Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Equações Diferenciais C

1º Semestre de 2009 – 3ª Prova

25/06/2009 – Horário: 14:55 às 16:35

Respostas sem justificativas não serão consideradas

1. Considere a seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/2 \\ -1, & \text{se } -\pi/2 \leq t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \qquad \text{e tal que} \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

(a) Calcule a série de Fourier S_f da função f.

(b) Determine os valores $S_f(0)$ e $S_f(9\pi/4)$. Justifique sua resposta.

(c) Encontre uma solução particular e a solução geral da equação diferencial

$$2y'' + y = f(t),$$

(d) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2y'' + y = f(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

2. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

(a) Usando o método de separação de variáveis, ou seja, se

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema.

(b) Encontre as soluções fundamentais $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$

Solução

1. (a) A função f é ímpar seccionalmente contínua, com derivada f' seccionalmente contínua e com período igual a 2π, logo

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos mt,$$

com

$$b_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} mt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} mt\, dt = \frac{2}{m\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)\right)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{m} \operatorname{sen} mt$$

(b) $S_f(0) = 0$, pois $\operatorname{sen}(m\cdot 0) = 0$. Como a série de Fourier $S_f(t)$ converge para $f(t)$ nos pontos onde f é contínua, então

$$S_f(9\pi/4) = S_f(2\pi + \pi/4) = S_f(\pi/4) = f(\pi/4) = 1,$$

pois S_f é periódica de período igual 2π que é também o período de f.

(c) Podemos procurar uma solução particular da forma

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos mt + B_m \operatorname{sen} mt)$$

com coeficientes A_m, B_m a determinar.

$$y'(t) = \sum_{m=1}^{\infty}(-mA_m \operatorname{sen} mt + mB_m \cos mt)$$

$$y''(t) = -\sum_{m=1}^{\infty}(m^2 A_m \cos mt + m^2 B_m \sin mt)$$

Substituindo-se $y(t)$ e $y''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-2\sum_{m=1}^{\infty} m^2(A_m \cos mt + B_m \operatorname{sen} mt) + \sum_{m=1}^{\infty}(B_m \operatorname{sen} mt + A_m \cos mt) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} mt$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}[B_m(1-2m^2)\operatorname{sen} mt + A_m \cos mt] = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} mt$$

Comparando-se termo a termo obtemos

$$A_m = 0, \quad B_m = \frac{b_m}{1-2m^2}$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{1-2m^2}\operatorname{sen} mt = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{m(1-2m^2)}\operatorname{sen} mt$$

(d) $y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$. Logo,

$$y'(t) = c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{1-2m^2}\cos mt$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y' = 0$ obtemos

$$c_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{1-2m^2}$$

e a solução do PVI é

$$y(t) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{1-2m^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)}{m(1-2m^2)}\operatorname{sen} mt$$

2.

(a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + X(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x) + X(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X'(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$:

$$X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0, \; X(0) = 0, \; X'(L) = 0 \tag{1}$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \tag{2}$$

(b) A equação $X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 1$ **:** $X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda-1}\,x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda-1}\,x}$.

Se $\lambda = 1$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 1$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{1-\lambda}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{1-\lambda}\,x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que $\lambda < 1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = 1 - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (1) tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = 1 - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (2) obtemos

$$T'(t) - (1 - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2})T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = C_2 e^t e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\,t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n e^t \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\,t}$$