Abstract

This is partial notes for linal 2021-10-14.

Lineare Gleichungssysteme I

Beispiel

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

^

Bemerkung Bei jedem Schritt hat sich die Lösungsmenge des Systems nicht geändert

Allgemein

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{*}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Ziel eine kompaktere Darstellung von $(*)$

Die Tabelle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$.

m ist die Anzahl von Zeilen und n die Anzahl von Spalten.

a_{ij} ist das Element von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

$Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ist ein m-Tupel (Spaltenvektor).

Rechenregeln für Matrizen und Vektoren

Addition von Vektoren

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_m + d_m \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

$$a \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac_1 \\ ac_2 \\ \vdots \\ ac_m \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer $m \times n$-Matrix mit einem n-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Höhe ist n.

i-te Stelle.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2-5 \\ -6+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beobachtung Das System $(*)$ hat die folgende Darstellung:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{für} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Notation $\text{Lös}(A, \vec{b}) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{b} \right\}$ ist die Lösungsmenge von $(*)$

Lemma Sei $A \in \text{Mat}_{m\times n}\mathbb{R}$.

(1) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gil: $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

(2) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $A \cdot (a\vec{z}) = a \cdot A\vec{z}$

Beweis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + a_{m2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix}$$

Gaußsches Verfahren

Beobachtung

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + & a_{i2} + & x_2 + & \ldots + & a_{in}x_n = & b_i \\ a_{j1}x_1 + & a_{j2} + & x_2 + & \ldots + & a_{jn}x_n = & b_j \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu a_{i1}x_1 + & \mu a_{i2}x_2 + & \dots + \mu a_{in}x_n = & \mu b_i \\ a_{j1}x_1 + & a_{j2}x_2 + & \dots + a_{jn}x_n = & b_j \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} a_{i1}x_1 + & a_{i2}x_2 + & \ldots + & a_{in}x_n = b_i \\ (a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + & (a_{j2} + \lambda a_{i2})x_2 + & \ldots + & (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i \end{cases}$$

Definition Seien $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt

$$(A|\vec{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in Mat_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

Satz Es gilt: $Ls(A, \vec{b}) = Ls(A', \vec{b'})$, wobei $(A'|\vec{b'})$ durch eine Kette folgender Transformationen von Zeilen von $(A|\vec{b})$ entsteht.

$$(a_{i1} \dots a_{in}|b_i) \rightsquigarrow (\mu a_{i1}\, \mu a_{i2} \dots \mu a_{in}|\mu b_i)$$