Datenstrukturen und Algorithmen
Heimübung 9

Eli Kogan-Wang (7251030)
David Noah Stamm (7249709)
Daniel Heins (7213874)
Tim Wolf (7269381)

10. Juni 2022

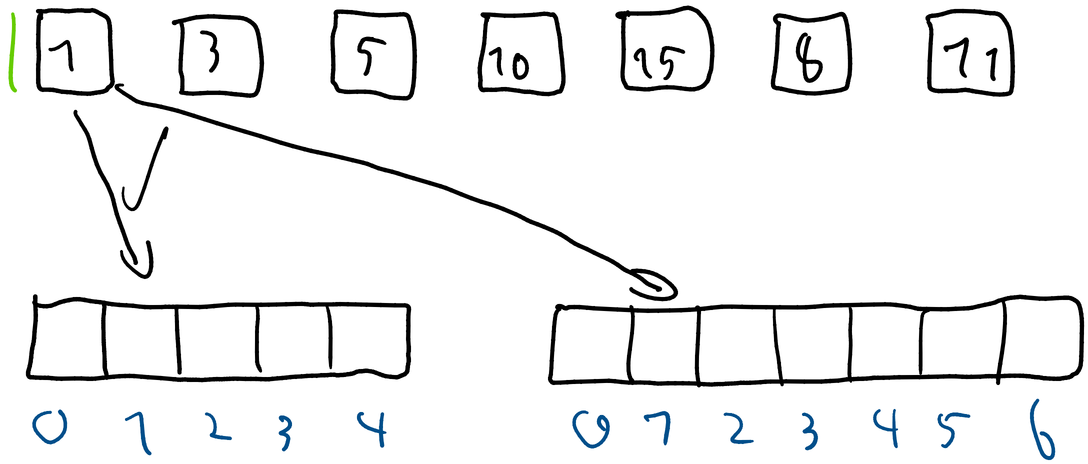
Aufgabe 1

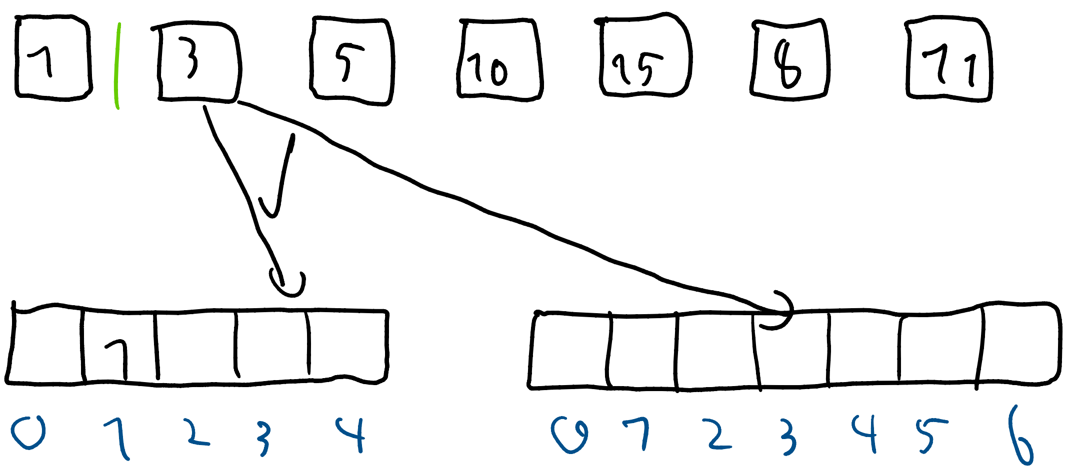
a)

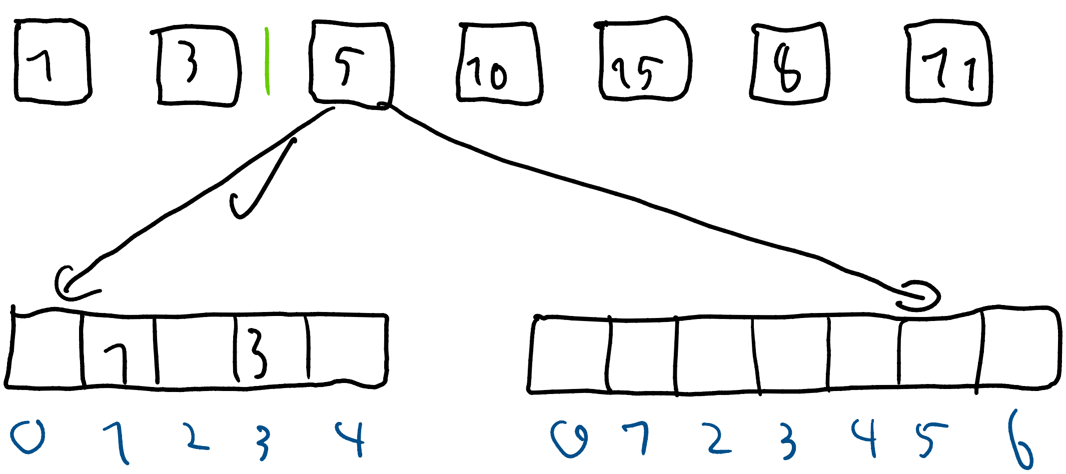
H9 A1

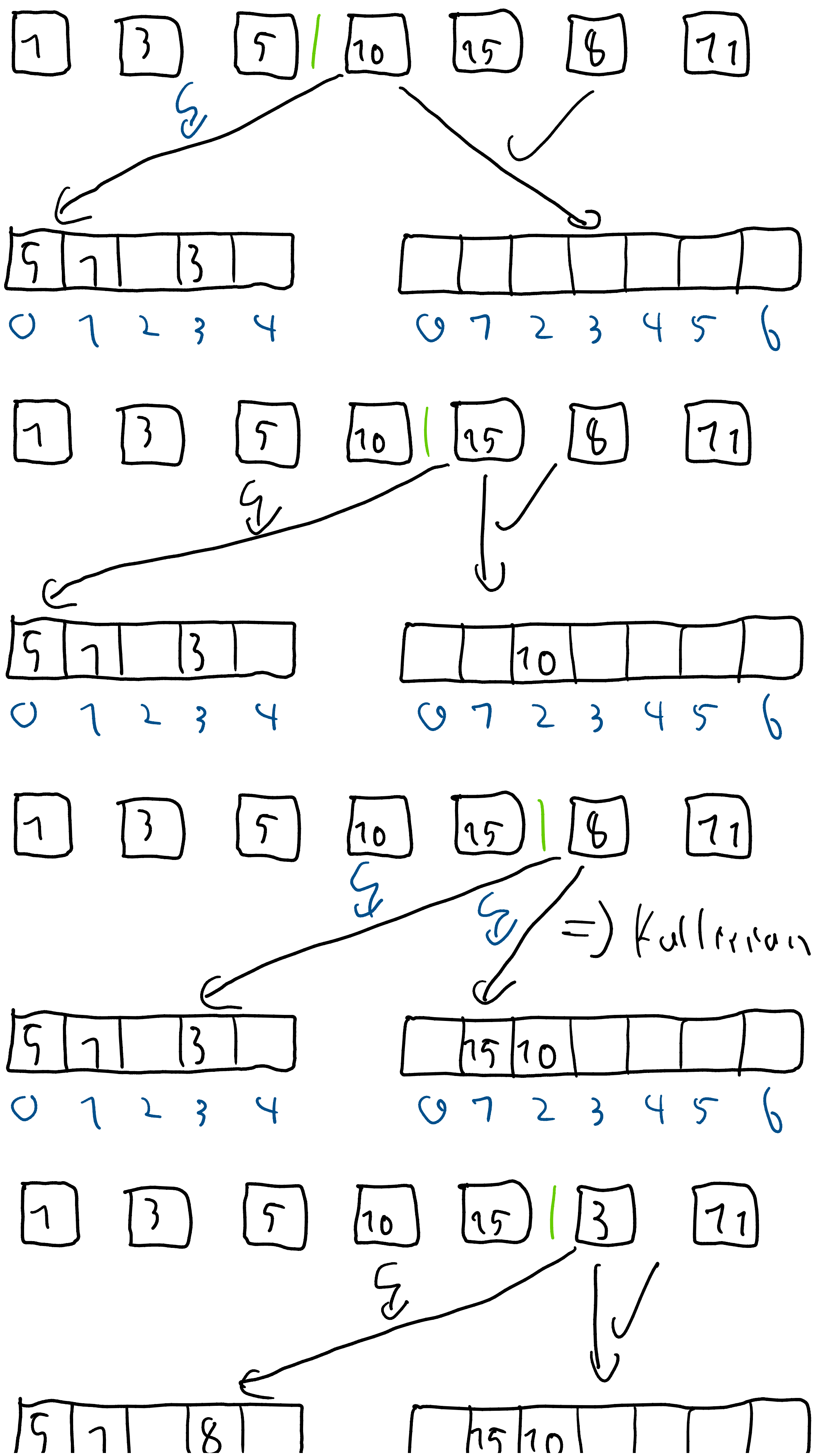
Freitag, 10. Juni 2022 19:01

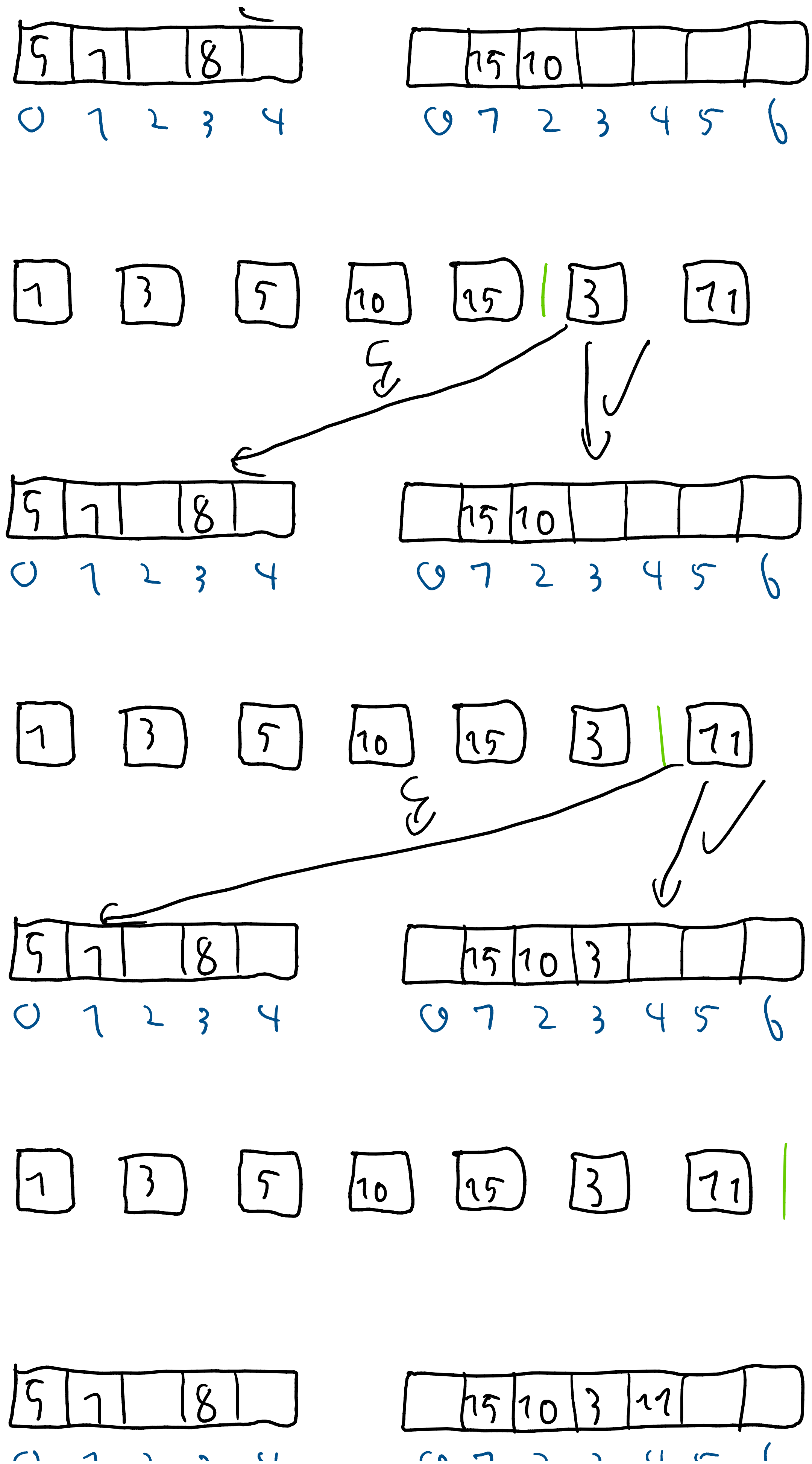
Aktueller Fortschritt








=) Kollision


5 1 8
0 1 2 3 4
15 10
0 1 2 3 4 5 6
1 3 5 10 15 3 11
5 1 8
0 1 2 3 4
15 10
0 1 2 3 4 5 6
1 3 5 10 15 3 11
5 1 8
0 1 2 3 4
15 10 3
0 1 2 3 4 5 6
1 3 5 10 15 3 11
5 1 8
15 10 3 11

0	1	2	3	4
4	7		8	

0	1	2	3	4	5	6
	15	10	3	11		

b) Sei $h(x,i) = h'(x) + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} i^2 \mod 11$

$$h'(x) = x \mod 11$$

$13 \mod 11 = 2$
$30 \mod 11 = 8$
$7 \mod 11 = 7$
$5 \mod 11 = 5$
$39 \mod 11 = 6$
$17 \mod 11 = 6$
$34 \mod 11 = 1$
$23 \mod 11 = 1$
$35 \mod 11 = 2$

0	–	
1	34	$\downarrow h(23,0)$
2	13	$\downarrow h(23,1)$ $\downarrow h(35,0)$
3	35	$\leftarrow h(35,1)$
4	23	$\leftarrow h(23,2)$
5	5	
6	39	$\downarrow h(17,0)$
7	7	$\downarrow h(17,1)$
8	30	
9	17	$\leftarrow h(17,2)$
10	–	

Aufgabe 2

Bekannt sind Hashtablellen mit der Backing-Struktur “Liste”.
Wir ersetzen die Backing-Struktur mit einem AVL-Baum.

Algorithm 1 INSERT(T, x)

Insert-AVL(T[h(key[x])], x)

Algorithm 2 DELETE(T, x)

Delete-AVL(T[h(key[x])], x)

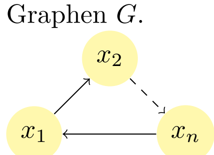
Algorithm 3 SEARCH(T, x)

Search-AVL(T[h(key[x])], x)

Die Korrektheit ist durch die funktional identische Semantik zu Hashtablellen mit Backing-Liste gegeben.
Durch Ersetzung der Backing-Struktur der “Liste” mit einem AVL-Baum ersetzen wir die zuvor bekannten Operationen mit Worst-Case Laufzeiten $O(n)$ durch $O(logn)$.

Aufgabe 3

a) Beweis durch vollständige Induktion über die Kreislänge:= n:
Wir verwenden die Kreisnotation $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für einen Kreis über einen Graphen G.



I.A.: $n = 1$: trivial
$n = 2$:
Wir betrachten die Möglichen Kreise $K_1 = (x_1, x_2)$ $K_2 = (x_1, x_1)$.
K_1 ist ein einfacher Kreis.
K_2 ist ein komplexer Kreis.
K_2 kann in die einfachen Kreise (x_1) und (x_1) aufgeteilt werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$.
I.V.: Jeder komplexe Kreis mit bis zu $n - 1$ Knoten kann in einfache Kreise aufgeteilt werden.
I.S.: Sei $K_n = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{j-1}, x_j \cdots, x_n)$ ein komplexer Kreis.
Existieren kein $1 \leq i \neq j \leq n$: $x_i = x_j$ so ist der Kreis einfach.

Also existieren $1 \leq i \leq n$: $x_i = x_j$.
Nun sind $K_a = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_j, \cdots, x_n)$ und $K_b = (x_i, x_j, \cdots, x_{j-1})$ Kreise.
Sind K_a und K_b einfach, so sind wir fertig. Sind sie komplex, so können wir sie nach **I.V.** in einfache Kreise $K_a = K_{a_1} + K_{a_2} + \cdots + K_{a_k}$, $K_b = K_{b_1} + K_{b_2} + \cdots + K_{b_l}$ aufteilen.
Nun sind ist $K_{a_1}, K_{a_2}, \cdots, K_{a_k}, K_{b_1}, K_{b_2}, \cdots, K_{b_l}$ eine Aufteilung von K_n in einfache Kreise.

□

b) "$\implies$":
Sei G ein Graph mit einem Eulerkreis $E = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.
Sei x ein Knoten in G und $i \in \{i_1, \cdots, i_k\}$ die k-Vorkommnisse von x im Eulerkreis sind.
Da nun (x_{i-1}, x_i) eine Eingangskante von x ist, die maximal 1-mal für ein i vorkommt, ist $indeg(x) = k$.
Da nun (x_i, x_{i+1}) eine Ausgangskante von x ist, die maximal 1-mal für ein i vorkommt, ist $outdeg(x) = k$.
Damit $indeg(x) = outdeg(x)$.

"$\impliedby$":
Über Induktion über die Kantenanzahl n.
I.A.: $n = 1$: trivial, da $indeg \neq outdeg$ nicht vorkommt.

Sei $n \in \mathbb{N}$.
I.V.: Jeder Graph mit $indeg(v) = outdeg(v)$ und maximal $n - 1$ Kanten hat einen Eulerkreis.
I.S.: Sei $G = (E, V)$ ein Graph mit $indeg(v) = outdeg(v)$ und n Kanten.
Bekannt ist, dass ein Kreis K in G existiert.
Der Kreis K geht über die Kantenmenge $E(K)$.
Der Induzierte Teilgraph von $E \backslash E(K)$: G_{ind} hat immernoch $indeg(v) = outdeg(v)$, da K im induzierte Teilgraph von $E(K)$ ein Eulerkreis ist.
Nach **I.V.** hat G_{ind} einen Eulerkreis, wir nennen ihn K_{ind}.
Wir betrachten einen Knoten $v \in V(K)$.
Wir stellen K_{ind} als $K_{\text{ind}} = (v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_k)$ dar, wobei $v = v_i$.
Wir stellen K als $K = (x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_l)$ dar, wobei $v_i = v = x = x_j$.
Nun ist $(v, v_{i+1}, \cdots, v_k, v_1, \cdots, v_{i-1}, v, x_{j+1}, \cdots, x_l, x_1, \cdots, x_{j-1})$ ein Eulerkreis in G.