Exercícios de Álgebra Linear
Usando o MATLAB e o Pacote GAAL

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
`http://www.mat.ufmg.br/~regi`
`regi@mat.ufmg.br`

30 de novembro de 1999

Uma vez inicializado o MATLAB, aparecerá na janela de comandos um prompt `>>` ou `EDU>>`. O prompt significa que o MATLAB está esperando um comando. Todo comando deve ser finalizado teclando-se **Enter**. Comandos que foram dados anteriormente podem ser obtidos novamente usando as teclas ↑ e ↓. Enquanto se estiver escrevendo um comando, este pode ser corrigido usando as teclas ←, →, **Delete** e **Backspace**. O MATLAB faz diferença entre letras maiúsculas e minúsculas.

No MATLAB, pode-se obter ajuda sobre qualquer comando ou função. O comando
`>> help`
(sem o prompt `>>`) mostra uma listagem de todos os pacotes disponíveis. Ajuda sobre um pacote específico ou sobre um comando ou função específica pode ser obtida com o comando
`>> help nome`,
(sem a vírgula e sem o prompt `>>`) onde `nome` pode ser o nome de um pacote ou o nome de um comando ou função.

Além dos comandos e funções pré-definidas, escrevemos um pacote chamado `gaal` com funções específicas para a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Este pacote pode ser obtido gratuitamente através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Depois deste pacote ser devidamente instalado, o comando `help gaal` no prompt do MATLAB dá informações sobre este pacote.

Mais informações sobre as capacidades do MATLAB podem ser obtidas em [1, 5].

Os comandos que podem ser usados nos exercícios serão introduzidos a medida que forem necessários.

1 Matrizes e Sistemas Lineares

Comandos do MATLAB:

`>> syms x y z` diz ao MATLAB que as variáveis `x y` e `z` são simbólicas.

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz, m por n, usando os elementos `a11, a12, ..., amn` e a armazena numa variável de nome `A`.

Por exemplo, >> `A=[1,2,3;4,5,6]` cria a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

>> `I=eye(n)` cria a matriz identidade n por n e a armazena numa variável `I`;

>> `O=zeros(m,n)` cria a matriz m por n formada por zeros e a armazena numa variável `O`;

>> `A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

>> `A+B` é a soma de `A` e `B`,

>> `A-B` é a diferença `A` menos `B`,

>> `A*B` é o produto de `A` por `B`,

>> `num*A` é o produto do escalar `num` por `A`,

>> `A.'` é a transposta de `A`,

>> `A^k` é a potência `A` elevado a k.

>> `A(:,j)` é a coluna j da matriz `A`, >> `A(i,:)` é a linha i da matriz `A`.

>> `diag([d1,...,dn])` cria uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são iguais aos elementos da matriz `[d1,...,dn]`, ou seja, são `d1,...,dn`.

>> `format rat` muda a exibição dos números para o formato racional. O comando `help format` mostra outras possibilidades.

>> `solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`. Por exemplo, >> `solve(x^2-4)` determina as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;

>> `clf` limpa a figura ativa.

Comandos do pacote GAAL:

>> `A=randi(n)` ou >> `A=randi(m,n)` cria uma matriz `n` por `n` ou `m` por `n`, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios entre -5 e 5.

>> `B=opel(alpha,i,A)` ou >> `oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar `alpha`×`linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

>> `B=opel(alpha,i,j,A)` ou >> `oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar `alpha`×`linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena em `B`.

>> `B=opel(A,i,j)` ou >> `oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

>> `B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

>> `matvand(P,k)` obtem a matriz de Vandermonde de ordem `k`, se `P=[x1;...;xn]` e a matriz de Vandermonde generalizada no caso em que `P=[x1,y1;...;xn,yn]`.

>> `po([x1,y1;x2,y2;...xk,yk])` desenha os pontos `(x1,y1),...,(xk,yk)`.

>> `plotf1(f,[a,b])` desenha o gráfico da função dada pela expressão simbólica `f` no intervalo `[a,b]`.

1.1. Vamos fazer um experimento no MATLAB para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. No prompt do MATLAB digite a seguinte linha:

```
c=0;for n=1:1000,A=randi(3);B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis `A` e `B`, 1000 matrizes 3×3 com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5.
- Se `AB=BA`, ou seja, `A` e `B` comutarem, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

1.2. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que cada uma das matrizes é **diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> c=0;for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=diag(randi(1,3));if( ....
```

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

1.3. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que uma das matrizes é diagonal. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> ...  A=diag(randi(1,3));B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;A,B,end,end,c
```

Aqui são impressas as matrizes `A` e `B` quando elas comutarem. Qual a conclusão que você tira deste experimento? Qual a probabilidade de um tal par de matrizes comutarem?

1.4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2\,a-2 & -a-2 & 3\,a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2\,a+1 \end{bmatrix}$. Determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, onde $B = [\ 4\ 3\ 1\ 6\ ]^t$, para todos os valores de a.

1.5. (a) Use o comando `P=randi(4,2)`, para gerar 4 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico passa pelos pontos dados pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P(:,1),3)` pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz `B=P(:,2)`. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos
`clf,po(P),syms x,plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])`, onde `a,b,c` e `d` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.6. (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c, d, e e f da cônica, curva de equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, cujo gráfico passa pelos pontos cujas coordenadas são dadas pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P,2)` pode ser útil na solução deste problema. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos
`clf,po(P),syms x y,plotci(a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f,[-5,5],[-5,5])`, onde `a,b,c,d,e` e `f` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

2 Inversão de Matrizes e Determinantes

Comando do MATLAB:

`>> det(A)` calcula o determinante da matriz `A`.

2.1. Vamos fazer um experimento no MATLAB para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes invertíveis. No prompt do MATLAB digite a seguinte linha:

```
c=0; for n=1:1000,A=randi(2);if(det(A)~=0),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável `A`, 1000 matrizes 2×2 com entradas inteiras aleatórias entre -5 e 5.
- Se det(`A`) $\neq 0$, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

2.2. O pacote `gaal` contem alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.
`menc=lerarq('menc1'), key=lerarq('key')`
Aqui são lidos os arquivos `menc1` e `key`. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes use os comandos do pacote `gaal`:
`y=char2num(menc), M=char2num(key)`
A mensagem criptografada, `y`, foi obtida multiplicando-se a matriz `M` pela mensagem original (convertida para números), `x`. Determine `x`. Descubra a mensagem usando o comando do pacote `gaal`, `num2char(x)`. Decifre as mensagens que estão nos arquivos `menc2` e `menc3`. Como deve ser a matriz M para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

3 Espaços Vetoriais

3.1. Defina a matriz `A=randi(4,3)*randi(3,5,2)`. Considere o subespaço gerado pelas colunas de `A`. Extraia das colunas de `A` uma base para este subespaço.

3.2. Defina a matriz `A=randi(4,2)`. Verifique que as colunas de A são L.I. Considere o conjunto formado pelas colunas de `A`. Complete este conjunto até obter uma base do $\mathbb{R}^4$.

4 Quadrados Mínimos

4.1. (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para encontrar os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que melhor se ajusta aos pontos dados pelas linhas da matriz `P`, no sentido de quadrados mínimos, ou seja, tal que $\sum(y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx - d)^2$ seja mínimo. A matriz `A=matvand(P(:,1),3)` pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz `B=P(:,2)`.

(c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos
`clf,po(P)`, `syms x`, `plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])`, onde `a,b,c` e `d` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

4.2. (a) Use o comando `P=randi(6,2)`, para gerar 6 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para encontrar os coeficientes a, b, c, d e e da cônica de equação $x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$, cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos dados pelas linhas da matriz `P`, no sentido de quadrados mínimos, ou seja, tal que $\sum(x_i^2 - ax_iy_i - by_i^2 - cx_i - dy_i - e)^2$ seja mínimo. As matrizes `M=matvand(P,2)`, `B=-M(:,1)` e `A=M(:,2:6)` podem ser úteis na solução deste problema.

(c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos
`clf,po(P)`, `syms x y`, `plotci(x^2+a*x*y+b*y^2+c*x+d*y+e,[-5,5],[-5,5])`, onde `a,b,c,d` e `e` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

5 Posto de Matrizes

5.1. O posto de uma matriz $m \times n$ é no máximo igual ao $\min\{m, n\}$. Vamos fazer um experimento no MATLAB para tentar ter uma idéia de quão freqüente são as matrizes de posto máximo. No prompt do MATLAB digite a seguinte linha

```
c=0;for k=1:1000,m=10+randi;n=10+randi;A=randi(m,n);if rank(A)==min([m,n]),c=c+1;end;end,c
```

O que esta linha está mandando fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável `A`, 1000 matrizes com entradas inteiras aleatórias e tamanhos também aleatórios entre 5 e 15.
- Se posto$(A) = \min\{m, n\}$, o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Que conclusão você tira do valor obtido na variável `c`?

5.2. Se A e B são matrizes $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente, então $\text{posto}(AB) \leq \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\}$. Vamos tentar descobrir hipóteses que devem ser válidas para as matrizes A e B para que seja válido $\text{posto}(AB) = \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\}$. No prompt do MATLAB digite as seguintes linhas

```
c=0;for k=1:1000,m=10+randi;p=10+randi;n=10+randi;
A=randi(m,p);B=randi(p,n);if(rank(A*B)==min([rank(A),rank(B)])),c=c+1;end,end,c
```

O que estas linhas estão mandando fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis `A` e `B`, 1000 matrizes com entradas inteiras aleatórias e tamanhos também aleatórios entre 5 e 15.
- Se $\text{posto}(AB) = \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\}$, o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Que conclusão você tira do valor obtido na variável `c`?

6 Diagonalização de Matrizes

Comandos do MATLAB:

`>> A=sym(A)` converte a matriz `A` numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função `numeric` faz o processo inverso.

`>> subs(expr,x,num)` substitui na expressão `expr` a variável `x` por `num`.

`>> inv(A)` calcula a inversa da matriz `A`.

`>> [P,D]=eig(A)` determina matrizes `P` e `D` (diagonal) tais que `AP=PD`.

6.1. Defina as matrizes `B=randi(2)` e `A=[B-B',zeros(2,1);zeros(1,2),randi]`. A matriz `A` é diagonalizável? Por que?

6.2. Defina as matrizes `L=[eye(2),zeros(2,1);randi(1,2),0]` e `A=L*L'`. Determine o polinômio característico de `A`, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes `P` e `D` (diagonal) tais que `inv(P)*A*P=D`, se possível. Verifique o resultado. Use o comando `[P,D]=eig(sym(A))` e compare com as matrizes que você encontrou. As matrizes `P` e `D` podem ser diferentes das que voce encontrou? por que?

6.3. Defina as matrizes `B=[2,1,1;0,1,-1;0,-1,1]`, `C=[0,-1,-1;0,1,1;0,1,1]` e `A=randi*B+randi*C`. Determine o polinômio característico de `A`, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes `P` e `D` (diagonal) tais que `inv(P)*A*P=D`, se possível. Verifique o resultado. Use o comando `[P,D]=eig(sym(A))` e compare com as matrizes que você encontrou.

7 Aplicação na Identificação de Cônicas

Comandos do pacote GAAL:

`>> [P,D]=diagonal(A)` diagonaliza a matriz `A`, de forma que `AP=PD`, onde `D` é uma matriz diagonal e `P` é uma matriz ortogonal.

`>> subst(expr,[x;y],[a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y` por `a,b`, respectivamente.

`>> elipse(a,b)` desenha a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> elipse(a,b,[U1 U2])` desenha a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, onde x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipse(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a elipse $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$, onde x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbx(a,b)` desenha a hiperbóle $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$, onde x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$, onde x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperby(a,b)` desenha a hiperbóle $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{y'^2}{a^2}-\frac{x'^2}{b^2}=1$, onde x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{y''^2}{a^2}-\frac{x''^2}{b^2}=1$, onde x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabx(p)` desenha a parábola $y^2=4px$.

`>> parabx(p,[U1 U2])` desenha a parábola $y'^2=4px'$, onde x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabx(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $y''^2=4px''$, onde x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> paraby(p)` desenha a parábola $x^2=4py$.

`>> paraby(p,[U1 U2])` desenha a parábola $x'^2=4py'$, onde x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> paraby(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $x''^2=4py''$, onde x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

7.1. $9x^2-4xy+6y^2-10x-20y=5$;

7.2. $3x^2-8xy-12y^2-30x-64y=0$;

7.3. $2x^2-4xy-y^2-4x-8y=-14$;

7.4. $21x^2+6xy+13y^2-114x+34y+73=0$;

7.5. $4x^2-20xy+25y^2-15x-6y=0$;

7.6. $9x^2+y^2+6xy-10\sqrt{10}x+10\sqrt{10}y+90=0$;

7.7. $5x^2+5y^2-6xy-30\sqrt{2}x+18\sqrt{2}y+82=0$;

7.8. $5x^2+12xy-12\sqrt{13}x=36$;

7.9. $6x^2+9y^2-4xy-4\sqrt{5}x-18\sqrt{5}y=5$;

7.10. $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy+6x=0$;

7.11. $8x^2+8y^2-16xy+33\sqrt{2}x-31\sqrt{2}y+70=0$;

8 Respostas dos Exercícios

1. Matrizes e Sistemas Lineares

1.1. Concluimos que é muito raro encontrar matrizes cujo produto comute.

1.2. Concluimos que matrizes diagonais em geral comutam. Pode-se mostrar que elas sempre comutam (Exercício 1.25 na página 13 de [6]).

1.3. Se a matriz A for diagonal, então o produto comuta, se os elementos da diagonal de A são iguais. (ver Exercício 1.[?] na página 10 de [6]). A probabilidade de um tal par de matrizes comute é aproximadamente igual a probabilidade de que a primeira matriz tenha os elementos da sua diagonal iguais, ou seja, $11/11^3 = 1/11^2 \approx 1\%$.

1.4.

```
>> syms a, B=[4,3,1,6]'
>> A=[1,1,1,1;1,3,-2,a;2,2*a-2,-a-2,3*a-1;3,a+2,-3,2*a+1]
[      1,      1,      1,      1]
[      1,      3,     -2,      a]
[      2, 2*a-2,   -a-2, 3*a-1]
[      3,   a+2,     -3, 2*a+1]
>> escalona([A,B])
eliminação 1:
(-1)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-2)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
(-3)*linha 1 + linha 4 ==> linha 4
[      1,      1,      1,      1,      4]
[      0,      2,     -3,    a-1,     -1]
[      0, 2*a-4,   -a-4, 3*a-3,     -7]
[      0,    a-1,     -6, 2*a-2,     -6]

eliminação 2:

(1/2)*linha 2 ==> linha 2
[ 1,     1,          1,           1,          4]
[ 0,     1,       -3/2, 1/2*a-1/2,       -1/2]
[ 0,2*a-4,       -a-4,       3*a-3,         -7]
[ 0,   a-1,         -6,       2*a-2,         -6]

(-1)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-2*a+4)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
(-a+1)*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[ 1,  0,         5/2,       3/2-1/2*a,          9/2]
[ 0,  1,        -3/2,       1/2*a-1/2,         -1/2]
[ 0,  0,      2*a-10,       6*a-5-a^2,         -9+a]
[ 0,  0,-15/2+3/2*a,3*a-5/2-1/2*a^2,-13/2+1/2*a]

eliminação 3:

(1/(2*a-10))*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0,         5/2,       3/2-1/2*a,                 9/2]
[ 0, 1,        -3/2,       1/2*a-1/2,                -1/2]
[ 0, 0,           1,     -1/2*a+1/2,1/2*(-9+a)/(a-5)]
[ 0, 0,-15/2+3/2*a,3*a-5/2-1/2*a^2,        -13/2+1/2*a]

(-5/2)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(3/2)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
(15/2-3/2*a)*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[ 1,  0, 0,          1/4+3/4*a,1/4*(13*a-45)/(a-5)]
[ 0,  1, 0,         -1/4*a+1/4,    1/4*(a-17)/(a-5)]
[ 0,  0, 1,         -1/2*a+1/2,    1/2*(-9+a)/(a-5)]
[ 0,  0, 0,-3/2*a+5/4+1/4*a^2,          -1/4*a+1/4]

eliminação 4:

(1/(-3/2*a+5/4+1/4*a^2))*linha 4 ==> linha 4
[ 1, 0, 0, 1/4+3/4*a, 1/4*(13*a-45)/(a-5)]
[ 0, 1, 0, 1/4*a+1/4,      1/4*(a-17)/(a-5)]
[ 0, 0, 1,-1/2*a+1/2,      1/2*(-9+a)/(a-5)]
[ 0, 0, 0,          1,             -1/(a-5)]

(-1/4-3/4*a)*linha 4 + linha 1 ==> linha 1
(1/4*a-1/4)*linha 4 + linha 2 ==> linha 2
(1/2*a-1/2)*linha 4 + linha 3 ==> linha 3
[ 1,  0,  0,  0, (4*a-11)/(a-5)]
[ 0,  1,  0,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  1,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  0,  1,        -1/(a-5)]
```

```
>> solve(-3/2*a+5/4+1/4*a^2,a)
ans = [ 1][ 5]
```

Na 3a. eliminação foi feita a divisão por $2a - 10$ e na 4a. eliminação por $5/4 - (3/2)a + (1/4)a^2$. Assim, o resultado acima é para o caso em que estes valores são diferentes de zero. Portanto, se $a \neq 1$ e $a \neq 5$, então $X = [\frac{4a-11}{a-5}\ \frac{-4}{a-5}\ \frac{-4}{a-5}\ \frac{-1}{a-5}]^t$.
Para o caso em que $a = 1$, temos:

```
>> C=subs(A,a,1)
>> escalona([C,B])
[ 1, 0, 0, 1, 2]
[ 0, 1, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se $a = 1$, então $X = [2-\alpha, 1, 1, \alpha]^t\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Para o caso em que $a = 5$ temos:

```
>> D=subs(A,a,5)
>> escalona([D,B])
[    1,     0,  5/2,    -1,     0]
[    0,     1, -3/2,     2,     0]
[    0,     0,    0,     0,     1]
[    0,     0,    0,     0,     0]
```

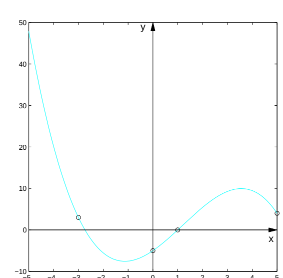
Se $a = 5$, então o sistema não tem solução.

1.5.

```
>> P=randi(4,2)
P =   5      4
     -3      3
      1      0
      0     -5
>> A=matvand(P(:,1),3),B=P(:,2)
A =125     25      5      1
    -27      9     -3      1
      1      1      1      1
      0      0      0      1
B =   4
      3
      0
     -5
>> escalona([A,B])
[ 125,  25,   5,   1,   4]
[ -27,   9,  -3,   1,   3]
[   1,   1,   1,   1,   0]
[   0,   0,   0,   1,  -5]
ans= [ 1,  0,  0,  0, -163/480]
     [ 0,  1,  0,  0,    99/80]
     [ 0,  0,  1,  0, 1969/480]
     [ 0,  0,  0,  1,       -5]

>> a=ans(1,5);b=ans(2,5);c=ans(3,5);d=ans(4,5);
>> clf,po(P),syms x,plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])
>> eixos
```

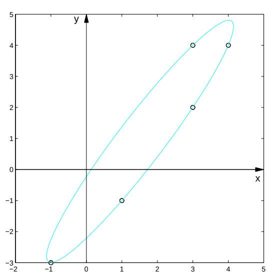
Pode não ser possível encontrar o polinômio, se mais de um ponto tiver a mesma ordenada y_i.



1.6.

```
>> P=randi(5,2)
P =  3     2
    -1    -3
     1    -1
     3     4
     4     4
>> A=matvand(P,2)
A =  9     6     4     3     2     1
     1     3     9    -1    -3     1
     1    -1     1     1    -1     1
     9    12    16     3     4     1
    16    16    16     4     4     1
>> escalona([A,zeros(5,1)])
[  9,  6,  4,  3,  2,  1,  0]
[  1,  3,  9, -1, -3,  1,  0]
[  1, -1,  1,  1, -1,  1,  0]
[  9, 12, 16,  3,  4,  1,  0]
[ 16, 16, 16,  4,  4,  1,  0]
ans= [1,      0,      0,      0,      0, -35/8,      0]
[     0,      1,      0,      0,      0,  45/8,      0]
[     0,      0,      1,      0,      0,    -2,      0]
[     0,      0,      0,      1,      0,  65/8,      0]
[     0,      0,      0,      0,      1, -39/8,      0]

>> a=-ans(1,6);b=-ans(2,6);c=-ans(3,6);
>> d=-ans(4,6);e=-ans(5,6);f=1;
>> clf,po(P),syms x y,
>> plotci(a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f,[-5,5],[-5,5])
>> eixos
```



2. Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1. Concluimos que é muito raro encontrar matrizes invertíveis.

2.2.

```
>> menc=lerarq('menc1'); key=lerarq('key');
>> y=char2num(menc); M=char2num(key);
>> N=escalona([M,eye(5)])
[ 37, 12, 12,  4, 93,  1,  0,  0,  0,  0]
[  0,  4,  0,  1,  0,  0,  1,  0,  0,  0]
[  3,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0]
[  9,  3,  3,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0]
[ 18,  6,  6,  2,  1,  0,  0,  0,  0,  1]
N =[1,0,0,0,0, 1,  0,   0, 182, -93]
   [0,1,0,0,0, 0,  1,   3,  -1,   0]
   [0,0,1,0,0,-3,  0,   1,-546, 279]
   [0,0,0,1,0, 0,-3,-12,    4,   0]
   [0,0,0,0,1, 0,  0,   0,  -2,   1]
>> N=N(:,6:10)
N =
[    1,     0,     0,  182,   -93]
[    0,     1,     3,   -1,     0]
[   -3,     0,     1, -546,   279]
[    0,    -3,   -12,    4,     0]
[    0,     0,     0,   -2,     1]
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Desejo boa sorte a todos que estudam Álgebra Linear !
>> menc=lerarq('menc2');
>> y=char2num(menc);
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Buda tinha este nome por que vivia setado!
```

Deve ser uma matriz com entradas entre 0 e 158 com determinante igual a ± 1, para que exista inversa e a sua inversa seja uma matriz com entradas inteiras.

3. Espaços Vetoriais

3.1.

```
>> A=randi(4,3)*randi(3,5,2);
>> R=escalona(A)
[  6, -2,  1,  8,  2]
[ 12,  6, -1,  8,  9]
[ 20, 12,  1, 15, 16]
[  0,  8,  5,  1,  4]
R =[ 1,     0,     0,     1,   1/2]
[    0,     1,     0,  -1/2,   1/2]
[    0,     0,     1,     1,     0]
[    0,     0,     0,     0,     0]
```

O conjunto solução de $AX = \bar{0}$ é o mesmo de $RX = \bar{0}$. Assim, a mesma relação que é válida entre as colunas de R é válida entre as colunas de A. Portanto, as colunas de `A` que correspondem aos pivôs de `R` formam uma base para o subespaço gerado pelas colunas de `A`, pois as outras colunas são combinação linear destas.

3.2.

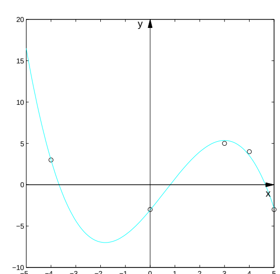
```
>> A=randi(4,2)
A =  2     1
     2    -4
     3    -1
     0     2
>> B=[A,eye(4)];
>> R=escalona(B)
[  2,  1,  1,  0,  0,  0]
[  2, -4,  0,  1,  0,  0]
[  3, -1,  0,  0,  1,  0]
[  0,  2,  0,  0,  0,  1]
R =[ 1,     0,     0,     0,   1/3,   1/6]
[    0,     1,     0,     0,     0,   1/2]
[    0,     0,     1,     0,  -2/3,  -5/6]
[    0,     0,     0,     1,  -2/3,   5/3]
```

As colunas de `B` que correspondem aos pivôs de `R` formam uma base para o subespaço gerado pelas colunas de `B`, pois as outras colunas são combinação linear destas.

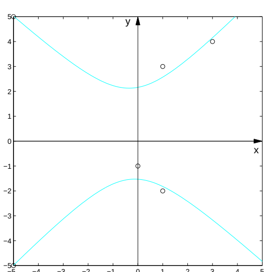
4. Quadrados Mínimos

4.1.

```
>> P=randi(5,2)
P =  3     5
     5    -3
     0    -3
     4     4
    -4     3
>> A=matvand(P(:,1),3), B=P(:,2)
A = 27     9     3     1
   125    25     5     1
     0     0     0     1
    64    16     4     1
   -64    16    -4     1
B =  5
    -3
    -3
     4
     3
>> escalona([A'*A,A'*B])
[ 24546,   3368,   1218,    152,   -176]
[  3368,   1218,    152,     66,     82]
[  1218,    152,     66,      8,      4]
[   152,     66,      8,      5,      6]
ans = [ 1,0,0,0,     -35077/157992]
      [ 0,1,0,0,       33866/85579]
      [ 0,0,1,0, 7430353/2053896]
      [ 0,0,0,1,     -262092/85579]
>> a=ans(1,5);b=ans(2,5);c=ans(3,5);d=ans(4,5);
>> clf,po(P),syms x,plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])
>> eixos
```



4.2.
```
>> P=randi(6,2)
P =  0    -1
     1    -2
     3     4
    -5    -5
     1     3
    -5     5
>> M=matvand(P,2),B=-M(:,1),A=M(:,2:6)
M =  0     0     1     0    -1     1
     1    -2     4     1    -2     1
     9    12    16     3     4     1
    25    25    25    -5    -5     1
     1     3     9     1     3     1
    25   -25    25    -5     5     1
B =  0
    -1
    -9
   -25
    -1
   -25
A =  0     1     0    -1     1
    -2     4     1    -2     1
    12    16     3     4     1
    25    25    -5    -5     1
     3     9     1     3     1
   -25    25    -5     5     1
>> escalona([A'*A,A'*B])
[  1407,    211,     37,  -189,     13,  -109]
[   211,   1604,   -189,     82,     80, -1407]
[    37,   -189,     61,     13,     -5,   221]
[  -189,     82,     13,     80,      4,   -37]
[    13,     80,     -5,      4,      6,   -61]
ans =[1,0,0,0,0,   35943/287650]
     [0,1,0,0,0, -301491/287650]
     [0,0,1,0,0,  127343/287650]
     [0,0,0,1,0,   95187/143825]
     [0,0,0,0,1,     18123/5230]
>> a=ans(1,6);b=ans(2,6);c=ans(3,6);
>> d=ans(4,6);e=ans(5,6);
>> clf,po(P),syms x y
>> plotci(x^2+a*x*y+b*y^2+c*x+d*y+e,[-5,5],[-5,5])
>> eixos
```



5. Posto de Matrizes

5.1.
```
>> c=0;for k=1:1000,m=10+randi;n=10+randi;A=randi(m,n);
if rank(A)==min([m,n]),c=c+1;end;end,c
c=1000
```

As matrizes com entradas obtidas aleatoriamente têm em geral posto máximo.

5.2.
```
>> c=0;for k=1:1000,m=10+randi;p=10+randi;n=10+randi;
A=randi(m,p);B=randi(p,n);if(rank(A*B)==min([rank(A),rank(B)])),
c=c+1;end,end,c
c=1000
```

Para matrizes A e B com entradas obtidas aleatoriamente, então em geral vale que $\text{posto}(AB) \leq \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\}$.

6. Diagonalização

6.1.
```
>> B=randi(2), A=[B-B',zeros(2,1);zeros(1,2),randi]
B =  5    -1
     3     0
A =  0    -4     0
     4     0     0
     0     0    -3
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -3*x^2-x^3-48-16*x
ans = [   -3][  4*i][ -4*i]
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,-3))
[  3, -4,  0]
[  4,  3,  0]
[  0,  0,  0]
ans =[ 1, 0, 0]
     [ 0, 1, 0]
     [ 0, 0, 0]
```

A matriz A não é diagonalizável pois ela só tem um autovalor e auto espaço associado a este autovalor tem dimensão 2.

6.2.
```
>> L=[eye(2),zeros(2,1);randi(1,2),0], A=L*L'
L =  1     0     0
     0     1     0
     2    -2     0
A =  1     0     2
     0     1    -2
     2    -2     8
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -9*x+10*x^2-x^3
ans = [ 0][ 1][ 9]
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,0))
[  1,  0,  2]
[  0,  1, -2]
[  2, -2,  8]
ans =[  1,  0,  2]
     [  0,  1, -2]
     [  0,  0,  0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 0$ é

$$\mathbb{V}_0 = \{(-2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_1 = (-2, 2, 1)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores associado a $\lambda = 0$.

```
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,1))
[  0,  0,  2]
[  0,  0, -2]
[  2, -2,  7]
ans =[  1, -1,  0]
     [  0,  0,  1]
     [  0,  0,  0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ é

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_2 = (1, 1, 0)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores associado a $\lambda = 1$.

```
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,9))
[ -8,  0,  2]
[  0, -8, -2]
[  2, -2, -1]
ans =[    1,     0, -1/4]
     [    0,     1,  1/4]
     [    0,     0,    0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 9$ é

$$\mathbb{V}_9 = \{(\alpha, -\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_3 = (1, -1, 4)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores associado a $\lambda = 9$.

```
>> V1=[-2,2,1];V2=[1,1,0];V3=[1,-1,4];
>> P=[V1',V2',V3'], D=diag([0,1,9])
P = -2     1     1
     2     1    -1
     1     0     4
D =  0     0     0
     0     1     0
```

```
     0      0      9
>> inv(P)*A*P
ans =    0.0000    0.0000    0.0000
              0    1.0000         0
              0         0    9.0000
>> [P,D]=eig(sym(A))
P =[ -1, -2,  1]
   [  1,  2,  1]
   [ -4,  1,  0]
D =[ 9, 0, 0]
   [ 0, 0, 0]
   [ 0, 0, 1]
```

Os elementos da diagonal da matriz D têm que ser os autovalores de A. As matrizes D podem diferir na ordem com que os autovalores aparecem. As colunas de P são autovetores associados aos autovalores que aparecem nas colunas correspondentes de D. Assim, fazendo uma reordenacão das colunas das matrizes P e D de forma que as matrizes D sejam iguais, as colunas de uma matriz P são múltiplos escalares das colunas correspondentes da outra matriz P.

6.3.

```
>> B=[2,1,1;0,1,-1;0,-1,1]; C=[0,-1,-1;0,1,1;0,1,1];
>> A=randi*B+randi*C
A = -2    -3    -3
     0     1     3
     0     3     1
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p =(-2-x)*(-8-2*x+x^2)
ans =[ -2][  4]
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,-2))
[  0, -3, -3]
[  0,  3,  3]
[  0,  3,  3]
ans=[ 0, 1, 1]
    [ 0, 0, 0]
    [ 0, 0, 0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -2$ é

$$\mathbb{V}_{(-2)} = \{(\beta, -\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_1 = (1,0,0), V_2 = (0,-1,1)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores associado a $\lambda = -2$.

```
>> escalona(subs(A-x*eye(3),x,4))
[ -6, -3, -3]
[  0, -3,  3]
[  0,  3, -3]
ans =[  1,  0,  1]
     [  0,  1, -1]
     [  0,  0,  0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 4$ é

$$\mathbb{V}_4 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_3 = (-1,1,1)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores associado a $\lambda = -2$.

```
>> V1=[1,0,0];V2=[0,-1,1];V3=[-1,1,1];
>> P=[V1',V2',V3'], D=diag([-2,-2,4])
P =  1     0    -1
     0    -1     1
     0     1     1
D = -2     0     0
     0    -2     0
     0     0     4
>> inv(P)*A*P
ans =-2     0     0
      0    -2     0
      0     0     4
>> [P,D]=eig(sym(A))
P =[  1,  1,  0]
   [ -1,  0, -1]
   [ -1,  0,  1]
D =[  4,  0,  0]
   [  0, -2,  0]
   [  0,  0, -2]
```

7. Aplicação ao Estudo de Cônicas

7.1.

```
>> A=[9,-2;-2,6]; K=[-10,-20];
>> syms x y; X=[x;y];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-5)
```

$9\,x^2 - 4\,xy + 6\,y^2 - 10\,x - 20\,y - 5$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

```
D=[5, 0]
  [0,10]
>> syms x1 y1; X1=[x1;y1];
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 10\,\sqrt{5}x_1 - 5$

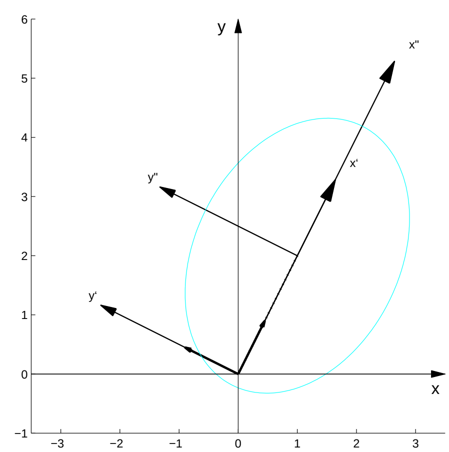
```
>> syms x2 y2; X2=[x2;y2]; X0=[5^(1/2);0];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$5\,{x_2}^2 - 30 + 10\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/30
```

${x_2}^2/6 + {y_2}^2/3 - 1$

```
>> elipse(sqrt(6),sqrt(3),P,X0)
```



7.2.
```
>> A=[3,-4;-4,-12];
>> K=[-30,-64];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$3\,x^2 - 8\,xy - 12\,y^2 - 30\,x - 64\,y$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{17}/17 & -4\sqrt{17}/17 \\ 4\sqrt{17}/17 & \sqrt{17}/17 \end{bmatrix}$$

```
D=[-13,0]
  [  0,4]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$-13\,{x_1}^2 + 4\,{y_1}^2 - 286\,\sqrt{17}x_1/17 + 56\,\sqrt{17}y_1/17$

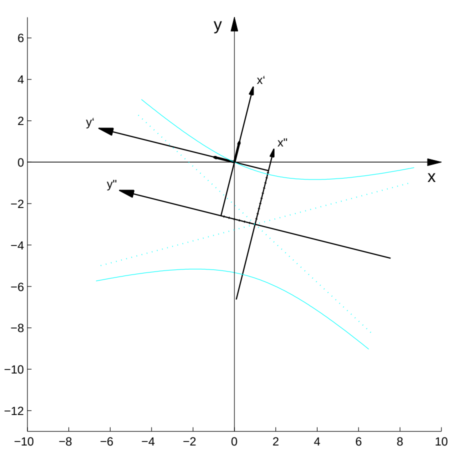
```
>> X0=[-286/(2*13*17^(1/2));-56/(2*4*17^(1/2))]
[-11*17^(1/2)/17]
[- 7*17^(1/2)/17]
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$-13\,{x_2}^2 + 81 + 4\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/81
```

$-\frac{13}{81}\,{x_2}^2 + 1 + \frac{4}{81}\,{y_2}^2$

```
>> hiperbx(9/sqrt(13),9/2,P,X0)
```



7.3.
```
>> A=[2,-2;-2,-1];
>> K=[-4,-8];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+14)
```

$2\,x^2 - 4\,xy - y^2 - 4\,x - 8\,y + 14$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & 1\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

```
D =[-2, 0]
   [ 0, 3]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$-2\,{x_1}^2 + 3\,{y_1}^2 - 4\,\sqrt{5}x_1 + 14$

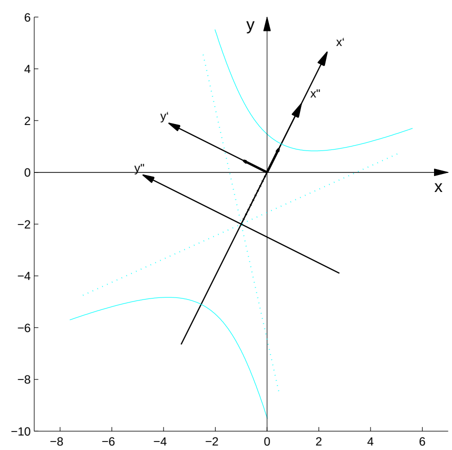
```
>> X0=[-5^(1/2);0];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$-2\,{x_2}^2 + 24 + 3\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/24
```

$-{x_2}^2/12 + {y_2}^2/8 + 1$

```
>> hiperbx(sqrt(12),sqrt(8),P,X0)
```



7.4.

```
>> A=[21,3;3,13];
>> K=[-114,34];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+73)
```

$21\,x^2 + 6\,xy + 13\,y^2 - 114\,x + 34\,y + 73$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \left[\begin{array}{cc} 3\sqrt{10}/10 & -1\sqrt{10}/10 \\ 1\sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \end{array}\right]$$

```
D=[22, 0]
  [ 0,12]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$22\,{x_1}^2 + 12\,{y_1}^2 - \frac{154}{5}\sqrt{10}x_1 + \frac{108}{5}\sqrt{10}y_1 + 73$

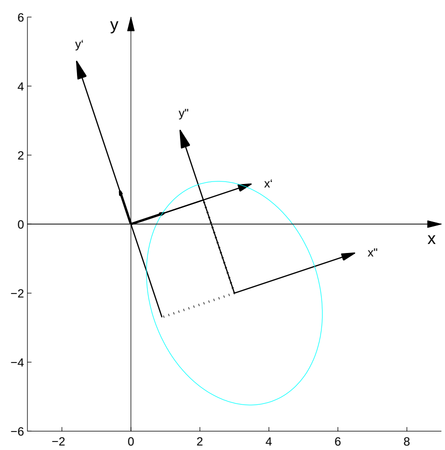
```
>> X0=[154*10^(1/2)/(5*2*22);-108*10^(1/2)/(5*2*12)];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$22\,{x_2}^2 - 132 + 12\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/132
```

${x_2}^2/6 + {y_2}^2/11 - 1$

```
>> elipse(sqrt(6),sqrt(11),P,X0)
```



7.5.

```
>> A=[4,-10;-10,25];
>> K=[-15,-6];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$4\,x^2 - 20\,xy + 25\,y^2 - 15\,x - 6\,y$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \left[\begin{array}{cc} \frac{5}{29}\sqrt{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29} \\ \frac{2}{29}\sqrt{29} & \frac{5}{29}\sqrt{29} \end{array}\right]$$

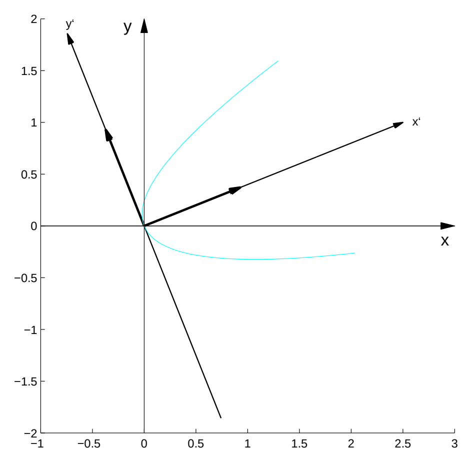
```
D =[0,  0]
   [0, 29]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$29\,{y_1}^2 - 3\sqrt{29}x_1$

```
>> expr=expr/29
```

${y_1}^2 - \frac{3}{29}\sqrt{29}x_1$

```
>> parabx(3/(4*sqrt(29)),P)
```



7.6.

```
>> A=[9,3;3,1]; K=[-10*10^(1/2),10*10^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+90)
```

$9\,x^2+6\,xy+y^2-10\sqrt{10}x+10\sqrt{10}y+90$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc} 3\sqrt{10}/10 & -\sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \end{array}\right]$$

```
D =[10, 0]
   [ 0, 0]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$10\,{x_1}^2-20\,x_1+40\,y_1+90$

```
>> X0=[154*10^(1/2)/(5*2*22);-108*10^(1/2)/(5*2*12)];
>> expr=subst(expr,x1,x2+1)
```

$10\,{x_2}^2+80+40\,y_1$

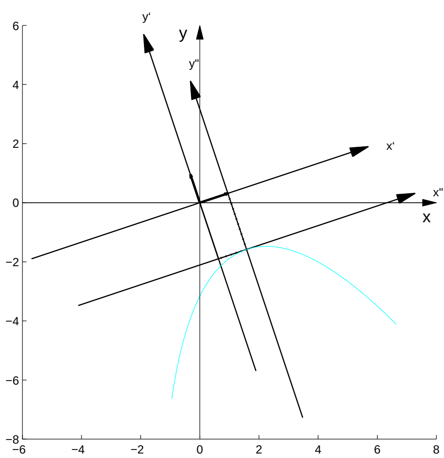
```
>> expr=subst(expr,y1,y2-2)
```

$10\,{x_2}^2+40\,y_2$

```
>> expr=expr/10
```

${x_2}^2+4\,y_2$

```
>> paraby(-1,P,[1;-2])
```



7.7.

```
>> A=[5,-3;-3,5];
>> K=[-30*(2)^(1/2),18*(2)^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+82)
```

$5\,x^2-6\,xy+5\,y^2-30\sqrt{2}x+18\sqrt{2}y+82$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right]$$

```
D =[2, 0]
   [0, 8]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$2\,{x_1}^2+8\,{y_1}^2-12\,x_1+48\,y_1+82$

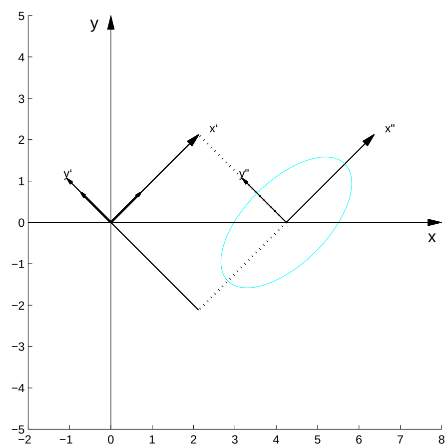
```
>> X0=[3;-3];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$2\,{x_2}^2-8+8\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/8
```

${x_2}^2/4-1+{y_2}^2$

```
>> elipse(2,1,P,X0)
```



7.8.

```
>> A=[5,6;6,0];
>> K=[-12*(13)^(1/2),0];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-36)
```

$$5\,x^2 + 12\,xy - 12\,\sqrt{13}x - 36$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

```
D =[-4, 0]
   [ 0, 9]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$-4\,{x_1}^2 + 9\,{y_1}^2 - 24\,x_1 - 36\,y_1 - 36$$

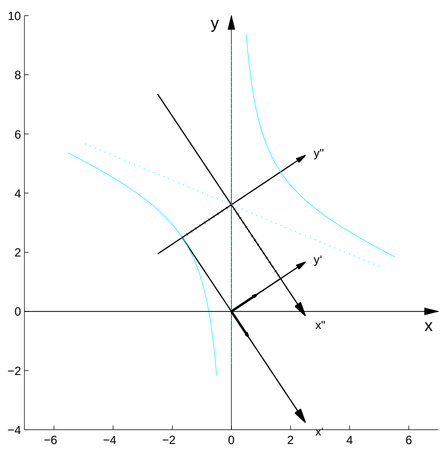
```
>> X0=[-3;2];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$-4\,{x_2}^2 - 36 + 9\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr/36
```

$$-{x_2}^2/9 - 1 + {y_2}^2/4$$

```
>> hiperby(2,3,P,X0)
```



7.9.

```
>> A=[6,-2;-2,9];
>> K=[-4*5^(1/2),-18*5^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-5)
```

$$6\,x^2 - 4\,xy + 9\,y^2 - 4\,\sqrt{5}x - 18\,\sqrt{5}y - 5$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

```
D =[5,  0]
   [0, 10]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 26\,x_1 - 32\,y_1 - 5$$

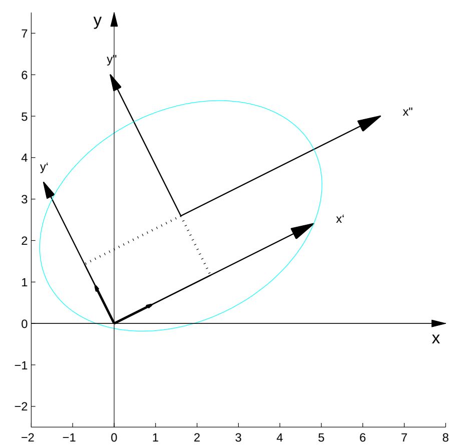
```
>> X0=[26/10;32/20];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$5\,{x_2}^2 - \frac{322}{5} + 10\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr*5/322
```

$$\frac{25}{322}\,{x_2}^2 - 1 + \frac{25}{161}\,{y_2}^2$$

```
>> elipse(sqrt(322)/5,sqrt(161)/5,P,X0)
```



7.10.
```
>> A=[1,3^(1/2);3^(1/2),-1];
>> K=[6,0];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$x^2 + 2\,xy\sqrt{3} - y^2 + 6\,x$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

```
D =[ 2, 0]
   [ 0,-2]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$2\,{x_1}^2 - 2\,{y_1}^2 + 3\,\sqrt{3}x_1 - 3\,y_1$

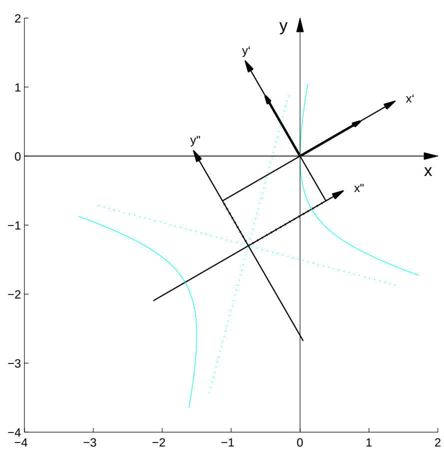
```
>> X0=[-3*3^(1/2)/4;-3/4];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$2\,{x_2}^2 - 9/4 - 2\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr*4/9
```

$\frac{8}{9}\,{x_2}^2 - 1 - \frac{8}{9}\,{y_2}^2$

```
>> hiperbx(3/sqrt(8),3/sqrt(8),P,X0)
```



7.11.
```
>> A=[8,-8;-8,8];
>> K=[33*2^(1/2),-31*2^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+70)
```

$8\,x^2 - 16\,xy + 8\,y^2 + 33\,\sqrt{2}x - 31\,\sqrt{2}y + 70$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
D =[0,  0]
   [0, 16]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$16\,{y_1}^2 + 2\,x_1 - 64\,y_1 + 70$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+2)
```

$16\,{y_2}^2 + 6 + 2\,x_1$

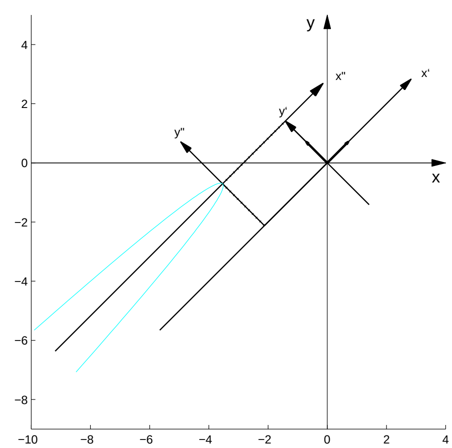
```
>> expr=subst(expr,x1,x2-3)
```

$16\,{y_2}^2 + 2\,x_2$

```
>> expr=expr/16
```

${y_2}^2 + x_2/8$

```
>> parabx(-1/32,P,[-3;2])
```



Referências

[1] Frederico F. C., filho. *Introdução ao MATLAB*. Departamento de Ciência da Computação - UFMG, Belo Horizonte, Julho de 1996.

[2] David R. Hill and David E. Zitarelli. *Linear Algebra Labs with MATLAB*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[3] Steven Leon, Eugene Herman, and Richard Faulkenberry. *ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[4] Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 5a. edition, 1998.

[5] Mathworks Inc. *MATLAB Version 5 for Windows - Student User's Guide*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[6] Reginaldo J. Santos. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Departamento de Matemática - UFMG, Belo Horizonte, Setembro 1999.