2022-05-13 Übung

Freitag, 13. Mai 2022 18:00

AUFGABE 3 (7 Punkte):
Zeigen Sie folgende Eigenschaften eines n-elementigen Min-Heaps:

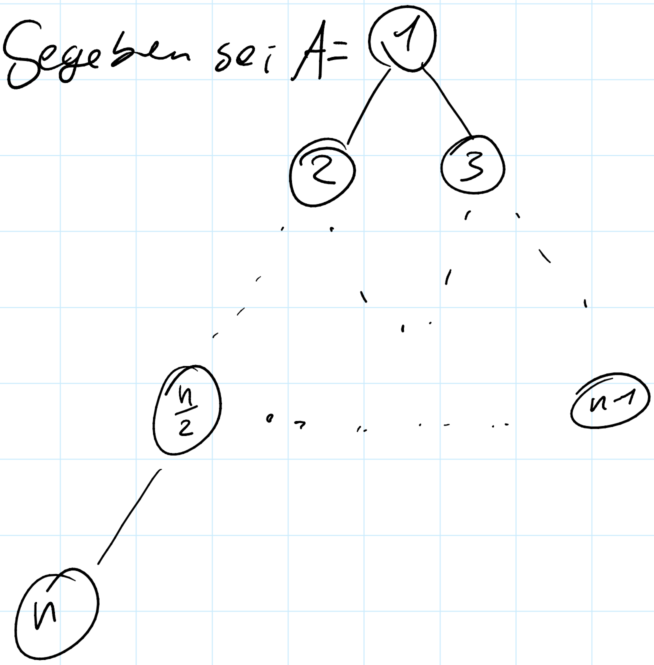
a) Die Höhe (der Wurzel) beträgt $\lfloor \log(n) \rfloor$.

b) Es gibt höchstens $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ Knoten mit der Höhe h.

c) Die worst-case Laufzeit von HeapifyDown ist $\Omega(\log(n))$. Konstruieren Sie dazu einen Min-Heap A mit n Knoten und zeigen Sie, dass HeapifyDown (bei Aufruf von DeleteMin(A)) entsprechend häufig die Schleife durchlaufen muss.

Hinweis: Die Höhe eines Knoten u ist wie folgt definiert: Sei $T(u)$ der Teilbaum mit Wurzel u. Die Höhe von u ist die Länge eines längsten Pfades von u zu einem Blatt von $T(u)$. Dabei ist die Länge eines Pfades über die Anzahl von Kanten im Pfad definiert. Ein Blattknoten hat somit die Höhe 0.

Gegeben sei $A =$



Jedes Element hat Links sein kleinstes Kindelement,

Beim Aufruf von DeleteMin(A) nimmt m in Heapifydown die Werte: $2, 4, 8, \ldots, 2^i$ an. Immer ist $n > m$

damit terminiert Heapifydown erst mit Left(m) $\leq (n-1)$. bzw. i-Anfang

Damit endet DeleteMin(A) mit $m = \frac{n}{2}$.

Nach n: $\underbrace{2, 4, 8, \ldots, 2^4, \ldots, \frac{n}{2}}_{\log(n)-1}$ Elemente

Damit gibt es $\Omega(\log(n)-1) = \Omega(\log(n))$
Schleifendurchläufe mit konstanter Laufzeit.

Im worst hat HeapifyDown demnach $\Omega(\log(n))$
Laufzeit.