Tensor de Orientação

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

28 de maio de 2012

Podemos pensar num tensor de orientação T como uma matriz real e simétrica. Assim (veja por exemplo [1]) existem matrizes $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_n \end{bmatrix},$$

com $P^{-1} = P^t$ (ortogonal), tais que

$$T = PDP^t.$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ \vdots \\ U_n^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 U_1 & \lambda_2 U_2 & \ldots & \lambda_n U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ \vdots \\ U_n^t \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i U_i^t. \end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i U_j U_j^t$ nas parcelas $i = 2, \dots, n$ do somatório obtemos

$$T = \lambda_1 U_1 U_1^t + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{i-1} U_j U_j^t.$$

Trocando-se i por $i-1$ no último somatório obtemos

$$T = \lambda_1 U_1 U_1^t + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1} \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t.$$

Separando-se o primeiro termo do segundo somatório e o último termo do primeiro somatório obtemos

$$T = \lambda_1 U_1 U_1^t - \lambda_2 U_1 U_1^t + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} U_j U_j^t + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t.$$

Juntando-se os dois primeiros termos ao último somatório obtemos

$$T = \lambda_n \sum_{j=1}^{n} U_j U_j^t + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t.$$

Definindo-se para $i = 1, \dots, n$

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} U_j U_j^t,$$

podemos decompor T em termos de T_i como

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) T_i + \lambda_n T_n.$$

Referências

[1] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2010.

[2] Carl-Fredrik Westin. *A Tensor Framework for Multidimensional Signal Processing*. PhD thesis, Linköping University, Linköping Sweden, 1994.