# Decomposição em Frações Parciais

# Reginaldo J. Santos Departamento de Matemática-ICEx Universidade Federal de Minas Gerais

http://www.mat.ufmg.br/~regi

### 18 de abril de 2004

# Sumário

1	Introdução	2
2	g(t) tem somente Raízes Reais Simples	2
3	g(t) tem somente Raízes Simples	3
4	g(t) tem somente Raízes Reais	7
5	Caso Geral	10

## 1 Introdução

Considere a fração racional

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$$

em que f(t) e g(t) são polinômios com coeficientes reais e tais que o grau de f(t) é menor do que o grau de g(t). Vamos supor que g(t) possa ser decomposto da seguinte forma:

$$g(t) = (t - a_1)^{n_1} \dots (t - a_k)^{n_k} (t^2 + b_1 t + c_1)^{m_1} \dots (t^2 + b_l t + c_l)^{m_l}$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos, para i = 1, ..., k e  $(b_i, c_i) \in \mathbb{R}^2$  distintos tais que  $b_i^2 - 4c_i < 0$ , para i = 1, ..., l.

# 2 g(t) tem somente Raízes Reais Simples

Vamos supor que o denominador g(t) pode ser escrito na forma

$$g(t) = (t - a_1) \cdots (t - a_k),$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos, para  $i = 1, \dots, k$ .

Vamos determinar escalares  $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$  tais que

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{t - a_i}$$

$$= \frac{\alpha_1}{t - a_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{t - a_k}.$$
(1)

Multiplicando-se a equação acima por g(t) obtemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(t) = \alpha_1 p_1(t) + \dots + \alpha_k p_k(t), \qquad (2)$$

em que

$$p_i(t) = \frac{g(t)}{t - a_i} = \prod_{r \neq i} (t - a_r),$$

para i = 1, ..., k.

Substituindo-se  $t = a_i$ , para i = 1, ..., k, em (2) obtemos

$$f(a_i) = \alpha_i p_i(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_i$ , para  $i = 1, \ldots, k$ .

#### Exemplo 1.

$$H(t) = \frac{1}{t(t^2 + 3t + 2)} = \frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2}$$

Multiplicando H(t) por  $t(t^2 + 3t + 2)$  obtemos

$$1 = A(t+1)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t+1)$$

Substituindo-se t = 0, -1, -2 obtemos

$$\begin{cases} 1 = 2A \\ 1 = -B \\ 1 = 2C \end{cases}$$

que tem solução  $A=1/2,\,B=-1$  e C=1/2. Assim,

$$H(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+2}$$

# 3 g(t) tem somente Raízes Simples

Vamos supor que g(t) possa ser decomposto da seguinte forma:

$$g(t) = (t - a_1) \cdots (t - a_k)(t^2 + b_1t + c_1) \dots (t^2 + b_lt + c_l),$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos para i = 1, ..., k e  $(b_i, c_i) \in \mathbb{R}^2$  distintos tais que  $b_i^2 - 4c_i < 0$ , para i = 1, ..., l.

Vamos determinar os escalares  $\alpha_i$ , para  $i=1,\ldots,k,\ \beta_i,\gamma_i$ , para  $i=1,\ldots,l$ , tais que

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{t - a_i} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\beta_i + \gamma_i t}{t^2 + b_i t + c_i}$$

$$= \frac{\alpha_1}{t - a_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{t - a_k} + \frac{\beta_1 + \gamma_1 t}{t^2 + b_1 t + c_1} + \dots + \frac{\beta_l + \gamma_l t}{t^2 + b_t t + c_l}.$$
(3)

Multiplicando-se a equação acima por g(t) obtemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i} p_{i}(t) + \sum_{i=1}^{l} (\beta_{i} + \gamma_{i} t) P_{i}(t)$$

$$= \alpha_{1} p_{1}(t) + \dots + \alpha_{k} p_{k}(t) + (\beta_{1} + \gamma_{1} t) P_{1}(t) + \dots + (\beta_{l} + \gamma_{l} t) P_{l}(t), \qquad (4)$$

em que

$$p_i(t) = \frac{g(t)}{t - a_i} = \prod_{r \neq i} (t - a_r) \prod_{s=1}^{l} (t^2 + b_s t + c_s),$$

para  $i = 1, \ldots, k$  e

$$P_i(t) = \frac{g(t)}{t^2 + b_i t + c_i} = \prod_{s \neq i} (t^2 + b_s t + c_s) \prod_{r=1}^k (t - a_r),$$

para i = 1, ..., l.

Substituindo-se  $t = a_i$ , para i = 1, ..., k, em (4) obtemos

$$f(a_i) = \alpha_i p_i(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_i$ , para  $i = 1, \ldots, k$ .

Substituindo-se uma das raízes da equação  $t^2 + b_i t + c_i = 0$ ,  $z_i$ , para  $i = 1, \dots, l$ , em (4) obtemos

$$f(z_i) = \beta_i P_i(z_i) + \gamma_i z_i P_i(z_i)$$

Comparando-se as partes real e imaginária da equação anterior obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas que resolvido dá os valores de  $\beta_i$  e  $\gamma_i$ , para i = 1, ..., l.

#### Exemplo 2.

$$H(t) = \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Multiplicando-se H(t) por  $t(t^2 + 1)$  obtemos

$$1 = A(t^2 + 1) + (Bt + C)t$$

Substituindo-se t = 0 e t = i

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = (Bi + C)i = -B + Ci \end{cases}$$

De onde obtemos A=1. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos B=-1 e C=0. Assim,

$$H(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}$$

#### Exemplo 3.

$$H(t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+4}$$

Multiplicando-se por  $(t^2 + 1)(t^2 + 4)$ :

$$1 = (At + B)(t^{2} + 4) + (Ct + D)(t^{2} + 1)$$
(5)

Substituindo-se t = i, 2i em (5)

$$\begin{cases} 1 = (iA+B)3 \\ 1 = (2iC+D)(-3) \end{cases}$$

Como A,B,C e D são reais, comparando-se as partes real e imaginária obtemos

$$\begin{cases} 1 = 3B \\ 0 = 3A \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 1 = -3D \\ 0 = -6C \end{cases}$$

De onde obtemos a solução  $A=0,\,B=1/3,\,C=0$  e D=-1/3. Assim,

$$H(t) = \frac{1/3}{t^2 + 1} + \frac{-1/3}{t^2 + 4}$$

### Exemplo 4.

$$H(t) = \frac{2}{t(t^2 + 2t + 2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2t + 2}.$$

Multiplicando-se H(t) por  $t(t^2 + 2t + 2)$  obtemos

$$2 = A(t^2 + 2t + 2) + (Bt + C)t$$

Substituindo-se t = 0 e t = -1 + i

$$\begin{cases} 2 = 2A \\ 2 = (B(-1+i) + C)(-1+i) = B(-2i) + C(-1+i) = -C + (C-2B)i \end{cases}$$

De onde obtemos que A=1. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação acima obtemos B=-1 e C=-2. Assim,

$$H(t) = \frac{1}{t} - \frac{t+2}{t^2 + 2t + 2}$$

#### Exemplo 5.

$$H(t) = \frac{1}{(t^2+1)\left(t^2+t+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{(t^2+1)\left(t^2+t+\frac{5}{4}\right)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+\frac{5}{4}}$$

Multiplicando-se H(t) por  $(t^2 + 1) (t^2 + t + \frac{5}{4})$ :

$$1 = (At + B)(t^2 + t + \frac{5}{4}) + (Ct + D)(t^2 + 1)$$

Substituindo-se t = i e  $t = -\frac{1}{2} + i$  obtemos

$$\begin{cases} 1 &= (Ai+B)(-1+i+\frac{5}{4}) = (Ai+B)(i+\frac{1}{4}) = (-A+\frac{1}{4}B)+i(\frac{1}{4}A+B) \\ 1 &= (C(-\frac{1}{2}+i)+D)(\frac{1}{4}-1-i+1) = (\frac{7}{8}C+\frac{1}{4}D)+i(\frac{3}{4}C-D) \end{cases}$$

Comparando-se as partes real e imaginária das equações acima obtemos

$$\begin{cases} 1 &= -A + \frac{1}{4}B \\ 0 &= \frac{1}{4}A + B \end{cases} \begin{cases} 1 &= \frac{7}{8}C + \frac{1}{4}D \\ 0 &= \frac{3}{4}C - D \end{cases}$$

Resolvendo-se os sistemas acima obtemos a solução  $A=-16/17,\ B=4/17,\ C=16/17$  e D=12/17. Assim,

$$H(t) = \frac{4}{17} \left( \frac{-4t+1}{t^2+1} + \frac{4t+3}{t^2+t+\frac{5}{4}} \right)$$

## 4 g(t) tem somente Raízes Reais

Vamos supor que o denominador g(t) pode ser escrito na forma

$$g(t) = (t - a_1)^{n_1} \cdots (t - a_k)^{n_k}$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos, para  $i = 1, \dots, k$ .

Vamos determinar escalares  $\alpha_{ij}$ , com i = 1, ..., k e  $j = 1, ..., n_i$  tais que

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(t - a_i)^j}$$

$$= \frac{\alpha_{11}}{t - a_1} + \dots + \frac{\alpha_{1n_1}}{(t - a_1)^{n_1}} + \dots + \frac{\alpha_{k1}}{t - a_k} + \dots + \frac{\alpha_{kn_k}}{(t - a_k)^{n_k}}.$$
 (6)

Multiplicando-se a equação acima por g(t) obtemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} p_{ij}(t)$$

$$= \alpha_{11} p_{11}(t) + \dots + \alpha_{1n_1} p_{1n_1}(t) + \dots + \alpha_{k1} p_{k1}(t) + \dots + \alpha_{kn_k} p_{kn_k}(t), \qquad (7)$$

em que

$$p_{ij}(t) = \frac{g(t)}{(t - a_i)^j} = (t - a_i)^{n_i - j} \prod_{r \neq i} (t - a_r)^{n_r} = (t - a_i)^{n_i - j} p_{in_i}(t),$$

para  $j = 1, ..., n_i$  e i = 1, ..., k.

Substituindo-se  $t = a_i$ , para i = 1, ..., k, em (7)

$$f(a_i) = \alpha_{in_i} p_{in_i}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{in_i}$ , para  $i = 1, \ldots, k$ .

Derivando-se (7) e substituindo-se  $t = a_i$ 

$$f'(a_i) = \alpha_{i(n_i-1)} p'_{i(n_i-1)}(a_i) + \alpha_{in_i} p'_{in_i}(a_i)$$
  
=  $\alpha_{i(n_i-1)} p_{in_i}(a_i) + \alpha_{in_i} p'_{in_i}(a_i)$ 

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-1)}$ , usando o valor obtido anteriormente de  $\alpha_{in_i}$ , para  $i=1,\ldots,k$ . O resultado acima se deve ao fato de que derivando-se  $p_{ij}(t)=(t-a_i)^{n_i-j}p_{in_i}(t)$  obtemos

$$p'_{ij}(t) = (n_i - j)(t - a_i)^{n_i - j - 1} p_{in_i}(t) + (t - a_i)^{n_i - j} p'_{in_i}(t).$$

Assim, se  $n_i - j > 1$  (ou  $j < n_i - 1$ )  $p'_{ij}(a_i) = 0$ .

Derivando-se (7) duas vezes e substituindo-se  $t = a_i$ 

$$f''(a_i) = \alpha_{i(n_i-2)} p''_{i(n_i-2)}(a_i) + \alpha_{i(n_i-1)} p''_{i(n_i-1)}(a_i) + \alpha_{in_i} p''_{in_i}(a_i)$$
$$= 2\alpha_{i(n_i-2)} p_{in_i}(a_i) + \alpha_{i(n_i-1)} p''_{i(n_i-1)}(a_i) + \alpha_{in_i} p''_{in_i}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-2)}$  usando os valores obtidos anteriormente de  $\alpha_{i(n_i-1)}$  e  $\alpha_{in_i}$ , para  $i=1,\ldots,k$ . O resultado acima se deve ao fato de que derivando-se  $p_{ij}(t)=(t-a_i)^{n_i-j}p_{in_i}(t)$  duas vezes obtemos

$$p_{ij}''(t) = (n_i - j - 1)(n_i - j)(t - a_i)^{n_i - j - 2}p_{in_i}(t) + 2(n_i - j)(t - a_i)^{n_i - j - 1}p_{in_i}'(t) + (t - a_i)^{n_i - j}p_{in_i}''(t).$$

Assim, se  $n_i - j > 2$  (ou  $j < n_i - 2$ )  $p''_{ij}(a_i) = 0$ .

Derivando-se (7) r vezes, para  $r=0,\ldots,n_i-1$  e substituindo-se  $t=a_i$ , para  $i=1,\ldots,k$ 

$$f^{(r)}(a_i) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i(n_i-j)} p_{i(n_i-j)}^{(r)}(a_i)$$
$$= r! \alpha_{i(n_i-r)} + \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{i(n_i-j)} p_{i(n_i-j)}^{(r)}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-r)}$ , usando os valores obtidos anteriormente de  $\alpha_{i(n_i-r+1)}, \ldots, \alpha_{in_i}$ , para  $i=1,\ldots,k$  e  $r=0\ldots,n_i-1$ .

### Exemplo 6.

$$Y(t) = \frac{2+t^2}{t^2(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+2} + \frac{D}{t-1}$$

Multiplicando-se por  $t^2(t+2)(t-1)$  obtemos

$$t^{2} + 2 = At(t+2)(t-1) + B(t+2)(t-1) + Ct^{2}(t-1) + Dt^{2}(t+2)$$
(8)

Substituindo-se t = -2, 0, 1 obtemos

$$\begin{cases} 6 = -12C \\ 2 = -2B \\ 3 = 3D \end{cases}$$

que tem solução  $B=-1,\,C=-\frac{1}{2}$  e D=1. Derivando-se (8) obtemos

$$2t = A(t+2)(t-1) + At[(t+2)(t-1)]' + B[(t+2) + (t-1)] + [Ct^{2}(t-1) + Dt^{2}(t+2)]'$$

e substituindo-se t=0 obtemos 0=-2A+B=-2A-1 de onde obtemos  $A=-\frac{1}{2}$ .

Assim,

$$Y(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t-1}$$

#### Exemplo 7.

$$\frac{4}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

Multiplicando-se por  $t(t-1)^2$  obtemos

$$4 = A(t-1)^2 + B(t-1)t + Ct$$
(9)

Substituindo-se t = 0, 1 obtemos

$$\begin{cases}
4 &= A \\
4 &= C
\end{cases}$$

Derivando-se (9) obtemos

$$0 = 2A(t-1) + Bt + B(t-1) + C$$

Substituindo-se t=1 obtemos 0=B+C=B+4 de onde obtemos que B=-4. Assim,

$$Y(t) = \frac{1}{(t-1)^4} + \frac{4}{t} - \frac{4}{t-1} + \frac{4}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1}$$
$$= \frac{1}{6} \frac{6}{(t-1)^4} + \frac{4}{t} - \frac{3}{t-1} + \frac{4}{(t-1)^2}$$

### Exemplo 8.

$$Y(t) = \frac{3 + (t-2)^3}{(t-3)(t+1)(t-2)^2} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-2} + \frac{D}{(t-2)^2}$$

Multiplicando-se Y(t) por  $(t-3)(t+1)(t-2)^2$  obtemos

$$3 + (t-2)^3 = A(t+1)(t-2)^2 + B(t-3)(t-2)^2 + C(t-3)(t+1)(t-2) + D(t-3)(t+1)$$
 (10)

Substituindo-se t=-1,2e 3 na equação acima

$$\begin{cases}
-24 &= -36B \\
3 &= -3D \\
4 &= 4A
\end{cases}$$

De obtemos  $A=1,\,B=\frac{2}{3}$  e D=-1. Derivando-se (10)

$$3(t-2)^{2} = [A(t+1)(t-2)^{2} + B(t-3)(t-2)^{2}]' + C[(t-3)(t+1)]'(t-2) + C(t-3)(t+1) + D[t-3) + (t+1)]$$

e substituindo-se t=2 obtemos

$$0 = -3C + D(-1+3) = -3C - 2$$

que tem solução  $C = -\frac{2}{3}$ . Assim,

$$Y(t) = \frac{1}{t-3} + \frac{2}{3} \frac{1}{t+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{(t-2)^2}$$

### 5 Caso Geral

Vamos supor que g(t) possa ser decomposto da forma

$$g(t) = (t - a_1)^{n_1} \dots (t - a_k)^{n_k} (t^2 + b_1 t + c_1)^{m_1} \dots (t^2 + b_l t + c_l)^{m_l},$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos para i = 1, ..., k e  $(b_i, c_i) \in \mathbb{R}^2$  distintos tais que  $b_i^2 - 4c_i < 0$ , para i = 1, ..., l.

Vamos determinar os escalares  $\alpha_{ij}$ , para  $i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,n_i$  e  $\beta_{ij},\gamma_{ij}$ , para  $i=1,\ldots,l,\ j=1,\ldots,m_i$ , tais que

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(t - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{ij} + \gamma_{ij}t}{(t^2 + b_i t + c_i)^j}.$$
 (11)

Multiplicando-se a equação acima por g(t) obtemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} p_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} (\beta_{ij} + \gamma_{ij} t) P_{ij}(t),$$
 (12)

em que

$$p_{ij}(t) = \frac{g(t)}{(t-a_i)^j} = (t-a_i)^{n_i-j} \prod_{r \neq i} (t-a_r)^{n_r} \prod_{s=1}^l (t^2 + b_s t + c_s)^{m_s}$$
$$= (t-a_i)^{n_i-j} p_{in_i}$$

para  $j = 1, ..., n_i$  e i = 1, ..., k e

$$P_{ij}(t) = \frac{g(t)}{(t^2 + b_i t + c_i)^j} = (t^2 + b_i t + c_i)^{m_i - j} \prod_{r=1}^k (t - a_r)^{n_r} \prod_{s \neq i} (t^2 + b_s t + c_s)^{m_s}$$
$$= (t^2 + b_i t + c_i)^{m_i - j} P_{im_i}$$

para  $j = 1, ..., m_i$  e i = 1, ..., l.

Substituindo-se  $t = a_i$ , para i = 1, ..., k, em (12)

$$f(a_i) = \alpha_{in_i} p_{in_i}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{in_i}$ , para  $i = 1, \ldots, k$ .

Derivando-se (12) e substituindo-se  $t = a_i$ 

$$f'(a_i) = \alpha_{in_i} p'_{in_i}(a_i) + \alpha_{i(n_i-1)} p_{in_i}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-1)}$ , para  $i=1,\ldots,k$ .

Derivando-se (12) duas vezes e substituindo-se  $t = a_i$ 

$$f''(a_i) = \alpha_{i(n_i-2)} p''_{i(n_i-2)}(a_i) + \alpha_{i(n_i-1)} p''_{i(n_i-1)}(a_i) + \alpha_{in_i} p''_{in_i}(a_i)$$

$$= 2\alpha_{i(n_i-2)} p_{in_i}(a_i) + \alpha_{i(n_i-1)} p''_{i(n_i-1)}(a_i) + \alpha_{in_i} p''_{in_i}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-2)}$ , para  $i=1,\ldots,k$ .

Derivando-se (12) r vezes, para  $r=0,\ldots,n_i-1$  e substituindo-se  $t=a_i$ , para  $i=1,\ldots,k$ 

$$f^{(r)}(a_i) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i(n_i-j)} p_{i(n_i-j)}^{(r)}(a_i)$$
$$= r! \alpha_{i(n_i-r)} + \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{i(n_i-j)} p_{i(n_i-j)}^{(r)}(a_i)$$

de onde obtemos  $\alpha_{i(n_i-r)}$ , para  $i=1,\ldots,k$  e  $r=0\ldots,n_i-1$ .

Substituindo-se uma das raízes de  $t^2 + b_i t + c_i = 0$ ,  $z_i$ , em (12)

$$f(z_i) = \beta_{im_i} P_{im_i}(z_i) + \gamma_{im_i} z_i P_{im_i}(z_i)$$

Comparando-se as partes real e imaginária da equação anterior obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas que resolvido dá os valores de  $\beta_{im_i}$  e  $\gamma_{im_i}$ .

#### Exemplo 9.

$$\frac{2}{t^3(t^2+4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{Dt+E}{t^2+4}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $t^3(t^2+4)$  obtemos

$$2 = At^{2}(t^{2} + 4) + Bt(t^{2} + 4) + C(t^{2} + 4) + (Dt + E)t^{3}$$
(13)

Substituindo-se t = 0, 2i em (13)

$$\begin{cases} 2 = 4C \\ 2 = (2iD + E)(-8i) = 16D - 8iE \end{cases}$$

De onde obtemos  $C=\frac{1}{2}$  e comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação do sistema acima

$$\begin{cases} 2 = 16D \\ 0 = -8E \end{cases}$$

De onde obtemos  $D=\frac{1}{8}$  e E=0. Derivando-se (13) uma vez

$$0 = A2t(t^{2} + 4) + At^{2}2t + B(t^{2} + 4) + Bt2t + C2t + Dt^{3} + (Dt + E)3t^{2}$$

substituindo-se t=0 obtemos 0=4B ou B=0. Derivando-se (13) mais uma vez

$$0 = 2A(t^2 + 4) + 2A2t + 6At^2 + 2Bt + 4Bt + 2C + 3Dt^2 + D3t^2 + (Dt + E)6t$$

e substituindo-se t=0 obtemos 0=8A+2C=8A+1 de onde obtemos  $A=-\frac{1}{8}.$  Assim,

$$\frac{2}{t^3(t^2+4)} = -\frac{1}{8}\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\frac{2}{t^3} + \frac{1}{8}\frac{t}{t^2+4}$$