Datenstrukturen und Algorithmen
Heimübung 5

Eli Kogan-Wang (7251030)
David Noah Stamm (7249709)
Daniel Heins (7213874)
Tim Wolf (7269381)

16. Mai 2022

Aufgabe 1

a) Es gilt: $n = 4^k$
Nach Rekursionsgleichung:
$a = b = 3$ ($\implies n^{\log_b a} = n^{\log_3 3} = n$)
und $f(n) = \frac{n}{4} = 4^{k-1}$
n $\neq 3^k$
$\implies$ allgemeines Mastertheorem muss angewendet werden.

Untersuchung der Laufzeit der Rekursionsgleichgung durch das allgemeine Mastertheorem:

Liegt $f(n) \in \Theta(n)$?

$f(n) \in \Theta(n)$
$\iff \exists c_1, c_2, n_0 > 0$ so dass $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot n \leq f(n) \leq c_2 \cdot n$
Dies ist für $c_1 = \frac{1}{8}, c_2 = 1$ und $n_0 = 42069$ erfüllt.
$\implies$ Nach dem Mastertheorem hat T(n) $\in \mathcal{O}(n \cdot log(n))$

b) Es gilt : $n = 2^k$
Nach Rekursionsgleichung:
$a = 8$ $b = 2$ ($\implies n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$)
und $f(n) = n^4 \cdot \log(n)$
Da $n = 2k = b^k$, aber f(n) nicht konstant ist, kann das "vereinfachte" Mastertheorem nicht angewendet werden.
Untersuchung der Laufzeit der Rekursionsgleichung durch das allgemeine Mastertheorem:
Offentsichtlicherweise gilt $f(n) \notin \Theta(n^3)$
Liegt $f(n) \in \mathcal{O}(n^{3-\epsilon})$?

Offensichtlicherweise gilt $f(n) \notin \mathcal{O}(n^3)$
$\implies f(n) \notin \mathcal{O}(n^{3-\epsilon})$
Liegt $f(n) \in \Omega(n^{3+\epsilon})$?

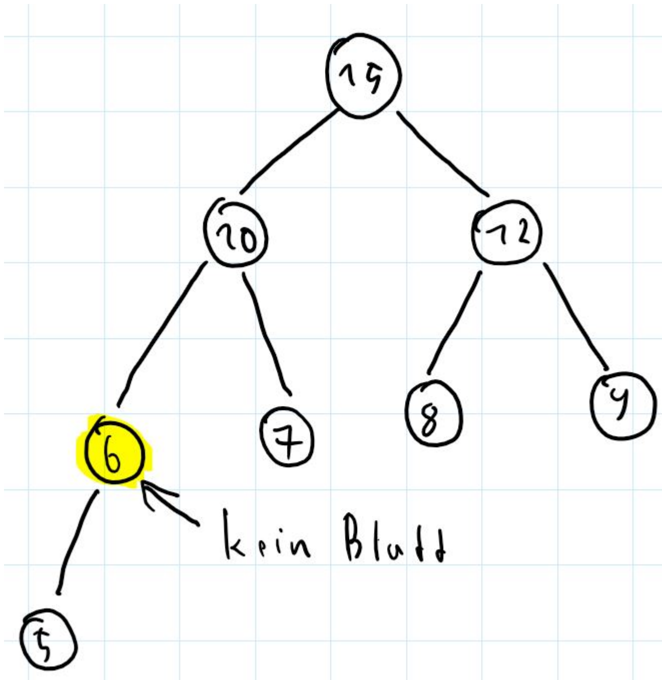
$f(n) \in \Omega(n^{3+\epsilon})$
$\iff \exists c, n_0 > 0$, so dass $\forall n \geq n_0 : n^4 \cdot \log(n) \geq c \cdot n^{3+\varepsilon}$
Dies ist für $c = 1$ und $\epsilon = 1$ erfüllt
Nun ist noch zu überprüfen, ob $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

$a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) = 8 \cdot f(\frac{n}{2}) \leq c \cdot f(n)$
$= 8 \cdot (\frac{n}{2})^4 \cdot \log(\frac{n}{2}) \leq c \cdot n^4 \cdot \log(n)$
$= 2^3 \cdot \frac{n^4}{2^4} \cdot \log(\frac{n}{2}) \leq c \cdot n^4 \cdot \log(n)$
$= \frac{n^4}{2} \cdot (\log(n) - \log(2)) \leq c \cdot n^4 \cdot \log(n)$
Diese Ungleichung ist z.B. für $c = \frac{2}{3}$ erfüllt.
$\implies$ Nachdem Mastertheorem gilt: $f(n) \in \Theta(n^4 \cdot \log(n)$, da $\exists c < 1$

Aufgabe 2

a) Beweis durch Wiederspruch: o.B.d.A das kleinste Element kommt nicht doppelt im Heap vor. Angenommen das kleinste Element := w wäre kein Blatt. $\overset{Form-Invariante}{\implies}$ w hat kinder $\overset{Heap-Invariante}{\implies}$ die Kinder haben einen kleineren Wert als w: $\lightning$
w ist kleinstes Element des Heaps. $\square$

b) Gegenbeispiel



Aufgabe 3

Es wird ein n-elementiger Min-Heap betrachtet:

a) Z.Z.: Die Höhe (der Wurzel) beträgt $\lfloor \log(n) \rfloor$
Beweis:
Fallunterscheidung:
Fall 1: Sei $\log(n) \in \mathbb{N}$.
$\overset{Form-Invariante}{\Longrightarrow}$ Min heap ist ein vollständiger Binärbaum. Da dieser auf jeder Ebene mit der maximalen Anzahl an Knoten bestückt ist.
$\Longrightarrow$ In jeder Ebene wird die Anzahl der Knoten verdoppelt. Dies ist maximal $\log(n)$ mal möglich.
$\Longrightarrow$ $\forall$ Blattknoten $\exists!$ Phad der Länge $\log(n)$ zur Wurzel des Baumes.
$\Longrightarrow$ Die Höhe des Baumes ist $\log(n)$

Fall 2:Sei $\log(n) \notin \mathbb{N}$.
$\overset{Form-Invariante}{\Longrightarrow}$ Min heap ist ein vollständiger Binärbaum, bis auf die unterste Ebene.
$\Longrightarrow$ In jeder Ebene wird die Anzahl der Wurzeln verdoppelt. Dies ist maximal

$\log(n-1)$ mal möglich. Die übrigen Konten sind Blätter in der untersten Ebene.
$\implies \forall$ Blattknoten in der untersten $\exists!$ Phad der Länge $\lfloor \log(n) \rfloor$ zur Wurzel des Baumes.
$\implies$ Die Höhe ist Baumes ist $\lfloor \log(n) \rfloor$

$\implies$ Aussage $\square$

b) Z.Z. Es gibt höchstens $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ Knoten mit der höhe h

Beweis durch vollständige Induktion über die Höhe des Baumes:
Sei k_h := Die maximal Anzahl der Knoten auf Höhe h
IA: h = 0: Der Baum besteht aus einem Blatt $\iff$ n = 1
$\implies k_0 = 1 = \lceil \frac{1}{2^{0+1}} \rceil$
IV: Es gelte für ein beliebiges, aber festes i: h = i $k_i = \lceil \frac{n}{2^{i+1}} \rceil$
IS: Z.Z. Für h = i+1 gilt: $k_{i+1} = \lceil \frac{n}{2^{(i+1)+1}} \rceil = \lceil \frac{n}{2^{i+2}} \rceil$
Form-Invariante: Der Baum ist ein vollständiger Binärbaum bis auf die untersten Ebene
$\iff k_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot k_i \overset{I.V.}{=} \frac{1}{2} \cdot (\lceil \frac{n}{2^{i+1}} \rceil) = \lceil \frac{n}{2^{(i+2)}} \rceil$
(Die oberen Gausklammern sind hier notwendig, da der Baum auf der untersten Ebene nicht umbedingt vollständig ist.
Nach dem Induktionsprinzip gilt für h = i: $k_i = \lceil \frac{n}{2^{i+1}} \rceil \ \forall i \in \mathbb{N}$ $\square$

c) Z.Z Die worst-case Laufzeit von Heapify ist $\Omega(\log(n))$
Beweis:

2022-05-13 Übung

Freitag, 13. Mai 2022 18:00

AUFGABE 3 (7 Punkte):

Zeigen Sie folgende Eigenschaften eines n-elementigen Min-Heaps:

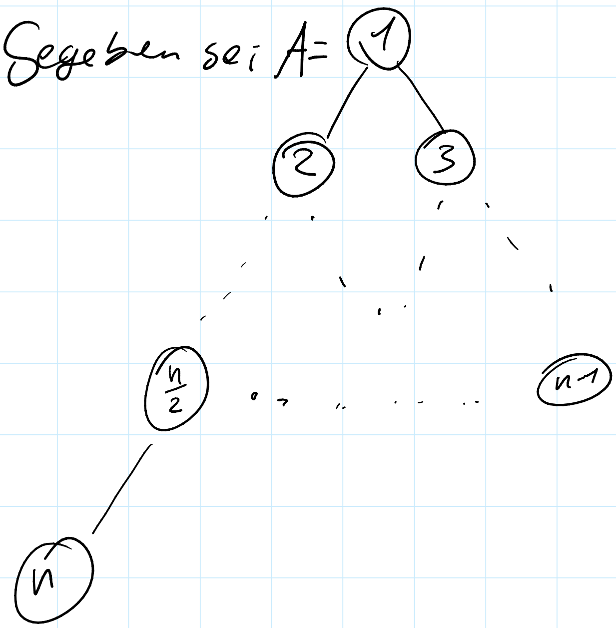
a) Die Höhe (der Wurzel) beträgt $\lfloor \log(n) \rfloor$.

b) Es gibt höchstens $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ Knoten mit der Höhe h.

c) Die worst-case Laufzeit von HeapifyDown ist $\Omega(\log(n))$. Konstruieren Sie dazu einen Min-Heap A mit n Knoten und zeigen Sie, dass HeapifyDown (bei Aufruf von DeleteMin(A)) entsprechend häufig die Schleife durchlaufen muss.

Hinweis: Die Höhe *eines Knoten u ist wie folgt definiert: Sei $T(u)$ der Teilbaum mit Wurzel u. Die Höhe von u ist die Länge eines längsten Pfades von u zu einem Blatt von $T(u)$. Dabei ist die Länge eines Pfades über die Anzahl von Kanten im Pfad definiert. Ein Blattknoten hat somit die Höhe 0.*

Gegeben sei A=



Jedes Element hat Links sein kleinstes Kindelement,

Beim Aufruf von DeleteMin(A) nimt m in Heapifydown

die Werte: $2, 4, 8, \ldots, 2^k$ an. Immer ist $n > m$

bzw. i-Anfang

damit terminiert Heapifydown erst mit Left(m) $\leq (n-1)$.

Damit endet DeleteMin(A) mit $m = \frac{n}{2}$.

Nach a: $\underbrace{2, 4, 8, \ldots, 2^4, \ldots, \frac{n}{2}}_{\log(n) - 1}$ Elemente

Damit gibt es $\Omega(\log(n) - 1) = \Omega(\log(n))$

Schleifendurchläufe mit konstanter Laufzeit.

Im worst hat HeapifyDown demnach $\Omega(\log(n))$

Laufzeit.