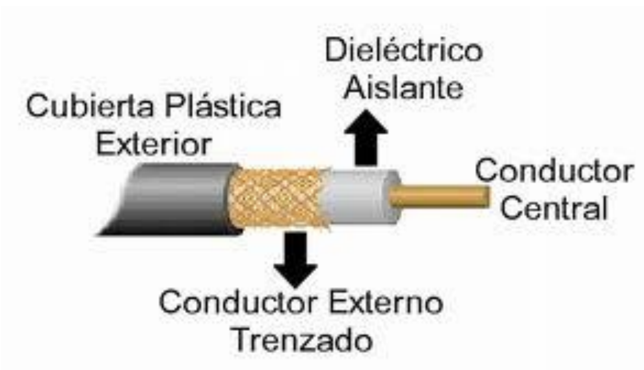
Las ecuaciones del telégrafo como aplicación de las líneas de transmisión: Modelo computacional.

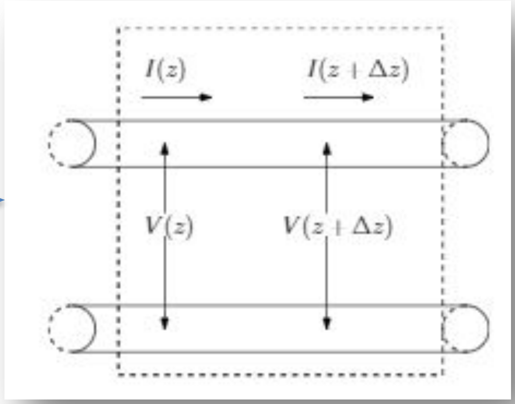
Elizabeth Jiménez Gómez
Juan José León Gil.

Universidad de Antioquia.

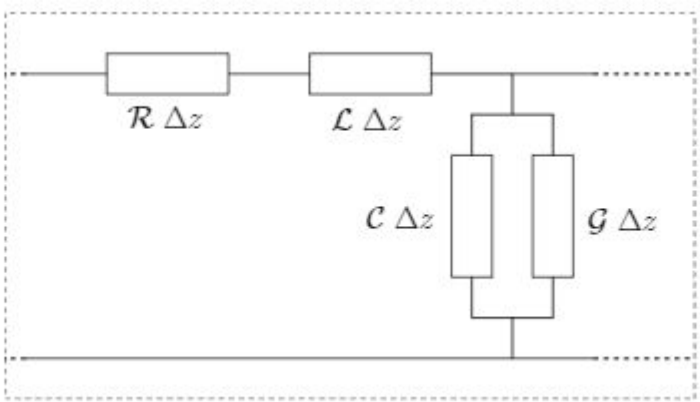
28-05-2020.

Líneas de transmisión.





Líneas de transmisión.



Leyes de Kirchhoff

Voltaje

$$V(t,z+\Delta z)-V(t,z)=-\mathcal{L}\,\Delta z\frac{\partial I(t,z)}{\partial t}-\mathcal{R}\,\Delta z\,I(t,z)$$

$$\frac{V(t,z+\Delta z)-V(t,z)}{\Delta z}=-\mathcal{L}\frac{\partial I(t,z)}{\partial t}-\mathcal{R}\,I(t,z)$$

Corriente

$$I(t,z+\Delta z)-I(t,z)=-C\,\Delta z\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}-\mathcal{G}\,\Delta z\,V(t,z)$$

$$\frac{I(t,z+\Delta z)-I(t,z)}{\Delta z}=-C\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}-\mathcal{G}\,V(t,z)$$

En el límite cuando $\Delta z \to 0$

Líneas de transmisión.

Voltaje

$$\mathcal{L}\,\frac{\partial I(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,z)}{\partial z} + \mathcal{R}\, I(t,z) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z}$$

Corriente

$$C\,\frac{\partial V(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial I(t,z)}{\partial z} + \mathcal{G}\, V(t,z) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

Ecuaciones del telégrafo.

$$\boxed{\begin{aligned} &[-\mathcal{L}C\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\mathcal{R}C + \mathcal{G}\mathcal{L})\,\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{G}\mathcal{R}\,]\, V(t,z) = 0 \\ &[-\mathcal{L}C\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\mathcal{R}C + \mathcal{G}\mathcal{L})\,\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{G}\mathcal{R}\,]\, I(t,z) = 0 \end{aligned}}$$

Consideraciones previas.

Adimensionalizamos las ecuaciones:

$$t \to T = \left(\frac{\mathcal{GR}}{\mathcal{LC}}\right)^{1/2} t$$

$$z \to Z = (\mathcal{GR})^{1/2}\, z$$

$$k = \left(\frac{\mathcal{CR}}{\mathcal{GL}}\right)^{1/2} + \left(\frac{\mathcal{GL}}{\mathcal{CR}}\right)^{1/2}$$

$$\longrightarrow$$

$$T_c = \left(\frac{\mathcal{LC}}{\mathcal{GR}}\right)^{1/2}$$

$$L_c = \left(\frac{1}{\mathcal{GR}}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\left[-\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - k\frac{\partial}{\partial T} - 1\right] f(T,Z) = 0}$$

$$T \in [T_0, T_F]\,, \qquad Z \in [Z_0, Z_F]$$

$$f(T_0,Z) = \tilde{a}(Z), \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(T_0,Z) = \tilde{b}(Z)$$
$$f(T,Z_0) = \tilde{c}(T)\,, \qquad f(T,Z_F) = \tilde{d}(T)$$

Método de diferencias finitas.

$$T_i = T_0 + ih_T\,, \quad Z_j = Z_0 + jh_Z\,, \quad h_T = \frac{T_F - T_0}{N_T}\,, \qquad h_Z = \frac{Z_F - Z_0}{N_Z}$$

$$f(T_i, Z_j) \to W(T_i, Z_j) \equiv W_{i,j}$$

Diferencias centradas

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} f(T_i, Z_j) \approx \frac{1}{h_T^2}\left[f(T_{i-1}, Z_j) - 2f(T_i, Z_j) + f(T_{i+1}, Z_j)\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} f(T_i, Z_j) \approx \frac{1}{h_Z^2}\left[f(T_i, Z_{j-1}) - 2f(T_i, Z_j) + f(T_i, Z_{j+1})\right]$$

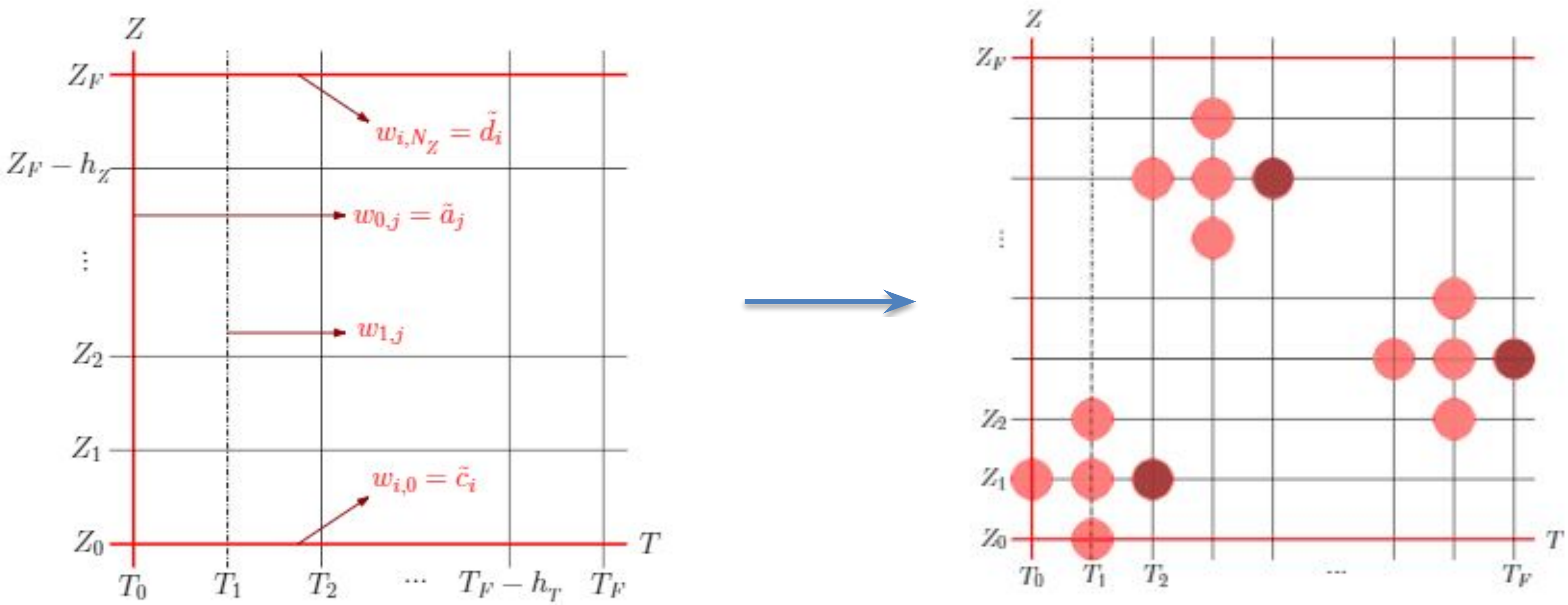
$$\frac{\partial}{\partial T} f(T_i, Z_j) \approx \frac{1}{2h_T}\left[f(T_{i+1}, Z_j) - f(T_{i-1}, Z_j)\right]$$

$$f(T_0 + h_T, Z) \approx f(T_0, Z) + h_T \frac{\partial}{\partial T} f(T_0, Z) + \frac{1}{2} h_T^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} f(T_0, Z)$$

Método de diferencias finitas.

$$w_{i,j-1} + \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 \left(\frac{1}{2}kh_T - 1\right) w_{i-1,j} + 2\left[\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}h_T^2\right] w_{i,j} - \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 \left(\frac{1}{2}kh_T + 1\right) w_{i+1,j} + w_{i,j+1} = 0$$

$$w_{1,j} = \left[1 - \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - \frac{1}{2}h_T^2\right] \tilde{a}_j + \left[h_T - \frac{1}{2}h_T^2\right] \tilde{b}_j + \frac{1}{2}\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 \left[\tilde{a}_{j-1} + \tilde{a}_{j+1}\right]$$



- Método de solución.

Método de diferencias finitas.

Redefiniciones

$$\lambda = \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 \left(\frac{1}{2}kh_T + 1\right)^{-1}, \qquad \mu = 1 - \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - \frac{1}{2}k{h_T}^2$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}kh_T - 1}{\frac{1}{2}kh_T + 1}, \qquad \nu = h_T - \frac{1}{2}k{h_T}^2$$

$$\beta = \frac{2 - 2\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - {h_T}^2}{\frac{1}{2}kh_T + 1}, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2$$

$$w_{i+1,j} = \alpha\, w_{i-1,j} + \beta\, w_{i,j} + \lambda\left(w_{i,j-1} + w_{i,j+1}\right), \qquad i = 1, \dots, N_T - 1, \qquad j = 1, \dots, N_Z - 1$$

$$w_{1,j} = \mu\, \tilde{a}_j + \nu \tilde{b}_j + \sigma\left(\tilde{a}_{j-1} + \tilde{a}_{j+1}\right), \qquad j = 1, \dots, N_Z - 1$$

Estabilidad

Después de la implementación del método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, nos dimos cuenta de la inestabilidad intrínseca del método. En el libro guia hacen notar este hecho y también nos remiten a otro texto donde implementan otro método que puede mejorar la estabilidad. Para mayor información revisar Article.pdf en la sección resultados donde aparecen las referencias específicas y el apéndice para un esbozo del método propuesto.