EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA A QUÍMICA

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Fevereiro 2010

Equações Diferenciais para a Química

Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

Conteúdo

Prefácio

Este é um texto para uma disciplina introdutória de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais para alunos do curso de licenciatura em Química a distância.

O texto é dividido em quatro aulas. No início da Aula 1 é feita uma introdução às equações diferenciais em geral. Depois entre as equações de 1ª ordem são estudadas as equações lineares e as separáveis. Terminamos a aula com algumas aplicações.

As equações lineares de 2ª ordem é o assunto da Aula 2. Nela o estudo tanto das equações homogêneas como das equações não homogêneas é feito inicialmente no caso geral e depois no caso particular em que os coeficientes são constantes. Como aplicações esta aula traz também oscilações e soluções de equações em série de potências.

Na Aula 3 é estudada a Transformada de Laplace suas propriedades e aplicação na solução de problemas de valor inicial.

Na Aula 4 são estudados séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Entre as equações parciais são apresentadas a equação do calor, a equação da corda elástica e a equação de Laplace.

Todos os exercícios estão resolvidos no final da aula correspondente. Os desenhos e gráficos deste texto, foram feitos usando o MATLAB®[*] com o pacote GAAL disponível na web no site do autor e o Maxima também com o pacote GAAL também disponível no site do autor deste texto. Neste site também estão disponíveis páginas interativas para o estudo de oscilações, equações parciais, séries de Fourier e outros.

Gostaria de agradecer a professora Joana Darc A. S. da Cruz pela revisão do presente texto e pelas sugestões apresentadas.

[*] MATLAB é marca registrada de The Mathworks, Inc.

Aula 1

Equações Diferenciais de 1ª Ordem

1.1 Introdução às Equações Diferenciais

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Compreender o que é uma equação diferencial e o que é solução de uma equação diferencial.
- Classificar uma equação diferencial quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.
- Saber o que é uma solução de uma equação diferencial de 1ª ordem e de um problema de valor inicial.

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função $\theta(t)$. Assim θ é a variável dependente e t é a variável independente.

Exemplo 1.2. Um sistema massa-mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola com constante elástica k, sujeita a uma força de resistência $F_r = -\gamma v = -\gamma\frac{dx}{dt}$ e uma força externa $F_{\text{ext}}(t) = F_0\cos(\omega t)$ é descrito pela equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\omega t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $x(t)$. Assim x é a variável dependente e t é a variável independente.

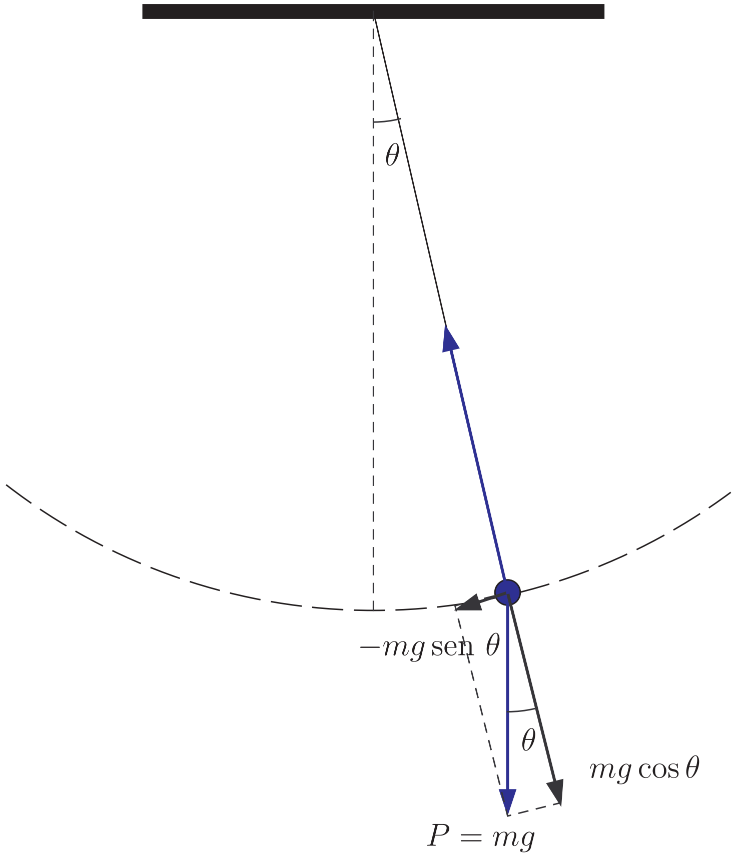


Figura 1.1: Pêndulo Simples

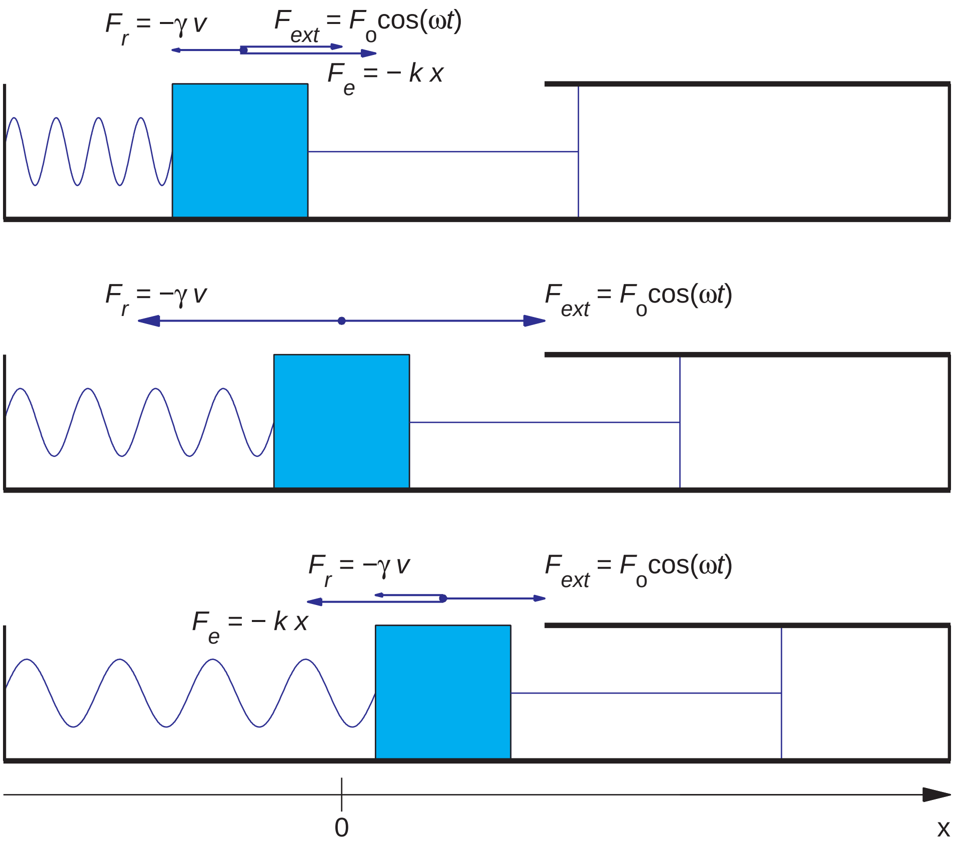


Figura 1.2: Sistema massa-mola

Exemplo 1.3. Numa região do plano em que não há cargas elétricas o potencial elétrico $u(x, y)$ em cada ponto (x, y) da região satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função $u(x, y)$. Assim u é a variável dependente e x e y são as variáveis independentes.

Exemplo 1.4. Um circuito RC é um circuito que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um gerador que gera uma diferença de potencial $V(t)$ ligados em série. A carga $Q(t)$ no capacitor é descrita pela equação diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $Q(t)$. Assim Q é a variável dependente e t é a variável independente.

1.1.1 Classificação

As equações são classificadas quanto ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

(a) Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', ...) = 0,$$

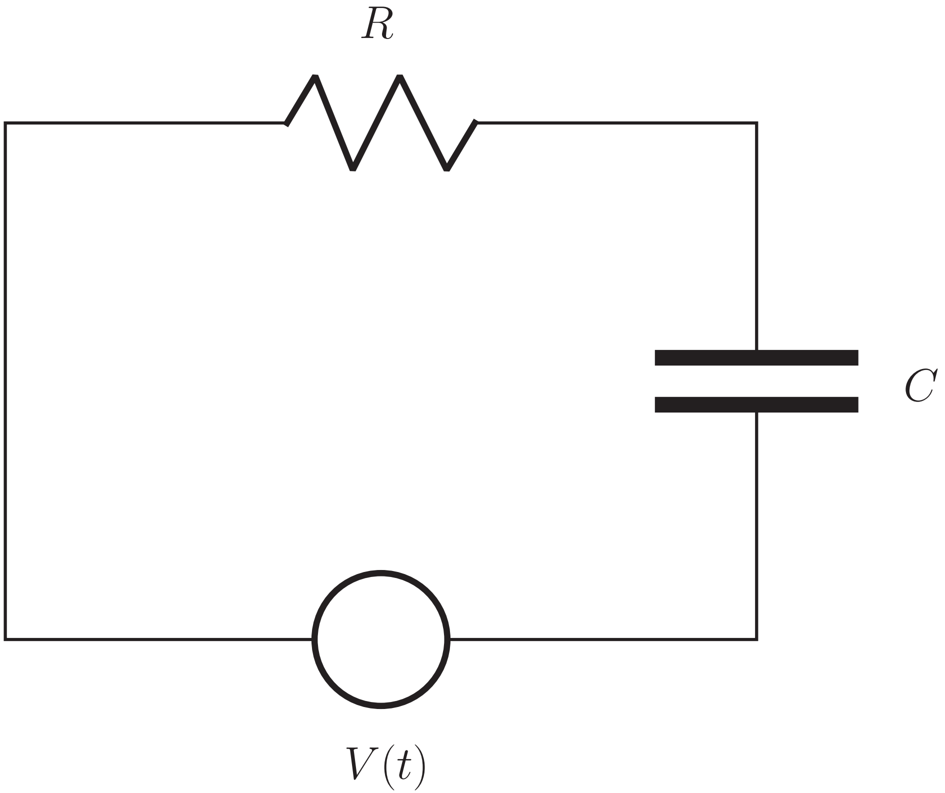


Figura 1.3: Circuito RC

em que y é função apenas de t, são equações diferenciais ordinárias, como as equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.4. A equação do Exemplo 1.3 é parcial.

(b) Quanto à ordem uma equação diferencial pode ser de **1ª**, de **2ª**, ..., de n**-ésima ordem** dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

As equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 são de 2ª ordem e a equação do Exemplo 1.4 é de 1ª ordem.

(c) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares. As equações dos Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 são lineares e a equação do Exemplo 1.1 é não linear.

1.1.2 Soluções de Equações Oridinárias

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial ordinária de ordem** n **em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.

Exemplo 1.5. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0.$$

Vamos mostrar que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução desta equação.

$$y'(t) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y''(t) = \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}$$

Substituindo-se $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ no primeiro membro da equação obtemos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t} + b\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + ce^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)e^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $b^2 - 4ac = 0$. Assim $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução da equação.

1.1.3 Equações Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Vamos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial (1.1) em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y'(t)$ está definida no intervalo I e satisfaz a equação (1.1) neste intervalo.

O problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

é chamado **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução do problema de valor inicial (1.2) em um intervalo** I é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (1.2).

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária. Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que encontramos por uma escolha apropriada da constante dizemos que a família de soluções é a **solução geral** da equação.

Exemplo 1.6. A equação

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo

$$y(t) = \int e^{3t}\,dt = \frac{e^{3t}}{3} + C,$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

Para encontrarmos a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y(1/3) = e/3 \end{cases}$$

Substituímos $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada obtendo $C = 0$. Assim a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

válida para $-\infty < t < \infty$, que é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

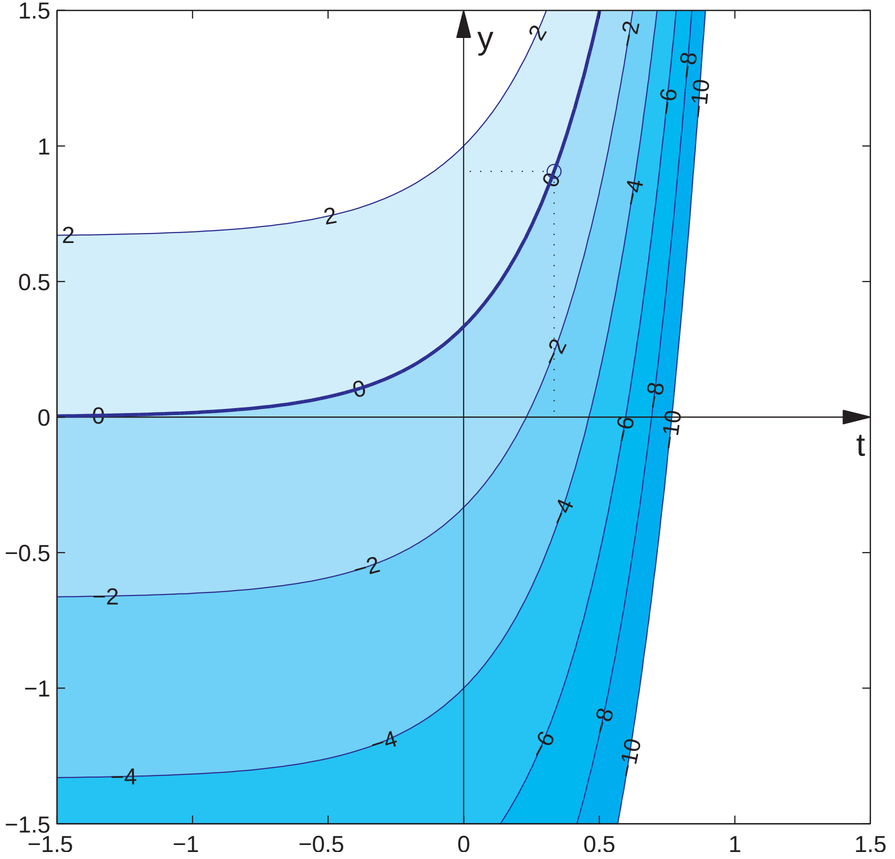


Figura 1.4: Soluções da equação e do PVI do Exemplo 1.6

Exercícios (respostas na página 88)

1.1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

(a) $yy' + t = 0$

(b) $x^2y'' + bxy' + cy = 0$

1.2. Determine qual ou quais das funções $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ e $y_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

1.3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que

(a) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar + b = 0$, é solução da equação $ay' + by = 0$.

(b) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar^2 + br + c = 0$, é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$.

(c) $y(x) = x^r$, com r raiz de $r^2 + (b-1)r + c = 0$, é solução da equação $x^2y'' + bxy' + cy = 0$.

1.4. Determine os valores de r para os quais a função $y(t)$ é solução da equação.

(a) $y(t) = \dfrac{r}{t^2 - 3}$ e $y' + ty^2 = 0$.

(b) $y(t) = \dfrac{r}{t^2 + 1}$ e $y' - 2ty^2 = 0$.

(c) $y(t) = \dfrac{r}{t^2 + 1}$ e $y' - 6ty^2 = 0$.

(d) $y(t) = \dfrac{r}{t^2 + 2}$ e $y' - ty^2 = 0$.

1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Identificar uma equação diferencial linear de 1ª ordem.
- Calcular o fator integrante de uma equação diferencial linear de 1ª ordem.
- Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de 1ª ordem.
- Resolver um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial linear de 1ª ordem.

As **equações (diferenciais ordinárias) lineares de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.3}$$

1.2.1 Equações em que $p(t) = 0$

Se a função $p(t) = 0$ a equação (1.3) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t), \tag{1.4}$$

que é facilmente resolvida integrando-se os dois lados. Assim a solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + C.$$

Exemplo 1.7. A equação

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(2t)$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo-se a solução geral

$$y(t) = \int \operatorname{sen}(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + C.$$

Na subseção 1.2.2 e na seção 1.3 veremos técnicas de se encontrar soluções de equações de 1ª ordem que se baseiam em transformar a equação inicial em uma equação do tipo (1.4).

1.2.2 Equações Lineares - Caso Geral

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.5}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, de forma que ao multiplicarmos a equação (1.5) por esta função a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, do tipo (1.4), que já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada **fator integrante da equação linear**.

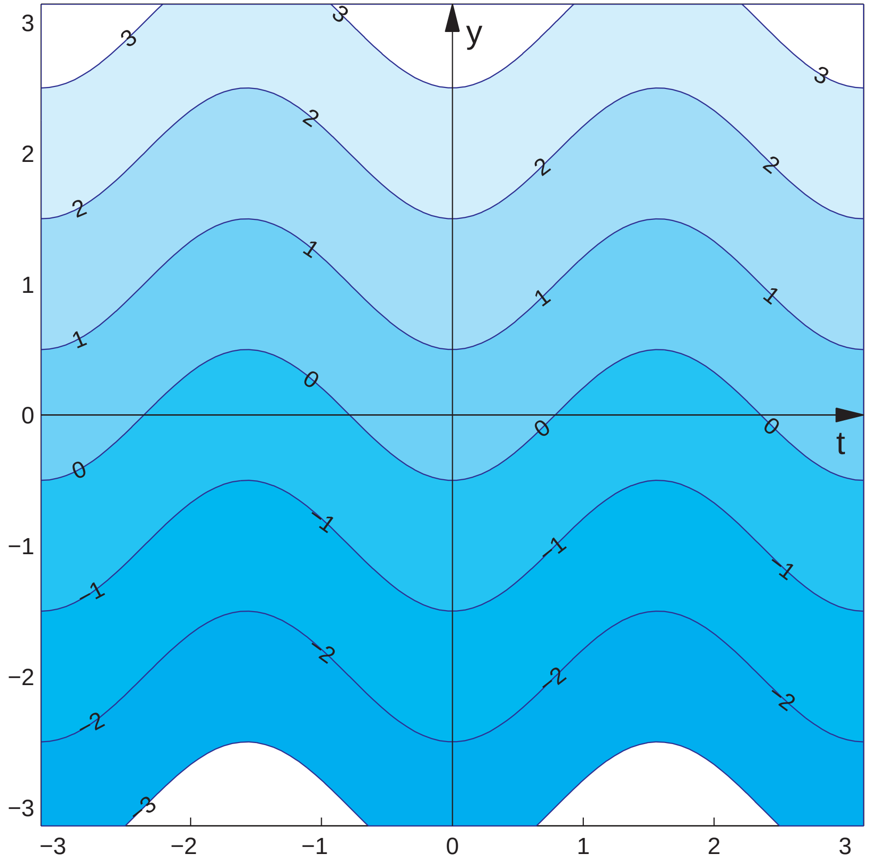


Figura 1.5: Soluções da equação do Exemplo 1.7

Seja
$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$
Vamos mostrar agora que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ é um fator integrante da equação (1.5).

Observe em primeiro lugar que
$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt}\frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt}p(t) = \mu(t)p(t). \tag{1.6}$$
Assim multiplicando-se (1.5) por $\mu(t)$, obtemos
$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \tag{1.7}$$
mas como por (1.6), $\mu(t)p(t) = \dfrac{d\mu}{dt}$, então (1.7) pode ser reescrita como
$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t). \tag{1.8}$$
Mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto o que faz com que ela possa ser reescrita na forma
$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)q(t) \tag{1.9}$$
A equação (1.9) é uma equação do tipo (1.4), ou seja,
$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

em que $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$. Assim, a solução geral de (1.9) é dada por

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C.$$

Como $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos que a solução geral de (1.5) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)dt + C\right)$$

Mostraremos na Subseção 1.2.3 como podemos chegar a $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ como fator integrante da equação (1.5).

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação linear de 1ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 1.8. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mu(t)$ obtemos:

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty = t^3.$$

O lado esquerdo é igual a derivada do produto $t^2y(t)$. Logo a equação acima é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(t^2y(t)\right) = t^3.$$

Integrando-se obtemos

$$t^2y(t) = \frac{t^4}{4} + C$$

Explicitando $y(t)$ temos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}. \tag{1.10}$$

Podemos esboçar as soluções desta equação diferencial. Para $C = 0$ a solução é a parábola

$$y(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Para $C \neq 0$, temos que o domínio de $y(t)$ é o conjunto dos números reais tais que $t \neq 0$. $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty$, se $C \neq 0$. Além disso

$$\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty, \quad \text{se } C > 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} y(t) = -\infty, \quad \text{se } C < 0.$$

Vamos analisar o crescimento e decrescimento das soluções

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{2} - \frac{2C}{t^3} = 0$$

se, e somente se,

$$t^4 = 4C.$$

Assim se $C > 0$ as soluções têm somente pontos críticos em $t = \pm\sqrt[4]{4C}$ e se $C < 0$ elas não têm ponto crítico.

Exemplo 1.9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t}y = t. \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

A equação é a mesma do Exemplo 1.8. Substituindo-se $t = 2$ e $y = 3$ em (1.10) obtemos

$$3 = \frac{4}{4} + \frac{C}{4}$$

De onde obtemos que $C = 8$. Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2}.$$

Observe que a solução deste problema de valor inicial é válida no intervalo $(0, +\infty)$, que é o maior intervalo contendo $t = 2$ (pois a condição inicial é $y(2) = 3$) em que a solução e sua derivada estão definidas. Se a condição inicial ao invés de $y(2) = 3$ fosse $y(-2) = 3$ a solução teria a mesma expressão, mas o intervalo de validade da solução seria $(-\infty, 0)$.

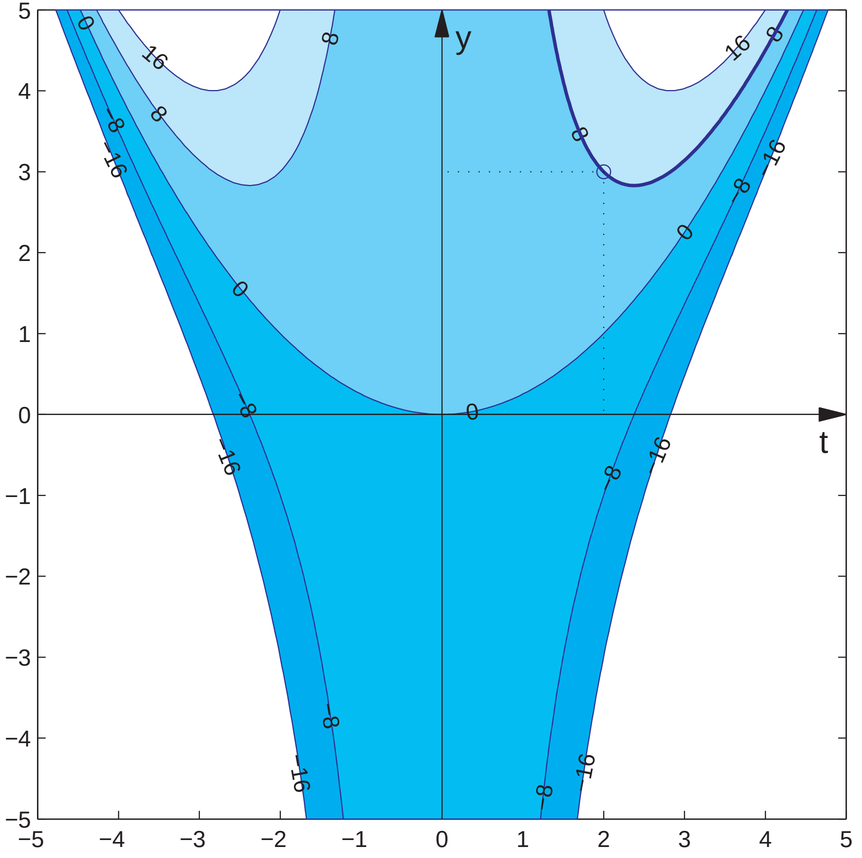


Figura 1.6: Soluções da equação do Exemplo 1.8 e a solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.9

1.2.3 Como chegar ao fator Integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$?

Vamos mostrar como podemos chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Comparando-se as equações (1.7) e (1.8) na página 16 vemos que o fator integrante $\mu(t)$ deve ser uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Esta é também uma equação linear, mas com $q(t) = 0$. Supondo-se $\mu(t) \neq 0$, vamos multiplicar esta equação por $1/\mu(t)$ obtendo a equação

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Como $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{d}{d\mu}\left(\ln|\mu(t)|\right)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\mu}\left(\ln|\mu(t)|\right)\frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Mas pela regra da cadeia esta equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\ln|\mu(t)|\right) = p(t)$$

que é uma equação do tipo (1.4) que pode ser resolvida simplesmente integrando-se ambos os membros obtendo

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + C_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\mu(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t)dt} = C e^{\int p(t)dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante podemos tomar $C = 1$ e obtermos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Exercícios (respostas na página 90)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' + (1-2x)y = xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' + 3t^2 y = e^{-t^3+t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' - \cos t\, y = te^{t^2+\operatorname{sen} t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' + x^4 y = x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2.2. Resolva as equações:

(a) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$.

(b) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$.

(c) $y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$.

2.3. (a) Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + 5x^4 y = x^4 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(b) Para quais valores de y_0 a solução é crescente e para quais valores de y_0 a solução é decrescente.

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.4. (a) Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (x^2-9)y' + xy = 0 \\ y(5) = y_0 \end{cases}$$

(b) Qual o intervalo de validade da solução?

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.5. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

(a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também o é.

(b) Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação, então $y(t) = cy_1(t)$ também o é, para qualquer constante c.

2.6. Considere as equações

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1.12}$$

Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação (1.11) e $y_2(t)$ é solução da equação (1.12), então $y(t) = cy_1(t) + y_2(t)$ é solução de (1.12), para qualquer constante c.

1.3 Equações Separáveis

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Identificar uma equação diferencial separável.
- Encontrar a solução geral de uma equação diferencial separável.
- Resolver um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial separável.

As **equações (diferenciais ordinárias) separáveis** são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.13}$$

Seja

$$h(y) = \int g(y)dy.$$

Então

$$\frac{dh}{dy} = g(y).$$

Substituindo-se $g(y)$ por $\frac{dh}{dy}$ na equação (1.13) obtemos

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.14}$$

Mas, pela regra da cadeia
$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx},$$
o que implica que (1.14) pode ser escrita como
$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = f(x) \tag{1.15}$$
A equação (1.15) é do tipo (1.4) na página 13, ou seja, é da forma
$$\frac{dY}{dx} = f(x)$$
em que $Y(x) = h(y(x))$. Assim, integrando-se (1.15) dos dois lados obtemos que a solução geral de (1.13) é dada **implicitamente** por
$$h(y(x))) = \int f(x)dx + C.$$

Também podemos obter a solução da maneira mostrada a seguir. Integrando-se em relação a x ambos os membros de (1.13) obtemos
$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)dx + C,$$
que pode ser reescrita como
$$\int g(y)y'\,dx = \int f(x)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y' dx = dy$ obtemos

$$\int g(y)\, dy = \int f(x) dx + C.$$

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação separável.

As curvas que são soluções de uma equação separável podem ser vistas como curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = h(y(x))) - \int f(x) dx.$$

Exemplo 1.10. Vamos, agora, encontrar a solução geral da equação diferencial

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x \quad \text{ou} \quad 2yy' = -4x$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int 2yy'\, dx = -\int 4x dx + C.$$

Fazendo a substituição $y' dx = dy$ obtemos

$$\int 2y\, dy = -\int 4x dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^2 = -2x^2 + C$$

As soluções são elipses (Figura 1.7) que são as curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = y^2 + 2x^2.$$

O gráfico da função $F(x, y) = y^2 + 2x^2$ é um parabolóide elíptico (Figura 1.8).

Exemplo 1.11. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(b) Determine o **intervalo de validade da solução**, ou seja, o maior intervalo contendo $x_0 = 1$ para o qual a solução $y(x)$ e sua derivada $\frac{dy}{dx}$ estão definidas.

(c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.

(d) Faça um esboço do gráfico da solução.

Solução:

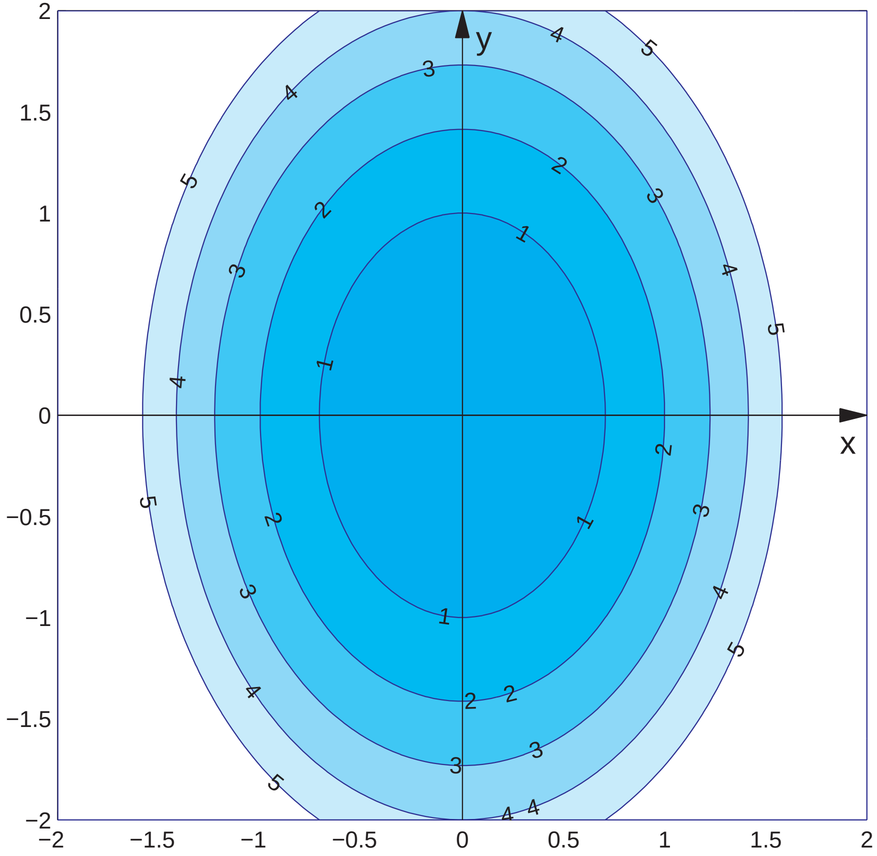


Figura 1.7: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.10

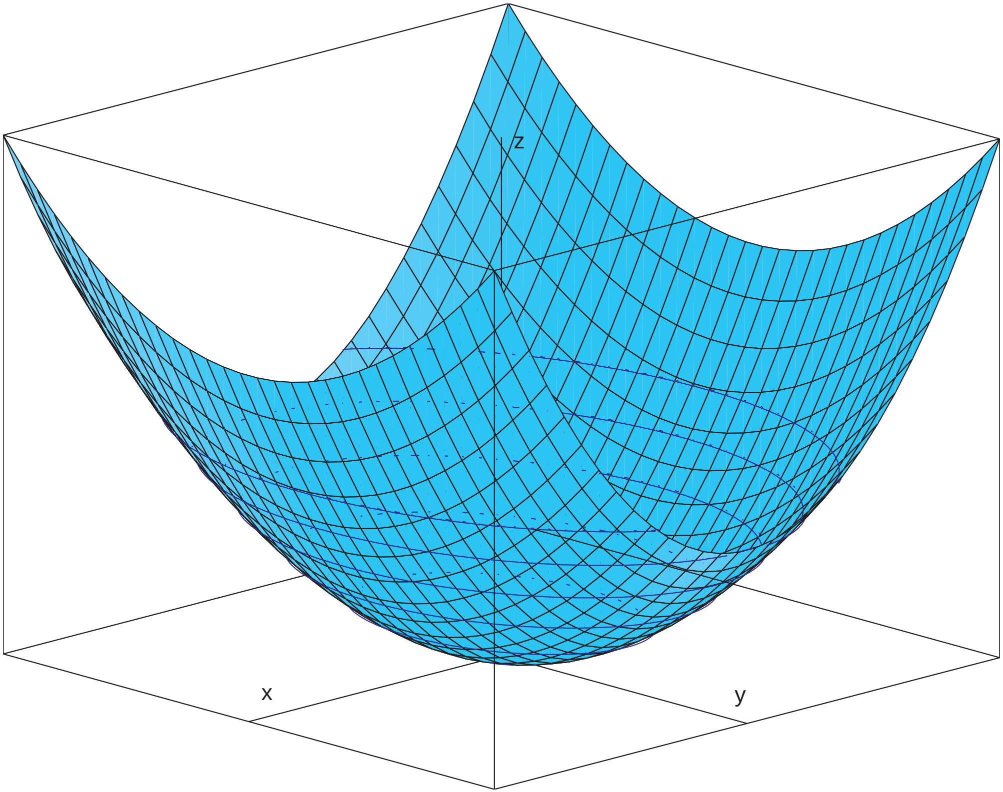


Figura 1.8: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.10 como curvas de nível do parabolóide elíptico $z = F(x, y) = 2x^2 + y^2$

(a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x - 1$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int (3y^2 - 3)y'\, dx = \int (2x - 1)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int (3y^2 - 3)\, dy = \int (2x - 1)dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y = x^2 - x + C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$ substituímos $x = 1$ e $y = 0$ na solução geral obtendo $C = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução do PVI vamos determinar o maior intervalo que contem $x = 1$ em que a solução e sua derivada estão definidas. Pela equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3}$, temos que os pontos onde a derivada não está definida são aqueles tais que $3y^2 - 3 = 0$, ou seja, $y = \pm 1$. Como o ponto inicial é $(1, 0)$, então a solução do PVI está contida na região do plano $-1 < y < 1$. Substituindo-se $y = -1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2 - x - 2 = 0$, que tem solução $x = -1$ e $x = 2$. Substituindo-se $y = 1$ na equação que define a solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ obtemos a equação $x^2 - x + 2 = 0$, que não tem solução real.

Como a solução está definida para todo x, mas a derivada não está definida para $x = -1$ e $x = 2$ e o ponto inicial $x_0 = 1$ está entre os valores $x = -1$ e $x = 2$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-1, 2)$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{3y^2 - 3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x - 1 = 0$, ou seja, somente para $x = 1/2$.

(d) Nos pontos $x = -1$ e $x = 2$ a reta tangente à curva solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ é vertical, ou seja, $\frac{dx}{dy} = 0$, pois pela equação diferencial,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2 - 3}{2x - 1},$$

para $x \neq 1/2$. Assim já sabemos pelo item (b) que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-1, -1)$ e $(2, -1)$ onde a tangente é vertical, e que passa pelo ponto inicial $(1, 0)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $-1/3$, pois substituindo-se $x = 1$ e $y = 0$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = -1/3$. Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para $x = 1/2$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = 1/2$ depois começa a decrescer.

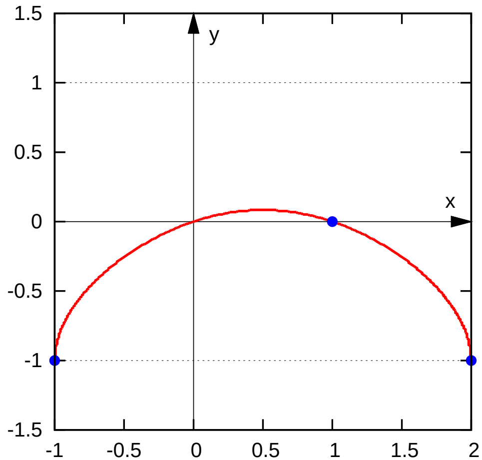


Figura 1.9: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.11

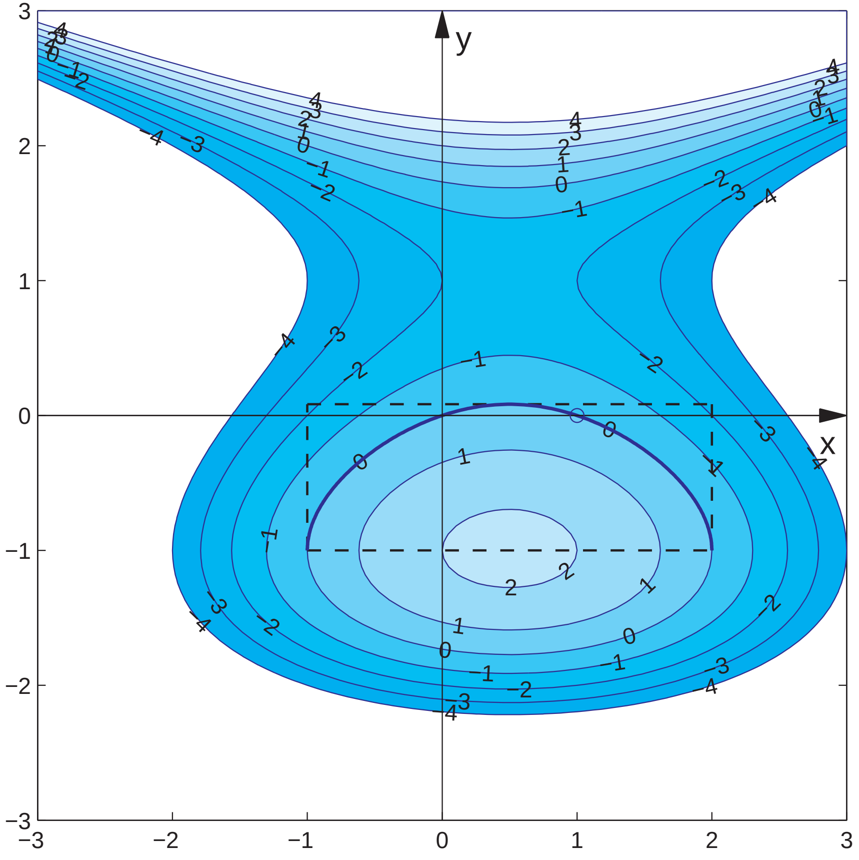


Figura 1.10: Soluções da equação diferencial e do problema de valor inicial do Exemplo 1.11

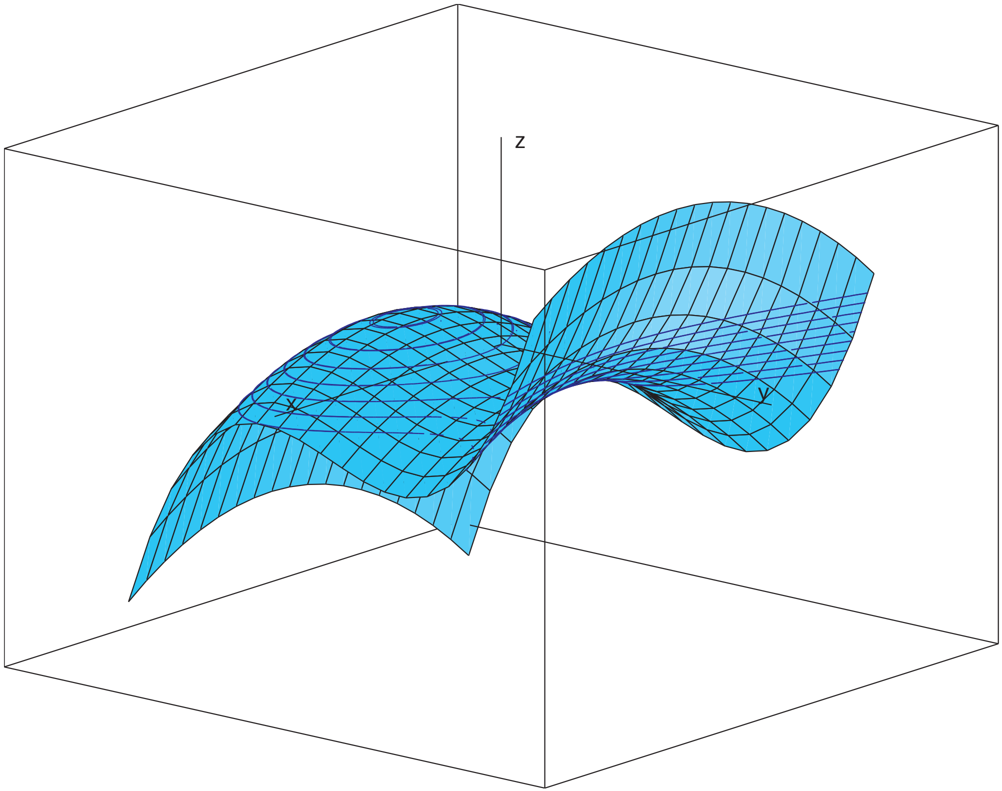


Figura 1.11: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.11 como curvas de nível de uma função de duas variáveis $z = f(x, y) = y^3 - 3y - x^2 + x$

Exercícios (respostas na página 96)

3.1. Resolva as equações:

(a) $(1+x^2)y' - xy = 0$.

(b) $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$.

(c) $(ayx^2 + by)y' - x = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(d) $(ax^2 + b)^{1/2}y' - xy^3 = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(e) $(ay^2 + b)^{1/2} - xyy' = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(f) $ay^2 + b - x^2yy' = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

3.2. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{3y^2-3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(b) Determine o intervalo de validade da solução.

(c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.

(d) Faça um esboço do gráfico da solução.

1.4 Aplicações

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Modelar várias aplicações que levam a equações diferenciais de 1ª ordem.
- Identificar o tipo da equação diferencial correspondente ao modelo obtido.
- Resolver um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial obtida no modelo.

1.4.1 Dinâmica Populacional

Crescimento Exponencial

O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(t)$. Podemos descrever o problema de encontrar $y(t)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0. \tag{1.16}$$

Para resolvê-la vamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -k dt} = e^{-kt}.$$

Multiplicando-se a equação (1.16) por $\mu(t) = e^{-kt}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = 0.$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-kt}y(t) = C \quad \text{ou} \quad y(t) = Ce^{kt}.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = y_0$, obtemos

$$y_0 = Ce^{k\,0} = C.$$

Ou seja a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Exemplo 1.12. Consideremos uma situação formada por uma população de organismos zooplanctônicos. São colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual (crescimento exponencial).

A população, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 3e^{kt}.$$

Como em 10 dias a população é de 240 indivíduos, então substituindo-se $t = 10$ e $y = 240$ obtemos

$$240 = 3e^{10k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 80}{10}.$$

Assim, a função que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = 3e^{\frac{\ln 80}{10}t} = 3 \cdot 80^{\frac{t}{10}}.$$

Crescimento Logístico

Para levar em conta que a população $y(t)$ tem um valor máximo sustentável y_M podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também à diferença entre y_M e a população presente. Neste caso a população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

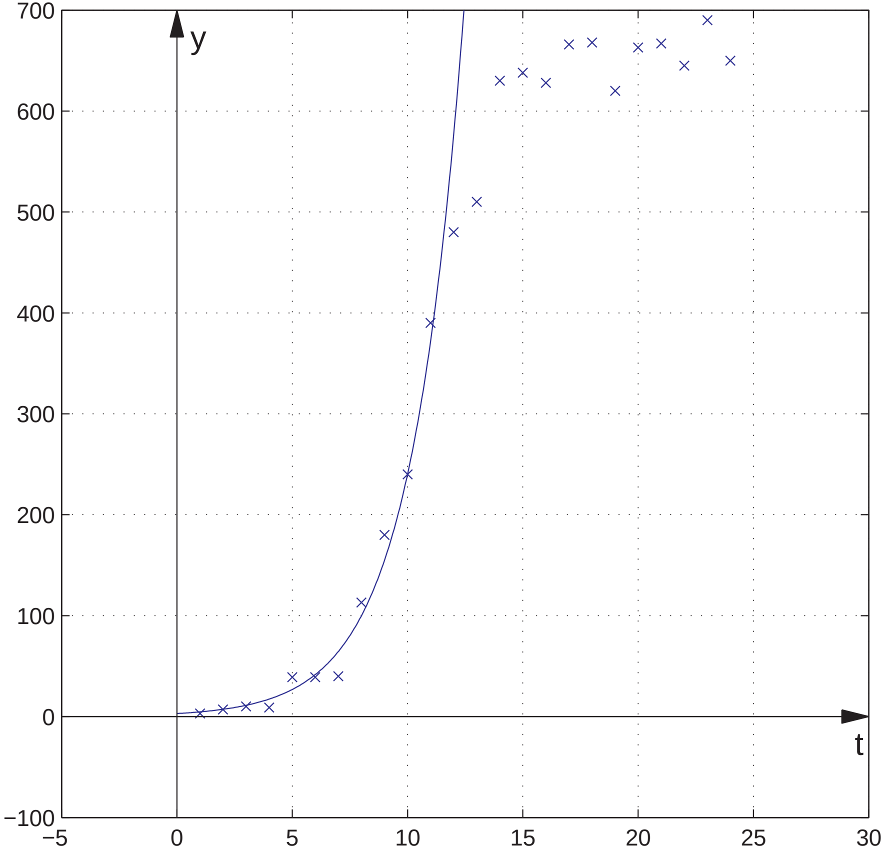


Figura 1.12: Solução do problema do Exemplo 1.12 e dados obtidos experimentalmente

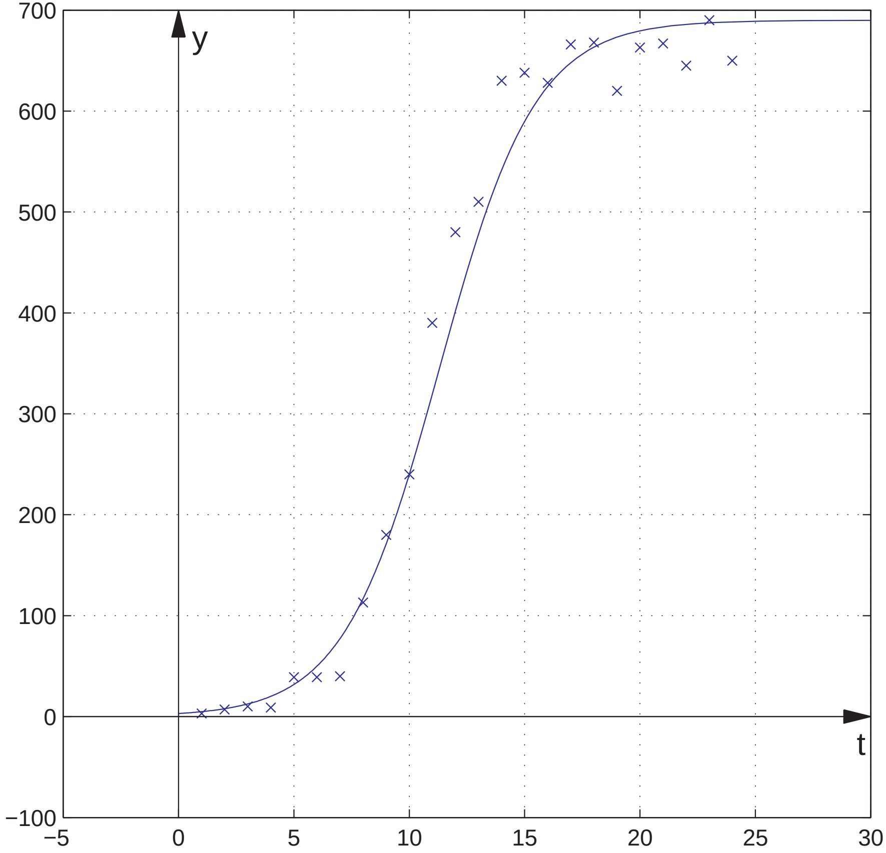


Figura 1.13: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.13 e dados obtidos experimentalmente

Dias	População	Dias	População
1	3	13	510
2	7	14	630
3	10	15	638
4	9	16	628
5	39	17	666
6	39	18	668
7	40	19	620
8	113	20	663
9	180	21	667
10	240	22	645
11	390	23	690
12	480	24	650

Tabela 1.1: Número de indivíduos por litro de uma população de cladóceros (Daphnia laevis) em experimento de laboratório (dados obtidos de [3])

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(y_M - y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(y_M - y)} y' = k \tag{1.17}$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} y' dt = \int k dt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \int k dt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{y(y_M - y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(y_M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y_M - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(y_M - y)$ obtemos

$$1 = A(y_M - y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = y_M$ obtemos $A = 1/y_M$ e $B = 1/y_M$. Assim,

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \frac{1}{y_M} \left(\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y_M - y} dy \right) = \frac{1}{y_M} \left(\ln |y| - \ln |y_M - y| \right)$$

Logo a solução da equação é dada implicitamente por

$$\ln|y| - \ln|y_M - y| = k y_M t + C_2.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{y}{y_M - y}\right| = C_2 + k y_M t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{y}{y_M - y} = \pm e^{C_2} e^{y_M k t} = C e^{y_M k t}$$

Substituindo-se $t = t_0$ e $y = y_0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{-y_M k t_0}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (y_M - y) C e^{y_M k t} \quad \Rightarrow \quad y + C e^{y_M k t} y = y_M C e^{y_M k t}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{C y_M e^{y_M k t}}{1 + C e^{y_M k t}} = \frac{\frac{y_0 y_M}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}}{1 + \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}} = \frac{y_0 y_M e^{y_M k (t - t_0)}}{y_M - y_0 + y_0 e^{y_M k (t - t_0)}}$$

Dividindo-se numerador e denominador por $e^{y_M k t}$ obtemos

$$y(t) = \frac{y_0 y_M}{y_0 + (y_M - y_0) e^{-y_M k (t - t_0)}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_M.$$

Exemplo 1.13. Consideremos a mesma situação do Exemplo 1.12, ou seja, são colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que essa população atinge o máximo de 690 indivíduos e que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional tanto a população atual quanto à diferença entre a população máxima e a população atual (crescimento logístico).

A população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(690 - y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(690-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(690-y)} y' = k \tag{1.18}$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{y(690-y)} y' dt = \int k dt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(690-y)} dy = \int k dt + C.$$

Vamos decompor $\frac{1}{y(690-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(690-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{690-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(690-y)$ obtemos

$$1 = A(690-y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = 690$ obtemos $A = 1/690$ e $B = 1/690$. Assim,

$$\int \frac{1}{y(690-y)} dy = \frac{1}{690} \left(\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{690-y} dy \right) = \frac{1}{690} \left(\ln|y| - \ln|690-y| \right)$$

Logo a equação (1.18) tem solução dada implicitamente por

$$\ln|y| - \ln|690-y| = k690t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{690-y} \right| = C_1 + k690t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{690-y} = \pm e^{C_1} e^{690kt} = Ce^{690kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 3$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{3}{690-3} = \frac{3}{687} = \frac{1}{229}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (690-y)Ce^{690kt} \quad \Rightarrow \quad y + Ce^{690kt}y = 690Ce^{690kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{690Ce^{690kt}}{1+Ce^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{1/C + e^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{229 + e^{690kt}} = \frac{690}{229e^{-690kt}+1}$$

Substituindo-se $t = 10$ e $y = 240$ obtemos

$$240 = \frac{690}{229e^{-6900k}+1} \quad \Rightarrow \quad 229e^{-6900k} = \frac{690}{240} - 1 = \frac{23}{8} - 1 = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad -690k = \frac{\ln\frac{15}{1832}}{10}$$

Logo a população de cladóceros em função do tempo é dada por

$$y(t) = \frac{690}{229e^{\frac{\ln\frac{15}{1832}}{10}t}+1} = \frac{690}{229\left(\frac{15}{1832}\right)^{\frac{t}{10}}+1}$$

1.4.2 Datação por Carbono 14

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo, $y(t)$, como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é a mesma do crescimento exponencial (trocando-se k por $-k$) e vimos na página 38 que este problema tem solução

$$y(t) = y_0 e^{-kt},$$

em que y_0 é a quantidade no instante $t = 0$.

Exemplo 1.14. Em um pedaço de madeira é encontrado $1/500$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.

O problema de valor inicial que descreve esta situação é

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que tem solução

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Substituindo-se $t = 5600$ e $y = y_0/2$ (meia-vida) obtemos

$$y_0/2 = y_0 e^{-k \cdot 5600} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{5600}$$

Agora substituindo-se $y = y_0/500$ obtemos

$$\frac{y_0}{500} = y_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 500}{k} = \frac{5600 \ln 500}{\ln 2} \approx 50200 \text{ anos}$$

1.4.3 Misturas

Vamos supor que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial de V_0 litros e Q_0 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de T_e litros por minuto possuindo uma concentração de C_e gramas de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de T_s litros por minuto.

A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

A taxa com que entra sal no tanque é igual a taxa com que entra a mistura, T_e, vezes a concentração de entrada, C_e. E a taxa com que sai sal do tanque é igual a taxa com que sai a mistura do tanque, T_s, vezes a concentração de sal que sai do tanque, C_s. Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$C_s(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

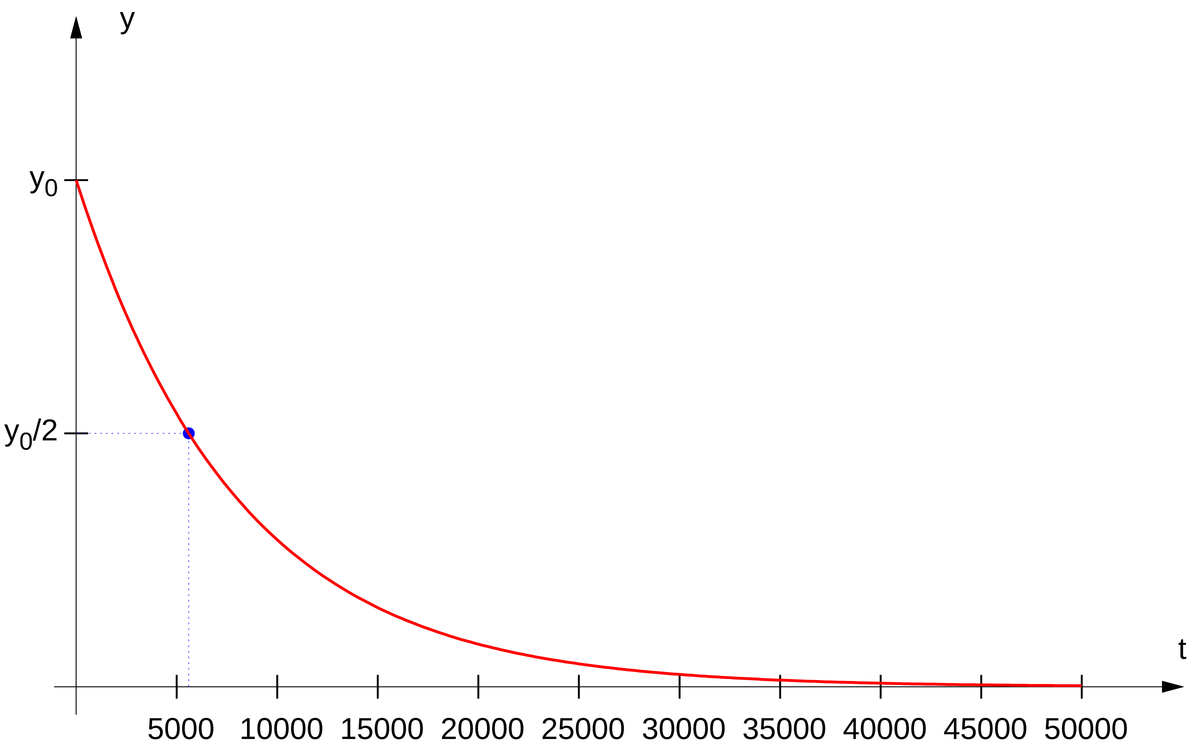


Figura 1.14: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.14

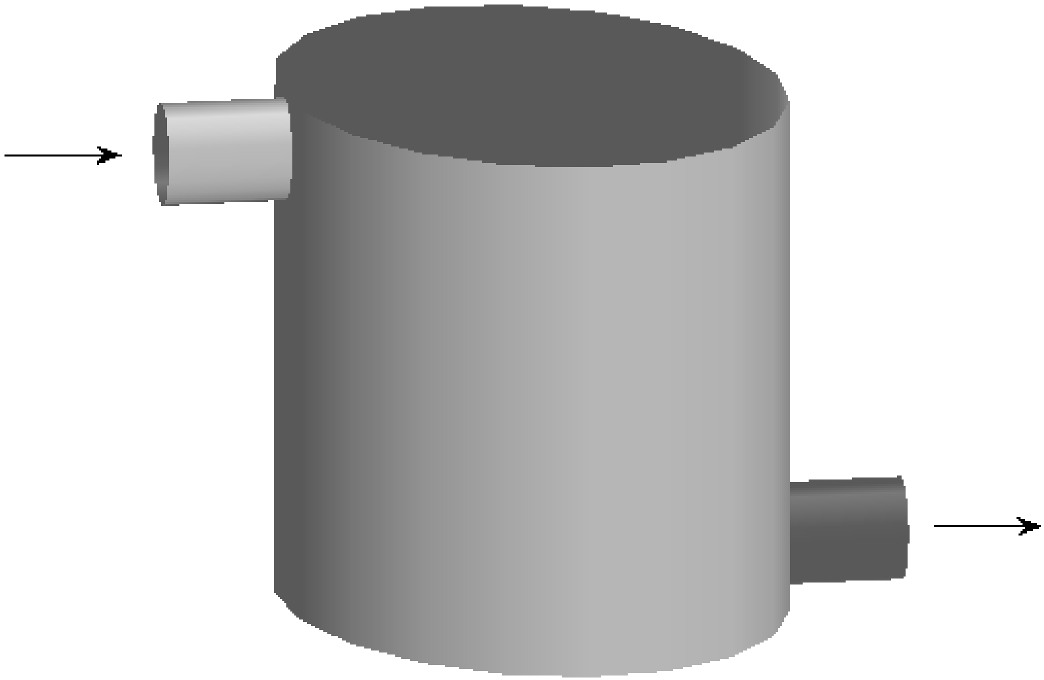


Figura 1.15: Tanque

Como o volume no tanque, $V(t)$, é igual ao volume inicial, V_0, somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(t) = V_0 + T_e t - T_s t = V_0 + (T_e - T_s)t.$$

Assim, a quantidade de sal no tanque, $Q(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = T_e C_e - T_s \dfrac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)t} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

Exemplo 1.15. Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Vamos determinar qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.

O problema pode ser modelado pelo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -4 \dfrac{Q}{100 + 2t} \\ Q(0) = 30 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser escrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 4\frac{Q}{100 + 2t} = 0$$

Um fator integrante é neste caso

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t} dt} = e^{2\ln(100+2t)} = e^{\ln((100+2t)^2)} = (100 + 2t)^2.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t}dt} = (100+2t)^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left((100+2t)^2 Q\right) = 0.$$

Integrando-se obtemos

$$(100+2t)^2 Q(t) = C$$

ou seja,

$$Q(t) = \frac{C}{(100+2t)^2}.$$

Substituindo $t = 0$ e $Q = 30$:

$$C = 30 \cdot 100^2 = 3 \cdot 10^5$$

Substituindo o valor de C encontrado:

$$Q(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}$$

A concentração é o quociente da quantidade de sal pelo volume que é igual a $V(t) = 100 + 2t$. Assim

$$c(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^3}$$

e após 50 minutos

$$c(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(200)^3} = \frac{3}{80} = 0,0375 \text{ gramas/litro}$$

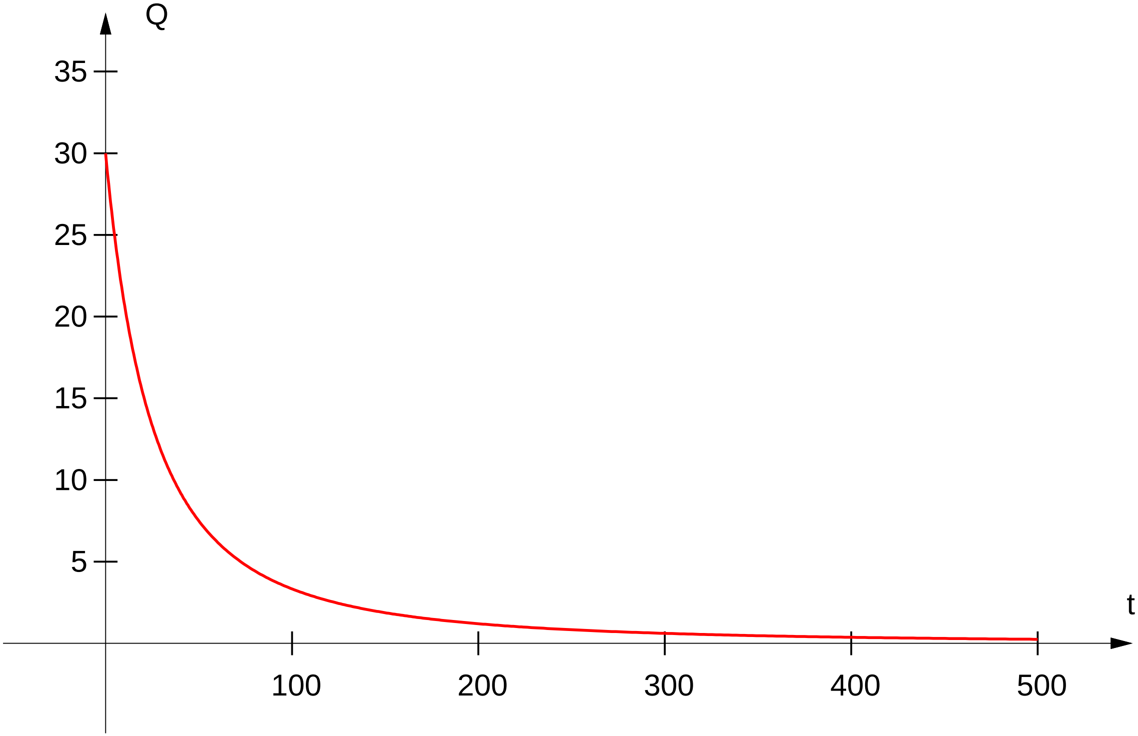


Figura 1.16: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.15

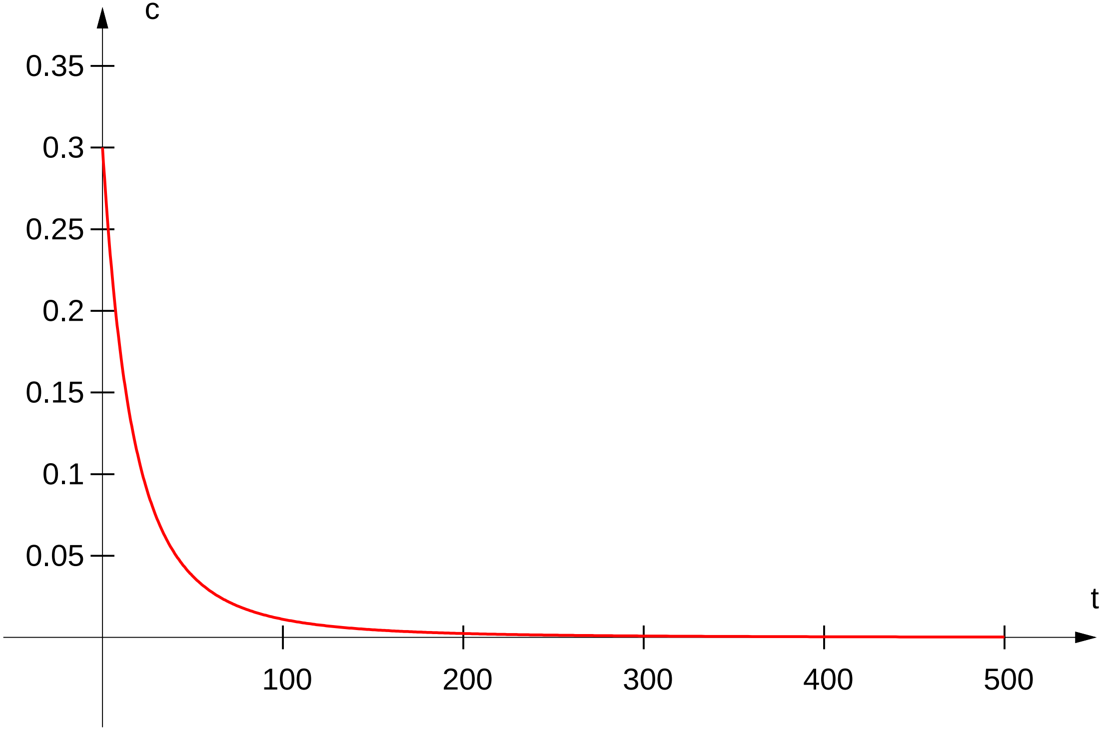


Figura 1.17: Concentração como função do tempo para o problema do Exemplo 1.15

1.4.4 Lei de Resfriamento de Newton

A **lei de resfriamento de Newton** diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Exemplo 1.16. O café está a $90°$ C logo depois de coado e, um minuto depois, passa para $85°$ C, em uma cozinha a $25°$ C. Vamos determinar a temperatura do café em função do tempo e o tempo que levará para o café chegar a $60°$ C.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 25) \\ T(0) = 90, \; T(1) = 85 \end{cases}$$

Dividindo-se a equação por $T - 25$:

$$\frac{1}{T-25}T' = k$$

Integrando-se em relação a t

$$\int \frac{1}{T-25}T'dt = \int kdt$$

$$\int \frac{1}{T-25}dT = \int kdt$$

$$\ln|T - 25| = kt + C_1$$
$$T(t) = 25 \pm e^{C_1}e^{kt} = 25 + Ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0$ e $T = 90$:

$$90 = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = 65$$
$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Substituindo-se $t = 1$ e $T = 85$:

$$85 = 25 + 65e^{k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln(60/65)$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 25 + 65e^{\ln(60/65)t}$$

Substituindo $T = 60$:

$$60 = 25 + 65e^{\ln(60/65)t}$$

Logo o tempo necessário para que o café atinja $60°$ é de

$$t = \frac{\ln(35/65)}{\ln(60/65)} \approx 8 \text{ min}$$

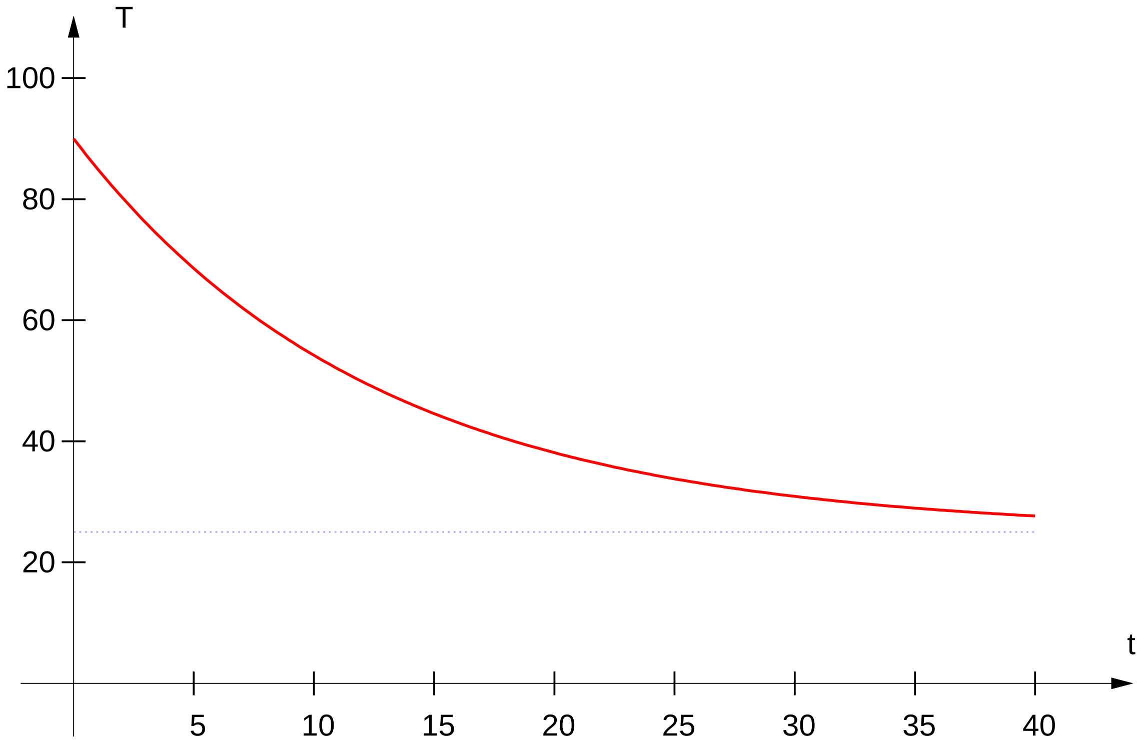


Figura 1.18: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.16

1.4.5 Lei de Torricelli

A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$. Ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Existe uma relação entre V e h, $V = V(h)$, que depende da forma do tanque. Como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt},$$

então a altura, $h(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\dfrac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Exemplo 1.17. Um tambor cilíndrico, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a água cair pela metade vamos determinar a altura h da água dentro do tambor em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.

Como para o cilindro

$$V(h) = \pi R^2 h = \pi h$$

então

$$\frac{dV}{dh} = \pi$$

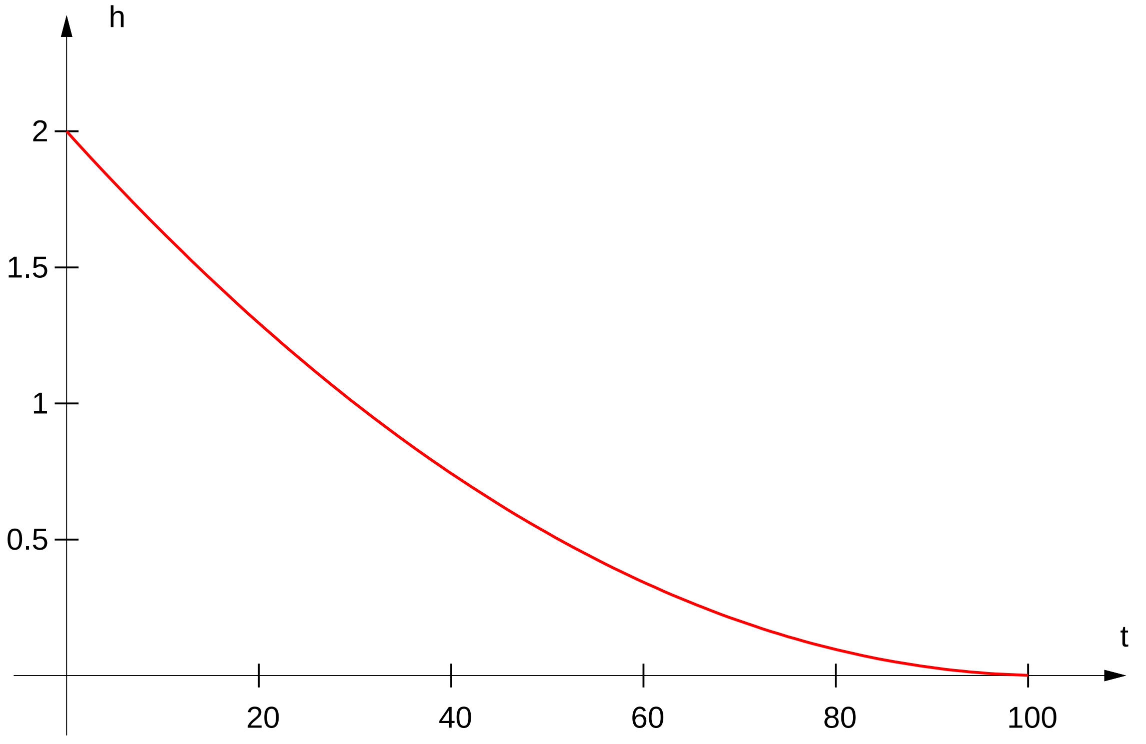


Figura 1.19: Solução do problema do Exemplo 1.17

e o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \\ h(0) = 2, \; h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação por $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{h}} h' = k.$$

Integrando-se ambos os membros em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} h' dt = \int k dt.$$

Fazendo-se a substituição $h'dt = dh$ obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int k dt.$$

$$2\sqrt{h} = kt + C$$

ou

$$h(t) = (\frac{C + kt}{2})^2$$

Substituindo $t = 0$ e $h = 2$:

$$2\sqrt{2} = C$$

Substituindo $t = 30$ e $h = 1$:

$$C + 30k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2 - C}{30} = \frac{1 - \sqrt{2}}{15}$$

Assim a função que descreve como a altura da coluna de água varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (\frac{C + kt}{2})^2 = (\sqrt{2} + \frac{1 - \sqrt{2}}{30} t)^2$$

Substituindo $h = 0$:

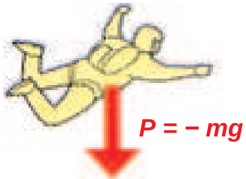
$$t = -\frac{C}{k} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 102 \,\text{min}$$

1.4.6 Resistência em Fluidos

Um corpo que se desloca em um meio fluido sofre uma força de resistência que é proporcional a velocidade do corpo. A velocidade, $v(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Para um corpo que cai a força F é igual ao peso do corpo. Para um barco que se desloca na água ou um carro em movimento a força F é igual a força do motor.



Exemplo 1.18. Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesa 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 metros por segundo. Vamos determinar a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre, quanto tempo demora para a velocidade chegar a $5{,}1$ metros por segundo e como varia a altura em função do tempo.

Vamos convencionar que o sentido positivo é para cima e que a origem está na superfície da terra. Até o momento em que o pára-quedas abre a velocidade é a solução do problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{dv}{dt} = P = -mg \\ v(0) = 0 \end{array}\right.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -10 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

o que leva a solução

$$v(t) = -10t.$$

Quando o pára-quedas abre a velocidade é então de

$$v(5) = -50\,\text{m/s}$$

Até este momento a altura do pára-quedista em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v(t) = -10t \\ h(0) = 1400 \end{cases}$$

cuja solução é

$$h(t) = 1400 - 5t^2$$

Assim até o momento que o pára-quedas abre o pára-quedista caiu

$$1400 - h(5) = 125\,\text{m}$$

Daí em diante a velocidade do pára-quedista é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

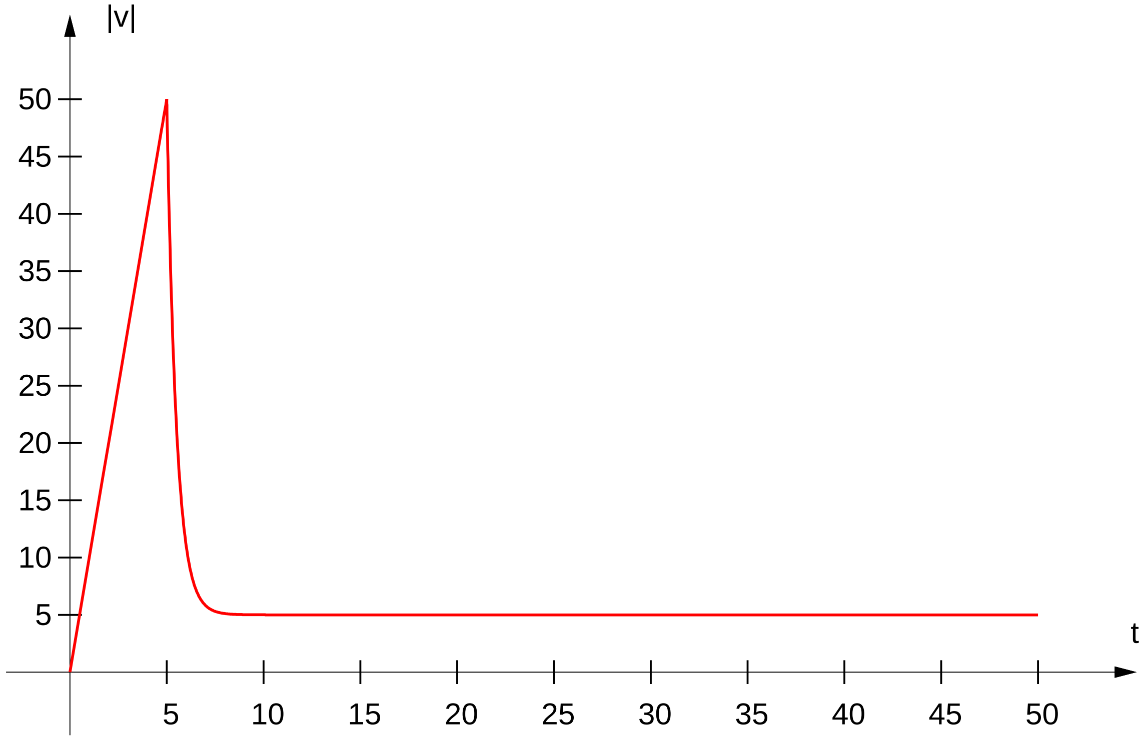


Figura 1.20: Módulo da velocidade do Exemplo 1.18

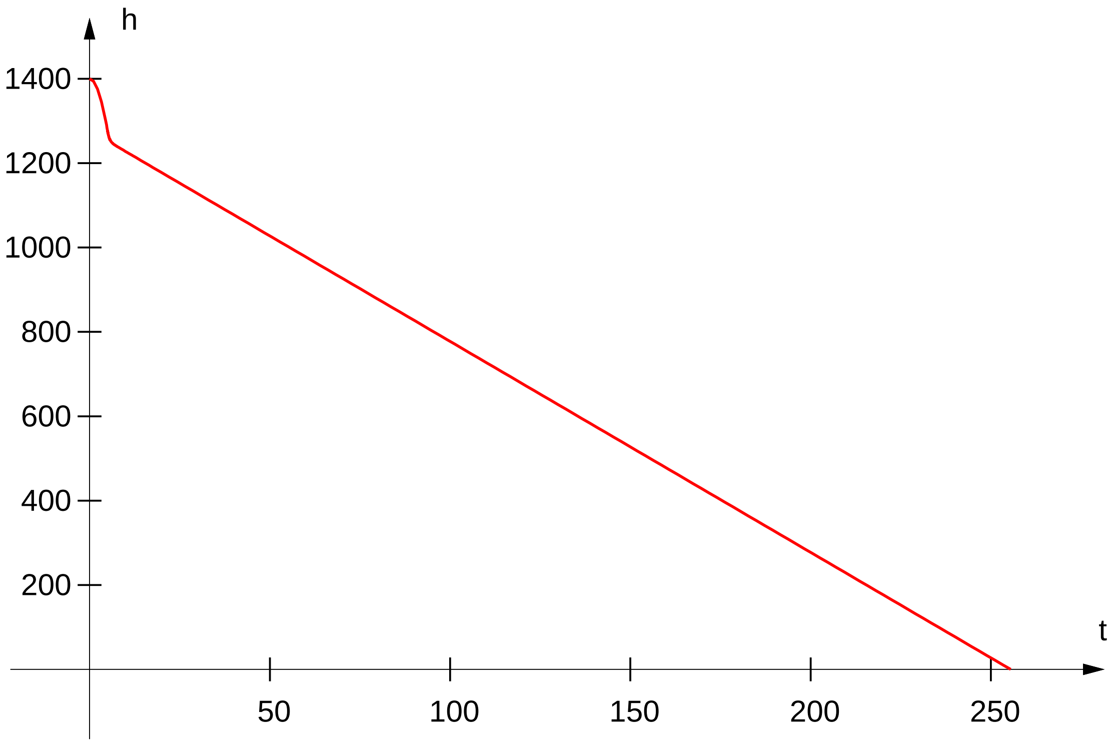


Figura 1.21: Altura do Exemplo 1.18

A força de resistência é igual a $-kv$, o sinal menos com uma constante positiva indica que a força de resistência é no sentido contrário ao da velocidade. Observe que a velocidade é negativa o que faz com que a força de resistência seja positiva, ou seja, para cima como convencionamos no início.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = -10 - \dfrac{k}{70}v = -10 - Kv, \quad K = k/70 \\ v(5) = -50 \end{array} \right.$$

A equação

$$\frac{dv}{dt} = -10 - Kv$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{10 + Kv} v' = -1$$

Integrando-se

$$\ln|10 + Kv| = -Kt + C_1$$

$$10 + Kv = \pm e^{C_1} e^{-Kt}$$

$$v(t) = -\frac{10}{K} + Ce^{-Kt}$$

A velocidade limite é de -5 m/s, logo

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{10}{K} = -5 \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

Substituindo-se $t = 5$ e $v = -50$ em $v(t) = -\frac{10}{K} + Ce^{-Kt}$:

$$-50 = -5 + Ce^{-5K} \quad \Rightarrow \quad C = -45e^{5K}$$

ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)}$$

Substituindo-se $v = -5{,}1$ (lembre-se que é negativo por que é para baixo!) obtemos

$$-5{,}1 = -5 - 45e^{-2(t-5)} \quad \Rightarrow \quad t - 5 = \frac{\ln 450}{2} \approx 3 \text{ segundos},$$

ou seja, 3 segundos depois do pára-quedas aberto a velocidade já é de $5{,}1$ m/s. Depois que o pára-quedas abre a altura em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)} \\ h(5) = 1400 - 125 = 1275 \end{cases}$$

a solução geral da equação é

$$h(t) = -5(t-5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)} + C$$

Substituindo-se $t = 5$ e $h = 1275$ obtemos $C = 2505/2$. Assim a solução deste problema de valor inicial é

$$h(t) = \frac{2505}{2} - 5(t-5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)}, \quad \text{para } t > 5$$

1.4.7 Reações Químicas

Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada m gramas de A, n gramas de B são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia α_0 gramas de A e β_0 gramas de B.

Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.19}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{m}{n}.$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{m}{m+n}y(t), \quad b(t) = \frac{n}{m+n}y(t). \tag{1.20}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = \alpha_0 - a(t), \quad \beta(t) = \beta_0 - b(t). \tag{1.21}$$

Substituindo-se (1.20) em (1.21) e (1.21) em (1.19) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(\alpha_0 - \frac{m}{m+n}y\right)\left(\beta_0 - \frac{n}{m+n}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(\alpha_0\frac{m+n}{m} - y\right)\left(\beta_0\frac{m+n}{n} - y\right).$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(\alpha' - y)(\beta' - y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{em que } k > 0,\ \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m} \text{ e } \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}.$$

(a) Se $\alpha' = \beta'$. Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades estequiométricas, ou seja, de forma que não haverá sobra de reagentes.

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(\alpha'-y)^2}$ obtemos

$$\frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' dt = \int k dt + C$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{\alpha' - y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{\alpha'}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$\alpha' - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \alpha' - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se o valor de C obtido:

$$y(t) = \alpha' - \frac{\alpha'}{\alpha' kt + 1}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \alpha' = \beta',$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (\alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (\beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t)) = 0.$$

(b) Se $\alpha' \neq \beta'$. Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades não estequiométricas e haverá sobra de um dos reagentes.

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}y'dt = \int kdt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}dy = \int kdt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)} = \frac{A}{\alpha'-y} + \frac{B}{\beta'-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(\alpha'-y)(\beta'-y)$ obtemos

$$1 = A(\beta'-y) + B(\alpha'-y)$$

Substituindo-se $y = \alpha'$ e $y = \beta'$ obtemos $A = 1/(\beta'-\alpha')$ e $B = 1/(\alpha'-\beta')$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}dy &= \frac{1}{\beta'-\alpha'}\left(\int \frac{1}{\alpha'-y}dy - \int \frac{1}{\beta'-y}dy\right) \\ &= -\frac{1}{\beta'-\alpha'}\left(\ln|\alpha'-y| - \ln|\beta'-y|\right) \end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|\alpha' - y| - \ln|\beta' - y| = -k(\beta' - \alpha')t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{\alpha' - y}{\beta' - y}\right| = C_1 - k(\beta' - \alpha')t.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{\alpha' - y}{\beta' - y} = \pm e^{C_1} e^{-(\beta'-\alpha')kt} = Ce^{-(\beta'-\alpha')kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$\alpha' - y = (\beta' - y)Ce^{-(\beta'-\alpha')kt} \quad \Rightarrow \quad y - Ce^{-(\beta'-\alpha')kt}y = \alpha' - \beta' Ce^{-(\beta'-\alpha')kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{\alpha' - \beta' Ce^{-(\beta'-\alpha')kt}}{1 - Ce^{-(\beta'-\alpha')kt}}$$

Substituindo-se o valor de C obtido:

$$y(t) = \beta'\alpha' \frac{1 - e^{-(\beta'-\alpha')kt}}{\beta' - \alpha' e^{-(\beta'-\alpha')kt}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{cases} \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m}, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (\alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \alpha_0 - \frac{m}{n}\beta_0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (\beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t)) = \begin{cases} \beta_0 - \frac{n}{m}\alpha_0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ 0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases}.$$

Exemplo 1.19. Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 2 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia 40 gramas de A e 50 gramas de B. Vamos determinar a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de C.

Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.22}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 2b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{2}{3} y(t), \quad b(t) = \frac{1}{3} y(t). \tag{1.23}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 40 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \tag{1.24}$$

Substituindo-se (1.27) em (1.28) e (1.28) em (1.26) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right)\left(50 - \frac{1}{3}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (60 - y)(150 - y).$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(60 - y)(150 - y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(60 - y)(150 - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(60 - y)(150 - y)} y' dt = \int k dt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(60 - y)(150 - y)} dy = \int k dt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(60-y)(150-y)} = \frac{A}{60-y} + \frac{B}{150-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(60-y)(150-y)$ obtemos

$$1 = A(150-y) + B(60-y)$$

Substituindo-se $y = 60$ e $y = 150$ obtemos $A = 1/90$ e $B = -1/90$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(60-y)(150-y)} dy &= \frac{1}{90}\left(\int \frac{1}{60-y} dy - \int \frac{1}{150-y} dy\right) \\ &= -\frac{1}{90}\left(\ln|60-y| - \ln|150-y|\right) \end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|60-y| - \ln|150-y| = -90kt + C_2.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{60-y}{150-y}\right| = C_2 - 90kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{60-y}{150-y} = \pm e^{C_2} e^{-90kt} = Ce^{-90kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{2}{5}.$$

Substituindo-se $C = \frac{2}{5}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$\frac{25}{28} = e^{-900k}$$

ou

$$90k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right).$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$60 - y = (150 - y)Ce^{-90kt} \quad \Rightarrow \quad y - Ce^{-90kt}y = 60 - 150Ce^{-90kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{60 - 150Ce^{-90kt}}{1 - Ce^{-90kt}}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = \frac{300(1 - e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right)t})}{5 - 2e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right)t}} = \frac{300(1 - \left(\frac{28}{25}\right)^{-t/10})}{5 - 2\left(\frac{28}{25}\right)^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 60 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (40 - \frac{2}{3} y(t)) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (50 - \frac{1}{3} y(t)) = 30 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de A será toda consumida na reação, entretanto sobrará ainda 30 gramas de B.

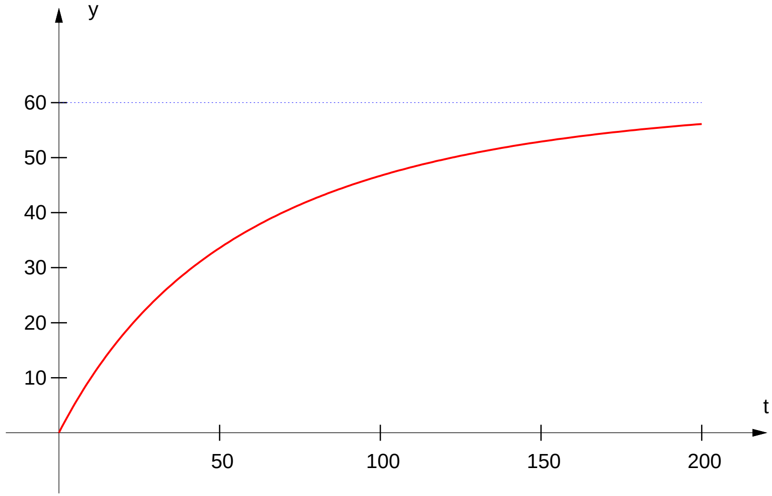


Figura 1.22: Função do Exemplo 1.19

Exemplo 1.20. Nas mesmas condições de exemplo anterior, um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 2 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Mas agora vamos supor que havia inicialmente 40 gramas de A e 20 gramas de B. Vamos determinar a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de C.

Temos então
$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right)\left(20 - \frac{1}{3}y\right),$$
ou ainda,
$$\frac{dy}{dt} \propto (60 - y)^2 .$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k\,(60 - y)^2 \\ y(0) = 0,\; y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(60-y)^2}$ obtemos
$$\frac{1}{(60 - y)^2}y' = k$$
Integrando-se em relação a t obtemos
$$\int \frac{1}{(60 - y)^2}y'dt = \int kdt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{60-y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{60}.$$

Substituindo-se $C = \frac{1}{60}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{500} - \frac{1}{600} = \frac{1}{3000}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$60 - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 60 - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = 60 - \frac{3000}{t + 50}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 60,$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (40 - \frac{2}{3}y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (20 - \frac{1}{3}y(t)) = 0.$$

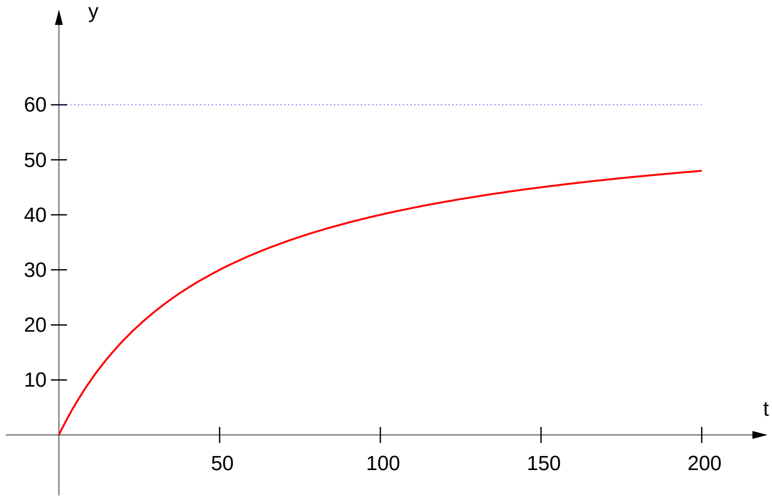


Figura 1.23: Função do Exemplo 1.20

Exercícios (respostas na página 101)

4.1. Um tanque contém 100 litros de uma solução a uma concentração de 1 grama por litro. Uma solução com uma concentração de $2te^{-\frac{1}{100}t}$ gramas por litro entra no tanque a uma taxa constante de 1 litro por minuto, enquanto que a solução bem misturada sai à mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule a concentração de sal no tanque $t = 10$ minutos após o início do processo.

4.2. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água pura. Então, água salgada, contendo $30\,e^{-\frac{2}{10}t}$ gramas de sal por litro, passa a ser bombeada para o tanque a uma taxa de 10 litros por minuto. Simultaneamente a solução passa a ser agitada e retirada do tanque na mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule em que instante a concentração de sal no tanque será de $7{,}5$ gramas por litro.

4.3. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água e 100 gramas de sal. Então uma mistura de água e sal na concentração de 5 gramas de sal por litro é bombeada para o tanque a uma taxa de 4 litros por minuto. Simultaneamente a solução (bem misturada) é retirada do tanque na mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule a concentração limite de sal no tanque quando $t \to \infty$ e o tempo necessário para que a concentração atinja metade deste valor.

4.4. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto possuindo uma concentração de 1 grama de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque está enchendo, se a sua capacidade é de 200 litros?

4.5. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que água pura seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 1 litro por minuto. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque se aproxima de ficar vazio?

4.6. Dentro da Terra a força da gravidade é proporcional à distância ao centro. Um buraco é cavado de polo a polo e uma pedra é largada na borda do buraco.

(a) Determine a velocidade da pedra em função da distância.

(b) Com que velocidade a pedra atinge o centro da Terra? Com que velocidade atinge o outro polo?

(Sugestão: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ e $v = \frac{dx}{dt}$)

4.7. A taxa com que uma gota esférica se evapora ($\frac{dV}{dt}$) é proporcional a sua área. Determine o raio da gota em função do tempo, supondo que no instante $t = 0$ o seu raio é r_0 e que em uma hora o seu raio seja a metade.

4.8. Num processo químico, uma substância se transforma em outra, a uma taxa proporcional à quantidade de substância não transformada. Se esta quantidade é 48 ao fim de 1 hora, e 27, ao fim de 3 horas, qual a quantidade inicial da substância?

4.9. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias no instante t. Após três horas, observou-se a existência de 400 bactérias. Após 9 horas, 2500 bactérias. Qual era o número inicial de bactérias?

4.10. Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente. Sabendo-se que após uma hora a população é 2 vezes a população inicial, determinar a população como função do tempo e o tempo necessário para que a população triplique. Faça um esboço do gráfico da população em função do tempo.

4.11. Suponha que em uma comunidade de 100 pessoas inicialmente apenas uma pessoa seja portador de um vírus e que a taxa com que o vírus se espalha na comunidade seja proporcional tanto ao número de pessoas infectadas como também ao número de pessoas não infectadas. Se for observado que após 4 semanas 5 pessoas estão infectadas. Determine o número de pessoas infectadas em função do tempo. Faça um esboço do gráfico da solução.

4.12. Um tambor cônico com vértice para baixo, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a altura da coluna de água cair pela metade determinar a altura h em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia. A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$.

4.13. Um termômetro é levado de uma sala onde a temperatura é de $20°$ C para fora onde a temperatura é de $5°$ C. Após $1/2$ minuto o termômetro marca $15°$ C.

(a) Determine a temperatura marcada no termômetro como função do tempo.

(b) Qual será a leitura do termômetro após 1 minuto?

(c) Em quanto tempo o termômetro irá marcar $10°$ C?

4.14. Um bote motorizado e seu tripulante têm uma massa de 120 kg e estava inicialmente no repouso. O motor exerce uma força constante de 10 N, na direção do movimento. A resistência exercida pela água, ao movimento, é, em módulo, igual ao dobro da velocidade.

(a) Determine a velocidade do bote em função do tempo.

(b) Determine a velocidade limite do bote.

(c) Faça um esboço do gráfico da velocidade em função do tempo.

4.15. Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 4 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia 32 gramas de A e 50 gramas de B.

(a) Determine a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 30 gramas de C. Qual a quantidade limite de C após um longo período. Quanto restará de A e B após um longo período.

(b) Repita o item anterior se estão presentes inicialmente 32 gramas de A e 8 gramas de B.

1.5 Respostas dos Exercícios

1. Introdução às Equações Diferenciais (página 12)

1.1. (a) Equação diferencial ordinária de 1a. ordem não linear.

(b) Equação diferencial ordinária de 2a. ordem linear.

1.2. $(x+3)y_1'' + (x+2)y_1' - y_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)y_2'' + (x+2)y_2' - y_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)y_3'' + (x+2)y_3' - y_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $y_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

1.3. (a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar + b)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar + b = 0$$

(b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ na equação diferencial obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.4. (a)

$$0 = y' + ty^2 = \frac{-2tr}{(t^2-3)^2} + \frac{tr^2}{(t^2-3)^2} = \frac{(-2r+r^2)t}{(t-3)^2} \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2$$

(b)

$$0 = y' - 2ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{2tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-2r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1$$

(c)

$$0 = y' - 6ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{6tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-6r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad 3r^2 + r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1/3$$

(d)

$$0 = y' - ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+2)^2} - \frac{tr^2}{(t^2+2)^2} = \frac{(-2r - r^2)t}{(t^2+2)^2}, \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + 2r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -2$$

2. Equações Lineares de 1ª Ordem (página 23)

2.1. (a)

$$\mu(x) = e^{\int (1-2x)dx} = e^{x-x^2}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x-x^2}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x-x^2} y\right) = e^{x-x^2} x e^{-x} = x e^{-x^2}$$

$$e^{x-x^2} y(x) = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} + C e^{x^2 - x}$$

$$2 = y(0) = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 5/2$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$$

(b)

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2 dt} = e^{t^3}$$

Multiplicando a equação por $\mu(t) = e^{t^3}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^3}y\right) = e^{t^3}e^{-t^3+t} = e^t$$

$$e^{t^3}y(t) = \int e^t\,dt = e^t + C$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + Ce^{-t^3}$$

$$2 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$$

(c)

$$\mu(t) = e^{\int -\cos t\,dt} = e^{-\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\operatorname{sen} t}y\right) = e^{-\operatorname{sen} t}te^{t^2+\operatorname{sen} t} = te^{t^2}$$

$$e^{-\operatorname{sen} t}y(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2+\operatorname{sen} t} + Ce^{\operatorname{sen} t}$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 3/2$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2+\operatorname{sen} t} + \frac{3}{2}e^{\operatorname{sen} t}$$

(d)

$$\mu(x) = e^{\int x^4\,dx} = e^{\frac{x^5}{5}}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{\frac{x^5}{5}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^5}{5}}y\right) = e^{\frac{x^5}{5}}x^4e^{\frac{4x^5}{5}} = x^4e^{x^5}$$

$$e^{\frac{x^5}{5}}y(x) = \int x^4e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}e^{x^5}$$

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{4x^5}{5}} + Ce^{-\frac{x^5}{5}}$$

$$1 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = 4/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{4x^5}{5}} + \frac{4}{5}e^{-\frac{x^5}{5}}$$

2.2. (a)

$$y' - \frac{4}{x}y = -\frac{2}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = -\frac{2}{x^7}$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int -\frac{2}{x^7}dx = \frac{1}{3x^6} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

(b)

$$y' - \frac{1}{x}y = -x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-1}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-1}y\right) = -1$$

Integrando-se

$$x^{-1}y(x) = -\int dx = -x + C$$

$$y(x) = -x^2 + Cx$$

(c)

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = xe^x$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$y(x) = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

2.3. (a)

$$\mu(x) = e^{\int 5x^4\,dx} = e^{x^5}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x^5}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^5}y\right) = e^{x^5}x^4 = x^4e^{x^5}$$

$$e^{x^5}y(x) = \int x^4 e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5}e^{x^5} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + Ce^{-x^5}$$

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = y_0 - 1/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right) e^{-x^5}$$

(b) $y'(x) = -5x^4 \left(y_0 - \frac{1}{5}\right) e^{-x^5}$. Para $y_0 > 1/5$ a solução é decrescente e para $y_0 < 1/5$ a solução é crescente.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1/5$ e claramente independe do valor de y_0.

2.4. (a)

$$y' + \frac{x}{x^2-9}y = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-9}\, dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = \sqrt{x^2-9}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-9}\, y\right) = 0$$

$$\sqrt{x^2-9}\,y(x) = C$$

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$y_0 = y(5) = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4y_0$$

$$y(x) = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2-9}}$$

(b) $x > 3$, para $y_0 \neq 0$ e $-\infty < x < \infty$, para $y_0 = 0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e claramente independe do valor de y_0.

2.5. (a) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(y_1(t)+y_2(t)) + p(t)(y_1(t)+y_2(t)) = \left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = 0 + 0 = 0$

(b) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(cy_1(t)) + p(t)(cy_1(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) = c0 = 0$

2.6. $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(cy_1(t)+y_2(t)) + p(t)(cy_1(t)+y_2(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = c0 + q(t) = q(t)$

3. Equações Separáveis (página 37)

3.1. (a)

$$(1+x^2)y' - xy = 0$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$$

$$\ln\left(\frac{|y|}{(1+x^2)^{1/2}}\right) = C_1$$

$$\frac{y}{(1+x^2)^{1/2}} = \pm e^{C_1} = C$$

$$y = C(1+x^2)^{1/2}$$

(b)

$$y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$$

$$\frac{y}{y^2-1}y' = \frac{1}{2+x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \ln|2+x| + C_1$$

$$\ln\left(\frac{|y^2-1|^{1/2}}{|2+x|}\right) = C_1$$

$$\frac{|y^2-1|^{1/2}}{2+x} = \pm e^{C_1} = C$$

$$\sqrt{y^2-1} = C(2+x)$$

(c)

$$yy' = \frac{x}{ax^2+b}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C_1$$

$$y^2 - \frac{1}{a}\ln|ax^2+b| = C$$

(d)

$$y^{-3}y' = \frac{x}{(ax^2+b)^{1/2}}$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{a}(ax^2+b)^{1/2} + C$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} - \frac{1}{a}(ax^2+b)^{1/2} = C$$

(e)

$$\frac{y}{\sqrt{ay^2+b}}y' - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b} = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b} - \ln|x| = C$$

(f)

$$\frac{y}{ay^2+b}y' - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2a}\ln|ay^2+b| = -x^{-1}+C$$

$$\frac{1}{2a}\ln|ay^2+b| + x^{-1} = C$$

3.2. (a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2-3)y' = 2x+1$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3-3y-x^2-x = C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(0)=0$ substituímos $x=0$ e $y=0$ na solução geral obtendo $C=0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3-3y-x^2-x = 0$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução vamos determinar os pontos onde a derivada não está definida, ou seja, $3y^2-3=0$, ou seja, $y=\pm 1$. Substituindo-se $y=-1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2+x-2=0$, que tem solução $x=-2$ e $x=1$. Substituindo-se $y=1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2+x+2=0$, que não tem solução real.

Como o ponto inicial tem $x=0$ que está entre os valores $x=-2$ e $x=1$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-2,1)$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

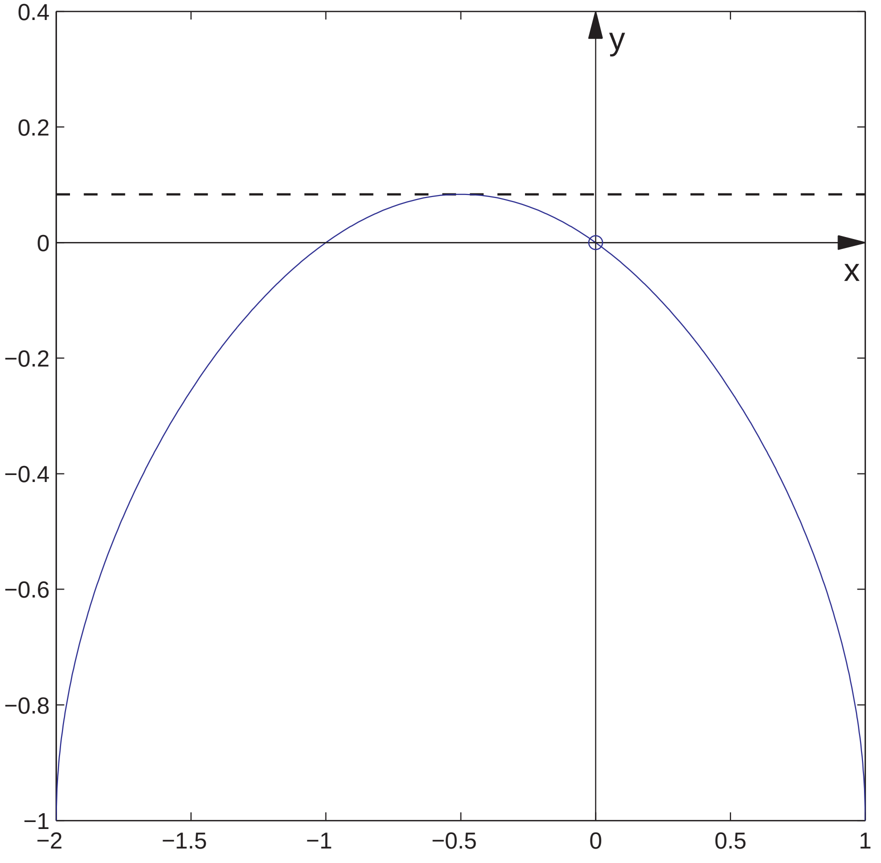
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x + 1 = 0$, ou seja, somente para $x = -1/2$.

(d) A reta tangente à curva integral é vertical ($\frac{dx}{dy} = 0$) para $x = -2$ e $x = 1$, pois pela equação diferencial, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3}$, então

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2-3}{2x+1}$$

para $x \neq -1/2$. Assim já sabemos que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-2, -1)$ e $(1, -1)$ onde a tangente é vertical, pelo ponto inicial $(0, 0)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $-1/3$, pois substituindo-se $x = 0$ e $y = 0$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = -1/3$. Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para $x = -1/2$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = -1/2$ depois começa a decrescer.



4. Aplicações (página 83)

4.1. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \dfrac{Q}{100}. \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 2te^{-\frac{1}{100}t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{1}{100}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{100}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{100}t}Q) = 2t$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{100}t}Q(t) = t^2 + C$$

ou

$$Q(t) = t^2e^{-\frac{1}{100}t} + Ce^{-\frac{1}{100}t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 100$, obtemos

$$100 = C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = t^2e^{-\frac{1}{100}t} + 100e^{-\frac{1}{100}t}.$$

(b) A concentração em $t = 10$ min é dada por

$$c(10) = \frac{Q(10)}{100} = (\frac{10^2}{100} + 1)e^{-\frac{1}{100}10} = 2e^{-\frac{1}{10}} \text{ gramas/litro}$$

4.2. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 300e^{-\frac{2}{10}t} - 10\frac{Q}{100}. \\ Q(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10} = 300e^{-\frac{2}{10}t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{10}dt} = e^{\frac{1}{10}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{10}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{10}t}Q) = 300e^{\frac{1}{10}t}e^{-\frac{2}{10}t} = 300e^{-\frac{1}{10}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{10}t}Q(t) = -3000e^{-\frac{1}{10}t} + C$$

ou

$$Q(t) = -3000e^{-\frac{2}{10}t} + Ce^{-\frac{1}{10}t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 0$, obtemos

$$0 = -3000 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 3000(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t}).$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100} = 30(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t})$$

Se $x = e^{-\frac{1}{10}t}$. Então $c(t) = 7{,}5$ se, e somente se, $x - x^2 = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$ ou $x = 1/2$ ou $\frac{1}{10}t = \ln 2$ ou $t = 10\ln 2$ min.

4.3. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 20 - \dfrac{Q}{25}. \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{25} = 20.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{25}dt} = e^{\frac{1}{25}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{25}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{25}t}Q) = 20e^{\frac{1}{25}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{25}t}Q(t) = 500e^{\frac{1}{25}t} + C$$

ou

$$Q(t) = 500 + Ce^{-\frac{1}{25}t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 100$, obtemos

$$100 = 500 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t}.$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Q(t)}{100} = 5 \text{ gramas por litro}$$

$c(t) = \frac{5}{2}$ se, e somente se, $Q(t) = 250 = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t}$ ou

$$e^{-\frac{1}{25}t} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8}$$

ou

$$-\frac{1}{25}t = \ln\frac{5}{8}$$

ou

$$t = 20 \ln \frac{8}{5} \quad \text{min.}$$

4.4. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 3 - 2\dfrac{Q}{100+t}. \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 2\frac{Q}{100+t} = 3.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{100+t} dt} = e^{2 \ln |100+t|} = (100+t)^2$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = (100+t)^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}((100+t)^2 Q) = 3(100+t)^2$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$(100+t)^2 Q(t) = (100+t)^3 + C$$

ou

$$Q(t) = 100 + t + C(100+t)^{-2}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 10$, obtemos

$$10 = 100 + C10^{-4} \quad \Rightarrow \quad C = -9\ 10^5$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 100 + t - 9\ 10^5(100+t)^{-2} \quad \text{gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100+t} = 1 - 9\ 10^5(100+t)^{-3}$$

O tanque estará cheio para $t = 100$.

$$\lim_{t\to 100} c(t) = 1 - \frac{9}{80} = \frac{71}{80} \quad \text{gramas/litro}$$

4.5. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -2\dfrac{Q}{100-t}. \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável e pode ser reescrita como

$$\frac{1}{Q}Q' = -\frac{2}{100-t}.$$

Integrando-se obtemos

$$\ln|Q(t)| = 2\ln|100-t| + C_1$$

ou

$$Q(t) = C(100 - t)^2$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 10$, obtemos

$$10 = C10^4 \quad \Rightarrow \quad C = 10^{-3}$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3}(100 - t)^2 \quad \text{gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100 - t} = 10^{-3}(100 - t)$$

O tanque estará vazio para $t = 100$.

$$\lim_{t \to 100} c(t) = 0 \quad \text{grama/litro.}$$

4.6. (a)

$$m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -kx$$

$$mv^2/2 = -kx^2/2 + C$$

$$mv^2/2 + kx^2/2 = C$$

Substituindo-se $x = R$, $v = 0$:

$$kR^2/2 = C$$

$$mv^2/2 = kR^2/2 - kx^2/2$$

$$v(x) = \frac{2}{m}\sqrt{kR^2/2 - kx^2/2}$$

(b) Substituindo-se $x = 0$:

$$v(0) = \frac{2}{m}\sqrt{kR^2/2}$$

Substituindo-se $x = -R$:

$$v(-R) = 0.$$

4.7.

$$\frac{dV}{dt} = kA = k4\pi r^2$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{dr}{dt} = k$$

$$r(t) = kt + C$$

Substituindo $t = 0$ e $r = r_0$:

$$r_0 = C$$

Substituindo $t = 1$ e $r = r_0/2$:

$$r_0/2 = k + r_0$$

$$k = -r_0/2$$

$$r(t) = r_0(1 - t/2)$$

4.8.

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$48 = y(1) = y_0 e^{k}$$

$$27 = y(3) = y_0 e^{3k}$$

$$\frac{48}{27} = e^{-2k}$$

$$k = -\frac{1}{2}\ln\frac{48}{27} = -\frac{1}{2}\ln\frac{16}{9} = \ln\frac{3}{4}$$

$$y_0 = 48e^{-k} = 48\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = 48\frac{4}{3} = 64$$

4.9.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$400 = y_0 e^{3k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(400/y_0)}{3}$$

$$2500 = y_0 e^{9k} \quad \Rightarrow \quad 2500 = y_0 \left(\frac{400}{y_0}\right)^3$$

$$y_0^{-2} = \frac{2500}{400^3}$$

$$y_0 = \left(\frac{400^3}{2500}\right)^{1/2} = \frac{20^3}{50} = 160$$

4.10. A população cresce a uma taxa proporcional a população presente o que significa que a população, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Como em uma hora a população é o dobro da população original, então substituindo-se $t = 1$ e $y = 2y_0$ obtemos

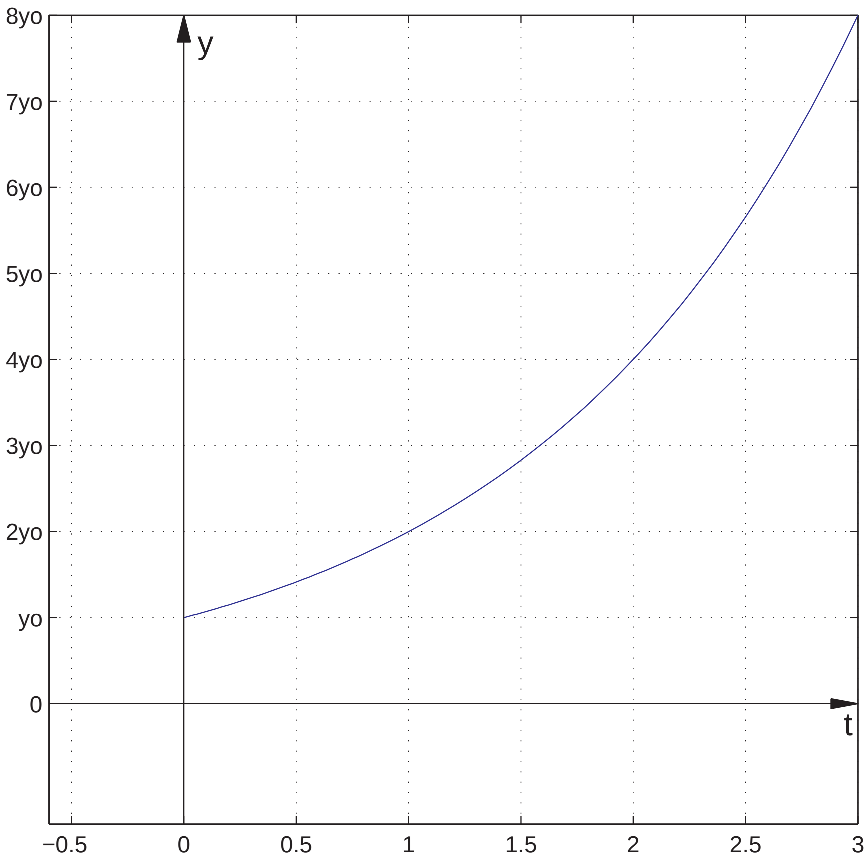
$$2y_0 = y_0 e^k \quad \Rightarrow \quad k = \ln 2$$

Assim, a equação que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = y_0 e^{(\ln 2)t}$$

Agora para sabermos em quanto tempo a população triplica substituímos $y = 3y_0$ e determinamos t que é

$$t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585 \text{ horas} \approx 1 \text{ hora e } 35 \text{ minutos.}$$



4.11. O número de pessoas infectadas como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(100-y). \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(100-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(100-y)}y' = k \tag{1.25}$$

Vamos decompor $\frac{1}{y(100-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(100-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{100-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(100-y)$ obtemos

$$1 = A(100-y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = 100$ obtemos $A = 1/100$ e $B = 1/100$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(100-y)}dy &= \frac{1}{100}\left(\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{100-y}dy\right) \\ &= \frac{1}{100}\left(\ln|y| - \ln|100-y|\right) \end{aligned}$$

Logo a equação (1.25) tem solução

$$\ln|y| - \ln|100-y| = k100t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{100-y} \right| = C_1 + k100t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{100-y} = \pm e^{C_1} e^{100kt} = Ce^{100kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 1$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{100-1} = \frac{1}{99}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (100-y)Ce^{100kt} \quad \Rightarrow \quad y + Ce^{100kt}y = 100Ce^{100kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

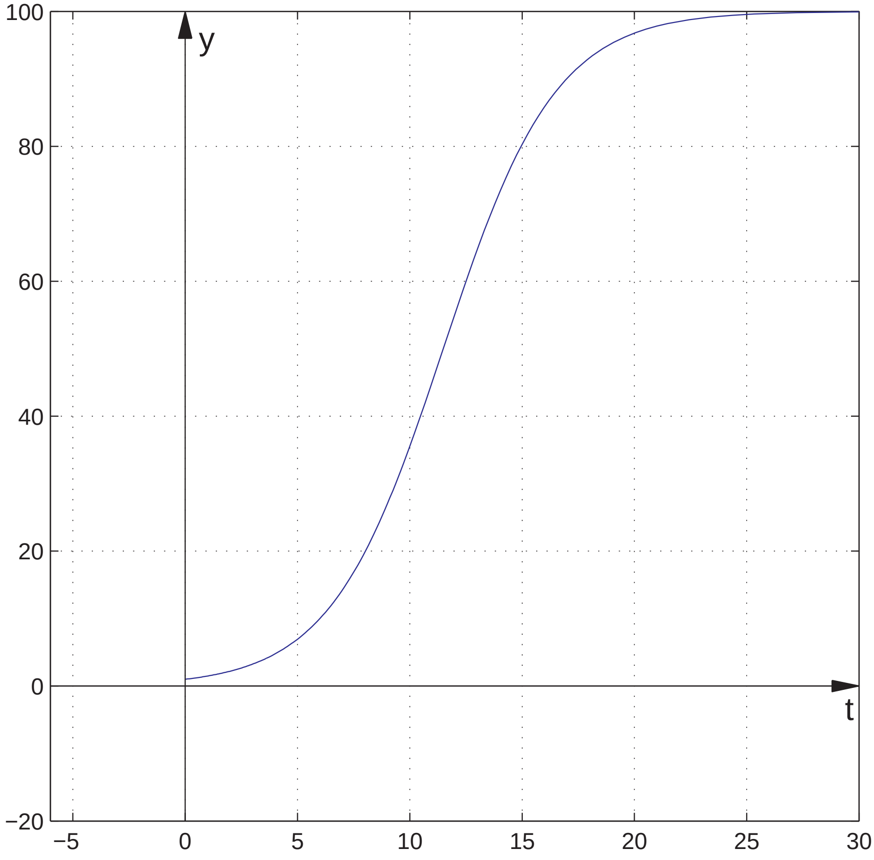
$$y(t) = \frac{C100e^{100kt}}{1+Ce^{100kt}} = \frac{\frac{100}{99}e^{100kt}}{1+\frac{1}{99}e^{100kt}} = \frac{100e^{100kt}}{99+e^{100kt}} = \frac{100}{99e^{-100kt}+1}$$

Substituindo-se $t = 4$ e $y = 5$ obtemos

$$5 = \frac{100}{99e^{-400k}+1} \quad \Rightarrow \quad e^{-400k} = \frac{19}{99} \quad \Rightarrow \quad -100k = \frac{\ln\frac{19}{99}}{4}$$

Logo

$$y(t) = \frac{100}{99e^{\frac{\ln\frac{19}{99}}{4}t}+1}$$



100
80
60
40
20
0
−20
y
t
−5
0
5
10
15
20
25
30

4.12.

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\dfrac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Como para o cone

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{hR}{H}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 h^2$$

então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = kh^{-3/2} \\ h(0) = 2, \ h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação por $h^{3/2}$

$$h^{3/2}h' = k$$

Integrando-se ambos os lados

$$\frac{2}{5}h^{5/2} = kt + C$$

ou

$$h(t) = (\frac{C' + k't}{2})^{2/5}$$

Substituindo $t = 0$ e $h = 2$:

$$2^{5/2} = C'$$

Substituindo $t = 30$ e $h = 1$:

$$C' + 30k' = 1 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{1 - C'}{30} = \frac{1 - 2^{5/2}}{30}$$

Assim a função que descreve como a altura varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (C' + k't)^2 = (2^{5/2} + \frac{1 - 2^{5/2}}{30}t)^2$$

Substituindo $h = 0$:

$$t = -\frac{C'}{k'} = -\frac{30 \cdot 2^{5/2}}{1 - 2^{5/2}} \approx 36\,\text{min}$$

4.13. (a) A temperatura registrada no termômetro, $T(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 5). \\ T(0) = 20 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

$$\frac{1}{T - 5}T' = k$$

$$\ln|T - 5| = kt$$

$$\ln|T-5| = C_1 + kt$$
$$T(t) = 5 + Ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0$ e $T = 20$:

$$20 = 5 + C \quad \Rightarrow \quad C = 15$$

$$T(t) = 5 + 15e^{kt}$$

Substituindo $t = 1/2$ e $T = 15$:

$$15 = 5 + 15e^{k/2} \quad \Rightarrow \quad k = 2\ln(2/3)$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$$

(b) Após 1 minuto o termômetro deve marcar

$$T(1) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)} = 5 + 15\frac{2}{3}^2 = \frac{105}{9} \approx 11,7^\circ \text{ C}$$

(c) Substituindo $T = 10$ em $T(t) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$:

$$10 = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$$

Logo o tempo necessário para que o termômetro marque 10° é de

$$t = \frac{\ln(1/3)}{2\ln(2/3)} \approx 1 \text{ min e } 20 \text{ segundos}$$

4.14. (a)

$$120\frac{dv}{dt} = 10 - 2v$$

$$\frac{120}{10-2v}v' = 1$$

$$60\ln|10-2v| = -t + C_1$$

$$\ln|10-2v| = \frac{C_1 - t}{60}$$

$$v(t) = 5 - Ce^{-\frac{t}{60}}$$

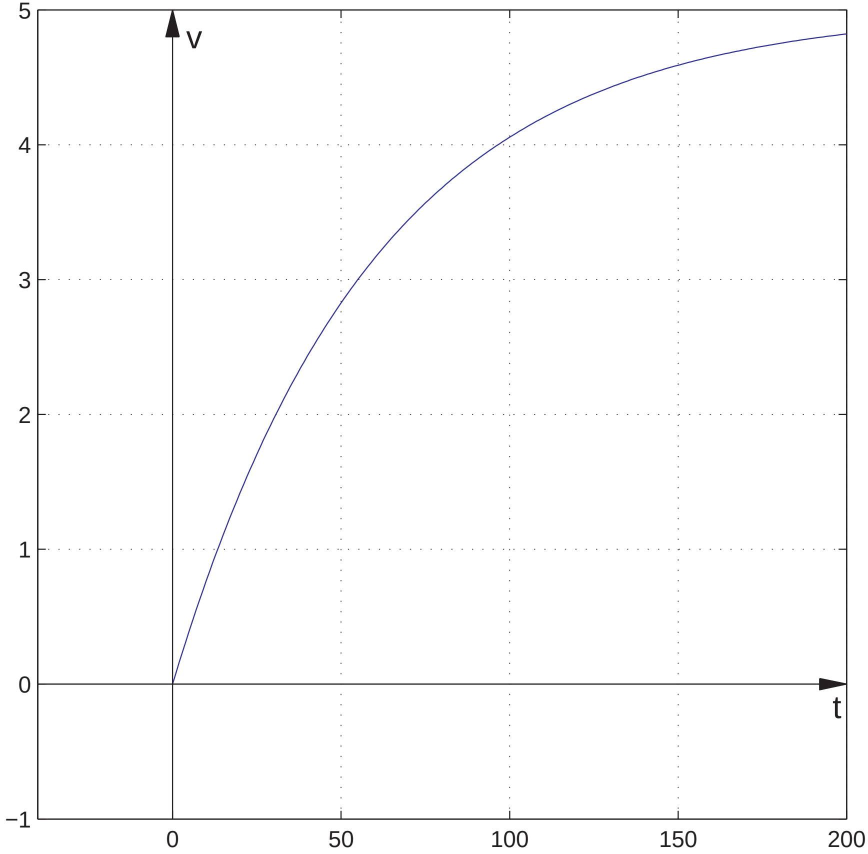
Substituindo-se $t = 0$ e $v = 0$:

$$0 = 5 - C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$v(t) = 5 - 5e^{-\frac{t}{60}}$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-\frac{t}{60}}) = 5 \text{ m/s}$$



4.15. (a) Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.26}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 4b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{4}{5}y(t), \quad b(t) = \frac{1}{5}y(t). \tag{1.27}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 32 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \tag{1.28}$$

Substituindo-se (1.27) em (1.28) e (1.28) em (1.26) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(32 - \frac{4}{5}y\right)\left(50 - \frac{1}{5}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)(250 - y).$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(40 - y)(250 - y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 30 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(40-y)(250-y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)(250-y)} y' dt = \int k dt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)(250-y)} dy = \int k dt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(40-y)(250-y)} = \frac{A}{40-y} + \frac{B}{250-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(40-y)(250-y)$ obtemos

$$1 = A(250-y) + B(40-y)$$

Substituindo-se $y = 40$ e $y = 250$ obtemos $A = 1/210$ e $B = -1/210$. Assim,
$\int \frac{1}{(40-y)(250-y)} dy = \frac{1}{210} \left(\int \frac{1}{40-y} dy - \int \frac{1}{250-y} dy \right) = -\frac{1}{210} \left(\ln|40-y| - \ln|250-y| \right)$
Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|40-y| - \ln|250-y| = -210kt + C_2.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{40-y}{250-y}\right| = C_2 - 210kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{40-y}{250-y} = \pm e^{C_2}e^{-210kt} = Ce^{-210kt}$$

Substituindo-se $t=0$ e $y=0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{4}{25}.$$

Substituindo-se $t=10$ e $y=30$ na equação acima obtemos

$$\frac{25}{88} = e^{-2100k}$$

ou

$$210k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right).$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$40 - y = (250-y)Ce^{-210kt}$

$\Rightarrow \quad y - Ce^{-210kt}y = 40 - 250Ce^{-210kt}$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{40 - 250Ce^{-210kt}}{1 - Ce^{-210kt}}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = \frac{1000(1 - e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right)t})}{25 - 4e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right)t}} = \frac{1000(1 - \left(\frac{88}{25}\right)^{-t/10})}{25 - 4\left(\frac{88}{25}\right)^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 40 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (32 - \frac{4}{5}y(t)) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (50 - \frac{1}{5}y(t)) = 42 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de A será toda consumida na reação, entretanto sobrará ainda 42 gramas de B.

(b) Temos então

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(32 - \frac{4}{5}y\right)\left(8 - \frac{1}{5}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)^2 .$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k\,(40 - y)^2 \\ y(0) = 0,\ y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(40-y)^2}$ obtemos

$$\frac{1}{(40-y)^2}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)^2}y'dt = \int kdt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)^2}dy = \int kdt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{40-y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{40}.$$

Substituindo-se $C = \frac{1}{40}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{300} - \frac{1}{400} = \frac{1}{1200}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$40 - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 40 - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = 40 - \frac{1200}{t + 30}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 40,$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (32 - \frac{4}{5} y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (8 - \frac{1}{5} y(t)) = 0.$$

Aula 2

Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

2.1 Equações Homogêneas

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Identificar uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea.
- Saber se duas funções são soluções fundamentais de uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea.
- Dada uma solução de uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea encontrar uma

segunda solução de forma que com a primeira sejam soluções fundamentais da equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea.

- Dadas duas soluções fundamentais, encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea.

- Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes.

- Resolver um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea.

Uma **equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea** é uma equação da forma

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0. \tag{2.1}$$

Para as equações lineares homogêneas é válido o **princípio da superposição** que diz que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação (2.1), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.2}$$

também o é, para todas as constantes c_1 e c_2. Uma expressão da forma (2.2) é chamada **combinação linear** de $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Vamos verificar que realmente $y(t)$ dado por (2.2) é solução de (2.1).

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y &= \frac{d^2}{dt^2}(c_1y_1 + c_2y_2) + p(t)\frac{d}{dt}(c_1y_1 + c_2y_2) + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + c_1p(t)\frac{dy_1}{dt} + c_2p(t)\frac{dy_2}{dt} + c_1q(t)y_1 + c_2q(t)y_2 \\
&= c_1\left(\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\frac{dy_1}{dt} + q(t)y_1\right) + c_2\left(\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(t)\frac{dy_2}{dt} + q(t)y_2\right) \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (2.1). Mostramos o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Princípio da Superposição). *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (2.1), então*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

para c_1 e c_2 constantes, também o é.

2.1.1 Soluções Fundamentais

Considere, agora, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{2.3}$$

em que y_0 e y_0' são condições iniciais dadas no problema.

Vamos determinar condições sobre duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ seja solução do problema de valor inicial (2.3).

Substituindo-se $t = t_0$ na solução

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

e na derivada de $y(t)$,

$$y'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t)$$

obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) & + & c_2y_2(t_0) & = & y_0 \\ c_1y_1'(t_0) & + & c_2y_2'(t_0) & = & y_0' \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema A é invertível, então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o sistema tem uma única solução (c_1, c_2) (A solução é $X = A^{-1}B$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero

Ou seja, se

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ é solução do problema de valor inicial (2.3).

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação (2.1) tais que, em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Definição 2.1. (a) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **Wronskiano** das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.

(b) Se duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de (2.1) são tais que o seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto t_0 dizemos que elas são **soluções fundamentais** de (2.1).

(c) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.1), então a família de soluções

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{2.4}$$

para constantes c_1 e c_2 é chamada **solução geral** de (2.1).

Assim para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem (2.1) precisamos encontrar duas soluções fundamentais da equação (2.1), ou seja, duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ tais que em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Exemplo 2.1. Seja b um número real não nulo. Vamos mostrar que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

Como $y_1'(t) = -b \operatorname{sen} bt$, $y_1''(t) = -b^2 \cos bt$, $y_2'(t) = b \cos bt$ e $y_2''(t) = -b^2 \operatorname{sen} bt$, então

$$y_1'' + b^2 y_1 = -b^2 \cos bt + b^2 \cos bt = 0$$

e

$$y_2'' + b^2 y_2 = -b^2 \operatorname{sen} bt + b^2 \operatorname{sen} bt = 0.$$

Assim, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação $y'' + b^2 y = 0$. Além disso,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -b \operatorname{sen} bt & b \cos bt \end{bmatrix} = b(\cos^2 bt + \operatorname{sen}^2 bt) = b \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2 y = 0$.

Dependência Linear

Dizemos que duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são **linearmente dependentes (L.D.)** em um intervalo I, se uma das funções é um múltiplo escalar da outra, ou seja, se

$$y_1(t) = \alpha y_2(t) \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \alpha y_1(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Caso contrário, dizemos que elas são **linearmente independentes (L.I.)**.

Se duas funções são L.D. em um intervalo I, então

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } t \in I$$

pois uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \textit{para algum } t_0 \in I,$$

então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (L.I.) em I. Assim soluções fundamentais de (2.1) são L.I.

Observe que o Wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.

Exemplo 2.2. Seja b um número real não nulo. Mostramos no exemplo anterior que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções L.I. da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

A recíproca do Teorema 2.3 não é verdadeira, ou seja, mesmo que

$$W[y_1, y_2](t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

não significa que as funções sejam linearmente dependentes. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.3. Sejam $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} = 0.$$

Apesar do Wronskiano ser zero para todo $t \in \mathbb{R}$ as funções y_1 e y_2 são L.I., pois uma função não é múltiplo escalar da outra. Para $t \geq 0$, $y_2(t) = y_1(t)$ e para $t < 0$, $y_2(t) = -y_1(t)$.

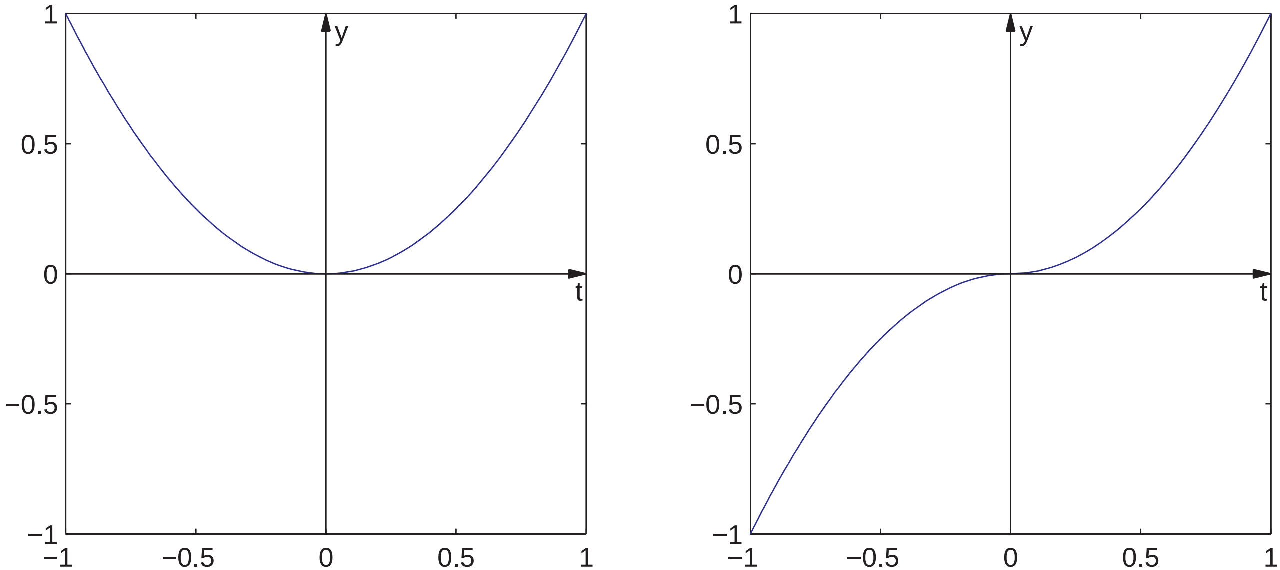


Figura 2.1: $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t|$ são L.I. mas o wronskiano é igual a zero para todo t

2.1.2 Fórmula de Euler

Queremos definir a função exponencial $y(t) = e^{rt}$ para números complexos $r = a + ib$ de forma que satisfaça as propriedades

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = re^{rt} \tag{2.6}$$

Sendo assim, a função $z(t) = e^{ibt}$ é solução da equação $y'' + b^2y = 0$. Pois pela propriedade (2.6)

$$z'(t) = ibe^{ibt}, \quad z''(t) = -b^2e^{ibt} = -b^2z(t)$$

e assim

$$z''(t) + b^2z(t) = 0.$$

Assim $z(t) = e^{ibt}$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + b^2y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = ib \end{cases}$$

Agora, como mostramos no Exemplo 2.1 que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2y = 0$, então pelo Teorema 2.2 existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$z(t) = e^{ibt} = c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt. \tag{2.7}$$

Vamos determinar estas constantes c_1 e c_2. Substituindo-se $t = 0$ na equação (2.7) obtemos que $c_1 = 1$. Derivando a equação (2.7) em relação a t obtemos

$$ibe^{ibt} = -c_1 b \operatorname{sen} bt + c_2 b \cos bt. \tag{2.8}$$

Substituindo-se $t = 0$ na equação (2.8) obtemos que $c_2 = i$. Assim substituindo-se $c_1 = 1$ e $c_2 = i$ já obtidos na equação (2.7) obtemos

$$e^{ibt} = \cos bt + i \operatorname{sen} bt.$$

Portanto, pela propriedade (2.5),

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt). \tag{2.9}$$

Tomando $t = 1$ temos

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Esta equação é conhecida como **fórmula de Euler**.

Exemplo 2.4. Usando a fórmula de Euler temos que

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

2.1.3 Obtendo uma Segunda Solução

Considere uma equação linear de 2a. ordem homogênea

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0. \tag{2.10}$$

Seja $y_1(t)$ uma solução conhecida da equação acima num intervalo I tal que $y_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t).$$

Como

$$y'(t) = vy_1' + y_1v' \quad \text{e} \quad y''(t) = vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v'',$$

então $y(t)$ é solução da equação se, e somente se,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = y_1v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) + v(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) = 0.$$

Como $y_1(t)$ é solução da equação (2.10), então $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$ e assim a equação anterior se torna

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) = 0. \tag{2.11}$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação (2.11) pode ser escrita como

$$y_1w' + (2y_1' + p(t)y_1)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável que pode ser escrita como

$$\frac{w'}{w} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p(t)$$

Integrando-se obtemos

$$\ln|w| = -2\ln|y_1| - \int p(t)dt + C$$

que usando propriedade do logaritmo pode ser reescrita como

$$\ln\left|wy_1^2\right| = -\int p(t)dt + C.$$

Explicitando $w(t)$ obtemos

$$w(t) = C_1\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}$$

Como $w(t) = v'(t)$, resolvendo a equação para $v(t)$:

$$v(t) = C_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt + C_2.$$

Substituindo-se $v(t)$ em $y(t) = v(t)y_1(t)$ obtemos

$$y(t) = v(t)y_1(t) = C_1 y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt + C_2 y_1(t)$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos uma segunda solução da equação (2.10)

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt \tag{2.12}$$

Vamos ver que $y_1(t)$ dada e $y_2(t)$ obtida por (2.12) são soluções fundamentais da equação (2.10).

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt \\ y_1'(t) & y_1'(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt + \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)} \end{bmatrix} \\ &= e^{-\int p(t)dt} \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim se $y_1(t)$ é uma solução conhecida da equação (2.10) e $y_2(t)$ é dada por (2.12) então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é solução geral da equação (2.10).

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida para $y_2(t)$. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para encontrar uma segunda solução da equação linear homogênea de 2ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 2.5. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0 \text{ e } a \neq 0.$$

Deixamos como exercício verificar que $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ é uma solução da equação acima. Vamos procurar uma segunda solução da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{rt}, \text{em que } r = \frac{-b}{2a}.$$

Como

$$y'(t) = v'(t)e^{rt} + rv(t)e^{rt} \quad \text{e} \quad y''(t) = v''(t)e^{rt} + 2rv'(t)e^{rt} + r^2v(t)e^{rt}$$

então $y(t)$ é solução da equação se, e somente se,

$$ay'' + by' + cy = a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' - rv) + cv = av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $r = \frac{-b}{2a}$ é a única solução da equação $ar^2 + br + c = 0$ e $2ar + b = 0$, então

$$v''(t) = 0.$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação $v''(t) = 0$ torna-se $w'(t) = 0$ que tem solução $w(t) = C_1$. Resolvendo a equação $v'(t) = w(t) = C_1$ obtemos

$$v(t) = C_1 t + C_2 \quad \text{e} \quad y(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}.$$

Tomando-se $C_2 = 0$ e $C_1 = 1$ obtemos

$$y_2(t) = te^{rt}.$$

Vamos ver que $y_1(t) = e^{rt}$ e $y_2(t) = te^{rt}$, em que $r = -\dfrac{b}{2a}$, são soluções fundamentais da equação

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} \\
&= e^{2rt} \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} \\
&= e^{2rt} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}, \quad \text{em que } r = -\frac{b}{2a}$$

é a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$, tal que $b^2 - 4ac = 0$ e $a \neq 0$.

2.1.4 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar de equações da forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0. \tag{2.13}$$

Para esta equação existem valores constantes de r tais que $y(t) = e^{rt}$ é uma solução.

Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ em (2.13) obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução de (2.13) se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.14}$$

que é chamada **equação característica** de (2.13).

Como uma equação de 2º grau pode ter duas raízes reais, somente uma raíz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos chegar a três situações distintas.

A Equação Característica Tem Duas Raízes Reais

Se a equação característica de (2.13) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções fundamentais, pois

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.6. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' - \omega^2 y = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 - \omega^2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = \omega$ e $r_2 = -\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

A Equação Característica Tem Somente Uma Raiz Real

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a equação característica (2.14) tem somente uma raiz real $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso,

$$y_1(t) = e^{r_1 t}$$

é solução da equação diferencial (2.13).

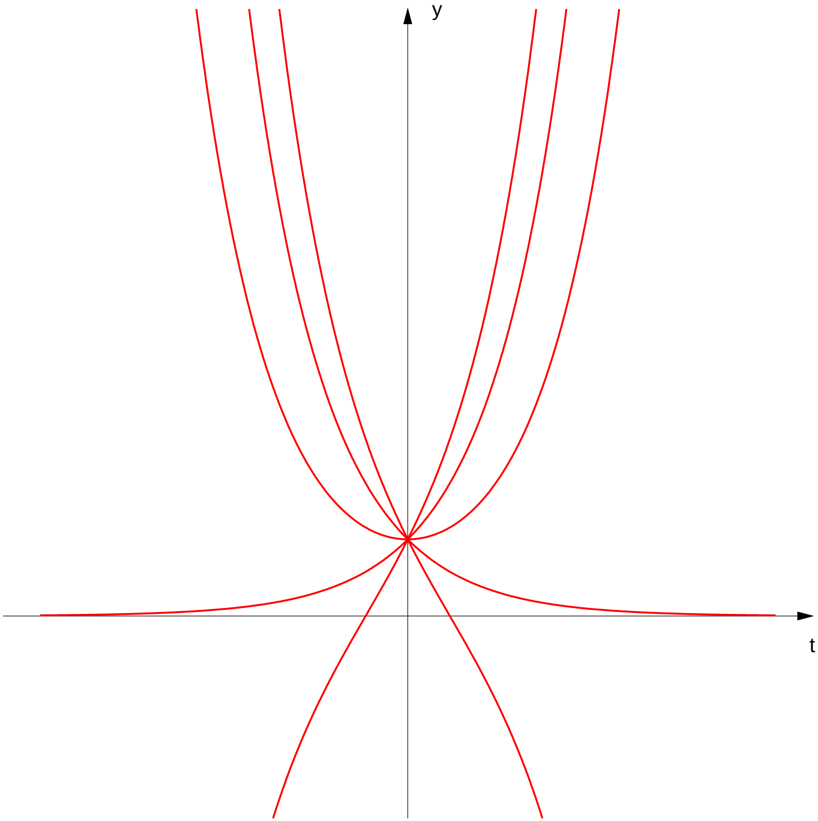


Figura 2.2: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.6

No Exemplo 2.5 na página 142 mostramos como encontrar uma segunda solução para esta equação. Lá mostramos que $y_2(t) = te^{r_1 t}$ também é solução da equação (2.13) e que são soluções fundamentais da equação diferencial (2.13).

Portanto no caso em que a equação característica tem somente uma raíz real $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.7. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

A Equação Característica Tem Duas Raízes Complexas

Se a equação característica de (2.13) tem duas raízes complexas, então elas são números complexos conjugados, ou seja, se $r_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica (2.14), então a outra raiz é $r_2 = \alpha - i\beta$. Neste caso, pela fórmula de Euler (2.9):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \quad \text{e} \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t). \end{aligned}$$

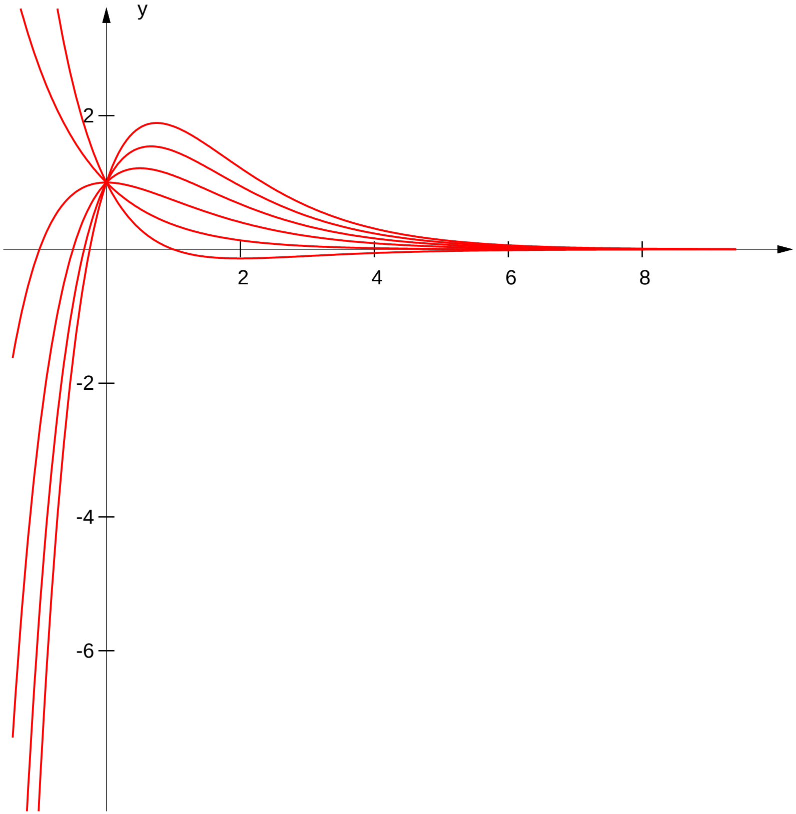


Figura 2.3: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.7

Pela análise feita no início desta seção sabemos que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções complexas da equação diferencial (2.13). Além disso,

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\
&= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\
&= (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t} = (-2i\beta) e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ou seja, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.13). Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

é a solução geral complexa de (2.13).

Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. A solução geral complexa pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\
&= C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) \\
&= (C_1 + C_2) e^{\alpha t}\cos\beta t + i(C_1 - C_2) e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ em (2.15), temos a solução real

$$u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t.$$

Tomando $C_1 = \frac{1}{2i}$ e $C_2 = -\frac{1}{2i}$, temos a solução real

$$v(t) \quad = \quad e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.$$

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais de (2.13).

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \operatorname{sen} \beta t) & e^{\alpha t}(\alpha \operatorname{sen} \beta t + \beta \cos \beta t) \end{bmatrix} \\
&= e^{2\alpha t} \left(\alpha \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \\ \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right) \\
&= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.8. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

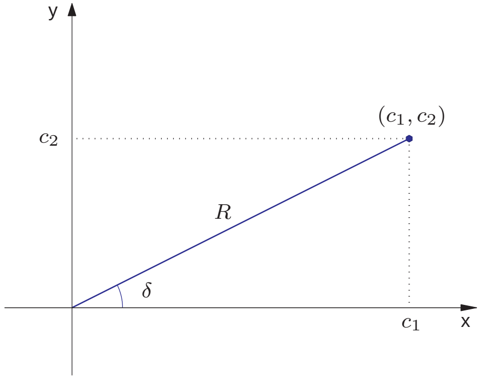
A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = i\omega$ e $r_2 = -i\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{2.16}$$

Escrevendo o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & R \cos \delta, \\ c_2 & = & R \operatorname{sen} \delta. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (2.16) obtemos

$$y(t) = R \left(\cos \delta \cos\left(\omega t\right) + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}\left(\omega t\right)\right) = R \cos(\omega t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (2.17).

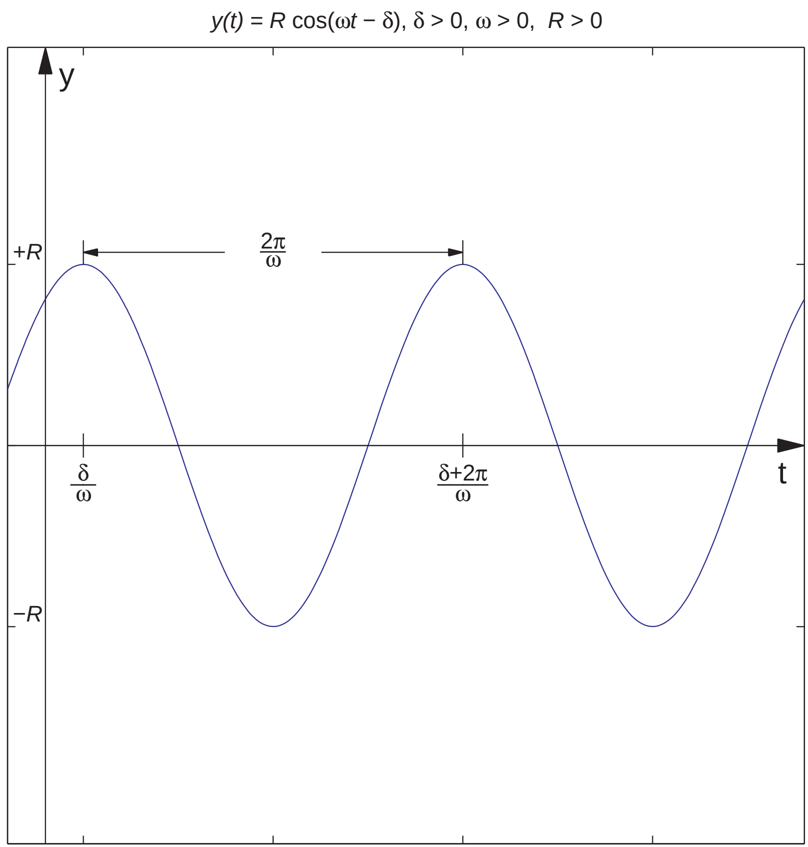


Figura 2.4: Uma solução da equação do Exemplo 2.8

Exercícios (respostas na página 225)

1.1. Mostre que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

1.2. Mostre que $y_1(x) = x^{-1}$, $x > 0$, é solução da equação diferencial

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

1.3. Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

1.4. (a) Determine qual ou quais das funções $z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x + 3)y'' + (x + 2)y' - y = 0$$

(b) Seja $y_1(x)$ uma das soluções obtidas no item anterior. Determine uma segunda solução $y_2(x)$ de forma que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam soluções fundamentais da equação.

(c) Determine a solução geral da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

e obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

1.5. (a) Mostre que $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = 0.$$

(b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2y'' - 6xy' + 10y = 0, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

1.6. Mostre que a solução do problema $y'' + 2y' = 0, y(0) = a, y'(0) = b$ tende para uma constante quando $t \to +\infty$. Determine esta constante.

1.7. Mostre que se $0 < b < 2$, então toda solução de $y'' + by' + y = 0$ tende a zero quando $t \to +\infty$.

1.8. Considere o problema $y'' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = b \neq 0$. Mostre que $y(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0$.

1.9. Considere o problema $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = b$. Determine os valores de b para os quais a solução $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

1.10. Considere a equação $y'' + 2by' + y = 0$. Para quais valores de b a solução $y(t)$ tende a zero quando $t \to +\infty$, independente das condições iniciais.

1.11. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0. \tag{2.18}$$

em que b e c são constantes reais.

Mostre que existem valores constantes de r tais que $y(x) = x^r$ é uma solução de (2.18). Além disso mostre que $y(x) = x^r$ é solução da equação (2.18) se, e somente se,

$$r^2 + (b-1)r + c = 0, \tag{2.19}$$

A equação (2.19) é chamada **equação indicial de** (2.18).

1.12. Mostre que se a equação indicial (2.19) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (2.18) e portanto

$$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

é a solução geral de (2.18), para $x > 0$.

1.13. Se a equação indicial (2.19) tem duas raízes complexas, $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, use a fórmula de Euler para escrever a solução geral complexa em termos das soluções reais, para $x > 0$,

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Mostre que estas soluções são soluções fundamentais de (2.18) e portanto

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

é a solução geral de (2.18), para $x > 0$.

1.14. Se a equação indicial (2.19) tem somente uma raíz real, $r_1 = \dfrac{1-b}{2}$, determine uma segunda solução linearmente independente da forma $y_2(x) = v(x) y_1(x) = v(x) x^{\frac{1-b}{2}}$, para $x > 0$. Mostre que $y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}}$ e $y_2(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$ são soluções fundamentais de (2.18) e portanto a solução geral de (2.18), para $x > 0$, é

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-b}{2}} + c_2 x^{\frac{1-b}{2}} \ln x.$$

1.15. Use os exercícios anteriores para encontrar a solução geral das seguintes equações:

(a) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

2.2 Equações Não-Homogêneas

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Identificar uma equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea.
- Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de 2ª ordem com coeficientes constantes não homogênea.
- Resolver um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea.

Uma **equação diferencial linear de 2ª ordem não-homogênea** é uma equação da forma

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t),$$

com $f(t)$ uma função não-nula, que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t). \tag{2.20}$$

Teorema 2.4. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular da equação (2.20). Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (2.20) é*

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Demonstração. Seja $y(t)$ uma solução qualquer de (2.20) e $y_p(t)$ uma solução particular de (2.20), então $Y(t) = y(t) - y_p(t)$ é solução da equação homogênea associada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0. \tag{2.21}$$

Pois,

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dt^2} + p(t)\frac{dY}{dt} + q(t)Y = \frac{d^2}{dt^2}(y(t) - y_p(t)) + \\ +p(t)\frac{d}{dt}(y(t) - y_p(t)) + q(t)(y(t) - y_p(t)) &= \\ = \underbrace{\left(\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y\right)}_{=f(t)} - \underbrace{\left(\frac{d^2y_p}{dt^2} + p(t)\frac{dy_p}{dt} + q(t)y_p\right)}_{=f(t)} &= f(t) - f(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.21), existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$Y(t) = y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t),$$

ou seja, se $y(t)$ é uma solução qualquer de (2.20) e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.21), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t) + y_p(t). \tag{2.22}$$

■

Portanto para encontrar a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea precisamos encontrar uma solução particular e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Teorema 2.5 (Princípio da Superposição para Equações Não-Homogêneas). *Considere* $y_p^{(1)}(t)$ *uma solução de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$ *uma solução de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t).$$

Então $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$ *é solução de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t) + f_2(t)$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
& y_p(t)'' + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t) = \\
= \quad & (y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))'' + p(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))' + q(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)) = \\
= \quad & \underbrace{y_p^{(1)}(t)'' + p(t)y_p^{(1)}(t)' + q(t)y_p^{(1)}(t)}_{=f_1(t)} + \underbrace{y_p^{(2)}(t)'' + p(t)y_p^{(2)}(t)' + q(t)y_p^{(2)}(t)}_{=f_2(t)} = \\
= \quad & f_1(t) + f_2(t),
\end{aligned}
$$

pois $y_p^{(1)}(t)$ é solução da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$, da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t).$$

■

2.2.1 Equações Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar de equações da forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t). \tag{2.23}$$

em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$.

Método dos Coeficientes a Determinar

Este método funciona quando a função $g(t)$ tem uma das seguintes formas:

(1) $g(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n$, em que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + \ldots + A_n t^n),$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a ser determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.23). O Exemplo 2.9 ilustra este caso.

(2) $g(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{at}$, em que $a_0, \ldots, a_n, a \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + \ldots + A_n t^n)e^{at},$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a ser determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.23). O Exemplo 2.10 ilustra este caso.

(3) $g(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{at}\cos bt + (b_0 + \ldots + b_m t^m)e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt$,
em que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s[(A_0 + \ldots + A_q t^q)e^{at}\cos bt + (B_0 + \ldots + B_q t^q)e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt],$$

em que $q = \max\{m, n\}$, s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_q, B_0, \ldots, B_q$ são coeficientes a ser determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.23). O Exemplo 2.11 ilustra este caso.

Exemplo 2.9. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + y' = 2 + t^2.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y''+y' = 0$. A equação característica é

$$r^2 + r = 0$$

que tem como raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + y' = 0$ é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

O segundo membro da equação $g(t) = 2 + t^2$ é da forma (1). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^1(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3$$

O valor de s é igual a 1, pois para $s = 0$, a parcela A_0 é solução da equação homogênea ($c_2 = 0$ e $c_1 = A_0$).

$$y_p'(t) = A_0 + 2A_1t + 3A_2t^2$$

$$y_p''(t) = 2A_1 + 6A_2t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + y' = 2 + t^2$ obtemos

$$(2A_1 + 6A_2t) + (A_0 + 2A_1t + 3A_2t^2) = (A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)t + 3A_2t^2 = 2 + t^2$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} A_0 & + & 2A_1 & & & = & 2 \\ & & 2A_1 & + & 6A_2 & = & 0 \\ & & & & 3A_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 4$, $A_1 = -1$ e $A_2 = 1/3$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

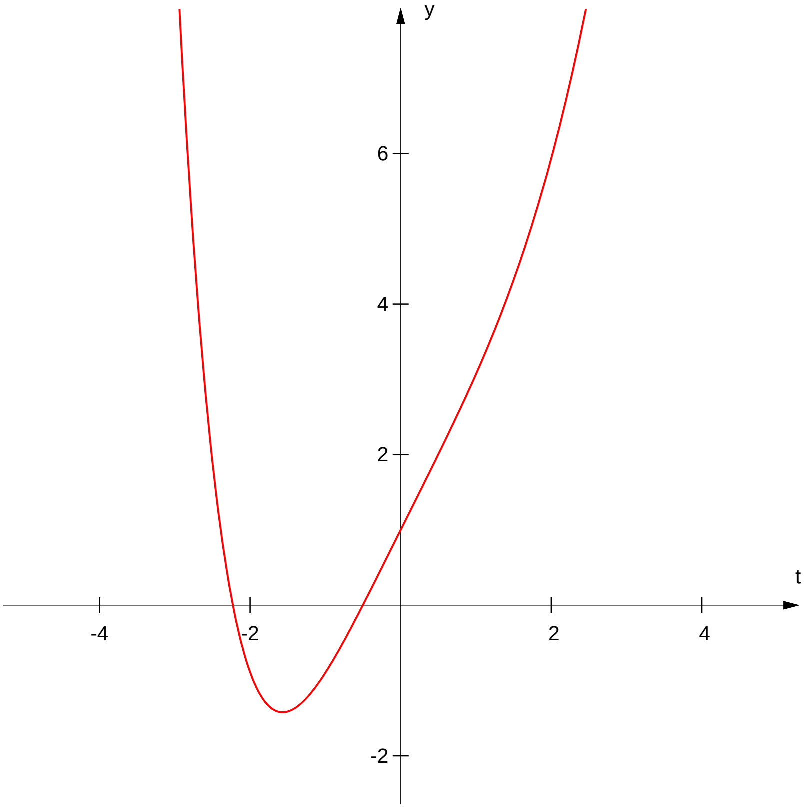


Figura 2.5: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.9

Exemplo 2.10. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + y = 0$. A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

O segundo membro da equação $g(t) = (2+t)e^{-t}$ é da forma (2). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t)e^{-t} = (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t}$$

O valor de s é igual a 2, pois para $s = 0$ as parcelas $A_0 e^{-t}$ e $A_1 t e^{-t}$ são soluções da equação homogênea e para $s = 1$ a parcela $A_0 t e^{-t}$ é solução da equação homogênea.

$$y_p'(t) = \left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t}$$

$$y_p''(t) = \left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t}.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}$ obtemos

$$\begin{aligned}\left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t} &+ \\ + 2\left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t} &+ \\ + (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t} &= (2+t)e^{-t}\end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(2A_0 + 6A_1 t)\, e^{-t} = (2 + t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad 2A_0 + 6A_1 t = 2 + t$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2A_0 & & & = & 2 \\ & & 6A_1 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 1$ e $A_1 = 1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = (t^2 + \frac{1}{6} t^3)e^{-t}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + (t^2 + \frac{1}{6} t^3)e^{-t}$$

Exemplo 2.11. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = e^t \cos t.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + 2y = 0$. A equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

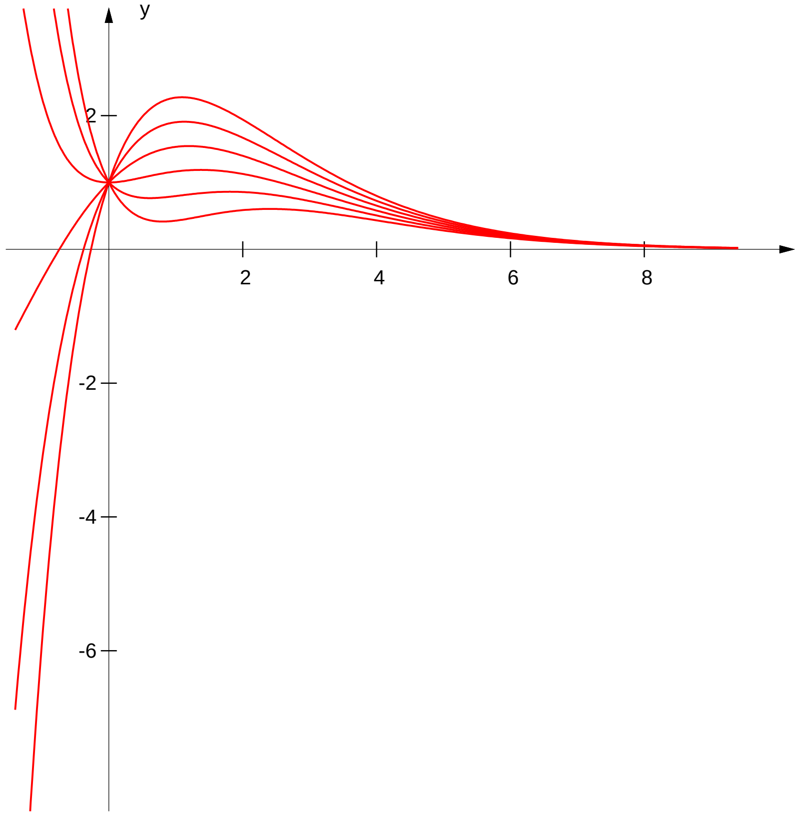


Figura 2.6: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.10

que tem como raízes $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + 2y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t.$$

O segundo membro da equação $g(t) = e^t \cos t$ é da forma (3). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^0(Ae^t\cos t + Be^t\operatorname{sen} t) = Ae^t\cos t + Be^t\operatorname{sen} t$$

O valor de s é igual a 0, pois nenhuma parcela de $y_p(t)$ é solução da equação homogênea.

$$y_p'(t) = A(e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t) + B(e^t\operatorname{sen} t + e^t\cos t +) = (A+B)e^t\cos t + (B-A)e^t\operatorname{sen} t$$

$$y_p''(t) = 2Be^t\cos t - 2Ae^t\operatorname{sen} t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = e^t\cos t$ obtemos

$$\begin{aligned} 2Be^t\cos t - 2Ae^t\operatorname{sen} t + \\ +\, 2\left((A+B)e^t\cos t + (B-A)e^t\operatorname{sen} t\right) + \\ +\, 2(Ae^t\cos t + Be^t\operatorname{sen} t) &= e^t\cos t \end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(4A+4B)e^t\cos t + (4B-4A)e^t\operatorname{sen} t = e^t\cos t$$

Comparando os coeficientes de $e^t\cos t$ e de $e^t\operatorname{sen} t$ obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4A &+& 4B &=& 1 \\ -4A &+& 4B &=& 0 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = 1/8$ e $B = 1/8$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = \frac{1}{8}e^t \cos t + \frac{1}{8}e^t \operatorname{sen} t$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + \frac{1}{8}e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

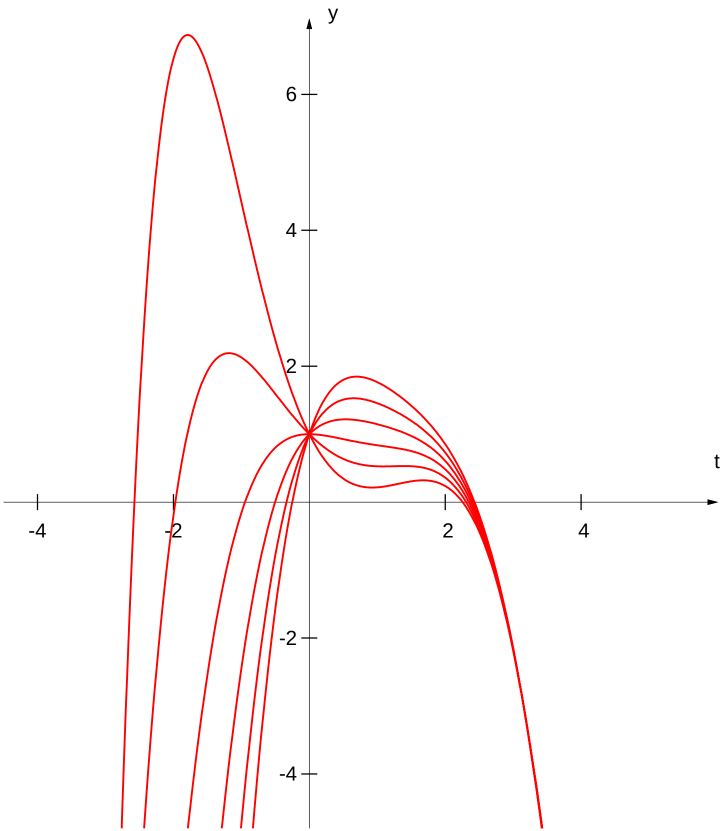


Figura 2.7: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.11

Exercícios (respostas na página 238)

2.1. Encontre a solução geral das equações:

(a) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$.

(b) $y'' - 4y' + 6y = 3x$.

(c) $y'' + 4\,y = 2\,\mathrm{sen}(2t) + t$

(d) $y'' + 2y = e^t + 2$

2.2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = t^2 + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' + 2\,y' + y = 3\,\mathrm{sen}(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 3e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(d) $2y'' + 2y' + y = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

2.3. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

(b) Determine a forma adequada para uma solução particular da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = te^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\,t)$$

para $\alpha > 1$.

(c) Para quais valores de α todas as soluções tendem a zero quando $t \to +\infty$.

2.3 Oscilações

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Modelar um problema envolvendo um sistema massa-mola.
- Resolver um problema de valor inicial correspondente ao modelo encontrado.
- Identificar o tipo de movimento: oscilatório (periódico, quase-periódico) e não oscilatório.
- Calcular, no caso de movimento periódico, o período, a freqüência e a fase.
- Calcular, no caso de movimento quase-periódico, o quase-período, a quase-freqüência e a fase.
- Identificar as condições para ressonância e saber calcular a freqüência de ressonância.
- Calcular a solução estacionária e a solução transiente, no caso de oscilações forçadas amortecidas.

Considere um sistema massa-mola na vertical. Seja L o alongamento provocado na mola pela colocação da massa m quando o sistema está em equilíbrio. Neste caso a magnitude da força elástica é igual a magnitude do peso, ou seja,

$$mg = kL. \tag{2.24}$$

Aqui k é chamada **constante da mola**. Seja $y(t)$ o alongamento da mola em um instante t. Defina a nova função

$$u(t) = y(t) - L.$$

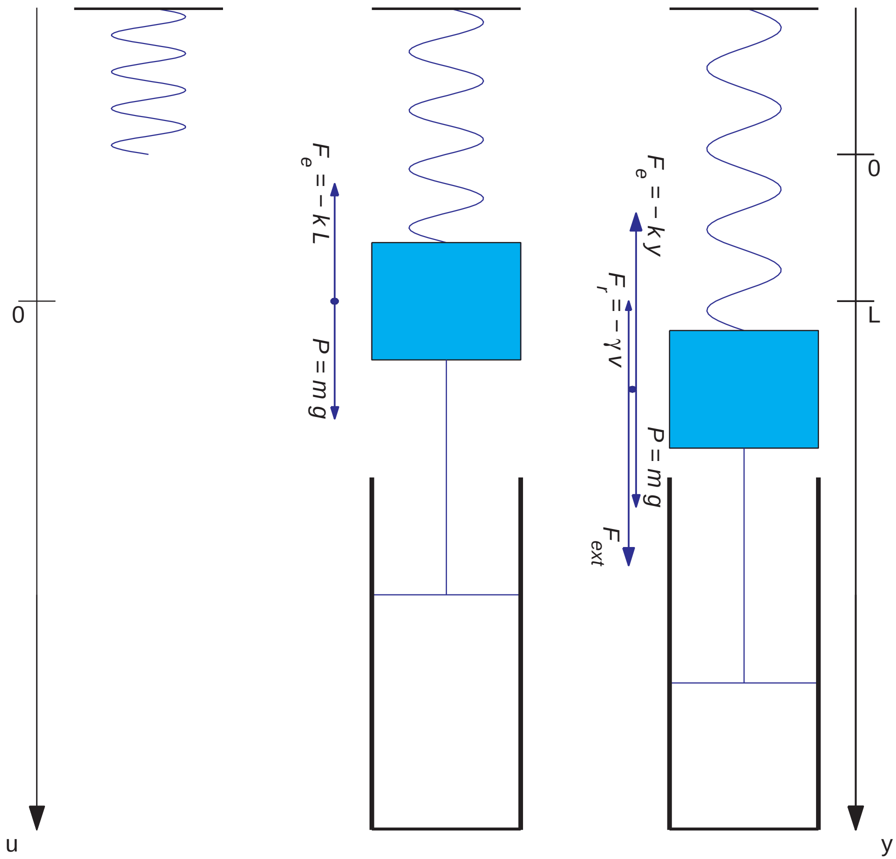


Figura 2.8: Sistema massa-mola na vertical

Sobre a massa agem o seu peso,

$$P = mg,$$

a força da mola que é proporcional ao seu alongamento e tem sentido oposto a ele,

$$F_e = -ky(t) = -k(u(t) + L),$$

uma força de resistência proporcional a velocidade,

$$F_r = -\gamma y'(t) = -\gamma u'(t)$$

e uma força externa F_{ext}. Aqui γ é a **constante de amortecimento**.

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$my''(t) = mg - ky(t) - \gamma y'(t) + F_{ext}$$

ou escrevendo em termos de $u(t) = y(t) - L$:

$$mu''(t) = mg - k(L + u(t)) - \gamma u'(t) + F_{ext} \tag{2.25}$$

Assim, por (2.24) e (2.25), $u(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_{ext}. \tag{2.26}$$

que é a mesma equação que satisfaz $x(t)$ no caso da mola estar na posição horizontal. Verifique!

2.3.1 Oscilações Livres

Sem Amortecimento

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$ e como são não amortecidas, $\gamma = 0$. Assim a equação (2.26) para o movimento da massa é

$$mu'' + ku = 0$$

A equação característica é

$$mr^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$$

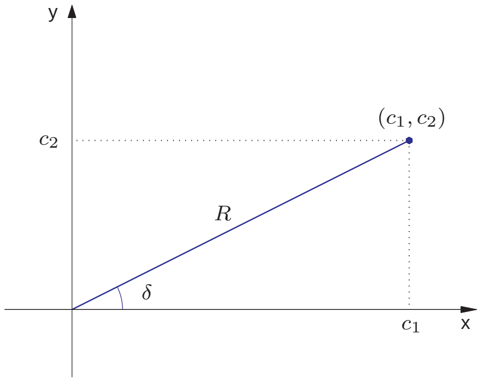
Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Seja $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Então a equação acima pode ser escrita em termos de ω_0 como

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\,. \tag{2.27}$$

Escrevendo o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 = R\cos\delta, \\ c_2 = R\,\mathrm{sen}\,\delta. \end{cases} \quad (2.28)$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (2.27) obtemos

$$u(t) = R\left(\cos\delta\cos(\omega_0 t) + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)\right) = R\cos(\omega_0 t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (2.28). Aqui, ω_0 é chamada **freqüência natural** do sistema, δ a **fase** e R a **amplitude**.

Neste caso a solução da equação é periódica de **período** $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Este movimento oscilatório é chamado **movimento harmônico simples**.

Exemplo 2.12. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a freqüência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

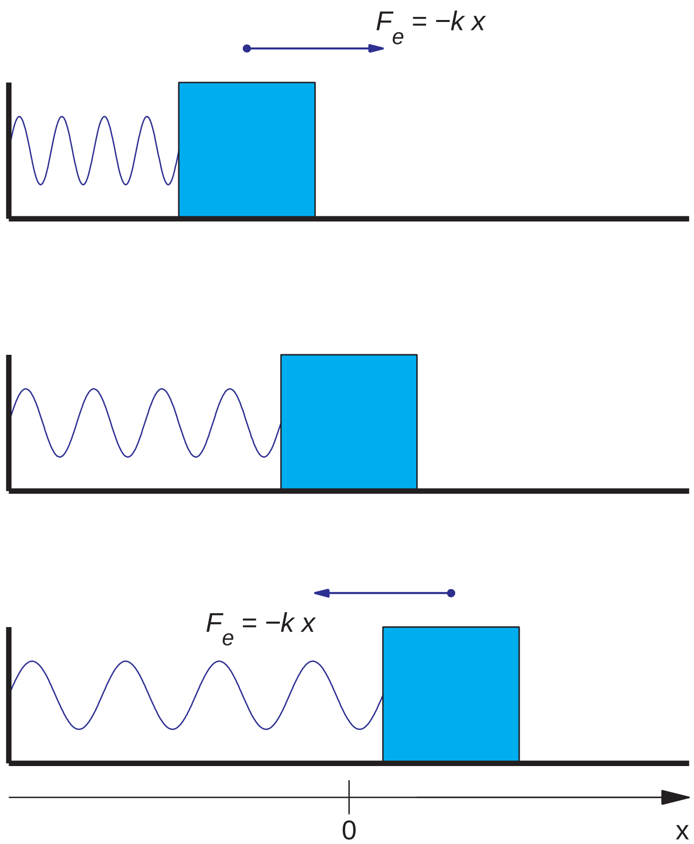


Figura 2.9: Sistema massa-mola livre não amortecido

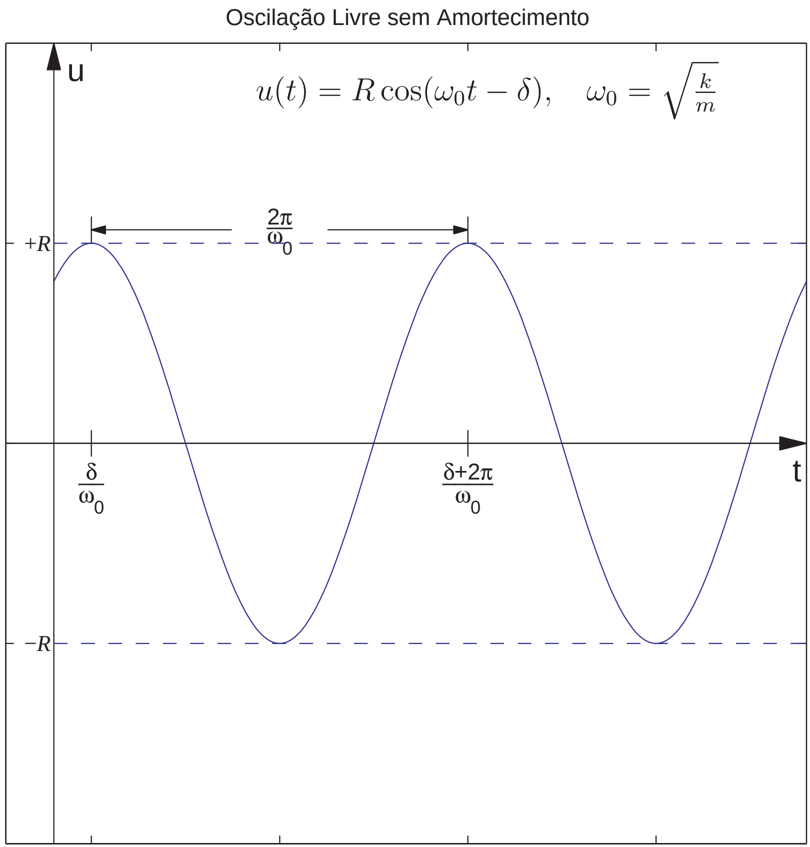


Figura 2.10: Solução do sistema massa-mola livre não amortecido

Solução:

(a) A equação característica é

$$r^2 + 5 = 0$$

que tem como raízes $r = \pm\sqrt{5}i$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

Para resolver o problema de valor inicial precisamos calcular a derivada da solução geral

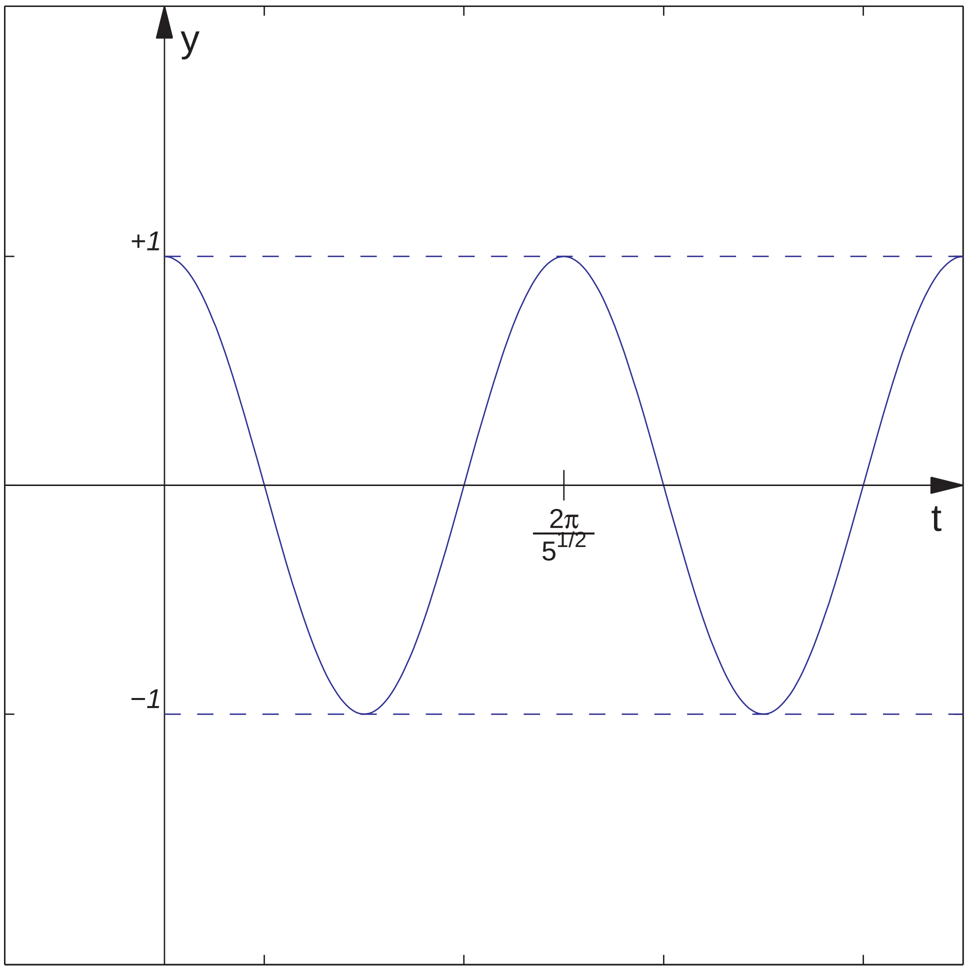
$$y'(t) = -\sqrt{5}\, c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\, t\right) + \sqrt{5}\, c_2 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$ e $y' = 0$ obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a freqüência é igual a $\sqrt{5}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\pi/\sqrt{5}$.

(b)


y
+1
−1
t
$\frac{2\pi}{5^{1/2}}$

Com Amortecimento

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$. Assim a equação (2.26) para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0$$

A equação característica é $mr^2 + \gamma r + k = 0$ e $\Delta = \gamma^2 - 4km$
Aqui temos três casos a considerar:

(a) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km > 0$ ou $\gamma > 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que

$$r_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} < 0$$

Este caso é chamado **superamortecimento** e a solução $u(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

(b) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km = 0$ ou $\gamma = 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$$

Este caso é chamado **amortecimento crítico** e a solução $u(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

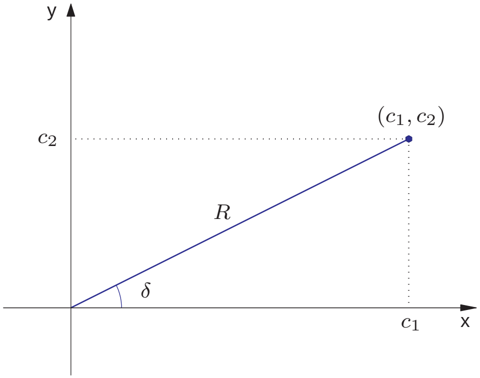
(c) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km < 0$ ou $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}}(c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t) \tag{2.29}$$

em que

$$\mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} < \omega_0$$

Aqui, μ é chamado **quase-freqüência** e $T = \dfrac{2\pi}{\mu}$ é chamado **quase-período**. Escrevendo novamente o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & R\cos\delta, \\ c_2 & = & R\,\mathrm{sen}\,\delta. \end{array} \right. \tag{2.30}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (2.29) obtemos

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left(R\cos\delta\cos(\mu t) + R\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\mu t) \right) = Re^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos(\mu t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (2.30).

Este caso é chamado **subamortecimento** e a solução $u(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Este é um movimento oscilatório com amplitude $Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}$ é chamado **quase-periódico**.

Observe que nos três casos a solução tende a zero quando t tende a $+\infty$.

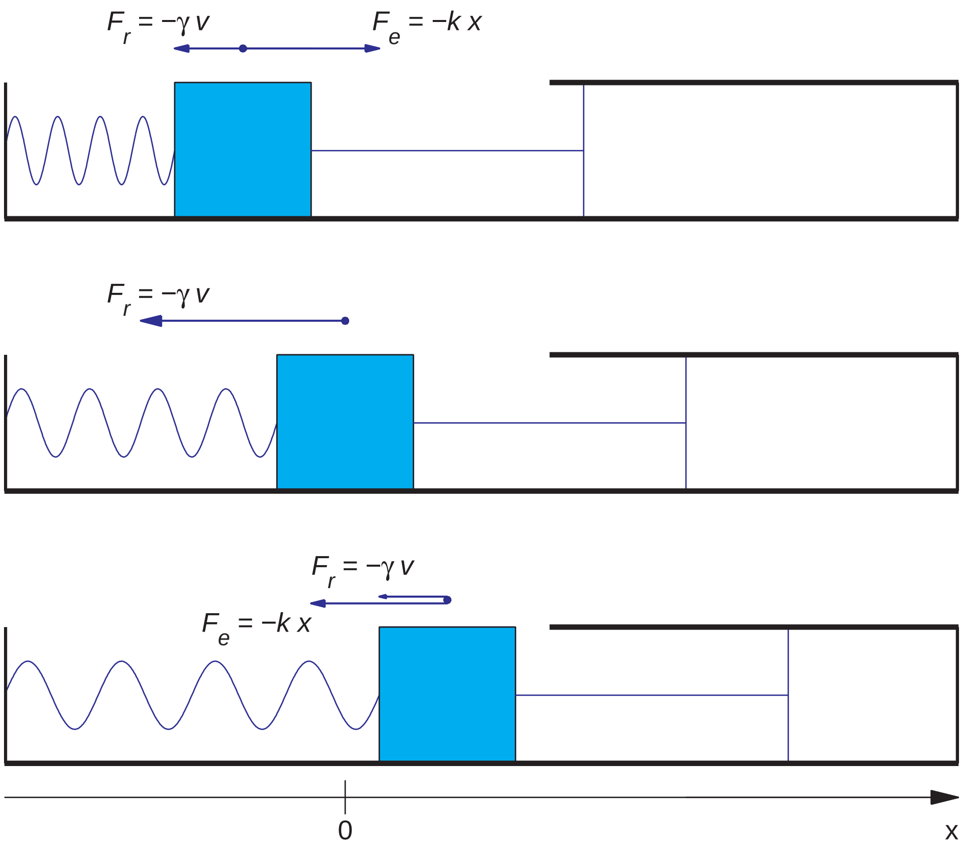


Figura 2.11: Sistema massa-mola livre com amortecimento

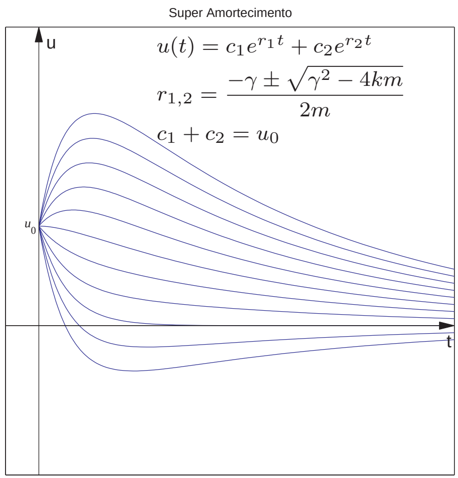


Figura 2.12: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com superamortecimento

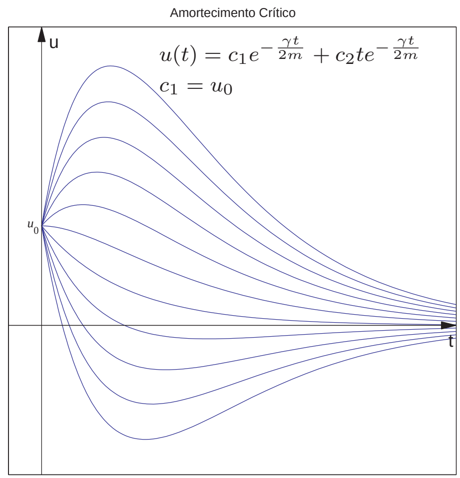


Figura 2.13: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento crítico

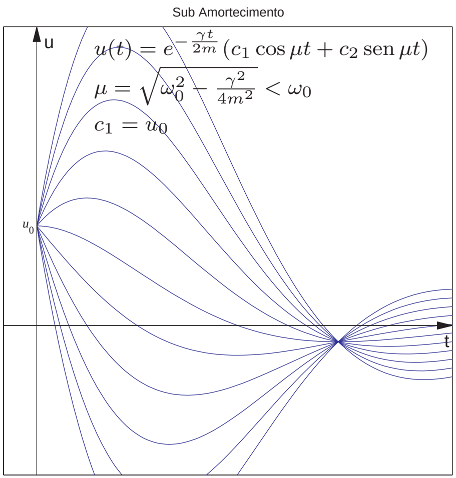


Figura 2.14: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com subamortecimento

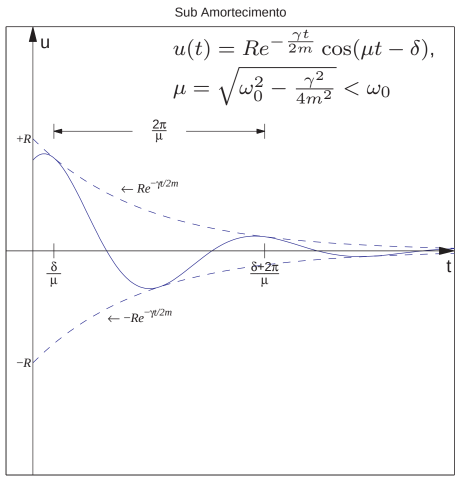


Figura 2.15: Solução típica do sistema massa-mola livre com subamortecimento

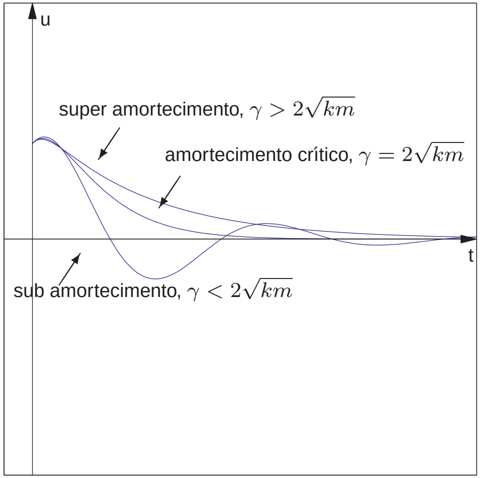


Figura 2.16: Comparação das soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento para diferentes valores da constante de amortecimento γ

2.3.2 Oscilações Forçadas

Vamos supor que uma força externa periódica da forma $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$ é aplicada à massa. Então a equação (2.26) para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento da massa é

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Sabemos que as soluções são da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + u_p(t)$$

em que

$$u_p(t) = t^s[A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t)]$$

é uma solução particular.

Temos dois casos a considerar:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ e $B_0 = 0$. Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Neste caso a solução $u(t)$ é oscilatória e limitada.

(b) Se $\omega = \omega_0$. A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = t[A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t)]$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + A_0 t \cos(\omega_0 t) + B_0 t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 0$ e $B_0 = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Neste caso $u(t)$ é oscilatória, mas fica ilimitada quando t tende a $+\infty$. Este fenômeno é conhecido como **ressonância** e a freqüência $\omega = \omega_0$ é chamada **freqüência de ressonância**.

Exemplo 2.13. Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

Temos dois casos a considerar:

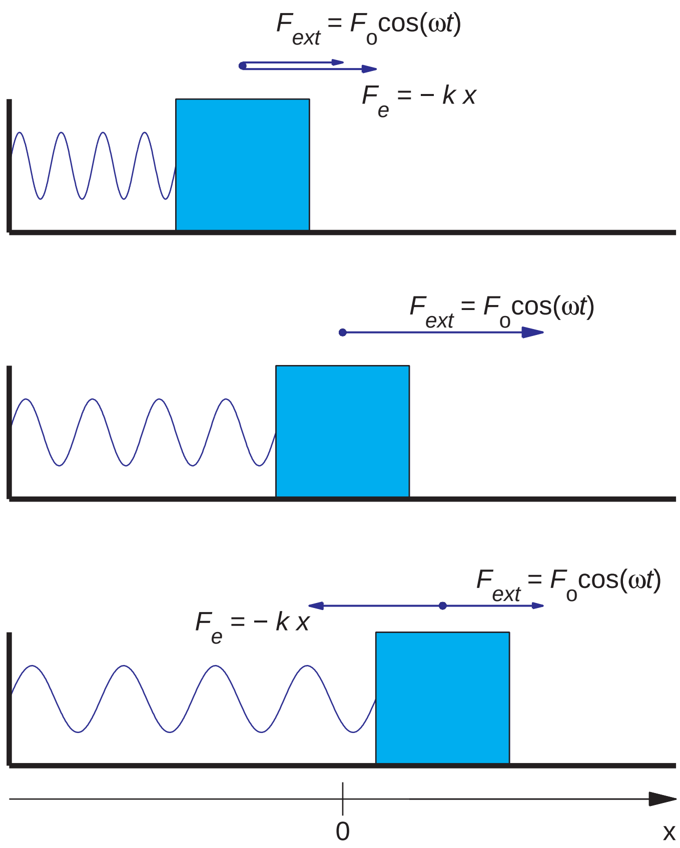


Figura 2.17: Sistema massa-mola forçado sem amortecimento

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \operatorname{sen}(\omega_2 t)$$

em que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}.$$

Como $\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}$ é menor do que $\omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$, então o movimento é uma oscilação de freqüência ω_2 com uma amplitude também oscilatória $R(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t)$ de freqüência ω_1. Este movimento é chamado **batimento**.

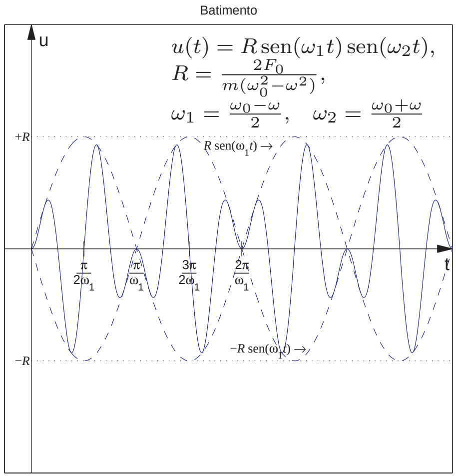


Figura 2.18: Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de batimento

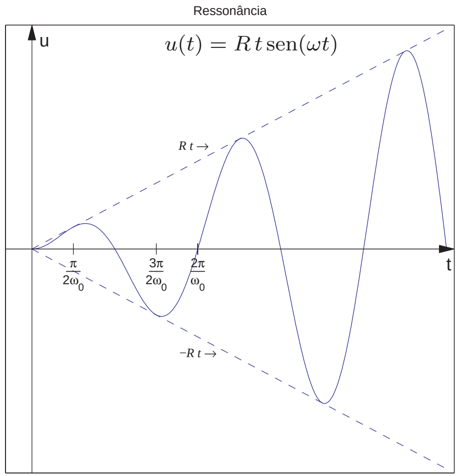


Figura 2.19: Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de ressonância

(b) Se $\omega = \omega_0$. A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Já vimos que neste caso $u(t)$ fica ilimitada quando t tende a $+\infty$ que é o fenômeno da ressonância. Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Este movimento é uma oscilação de freqüência ω_0 com uma amplitude $R(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t$ que aumenta proporcionalmente a t.

Oscilações Forçadas com Amortecimento

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Seja $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método das constantes a determinar

$$u_p(t) = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Substituindo-se $u_p(t)$ e sua derivada na equação encontramos

$$A_0 = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B_0 = \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta},$$

em que $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$. Podemos escrever

$$u_p(t) = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \operatorname{sen}(\omega t) = R \cos(\omega t - \delta)$$

em que $R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ e δ é tal que $A_0 = R \cos \delta$ e $B_0 = R \operatorname{sen} \delta$. Neste caso

$$R = \frac{F_0}{\sqrt{\Delta}}, \quad \delta = \arccos \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{\Delta}}.$$

Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R \cos(\omega t - \delta).$$

A solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$, é a solução do problema de oscilação livre amortecida e já mostramos que tende a zero quando t tende a $+\infty$, por isso é chamada **solução transiente**, enquanto a solução particular, $R \cos(\omega t - \delta)$, permanece e por isso é chamada **solução estacionária**.

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R \cos(\omega t - \delta) \approx R \cos(\omega t - \delta), \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

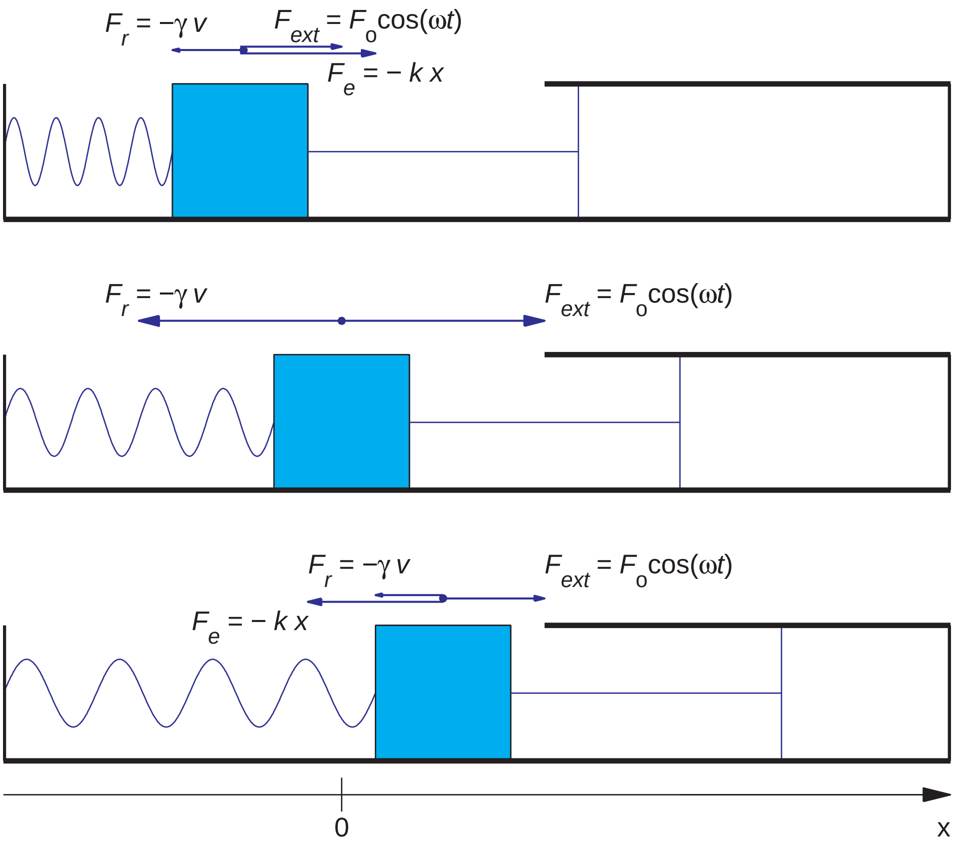


Figura 2.20: Sistema massa-mola forçado com amortecimento

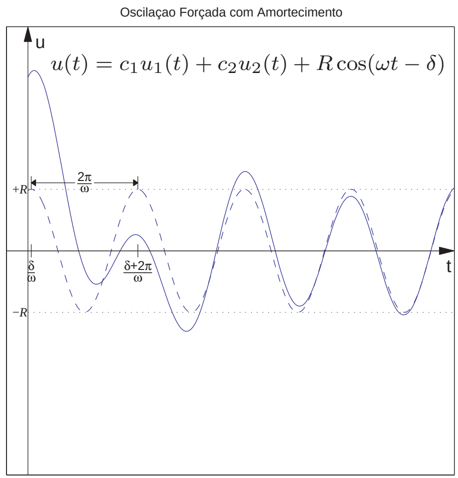


Figura 2.21: Solução do sistema massa-mola forçado com amortecimento

Exercícios (respostas na página 246)

3.1. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a freqüência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

3.2. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$2y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a freqüência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

3.3. Uma mola, de um sistema massa-mola sem amortecimento, tem constante de elasticidade igual a 3 N/m. Pendura-se na mola uma massa de 2 kg e o sistema sofre a ação de uma força externa de $3\cos(3t)$. Determine a função que descreve o movimento da massa em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual u_0 e a velocidade inicial u_0'.

3.4. Se um sistema massa-mola com uma massa de 2 kg e uma mola com constante de elasticidade igual $0{,}5$ N/m é colocado em movimento, no instante $t = 0$, num meio em que a constante de amortecimento é igual a 1 N.s/m, determine a posição da massa em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual a u_0 e a velocidade inicial u_0'.

3.5. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Encontre a freqüência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico.

(a) Se a massa é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.

(b) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 1 centímetro e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.

(c) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 2 centímetros e depois é solta.

3.6. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado.

(a) Para quais valores da constante de amortecimento γ o sistema é super-amortecido, tem um amortecimento crítico e é sub-amortecido.

(b) Suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 dinas (=gramas·centímetros por segundos^2) quando a velocidade é de 10 centímetros por segundo. Se a massa é puxada para baixo 2 centímetros e depois é solta, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico. Qual o valor do quase-período?

3.7. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento com uma força externa de $9600\cos(6t)$ dinas, determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

3.8. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento na posição de equilíbrio com uma força externa de $1000\cos(\omega t)$ dinas, para ω igual a freqüência de ressonância, determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

3.9. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Suponha que o amortecedor exerce uma força de 4200 dinas quando a velocidade é de 1 centímetro por segundo. Se a massa está sob a ação de uma força externa de $26000\cos(6t)$ dinas, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico, considerando somente a solução estacionária.

2.4 Soluções em Séries de Potências

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Identificar quais as equações diferenciais de 2a. ordem podem ser resolvidas por séries de potências.
- Determinar o intervalo onde a solução em série de potências converge.
- Encontrar a solução geral de equações diferenciais de 2a. ordem e problemas de valor inicial em série de potências.

Uma **série de potências** de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são números denominados **coeficientes da série**. Podemos definir uma função $f(x)$ que associa a cada valor de x, para o qual existe o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \lim_{N\to\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N),$$

o valor deste limite e escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

O maior valor de r para o qual o limite acima existe, ou seja, a **série converge** para $|x| < r$ é chamado **raio de convergência** da série.

Exemplo 2.14. A série geométrica

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1$$

tem raio de convergência $r = 1$.

Proposição 2.6. *São válidas as seguintes propriedades para as séries de potências:*

(a) *Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência r_1 e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, com raio de convergência r_2, então para todos os números α e β,*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n,$$

com raio de convergência $r = \min\{r_1, r_2\}$.

(b) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, *então para* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} x^k f(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 x^k + a_1 x^{1+k} + a_2 x^{2+k} + a_3 x^{3+k} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = \sum_{n'=k}^{\infty} a_{n'-k} x^{n'} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n. \end{aligned}$$

(c) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 2x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

(d) *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, *para todo* x, *com* $|x| < r$ *e* $r > 0$, *então* $a_n = 0$, *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Para uma equação diferencial da forma

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x) y = 0$$

em que $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios tais que $P(0) \neq 0$, a solução geral pode ser escrita como uma série de potências de x como estabelecemos no próximo resultado que será demonstrado apenas ao final da seção.

Teorema 2.7. *Considere a equação*

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{2.31}$$

em que $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios sem fatores comuns. Se $P(0) \neq 0$, então a equação tem solução geral em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1 \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right),$$

em que $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são soluções fundamentais da equação que convergem (pelo menos) para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Exemplo 2.15. Considere a equação

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta equação é chamada **equação de Legendre**. Pelo Teorema 2.7 a solução geral desta equação pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais em série que convergem pelo menos para $|x| < 1$, pois $P(z) \neq 0$, para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, já que $P(z) = 0$ se, e somente se, $z = \pm 1$.

Exemplo 2.16. Considere a equação

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0,$$

Pelo Teorema 2.7 a solução geral desta equação pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais em série que convergem pelo menos para $|x| < 1$, pois $P(z) \neq 0$, para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, já que $P(z) = 0$ se, e somente se, $z = \pm i$.

Para encontrar a solução geral em série de potências de x, escrevemos a solução $y(x)$ como uma série de potências de x, com os coeficientes a determinar,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

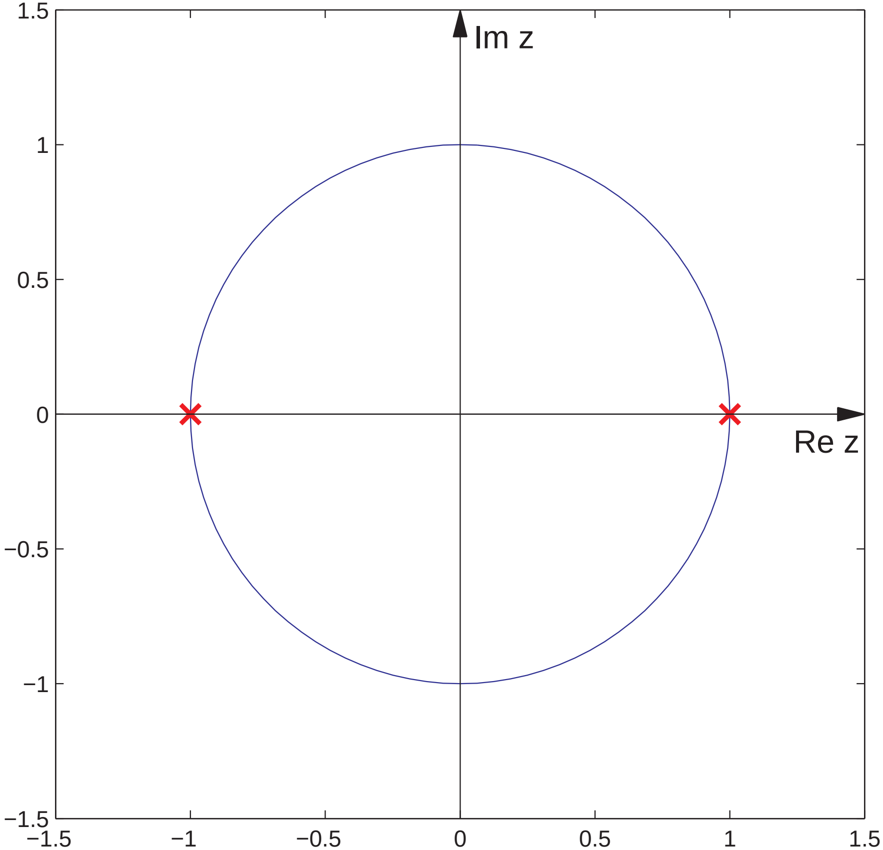


Figura 2.22: Maior círculo no plano complexo com centro na origem onde $P(z) \neq 0$, para o Exemplo 2.15

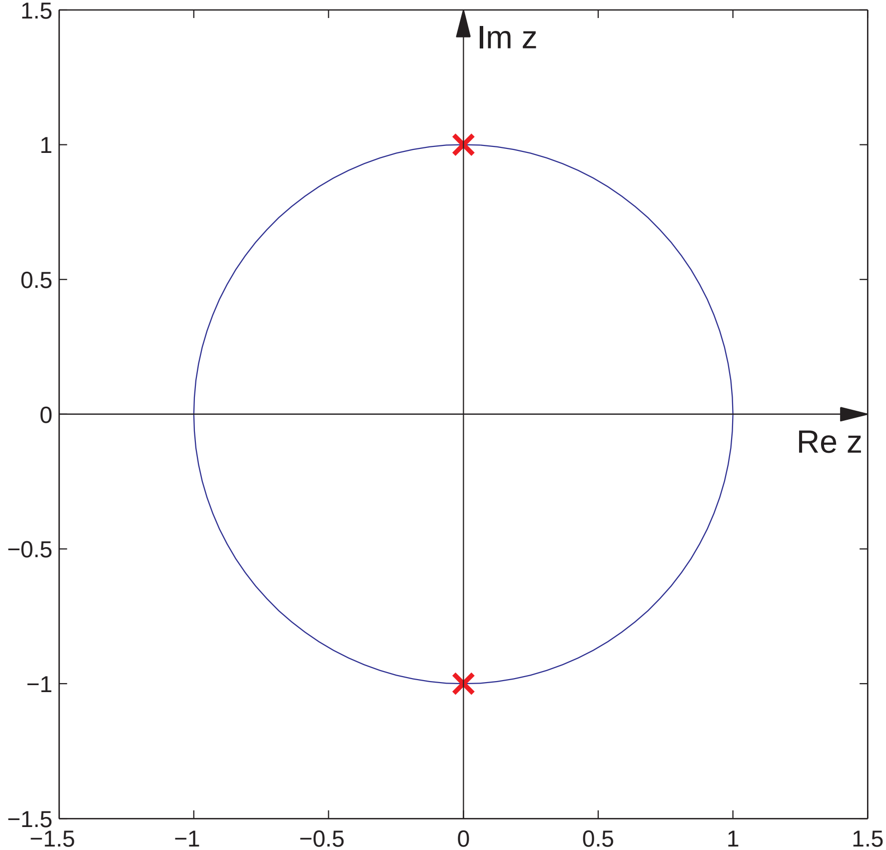


Figura 2.23: Maior círculo no plano complexo com centro na origem onde $P(z) \neq 0$, para o Exemplo 2.16

e substituímos na equação (2.31) esta série, a série da primeira derivada

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

e a série da segunda derivada

$$y''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Usamos as propriedades que apresentamos anteriormente de forma a escrever o lado esquerdo da equação (2.31) como uma série de potências de x cujos coeficientes são expressões dos coeficientes a ser determinados $a_0, a_1, \ldots$ Usando estas expressões obtemos fórmulas que dão os coeficientes a_{n+k} em termos dos coeficientes anteriores $a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots$ Desta forma obtemos qualquer coeficiente em termos dos dois primeiros coeficientes não nulos que serão as constantes arbitrárias da solução geral.

Exemplo 2.17. Considere a equação

$$y'' - xy' - y = 0.$$

Substituindo-se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

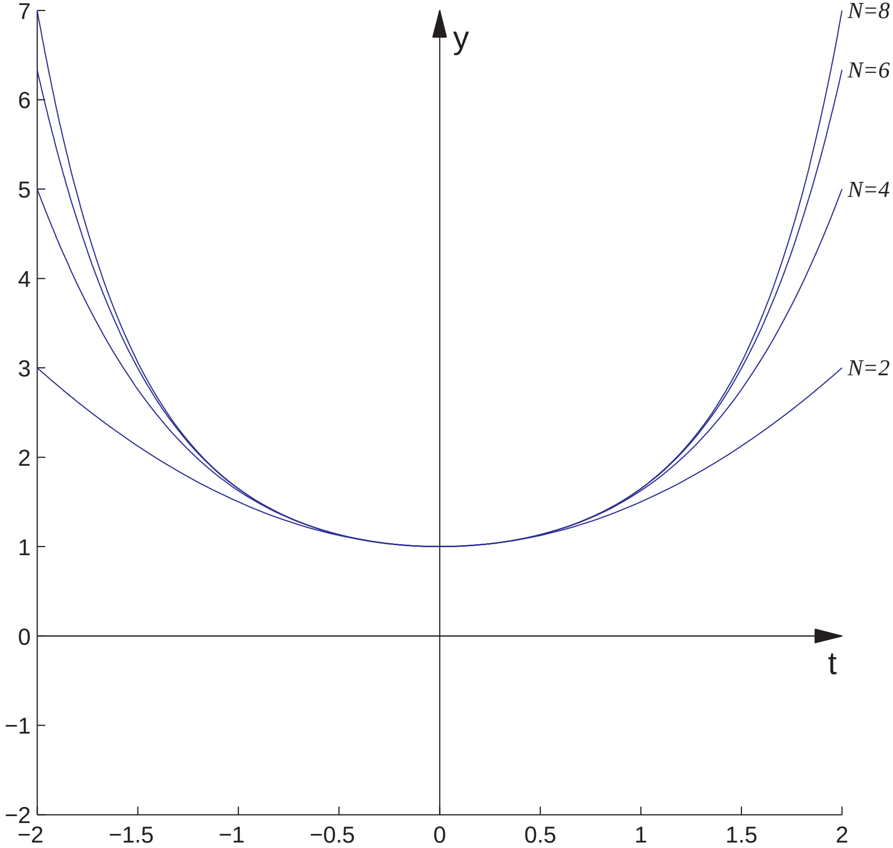


Figura 2.24: Somas parciais da solução $y_1(x)$ da equação do Exemplo 2.17

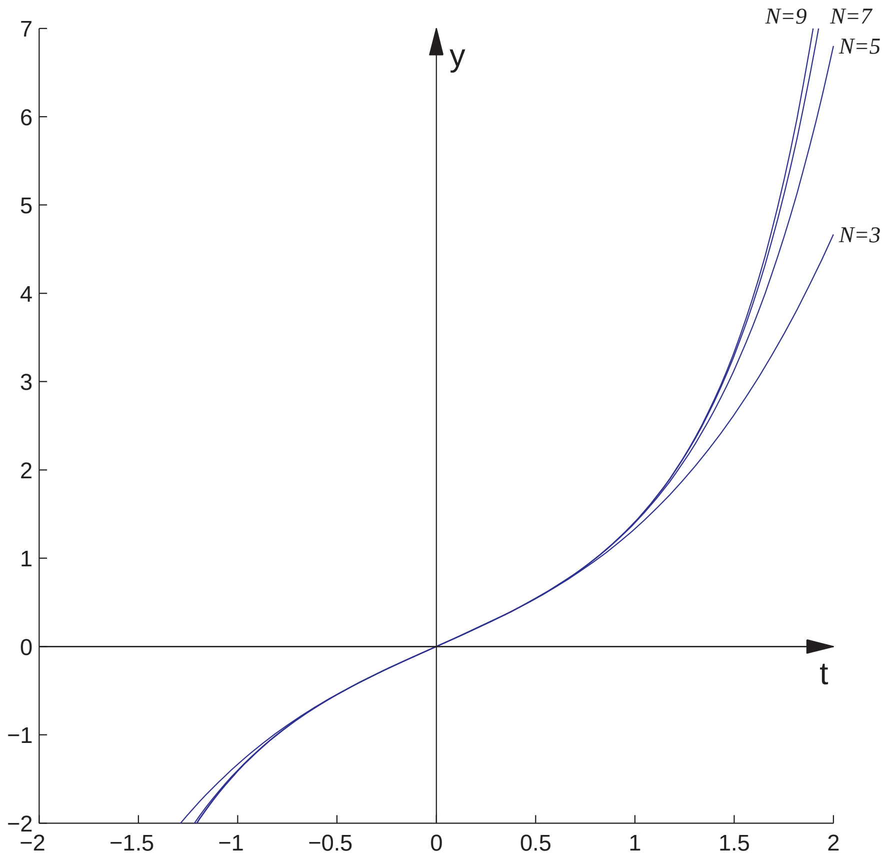


Figura 2.25: Somas parciais da solução $y_2(x)$ da equação do Exemplo 2.17

na equação, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

Usando a propriedade Proposição 2.6 (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$, então da equação acima obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

Usando a propriedade Proposição 2.6 (a)

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n]x^n = 0$$

Como esta é a série nula, então pela propriedade Proposição 2.6 (d) os seus coeficientes têm que ser iguais a zero, ou seja,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n = 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

De onde obtemos a **fórmula de recorrência**

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{(n+2)(n+1)}a_n = \dfrac{1}{n+2}a_n, \; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Usando a fórmula de recorrência $a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}a_n$, a partir do a_0 podemos obter o a_2, a partir do a_2 podemos obter o a_4 e assim por diante, ou seja,

$$a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2}a_0, \quad a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2}a_0, \quad \cdots$$

Assim os coeficientes de índice par (múltiplos de 2) são dados por

$$a_{2k} = \frac{1}{2k}a_{2k-2} = \frac{1}{2k(2k-2)}a_{2k-4} = \frac{1}{2k(2k-2)\cdots 2}a_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Usando a fórmula de recorrência $a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}a_n$, a partir do a_1 podemos obter o a_3, a partir do a_3 podemos obter o a_5 e assim por diante, ou seja,

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1, \quad a_5 = \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3}a_1, \quad \cdots$$

Assim os coeficientes de índice ímpar (múltiplos de 2 mais 1) são dados por

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}a_{2k-3} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}a_1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Separando-se a série de $y(x)$ em duas séries, uma que só contém termos de potência par e outra que só contém termos de potência ímpar e substituindo-se os valores dos coeficientes a_{2k} e a_{2k+1} encontrados acima obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \\ &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k} \right) + \\ &\quad + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1} \right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}$$

Pelo Teorema 2.7 na página 203 esta solução em série é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $P(z) = 1 \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.18. Considere a equação

$$(x+1)y'' + y = 0.$$

Substituindo-se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

na equação $(x+1)y'' + y = 0$, obtemos

$$(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0$$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3 \cdot 2}a_1 = \frac{1}{3 \cdot 2}a_0 - \frac{1}{3 \cdot 2}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4 \cdot 3}a_2 = -\frac{1}{3 \cdot 2^2}a_0 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}a_1 + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}a_0 = -\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}a_0 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}a_1$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 - \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}x^4 + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots \right) \end{aligned}$$

Portanto a equação tem solução geral

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 - \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

Pelo Teorema 2.7 na página 203 as séries acima convergem pelo menos para $|x| < 1$.

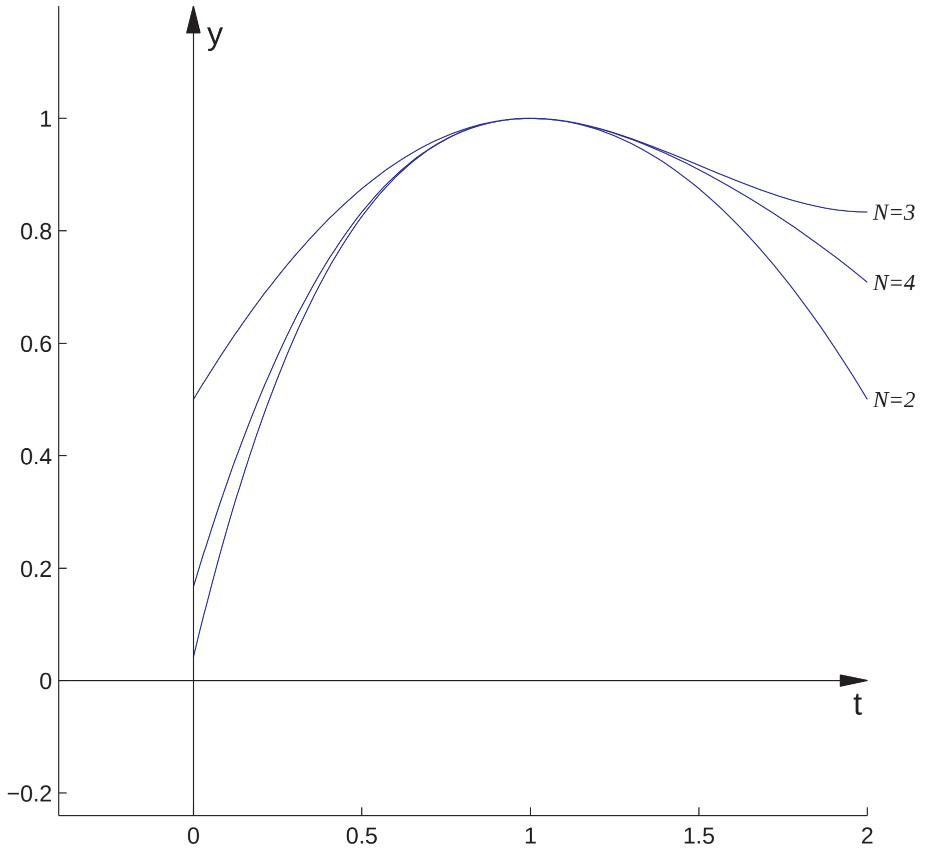


Figura 2.26: Somas parciais da solução $y_1(x)$ da equação do Exemplo 2.19

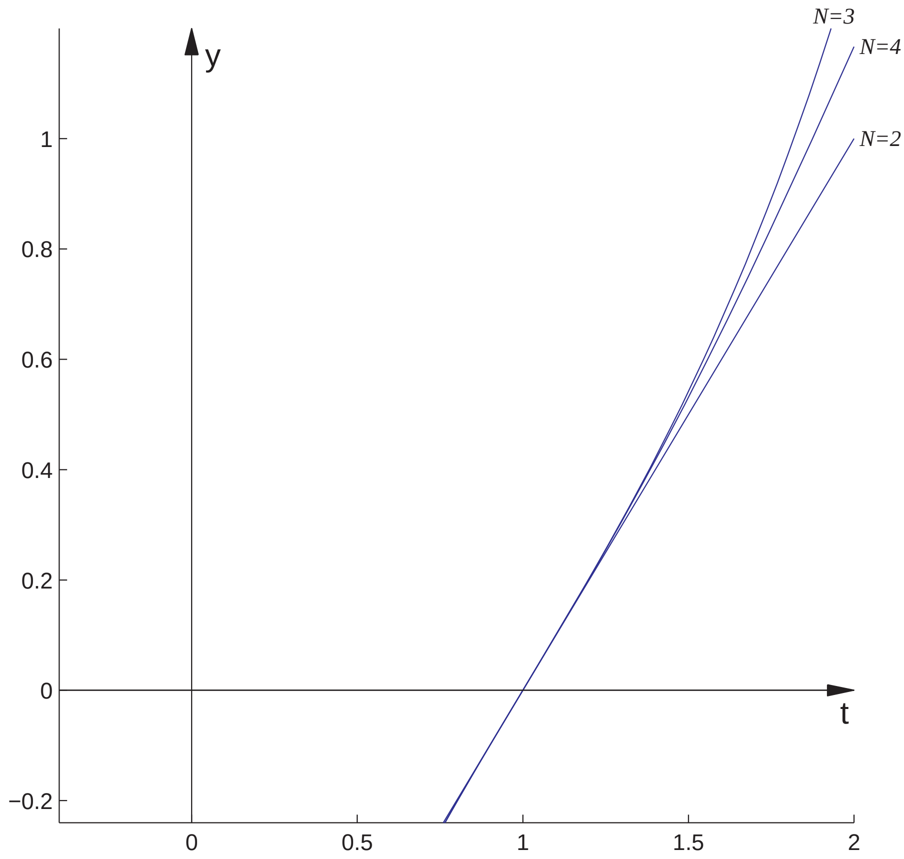


Figura 2.27: Somas parciais da solução $y_2(x)$ da equação do Exemplo 2.19

Exemplo 2.19. Considere a equação

$$xy'' + y = 0$$

Não podemos aplicar o Teorema 2.7 diretamente pois $P(x) = x$ é tal que $P(0) = 0$. Mas podemos fazer uma translação definindo, por exemplo, $x' = x - 1$. Obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx'}\right) = \frac{d}{dx'}\left(\frac{dy}{dx'}\right)\frac{dx'}{dx} = \frac{d^2y}{dx'^2},$$

Assim a equação se transforma em

$$(x'+1)\frac{d^2y}{dx'^2} + y = 0$$

Esta equação tem uma solução em série de potências de x' obtida no Exemplo 2.18. Substituindo-se $x' = x - 1$ na solução do exemplo anterior obtemos que a solução geral da equação é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3\cdot 2}(x-1)^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}(x-1)^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{3\cdot 2}(x-1)^3 + \frac{1}{3\cdot 4}(x-1)^4 + \cdots$$

Pelo Teorema 2.7 na página 203 as séries acima convergem pelo menos para $|x-1| < 1$ ou $0 < x < 2$.

Exercícios (respostas na página 262)

4.1. Resolva a equação diferencial dada em série de potências de x (em torno de $x_0 = 0$). Escreva uma fórmula fechada para o termo geral de cada série que compõe a solução. Dê um intervalo onde a solução é válida.

(a) $y'' + xy' + 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

(b) $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$.

(c) $(4 - x^2)y'' + 2y = 0$.

(d) $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0$.

(e) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

(f) $2y'' + xy' + 3y = 0$

(g) $y'' - xy = 0$

4.2. Resolva a equação diferencial dada em série de potências de x (em torno de $x_0 = 0$). Escreva os três primeiros termos não nulos (se existirem) de cada série que compõe a solução. Dê um intervalo onde a solução é válida.

(a) $y'' + k^2x^2y = 0$, em que $k \in \mathbb{R}$.

(b) $(1 - x)y'' + y = 0$.

(c) $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

4.3. Mostre que se

$$y(x) = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right).$$

é solução em série de potências da equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

então

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

são soluções fundamentais da equação

4.4. Considere a **equação de Legendre**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Legendre é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) Mostre que se $\alpha = 2N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\alpha = 2N+1$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N+1$ contendo apenas potências ímpares de x.

(c) O **polinômio de Legendre** é definido como a solução polinomial da equação de Legendre, para $\alpha = N$, que satisfaz $P_N(1) = 1$. Determine os polinômios de Legendre para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

4.5. Considere a **equação de Hermite**

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Hermite é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda - 2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) Mostre que se $\lambda = 4N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\lambda = 2(2N+1)$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N+1$ contendo apenas potências ímpares de x.

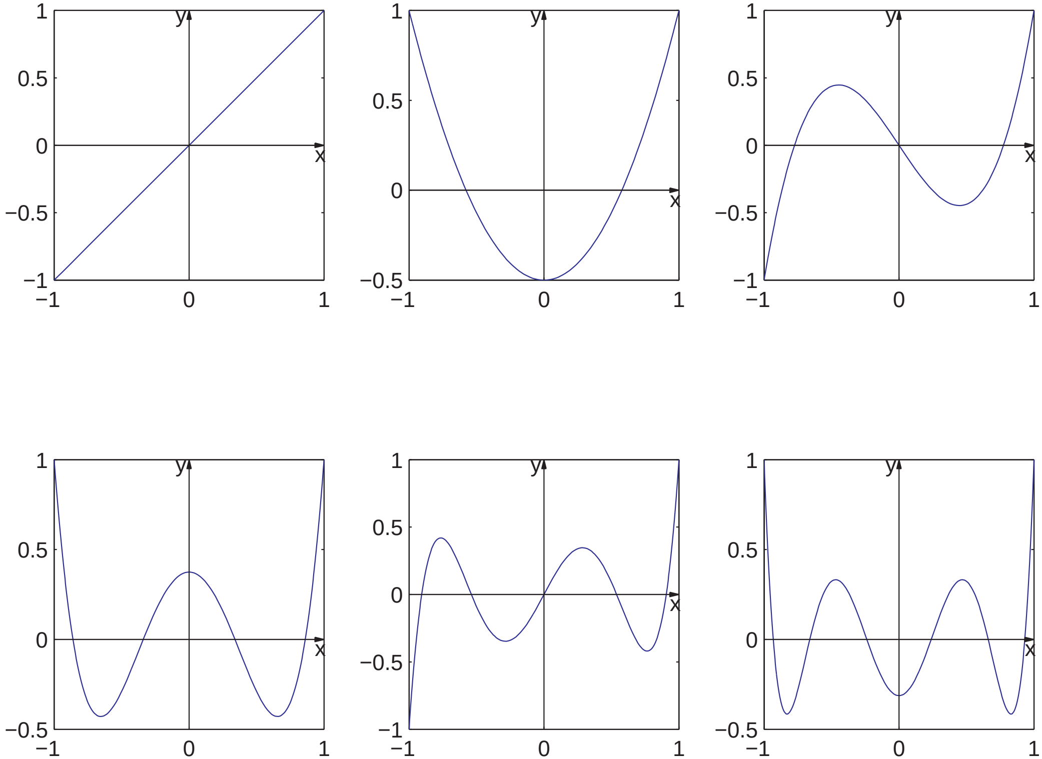


Figura 2.28: Polinômios de Legendre $P_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

(c) O **polinômio de Hermite** $H_N(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Hermite, para $\lambda = 2N$, tal que o coeficiente de x^N é igual a 2^N. Determine os polinômios de Hermite para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

4.6. Considere a **equação de Chebyshev de primeiro tipo**

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Chebyshev é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-2)^2 - \alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-1)^2 - \alpha^2)\cdots(1 - \alpha^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) Mostre que se $\alpha = 2N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\alpha = 2N + 1$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N + 1$ contendo apenas potências ímpares de x.

(c) O **polinômio de Chebyshev de primeiro tipo** $T_N(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Chebyshev de primeiro tipo, para $\alpha = N$, tal que o coeficiente de x^N é igual a 1, se $N = 0$ e igual a 2^{N-1}, se $N > 0$. Determine os polinômios de Chebyshev de primeiro tipo para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

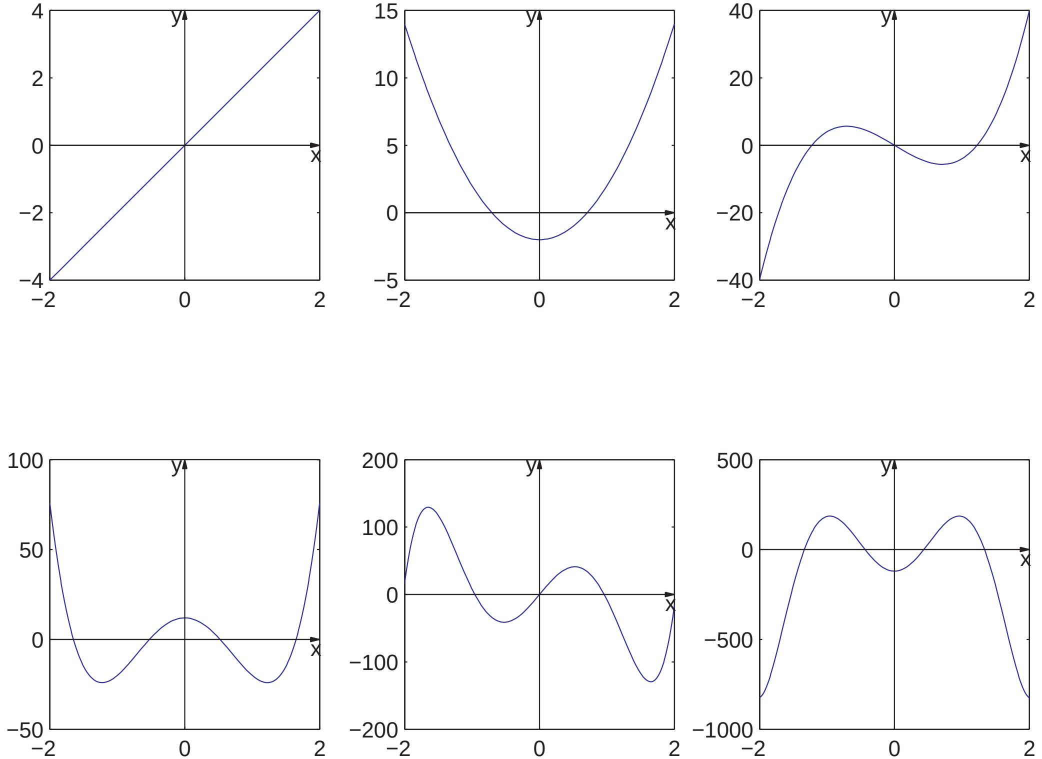


Figura 2.29: Polinômios de Hermite $H_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

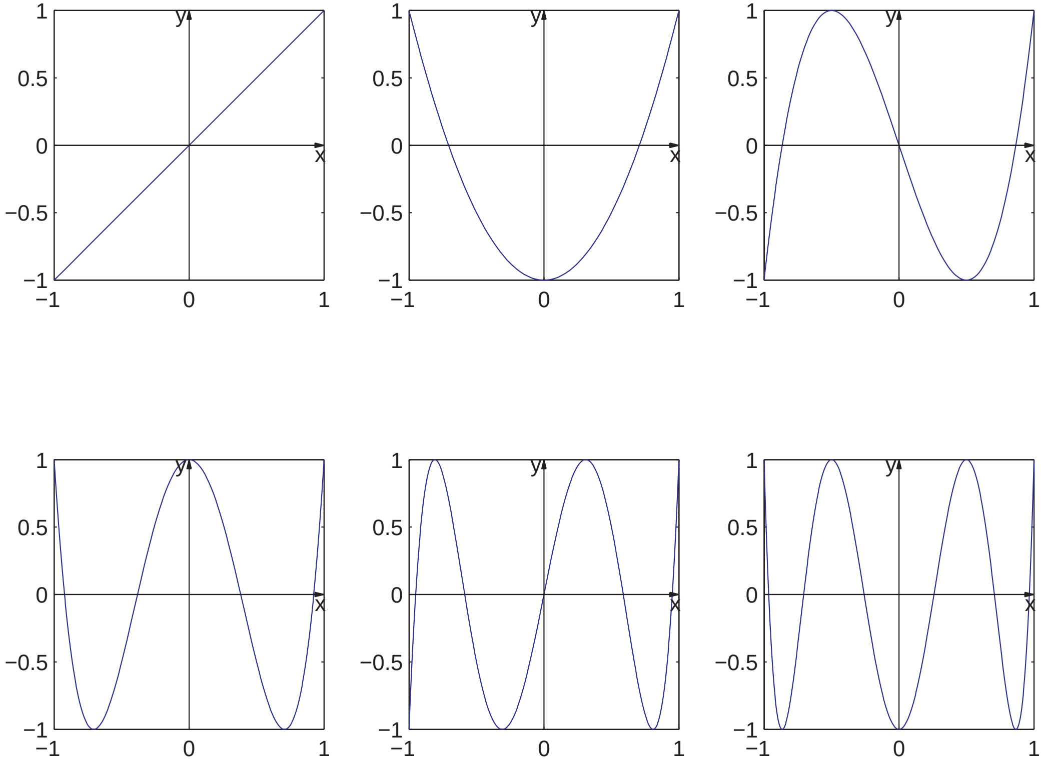


Figura 2.30: Polinômios de Chebyshev de primeiro tipo $T_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

2.5 Respostas dos Exercícios

1. Equações Homogêneas (página 153)

1.1. (a) $2x^2y_1'' - xy_1' - 9y_1 = 2x^2(6x) - x(3x^2) - 9x^3 = 12x^3 - 3x^3 - 9x^3 = 0$
Logo, $y_1(x) = x^3$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^3$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^3.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^3 + 3v(x)x^2 \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x,$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$2x^2y'' - xy' - 9y = 0$
$2x^2(v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x) - x(v'(x)x^3 + 3v(x)x^2) - 9v(x)x^3 = 0$
$2x^5v''(x) + 11x^4v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$2xw' + 11w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$2\frac{w'}{w} = -\frac{11}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln|w|\right) = -\frac{11}{x}$$

$$2\ln|w| = -11\ln|x| + \tilde{c}_1$$
$$\ln\left|x^{11}(w(x))^2\right| = \tilde{c}_1$$
$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-11/2}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-11/2} dx = -c_1 \frac{2}{9} x^{-9/2} + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = -9/2$ obtemos $v(x) = x^{-9/2}$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-9/2}x^3 = x^{-3/2}$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^{-3/2}$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^3 & x^{-3/2} \\ 3x^2 & -\frac{3}{2}x^{-5/2} \end{bmatrix} = -\frac{9}{2}x^{1/2} \neq 0$, para $x \neq 0$.

1.2. (a) $x^2 y_1'' + 3xy_1' + y_1 = x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) + x^{-1} = 2x^{-1} - 3x^{-1} + x^{-1} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^{-1}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^{-1}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{-1}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2} \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3},$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$x^2y'' + 3xy' + y = 0$
$x^2(v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3}) + 3x(v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2}) + v(x)x^{-1} = 0$
$xv''(x) + v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|w| = -\ln|x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1\int x^{-1}dx = c_1\ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-1}\ln x$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^{-1}$ e $y_2(x) = x^{-1}\ln x$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-1}\ln x \\ -x^{-2} & x^{-2}(1-\ln x) \end{bmatrix} = x^{-3} \neq 0$, para $x \neq 0$

1.3. A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1-\alpha)$$

(a) Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t) + c_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$$

(b) Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

(c) Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

1.4. (a) $(x+3)z_1'' + (x+2)z_1' - z_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = 3x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)z_2'' + (x+2)z_2' - z_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)z_3'' + (x+2)z_3' - z_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $z_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = e^{-x}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-x}.$$

Como
$y'(x) = (v'(x) - v(x))e^{-x}$ e $y''(x) = (v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x}$,
então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$(x+3)y'' + xy' - y = 0$
$(x+3)(v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x} + (x+2)(v'(x) - v(x))e^{-x} - v(x)e^{-x} = 0.$
$(x+3)v''(x) + (-2(x+3) + (x+2))v'(x) = 0$
$(x+3)v''(x) - (x+4)v'(x) = 0$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$(x+3)w' - (x+4)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$\ln|w| = x + \ln(x+3) + \tilde{c}_1$$

$$\ln\left|\frac{w(x)}{x+3}\right| - x = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 e^x (x+3)$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int e^x (x+3) dx = c_1 (x+2) e^x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = (x+2)e^x$ e uma segunda solução da equação

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = (x+2) e^x e^{-x} = x + 2$$

Vamos ver que $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x + 2$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-x} & x+2 \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix} = e^{-x}(3+x) \neq 0$, para $x \neq -3$

(c) Como $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x + 2$ são soluções fundamentais da equação a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 (x+2),$$

Agora, como $y(1) = 1$, então substituindo $x = 1$ e $y = 1$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) \quad = \quad -c_1 e^{-x} + c_2$$

obtemos $-c_1 e^{-1} + c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1, \quad -c_1 e^{-1} + c_2 = 3$$

obtemos $c_1 = -2e$ e $c_2 = 1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) \quad = \quad -2e^{-x+1} + x + 2$$

1.5. (a) $x^2y_1'' - 6xy_1' + 10y_1 = x^2(2) - 6x(2x) + 10(x^2) = 0$
$x^2y_2'' - 6xy_2' + 10y_2 = x^2(20x^3) - 6x(5x^4) + 10(x^5) = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação.

(b) Como
$\det \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$
então a solução geral é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

Agora, como $y(1) = 3$, então substituindo $x = 1$ e $y = 3$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 + c_2 = 3$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) = 2c_1x + 5c_2x^4$$

obtemos $2c_1 + 5c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 2c_1 + 5c_2 = 3$$

obtemos $c_2 = 4$ e $c_1 = -1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 4x^2 - x^5$$

1.6. $y'' + 2y' = 0$ tem solução geral $y(t) = k_1e^{-2t} + k_2$. Logo, $k_1 + k_2 = a$, $k_1 = -b/2$ e $k_2 = a + b/2$ e $y \to a + b/2$ quando $t \to +\infty$.

1.7. Se $0 < b < 2$ então as raízes da equação característica são

$$-b/2 \pm i\sqrt{4 - b^2}/2$$

e as soluções são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b/2)t} \cos \omega t + c_2 e^{(-b/2)t} \sin \omega t,$$

onde $\omega = \sqrt{4 - b^2}/2$. Logo, como $0 < b$, então $y \to 0$ quando $t \to +\infty$.

1.8. As raízes da equação característica são ± 2 e a solução geral é $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$. Então $c_1 = -c_2 = b/4$ e

$$y(t) = \frac{b}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) = 0$$

Como $b \neq 0$, então $e^{2t} = e^{-2t}$, ou seja, $e^{4t} = 1$ e $t = 0$.

1.9. A equação característica tem $1/2$ como única raiz. Assim, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}.$$

$y(0) = 2$ implica que $c_1 = 2$.

$$y'(t) = \frac{c_1}{2} e^{t/2} + c_2 (1 + \frac{t}{2}) e^{t/2}$$

$y'(0) = b$ implica que $c_1/2 + c_2 = b$. Assim, $c_2 = b - 1$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{(1/2)t}(2 + (b-1)t).$$

Logo, se $b \geq 1$, $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

1.10. A equação característica é

$$r^2 + 2b + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(b^2 - 1)$$

- Se $|b| > 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm \sqrt{b^2-1}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b-\sqrt{b^2-1})t} + c_2 e^{(-b+\sqrt{b^2-1})t}.$$

  Se $b > 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $b = \pm 1$ então a raíz da equação característica é $-b$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}.$$

  Se $b = 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $-1 < b < 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm i\sqrt{1-b^2}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} \cos\left(\sqrt{1-b^2}\,t\right) + c_2 e^{-bt} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-b^2}\,t\right).$$

  Se $0 < b < 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Logo, para $b > 0$, então $y(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

1.11. Substituindo-se $y = x^r$, $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (2.18) obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação (2.18) se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.12.

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1-1} & r_2x^{r_2-1}\end{bmatrix} \\ &= x^{r_1-1}x^{r_2-1}\det\begin{bmatrix} x & x \\ r_1 & r_2\end{bmatrix} \\ &= (r_2-r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0,\end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

1.13. Neste caso, para $x > 0$, pela fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} = e^{r_1 \ln x} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} \\ &= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(\beta \ln x) + i\,\mathrm{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i\,\mathrm{sen}(\beta \ln x)\right) \quad \text{e} \\ y_2(x) &= x^{r_2} = e^{r_2 \ln x} = e^{(\alpha-i\beta)\ln x} \\ &= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(-\beta \ln x) + i\,\mathrm{sen}(-\beta \ln x)\right) \\ &= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) - i\,\mathrm{sen}(\beta \ln x)\right)\end{aligned}$$

são soluções complexas da equação diferencial (2.18).

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\ &= C_1 x^{\alpha} \left(\cos(\beta \ln x) + i \,\mathrm{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &\quad + C_2 x^{\alpha} \left(\cos(\beta \ln x) - i \,\mathrm{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &= (C_1 + C_2) x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \\ &\quad + i(C_1 - C_2) x^{\alpha} \,\mathrm{sen}(\beta \ln x) \end{aligned}$$

Tomando $C_1 = C_2 = 1/2$, temos que a solução

$$u(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$$

e tomando $C_1 = -\frac{i}{2}$ e $C_2 = \frac{i}{2}$, temos a solução

$$v(x) = x^{\alpha} \,\mathrm{sen}(\beta \ln x).$$

$$\det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix} = \beta x^{2\alpha - 1} \neq 0, \quad \forall\, x > 0.$$

1.14.

$$y(x) = v(x) y_1(x) = v(x) x^{\frac{1-b}{2}}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x) x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2} v(x) x^{\frac{-1-b}{2}} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} \\ &- \frac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}, \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.18):

$x^2(v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} - \frac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}) + bx(v'(x)x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(x)x^{\frac{-1-b}{2}}) + cv(x)x^{\frac{1-b}{2}} = 0$

$$x^{\frac{5-b}{2}}v''(x) + x^{\frac{3-b}{2}}v'(x) = 0.$$

$$xv''(x) + v'(x) = 0.$$

Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w| + \ln|x|) = 0$$

$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-1}dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$$

Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_1} \ln x$$

são soluções fundamentais da equação diferencial (2.18).

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_1} \ln x \\ r_1 x^{r_1-1} & (1 + r_1 \ln x) x^{r_1-1} \end{bmatrix} \\
&= x^{2r_1-1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r_1 & (1 + r_1 \ln x) \end{bmatrix} \\
&= x^{2r_1-1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0.
\end{aligned}$$

1.15. (a) Equação indicial:

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$$

(b) Equação indicial:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

(c) Equação indicial:

$$r(r-1)+3r+5=0 \Leftrightarrow r=-1\pm 2i$$

Solução geral:

$$y(x)=c_1x^{-1}\cos(2\ln x)+c_2x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln x)$$

2. Equações não Homogêneas (página 171)

2.1. (a) A equação característica é

$$r^2+5r+6=0.$$

$$\Delta=25-24=1$$

As raízes da equação característica são $r_1=-3$ e $r_2=-2$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}$$

$y_p(x)=(A_0+A_1x)e^{-5x}$,
$y_p'(x)=A_1e^{-5x}-5(A_0+A_1x)e^{-5x}=(A_1-5A_0-5A_1x)e^{-5x}$,
$y_p''(x)=-5A_1e^{-5x}-5(A_1-5A_0-5A_1x)e^{5x}=(-10A_1+25A_0+25A_1x)e^{-5x}$.
Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos
$(-10A_1+25A_0+25A_1x)+5(A_1-5A_0-5A_1x)+6(A_0+A_1x)=x$
Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6A_0 & - & 5A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $A_0=5/36$ e $A_1=1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x)=\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{6}x\right)e^{-5x}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6}x\right) e^{-5x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

(b) A equação característica é

$$r^2 - 4r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8$$

As raízes da equação característica são $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}\,x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

$y_p(x) = A_0 + A_1 x$, $y_p'(x) = A_1$, $y_p''(x) = 0$. Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos

$$-4A_1 + 6(A_0 + A_1 x) = 3x$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6A_0 & - & 4A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 3 \end{array}\right.$$

que tem solução $A_0 = 1/3$ e $A_1 = 1/2$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}\,x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

(c) Eq. característica: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$.

Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)$

Sol. particular da forma $y_p(t) = t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)] + C + Dt$.

$y_p'(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) + t[-2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)] + D$

$y_p''(t) = (-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t)$

Substituindo-se na equação

$(-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t) + 4t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)] + 4C + 4Dt = 2\operatorname{sen}(2t) + t$

$[-4At + 4B + 4At]\cos(2t) + [-4Bt - 4A + 4Bt]\operatorname{sen}(2t) + 4C + 4Dt = 2\operatorname{sen}(2t) + t$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4B & = & 0 \\ -4A & = & 2 \\ 4C + 4Dt & = & t \end{array} \right.$$

Obtemos $A = -1/2, B = 0, C = 0, D = 1/4$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}t$$

(d) Eq. característica: $r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}i$.

Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$

Sol. particular da forma $y_p(t) = Ae^t + B$.

$y_p'(t) = Ae^t$

$y_p''(t) = Ae^t$

Substituindo-se na equação

$Ae^t + 2(Ae^t + B) = e^t + 2$
$3Ae^t + 2B = e^t + 2$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3A & = & 1 \\ 2B & = & 2 \end{array}\right.$$

Obtemos $A = 1/3$, $B = 1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}e^t + 1$$

2.2. (a) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{-2\,t} + c_2\, e^t$$

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = (-2A_2)t^2 + (2A_2 - 2A_1)t + (2A_2 + A_1 - 2A_0)$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2A_2 & & & & & = & 1 \\ 2A_2 & - & 2A_1 & & & = & 0 \\ 2A_2 & + & A_1 & - & 2A_0 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = -9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{-2\,t} + c_2\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução do PVI

$$y(t) = 7/12\, e^{-2\,t} + 5/3\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

(b) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, te^{-t}$$

Solução particular da equação não homogênea:

$$y_p(t) = A\cos 2t + B\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Substituindo-se na equação
$y_p'' + 2y_p' + y_p = (-3A + 4B)\cos 2t + (-4A - 3B)\,\mathrm{sen}\, 2t = 3\,\mathrm{sen}\, 2t$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -3A & + & 4B & = & 0 \\ -4A & - & 3B & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = -\frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Derivada da solução geral:
$y'(t) = -c_1\, e^{-t} + c_2\,(1-t)e^{-t} + \frac{24}{25}\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{18}{25}\cos 2t$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$:

$$c_1 = \frac{12}{25}, \quad c_2 = \frac{6}{5}$$

Solução do PVI:
$y(t) = \frac{12}{25}\, e^{-t} + \frac{6}{5}\, te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\,2t$

(c) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t$$

$$y_p(t) = 1/3\, e^{-t}$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t + 1/3\, e^{-t}$$

Solução do PVI

$$y(t) = -1/3\, e^{2\,t} + e^{2\,t} t + 1/3\, e^{-t}$$

(d) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2 e^{-t/2}\,\mathrm{sen}(t/2)$$

Solução particular:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Substituindo-se na equação:

$2y_p'' + 2y_p' + y_p = (A_2)t^2 + (4A_2 + A_1)t + (4A_2 + 2A_1 + A_0) = t^2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} A_2 & & & & & = & 1 \\ 4A_2 & + & A_1 & & & = & 0 \\ 4A_2 & + & 2A_1 & + & A_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

Derivada da solução geral:
$y'(t) = c_1 e^{-t/2}(-(1/2)\cos(t/2) - (1/2)\operatorname{sen}(t/2)) + c_2 e^{-t/2}(-(1/2)\operatorname{sen}(t/2) + (1/2)\cos(t/2)) + 2(t-2)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$:

$$c_1 = -4, \quad c_2 = 4$$

Solução do PVI:

$$y(t) = -4e^{-t/2}\cos(t/2) + 4e^{-t/2}\operatorname{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

2.3. (a) A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1-\alpha)$$

i. Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$$

ii. Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

iii. Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

(b) $y_p(t) = t[(A_0 + A_1 t)e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t)]$, se $\alpha > 1$.

(c) i. Se $\alpha > 1$, então $y(t) \to 0$, pois $e^{-t} \to 0$ e $\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t)$ e $\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$ são limitados.

ii. Se $\alpha = 1$, então $y(t) \to 0$, pois $e^{-t} \to 0$ e $te^{-t} \to 0$

iii. Se $0 < \alpha < 1$, então $y(t) \to 0$, pois $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$ ($\sqrt{1-\alpha} < 1$).

Concluindo, $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, para $\alpha > 0$.

3. Oscilações (página 197)

3.1. (a) Equação característica: $r^2 + 2 = 0$
Raízes: $r = \pm\sqrt{2}i$
Solução geral: $y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right)$
Derivada da solução geral: $y'(t) = -c_1\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right) + c_2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\, t\right)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 1$:

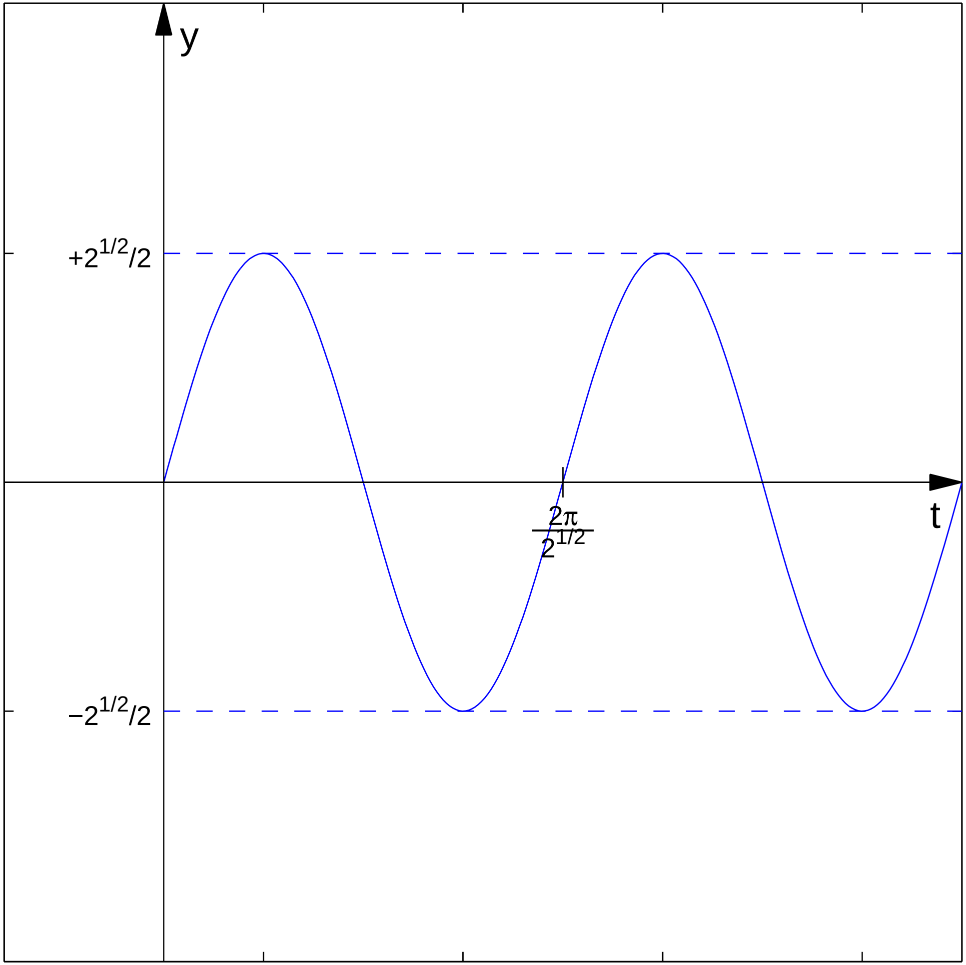
$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right)$$

A amplitude é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a freqüência é igual a $\sqrt{2}$, a fase é igual a $\pi/2$ e o período é igual a $2\pi/\sqrt{2}$.

(b)


y
+2^{1/2}/2
−2^{1/2}/2
2π
2^{1/2}
t

3.2. (a) Equação característica: $2r^2 + 3 = 0$
Raízes: $r = \pm\sqrt{3/2}\, i$
Solução geral: $y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right) + c_2 \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$
Derivada da solução geral:
$y'(t) = -c_1\sqrt{3/2}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3/2}\, t\right) + c_2\sqrt{3/2}\cos\left(\sqrt{3/2}\, t\right)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$, $y' = 0$:

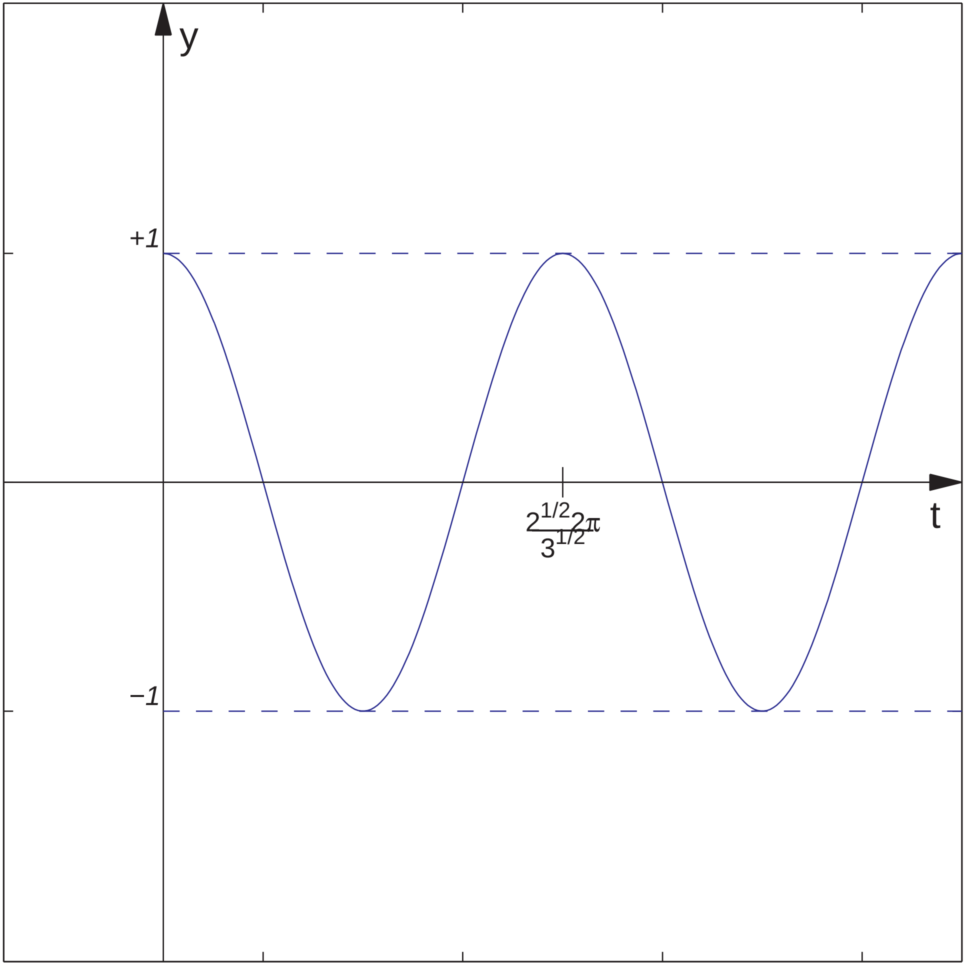
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a freqüência é igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\sqrt{2}\pi/\sqrt{3}$.

(b)


y
+1
−1
t
$\frac{2^{1/2}2\pi}{3^{1/2}}$

3.3.

$$2u'' + 3u = 3\cos(3t)$$

$$2r^2 + 3 = 0 \quad r = \pm i\sqrt{3/2}$$

Solução da equação homogênea

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{3/2}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\, t\right)$$

$$u_p(t) = A\, \cos(3t) + B \operatorname{sen}(3t)$$

$$u_p'(t) = -3A \operatorname{sen}(3t) + 3B\, \cos(3t)$$

$$u_p''(t) = -9A\, \cos(3t) - 9B \operatorname{sen}(3t)$$

Substituindo-se $u_p(t)$, $u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação obtemos

$$-15A \cos(3t) - 15B \operatorname{sen}(3t) = 3\cos(3t)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -15A & & & = & 3 \\ & & -15B & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = -1/5$ e $B = 0$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$u_p(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t)$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + c_1 \cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

$u'(t) = \frac{3}{5}\operatorname{sen}(3t) - \sqrt{3/2}c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{3/2}c_2 \cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

$u(0) = u_0 = -\frac{1}{5} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_0 + \frac{1}{5}$

$$u'(0) = u_0' = \sqrt{3/2}c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \sqrt{2/3}u_0'$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + (u_0 + \frac{1}{5})\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{2/3}u_0' \operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

3.4.

$$2u'' + u' + \frac{1}{2}u = 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$u(t) = c_1 e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + c_2 e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$

$u'(t) = c_1\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right) + c_2\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right)$

$$u(0) = u_0 = c_1$$

$$u'(0) = u_0' = -\frac{c_1}{4} + \frac{\sqrt{3}c_2}{4} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{4u_0'+u_0}{\sqrt{3}}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = u_0 e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{4u_0'+u_0}{\sqrt{3}} e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$$

3.5. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100\cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 10i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1\cos(10t) + c_2\operatorname{sen}(10t)$$

A freqüência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{100}} = 10.$$

O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \text{ segundos}$$

(a) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -4. \end{cases}$$

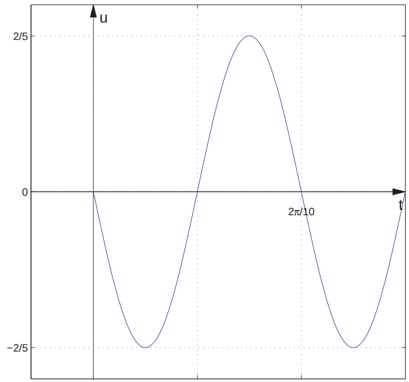
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 = c_1, \\ u'(0) = -4 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(10t)$$

A amplitude é igual a $2/5$.



(b) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 10. \end{cases}$$

$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 = c_1, \\ u'(0) = 10 = 10c_2. \end{cases}$$

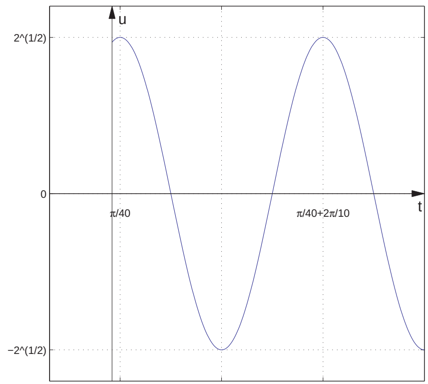
Logo $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}, \quad \delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \cos(10t) + \operatorname{sen}(10t) = \sqrt{2} \cos(10t - \pi/4)$$

A amplitude é igual a $\sqrt{2}$.



(c) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

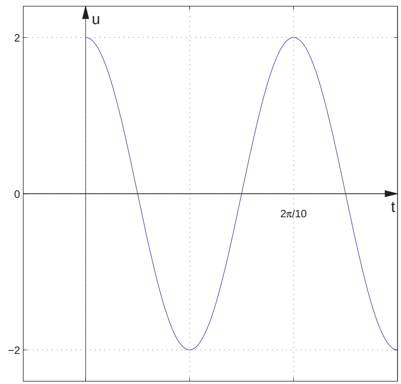
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2\cos(10t)$$

A amplitude é igual a 2.



3.6. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + \gamma u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2r^2 + \gamma r + 10^4 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot 10^6$$

(a)
- Se $\gamma > 2 \cdot 10^3$ o sistema é super-amortecido.
- Se $\gamma = 2 \cdot 10^3$ o o sistema tem um amortecimento crítico.
- Se $\gamma < 2 \cdot 10^3$ o sistema é sub-amortecido

(b) Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{10^4}{10} = 10^3$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2u'' + 10^3u' + 10^4u = 0$$

Equação característica:

$$10^2r^2 + 10^3r + 10^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -5 \pm 5\sqrt{3}\,i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t) + c_2e^{-5t}\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t)$$

A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 10u' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= e^{-5t}((5\sqrt{3}c_2 - 5c_1)\cos(5\sqrt{3}\,t) + \\ &\quad + (-5\sqrt{3} - 5c_2)\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t)) \end{aligned}$$

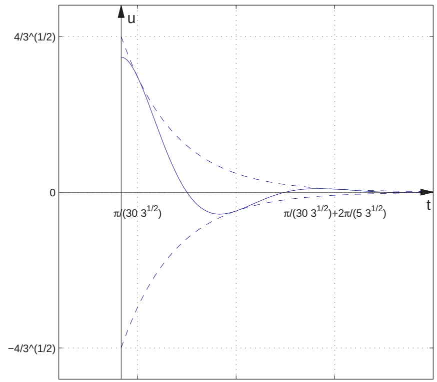
$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 5\sqrt{3}c_2 - 5c_1. \end{cases}$$

Logo $c_1 = 2$ e $c_2 = 2/\sqrt{3}$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\delta = \arccos\frac{c_1}{R} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

e a solução do problema de valor inicial é
$u(t) = 2e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{3}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\,t) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\,t - \pi/6)$
A quase-freqüência é igual a $5\sqrt{3}$ e o quase-período é igual a $2\pi/5\sqrt{3}$.



3.7.

$$\begin{cases} 10^2u'' + 10^4u = 9600\cos(6t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \,\mathrm{sen}\,(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \,\mathrm{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 3/2$ e $B_0 = 0$.

A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \,\mathrm{sen}\,(10t) + \frac{3}{2}\cos(6t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = -3/2, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

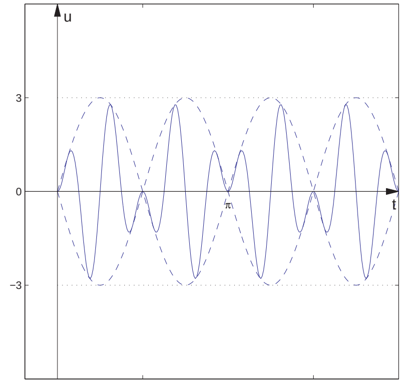
$$u(t) = \frac{3}{2}\left(\cos(6t) - \cos(10t)\right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$$

então

$$u(t) = 3\,\mathrm{sen}(2t)\,\mathrm{sen}(8t)$$



3.8.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 10^3 \cos(10t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos{(10t)} + c_2 \operatorname{sen}{(10t)}$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = t(A_0 \cos(10t) + B_0 \operatorname{sen}(10t))$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 0$ e $B_0 = 1/2$.

A solução geral da equação é

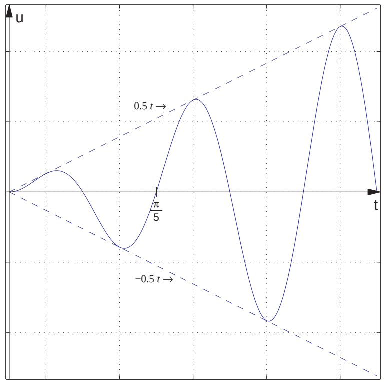
$$u(t) = c_1 \cos{(10t)} + c_2 \operatorname{sen}{(10t)} + \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$



3.9. Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{4200}{1} = 4200$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 4200 u' + 10^4 u = 26000 \cos(6t)$$

A solução estacionária é a solução particular da equação não homogênea

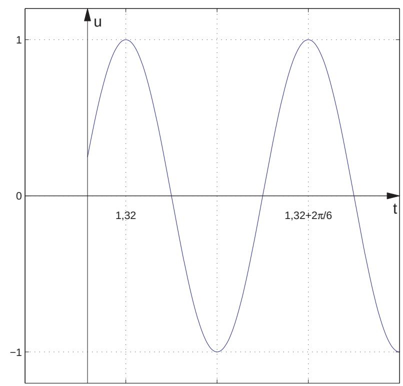
$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \operatorname{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos

$$A_0 = 16/65, \quad B_0 = 63/65,$$

$$R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1, \quad \delta = \arccos \frac{A_0}{R} = \arccos \frac{16}{65} \approx 1,32.$$

$$u_p(t) = \frac{16}{65} \cos(6t) + \frac{63}{65} \operatorname{sen}(6t) = \cos(6t - 1,32)$$



4. Soluções em Séries de Potências (página 218)

4.1. (a) Substituindo-se $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y''+xy'+2y=0$, obtemos
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$
$2a_2+2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+2a_n]x^n=0$
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2+2a_0=0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+2a_n=0, \;\; n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2=-a_0 \\ a_{n+2}=-\frac{1}{n+1}a_n, \;\; n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$a_4=\frac{(-1)^2}{3}a_0$, $a_6=\frac{(-1)^3}{5\cdot 3}a_0$, $\cdots$ $a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}a_0$, $k=1,2,\ldots$
$a_3=-\frac{1}{2}a_1$, $a_5=\frac{1}{4\cdot 2}a_1$,, $\cdots$ $a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2}a_1$ $k=1,2,\ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}= \\ &= a_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}x^{2k}\right)+ \\ &\quad +a_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2}x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k+1}$$

Agora, como $y(0) = 4$, então substituindo $x = 0$ e $y = 4$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $a_0 = 4$. Como $y'(0) = -1$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = -1$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} x^{2k-1} + \\ &\quad + a_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}\right) \end{aligned}$$

obtemos $a_1 = -1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} y(x) &= 4\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} x^{2k}\right) \\ &\quad - \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$, obtemos

$(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$2a_2 + 6a_3x - 4a_1x + 6a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_2 + 6a_0 = 0 \\ 6a_3 + 2a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \\ \quad + n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = 0, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = -3a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{3}a_1 \\ a_{n+2} = -\frac{(n-3)(n-2)}{(n+2)(n+1)}a_n, \; n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$a_4 = 0$, $a_6 = 0$, $\cdots$ $a_{2k} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$
$a_5 = 0$, $a_7 = 0$, $\cdots$ $a_{2k+1} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \left(1 - 3x^2\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que
$y_1(x) = 1 - 3x^2$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{3}x^3$
A solução acima é válida para todo x.

(c) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(4 - x^2)y'' + 2y = 0$, obtemos
$(4 - x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$8a_2 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_3 x + 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}[4(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + 2a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 8a_2 + 2a_0 = 0 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 2a_1 = 0 \\ 4(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + 2a_n = 0, \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{4}a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{4 \cdot 3}a_1 \\ a_{n+2} = \frac{n^2-n-2}{4(n+2)(n+1)}a_n \\ \quad = \frac{n-2}{4(n+2)}a_n, \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = 0$, $a_6 = 0$, $\cdots$ $a_{2k} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$
$a_5 = -\frac{1}{4^2 \cdot 5 \cdot 3}a_1$, $a_7 = -\frac{1}{4^3 \cdot 7 \cdot 5}a_1$, $\cdots$ $a_{2k+1} = -\frac{1}{4^k(2k+1)(2k-1)}a_1$, $k = 1, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) + \\ &\quad + a_1\left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)(2k-1)}x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

em que
$y_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$ e $y_2(x) = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$
A série acima converge pelo menos para $|x| < 2$.

(d) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$, obtemos
$(3-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$6a_2 + 3^2\cdot 2\cdot a_3 x - 3a_1 x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}[3(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 3na_n - a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 6a_2 - a_0 = 0 \\ 3^2\cdot 2\cdot a_3 - 4a_1 = 0 \\ 3(n+2)(n+1)a_{n+2} \\ \quad -n(n-1)a_n - 3na_n - a_n = 0, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0 \\ a_3 = \frac{2}{3^2}a_1 \\ a_{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{3(n+2)(n+1)}a_n \\ \quad = \frac{(n+1)^2}{3(n+2)(n+1)}a_n \\ \quad = \frac{n+1}{3(n+2)}a_n, \ n = 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

$a_4 = \frac{3}{3^2 \cdot 4 \cdot 2} a_0$, $a_6 = \frac{5 \cdot 3}{3^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} a_0$, $\cdots$ $a_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} a_0$, $k = 2, 3, \ldots$

$a_5 = \frac{4 \cdot 2}{3^2 \cdot 5 \cdot 3} a_1$, $a_7 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{3^3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} a_1$, $\cdots$ $a_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} a_1$, $k = 1, 2, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{k=0}^\infty a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^\infty a_{2k+1} x^{2k+1} = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}\right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^\infty \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k} \quad \text{e}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^\infty \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}$$

A série acima converge pelo menos para $|x| < \sqrt{3}$.

(e) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1-x)y'' + xy' - y = 0$, obtemos

$(1-x) \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + x \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$
$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} \\ \ -n(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n = 0, \\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \\ \ \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n, \\ \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0,$
$a_4 = \frac{2}{4}a_3 - \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = \frac{2}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 = \frac{1}{4!}a_0,$

Supondo que $a_k = \frac{1}{k!}a_0$, para $k < n$, então
$a_n = \frac{n-2}{n}a_{n-1} - \frac{n-3}{n(n-1)}a_{n-2} =$
$\frac{n-2}{n}\frac{1}{(n-1)!}a_0 - \frac{n-3}{n(n-1)}\frac{1}{(n-2)!}a_0 = \frac{1}{n!}a_0$, para $n = 1, 2, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &= a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right) + a_1x \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = x$$

Agora, como $y(0) = -3$, então substituindo $x = 0$ e $y = -3$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $a_0 = -3$. Como $y'(0) = 2$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = 2$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) \quad = \quad a_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + a_1$$

obtemos $a_1 = 2$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) \quad = \quad -3\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) + 2x$$

A série acima converge pelo menos para todo $|x| < 1$.

(f) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $2y'' + xy' + 3y = 0$, obtemos
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$4a_2 + 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 3a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 4a_2 + 3a_0 = 0 \\ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 3a_n = 0, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{3}{4}a_0 \\ a_{n+2} = -\frac{n+3}{2(n+2)(n+1)}a_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = \frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_0,\; a_6 = -\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^3\cdot 6!}a_0, \cdots\; a_{2k} = \frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot(2k)!}a_0,\; k = 1, 2, \ldots$

$a_3 = -\frac{4}{2\cdot 3\cdot 2}a_1,\; a_5 = \frac{6\cdot 4}{2^2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1, \cdots\; a_{2k+1} = \frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}a_1,\; k = 1, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot(2k)!}x^{2n} \quad \text{e}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}x^{2k+1}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(g) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' - xy = 0$, obtemos

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$

$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} \\ \ -a_{n-1} = 0, \\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}, \\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0$

$a_6 = \frac{1}{6\cdot 5}a_3 = \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}a_0$

$a_{3k} = \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3\cdot 2}a_0$

$a_4 = \frac{1}{4\cdot 3}a_1$

$a_7 = \frac{1}{7\cdot 6}a_4 = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}a_0$

$a_{3k+1} = \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4\cdot 3}a_1$

$a_5 = \frac{1}{5\cdot 4}a_2 = 0$, $a_{3k+2} = 0$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} =$
$a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3\cdot 2} x^{3k}\right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4\cdot 3} x^{3k+1}\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3\cdot 2} x^{3k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4\cdot 3} x^{3k+1}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.2. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' + k^2x^2y = 0$, obtemos
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + k^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n} = 0$
$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + k^2 a_{n-2}]x^n = 0.$
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + k^2 a_{n-2} = 0, \; n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = a_3 = 0 \\ a_{n+2} = -\frac{k^2}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}, \; n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = -\frac{k^2}{4\cdot 3} a_0,\ a_8 = \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} a_0,\ \cdots$
$a_5 = \frac{k^2}{5\cdot 4} a_1,\ a_9 = \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} a_1,\ \cdots$
$a_6 = 0,\ a_{10} = 0,\ a_{4n+2} = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
$a_7 = 0,\ a_{11} = 0,\ a_{4n+3} = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+2} x^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+3} x^{4n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1} = a_0 \left(1 - \frac{k^2}{4\cdot 3} x^4 + \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} x^8 + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{k^2}{5\cdot 4} x^5 + \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^9 + \cdots\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{k^2}{4\cdot 3} x^4 + \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} x^8 + \cdots$$
$$y_2(x) = x - \frac{k^2}{5\cdot 4} x^5 + \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^9 + \cdots$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1-x)y'' + y = 0$, obtemos
$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} \\ \ -(n+1)na_{n+1} + a_n = 0, \\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \frac{n}{n+2}a_{n+1} \\ \ -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1 = -\frac{1}{3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1$
$a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{1}{3\cdot 2^2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 = -\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

A série acima converge pelo menos para $|x| < 1$.

(c) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, obtemos
$(2+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4a_2 + 12a_3x - a_1x + 4a_0 + 4a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n - na_n + 4a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\begin{cases} 4a_2 + 4a_0 = 0 \\ 12a_3 + 3a_1 = 0 \\ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n \\ \quad -na_n + 4a_n = 0, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{4}a_1 \\ a_{n+2} = \frac{-n(n-2)-4}{2(n+2)(n+1)}a_n, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0$, $a_6 = \frac{-1}{30}a_0$, $\cdots$
$a_5 = \frac{7}{5\cdot 4^2\cdot 2}a_1$, $\cdots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = a_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2 \cdot 2} x^5 + \cdots \right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots$$
$$y_2(x) = x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2 \cdot 2} x^5 + \cdots$$

Agora, como $y(0) = -3$, então substituindo $x = 0$ e $y = -3$ na expressão de $y(x)$ obtemos $a_0 = -3$. Como $y'(0) = 2$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = 2$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:
$y'(x) = a_0 \left(-2x + \frac{2}{3} x^3 + \cdots \right) + a_1 \left(1 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 2} x^4 + \cdots \right)$
obtemos $a_1 = 2$. Assim a solução do problema de valor inicial é
$y(x) = -3 \left(1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots \right) + 2 \left(x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2\cdot 2} x^5 + \cdots \right)$
A série acima converge pelo menos para $|x| < \sqrt{2}$.

4.3. $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação pois fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ obtemos $y_1(t)$ e fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ obtemos $y_2(t)$. Além disso

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](0) &= \det \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Como o wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é diferente de zero para $t = 0$ e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação.

4.4. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, obtemos

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \alpha(\alpha+1)a_0 + \alpha(\alpha+1)a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n]x^n = 0$$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + \alpha(\alpha+1)a_0 = 0 \\ 6a_3 - (2 - \alpha(\alpha+1))a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n \\ +\alpha(\alpha+1)a_n = 0, \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0 \\ a_3 = \dfrac{2 - \alpha(\alpha+1)}{6}a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{n^2 + n - \alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \\ = \frac{(n-\alpha)(n+1+\alpha)}{(n+2)(n+1)}a_n, \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$a_{2k} = \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}a_0, \, k = 2, 3, \ldots$$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}a_1, \, k = 1, 2, \ldots$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} =$
$a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!} x^{2k}$

$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 2N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$ e se $\alpha = 2N+1$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$

(c) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$

4.5. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, obtemos

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + \lambda a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n = 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{\lambda}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \dfrac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}a_0 \\ a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}a_1 \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} =$$
$$a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 4N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$ e se $\alpha = 2(2N+1)$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$

(c) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$, $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

4.6. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$, obtemos $(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} +$

$\alpha^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} +$

$\alpha^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2+6a_3x-a_1x+\alpha^2a_0+\alpha^2a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+\alpha^2a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2+\alpha^2a_0 = 0 \\ 6a_3-(1-\alpha^2)a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+\alpha^2a_n = 0, \ n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{\alpha^2}{2}a_0 \\ a_3 = \dfrac{1-\alpha^2}{6}a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}a_n, \ n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

$$a_{2k} = \frac{((2k-2)^2-\alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!}a_0, \ k = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{2k+1} = \frac{((2k-1)^2-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!}a_1, \ k = 1,2,\ldots$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = a_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-2)^2-\alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-1)^2-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x)+a_1y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-2)^2 - \alpha^2) \cdots (-\alpha^2)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-1)^2 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 2N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$ e se $\alpha = 2N+1$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$

(c) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Aula 3

Transformada de Laplace

3.1 Introdução

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Compreender o que é a transformada de Laplace.
- Saber calcular a transformada de Laplace de diversas funções.
- Saber aplicar as propriedades da transformada de Laplace.

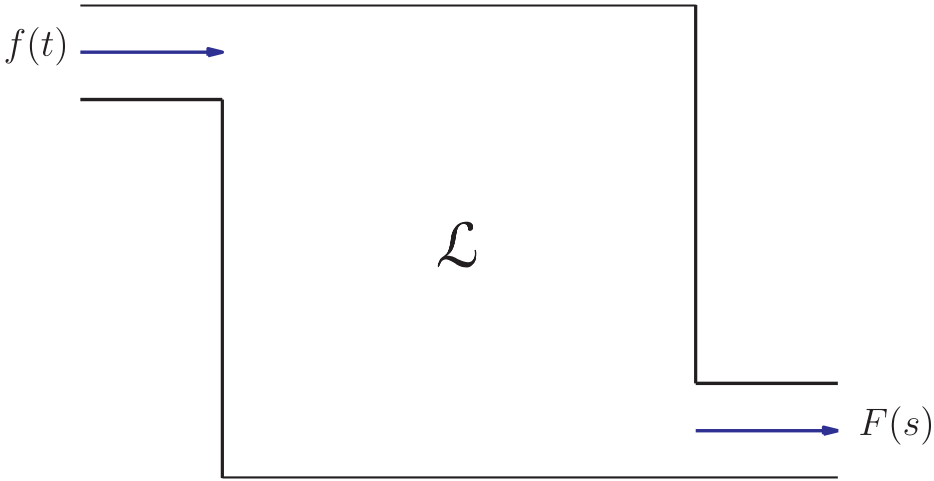


Figura 3.1: Transformada de Laplace como uma “caixa”

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial da forma

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \quad \text{para } A, B, C \in \mathbb{R}$$

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela transformada de Laplace numa equação algébrica. Depois resolve-se a equação algébrica e finalmente transforma-se de volta a solução da equação algébrica na solução da equação diferencial inicial.

A transformada de Laplace pode ser entendida como a "caixa" da Figura 3.1. Do lado esquerdo entram as funções originais e do lado direito saem as funções transformadas pela transformada de Laplace.

A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é definida por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

para todo $s \geq 0$ em que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por t. Enquanto a transformada de Laplace será representada pela letra correspondente maiúscula e a sua variável por s. Por exemplo, as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ serão representadas por $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$, respectivamente.

Vamos calcular a transformada de Laplace de várias funções e apresentar propriedades da transformada de Laplace que possibilitarão que dadas a transformada de Laplace de algumas funções, que serão as funções elementares, poderemos calcular muitas outras. A transformada de Laplace das funções elementares estão agrupadas na tabela na página 327 e podem ser consultadas a qualquer momento.

Exemplo 3.1. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Exemplo 3.2. Seja a uma constante real. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{at}$ é dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{a-s} \right|_0^\infty \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{a-s} - \frac{e^{-(s-a)0}}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Seja a uma constante real. Vamos determinar a transformada de Laplace das funções $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos at$ e $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \operatorname{sen} at$. Para isso, vamos calcular a transformada de Laplace da função $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definida por $h(t) = e^{iat}$.

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{iat}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-ia)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)} \right|_0^\infty \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-sT}(\cos aT + i \operatorname{sen} aT)}{-(s-ia)} - \frac{e^{-(s-ia)0}}{-(s-ia)} = 0 - \frac{e^{-(s-ia)0}}{ia-s} \\ &= \frac{1}{s-ia}, \quad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$H(s) = \mathcal{L}(h)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(\cos at + i \operatorname{sen} at)\,dt = \mathcal{L}(f)(s) + i\mathcal{L}(g)(s) = F(s) + iG(s).$$

Assim a **parte real** de $H(s)$ é igual a $F(s)$, $\mathfrak{Re}\{H(s)\} = F(s)$, e a **parte imaginária** de $H(s)$ é igual a $G(s)$, $\mathfrak{Im}\{H(s)\} = G(s)$. Como

$$H(s) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2},$$

então a transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$ é

$$F(s) \;=\; \mathfrak{Re}\{\frac{1}{s-ia}\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0$$

e a transformada de Laplace de $g(t) = \operatorname{sen} at$ é

$$G(s) \;=\; \mathfrak{Im}\{\frac{1}{s-ia}\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

Exemplo 3.4. Seja n um inteiro positivo. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,t^n dt = \left.\frac{t^n e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \frac{n}{-s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-1}dt \\ &= \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-1}dt = \frac{n}{s}F_{n-1}(s) \end{aligned}$$

Aplicando-se recursivamente a fórmula obtida obtemos

$$F_n(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \frac{n(n-1)\dots 1}{s^n} F_0(s)$$

mas $F_0(s)$ é a transformada de Laplace da função constante 1, ou seja, $F_0(s) = \frac{1}{s}$. Assim, a transformada de Laplace de $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$ é

$$F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para } s > 0.$$

Para calcular a transformada de Laplace de outras funções vamos usar as propriedades que apresentaremos a seguir.

Teorema 3.1 (Linearidade). *Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, para $s > a_1$, e a transformada de Laplace de $g(t)$ é $G(s)$, para $s > a_2$, então para quaisquer constantes α e β temos que*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \textit{para } s > \max\{a_1, a_2\}.$$

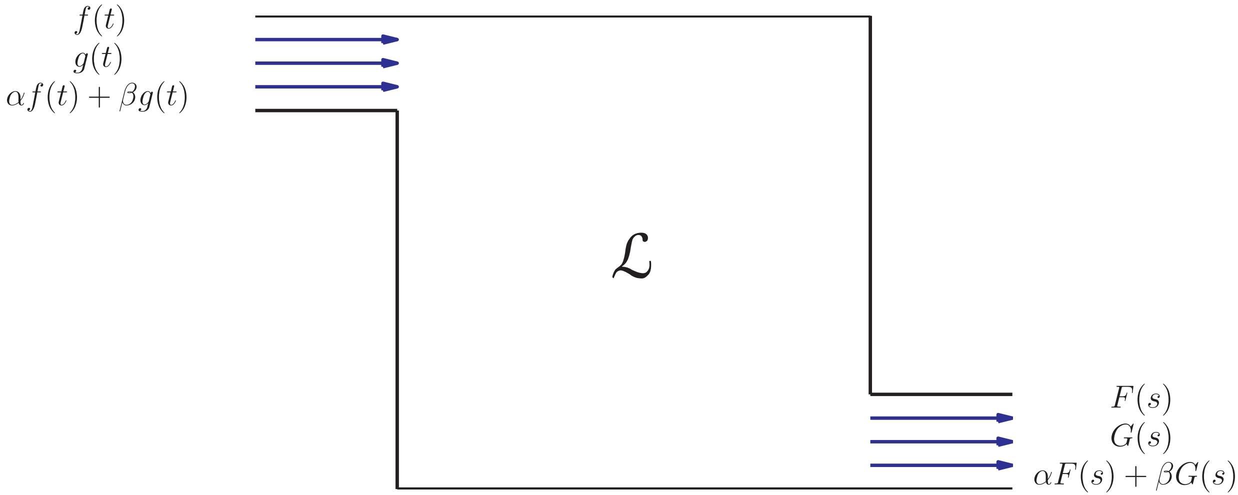


Figura 3.2: Transformada de Laplace de uma combinação linear

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\
&= \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.5. A transformada de Laplace do polinômio $f(t) = 2t^2 + 3t + 5$ é pelo Teorema 3.1 e usando o resultado do Exemplo 3.4

$$F(s) = 2\frac{2}{s^3} + 3\frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s}.$$

Exemplo 3.6. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior e o Exemplo 3.2 a transformada de Laplace do cosseno hiperbólico de at, $f(t) = \cosh(at) = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Exemplo 3.7. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior e o Exemplo 3.2 a transformada de Laplace do seno hiperbólico de at, $f(t) = \operatorname{senh}(at) = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Se a função $f(t)$ crescer muito rápido, como por exemplo $f(t) = e^{t^2}$, ela pode não ter transformada de Laplace $F(s)$ para nenhum $s > 0$. Isto não acontece para funções $f(t)$, para as quais existem $M > 0$ e $k > 0$ tais que,

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0. \tag{3.1}$$

Estas funções são chamadas **funções admissíveis**. Além disso, se duas funções admissíveis têm a mesma transformada de Laplace então elas são iguais exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Teorema 3.2. *Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ admissíveis se*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s), \quad \textit{para } s > a,$$

então $f(t) = g(t)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Demonstração. Basta provarmos que se $\mathcal{L}(h)(s) = 0$, para $s > a$, então $h(t) = 0$, para todos os valores de $t > 0$ para os quais $h(t)$ é contínua. Vamos fazer a demonstração somente para o caso em que $h(t)$ é contínua. Seja $n = 1, 2, \ldots$

$$0 = \mathcal{L}(h)(a+n) = \int_0^\infty e^{-nt}e^{-at}h(t)dt.$$

Façamos a mudança de variáveis $t = -\ln x$ e definamos $v(x) = e^{a\ln x}h(-\ln x)$. Então

$$0 = \int_0^\infty e^{-nt}e^{-at}h(t)dt = \int_0^1 x^{n-1}v(x)dx. \tag{3.2}$$

Seja $\epsilon > 0$. Existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

A existência de tal polinômio é uma conseqüência imediata do Teorema de aproximação de Weierstrass que pode ser encontrado por exemplo em [4]. De (3.2) segue-se que

$$\int_0^1 p(x)v(x)dx = 0.$$

Então

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx = \int_0^1 |p(x)|^2 dx + \int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Logo

$$\int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Como ϵ é um número positivo arbitrário, então $v(x) = 0$, para $0 < x \leq 1$. Logo $h(t) = 0$, para $t > 0$. ■

Portanto se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função admissível $f(t)$, esta função esta determinada a menos dos pontos de descontinuidade e dizemos que $f(t)$ é a **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ e escrevemos simplesmente

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t).$$

Estamos considerando duas funções iguais, se elas forem iguais em todos os pontos onde ambas são contínuas.

Exemplo 3.8. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-3s+2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Para isso vamos decompor $F(s)$ em frações parciais. O denominador de $F(s)$ tem duas raízes reais $s=1$ e $s=2$. Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2},$$

em que A e B são constantes a determinar. Multiplicando $F(s)$ por $(s-1)(s-2)$ obtemos

$$s+3 = A(s-2) + B(s-1)$$

Substituindo-se $s=1$ e $s=2$ obtemos

$$4 = -A \quad \text{e} \quad 5 = B$$

Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = -4\frac{1}{s-1} + 5\frac{1}{s-2}$$

e a função cuja transformada é $F(s)$ é

$$f(t) = -4e^t + 5e^{2t}.$$

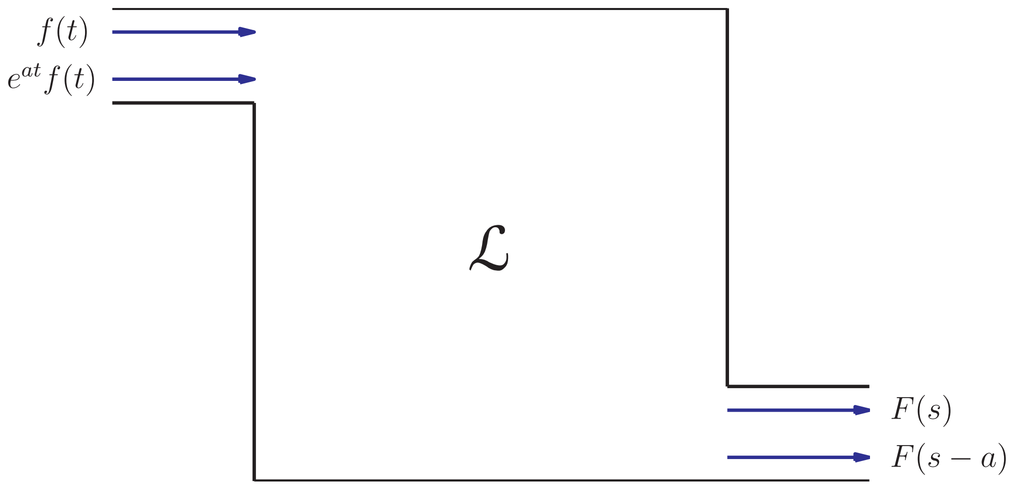


Figura 3.3: 1º Teorema de Deslocamento

Teorema 3.3 (1º Teorema de Deslocamento). *Seja a uma constante. Se a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = e^{at} f(t)$$

é

$$G(s) = F(s-a), \quad \text{para } s > a + c$$

Demonstração.

$$G(s) \;=\; \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

■

Exemplo 3.9. Sejam a e b constantes. Usando o Teorema anterior e o Exemplo 3.3 na página 287 obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \cos at$ é dada por

$$F(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.10. Sejam a e b constantes. Usando o Teorema anterior e o Exemplo 3.3 na página 287 obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \operatorname{sen} at$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.11. Seja a uma constante e n um inteiro positivo. Usando o Teorema anterior e o Exemplo 3.4 na página 288 obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{at} t^n$ é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.12. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Para isso vamos decompor $F(s)$ em frações parciais. O denominador de $F(s)$ tem somente uma raiz real, $s = -2$. Assim,

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2},$$

em que A e B são constantes a determinar. Multiplicando $F(s)$ por $(s+2)^2$ obtemos

$$s - 3 = A(s+2) + B \tag{3.3}$$

Substituindo-se $s = -2$ obtemos

$$-5 = B.$$

Derivando-se (3.3) obtemos

$$1 = A.$$

Assim

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - 5\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Observando a Tabela na página 327, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = e^{-2t} - 5e^{-2t}t.$$

Exemplo 3.13. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-2}{2s^2+2s+2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Completando quadrados podemos reescrever $F(s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s-2}{2s^2+2s+2} = \frac{s-2}{2[s^2+s+1]} = \frac{s-2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{s+1/2-5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} = \frac{s+1/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} - \frac{5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4}\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}
\end{aligned}$$

Observando a Tabela na página 327, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

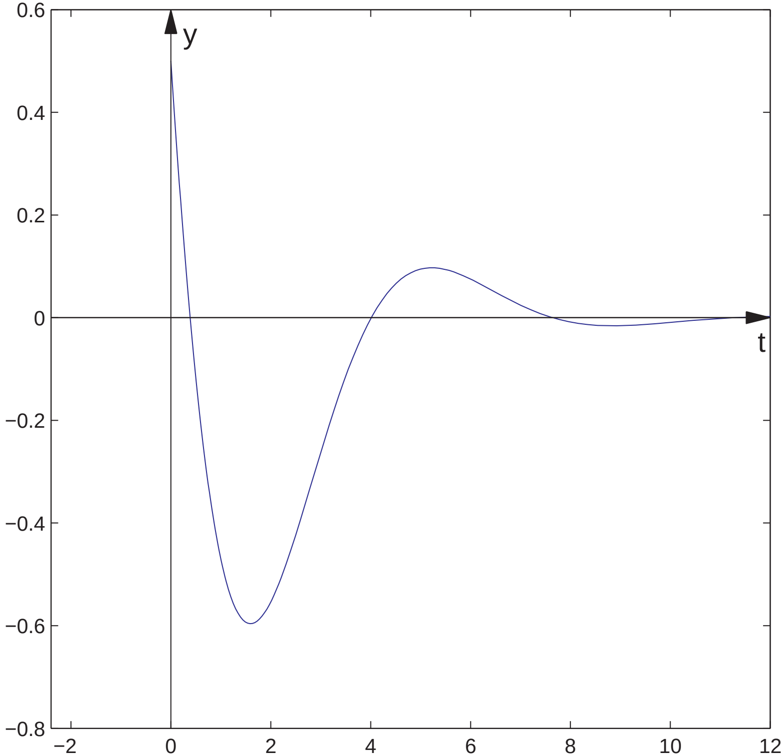


Figura 3.4: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Exercícios (respostas na página 328)

1.1. Determine a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{2s-5}{s(s^2+s-12)},$$

ou seja, uma função, $f(t)$, cuja transformada de Laplace é a função dada, $F(s)$.

1.2. Considere $\mathcal{L}(y)(s) = Y(s)$. Determine $y(t)$:

(a) $Y(s) = \dfrac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$

(b) $Y(s) = \dfrac{3}{(s-1)(s^2+4)}$

1.3. Seja a uma constante. Sabendo-se que a transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen} at$ é

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$$

e a de $g(t) = t\cos at$ é

$$G(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$$

mostre que a transformada de Laplace de $h(t) = \operatorname{sen} at - a\,t\cos at$ é

$$H(s) = \frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0.$$

3.2 Problemas de Valor Inicial

Objetivo:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Aplicar a transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial.

Dizemos que uma função $f(t)$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $[a, b]$ se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Dizemos que uma função $f(t)$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $[a, \infty)$ se $f(t)$ é seccionalmente contínua para todo intervalo da forma $[a, A]$, com $A > a$.

O próximo resultado mostra o efeito de aplicar a transformada de Laplace na derivada de uma função.

Teorema 3.4 (Derivação). *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função admissível, ou seja, existem $M > 0$ e $k > 0$ tais que,*

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

(a) *Se $f'(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

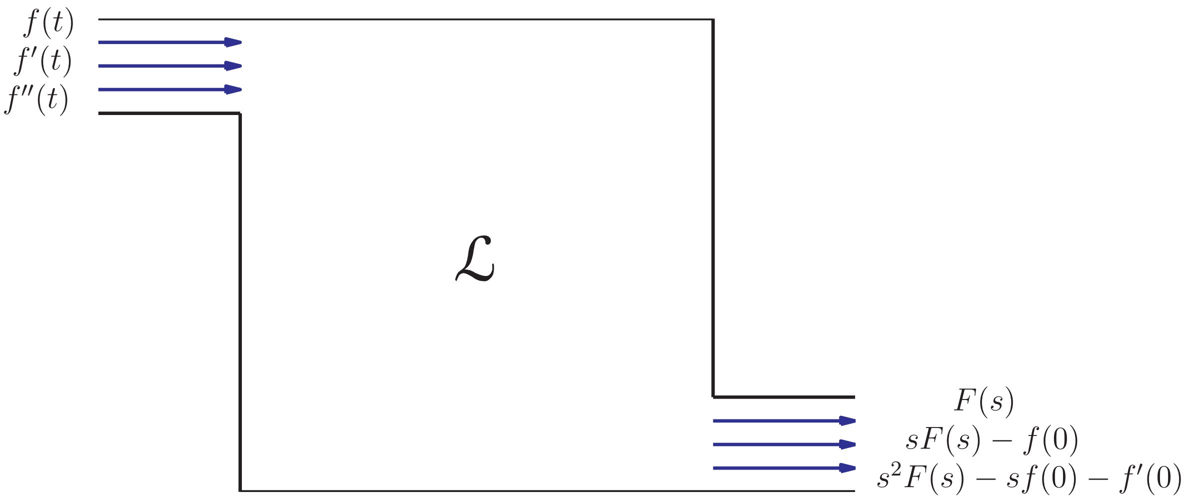


Figura 3.5: Transformada de Laplace da Derivada

(b) Se $f'(t)$ é admissível e $f''(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Demonstração. (a) Vamos provar para o caso em que $f'(t)$ é contínua.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - (-s)\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= -f(0) + sF(s),\end{aligned}$$

pois como $f(t)$ é admissível, $\lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) = 0$, para $s > k$.

(b) Vamos provar para o caso em que $f''(t)$ é contínua. Usando o item anterior:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}(f')(s) \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + sF(s)) \\ &= -f'(0) - sf(0) + s^2 F(s)\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.14. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t \operatorname{sen} at$. Vamos determinar $F(s)$.

$$f'(t) = \operatorname{sen} at + at \cos at,$$

$$f''(t) = 2a \cos at - a^2 t \operatorname{sen} at = 2a \cos at - a^2 f(t).$$

Assim, aplicando-se a transformada de Laplace e usando o Teorema anterior obtemos

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a \frac{s}{s^2 + a^2} - a^2 F(s).$$

Assim,

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Exemplo 3.15. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\cos at$. Deixamos como exercício mostrar que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Exemplo 3.16. Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s) \quad = \quad 4\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + s + 2$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} + \frac{s+2}{s^2+2s+5} = 4\frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$y(t) = te^{-t}\,\mathrm{sen}\, 2t + e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{sen}\, 2t,$$

usando a Tabela na página 327.

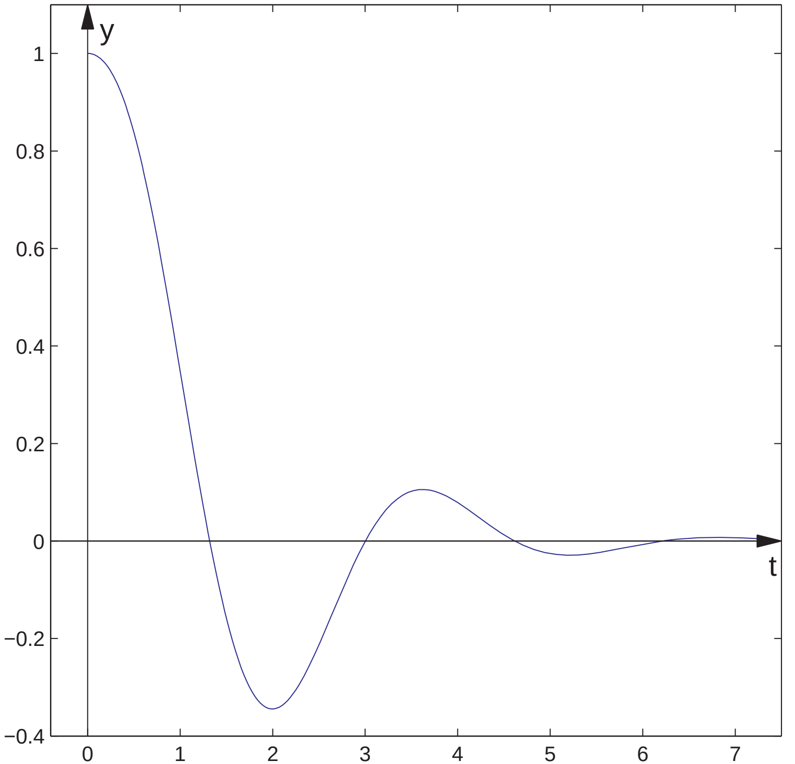


Figura 3.6: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.16

Exercícios (respostas na página 330)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial usando a transformada de Laplace:

(a) $y'' + y' - 2y = 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

(c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(d) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y = 3\,\mathrm{sen}\,2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

(f) $y'' + 4y = e^t,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0.$

(g) $y'' - 2y' + y = e^{2t},\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0.$

(h) $y'' + 2y' + 2y = e^t,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0.$

2.2. Resolva o problema: $y'' - 6y' + 8y = \mathrm{sen}\; t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(a) sem usar transformada de Laplace

(b) usando transformada de Laplace

2.3. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\cos at$. Mostre que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$$

(Sugestão: derive uma vez e use as transformadas de Laplace de $\cos at$ e de $t\,\mathrm{sen}\,at$.)

3.3 Equações com Termo Não-Homogêneo Descontínuo

Objetivo:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Aplicar a transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial em que o termo não homogêneo é uma função descontínua.

Para resolver problemas de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

em que $f(t)$ é uma função descontínua vamos escrever $f(t)$ em termos da função que definiremos a seguir.

Seja a uma constante maior ou igual a zero. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

Observe que $u_a(t) = u_0(t-a)$. Em muitos sistemas computacionais a função $u_0(t)$ é uma função pré-definida no sistema.

Vamos calcular a transformada de Laplace da função de Heaviside $f(t) = u_a(t)$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_0^a e^{-st}\, dt + \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^\infty = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{para } s > 0 \end{aligned}$$

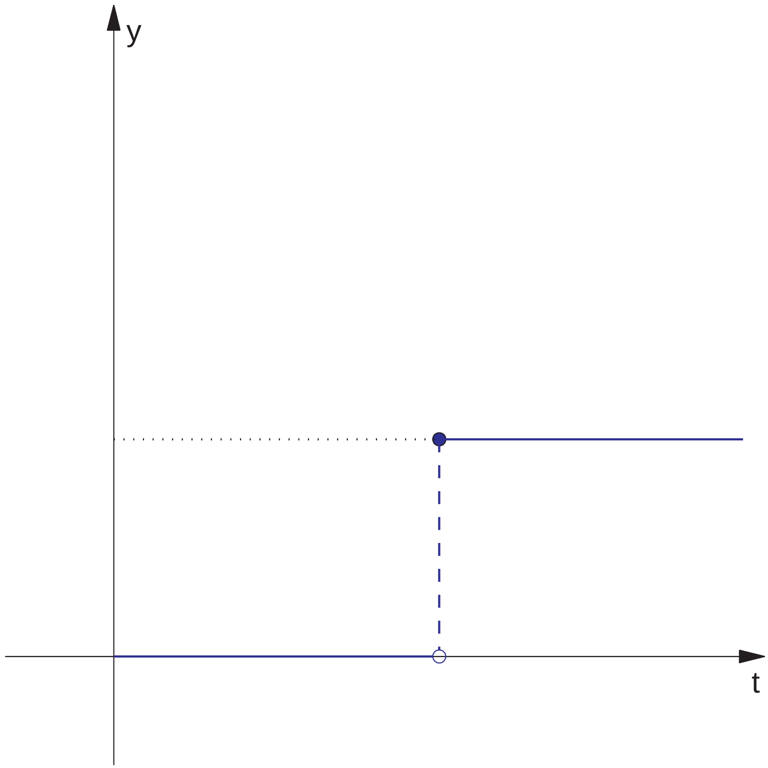


Figura 3.7: Função de Heaviside

Exemplo 3.17. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 1 - u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Exemplo 3.18. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{para } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}.$$

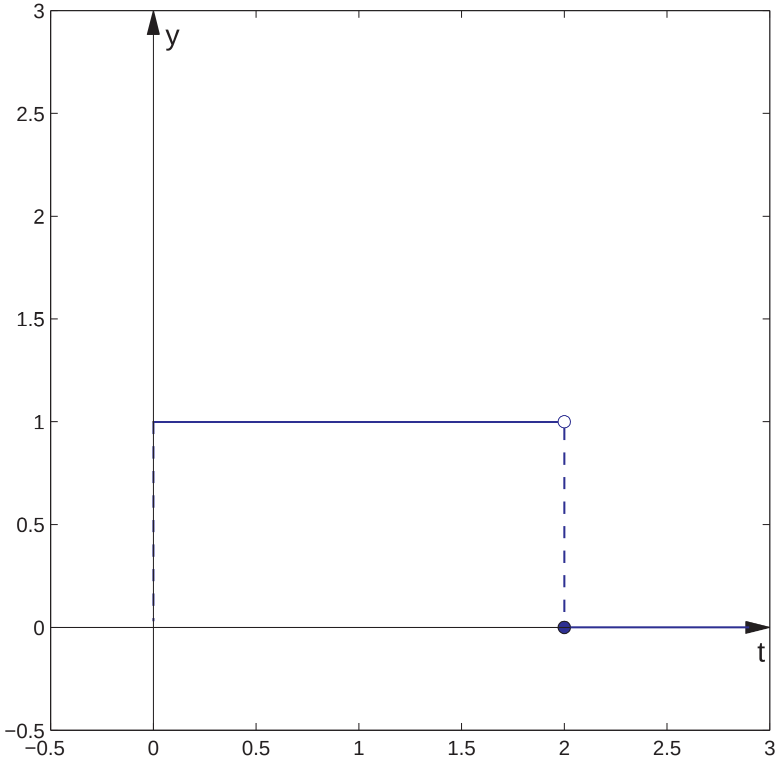


Figura 3.8: Função $f(t) = 1 - u_2(t)$

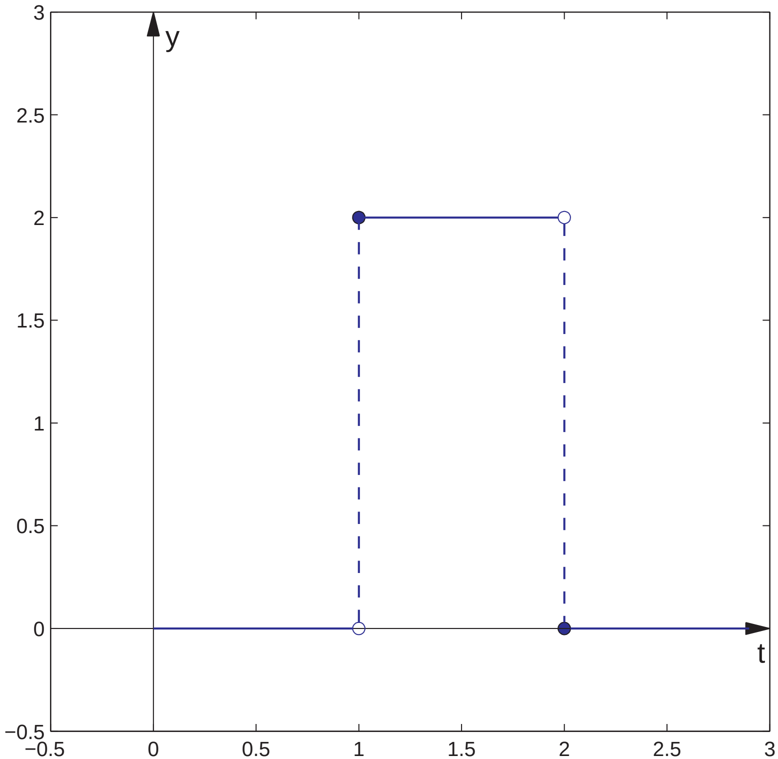


Figura 3.9: Função $f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t)$

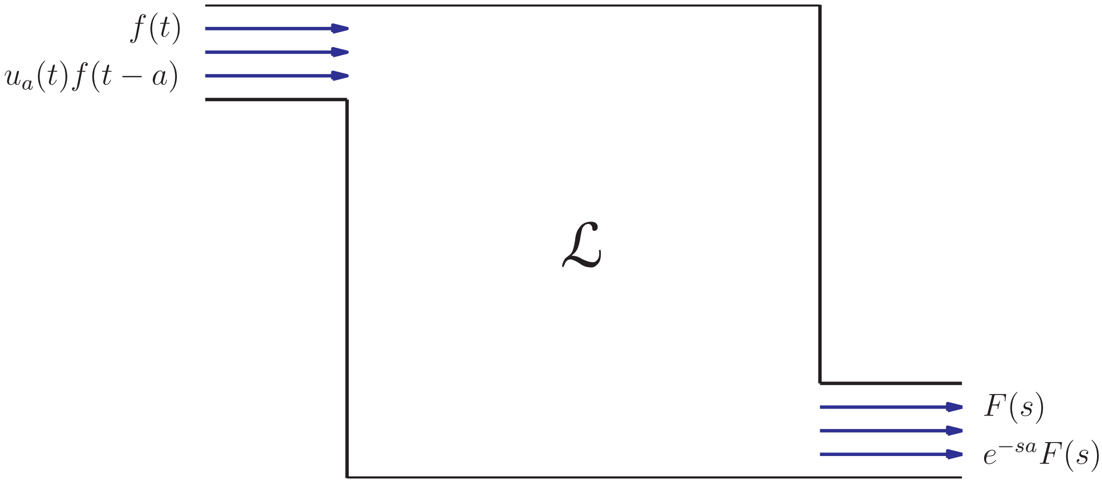


Figura 3.10: 2º Teorema de Deslocamento

Teorema 3.5 (2º Teorema de Deslocamento). *Seja a uma constante positiva. Se a transformada de Laplace da função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $G(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = g(t-a)u_a(t)$$

é

$$F(s) = e^{-as}G(s), \quad \text{para } s > c$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}g(t-a)u_a(t)dt = \int_0^a e^{-st}g(t-a)u_a(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}g(t-a)u_a(t)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}g(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}g(t)dt \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = e^{-as}G(s)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.19. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & \text{para } t \geq 1 \end{cases}$$

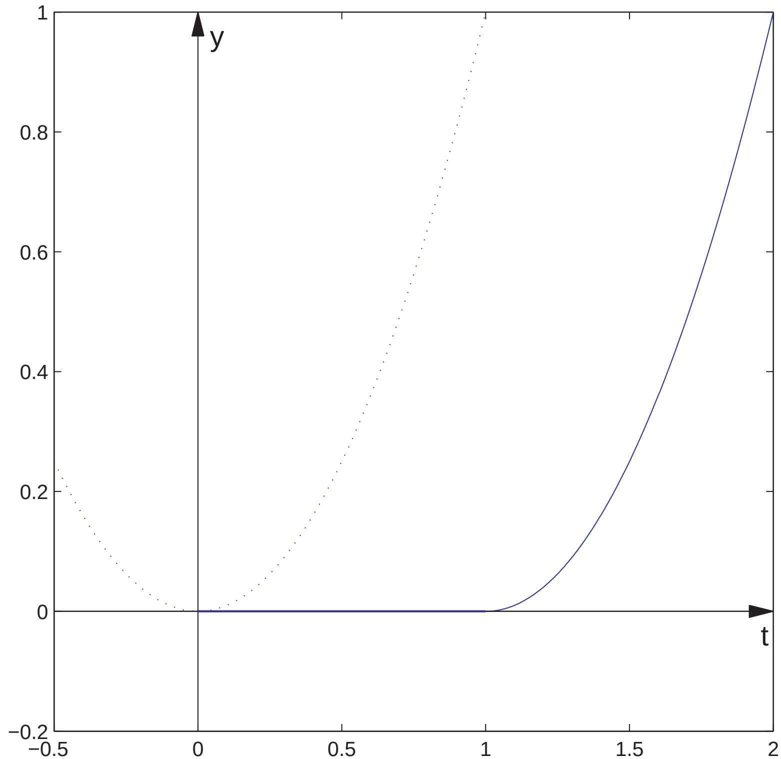


Figura 3.11: Função $f(t) = (t-1)^2 u_1(t)$

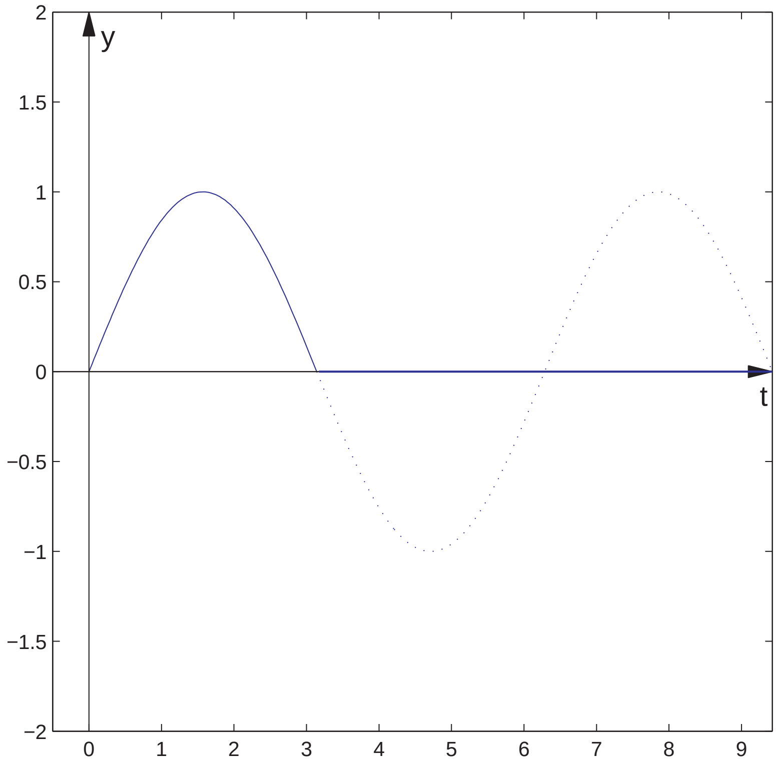


Figura 3.12: Função $f(t) = \operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)\, u_\pi(t)$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = (t-1)^2 u_1(t) = g(t-1)\, u_1(t),$$

em que $g(t) = t^2$. Usando o Teorema 3.5

$$F(s) = e^{-s}\,\frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-s}}{s^3}.$$

Exemplo 3.20. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = \operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)\, u_\pi(t).$$

Para usarmos o Teorema 3.5 precisamos escrever a segunda parcela em termos de uma função $g(t-\pi)$. Para isso, somamos e subtraímos π a t no argumento da função seno, ou seja,

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi] = \operatorname{sen}(t-\pi)\cos\pi + \cos(t-\pi)\operatorname{sen}\pi = -\operatorname{sen}(t-\pi).$$

Assim

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t-\pi)\, u_\pi(t)$$

e

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}.$$

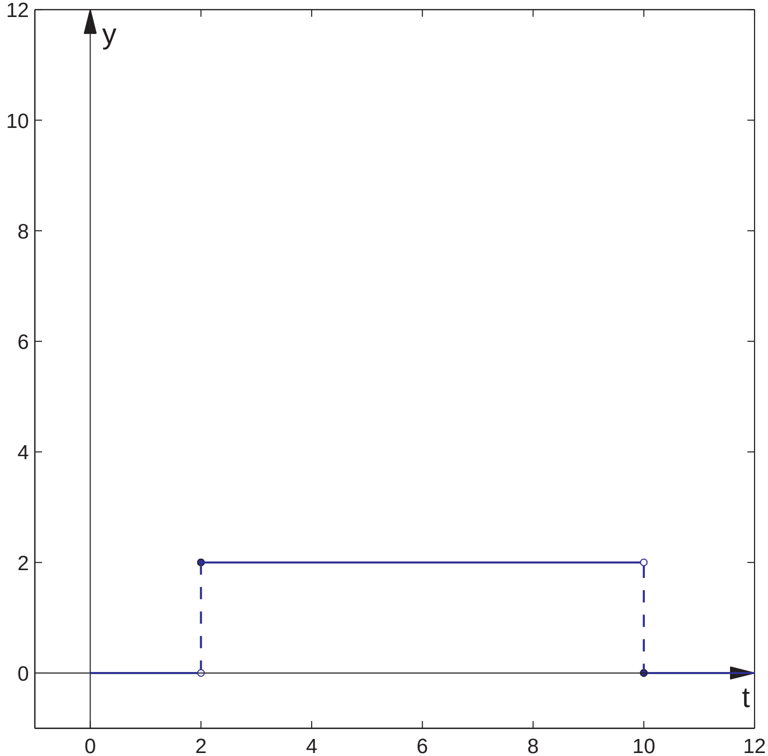


Figura 3.13: $f(t) = 2u_2(t) - 2u_{10}(t)$

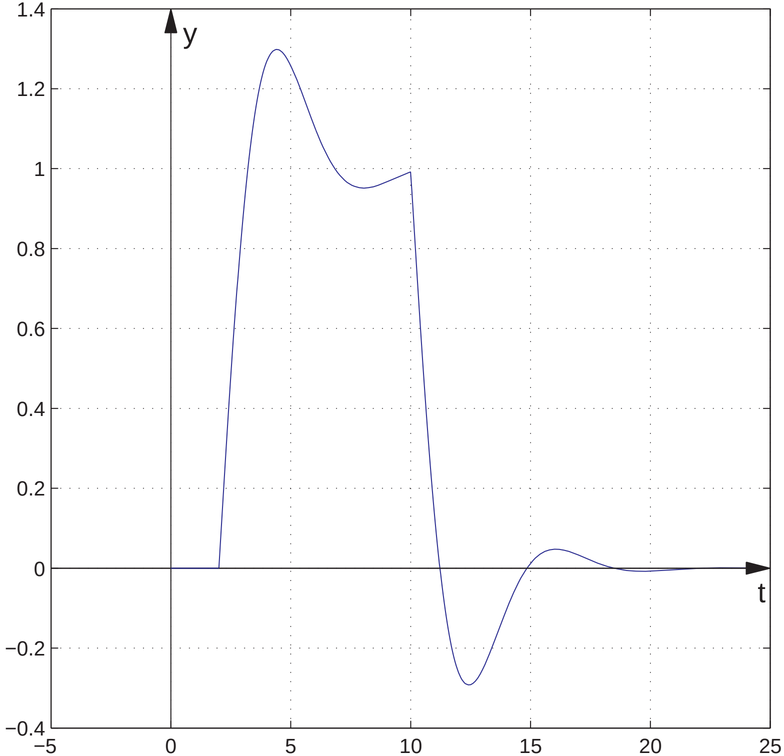


Figura 3.14: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.21

Exemplo 3.21. Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$2y'' + 2y' + 2y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

em que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 2, & \text{para } 2 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_2(t) - 2u_{10}(t).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$2\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-10s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(2s^2 + 2s + 2\right)Y(s) = 2\frac{e^{-2s} - e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)} = (e^{-2s} - e^{-10s})H(s) = e^{-2s}H(s) - e^{-10s}H(s),$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

Depois de encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$, a solução do problema de valor inicial é então, pelo 2º Teorema de Deslocamento, dada por

$$y(t) = h(t-2)u_2(t) - h(t-10)u_{10}(t).$$

Vamos a seguir encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$. Como s^2+s+1 tem raízes complexas, a decomposição de $H(s)$ em frações parciais é da forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+s+1)$ obtemos

$$1 = A(s^2+s+1) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s=0$ obtemos $A=1$. Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & A+B = 1+B \\ 0 & = & A+C = 1+C \end{array} \right.$$

que tem solução $B=-1$ e $C=-1$. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1/2}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

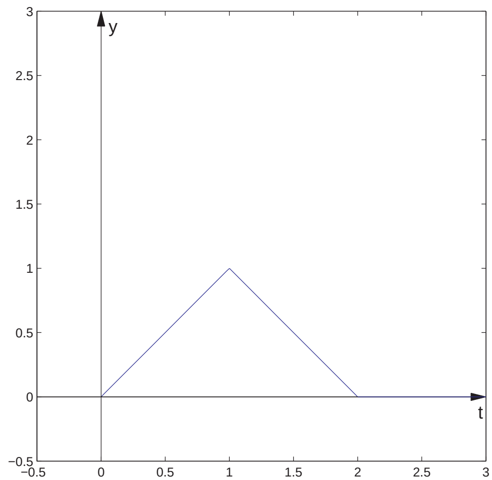
$$h(t) = 1 - e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = h(t-2)u_2(t) - h(t-10)u_{10}(t).$$

Exercícios (respostas na página 345)

3.1. Seja $f(t)$ a função cujo gráfico é mostrado na figura ao lado



(a) Expresse $f(t)$ em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de Laplace de $f(t)$.

3.2. Considere

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < 2\pi \\ e^{-\frac{t}{10}}, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

(a) Expresse f em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de Laplace de f.

3.3. Considere

$$f(t) = \begin{cases} |\cos t|, & 0 \leq t < 3\pi/2 \\ 0, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$$

Calcule a transformada de Laplace de f.

3.4. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le t < \pi/2 \\ 0, & \text{para } t \ge \pi/2 \end{cases}$

(b) $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \le t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \ge 2\pi \end{cases}$

(c) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \le t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \ge 2\pi \end{cases}$

(d) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{para } t \ge \pi \end{cases}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le t < 10 \\ 0, & \text{para } t \ge 10 \end{cases}$

(f) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < 2 \\ 1, & \text{para } t \ge 2 \end{cases}$

(g) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < 3\pi \\ 1, & \text{para } t \ge 3\pi \end{cases}$

(h) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{para } t \ge \pi \end{cases}$

(i) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \le t < 3\pi \\ 0, & \text{para } t \ge 3\pi \end{cases}$

(j) $y'' + 4y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$

(k) $y'' - 2y' + y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. em que $f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

(l) $y'' + 2y' + 2y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. em que $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

3.4 Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$, para $s>0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, para $s>a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, para $s>0$	$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, para $s>0$
t^n, para $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, para $s>0$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$	$t\operatorname{sen} at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$
$\operatorname{sen} at - at\cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$		
$u_a(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$	$\frac{e^{-as}}{s}$, para $s>0$	$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

3.5 Respostas dos Exercícios

1. Introdução (página 301)

1.1.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s-5}{s(s-3)(s+4)} \\ &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{s+4} \end{aligned}$$

Multiplicando por $s(s-3)(s+4)$ obtemos
$2s-5 = A(s-3)(s+4)+Bs(s+4)+Cs(s-3)$
Substituindo-se $s = 0, 3, -4$ obtemos $A = \frac{5}{12}$, $B = \frac{1}{21}$ e $C = -\frac{13}{28}$. Assim,

$$f(t) = \frac{5}{12}+\frac{1}{21}e^{3t}-\frac{13}{28}e^{-4t}$$

1.2. (a) $Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)}+\frac{1}{(s+2)(s-1)}$
$= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)}$
$= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s-1}$
Multiplicando-se por $s^2(s+2)(s-1)$ obtemos

$$s^2+2 = \tag{3.4}$$

$= As(s+2)(s-1)+B(s+2)(s-1)+Cs^2(s-1)+Ds^2(s+2)$
Substituindo-se $s = -2, 0, 1$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcr} 6 &=& -12C \\ 2 &=& -2B \\ 3 &=& 3D \end{array}\right.$$

que tem solução $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ e $D = 1$. Derivando-se (3.4) obtemos

$2s = A(s+2)(s-1) + As[(s+2)(s-1)]' + B[(s+2)+(s-1)] + [Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)]'$
e substituindo-se $s = 0$ obtemos $0 = -2A + B = -2A - 1$ de onde obtemos $A = -\frac{1}{2}$.
Assim,
$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$
$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$

(b) $Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$
$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$
Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 3/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 3/5 + B \\ 0 &= -B + C \end{cases}$$

que tem solução $B = -3/5$ e $C = -3/5$. Assim,
$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$
$y(t) = \frac{3}{5}e^t - \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t$

1.3.

$$h(t) = f(t) - ag(t)$$

Aplicando-se a linearidade da transformada de Laplace obtemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}(h)(s) \\ &= \mathcal{L}(f)(s) - a\,\mathcal{L}(g)(s) \\ &= F(s) - a\,G(s) \\ &= \frac{a}{s^2+a^2} - a\,\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \\ &= \frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2} \end{aligned}$$

2. Problemas de Valor Inicial (página 308)

2.1. (a) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 2\frac{1}{s^2}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$\left(s^2 + s - 2\right) Y(s) = \frac{2}{s^2} + 1$

Assim,

$Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}$

Multiplicando-se por $s^2(s+2)(s-1)$ obtemos

$$s^2 + 2 = \tag{3.5}$$

$= As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)$

Substituindo-se $s = -2, 0, 1$ obtemos

$$\begin{cases} 6 & = & -12C \\ 2 & = & -2B \\ 3 & = & 3D \end{cases}$$

que tem solução $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ e $D = 1$. Derivando-se (3.5) obtemos

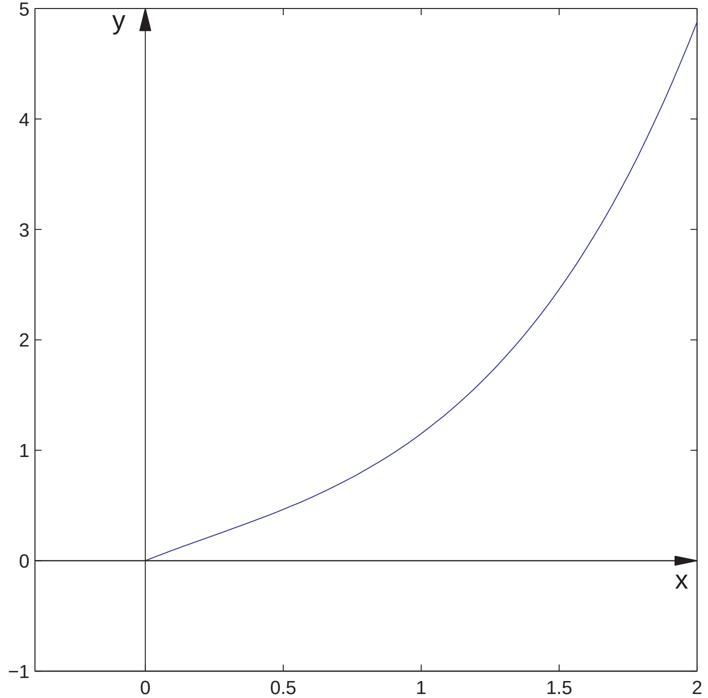
$2s = A(s+2)(s-1) + As[(s+2)(s-1)]' + B[(s+2) + (s-1)] + [Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)]'$

e substituindo-se $s = 0$ obtemos $0 = -2A + B = -2A - 1$ de onde obtemos $A = -\frac{1}{2}$.

Assim,

$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$

$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$



(b) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ obtemos
$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1} + 2$ Assim,

$$Y(s) = \tag{3.6}$$

$= \frac{2}{s^3(s^2+4)} + \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}$
A primeira parcela de (3.6) pode ser decomposta como
$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$
Multiplicando-se a equação acima por $s^3(s^2+4)$ obtemos

$$2 = \tag{3.7}$$

$= As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3$
Substituindo-se $s = 0, 2i$ em (3.7)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & 4C \\ 2 & = & (2iD+E)(-8i) = 16D - 8iE \end{array}\right.$$

De onde obtemos $C = \frac{1}{2}$ e comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação do sistema acima

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & 16D \\ 0 & = & -8E \end{array}\right.$$

De onde obtemos $D = \frac{1}{8}$ e $E = 0$. Derivando-se (3.7) uma vez
$0 = A2s(s^2+4) + As^2 2s + B(s^2+4) + Bs2s + C2s + Ds^3 + (Ds+E)3s^2$
substituindo-se $s = 0$ obtemos $0 = 4B$ ou $B = 0$. Derivando-se (3.7) mais uma vez
$0 = 2A(s^2+4) + 2A2s + 6As^2 + 2Bs + 4Bs + 2C + 3Ds^2 + D3s^2 + (Ds+E)6s$
e substituindo-se $s = 0$ obtemos $0 = 8A + 2C = 8A + 1$ de onde obtemos $A = -\frac{1}{8}$.
Assim,
$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1/8}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4}$
A segunda parcela de (3.6) pode ser decomposta como
$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$

$$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 3/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

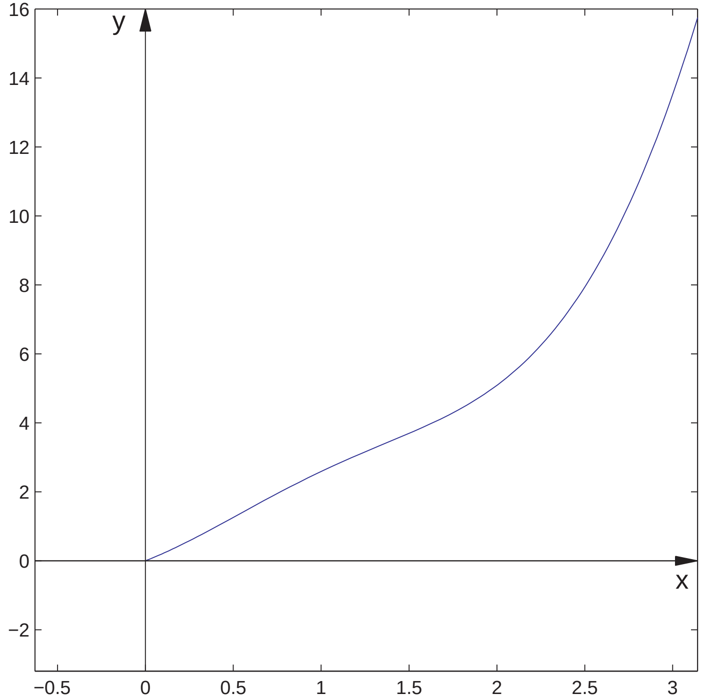
$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & A + B = 3/5 + B \\ 0 & = & -B + C \end{array} \right.$$

que tem solução $B = -3/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{3}{5}e^t + \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2t$$



(c) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s} + s - 1$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$

$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$

Multiplicando-se por $s(s-1)^2$ obtemos

$$4 = A(s-1)^2 + B(s-1)s + Cs \tag{3.8}$$

Substituindo-se $s = 0, 1$ obtemos

$$\begin{cases} 4 = A \\ 4 = C \end{cases}$$

Derivando-se (3.8) obtemos

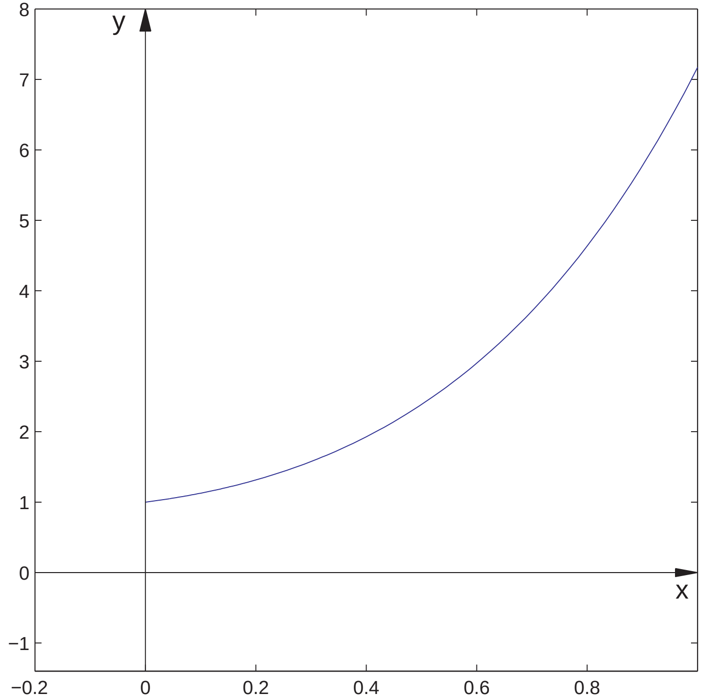
$$0 = 2A(s-1) + Bs + B(s-1) + C$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $0 = B + C = B + 4$ de onde obtemos que $B = -4$.

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{6}\frac{6}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$

$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t + 4 - 3e^t + 4te^t$



(d) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) - 3Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s - 3\right) Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2} + s - 2$$

Assim,

$Y(s) = 3\frac{1}{(s^2-2s-3)(s-2)^2} + \frac{s-2}{s^2-2s-3}$
$= 3\frac{1}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}$
$= \frac{3+(s-2)^3}{(s-3)(s+1)(s-2)^2}$
$= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-3)(s+1)(s-2)^2$ obtemos

$$3 + (s-2)^3 = \tag{3.9}$$

$$= A(s+1)(s-2)^2 + B(s-3)(s-2)^2 + C(s-3)(s+1)(s-2) + D(s-3)(s+1)$$

Substituindo-se $s = -1, 2$ e 3 na equação acima obtemos $A = 1$, $B = \frac{2}{3}$ e $D = -1$. Comparando-se os termos de grau 3 em (3.9) obtemos

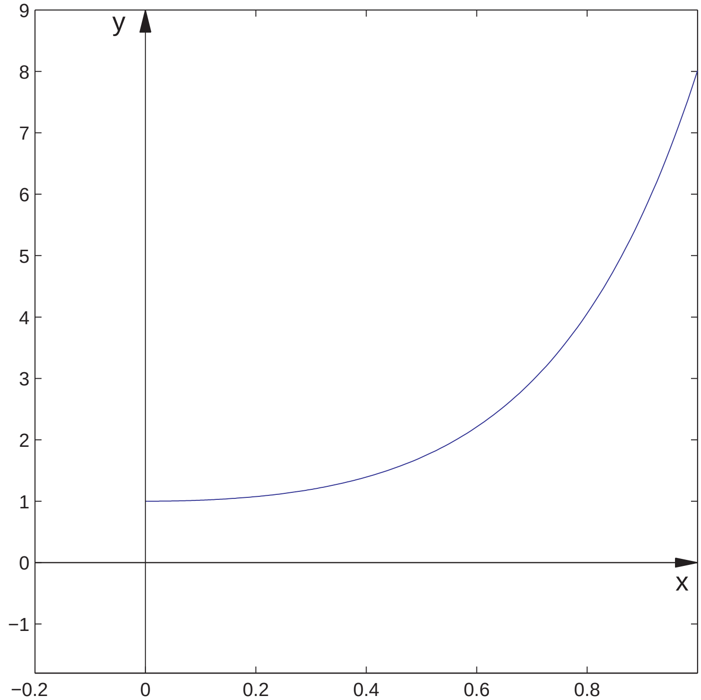
$$1 = A + B + C = 1 + \frac{2}{3} + C$$

que tem solução $C = -\frac{2}{3}$.

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{2/3}{s+1} - \frac{2/3}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$

$y(t) = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$



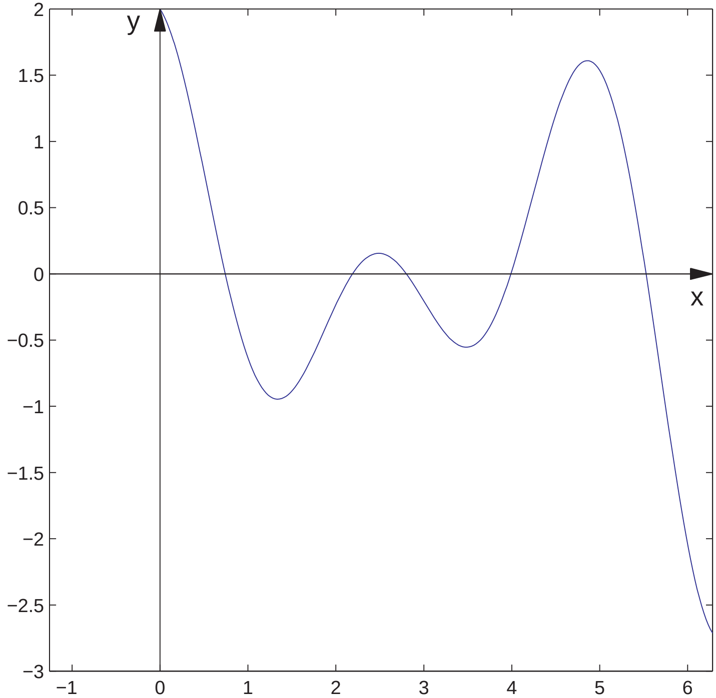
(e) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 3\frac{2}{s^2+4}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 3\frac{2}{s^2 + 4} + 2s - 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{6}{(s^2+4)^2} + \frac{2s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{6}{16}\frac{16}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{3}{8}\frac{16}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} \end{aligned}$$

$y(t) = \frac{3}{8}(\operatorname{sen} 2t - 2t\cos 2t) + 2\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$
$= 2\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4}t\cos 2t$



(f)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)\left(s^2+4\right)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-1)(s^2+4)$:

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s=-1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1/5 + B = 0 \\ 4/5 - C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $B = -1/5$ e $C = -1/5$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t$$

(g)

$$\begin{aligned} &\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) \\ &- 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0)=0$ e $y'(0)=0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right)Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-2)\left(s^2-2s+1\right)} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por $(s-2)(s-1)^2$ obtemos

$$1 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se $s = 1$ e $s = 2$ obtemos $C = -1$ e $A = 1$. Derivando-se a expressão anterior

$$0 = 2A(s-1) + B[(s-1) + (s-2)] + C$$

e substituindo-se $s = 1$ obtemos $B = -1$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

(h)

$$\begin{aligned} \left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + & \\ + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right)Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}
\end{aligned}
$$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-1)(s^2+2s+2)$ obtemos

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
1/5 & + & B & & & = & 0 \\
2/5 & & & - & C & = & 1
\end{array}
\right.
$$

que tem solução $B = -1/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1}
\end{aligned}
$$

De onde obtemos que a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t.$$

2.2. (a) A equação característica é $r^2 - 6r + 8 = 0$, que tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$.
A equação homogênea correspondente tem solução geral

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Uma solução particular da equação não homogênea é da forma $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$. Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação:

$$(7A - 6B)\cos t + (6A + 7B)\sin t = \sin t$$

De onde obtemos $A = 6/85$ e $B = 7/85$. A solução geral da equação não homogênea é $y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

$$y'(0) = 0 = \frac{7}{85} + 2c_1 + 4c_2$$

$$y(0) = 0 = \frac{6}{85} + c_1 + c_2$$

$c_1 = -1/10$ e $c_2 = 1/34$.
$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t - \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t}$

(b) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 6\left(sY(s) - y(0)\right) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 6s + 8\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 6s + 8)\,(s^2+1)}$$

$\frac{1}{(s^2-6s+8)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$
Multiplicando-se por $(s-2)(s-4)(s^2+1)$ obtemos
$1 = A(s-4)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s-2)(s-4)$

Substituindo-se $s = 2, 4, i$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -10A \\ 1 & = & 34B \\ 1 + i0 & = & (iC + D)(i - 4) \\ & = & (-C - 4D) + i(-4C + D) \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/10$, $B = 1/34$, $C = 6/85$ e $D = 7/85$. Assim,

$Y(s) = -\frac{1}{10}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{34}\frac{1}{s-4} + \frac{6}{85}\frac{s}{s^2-1} + \frac{7}{85}\frac{1}{s^2-1}$

$y(t) = -\frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t} + \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\operatorname{sen} t$

2.3.

$$f'(t) = \cos at - a\,t \operatorname{sen} at$$

Aplicando-se a transformada de Laplace obtemos

$$sF(s) - f(0) = \frac{s}{s^2 + a^2} - a\,\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Isolando-se $F(s)$

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

3. Equações com Termo não Homogêneo Descontínuo (página 324)

3.1. (a)

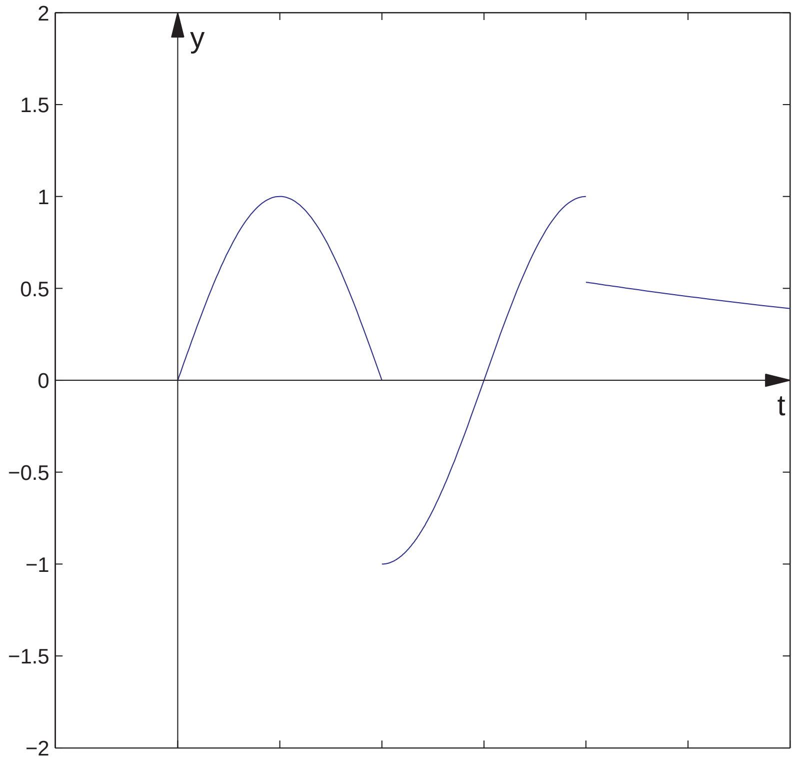
$$f(t) = \left\{\begin{array}{rl} t, & 0 \le t < 1 \\ -(t-2), & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{array}\right.$$

$$f(t) = t - tu_1(t) - (t-2)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

(b)

$$f(t) = t - 2(t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$



3.2. (a) $f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t)\operatorname{sen} t + u_\pi(t)\cos t - u_{2\pi}(t)\cos t + u_{2\pi}(t)e^{-\frac{t}{10}}$

(b) $f(t) = \operatorname{sen} t + u_\pi(t)(\operatorname{sen}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) + u_{2\pi}(t)(-\cos(t-2\pi) + e^{-\frac{\pi}{5}}e^{-\frac{t-2\pi}{10}})$
$F(s) = \frac{1}{1+s^2} + e^{-\pi s}(\frac{1}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2}) + e^{-2\pi s}(-\frac{s}{1+s^2} + e^{-\frac{\pi}{5}}\frac{1}{s+\frac{1}{10}})$

3.3.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \pi/2 \\ -\cos t, & \pi/2 \le t < 3\pi/2 \\ 0, & t \ge 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t - u_{\pi/2}(t)\cos t - u_{\pi/2}(t)\cos t + u_{3\pi/2}(t)\cos t \\ &= \cos t + 2u_{\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-\pi/2) + u_{3\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-3\pi/2) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{s}{1+s^2} + 2e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{1+s^2} + e^{-3\pi s/2}\frac{1}{1+s^2}$$

3.4. (a) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s}$ Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s} + 1$$

Assim,
$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2+1)}$
$= \frac{1}{s^2+1} + H(s) - e^{-\pi s/2}H(s),$
em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t) - h(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t).$
$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+1)$ obtemos

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s=0$ e $s=i$

$$\begin{cases} 1 & = & A \\ 1 & = & (Bi+C)i = -B + Ci \end{cases}$$

De onde obtemos $A = 1$. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos $B = -1$ e $C = 0$.

Assim,

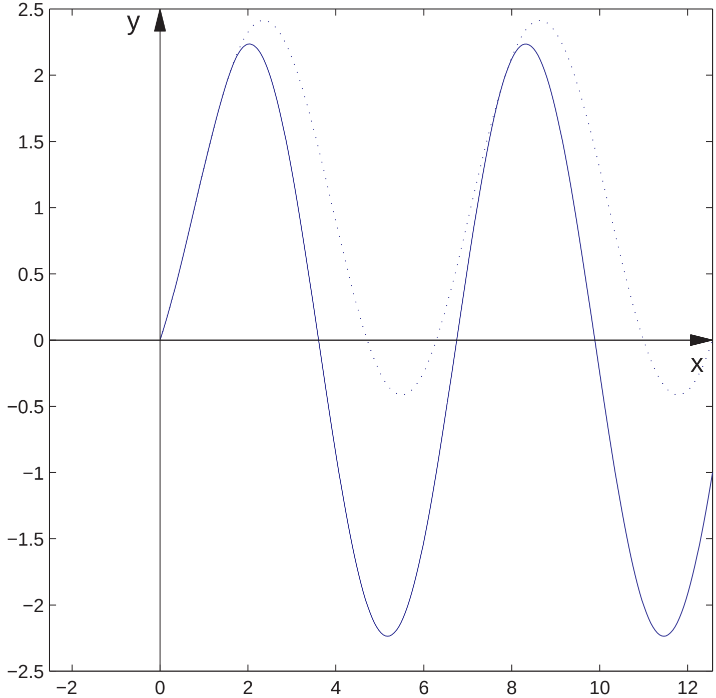
$$H(s) \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t) - h(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t) = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{\pi/2}(t)(1 - \operatorname{sen} t).$$



(b) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-2\pi s}}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2}$
$= (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})H(s) + \frac{1}{(s+1)^2+1}$,
em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)}$$

$y(t) = h(t-\pi)u_\pi(t) - h(t-2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\operatorname{sen} t.$
$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}.$
Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+2s+2)$ obtemos

$$2 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)s$$

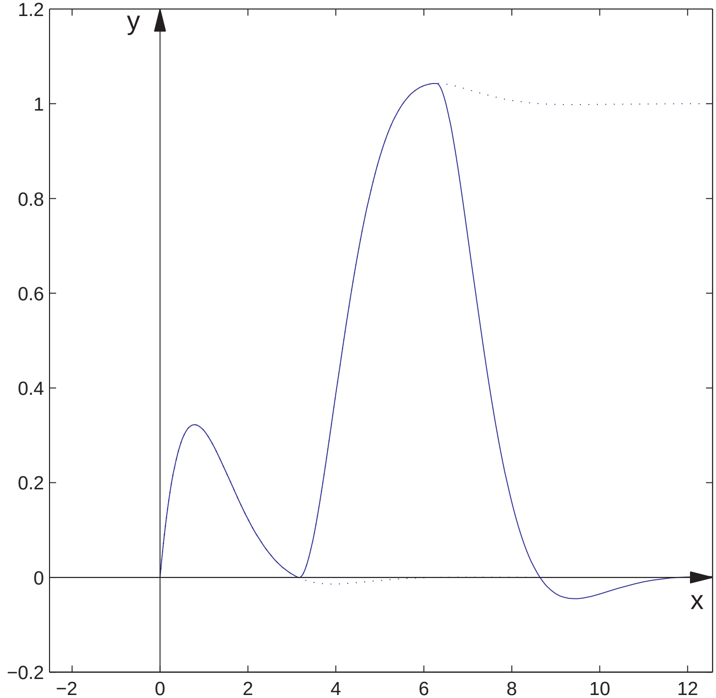
Substituindo-se $s = 0$ obtemos $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 1 + B \\ 0 &= 2A + C = 2 + C \end{cases}$$

que tem solução $B = -1$ e $C = -2$. Assim,
$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$
$= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$
De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por
$y(t) = h(t-\pi)u_\pi(t) - h(t-2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\operatorname{sen} t.$



(c) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$= H(s) - e^{-2\pi s} H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t) h(t - 2\pi)$$

$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$

Multiplicando-se por $(s^2+1)(s^2+4)$:

$1 = (As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)$

Substituindo-se $s = i, 2i$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 1 & = & (iA + B)3 \\ 1 & = & (2iC + D)(-3) \end{array} \right.$$

Como A, B, C e D são reais, comparando-se as partes real e imaginária obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 1 & = & 3B \\ 0 & = & 3A \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcr} 1 & = & -3D \\ 0 & = & -6C \end{array} \right.$$

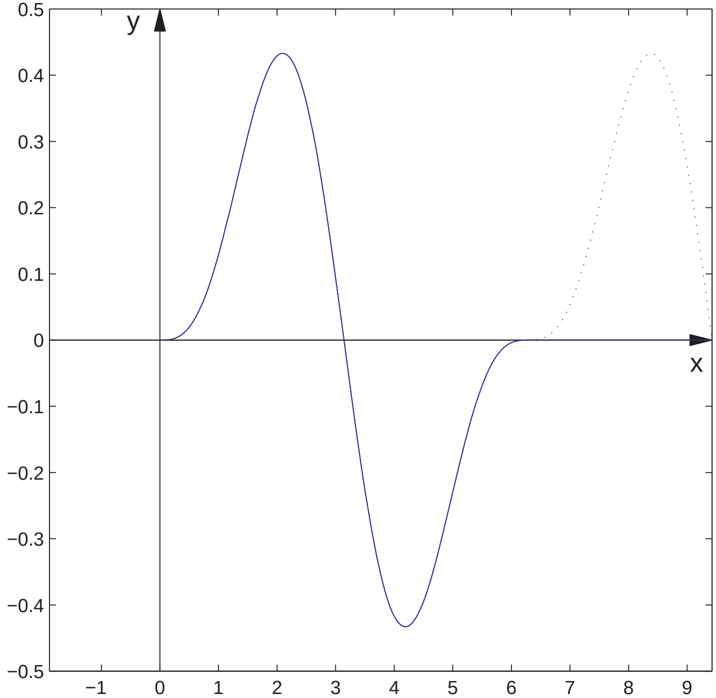
De onde obtemos a solução $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$ e $D = -1/3$.

Assim,

$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

$h(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t$

$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t) h(t - 2\pi) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t - u_{2\pi}(t)(\frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t)$



(d) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$ Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$= H(s) + e^{-\pi s} H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

Do exercício anterior temos que

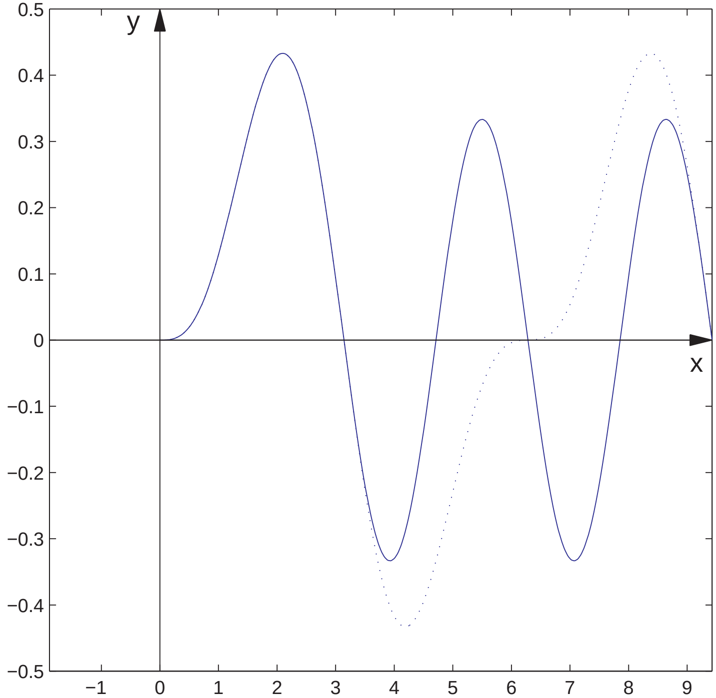
$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t$$

e portanto

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{6}\operatorname{sen} 2t - u_\pi(t)(\tfrac{1}{3}\operatorname{sen} t + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen} 2t)$$



(e) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} - \frac{e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)} = H(s) - e^{-10s}H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t-10).$$

$H(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

Multiplicando $H(s)$ por $s\left(s^2+3s+2\right)$ obtemos

$$1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

Substituindo-se $s = 0, -1, -2$ obtemos

$$\begin{cases} 1 &= 2A \\ 1 &= -B \\ 1 &= 2C \end{cases}$$

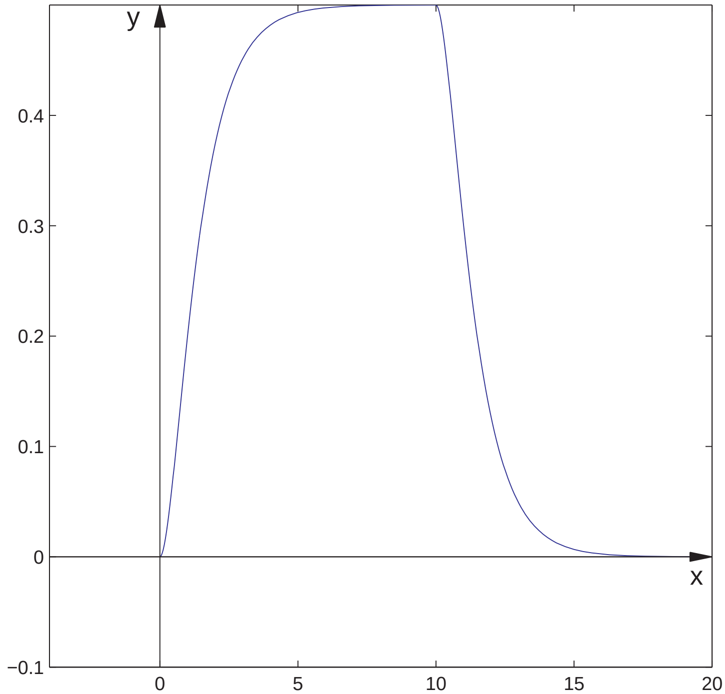
que tem solução $A = 1/2$, $B = -1$ e $C = 1/2$.

Assim,

$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$

$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t-10)$$



(f) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+3s+2)} = Y_1(s) + e^{-2s}H(s)$

em que

$H(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$ e $Y_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2).$$

$Y_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = Y_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$

Multiplicando $Y_1(s)$ por $(s+1)(s+2)$:

$$1 = A(s+2) + B(s+1)$$

Substituindo-se $s = -1, -2$ obtemos $A = 1$ e $B = -1$. Assim,

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

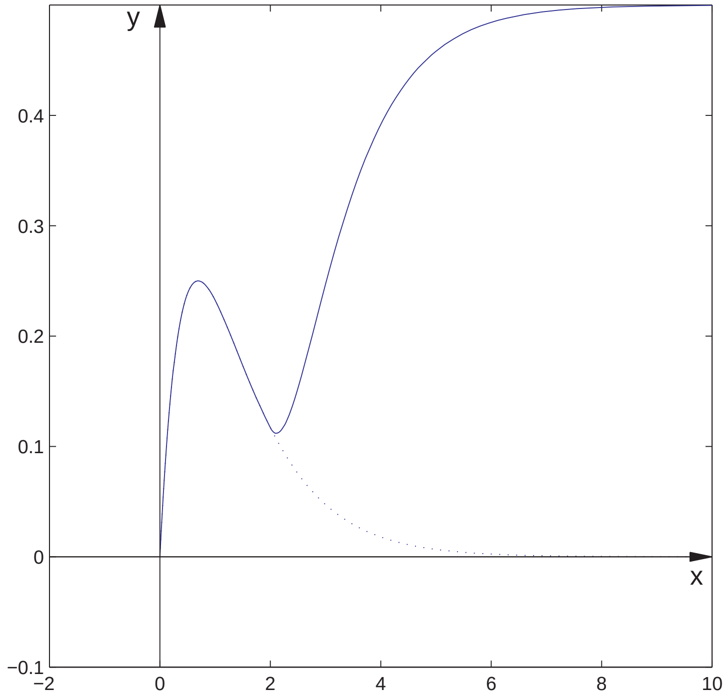
$$y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Do exercício anterior

$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$

$$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2) = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)h(t-2)$$



(g) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 1\right) Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$
$= e^{-3\pi s}H(s) + \frac{1}{s^2+1}$,
em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t-3\pi)u_{3\pi}(t).$$

$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$.
Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+1)$ obtemos

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ e $s = i$

$$\begin{cases} 1 &= A \\ 1 &= (Bi+C)i = -B + Ci \end{cases}$$

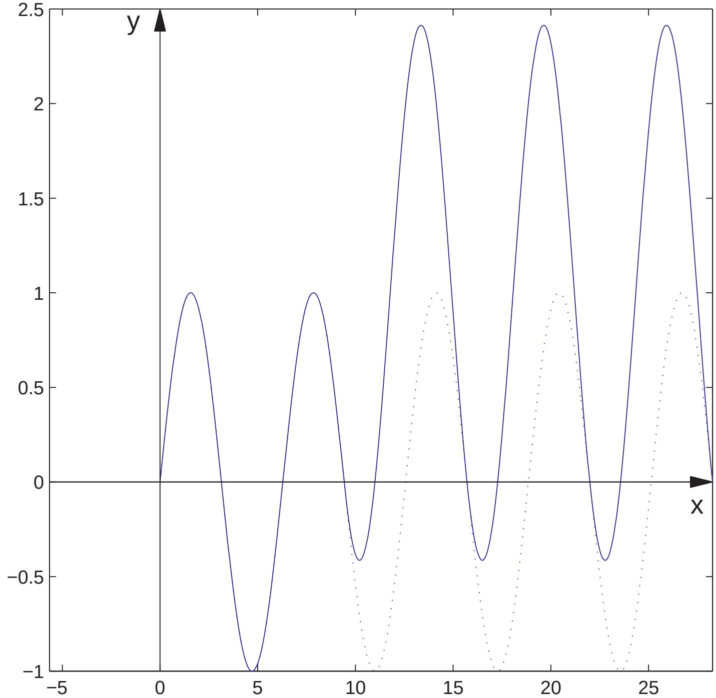
De onde obtemos $A = 1$. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos $B = -1$ e $C = 0$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t-3\pi)u_{3\pi}(t) = \operatorname{sen} t + u_{3\pi}(t)[1 - \cos(t-3\pi)]$



(h) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} + e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$

$= H(s) + e^{-\pi s} H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+s+\frac{5}{4}}$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)$:

$1 = (As+B)(s^2+s+\frac{5}{4}) + (Cs+D)(s^2+1)$

Substituindo-se $s = i$ e $s = -\frac{1}{2} + i$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & (Ai+B)(-1+i+\frac{5}{4}) \\ & = & (Ai+B)(i+\frac{1}{4}) \\ & = & (-A+\frac{1}{4}B) + i(\frac{1}{4}A+B) \\ 1 & = & (C(-\frac{1}{2}+i)+D)(\frac{1}{4}-1-i+1) \\ & = & (\frac{7}{8}C+\frac{1}{4}D) + i(\frac{3}{4}C-D) \end{array}\right.$$

Comparando-se as partes real e imaginária das equações acima obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -A+\frac{1}{4}B \\ 0 & = & \frac{1}{4}A+B \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \frac{7}{8}C+\frac{1}{4}D \\ 0 & = & \frac{3}{4}C-D \end{array}\right.$$

Resolvendo-se os sistemas acima obtemos a solução $A = -16/17$, $B = 4/17$, $C = 16/17$ e $D = 12/17$.

Assim,

$H(s) = \frac{4}{17}\left(\frac{-4s+1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{s^2+s+\frac{5}{4}}\right)$

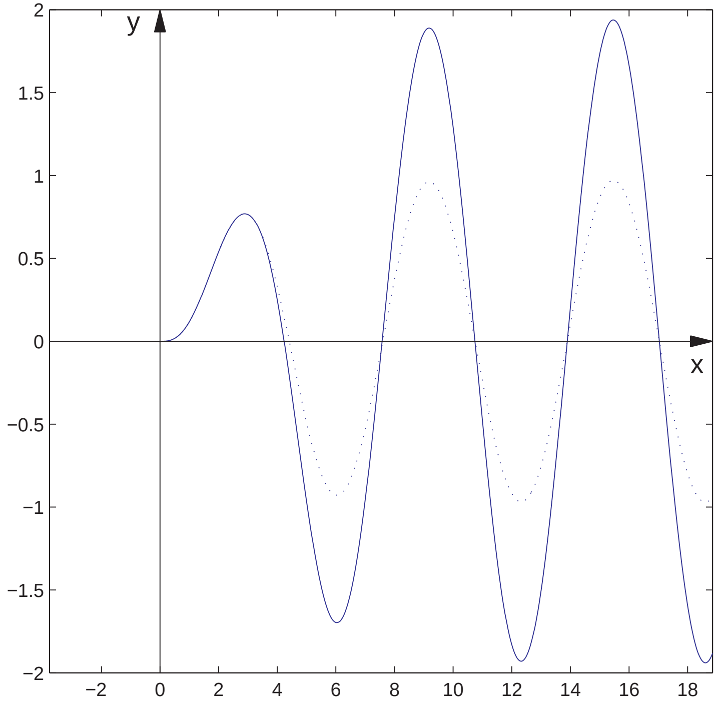
$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{(s+1/2)^2+1}\right)$

$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+3/4}{(s+1/2)^2+1}\right)$

$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1} + \frac{1}{(s+1/2)^2+1}\right)$

$$h(t) = \frac{4}{17}\left(-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$



(i) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-3\pi s}}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos
$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}}{s}$
Assim,
$Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}$
$= (e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}) H(s),$
em que
$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}(t)h(t-3\pi).$$

$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$
Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+4)$ obtemos

$$2 = A(s^2+4) + (Bs+C)s$$

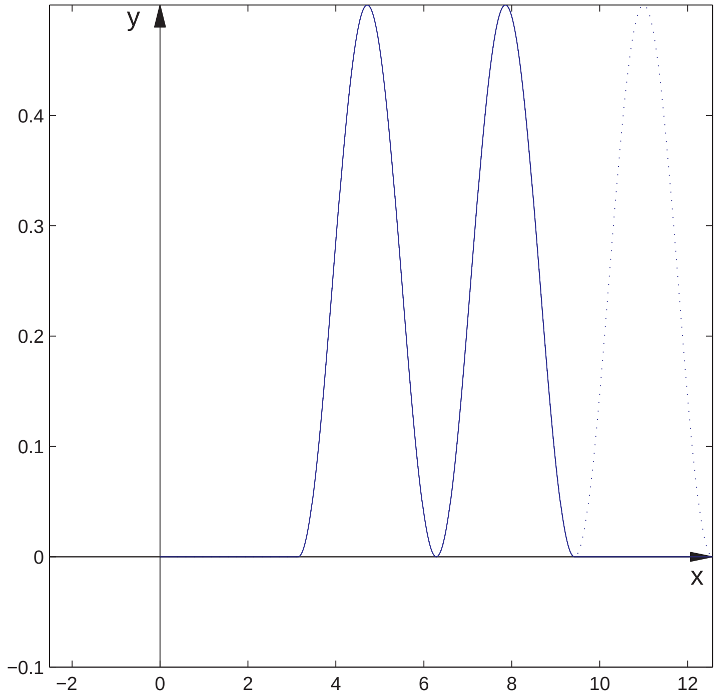
Substituindo-se $s = 0, 2i$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2 &=& 4A \\ 2 + i0 &=& (2iB + C)2i = (-4B) + i(2C) \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1/2$, $B = -1/2$ e $C = 0$. Assim,
$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}$
De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}h(t-3\pi)$$



(j)

$$f(t) = e^t(1 - u_2(t)) = e^t - e^2 e^{t-2} u_2(t)$$
$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$
$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)\left(s^2+4\right)} - e^2\frac{e^{-2s}}{(s-1)\left(s^2+4\right)} \\ &= H(s) - e^2e^{-2s}H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}.$$

$$H(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s-1)(s^2+4)$:

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os termos de grau 0 obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} 1/5 & + & B & & & = & 0 \\ 4/5 & & & - & C & = & 1 \end{array}\right.$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $A = 1/5$, $B = -1/5$ e $C = -1/5$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4}$$

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\, 2t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2 u_2(t)h(t-2)$$

$$f(t) = e^{2t}(1-u_1(t)) = e^{2t} - e^2 e^{2(t-1)} u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2}$$

(k)

$$\begin{aligned} \left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) & \\ -2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) &= \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} - e^2 \frac{e^{-s}}{(s-1)^2(s-2)} \\ &= H(s) - e^2 e^{-s} H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)}.$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por $(s-2)(s-1)^2$ obtemos

$$1 \quad = \quad A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se $s=1$ e $s=2$ obtemos $C=-1$ e $A=1$. Derivando-se a expressão anterior

$$0 = 2A(s-1) + B[(s-1)+(s-2)] + C$$

e substituindo-se $s=1$ obtemos $B=-1$. Assim,

$$H(s) \quad = \quad \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$h(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2 u_1(t)h(t-1)$$

(l)

$$f(t) = e^t(1-u_1(t)) = e^t - ee^{t-1}u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$\begin{aligned} &\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) \\ &+2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) \quad = \quad \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0)=0$ e $y'(0)=0$ obtemos

$$\left(s^2+2s+2\right)Y(s) = \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(s-1)\left(s^2+2s+2\right)} \\
&\quad - e\frac{e^{-s}}{\left(s^2+2s+2\right)(s-1)} \\
&= H(s) - ee^{-s}H(s)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}, \\
&= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s-1)(s^2+2s+2)$ obtemos

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s=1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
1/5 & + & B & & & = & 0 \\
2/5 & & & - & C & = & 1
\end{array}\right.$$

que tem solução $B = -1/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1}
\end{aligned}$$

Pelo item anterior temos que

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - eu_1(t)h(t-1)$$

Aula 4

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Nesta aula estudaremos algumas equações diferenciais parciais usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier.

4.1 Séries de Fourier

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Compreender o que é a série de Fourier.
- Saber calcular os coeficientes da série de Fourier de uma função no intervalo $[-L, L]$.

- Saber calcular os coeficientes da série de Fourier de cossenos e de senos de uma função no intervalo $[0, L]$.

Lembramos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Vamos considerar duas funções contínuas por partes no intervalo $[a, b]$ iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes pode-se mostrar que ela pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \tag{4.1}$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

A série (4.1) com os coeficientes dados acima é chamada **série de Fourier de** f.

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [4], afirma que para toda função f contínua por partes em $[-L, L]$, a série de Fourier de f converge.

Teorema 4.1. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \quad \textit{para } t \in (-L, L)$$

As funções $\cos\frac{n\pi t}{L}$ e $\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$ são periódicas com período (fundamental=menor período) igual a $\frac{2L}{n}$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$ Logo $2L$ é período comum a todas elas. Logo a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T = 2L$. Assim a série de Fourier de f pode ser entendida como a série de Fourier da extensão periódica de f, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad \text{se } t \in [-L, L] \quad \text{e é tal que} \quad \tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t).$$

Ou seja, a série de Fourier de f é a mesma série de Fourier de $\tilde{f}$ que é a função que é periódica de período $2L$ e que coincide com f no intervalo $[-L, L]$.

O termo constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

representa a média da função f no intervalo $[-L, L]$ e está escrito desta forma ($\frac{a_0}{2}$ e não simplesmente a_0) somente para que a fórmula que vale para os coeficientes dos cossenos da série de Fourier fique valendo também para o termo constante ($n = 0$).

Exemplo 4.1. Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f^{(0)}_{c,d} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f^{(0)}_{c,d}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} dt = d - c, \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

Como a função $f^{(0)}_{c,d}$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, pelo

Teorema 4.1, ela pode ser representada por sua série de de Fourier:

$$\begin{aligned}
f_{c,d}^{(0)}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{d-c}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi d - \operatorname{sen} n\pi c}{n} \cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi c - \cos n\pi d}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

Em particular a série de Fourier da função $f_{-1,1}^{(0)}$, que é a função constante igual a 1 tem somente um termo diferente de zero que é a própria função.

Vamos calcular a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \le t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \le t < \pi \end{cases}$$

Podemos escrever

$$f(t) = f_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}^{(0)}(t), \quad \text{com } L = \pi.$$

Portanto usando os coeficientes que obtivemos para $f_{c,d}^{(0)}$, com $c = -\frac{1}{4}$ e $d = \frac{1}{2}$ obtemos

$$f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt$$

Vamos calcular a série de Fourier da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \le t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \le t < \pi \end{cases} \quad \text{e tal que} \quad g(t + 2\pi) = g(t)$$

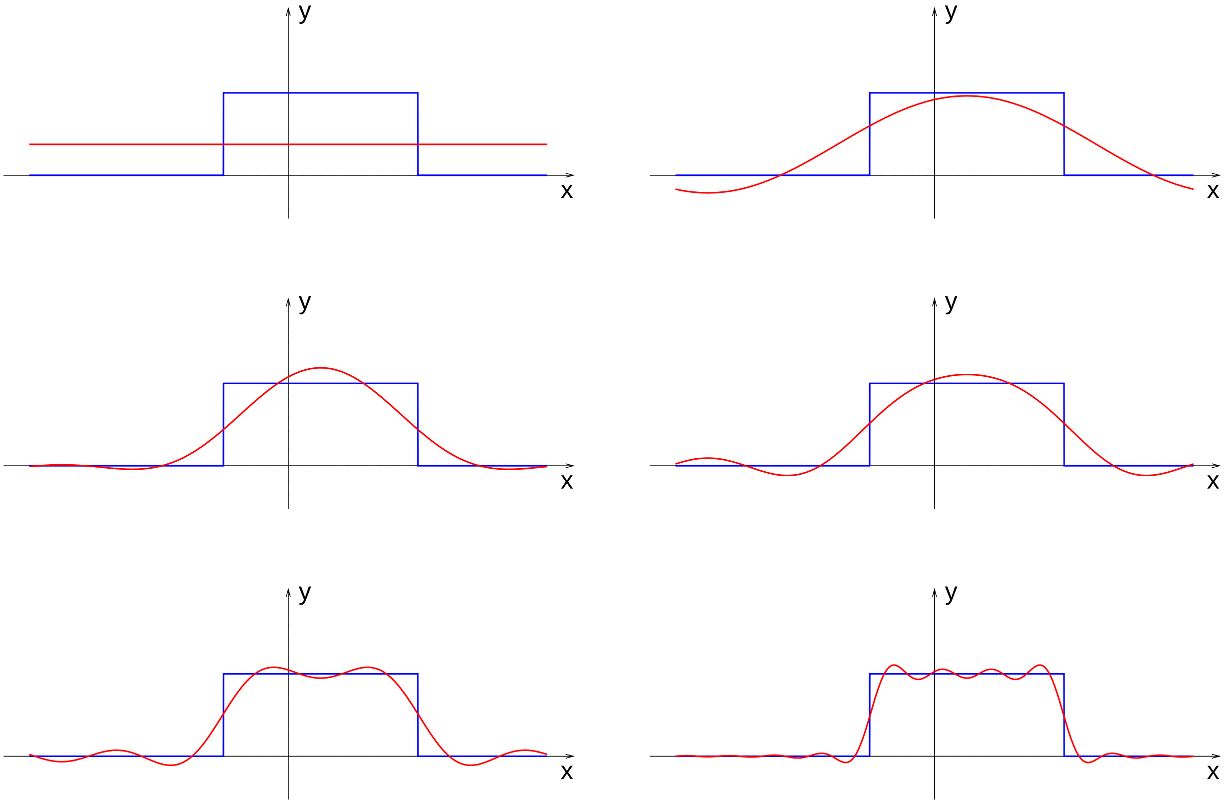


Figura 4.1: Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 4.1, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

Esta função é a extensão periódica da função $f = f^{(0)}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}$ com período igual a 2π. Logo g pode ser representada por sua série de Fourier que é a mesma da função anterior

$$g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt$$

Exemplo 4.2. Seja L um número real maior que zero. Seja n um inteiro positivo. Seja

$$f : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$f(t) = \cos\frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns ds = 0,$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$, para $m > 0$ e $m \neq n$ temos que,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\cos ms ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds \\ &= \frac{1}{2\pi(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

e para $m = n$,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ns] ds = 1$$

Para $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \ \operatorname{sen} msds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0 \end{aligned}$$

Nestas integrais usamos as relações

$$\begin{aligned} \cos(m+n)s &= \cos ms \cos ns - \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \cos(m-n)s &= \cos ms \cos ns + \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m+n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns + \cos ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m-n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns - \cos ms \operatorname{sen} ns. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de $f(t) = \cos \frac{n\pi t}{L}$, para $t \in [-L, L]$, tem somente um termo que é a própria função.

Exemplo 4.3. Seja L um número real maior que zero. Seja n um inteiro positivo. Seja

$$f : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$f(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ns ds = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$, temos que para $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ns \cos msds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0
\end{aligned}$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ns \operatorname{sen} msds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0
\end{aligned}$$

E para $m = n$,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nsds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ns] ds = 1$$

Assim a série de Fourier de $f(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$, para $t \in [-L, L]$, tem somente um termo que é a própria função.

Observe que com os coeficientes das funções destes três exemplos podemos determinar os coeficientes das séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

$$a_n(\alpha f + \beta g) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g)$$

e

$$b_n(\alpha f + \beta g) = \alpha b_n(f) + \beta b_n(g).$$

Exemplo 4.4. Seja L um número real maior que zero. Seja n um inteiro positivo. Seja

$$f : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$f(t) = 3 - 2\cos\frac{15\pi t}{L} + 4\operatorname{sen}\frac{31\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Usando a observação acima temos que os coeficientes da série de Fourier de f são dados por

$$a_n(f) = 3a_n(1) - 2a_n(\cos\frac{15\pi t}{L}) + 4a_n(\operatorname{sen}\frac{31\pi t}{L})$$

$$b_n(f) = 3b_n(1) - 2b_n(\cos\frac{15\pi t}{L}) + 4b_n(\operatorname{sen}\frac{31\pi t}{L})$$

Como já calculamos estes coeficientes nos exemplos anteriores temos que a série de Fourier da função é ela própria.

Exemplo 4.5. Considere a função $f_{c,d}^{(1)} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f_{cd}^{(1)}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\,dt = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\,ds\\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \operatorname{sen} s + \cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\ \operatorname{sen} s\,ds\\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

Como a função $f_{c,d}^{(1)}$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, pelo

Teorema 4.1, ela pode ser representada por sua série de de Fourier:

$$\begin{aligned}
f_{c,d}^{(1)}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{L(d^2-c^2)}{4} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left.(s\ \operatorname{sen} s + \cos s)\right|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left.(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\right|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}
\end{aligned}$$

4.1.1 Funções Pares e Ímpares

Se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes com derivada f' também contínua por partes é **par**, isto é,

$$f(-t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L],$$

então pelo Teorema 4.1 ela pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

e os coeficientes são dados por (verifique!):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos.

Analogamente, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes com derivada f' também contínua por partes é **ímpar**, isto é,

$$f(-t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L],$$

então pelo Teorema 4.1 ela pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

e os coeficientes dados por (verifique!):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par ou ímpar no intervalo $[-L, L]$.

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \le t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \le t < L \end{cases} \qquad \text{é par}$$

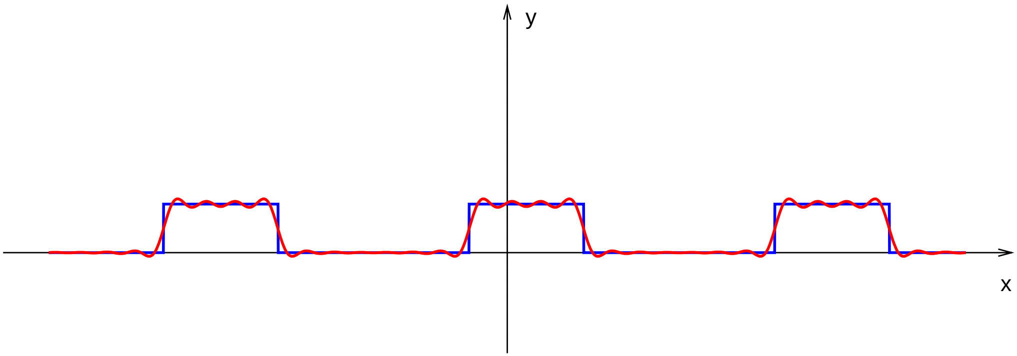


Figura 4.2: Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 4.1, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

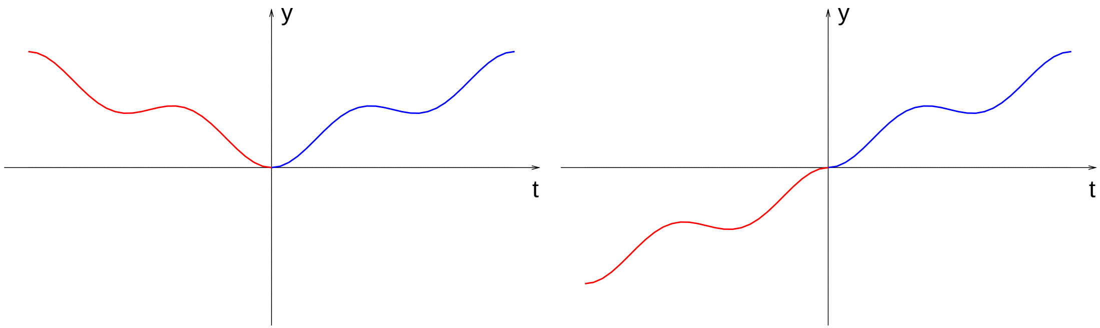


Figura 4.3: Prolongamentos par e ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

$$\tilde{\tilde{f}}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases} \quad \text{é ímpar.}$$

Corolário 4.2. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes.*

(a) *A **série de Fourier de cossenos** de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad \textit{para } t \in (0, L).$$

(b) *A **série de Fourier de senos** de f*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier:

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \qquad \textit{para } t \in (0, L).$$

Exemplo 4.6. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = 1$, para $0 \leq t \leq 1$. A série de cossenos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 393.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}) = 0,$$

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, \quad \text{para } 0 \leq t \leq L \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq L. \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos.

Exemplo 4.7. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$, para $0 \leq t \leq L$. A série de cossenos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par e a série de senos

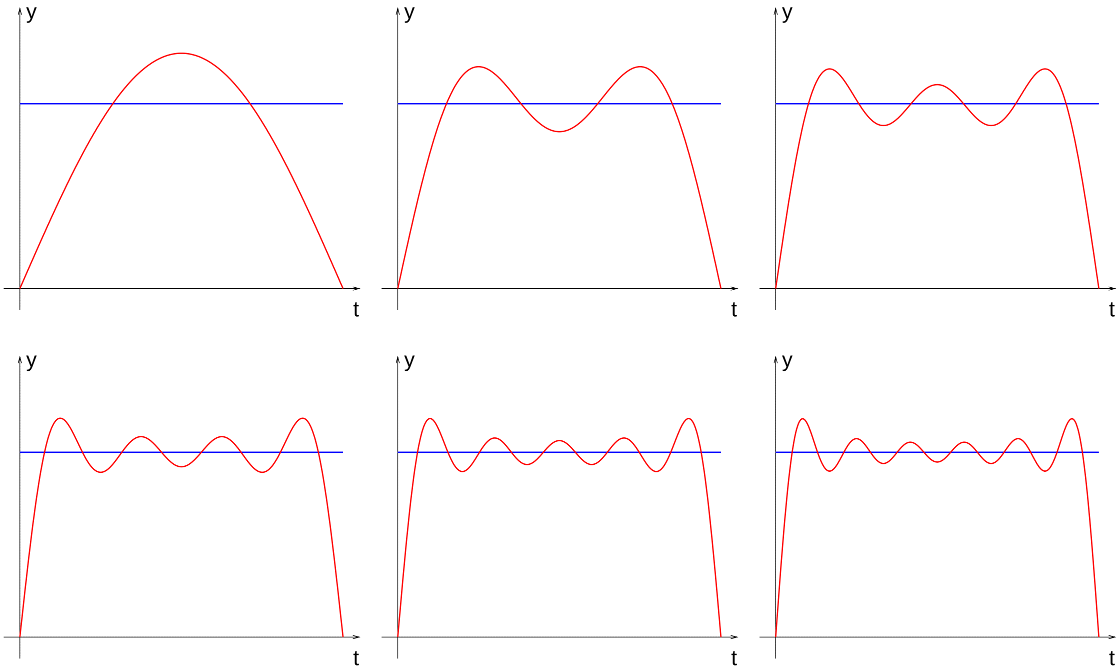


Figura 4.4: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 1$ para $t \in [0, L]$ e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de f, para $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

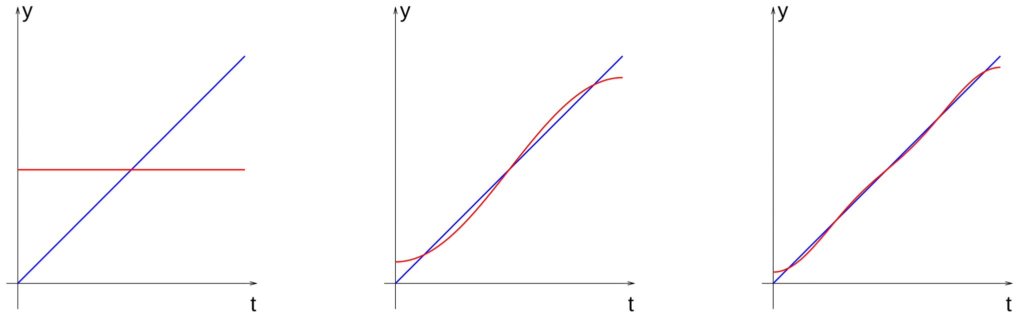


Figura 4.5: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$ para $t \in [0, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para $N = 0, 1, 3$

é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 393.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2a_0(f_{0,1}^{(1)}) = L, \\
a_n &= 2a_n(f_{0,1}^{(1)}) = \frac{2L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2L}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \\
b_n &= 2b_n(f_{0,1}^{(1)}) = \frac{2L}{n\pi}\,(-\cos n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}2L}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{L}{2} - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{L} \\ &= \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par da série de cossenos (exceção de a_0) são nulos.

Com os coeficientes de funções elementares que tabela na página 393 podemos determinar as séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

$$\begin{aligned} a_n(\alpha f + \beta g) &= \alpha a_n(f) + \beta a_n(g) \\ b_n(\alpha f + \beta g) &= \alpha b_n(f) + \beta b_n(g) \end{aligned}$$

Exemplo 4.8. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq L/2 \\ L - t, & \text{se } L/2 < t \leq L \end{cases}$$

Ela pode ser escrita como

$$f = f^{(1)}_{0,1/2} + L f^{(0)}_{1/2,1} - f^{(1)}_{1/2,1}.$$

Assim os coeficientes a_n e b_n podem ser calculados como

$$\begin{aligned} a_n(f) &= a_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + L a_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - a_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\ b_n(f) &= b_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + L b_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \end{aligned}$$

Usando a tabela na página 393 e multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$
\begin{aligned}
a_0 = a_0(f) &= a_0(f^{(1)}_{0,1/2}) + La_0(f^{(0)}_{1/2,1}) - a_0(f^{(1)}_{1/2,1}) = \frac{L}{2}\\
a_n = a_n(f) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\
&= a_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + La_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - a_n(f^{(1)}_{1/2,1})\\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_0^{n\pi/2} + \frac{2L}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2L}{n^2\pi^2} - \frac{2L}{n^2\pi^2}\cos n\pi\\
&= 2L\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}
$$

Entretanto alguns termos são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$a_{2k+1} = 0$$

$$a_{2k} = 2L\frac{2\cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = L\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}.$$

os termos de índice par podem ainda ser separados:

$$a_{2\cdot 2l} = 0$$

$$a_{2(2l+1)} = L\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{2L}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

$$\begin{aligned}
b_n = b_n(f) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx \\
&= b_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + Lb_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{2L}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4L\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\; n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Como a função f é contínua por partes com sua derivada f' também contínua por partes, pelo Corolário 4.2, ela pode ser representada por sua série de cossenos e por sua série de senos de Fourier:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{L}{4} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{L} \\
&= \frac{L}{4} - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2(2n+1)\pi t}{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L}
\end{aligned}
$$

Vários coeficientes são nulos e não é por acaso. Sempre que um coeficiente é calculado por uma integral de uma função $h(x)$ que é simétrica em relação ao ponto $x = \frac{L}{2}$ e $y = 0$, ou seja, tal que $h(t) = -h(L-t)$, para $t \in [0, L/2]$, o seu valor é igual a zero (verifique!). No exemplo anterior isto ocorreu com os coeficientes de índice ímpar da série de cossenos e com os de índice par da série de senos (verifique!). Isto é análogo ao que ocorre com funções ímpares sendo integradas em intervalos simétricos.

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, $-1 \leq c < d \leq 1$	$a_m = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos\dfrac{m\pi t}{L}dt$	$b_m = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{m\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = d - c$ $a_m = \frac{1}{m\pi}\,\mathrm{sen}\, s\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m = -\frac{1}{m\pi}\cos s\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_m =$ $\frac{L}{m^2\pi^2}\left(s\ \mathrm{sen}\, s + \cos s\right)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m =$ $\frac{L}{m^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_m =$ $\frac{L^2}{m^3\pi^3}\left(\left(s^2 - 2\right)\mathrm{sen}\, s + 2s\cos s\right)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m =$ $\frac{L^2}{m^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\, s + \left(2 - s^2\right)\cos s\right)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$

Exercícios (respostas na página 463)

1.1. Mostre que uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.2. Mostre que uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.3. (a) Considere uma função $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ que é simétrica em relação ao ponto $x = L/2$ e $y = 0$, ou seja, tal que $h(L - t) = -h(t)$, para $t \in [0, L/2]$. Mostre que

$$\int_0^L h(t)\,dt = 0$$

(b) Mostre que se $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ que é simétrica em relação a reta $x = L/2$, ou seja, tal que $f(t) = f(L - t)$, para $t \in [0, L/2]$, então os coeficientes de índice ímpar da série de cossenos de Fourier são nulos, $a_{2k+1} = 0$, para $k = 0, 1, 2. \ldots$, assim como os coeficientes de índice par da série de senos de Fourier, ou seja, $b_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, 3 \ldots$ (Sugestão: use o item anterior.)

1.4. Determine a representação da função $f^{(2)}_{c,d} : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^{(2)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1.$$

em série de cossenos e de senos de Fourier.

1.5. Determine as representações da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t(L - t), \quad \text{para } t \in [0, L]$$

em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos.

1.6. Determine as representações das funções $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ 1, & \text{se } L/2 \leq t \leq L, \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4 \\ L - t, & \text{se } 3L/4 \leq t \leq L \end{cases}$

1.7. Considere a seguinte função :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ -1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \end{cases} \qquad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t)$$

(a) Encontre uma solução particular e a solução geral da equação diferencial $2y'' + y = f(t)$.

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2y'' + y = f(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.8. Considere a seguinte função :

$$f(t) = 1 - |t|, \quad \text{se} \quad -1 < t \leq 1 \quad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t).$$

(a) Calcule a série de Fourier S_f da função f;

(b) Determine os valores $S_f(0)$ e $S_f(100.5)$. Justifique.

1.9. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 1$.

(a) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha somente termos em cossenos.

(b) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha somente termos em senos.

(c) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha termos em cossenos e senos.

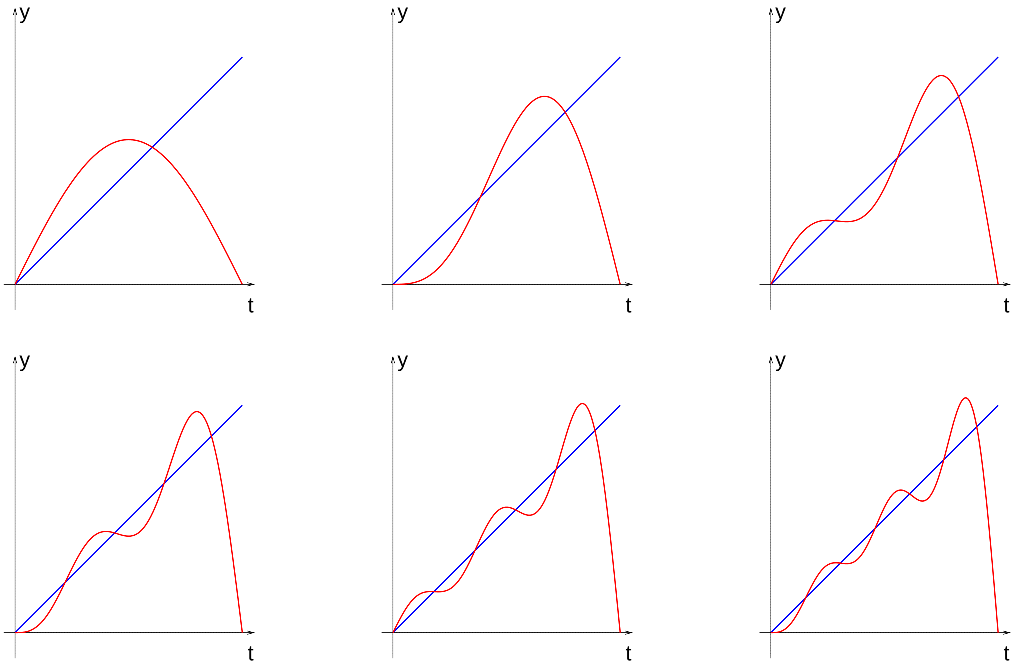


Figura 4.6: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$ para $t \in [0, L]$ e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de f, para $N = 1, \ldots, 6$

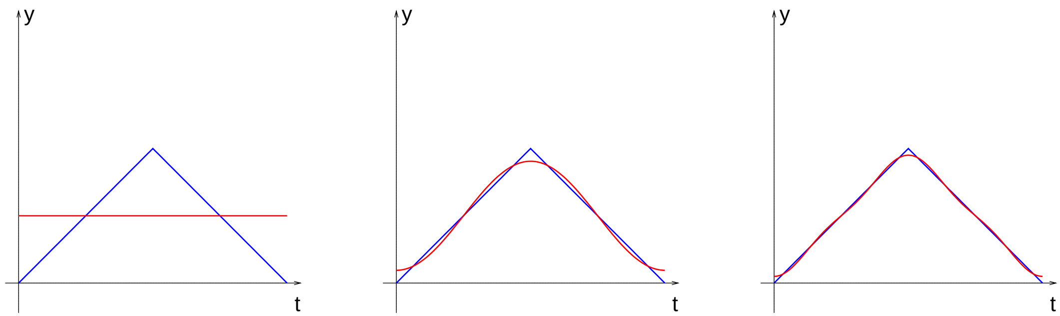


Figura 4.7: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = L - t$ se $t \in [L/2, L]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $N = 0, 2, 6$

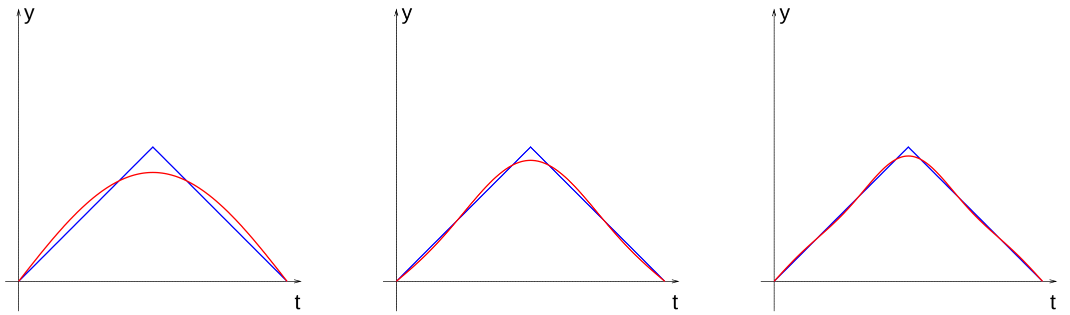


Figura 4.8: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = L - t$ se $t \in [L/2, L]$ e somas parciais da série de Fourier de senos para $N = 1, 3, 5$

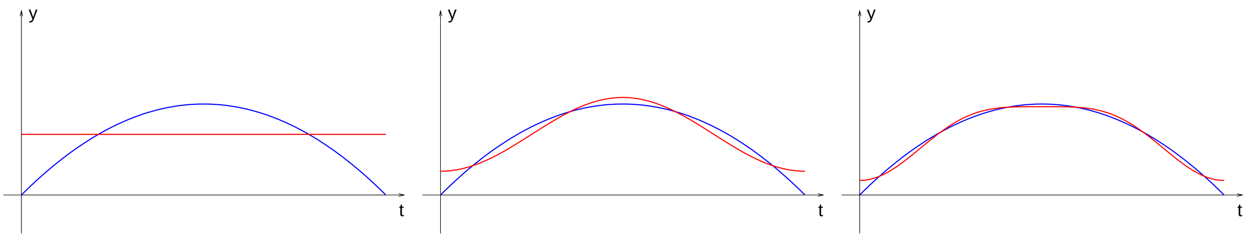


Figura 4.9: Somas parciais da série de Fourier de cossenos da função $f(t) = t(L-t)$, para $t \in [0, L]$, para $N = 0, 2, 4$.

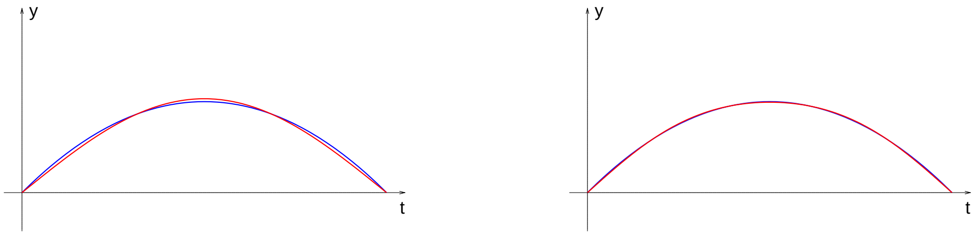


Figura 4.10: Somas parciais da série de Fourier de senos da função $f(t) = t(L-t)$, para $t \in [0, L]$, para $N = 1, 3$

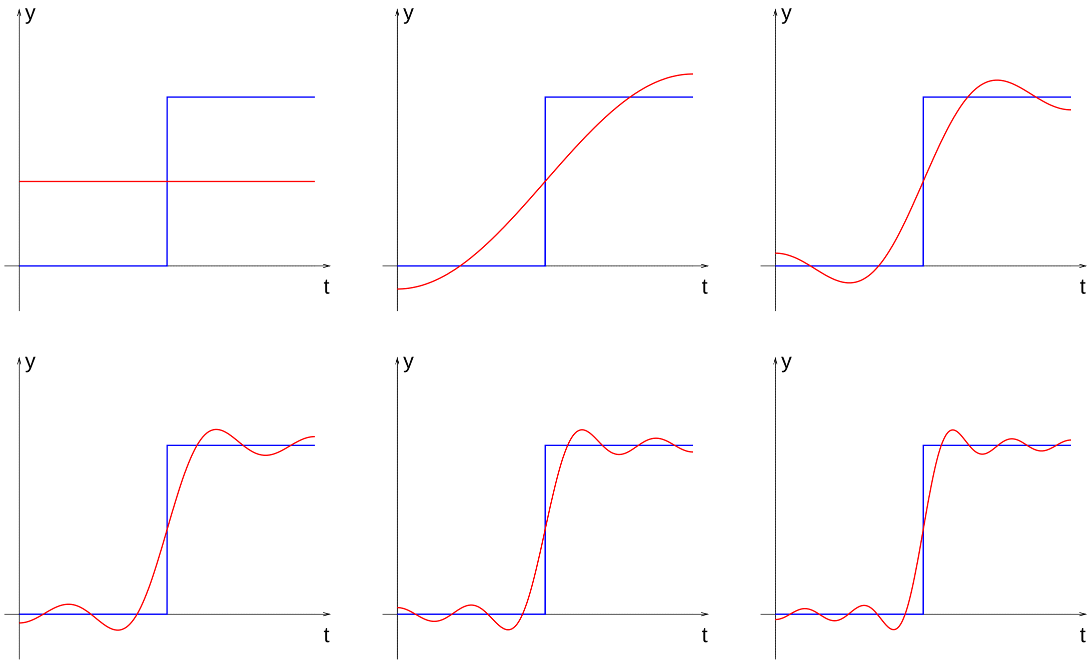


Figura 4.11: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 0, 1, 3, 5, 7, 9$.

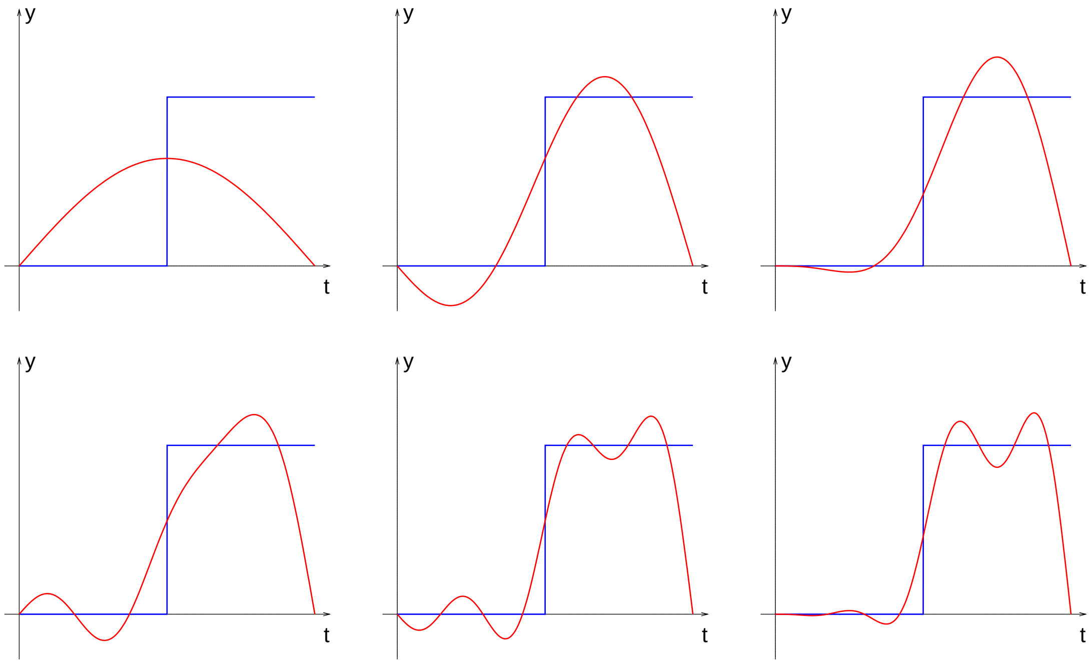


Figura 4.12: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

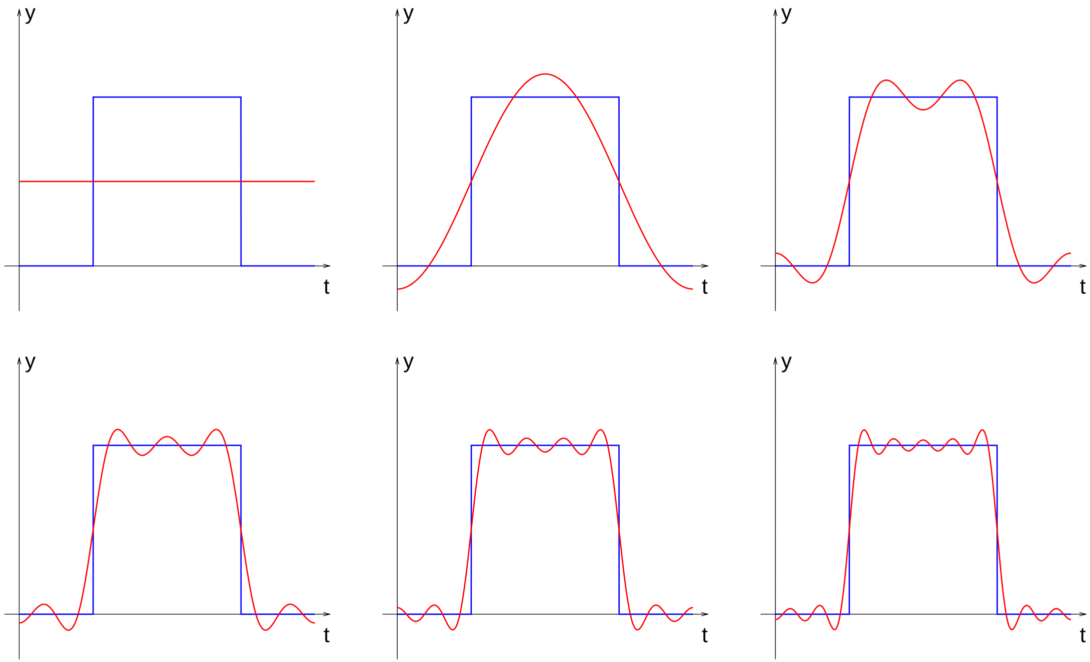


Figura 4.13: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 0, 2, 6, 10, 14, 18$.

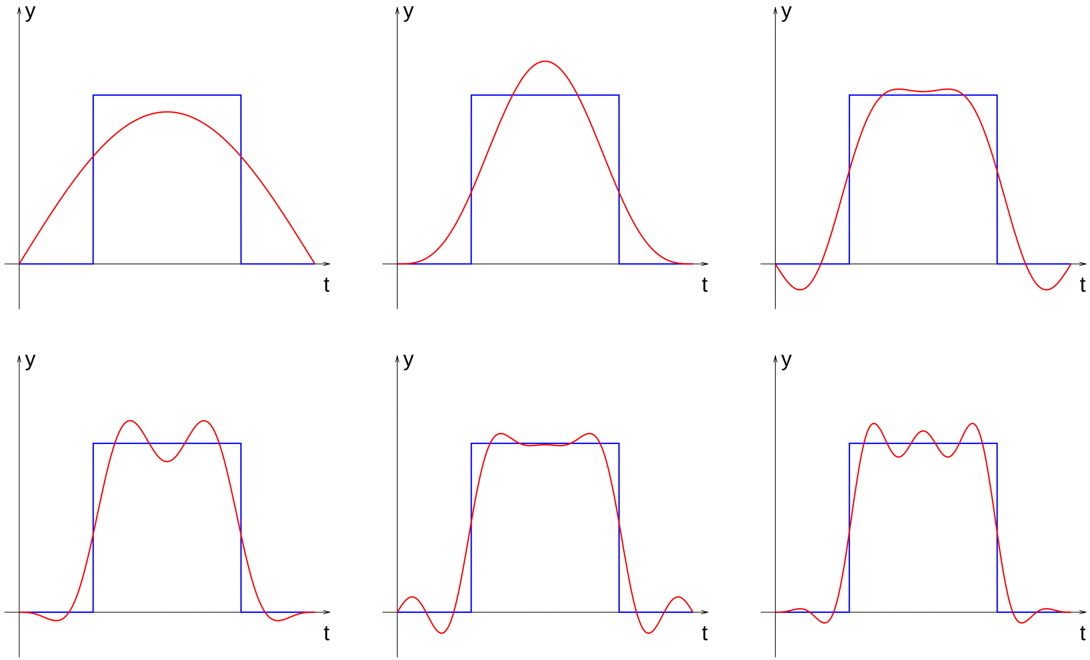


Figura 4.14: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

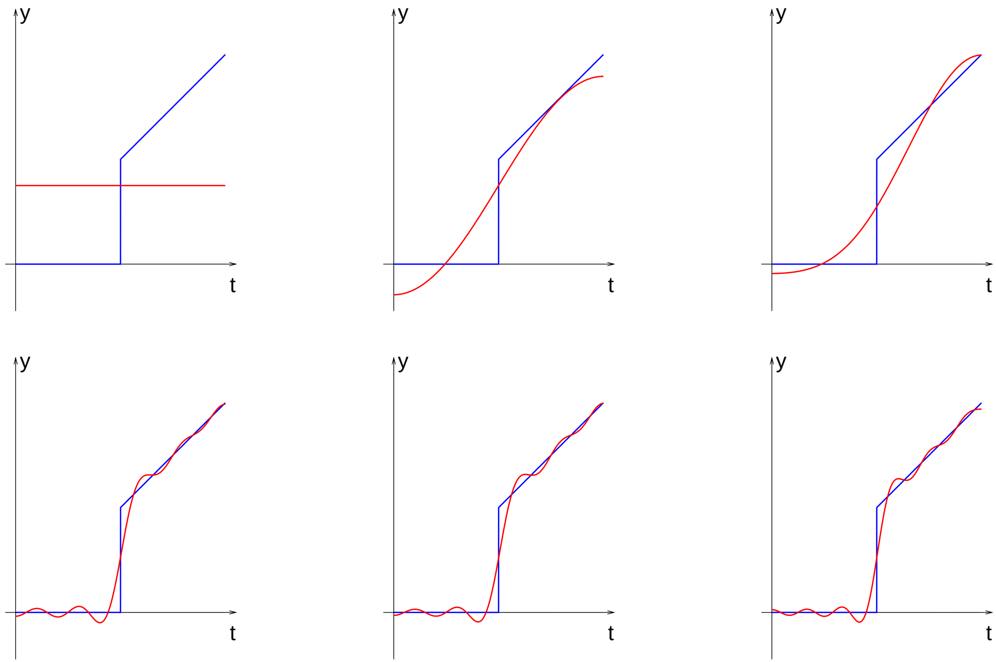


Figura 4.15: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 0, 1, 2, 9, 10, 11$.

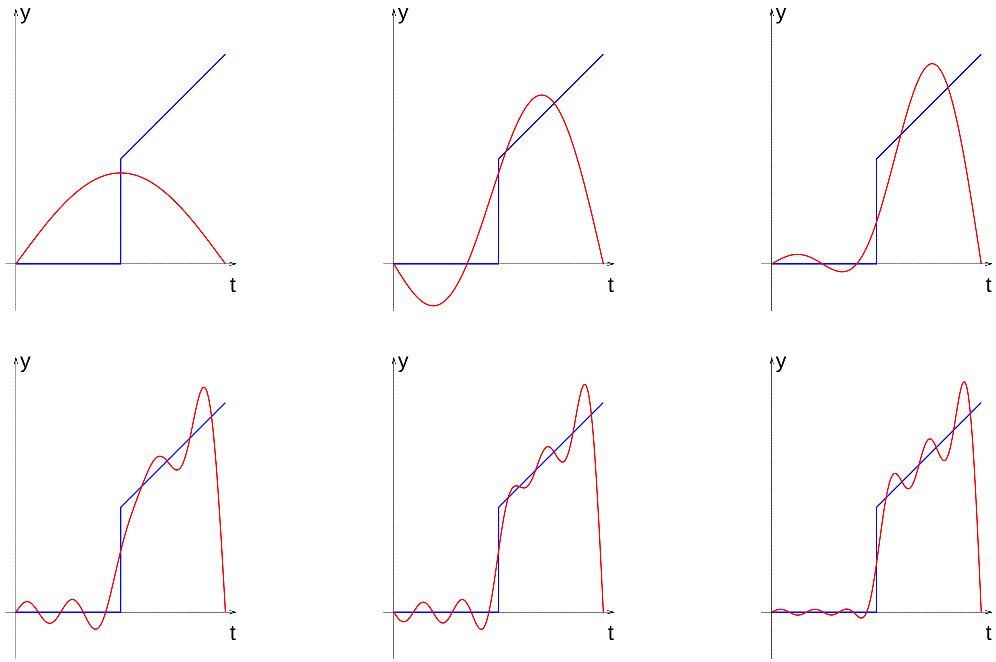


Figura 4.16: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 2, 3, 9, 10, 11$.

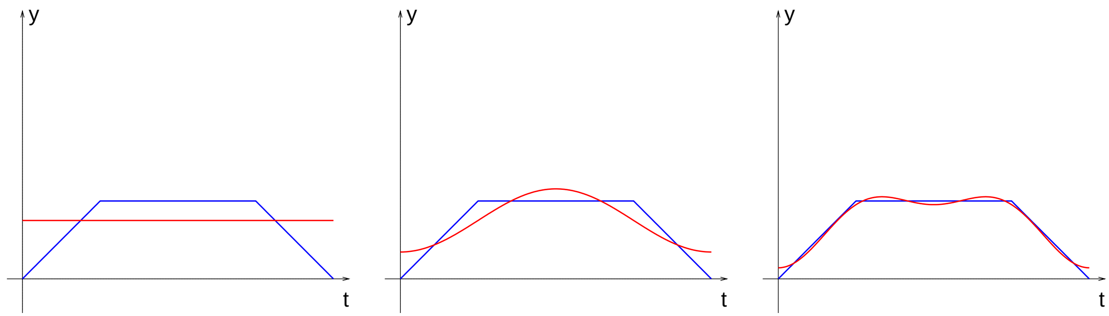


Figura 4.17: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, L/4]$, $f(t) = L/4$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = L - t$, se $t \in [3L/4, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para $N = 0, 2, 4$.

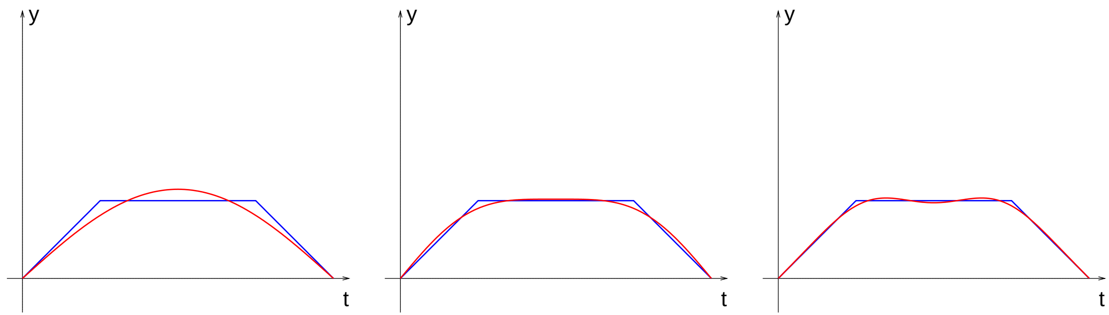


Figura 4.18: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, L/4]$, $f(t) = L/4$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = L - t$, se $t \in [3L/4, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de senos para $N = 1, 3, 5$.

4.2 Equação do Calor em uma Barra

Objetivos:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Saber encontrar a solução para a equação do calor em uma barra com extremidades a temperaturas fixas.
- Saber encontrar a solução para a equação do calor em uma barra com extremidades isoladas.

Pode se mostrar que a temperatura em uma barra homogênea em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação do calor em uma barra**. Aqui $\alpha > 0$ é uma constante que depende do material que compõe a barra.

4.2.1 Extremidades a Temperaturas Fixas

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e as temperaturas nas extremidades, T_1 e T_2, que são mantidas constantes com o tempo, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{array} \right.$$

Vamos inicialmente resolver o problema com $T_1 = T_2 = 0$, que chamamos de **condições homogêneas**.

Condições Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos usar um método chamado **separação de variáveis**. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(0)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0 & (4.4) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (4.5) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.4) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$ (verifique!), mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (4.4) tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (4.5) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad \text{para } x \in [0,L]$$

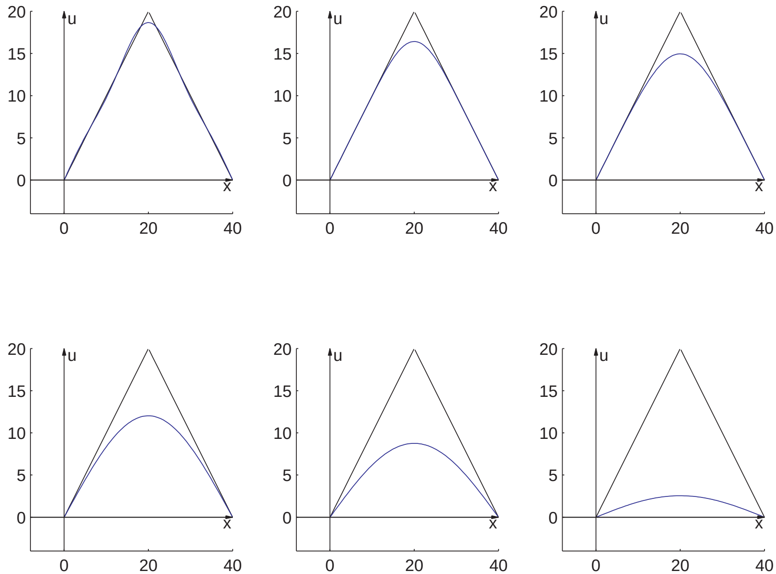


Figura 4.19: Solução da equação do calor, $u(x,t)$, do Exemplo 4.9 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

Exemplo 4.9. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperatura de 0° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0,\ u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja, usando o fato de que

$$f = f^{(1)}_{0,1/2} + 40 f^{(0)}_{1/2,1} - f^{(1)}_{1/2,1}$$

e a tabela na página 393, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned}
c_n = c_n(f) &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= c_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 40c_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - c_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{160\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi x}{40}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}
\end{aligned}$$

Condições Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de x (derivada parcial em relação a t nula), tal que a segunda derivada (em relação a x) é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$. O que sugere como solução do problema inicial a função

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, precisamos que

$$f(x) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou ainda,

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$ são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x$$

chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

Exemplo 4.10. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10, \; u(40,t) = 30 \end{cases}$$

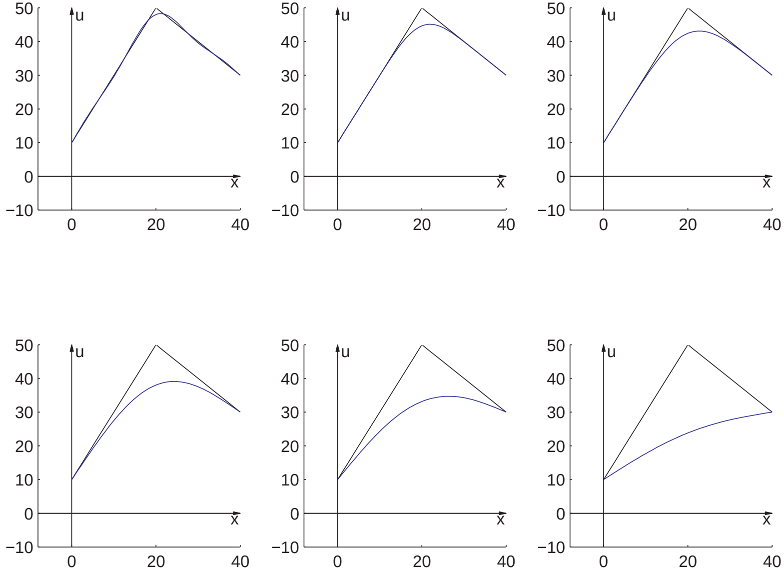


Figura 4.20: Solução da equação do calor, $u(x,t)$, do Exemplo 4.10 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

A solução é então

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n = c_n(g) &= \frac{3}{2}c_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 60c_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - \frac{3}{2}c_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\ &= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\ &= \frac{240 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}f^{(1)}_{0,1/2}(x) + 60 f^{(0)}_{1/2,1}(x) - \frac{3}{2}f^{(1)}_{1/2,1}(x)$$

e a tabela na página 393, multiplicando por 2 os valores. Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 10 + \frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = 10 + \dfrac{x}{2}$.

4.2.2 Barra Isolada nos Extremos

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e sabendo que as extremidades são mantidas isoladas, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X'(0) = X'(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(0)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (4.6) \\ T'(t) - \alpha^2\lambda T(t) = 0 & (4.7) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que (4.6) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$ (verifique!). Mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (4.6) tem solução

$$X(x) = C_1 \cos\frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (4.7) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2} T(t) = 0$$

que tem como solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução (verifique!)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também são soluções da equação diferencial séries da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \;\; c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \;\; n = 1, 2, 3\ldots$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c_0, \quad \text{para } x \in [0,L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução constante e igual ao valor médio da temperatura inicial, chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**. Solução de equilíbrio

Exemplo 4.11. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

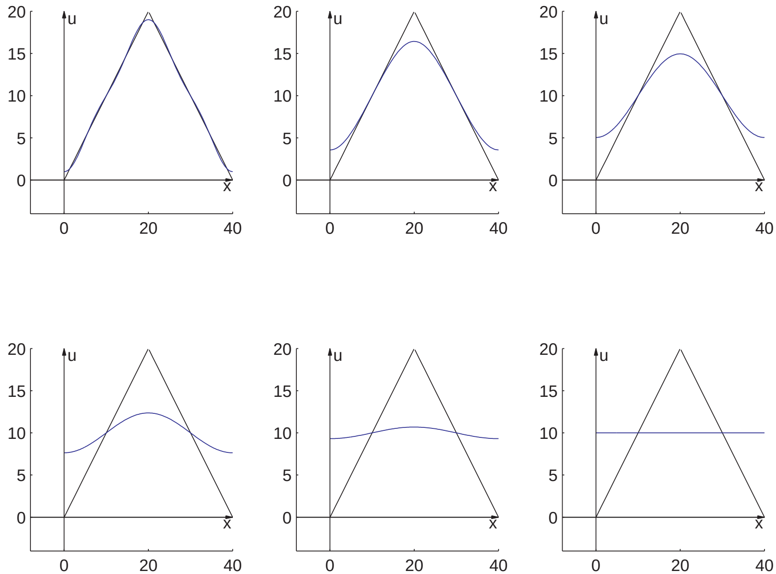


Figura 4.21: Solução da equação do calor, $u(x,t)$, do Exemplo 4.11 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 10, \\
c_n = c_n(f) &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx \\
&= c_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 40c_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - c_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{n\pi/2} + \frac{80}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{80}{n^2\pi^2} - \frac{80}{n^2\pi^2}\cos n\pi \\
&= 80\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos:

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = 80\frac{2\cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = 40\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

e

$$c_{2\cdot 2l} = 0$$

$$c_{2(2l+1)} = 40\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{80}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= 10 + \frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{20} e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t} \\
&= 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{20} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}t}
\end{aligned}
$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = 10$, quando t tende a mais infinito, que é a solução estacionária.

Exercícios (respostas na página 475)

2.1. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C.

2.2. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C e 60° C respectivamente. Qual a temperatura estacionária?

2.3. Considere uma barra com 40 cm de comprimento , $\alpha = 1$, isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por $u(x,0) = 3x/2$, $0 \le x \le 40$ e que as extremidades estão isoladas.

(a) Determine $u(x,t)$.

(b) Qual a temperatura estacionária?

2.4. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$

2.5. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = 0,\ X'(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$

2.6. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X'(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

2.7. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = 0,\ X(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

2.8. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

2.9. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura fixa T_1 e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

2.10. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$

4.3 Corda Elástica com Extremidades Presas

Objetivo:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Saber encontrar a solução para a equação da corda elástica com extremidades presas.

Pode-se mostrar que o deslocamento de uma corda elástica como função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação da corda elástica**. Aqui $a > 0$ é uma constante que depende do material que compõe a corda.

Vamos determinar o deslocamento em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, em uma corda de comprimento L presa nas extremidades, sendo conhecidos o deslocamento inicial de cada ponto da corda, $f(x)$, e a velocidade inicial de cada ponto da corda, $g(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

A soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas é solução deste problema (verifique!).

4.3.1 Com Velocidade Inicial Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(0)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.8) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T'(0) = 0 & (4.9) \end{cases}$$

A equação (4.8) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (4.4) na página 411 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

e tem como solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.11) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem solução (verifique!)

$$T(t) = C_2 \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções da equação diferencial parcial.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

As soluções

$$u_n(x,t) = [\cos \frac{an\pi t}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

podem ser vistas como senos com amplitude variando de forma cossenoidal $A_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$ com freqüências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **freqüências naturais** da corda. Para cada n a função $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ é chamada **modo normal (ou natural) de vibração** e o seu período $\frac{2L}{n}$ é chamado **comprimento de onda** do modo normal.

A solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

para cada x, é periódica com relação ao tempo com período $T = \dfrac{2L}{a}$.

Exemplo 4.12. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

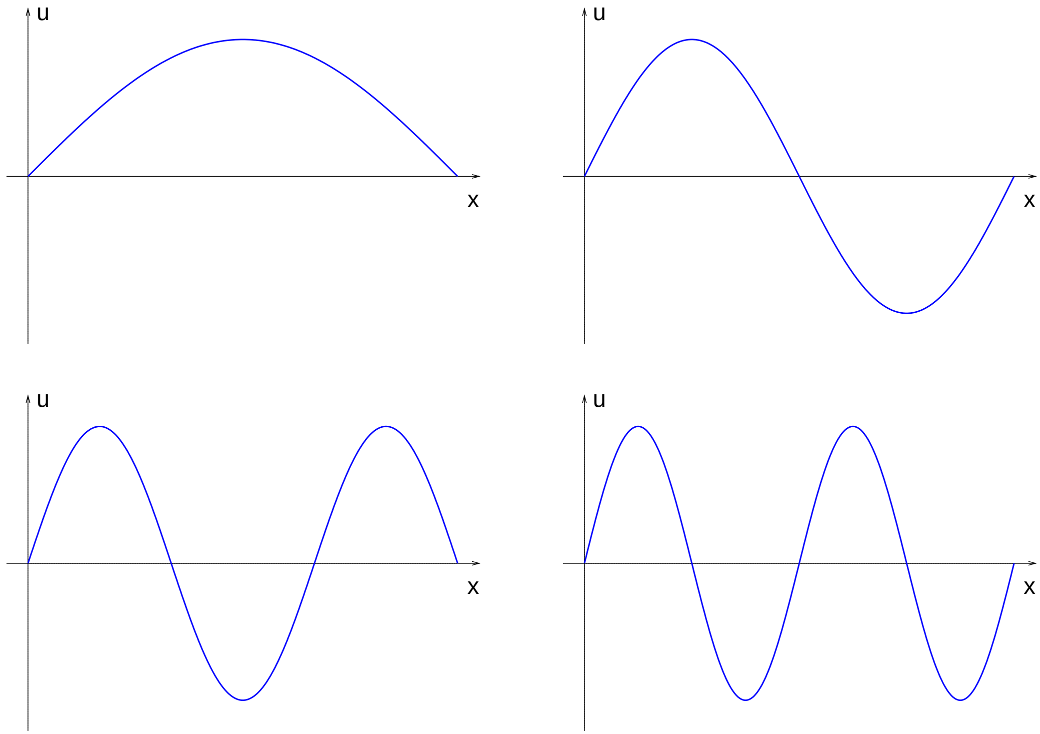


Figura 4.22: Modos naturais de vibração $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

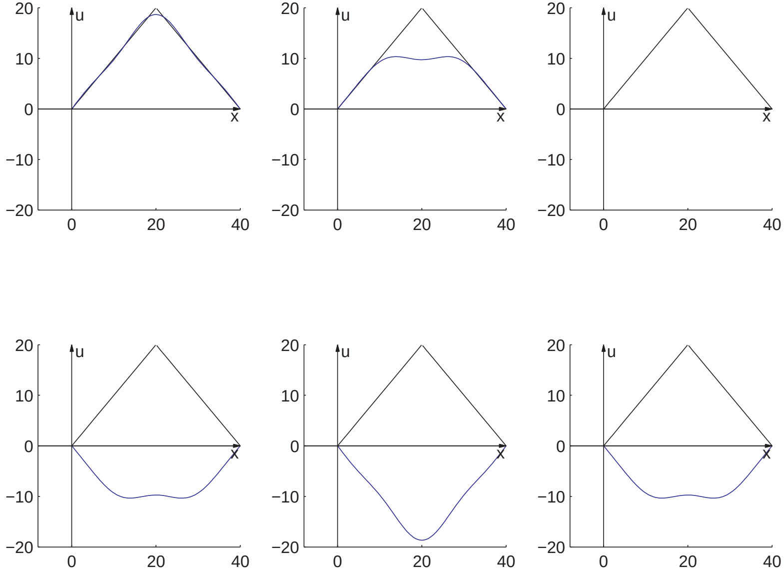


Figura 4.23: Solução do problema da corda elástica, $u(x,t)$, do Exemplo 4.12 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

4.3.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(0)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.10) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0 & (4.11) \end{cases}$$

A equação (4.10) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (4.4) na página 411 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

e tem como solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.11) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem solução (verifique!)

$$T(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções da equação diferencial parcial.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, devemos ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(x)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução $u(x,t)$ para cada x é periódica com período $\frac{2L}{a}$.

Exemplo 4.13. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; u(40,t) = 0 \end{cases}$$

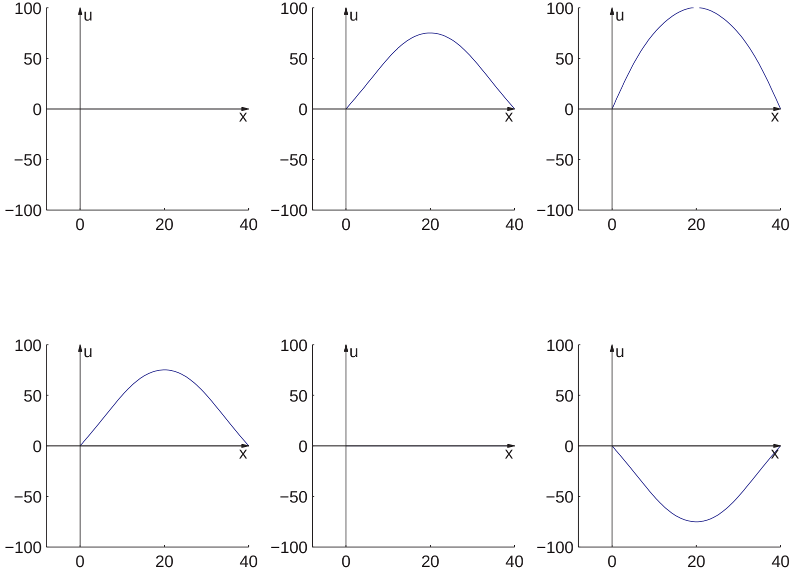


Figura 4.24: Solução do problema da corda elástica $u(x,t)$ do Exemplo 4.13 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} \quad n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{3200 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

4.3.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Como observamos anteriormente a solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Exemplo 4.14. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n\pi}{20}d_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}dx\\ &= \frac{160\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\ n=1,2,3\ldots\end{aligned}$$

$$d_n = \frac{3200\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\ n=1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} + \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}\\ &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20}\\ &+ \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}\end{aligned}$$

Exercícios (respostas na página 490)

3.1. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

3.2. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por $\operatorname{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$.

3.3. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

3.4. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por $\operatorname{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$.

3.5. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ solta de forma que a velocidade inicial seja $g(x)$ em que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

3.6. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \quad 0 < x < L. \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0. \end{cases}$$

3.7. Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t); \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; \quad 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x); \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

4.4 Equação de Laplace num Retângulo

Objetivo:

Ao terminar esta seção você deverá ser capaz de:

- Saber encontrar a solução para a equação de Laplace em um retângulo quando a solução é conhecida na fronteira (problema de Dirichlet).

Pode-se mostrar que o potencial elétrico, $u(x, y)$, numa região em que há ausência de cargas elétricas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

chamada **equação de Laplace**. Vamos considerar o seguinte problema de valor de contorno (ou fronteira) em um retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x),\ u(x, b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y),\ u(a, y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Dirichlet**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas (verifique!).

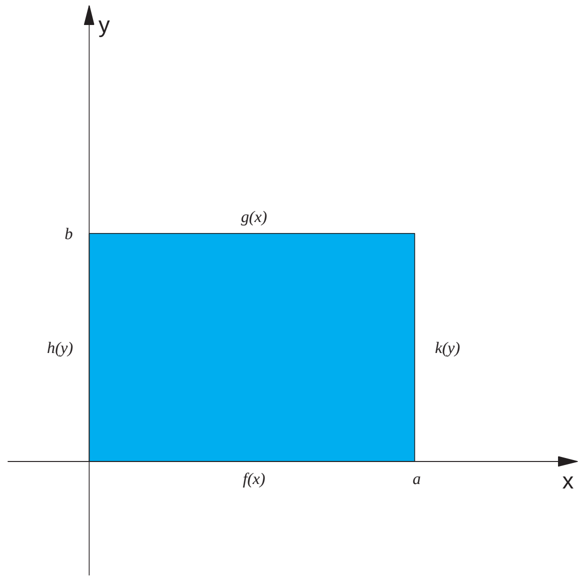


Figura 4.25: Região onde é resolvido o problema de Dirichlet

4.4.1 Apenas $k(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0 & (4.12) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 & (4.13) \end{cases}$$

A equação (4.13) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (4.4) na página 411 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ na equação (4.12) obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0,$$

que com a condição $X(0) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções da equação diferencial parcial.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(a, y) = k(y)$, precisamos ter

$$k(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $k : [0, b] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada k' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Exemplo 4.15. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0,\ u(x, 2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0,\ u(3, y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

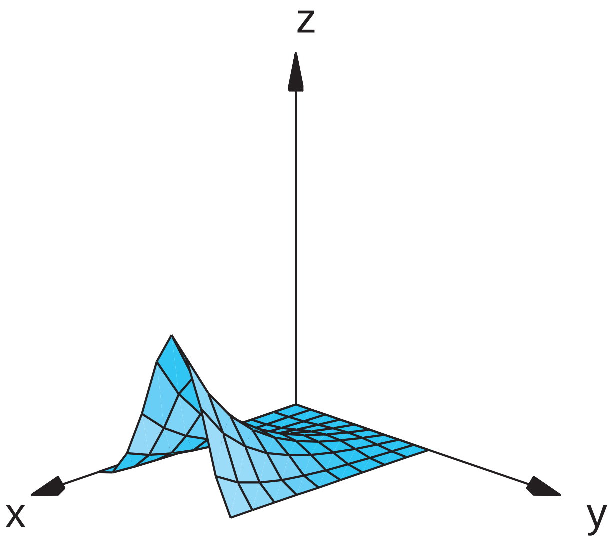


Figura 4.26: Solução da equação de Laplace do Exemplo 4.15 tomando apenas 3 termos não nulos da série

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de cossenos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}}, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

4.4.2 Apenas $h(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u(x, b) = 0, \ 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), \ u(a, y) = 0, \ 0 < y < 2 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(a) = 0 & (4.14) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 & (4.15) \end{cases}$$

A equação (4.15) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (4.4) na página 411 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

e a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ na primeira equação diferencial obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0,$$

que com a condição $X(a) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

são soluções da equação diferencial.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(0,y) = h(y)$, precisamos ter

$$h(y) = u(0,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $h : [0,b] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada h' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$-c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b h(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} dy, \;\; n = 1,2,3\ldots$$

Podemos evitar o sinal negativo se escrevemos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(a-x))$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Exemplo 4.16. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0, \; u(x,2) = 0, \; 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y), \; u(3,y) = 0, \; 0 < y < 2 \end{array} \right.$$

com

$$h(y) = \left\{ \begin{array}{rl} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{2}(3 - x))$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

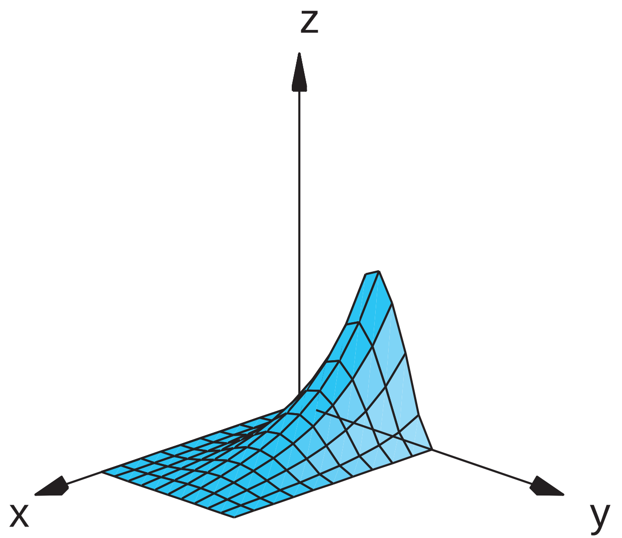


Figura 4.27: Solução da equação de Laplace do Exemplo 4.16 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\operatorname{senh}\frac{3(2n+1)\pi}{2}}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

4.4.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u(x,b)=g(x),\ 0<x<a \\ u(0,y)=h(y),\ u(a,y)=k(y),\ 0<y<b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas, que denotamos por $u^{(f)}(x,y)$, $u^{(g)}(x,y)$, $u^{(h)}(x,y)$ e $u^{(k)}(x,y)$, respectivamente. Ou seja,

$$u(x,y)=u^{(f)}(x,y)+u^{(g)}(x,y)+u^{(h)}(x,y)+u^{(k)}(x,y).$$

Exemplo 4.17. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ u(x,0)=0,\ u(x,2)=0,\ 0<x<3 \\ u(0,y)=h(y),\ u(3,y)=k(y),\ 0<y<2 \end{cases}$$

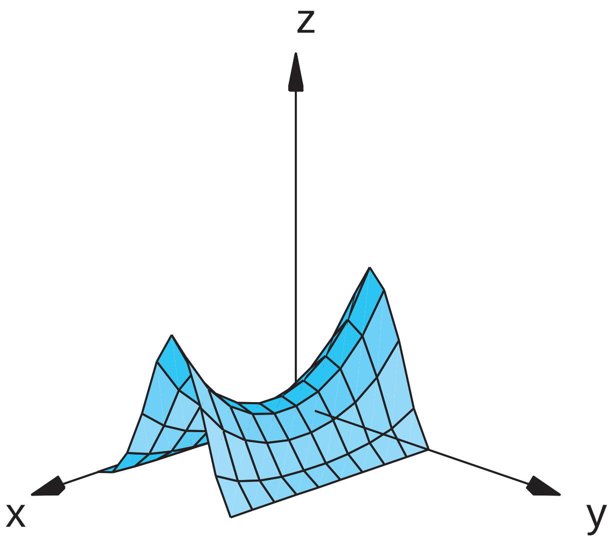


Figura 4.28: Solução da equação de Laplace do Exemplo 4.17 tomando apenas 3 termos não nulos da série

com

$$h(y) = k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left(\operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right)$$

em que $c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Exercícios (respostas na página 497)

4.1. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \le y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \le 2 \end{cases}$$

4.2. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \le y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \le 2 \end{cases}$$

4.3. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

4.4. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

4.5. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

4.6. Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

(c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(d) Explique por que este problema não tem solução única.

(e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

4.7. Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u - \dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0,y) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y); \quad 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0; \quad 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x); \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

4.5 Respostas dos Exercícios

1. Séries de Fourier (página 394)

1.1. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o cosseno e a função f são pares:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\cos\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= -\frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt
\end{aligned}
$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o seno é ímpar e a função f é par:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\,\mathrm{sen}\,\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0
\end{aligned}
$$

1.2. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o cosseno é par e a função f é ímpar:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\cos\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \end{aligned}$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o seno e a função f são ímpares:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\,\mathrm{sen}\,\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= -\frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \end{aligned}$$

1.3. (a) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(L-t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L/2]$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L h(t)\,dt &= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^{L} h(t)\,dt \\
&= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^{0} h(L-s)\,(-ds) \\
&= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^{0} h(s)\,ds = 0
\end{aligned}$$

(b) Para $h(t) = f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(L-t) &= f(L-t)\cos\frac{(2k+1)\pi(L-t)}{L} = f(t)\cos\left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{L}\right) = f(t)\cos\left(\pi - \frac{(2k}{}\right. \\
&= -f(t)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $a_{2k+1} = 0$.

Para $h(t) = f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi t}{L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(L-t) &= f(L-t)\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi(L-t)}{L} = f(t)\,\mathrm{sen}\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{L}\right) = f(t)\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2k\pi t}{L}\right) \\
&= -f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi t}{L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $b_{2k} = 0$.

1.4. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes duas vezes obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,dt = \frac{2L^2}{3}(d^3 - c^3)\\
a_n &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\cos s\,ds\\
&= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(s^2\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} - 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\,\mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}\\
&= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2-2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\ \mathrm{sen}\,s\,ds\\
&= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(-s^2\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} + 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}\\
&= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

Como a função $f_{c,d}^{(2)}$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, pelo Corolário 4.2, ela pode ser representada por sua série de cossenos de Fourier

$$f_{c,d}^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3) + \frac{2L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((s^2-2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

e por sua série de senos de Fourier

$$f_{c,d}^{(1)}(t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{2L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2s \operatorname{sen} s + (2-s^2)\cos s\right)}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$$

1.5. A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t(L-t) = -t^2 + Lt$ pode ser escrita como

$$f = -f_{0,1}^{(2)} + L f_{0,1}^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)dt = \frac{2}{L}\int_0^L (-t^2 + Lt)\,dt = \frac{-2L^2}{3} + L^2 \\
a_n = a_n(f) &= -a_n(f_{0,1}^{(2)}) + L\, a_n(f_{0,1}^{(1)}) \\
&= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left((n^2\pi^2 - 2)\operatorname{sen} n\pi + 2n\pi\cos n\pi\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left(n\pi \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi - 1\right) \\
&= \frac{2L^2}{n^2\pi^2}(-\cos n\pi - 1) = \frac{2L^2}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$a_{2k+1} = 0$$

$$a_{2k} = \frac{-4L^2}{(2k)^2\pi^2} = \frac{-L^2}{k^2\pi^2}.$$

$$\begin{aligned}
b_n = b_n(f) &= -b_n(f_{0,1}^{(2)}) + L\, b_n(f_{0,1}^{(1)}) \\
&= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(2n\pi \operatorname{sen} n\pi + (2 - n^2\pi^2)\cos n\pi - 2\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi\right) \\
&= \frac{4L^2}{n^3\pi^3}(-\cos n\pi + 1) = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}((-1)^{n+1} + 1)
\end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{8L^2}{(2k+1)^3\pi^3}.$$

Como a função f é contínua por partes com sua derivada f' também contínua por partes, pelo Corolário 4.2, ela pode ser representada por sua série de cossenos de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{6} - \frac{L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{L} \end{aligned}$$

e por sua série de senos de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L} \end{aligned}$$

1.6. (a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}.$

$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$

(b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}}{n} \cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n} \cos\frac{2n\pi x}{L}.$

$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{2n+1} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{L}$

(c) $f(x) = \frac{3L}{8} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{L}.$

$f(x) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - n\pi\cos n\pi - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$

(d) $f(x) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{3L}{16} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos\frac{2n\pi x}{L}.$

$f(x) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = \frac{2\sqrt{2}L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{L}$

1.7. (a) Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com a derivada f' também contínua por partes, ímpar e periódica de período igual a 2 podemos escrevê-la em termos de sua série de Fourier como

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t$$

A solução da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

Podemos procurar uma solução particular da forma

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t)$$

com coeficientes A_m, B_m a determinar.

$$y'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-m\pi A_m \operatorname{sen} m\pi t + m\pi B_m \cos m\pi t)$$

$$y''(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} (m^2\pi^2 A_m \cos m\pi t + m^2\pi^2 B_m \operatorname{sen} m\pi t)$$

Substituindo-se $y(t)$ e $y''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2 (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (B_m(1 - 2m^2\pi^2) \operatorname{sen} m\pi t + A_m \cos m\pi t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t$$

Comparando-se termo a termo obtemos

$$A_m = 0, \quad B_m = \frac{b_m}{1 - 2m^2\pi^2}$$

Como f é ímpar, então

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t$$

com

$$b_m = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}\, m\pi t\, dt = \frac{2}{m\pi}\cos s\Big|_0^{m\pi} = \frac{2}{m\pi}((-1)^m - 1)$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1-2m^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\, m\pi t = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1-2m^2\pi^2)}\,\mathrm{sen}\, m\pi t$$

A solução geral é então

$$y(t) = c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1-2m^2\pi^2)}\,\mathrm{sen}\, m\pi t$$

(b) $y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$. Logo,

$$y'(t) = c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1-2m^2\pi^2}\cos m\pi t$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y' = 0$ obtemos

$$c_2 = -2\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1-2m^2\pi^2}$$

e a solução do PVI é

$$y(t) \quad = \quad \left(-2\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1-2m^2\pi^2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1-2m^2\pi^2)}\,\mathrm{sen}\, m\pi t$$

1.8. (a) A função é par, contínua por partes, de período igual a 2. Logo a sua série de Fourier é dada por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi t$$

$$\begin{aligned} a_0(f) &= a_0(f_{0,1}^{(0)}) - a_0(f_{0,1}^{(1)}) \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m(f) &= a_m(f_{0,1}^{(0)}) - a_m(f_{0,1}^{(1)}) \\ &= \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen} s\Big|_0^{m\pi} - \frac{2}{m^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{m\pi} \\ &= 0 - \frac{2}{m^2\pi^2}((-1)^m - 1) = -\frac{2}{m^2\pi^2}((-1)^m - 1). \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de cossenos de $f_{0,1}^{(1)}$ é dada por

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi t,$$

(b) Como a função f é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então a série de Fourier de f, $S_f(t)$, converge para $f(t)$ nos pontos onde f é contínua, que é o caso de $t = 0$. Logo

$$S_f(0) = f(0) = 1.$$

Como a série de fourier é periódica de período fundamental igual a 2, então

$$S_f(t + 100) = S_f(t + 50 \cdot 2) = S_f(t).$$

Assim,

$$S_f(100.5) = S_f(100 + \frac{1}{2}) = S_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, para $t = 1/2$ a função f também é contínua, logo

$$S_f(100.5) = S_f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

1.9. (a) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de senos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 393.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}) = 0,$$

$$f(t) \quad = \quad 1, \quad \text{para } 0 \le t \le L$$

(b) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de cossenos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 393.

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$f(t) \quad = \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } 0 \le t \le L.$$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos.

(c) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela não seja nem par nem ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes os termos de cossenos e de senos são não nulos. Por exemplo, se a função f é estendida ao intervalo $[-L, L]$ da forma da a seguir

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L \leq t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq t \leq L \end{cases}$$

então os coeficientes que podem ser obtidos da tabela na página 393 são dados por.

$$a_0 = a_0(f_{0,1}^{(0)}) = 1, \quad a_n = a_n(f_{0,1}^{(0)}) = 0,$$

$$b_n = b_n(f_{0,1}^{(0)}) = -\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } -L \leq t \leq L.$$

2. Equação do Calor em uma Barra (página 427)

2.1. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n = c_n(f) &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 20 c_n(f_{0,1}^{(0)}) \\ &= -20\frac{2}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-(-1)^n),\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{40}x\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}
\end{aligned}
$$

2.2. Temos que resolver o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x) = 20,\ 0 < x < 40 \\
u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 60
\end{cases}
$$

A solução é então

$$
u(x,t) = \frac{3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}
$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$
g(x) = f(x) - \frac{3x}{2} = 20 - \frac{3x}{2}
$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n = c_n(g) &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= 20c_n(f_{0,1}^{(0)}) - \frac{3}{2}c_n(f_{0,1}^{(1)}) \\
&= -\frac{40}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi} \\
&= -\frac{40}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos(n\pi)\right) \\
&= \frac{40(1+2(-1)^n)}{n\pi},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3x}{2} + \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = \dfrac{3x}{2}$.

2.3. (a) Temos que resolver o problema

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x) = \frac{3x}{2},\ 0 < x < 40 \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(40,t) = 0
\end{array}\right.$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 30, \\
c_n = c_n(f) &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}\,dx \\
&= \frac{3}{2}c_n(f_{0,1}^{(1)}) = \frac{120}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_0^{n\pi} \\
&= 120\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 30 + \frac{120}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= 30 - \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{40}x\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}
\end{aligned}$$

(b) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 30.$

2.4. A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$, obtemos que $0 = C_1 + C_2$, ou seja, $C_2 = -C_1$. Logo

$$X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $C_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$ (só é possível se $\lambda = 0$).

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 + C_2 x$, obtemos que $C_1 = 0$. Logo

$$X(x) = C_2 x.$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_2 x$, obtemos que também $C_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que $C_2 = 0$. Logo

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $C_1 \neq 0$, então

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que $\sqrt{-\lambda}L = \frac{n\pi}{2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Portanto

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

2.5. A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que $0 = C_1 - C_2$, ou seja, $C_2 = C_1$. Logo

$$X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $C_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = -e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível.

Se $\lambda = 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = C_2$, obtemos que $C_2 = 0$. Logo

$$X(x) = C_1.$$

Se $\lambda < 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X(x) = \sqrt{-\lambda}(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x))$, obtemos que $C_1 = 0$. Logo
$$X(x) = C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$
Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $C_2 \neq 0$, então
$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$
o que implica que $\sqrt{-\lambda}L = \frac{n\pi}{2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Portanto
$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

2.6. A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$, obtemos que $0 = C_1 + C_2$, ou seja, $C_2 = -C_1$. Logo
$$X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$
Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $C_1 \neq 0$, então
$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$ (só é possível se $\lambda = 0$).

Se $\lambda = 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 + C_2 x$, obtemos que $C_1 = 0$. Logo

$$X(x) = C_2 x.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = C_2$, obtemos que também $C_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$ **:**
Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que $C_2 = 0$. Logo

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $C_2 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que $\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, para $n = 0, 2, 3, \ldots$. Portanto

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2.7. A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que $0 = C_1 - C_2$, ou seja, $C_2 = C_1$. Logo

$$X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $C_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = -e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível.

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X(x) = C_2$, obtemos que $C_2 = 0$. Logo

$$X(x) = C_1.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_1$, obtemos que também $C_1 = 0$.

Se $\lambda < 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x))$, obtemos que $C_1 = 0$. Logo

$$X(x) = C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $C_2 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que $\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, para $n = 0, 2, 3, \ldots$. Portanto

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2.8. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X'(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(0)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X'(L) = 0 & (4.16) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (4.17) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.16) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$ (conforme exercício anterior), mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.16) tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.17) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que tem como solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_{2n+1}(x,t) = X(x)T(t) = c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ f(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

pois

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{L} \int_0^{L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L} \int_L^{0} f(x') \operatorname{sen} \left(2n\pi - \frac{n\pi x'}{L}\right) (-dx') = 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Corolário 4.2 na página 385, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{2}{2L}\int_0^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx = \frac{1}{L}\int_0^{L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx + \frac{1}{L}\int_L^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx + \frac{1}{L}\int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx + \frac{1}{L}\int_L^{0} f(x') \operatorname{sen} \left((2n+1)\pi - \frac{(2n+1)\pi x'}{2L}\right)(-dx') \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx. \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

2.9. Observamos que $u(x, t) = T_1$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que satisfaz as condições

$$u(0, t) = T_1, \ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Assim, usando o resultado do exercício anterior

$$u(x, t) = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

é a solução do problema da valor inicial e de fronteiras se

$$u(x, 0) = f(x) = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

ou seja, os coeficientes são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - T_1] \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,dx.$$

2.10. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(L)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.18) \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 & (4.19) \end{cases}$$

A equação $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})\,x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\,x}$.

Se $\lambda = -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Se $\lambda < -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{-1-\lambda}\,x) + C_2 e^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}\,x))$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.18) tem solução não identicamente nula somente se$\lambda < -1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2},\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (4.18) tem solução

$$X(x) = C_1 e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\; \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -1 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (4.19) obtemos

$$T'(t) + (1 + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2})T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-t} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\,t},\; \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\,t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\,t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)e^x$. Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) e^x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

3. Corda Elástica Com Extremidades Presas (página 443)

3.1. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n=1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{80\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

3.2.

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{20}x)\cos(\frac{\pi}{10}t)$$

3.3. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\ 0<x<40 \\ u(0,t)=0,\ u(40,t)=0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{1600\sqrt{2}}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2}}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

3.4.

$$u(x,t) = \frac{10}{\pi} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{20} x) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{10} t)$$

3.5. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} d_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1600}{\pi^3}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}+ \\ & \quad \frac{1600}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20} \end{aligned}$$

3.6. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)+2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)+2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(L)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.20) \\ T''(t) - \lambda T(t) = 0,\ T'(0) = 0 & (4.21) \end{cases}$$

A equação $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})\,x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\,x}$.

Se $\lambda = -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Se $\lambda < -1$ **:** $X(x) = C_1 e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{-1-\lambda}\,x) + C_2 e^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}\,x))$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.20) tem solução não identicamente nula somente se$\lambda < -1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (4.20) tem solução

$$X(x) = C_1 e^{-x}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -1 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}$ em (4.21) obtemos

$$T''(t) + (1 + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2})T(t) = 0,\ T'(0) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = C_2 \cos(1 + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\,t),\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n e^{-x}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\cos((1 + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2})\,t)$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-x}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\cos((1 + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2})\,t)$$

Mais que isso, pode-se provar que também as séries

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos((1+\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2})\,t)$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0)=f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x)=u(x,0)=e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)e^x$. Assim, se a função $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)e^x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,\;\; n=1,2,3\ldots$$

3.7. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X(x)T''(t)=X''(x)T(t)-X(x)T(t)+X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}+1$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x)+X'(x)-\lambda X(x)=0, \; X(0)=0, \; X'(1)=0 \\ T''(t)+(1-\lambda)T(t)=0, \; T(0)=0 \end{cases}$$

4. Equação de Laplace (página 459)

4.1. A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \; n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2 \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}, \; n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2}\\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3(2n+1)\pi}{2})(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi x}{2}
\end{aligned}$$

4.2. A solução é então

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}(\frac{n\pi}{2}(3-x))$$

em que $c_n\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}dx\\
&= \frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n=1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

$$c_n=\frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}},\ n=1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2}\\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3(2n+1)\pi}{2})(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2}
\end{aligned}$$

4.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0, \; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(0) = 0, \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(0) = 0$ tem solução

$$Y(y) = C_2(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,b) = g(x)$, temos que ter

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a} x).$$

Assim pelo Corolário 4.2 na página 385 se a função $g(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

4.4. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y(b) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(b) = 0$ tem solução

$$Y(y) = C_2(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(y-b)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{N}c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0)=f(x)$, temos que ter

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a}b)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a}\,b)\right]\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x).$$

Assim pelo Corolário 4.2 na página 385 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a}\,b)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx,\ \ n=1,2,3\ldots$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a}\,b)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a})dx,\ \ n=1,2,3\ldots$$

4.5.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(g)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(h)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$
$$c_n^{(k)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

4.6. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,\ Y'(0) = 0,\ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos \frac{n\pi y}{b},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$. Assim pelo Corolário 4.2 na página 385 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y)dy = 0$$

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos\frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = h(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $h(y)$. Assim pelo Corolário 4.2 na página 385 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $h(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y)dy = 0$$

(c)

$$u(x,y) = c_0 + u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)}\frac{n\pi}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(g)}\frac{n\pi}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos(\frac{n\pi x}{a})dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(h)}\frac{n\pi}{b}\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

(d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(e) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

4.7. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y) - X'(x)Y(y)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + X'(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = X'(1) = 0 \\ Y''(y) + (\lambda - 1)Y(y) = 0, \; Y'(1) = 0 \end{cases}$$

Bibliografia

[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] F. Brauer and J. A. Nohel. *Ordinary Differential Equations: A First Course*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[3] Ricardo Motta Pinto Coelho. *Fundamentos em Ecologia*. Editora Artes Médicas, Porto Alegre, 2000.

[4] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[5] E. C. de Oliveira and M. Tygel. *Métodos Matemáticos para Engenharia*. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[6] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.

[7] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[8] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2007.

[9] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[10] Dennis G. Zill. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. Thomson, São Paulo, 2003.

[11] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3a. edition, 2001.

Índice Alfabético