Wir beweisen, dass $\mathcal{P}(\{0,1\}^*)$ überabzählbar ist.

Wir wissen aus der Vorlesung: Es existiert eine Bijektion $\phi : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$.

Damit müssen wir nur Zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Wir demonstrieren eine Bijektion $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$.

$$\psi(M) = n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und
$$\psi^{-1}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(\mathbb{N}) = 1\}$$

ψ ist offensichtlich eine Bijektion.

Nun müssen wir nur noch Zeigen, dass $(\mathbb{N} \to \{0,1\})$ überabzählbar ist.

Angenommen wir haben also eine beliebig Funktion $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$.

Nun definieren wir $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ durch $g(n) = \overline{f(n)(n)}$.

Wobei $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$.

Nun ist $g(n) \neq (f(n))(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit ist $g \notin \textbf{Image}(f)$. Damit ist f nicht surjektiv. Damit existiert keine Funktion $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$, die surjektiv ist.

Und damit auch kein $(\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ f) : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$, die surjektiv ist.

$\square$

Wir definieren die Reduktionsfunktion $f : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1,\#\}^*$:

$$f(w) = \begin{cases} \langle x \rangle \# \langle x \rangle \# \langle y \rangle & \text{wenn } w = \langle x \rangle \# \langle y \rangle \\ \epsilon \text{ (leeres Wort)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Z.z. (i) f ist berechenbar.

(ii) $w \in L_2 \iff f(w) \in L_1$

Zu (i) f ist trivialerweise berechbar, da hierbei w im Fall w hat die Form $\langle x \rangle \# \langle y \rangle$ für $x, y \in \mathbb{N}$ nur die Eingabe um ein $\langle x \rangle \#$ erweitert wurde.

Dies kann Beispielsweise durch eine Turingmaschine umgesetzt werden, welche sich $\langle x \rangle$ merkt, danach vom Band löscht. Daraufhin eine Kopie des Bandinhalts hinter diesen setzt und anschließend wieder $\langle x \rangle$ auf das Band schreibt.

für w hat nicht die Form $\langle x \rangle \# \langle y \rangle$ wird einfach der Bandinhalt gelöscht.

zu (ii): $(w \in L_2 \iff f(w) \in L_1)$

Fall 1: Z.z. $(w \in L_2 \rightarrow f(w) \in L_1)$

Sei $w \in L_2$ beliebig, aber fest.

Nun:

$$\begin{aligned} w &= \langle x \rangle \# \langle y \rangle && \text{und } 2x = y \text{ mit } x, y \in \mathbb{N} \\ \implies f(x) &= \langle x \rangle \# \langle x \rangle \# \langle y \rangle \\ \implies f(w) &\in L_1 && \text{da } x + x = 2x = y \text{ nach Annahme.} \end{aligned}$$

Fall 2: $(w \notin L_2 \rightarrow f(w) \notin L_1)$

Sei $w \notin L_2$ beliebig, aber fest.

w ist nicht von der Form $\langle x \rangle \# \langle y \rangle$ oder $w = \langle x \rangle \# \langle y \rangle$, aber $2x \neq y$. (mit $x, y \in \mathbb{N}$)
Oder: $w = \langle x \rangle \# \langle y \rangle$, aber $2x \neq y$. (mit $x, y \in \mathbb{N}$)

Falls w nicht von der Form $\langle x \rangle \# \langle y \rangle$ ist, wird dieses auf das leere Wort abgebildet. Das leere Wort ist nicht in L_1. Daher ist $f(w) \notin L_1$. Der Fall der Unform ist damit abgedeckt.

Nun:

$$\begin{aligned} &\text{Falls } w = \langle x \rangle \# \langle y \rangle, \text{ aber } 2x \neq y \ \text{ mit } x, y \in \mathbb{N} \\ \implies &f(w) = \langle x \rangle \# \langle x \rangle \# \langle y \rangle \text{ und } f(w) \notin L_1 \ \text{ da } x + x = 2x \neq y \text{ nach Annahme.} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass $w \in L_2 \iff f(w) \in L_1$. Damit ist $L_2 \leq L_1$.

$\square$

Sei A das Akzeptanzproblem.

Z.z $A \leq L$.

Sei $\langle M \rangle^{(x)}$ eine DTM mit folgendem Verhalten bei Eingabe $w = \langle M \rangle x$

1. Merke x
2. Lösche x vom Band
3. Schreibe q_{accept} und danach x auf das Band

Sei $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1,\}^*$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M \rangle^{(x)} & \text{wenn } x = \langle M \rangle x \text{ mit } x \in \{0,1\}^* \\ \langle M_{reject} \rangle x & \text{sonst} \end{cases}$$

Z.z. (i) f ist berechenbar.

(ii) $w \in L_2 \iff f(w) \in L_1$

Zu (i): Die Fallunterscheidung in der Abbildungsforschrift ist berechbar, da die Sprache Gödel entscheidbar ist.

Folglich ist nur noch zu Zeigen, dass $\langle M \rangle^{(x)}$ berechbar ist. 1 und 2 sind trivialerweise berechbar.

3. ist auch berechbar, Aufgrund der Eindeutigen Darstellung der Gödelnummer. Wegen dieser und der Konvention, dass q_{accept} in unserer Vorlesung der vorletzte Zustand ist, kann dieser eindeutig ausgelesen werden.

zu (ii): Z.z. ($w \in L_2 \iff f(w) \in L_1$)

Fall 1: ($w \in A \rightarrow f(w) \in L$)

Sei $w \in A$ beliebig, aber fest. d.h. $w = \langle M \rangle x$ mit die DTM M akzeptiert x

$\implies M$ erreicht den Zustand q_accept, da das Akzeptanz ist.

$\implies f(w) \in L$

Fall 2: ($w \notin A \rightarrow f(w) \notin L$)

Sei $w \notin A$ beliebig.

Also ist (Fall a) w nicht der Form $w = \langle M \rangle x$ oder (Fall b) $w = \langle M \rangle x$, aber M akzeptiert x nicht

Zu (a) Folglich bildet $f(w)$ auf eine Turingmaschine ab, welche alle Eingaben ablehnt

$\implies$ der Zustand q_{accept} kann niemals erreicht werden

$\implies$ $f(w) \notin L$

Zu (b) Also sei $w = \langle M \rangle x$, aber M akzeptiert x nicht

$\implies$ f bildet w auf $\langle M \rangle^{(x)}$ ab, aber der Zustand q_{accept} wird nie erreicht, da sonst $w \in A$ sein müsste.

$\implies$ f(w) $\notin$ L

$\implies$ $A \leq L$

$\square$

b) Behauptung L_2 ist nicht rekursiv aufzählbar, da $\overline{H} \leq L_2$ Beweis:

Wir definieren die Reduktionsfunktion $f : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1,\#\}^*$:

$$f(w) = \begin{cases} \langle M^{(Nice)} \rangle & \text{wenn w} \neq \langle M \rangle x \\ \langle M^{(x)} \rangle & \text{wenn w} = \langle M \rangle x \end{cases}$$

Mit $\langle M^{(x)} \rangle$ sei die Turingmaschine aus Satz 2.10.1.
und $\langle M^{(Nice)} \rangle$ sei die Turingmaschiene die nur die Eingabe 1000101 akzeptiert und bei allen anderen Eingaben in eine Endlosschleife geht.

Folglich ist $f(w)$ nach diesem Satz 2.10.1 auch berechbar und es gilt:
M hält bei Eingabe x nicht $\iff$ $M^{(x)}$ hält bei jeder Eingabe z $\{0,1\}^*$. (1)

Z.z. ($w \in \overline{H} \iff f(w) \in L_2$)

Richtung $\implies$: Angenommen $w \in \overline{H}$.

Das heißt, $w = \langle M \rangle x$ mit M hält bei Eingabe x nicht.

Das heißt, dass $\langle M \rangle x$ für alle Schrittweiten n, nicht hält.

Damit akzeptiert $\langle M^{(x)} \rangle$ bei jeder Eingabe.

Damit ist $f(w) = \langle M^{(x)} \rangle \in L_2$.

Richtung $\Leftarrow$: Angenommen $w \notin \overline{H}$.

Also ist entweder w von falscher Form oder M hält bei Eingabe x.

Ist w von falscher Form, dann ist $f(w) = \langle M^{(Nice)} \rangle \notin L_2$, da $\langle M^{(Nice)} \rangle$ nur die Eingabe 1000101 akzeptiert.

Ist $w = \langle M \rangle x$ und M hält bei Eingabe x, dann:

Es existiert ein n mit M hält bei Eingabe x nach n Schritten.

Und für alle $n' > n$ gilt: M hält bei Eingabe x nach n' Schritten.

Damit wird $\langle M^{(x)} \rangle$ bei jeder Eingabe $n' > n$ in eine Endlosschleife gehen und maximal n Eingaben akzeptieren.

Damit ist $f(w) = \langle M^{(x)} \rangle \notin L_2$.