Errata às Edições Julho 2009 e Março de 2010 do Livro Tópicos de Equações Diferenciais

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

14 de maio de 2010

Exemplo 4.14. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + t \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a mesma do Exemplo 4.10 que não é diagonalizável, mas as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + g_1(t) & (1) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \qquad\qquad + g_2(t) & (2) \end{cases}$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

Temos que resolver em primeiro lugar a equação (2), ou seja,

$$y_2' + 2y_2 = t.$$

Para isso multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{2t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y_2\right) = te^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t}y_2(t) = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + c_2.$$

Explicitando-se $y_2(t)$:

$$y_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c_2e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{2p}(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

é uma solução particular da segunda equação.

Para resolver a equação (1), ou seja,

$$y_1' + 2y_1 = \frac{3t}{2} - \frac{1}{4}$$

multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{2t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y_1\right) = \frac{3t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t}y_1(t) = \frac{3t}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + c_1.$$

Explicitando-se $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} + c_1e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{1p}(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2}$$

é uma solução particular da primeira equação. Assim

$$X_p(t) \;=\; PY_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{2p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} + c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$