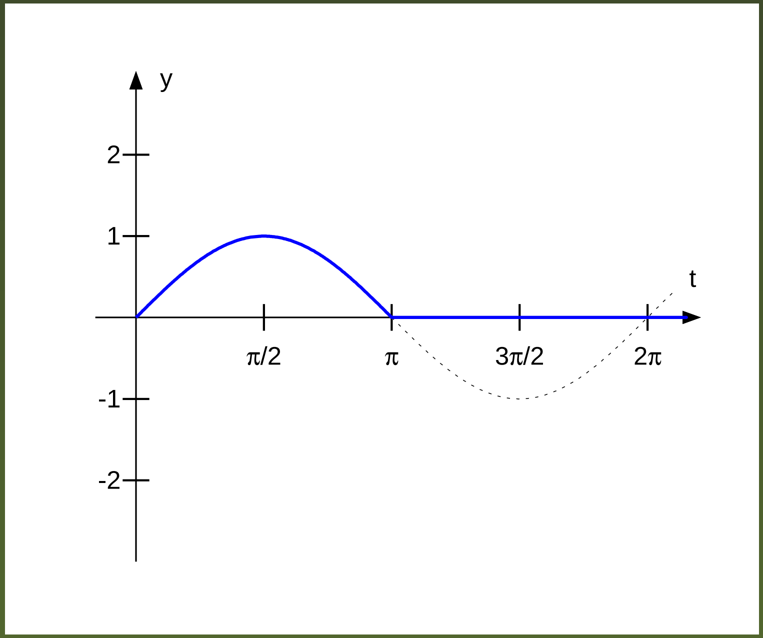
2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen} t - u_\pi(t) \operatorname{sen} t \\ &= \operatorname{sen} t + u_\pi(t) \operatorname{sen}(t-\pi) \end{aligned}$$



2º Teorema de Deslocamento

Se $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, para $s > c$, então

$$\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen} t - u_\pi(t)\operatorname{sen} t \\ &= \operatorname{sen} t + u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}.$$