5.4 Mudança de Coordenadas

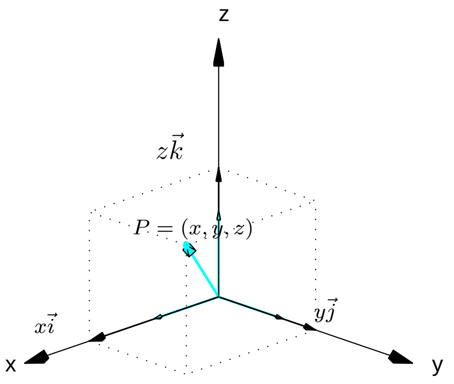

Figura 5.26: $\overrightarrow{OP}= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

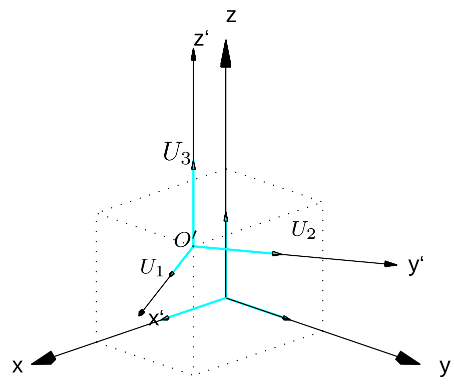

Figura 5.27: Dois sistemas de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

Se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ também são (x, y, z) e então podemos escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)\\ &= x(1, 0, 0) + y(0, y, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\end{aligned}$$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ou seja, as coordenadas de um ponto P são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores canônicos. Assim, o ponto $O = (0, 0, 0)$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ determinam um sistema de coordenadas (cartesiano), $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo sistema de coordenadas determinado por uma origem O' e por vetores U_1, U_2 e U_3 que formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.* Por exemplo, se $O' = (2, 3/2, 3/2)$, $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $U_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$, então $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto O', cujos eixos x', y' e z' são retas que passam por O' orientadas com os sentidos e direções de U_1, U_2 e U_3, respectivamente.

As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores U_1, U_2 e U_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P}= x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

*Um sistema de coordenadas pode ser determinado por um ponto O' e três vetores V_1, V_2 e V_3 que formam uma base do $\mathbb{R}^3$, que não necessariamente é ortonormal (veja o Exercício 5.4.6 na página 164).

Vamos considerar inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, então $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mas, como U_1, U_2 e U_3 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 & U_1^tU_3 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 & U_2^tU_3 \\ U_3^tU_1 & U_3^tU_2 & U_3^tU_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2,U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^t[P]_{\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2\}$, em que U_1 e U_2 são vetores que formam uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$, é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear de U_1 e U_2, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar, também neste caso, inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, então $x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Novamente, como U_1 e U_2 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ estão bem definidas, ou seja, x' e y' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^t [P]_{\{O,E_1,E_2\}},$$

em que $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$. Observe que, tanto no caso do plano quanto no caso do espaço, a matriz Q satisfaz, $Q^{-1} = Q^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**.

Exemplo 5.30. Considere o sistema de coordenadas no plano em que $O' = O$ e $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Se $P = (2, 4)$, vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (2, 4)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcr} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' = 2 \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' = 4 \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \,]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = I_2,$$

então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}.$$

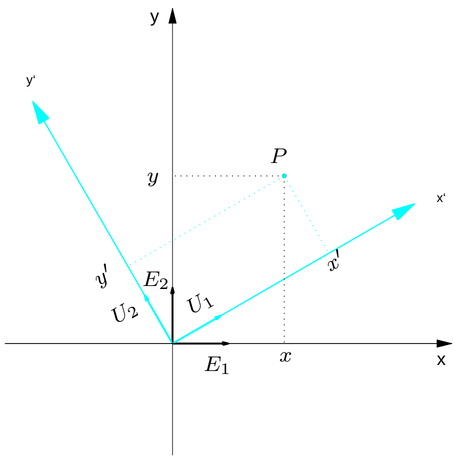

Figura 5.28: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas

Exemplo 5.31. Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (x, y)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear nas variáveis x' e y'

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\ U_1\ U_2\ ]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como $Q^tQ = I_2$, então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}\,x + y)/2 \\ (-x + \sqrt{3}\,y)/2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.32. Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

entre as coordenadas $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ de um ponto P em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ e as coordenadas de P, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$. Queremos determinar quais são os vetores U_1 e U_2.

Os vetores U_1 e U_2 da nova base possuem coordenadas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas, $\{O, U_1, U_2\}$. Pois, $U_1 = 1\, U_1 + 0\, U_2$ e $U_2 = 0\, U_1 + 1\, U_2$. Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original, $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, U_1 e U_2 são as colunas da matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

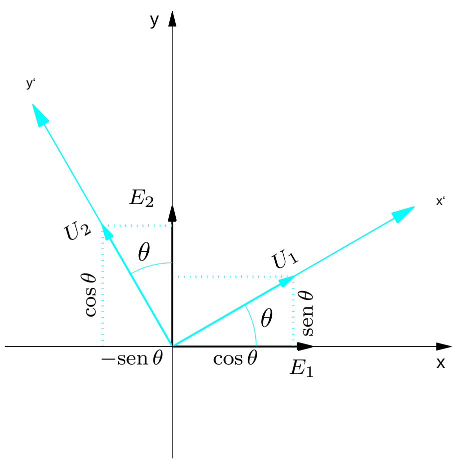

Figura 5.29: Rotação de um ângulo θ

5.4.1 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ seja obtido do sistema original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$ por uma rotação de um ângulo θ. Observando a Figura 5.29, obtemos

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}\,.$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\cos\theta)x' & - & (\operatorname{sen}\theta)y' = x \\ (\operatorname{sen}\theta)x' & + & (\cos\theta)y' = y \end{array} \right. \tag{5.18}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta^{-1}P = R_\theta^t P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/6$ em relação ao sistema original.

A matriz R_θ é chamada **matriz de rotação**.

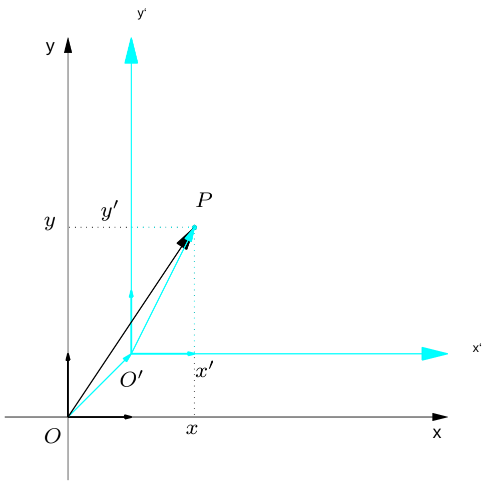

Figura 5.30: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação)

5.4.2 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que $O' \neq O$, ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.

Observando a Figura 5.30, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}\,. \tag{5.19}$$

Assim, se $\overrightarrow{OO'} = (h,k)$, então

$$\overrightarrow{O'P} = (x',y') = (x,y) - (h,k) = (x-h, y-k)$$

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O',E_1,E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-h \\ y-k \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

O eixo x' tem equação $y'=0$, ou seja, $y=k$ e o eixo y', $x'=0$, ou seja, $x=h$.

Exercícios Numéricos (respostas na página 222)

5.4.1. Encontre as coordenadas do ponto P com relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ e $P = (1,3)$;

(b) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ e $P = (2,-1,2)$;

5.4.2. Encontre o ponto P, se as coordenadas de P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, $[P]_{\mathcal{S}}$, são:

(a) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$. (b) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$;

5.4.3. Sejam $[P]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$. Suponha que temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Quais são os vetores U_1, U_2 e U_3?

5.4.4. Determine qual a rotação do plano em que as coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ são $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios Teóricos

5.4.5. Mostre que $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$.

5.4.6. Podemos definir coordenadas de pontos no espaço em relação a um sistema de coordenadas definido por um ponto O' e três vetores V_1, V_2 e V_3 que formam uma base não necessariamente ortonormal do $\mathbb{R}^3$ da mesma forma como fizemos quando os vetores formam uma base ortonormal. As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores V_1, V_2 e V_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P}= x'V_1 + y'V_2 + z'V_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Assim, se $\overrightarrow{O'P}= (x, y, z)$, então $x'V_1 + y'V_2 + z'V_3 =\overrightarrow{O'P}$ pode ser escrito como

$$[\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz $Q = [\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,]$ é invertível.

(b) Mostre que as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1}[P]_{\{O',\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$