Errata à Apostila
Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

8 de novembro de 2007

Na página 2:
Por exemplo, se $f(t) = t, g(t) = e^t \in \mathcal{C}^0[0,1]$, então

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1.$$

Além disso, $||f||^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$. Assim, $||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{1/3}$.

Resposta do Exercício 1.1
$f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{m}\cos\dfrac{m\pi x}{L} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{2m+1}\cos\dfrac{(2m+1)\pi x}{L}$.
$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{m\pi}{2} - (-1)^m}{m}\operatorname{sen}\dfrac{m\pi x}{L} =$
$= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m - 1}{2m}\operatorname{sen}\dfrac{2m\pi x}{L} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{2m+1}\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi x}{L} =$
$= -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{2m+1}\operatorname{sen}\dfrac{(4m+2)\pi x}{L} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{2m+1}\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi x}{L}$

Na Subseçao 2.1.2

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0
\end{cases}
$$

No Exemplo 7
Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades também isoladas, ou seja,

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0
$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$
f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}
$$

Temos que resolver o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\
u(x,0) = f(x), \ 0 < x < 40 \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0
\end{cases}
$$

Na Subseçao 2.2.1
Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$
\begin{cases}
X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0, \ X(L) = 0 \\
T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \ T'(0) = 0
\end{cases}
$$

Na Subseçao 2.2.2
Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$
\begin{cases}
X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0, \ X(L) = 0 \\
T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \ T(0) = 0
\end{cases}
$$

Acrescentada a Subseçao 2.2.3
2.2.3 Caso Geral

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\
u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0
\end{cases}
$$

Como dissemos antes a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

Exemplo. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$
f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}
$$

Temos que resolver o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\
u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0
\end{cases}
$$

A solução é então

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{40}x) \cos(\frac{n\pi}{20}t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{40}x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{20}t)
$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20}d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\
&= \frac{240 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \ n = 1, 2, 3 \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n\pi}{20} d_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\
&= \frac{240 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} \ n = 1, 2, 3 \ldots
\end{aligned}
$$

$$d_n = \frac{4800 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} \cos\frac{n\pi t}{20} + \frac{4800}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20} \\
&= \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos\frac{(2n+1)\pi t}{20} \\
&\quad + \frac{4800}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}
\end{aligned}$$

Acrescentado dois exercícios à Seçao 2

1. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ com deslocamento inicial $f(x)$ solta de forma que a velocidade inicial seja $g(x)$ em que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \le x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 < x \le 40 \end{cases}$$

2. Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

(c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(d) Explique por que este problema não tem solução única.

(e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

Solução:

1. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{an\pi}{L}\,t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\operatorname{sen}(\frac{an\pi}{L}\,t)$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20}d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20}d_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2} \ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1600}{\pi^3}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3}, \ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{40}x)\cos(\frac{n\pi}{20}\,t) + \\ &\quad \frac{1600}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3}\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{40}x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{20}\,t) \end{aligned}$$

2. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y'(0) = 0, \ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos\frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} \right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$. Assim se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y) dy = 0$$

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y'(0) = 0, \ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos \frac{n\pi y}{b},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.
Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = h(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $h(y)$. Assim se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $h(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y) dy = 0$$

(c)

$$u(x,y) = c_0 + u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t) + u^{(h)}(x,t) + u^{(k)}(x,t),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)}\frac{n\pi}{a} \cosh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(g)}\frac{n\pi}{a} \cosh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos(\frac{n\pi x}{a})dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(h)}\frac{n\pi}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(k)}\frac{n\pi}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos(\frac{n\pi y}{b})dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

(d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(e) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.