Diagonalização de Matrizes 2×2 e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

30 de setembro de 2002

1 Diagonalização de Matrizes 2×2

1.1 Motivação

Vamos considerar o problema de encontrar as funções que dão a evolução das populações de duas espécies, S_1 e S_2, convivendo em um mesmo ecossistema no tempo $t > 0$. Vamos denotar as populações das espécies S_1 e S_2 em um instante t por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente.

Inicialmente vamos supor que a taxa de crescimento da população de uma espécie não depende do que ocorre com a outra espécie e que esta taxa é proporcional a sua população existente (ou equivalentemente que a taxa de crescimento relativa é constante). Ou seja, vamos supor que

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a x_1(t) \\ x_2'(t) &= d x_2(t) \end{aligned}$$

em que $a, d \in \mathbb{R}$. Temos aqui um sistema de equações diferenciais, ou seja, um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é

$$x_1(t) = c_1 e^{at} \quad \text{e} \quad x_2(t) = c_2 e^{dt}.$$

Vamos supor, agora, que as duas populações interagem de forma que a taxa de crescimento da população de uma espécie depende de forma linear não somente da sua população existente, mas também da população existente da outra espécie. Ou seja, vamos supor que

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned}$$

Por exemplo, se os indivíduos de uma espécie competem com os da outra por alimento ($a, d > 0$ e $b, c < 0$), ou os indivíduos da espécie S_1 são predadores dos da outra ($a, b, d > 0$ e $c < 0$). Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \tag{1}$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vamos supor que existam matrizes P e D tais que

$$A = PDP^{-1}, \tag{2}$$

em que $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Substituindo-se (2) em (1) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \tag{3}$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4}$$

a equação (3) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \end{aligned}$$

que tem solução dada por

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Assim, da mudança de variáveis (4), a solução da equação (1) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Se $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$, ou seja, se as colunas da matriz P são os vetores $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, então a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$x_1(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_1 e^{\lambda_2 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = c_1 v_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_2 e^{\lambda_2 t}$$

Vamos descobrir como podemos determinar matrizes P e D, quando elas existem, tais que $A = PDP^{-1}$, ou multiplicando à esquerda por P^{-1} e à direita por P, $D = P^{-1}AP$, com D sendo uma matriz diagonal. Chamamos **diagonalização** ao processo de encontrar as matrizes P e D.

Definição 1. Dizemos que uma matriz A, é **diagonalizável**, se existem matrizes P e D tais que $D = P^{-1}AP$, ou equivalentemente, $A = PDP^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal.

Exemplo 1. Toda matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, pois

$$A = (I_2)^{-1} A I_2,$$

em que $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade 2×2.

1.2 Autovalores e Autovetores

Vamos supor inicialmente que a matriz A seja diagonalizável. Então existe uma matriz P tal que

$$P^{-1}AP = D\,, \tag{5}$$

em que D é uma matriz diagonal.

Vamos procurar tirar conclusões sobre as matrizes P e D. Multiplicando à esquerda por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD\,. \tag{6}$$

Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix},$$

em que $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ são as colunas de P. Por um lado

$$AP = A\,[\,V\ W\,] = [\,AV\ AW\,]$$

e por outro lado

$$PD = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = [\,\lambda_1 V\ \lambda_2 W\,]$$

Assim, (6) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} AV & AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 V & \lambda_2 W \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$AV = \lambda_1 V \quad \text{e} \quad AW = \lambda_2 W.$$

Ou seja, as colunas de P, V e W, e os elementos da diagonal de D, λ_1 e λ_2, satisfazem a equação

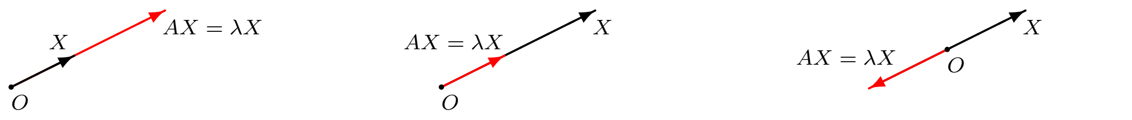
$$AX = \lambda X,$$

em que λ e X são incógnitas. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2. Um número real λ é chamado **autovalor** de uma matriz A, se existe um vetor *não nulo* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que

$$AX = \lambda X\,. \tag{7}$$

Um vetor *não nulo* que satisfaça (7), é chamado de **autovetor** de A.



$\lambda > 1$ $\quad$ $0 < \lambda < 1$ $\quad$ $\lambda < 0$

Observe que a equação (7) pode ser escrita como

$$AX = \lambda I_2 X$$

ou

$$(A - \lambda I_2)X = \bar{0}\,. \tag{8}$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de λ, para os quais o sistema $(A - \lambda I_2)X = \bar{0}$ tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz A.

Proposição 1. *Seja A uma matriz 2×2.*

(a) Os autovalores de A são as raízes do polinômio

$$p(t) = \det(A - t\, I_2) \tag{9}$$

(b) Para cada autovalor λ, os autovetores associados a λ são os vetores não nulos da solução do sistema

$$(A - \lambda I_2)X = \bar{0}\,. \tag{10}$$

Definição 3. Seja A uma matriz 2×2. O polinômio

$$p(t) = \det(A - t\, I_2) \tag{11}$$

é chamado **polinômio característico de** A.

Assim, para determinarmos os autovalores de uma matriz A precisamos determinar as raízes do seu polinômio característico, que tem a forma $p(t) = t^2 + at + b$.

Exemplo 2. Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ -4 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3\,.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(t)$, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & - & y & = & 0 \\ -4x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$$

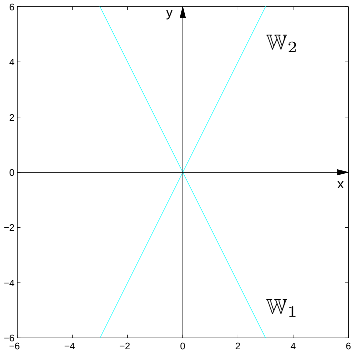
é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ acrescentado o vetor nulo.



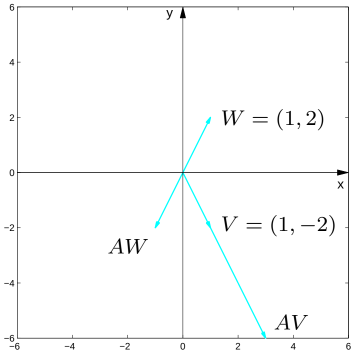


Figura 1: Autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ e a $\lambda_2 = -1$ da matriz do Exemplo 2

Um resultado interessante e que iremos usar mais adiante é o seguinte.

Proposição 2. *Sejam V e W autovetores de uma matriz A associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Se $V = \alpha W$, para algum escalar α, então $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Demonstração. Se $V = \alpha W$, então multiplicando-se à esquerda por A e usando o fato de que $AV = \lambda_1 V$ e $AW = \lambda_2 W$, temos que

$$\lambda_1 V = A(\alpha W) = \alpha AW = \alpha\lambda_2 W = \lambda_2 \alpha W = \lambda_2 V.$$

Isto implica que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)V = \bar{0}.$$

Como V é um vetor não nulo, então $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

1.3 Diagonalização

Vamos enunciar e demonstrar o resultado principal. Já vimos que se uma matriz A é diagonalizável, então as colunas da matriz P, que faz a diagonalização, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz diagonal D. Como a matriz P é invertível, estes 2 autovetores são L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro).

Teorema 3. *Seja A uma matriz 2×2 que tem 2 autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então, as matrizes* $P = [\, V\ W \,] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ *são tais que*

$$D = P^{-1}AP,$$

ou seja, a matriz A é diagonalizável.

Demonstração. Pela Proposição 2, $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são L.I. são 2 autovetores L.I. (um não é múltiplo escalar do outro). Vamos definir as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = [\, V\ W \,] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Como $AV = \lambda_1 V$ e $AW = \lambda_2 W$, então

$$AP = A\,[\, V\ W \,] = [\, AV\ AW \,] = [\, \lambda_1 V\ \lambda_2 W \,] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = PD\,. \qquad (12)$$

Como V e W são L.I., a matriz P é invertível. Assim, multiplicando por P^{-1} à esquerda em (12) obtemos

$$D = P^{-1}AP.$$

Ou seja, A matriz A é diagonalizável.

$\square$

Assim, se uma matriz A é diagonalizável e $D = P^{-1}AP$, então os autovalores de A formam a diagonal de D e os 2 autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de P.

Exemplo 3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Já vimos no Exemplo 2 na página 6 que o seu polinômio característico é $p(t) = \det(A - t\,I_2) = t^2 - 2t - 3$, que os seus autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ e que os autoespaços correspondentes são $\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, respectivamante.

Para $\lambda_1 = 3$, temos que $V = (1, 2)$ é um autovetor de A associado a λ_1. De forma análoga para $\lambda_2 = -1$, $W = (1, -2)$ é um autovetor associado a λ_2. Como um vetor não é múltiplo escalar do outro, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\,V\ W\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Exemplo 4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é $p(t) = \det(A - tI_2) = t^2$, assim A possui um único autovalor: $\lambda_1 = 0$. Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$. Para isto vamos resolver o sistema $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ acrescentado o vetor nulo. Portanto, não podemos ter 2 autovetores L.I. associados a $\lambda_1 = 0$ e como só temos um autovalor não podemos ter mais autovetores L.I. Portanto, pelo Teorema 3 na página 8, a matriz A **não** é diagonalizável, ou seja, não existem matrizes P e D tais que $D = P^{-1}AP$.

1.4 Autovalores complexos

Tudo que fizemos até agora é válido para matrizes com entradas que são números reais ou complexos e para autovalores reais ou complexos.

Um vetor de $\mathbb{C}^2$ pode ser escrito como

$$Z = (z_1, z_2) = (v_1 + iw_1, v_2 + iw_2) = (v_1, v_2) + i(w_1, w_2) = V + iW,$$

em que V e W são vetores de $\mathbb{R}^2$.

O próximo resultado é válido exclusivamente para matrizes com entradas que são números reais.

Proposição 4. *Seja A uma matriz 2×2 com entradas que são números reais. Se um vetor $Z = V + iW \in \mathbb{C}^2$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$, então $\overline{Z} = V - iW$ também é um autovetor de A, mas associado a $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Além disso, se $\beta \neq 0$ então Z e $\overline{Z}$ são L.I.*

Demonstração. Substituindo-se $Z = V + iW$ e $\lambda = \alpha + i\beta$ em $AZ = \lambda Z$ obtemos que

$$AV + iAW = \alpha(V + iW) + i\beta(V + iW) = (\alpha V - \beta W) + i(\alpha W + \beta V).$$

Isto implica que

$$AV = \alpha V - \beta W \quad \text{e} \quad AW = \alpha W + \beta V.$$

Agora, usando os valores de AV e AW obtidos temos que

$$\begin{aligned} A\overline{Z} &= A(V - iW) = AV - iAW = \alpha V - \beta W - i(\alpha W + \beta V) \\ &= (\alpha - i\beta)V - (\beta + i\alpha)W = (\alpha - i\beta)V - i(\alpha - i\beta)W \\ &= (\alpha - i\beta)(V - iW) = \overline{\lambda}\,\overline{Z}. \end{aligned}$$

Se $\beta \neq 0$, então λ e $\overline{\lambda}$ são diferentes. Logo, pela Proposição 2 na página 7, Z e $\overline{Z}$ são L.I. □

Assim, se uma matriz A, 2×2, com entradas reais tem autovalores complexos, então ela é diagonalizável.

Exemplo 5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é $p(t) = \det(A - t\,I_2) = (-3-t)(1-t)^2 + 8 = t^2 + 2t + 5$ cujas raízes são $\lambda_1 = -1+2i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1-2i$. Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1+2i$. Para isto vamos resolver o sistema $(A-\lambda_1 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -2-2i & 2 \\ -4 & 2-2i \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -2-2i & 2 \\ -4 & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-2-2i)x & + & 2y & = & 0 \\ -4x & + & (2-2i)y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, (1+i)\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = -1+2i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (1, 1+i)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = -1+2i$. Pela Proposição 4, $\overline{Z} = (1, 1-i)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1-2i$ e além disso Z e $\overline{Z}$ são L.I. Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, Z \ \overline{Z} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

1.5 Se a matriz A não é diagonalizável

Se uma matriz A com entradas que são números reais, 2×2, não é diagonalizável é por que ela tem somente um autovalor real λ. Neste caso apesar de não podermos diagonalizá-la é válido o seguinte resultado.

Teorema 5. *Seja A uma matriz não diagonal 2×2 com entradas que são números reais e que possui um único autovalor λ. Sejam $W = (w_1, w_2)$ um vetor que não é autovetor de A ($AW \neq \lambda W$) (Por exemplo, $E_1 = (1, 0)$ ou $E_2 = (0, 1)$ satisfaz esta condição) e $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (A - \lambda I_2)W$. Então, as matrizes $P = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ são tais que*

$$J = P^{-1}AP.$$

Demonstração. Vamos escrever $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Neste caso, o polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\, I_2) = (a - t)(d - t) - bc = t^2 - (a + d)t + (ad - bc)$. Como estamos supondo que A tem somente um autovalor, então

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = 0 \tag{13}$$

e o autovalor de A que é a única raiz de $p(t)$ é

$$\lambda = \frac{a + d}{2}.$$

Assim, para este valor λ e usando (13) obtemos que

$$(A - \lambda I_2)^2 = A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I_2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc - 2\lambda a + \lambda^2 & ab + bd - 2\lambda b \\ ac + dc - 2\lambda c & bc + d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $W = (w_1, w_2)$ um vetor que não é autovetor de A. Portanto, ele não pertence ao espaço solução de $(A - \lambda I_2)X = \bar{0}$. Seja $V = (v_1, v_2) = (A - \lambda I_2)W$. Então

$$(A - \lambda I_2)V = (A - \lambda I_2)^2 W = \bar{0}$$

Logo, V é um autovetor de A, ou seja,

$$AV = \lambda V.$$

Da definição de V segue que

$$AW = V + \lambda W.$$

Assim $P = [\, V\; W\,] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ são tais que

$$AP = A[\, V\; W] = [\, AV\; AW\,] = [\, \lambda V\; V + \lambda W\,] = \begin{bmatrix} \lambda v_1 & v_1 + \lambda w_1 \\ \lambda v_2 & v_2 + \lambda w_2 \end{bmatrix} = PJ. \tag{14}$$

Como V é autovetor de A, se W fosse um múltiplo escalar de V, então W também seria um autovetor de A. Mas isto não ocorre pela definição do vetor W. Assim a matriz P é invertível e multiplicando-se a equação (14) à esquerda por P^{-1} obtemos o resultado. $\square$

Exemplo 6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é $p(t) = \det(A - t\, I_2) = (-1 - t)(-3 - t) + 1 = t^2 + 4t + 4$ cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2$. O vetor $E_1 = (1, 0)$ é tal que

$$(A - \lambda I_2)E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \bar{0}$$

Sejam $W = E_1 = (1, 0)$ e $V = (A - \lambda I_2)W = (1, -1)$. Pelo Teorema 5, as matrizes

$$P = [\, V\; W\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$J = P^{-1}AP.$$

1.6 Resumo

Para diagonalizar uma matriz 2×2 não diagonal siga os seguintes passos:

(a) Determine o polinômio característico $p(t) = \det(A - t\, I_2)$.

(b) Se $p(t)$ tem duas raízes reais (distintas) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então determine um autovetor $V = (v_1, v_2)$ associado a λ_1, isto é, uma solução não trivial de $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$ e um autovetor $W = (w_1, w_2)$ associado a λ_2, isto é, uma solução não trivial de $(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$. Então

$$P = [\, V\; W\,] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$.

(c) Se $p(t)$ tem duas raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = \alpha - i\beta$. Encontre um autovetor complexo $V + iW = (v_1 + iw_1, v_2 + iw_2)$, isto é, uma solução não trivial de $(A - (\alpha + i\beta)I_2)X = \bar{0}$. Então

$$P = [\ V + iW \ V - iW\ ] = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$.

(d) Se $p(t)$ tem somente uma raiz real λ. Seja $W = (w_1, w_2)$ um vetor não nulo que **não** seja autovetor de A ($AW \neq \lambda W$). Por exemplo, $W = E_1 = (1, 0)$ ou $W = E_2 = (0, 1)$. Seja $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (A - \lambda I_2)W$. Então

$$P = [\ V\ W\ ] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PJP^{-1}$.

1.7 Exercícios (respostas na página 28)

Ache para cada matriz A, se possível, uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal. Se não for possível, ache uma matriz P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

1.3. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

1.4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

1.5. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

1.6. $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

1.7. $\begin{bmatrix} a & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

1.8. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

1.9. $\begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 4a \end{bmatrix}$

1.10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

2 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Considere o sistema de equações diferenciais lineares.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a x_1(t) \\ x_2'(t) & = & d x_2(t) \end{array} \right.$$

em que $a, d \in \mathbb{R}$. Temos aqui um sistema de equações diferenciais, ou seja, um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{at} \\ x_2(t) & = & c_2 e^{dt}. \end{array}$$

Considere, agora, o sistema de equações diferenciais lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a x_1(t) + b x_2(t) \\ x_2'(t) & = & c x_1(t) + d x_2(t) \end{array} \right.$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com b ou c não nulos. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \tag{15}$$

em que $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

2.1 A Matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$

Vamos supor que existam matrizes $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{16}$$

Substituindo-se (16) em (15) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \tag{17}$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{18}$$

a equação (17) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \end{aligned}$$

que tem solução dada por

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Assim, da mudança de variáveis (18), a solução da equação (15) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Como $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$, então as colunas da matriz P são os vetores $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, assim a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Se são dadas as condições iniciais $x_1(0) = x_1^{(0)}$ e $x_2(0) = x_2^{(0)}$, então para determinarmos c_1 e c_2 substituimos $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} v_1 c_1 & + & w_1 c_2 & = & x_1^{(0)} \\ v_2 c_1 & + & w_2 c_2 & = & x_2^{(0)} \end{array} \right.$$

Exemplo 7. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

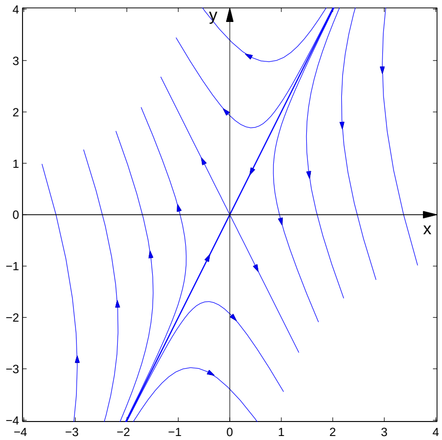


Figura 2: Trajetórias do sistema do Exemplo 7

Já vimos no Exemplo 3 na página 6 que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Assim, a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 2. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais não nulos com sinais contrários. Neste caso, dizemos que a origem é um **ponto de sela**.

Exemplo 8. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & 3x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) &= & -2x_1(t) & + & 2x_2(t) \end{cases}$$

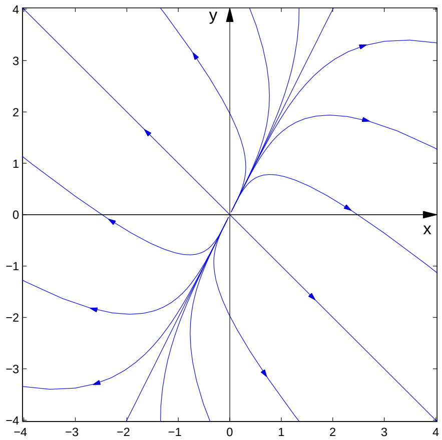


Figura 3: Trajetórias do sistema do Exemplo 8

Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - t\,I_2) = \det \begin{bmatrix} 3-t & -1 \\ -2 & 2-t \end{bmatrix} = (3-t)(2-t) - 2 = t^2 - 5t + 4\,.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(t)$, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha V \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \text{ em que } V = (1,2).$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha W \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \text{ em que } W = (-1,1).$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ acrescentado o vetor nulo. Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Assim, a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 3. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais e positivos. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó instável** ou **fonte**. No caso em que os autovalores de A reais e negativos as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 3. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó atrator** ou **sumidouro**.

2.2 A Matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$

Vamos supor que existam matrizes $P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{19}$$

Substituindo-se (19) em (15) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

Fazendo novamente a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda\, y_1(t) \\ y_2'(t) & = & \overline{\lambda}\, y_2(t) \end{array}$$

Estas equações estão desacopladas e têm soluções dadas por

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & C_1\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) & = & C_2\, e^{\overline{\lambda} t}. \end{array}$$

Assim a solução da equação (15) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1\, e^{\lambda t} \\ C_2\, e^{\overline{\lambda} t} \end{bmatrix}.$$

Como $P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix}$, então as colunas da matriz P são os vetores $V + iW = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix}$ e $V - iW = \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix}$. Assim a solução geral nos complexos é dada por

$$X(t) = C_1\, e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} + C_2\, e^{\overline{\lambda} t} \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

As constantes C_1 e C_2 são complexas. Estamos interessados em uma solução real. Para isso, fazendo $C_2 = \overline{C_1}$, a segunda parcela em (20) se torna o conjugado da primeira e assim obtemos.

$$X(t) \;=\; 2\mathrm{Re}\left\{ C_1\, e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Escrevendo a constante complexa em termos de constantes reais na forma $C_1 = \frac{c_1}{2} - i\frac{c_2}{2}$ e escrevendo $\lambda = \alpha + i\beta$, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \mathrm{Re}(C_1)\,\mathrm{Re}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix}\right\} - \mathrm{Im}(C_1)\,\mathrm{Im}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= c_1\,\mathrm{Re}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix}\right\} + c_2\,\mathrm{Im}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= c_1\,e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \mathrm{sen}\,\beta t\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) + c_2\,e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \mathrm{sen}\,\beta t\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Se são dadas as condições iniciais $x_1(0) = x_1^{(0)}$ e $x_2(0) = x_2^{(0)}$, então para determinarmos c_1 e c_2 substituimos $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} v_1c_1 &+& w_1c_2 &=& x_1^{(0)} \\ v_2c_1 &+& w_2c_2 &=& x_2^{(0)} \end{array}\right.$$

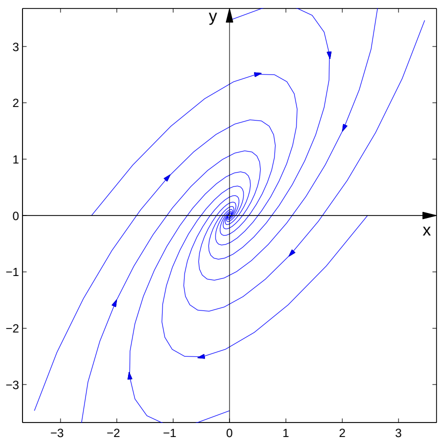


Figura 4: Trajetórias do sistema do Exemplo 9

Exemplo 9. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -3x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

Já vimos no Exemplo 5 na página 10 que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, Z \; \overline{Z} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Assim a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \operatorname{Re}\left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im}\left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 4. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real negativa. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco atrator** ou **sumidoro espiral**. No caso em que os autovalores de A são complexos com a parte real positiva as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 4. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco instável** ou **fonte espiral**.

Exemplo 10. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma $X'(t) = AX(t)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

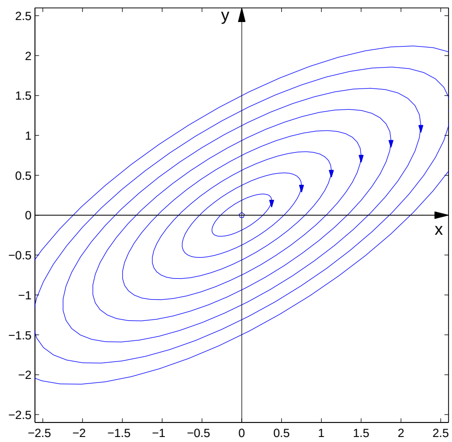


Figura 5: Trajetórias do sistema do Exemplo 10

O polinômio característico da matriz A é $p(t) = \det(A - t\,I_2) = (-1-t)(1-t)^2 + 2 = t^2 + 1$ cujas raízes são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$. Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = i$. Para isto vamos resolver o sistema $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-1-i)x & + & 2y & = & 0 \\ -x & + & (1-i)y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{((1-i)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\alpha(1-i, 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (1-i, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = i$. Pela Proposição 4 na página 10, $\overline{Z} = (1+i, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$ e além disso Z e $\overline{Z}$ são L.I. Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Assim a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \operatorname{Re}\left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 \left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left(\cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 5. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real igual a zero. Neste caso, dizemos que a origem é um **centro**.

2.3 A Matriz A *não* é diagonalizável em $\mathbb{C}$

Sejam $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ matrizes tais que

$$A = PJP^{-1}. \tag{21}$$

Substituindo-se (16) em (1) obtemos

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$Y'(t) = JY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda\, y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda\, y_2(t) \end{aligned}$$

A segunda equação tem solução
$$y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$
Substituindo $y_2(t)$ na primeira equação obtemos a equação
$$y_1'(t) = \lambda\, y_1(t) + c_2\, e^{\lambda t}$$
que tem solução
$$y_1(t) = (c_1 + c_2\, t)e^{\lambda t}.$$
Assim a solução da equação (1) é
$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} (c_1 + c_2\, t)e^{\lambda t} \\ c_2\, e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Se $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$, ou seja, se as colunas da matriz P são os vetores $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, então
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\lambda t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Se são dadas as condições iniciais $x_1(0) = x_1^{(0)}$ e $x_2(0) = x_2^{(0)}$, então para determinarmos c_1 e c_2 substituimos $t = 0$ na solução, ou seja,
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$
que é equivalente ao sistema linear
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} v_1 c_1 & + & w_1 c_2 & = & x_1^{(0)} \\ v_2 c_1 & + & w_2 c_2 & = & x_2^{(0)} \end{array} \right.$$

Exemplo 11. Considere o sistema
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & - & 3x_2(t) \end{array} \right.$$
Vimos no Exemplo 6 na página 13 que a matriz
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável, mas que as matrizes

$$P = [\,V\ W\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$J = P^{-1}AP.$$

Assim a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\,t)e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 6. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que a matriz A não é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e o único autovalor é negativo. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó impróprio**. No caso em que o único autovalor de A é positivo as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 6. Neste caso, dizemos também que a origem é um **nó impróprio**.

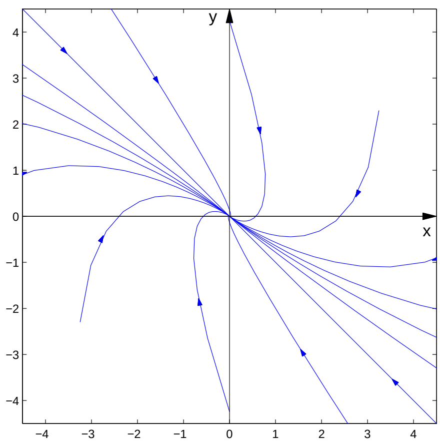


Figura 6: Trajetórias do sistema do Exemplo 11

2.4 Exercícios (respostas na página 31)

Ache a solução geral do sistema de equações dado.

2.1. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 3y(t) \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 8x(t) - 4y(t) \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x'(t) = ax(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x'(t) = ay(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x'(t) = 2ax(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4ay(t) \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = ax(t) + y(t) \end{cases}$

Faça um esboço das soluções de $X'(t) = AX(t)$ e diga se a origem define uma sela, um nó instável, um nó atrator, um foco instável, um foco atrator, um centro ou um nó impróprio.

2.11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2.12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

2.14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2.15. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2.16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

2.17. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

2.18. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Comandos do MATLAB:

`>>[P,D]=eig(sym(A))` determina simbólicamente, se possível, matrizes `P` e `D` tais que $D = P^{-1}AP$, sendo `D` uma matriz diagonal.
`>>[P,J]=jordan(sym(A))` determina simbólicamente, se possível, matrizes `P` e `J` tais que $J = P^{-1}AP$, sendo $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Comando do pacote GAAL:

`>>fluxlin(A)` desenha algumas trajetórias que são soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$.

3 Respostas dos Exercícios

1. Diagonalização de Matrizes 2×2 (página 14)

1.1.
```
≫ A=sym([1,1;1,1]);
≫ [P,D]=eig(A)
P =[  1, -1]
   [  1,  1]
D =[ 2, 0]
   [ 0, 0]
```

1.2.
```
≫ A=sym([1,-1;2,4]);
≫ [P,D]=eig(A)
P =[ -1,  1]
   [  1, -2]
D =[ 2, 0]
   [ 0, 3]
```

1.3.
```
≫ A=sym([3,-4;1,-1]);
≫ [P,J]=jordan(A)
P =[ 2, 1]
   [ 1, 0]
J =[ 1, 1]
   [ 0, 1]
```

1.4.
```
≫ A=sym([1,-1;5,3]);
≫ [P,D]=eig(A)
P =[ -1/5+2/5*i, -1/5-2/5*i]
   [          1,          1]
D =[ 2+2*i,     0]
   [     0, 2-2*i]
```

1.5.
```
≫ A=sym([4,-2;8,-4]);
≫ [P,J]=jordan(A)
P =[ 4, 1]
   [ 8, 0]
J =[ 0, 1]
   [ 0, 0]
```

1.6.
```
≫ A=sym([-1,-4;1,-1]);
≫ [P,D]=eig(A)
```

```
P =[  2*i, -2*i]
   [    1,    1]
D =[ -1+2*i,       0]
   [      0, -1-2*i]
```

1.7. Se $|a| > 4$:

```
≫ [P,D]=eig(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a+\sqrt{a^2-16} & -a-\sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2} \end{bmatrix}$$

Se $|a| < 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a+i\sqrt{16-a^2} & -a-i\sqrt{16-a^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+i\sqrt{16-a^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-i\sqrt{16-a^2}}{2} \end{bmatrix}$$

Se $a = 4$:

```
≫ [P,J]=jordan(subs(A,a,4))
P =[  2,  1]
   [ -2,  0]
J =[ 2, 1]
   [ 0, 2]
```

Se $a = -4$:

```
≫ [P,J]=jordan(subs(A,a,-4))
P =[ -2,  1]
   [ -2,  0]
J =[ -2,  1]
   [  0, -2]
```

1.8. Se $a < 1/2$:

```
≫ [P,D]=eig(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{1-2a} & -1-\sqrt{1-2a} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{1-2a} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{1-2a} \end{bmatrix}$$

Se $a > 1/2$:

$$P = \begin{bmatrix} -1+i\sqrt{2a-1} & -1-i\sqrt{2a-1} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1+i\sqrt{2a-1} & 0 \\ 0 & -1-i\sqrt{2a-1} \end{bmatrix}$$

Se $a = 1/2$:

```
≫ [P,J]=jordan(subs(A,a,1/2))
P =[  1,  1]
   [ -2,  0]
J =[ -1,  1]
   [  0, -1]
```

1.9. `≫ [P,D]=eig(A)`

$$P = \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2+1} & -a-\sqrt{a^2+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 3\,a+\sqrt{a^2+1} & 0 \\ 0 & 3\,a-\sqrt{a^2+1} \end{bmatrix}$$

1.10. Se $a > 0$:

```
≫ [P,D]=eig(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Se $a < 0$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{-a}} & \frac{i}{\sqrt{-a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{-a} \end{bmatrix}$$

Se $a = 0$:

```
≫ A=subs(A,a,0)
≫ [P,J]=jordan(A)
P =[ 1, 0]
   [ 0, 1]
J =[ 1, 1]
   [ 0, 1]
```

2. Sistemas de Equações Diferenciais Lineares (página 27)

2.1. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.3. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{2t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{2t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

2.5. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t) \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.6. $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

2.7. Se $|a| > 4$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a + \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix} + c_2\, e^{(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a - \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}.$$
Se $|a| < 4$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{\frac{at}{2}} \left(\cos(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2}t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix} - \operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{\frac{at}{2}} \left(\cos(\sqrt{16-a^2}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix} + \operatorname{sen}(\sqrt{16-a^2}t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix} \right)$$

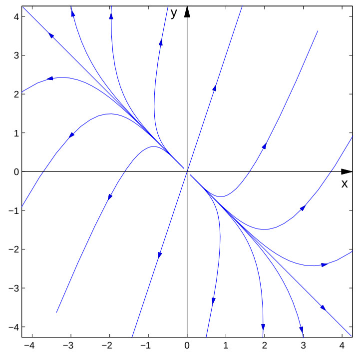
Se $a = \pm 4$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} \pm 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.8. Se $a < 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(-1+\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix} +$$
$$c_2\, e^{(-1-\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Se $a > 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \left(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2\, e^{-t} \left(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$
Se $a = 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

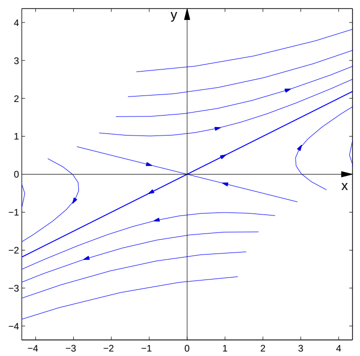
2.9.
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(3a+\sqrt{a^2+1})t} \begin{bmatrix} -a + \sqrt{a^2+1} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{(3a-\sqrt{a^2+1})t} \begin{bmatrix} -a - \sqrt{a^2+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.10. Se $a > 0$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(1+\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{(1-\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Se $a < 0$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \left(e^t \cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^t \operatorname{sen}(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2 \left(e^t \cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \operatorname{sen}(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$
Se $a = 0$:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\, e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

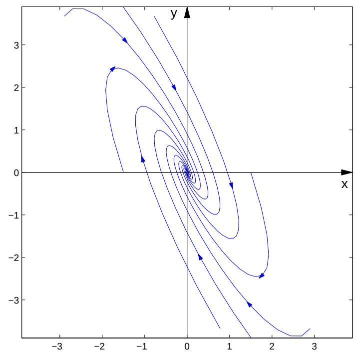
2.11. A origem é um nó instável.



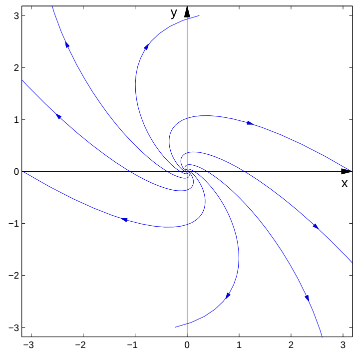
2.12. A origem é uma sela.



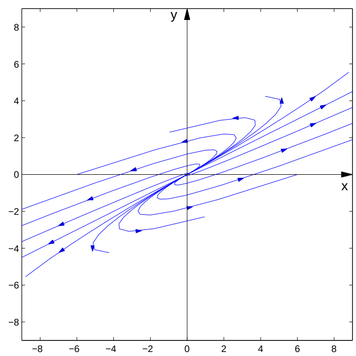
2.13. A origem é um foco atrator.



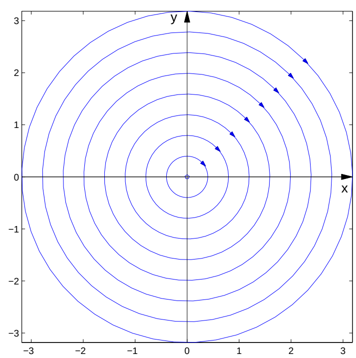
2.14. A origem é um foco instável.



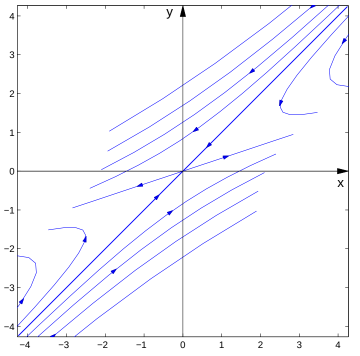
2.15. A origem é um nó impróprio.



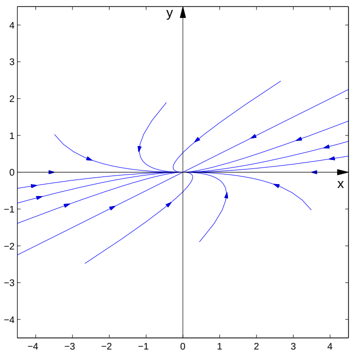
2.16. A origem é um centro.



2.17. A origem é uma sela.



2.18. A origem é um nó atrator.



Referências

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edição, 2000.

[2] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 6a. edição, 1999.

[3] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.

[4] Bernard Kolman. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 6a. edição, 1998.

[5] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1985.

[6] Steven J. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5a. edição, 1998.

[7] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002.

[8] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.