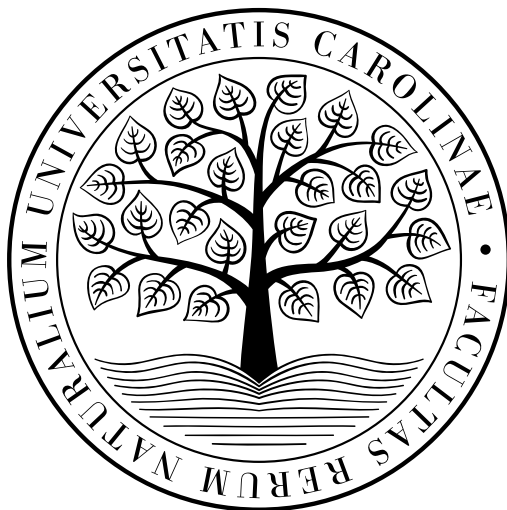


Přírodovědecká fakulta  
Univerzita Karlova



# Konstrukce polyedrických globů

Matematická kartografie

Eliška Králová, Eliška Pospěchová

1.N-GKDPZ

Praha 2025

# 1 Zadání

## Úloha č. 2: Konstrukce polyedrických globů

Vybraná platonská tělesa (šestistěn, čtyřstěn a osmistěn nebo dvanáctistěn) použijte pro polyedrickou aproximaci sféry. Na plošky platonských těles znázorníte v gnomonické projekci

$$x = R \cdot \tan(90^\circ - \bar{s}) \cos d,$$

$$y = R \cdot \tan(90^\circ - \bar{s}) \sin d,$$

geografickou sítí doplněnou zákresem kontinentů. Skript pro generování sítě poledníků, rovnoběžek a znázorněných kontinentů realizujte v programu MATLAB bez použití externích funkcí. Soubory se zákresem kontinentů exportujte z vhodné datové sady.

Vytvořte prostorové modely polyedrických globů v měřítku 1:100 000 000 nebo 1:50 000 000 dle možnosti Vaší tiskárny a pošlete fotografii/video Vašeho glóbu. Součástí úlohy bude příloha s rozloženými modely globů.

Zjistěte následující vlastnosti gnomonické projekce v okrajovém bodě  $Q$  jedné ze stěn Platonského tělesa:

- měřítko  $m_p$  v poledníku, měřítko  $m_r$  v rovnoběžce,
- poloosy  $a$ ,  $b$  Tissotovy indikatrix,
- úhel  $\omega'$  mezi obrazem poledníku a rovnoběžky,
- maximální úhlové zkreslení  $\Delta\omega$ ,
- měřítko ploch  $P$ , meridiánovou konvergenci  $c$ .

Vypočtené parametry v bodě  $Q$  použijte k zákresu Tissotovy indikatrix (doporučené měřítko 1:1 000 000), jako podklad využijte obraz geografické sítě na příslušné stěně Platonského tělesa v gnomonické projekci, volte  $\Delta u = \Delta v = 10^\circ$  (formát A4, popř. odpovídající).

Výpočty proveďte pro referenční kouli s poloměrem  $R = 6380$  km, hodnoty měřítek a poloos Tissotovy indikatrix uveďte s přesností na 6 desetinných míst, úhlové hodnoty s přesností na  $''$ . Výsledky zkontrolujte s hodnotami získanými z programu Proj.4.

## 2 Popis a rozbor problému

Základním předpokladem při konstrukci polyedrických globů na platonských tělesech, v našem případě dvanáctistěnu je, že rovina definovaná hranou tělesa a střed sféry jemu opsané/vepsané řeže tuto sféru v hlavní kružnici, tj. ortodromě. Ortodroma se v gnómonické projekci zobrazuje jako polopřímka, hranice plošek tedy budou představovat úsečky. Sféru lze tedy v gnómonické projekci zobrazit na platonská tělesa bez překryvů a spár.

Postup vytvoření polyedrického globu se skládá z několika kroků. Nejprve se určí zeměpisné souřadnice vrcholů zvoleného platonského tělesa, které zároveň tvoří vrcholy pravidelných  $n$ -úhelníků (plošek). Do těžiště každé plošky, jehož zeměpisné souřadnice je třeba určit, je umístěn kartografický pól.

V rámci každé plošky se následně vytvoří síť poledníků a rovnoběžek, která je vztažena ke kartografickému pólu. Dále je načten soubor s navzorkovanými body reprezentujícími kontinenty. Body na sféře, které spadají do příslušné plošky platonského tělesa, se transformují vzhledem k jejímu středu (tedy ke kartografickému pólu) a následně se zobrazí pomocí gnómonické projekce.

Výsledný obraz se ořízne podle hranic plošky, definovaných spojnici jejích vrcholů. Tento postup se opakuje pro všechny plošky daného platonského tělesa.

### 2.1 Gnómonická projekce

Gnómonická projekce patří mezi azimutální zobrazení. Je založena na promítání ze středu sféry na tečnou rovinu ke kartografickému pólu. Zobrazovací rovnice v obecné poloze v polárním tvaru lze zapsat jako:

$$(\rho, \varepsilon) = (r \tan(90^\circ - s), d) \quad (1)$$

kde  $s$  a  $d$  jsou zeměpisné souřadnice a  $r$  je poloměr sféry. V pravoúhlém tvaru lze vyjádřit zobrazovací rovnice jako:

$$(x, y) = (r \tan(90^\circ - s) \cos d, r \tan(90^\circ - s) \sin d) \quad (2)$$

V gnómonické projekci jsou poledníky znázorněny jako polopřímky vycházející z pólu, zatímco rovnoběžky se zobrazují jako soustředné kružnice. Tato projekce však umožňuje zobrazit pouze jednu polokouli a není schopna zobrazit oblast rovníku.

### 2.2 Pravidelný dvanáctistěn

Plošky pravidelného dvanáctistěnu jsou tvořeny pravidelnými pětiúhelníky. Strany pětiúhelníku spolu svírají  $108^\circ$ . Poloměr kružnice opsané pětiúhelníku lze určit jako:

$$r_s = \frac{a}{10} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \quad (3)$$

Poloměr kružnice vepsané pětiúhelníku lze určit jako:

$$\rho_s = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \quad (4)$$

Úhel mezi ploškami dvanáctistěnu je  $\beta = 180^\circ - \alpha$  kde  $\alpha = 116,5651^\circ$ . Sféra vepsaná se dotýká plošek dvanáctistěnu v těžišti, pro jejich zeměpisnou šířku platí:

$$u_\alpha = 90^\circ - \beta = \alpha - 90^\circ \approx 26,5651^\circ \quad (5)$$

Těžiště odpovídají kartografickým pólům  $K_n$ . Kartografické póly na severní polokouli  $K_{1-5}$  tedy mají souřadnice:

$$K_1 = [u_\alpha, 0^\circ], K_2 = [u_\alpha, 72^\circ], K_3 = [u_\alpha, 144^\circ], K_4 = [u_\alpha, 216^\circ], K_5 = [u_\alpha, 288^\circ] \quad (6)$$

Díky středové souměrnosti mají kartografické póly na jižní polokouli  $K_{6-10}$  zeměpisnou šířku  $-u_\alpha$ , jejich souřadnice lze zapsat jako:

$$K_6 = [-u_\alpha, 36^\circ], K_7 = [-u_\alpha, 108^\circ], K_8 = [-u_\alpha, 180^\circ], K_9 = [-u_\alpha, 252^\circ], K_{10} = [-u_\alpha, 324^\circ] \quad (7)$$

Zbývající dva kartografické póly odpovídají zeměpisným pólům, tedy:

$$K_{11} = [90^\circ, 0^\circ], K_{12} = [-90^\circ, 0^\circ] \quad (8)$$

Poloměr sféry dvanáctistěnu lze určit jako:

$$\rho = \frac{a}{20} \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} \quad (9)$$

Doplňek  $u_\gamma$  úhlu  $\gamma$  a doplňek  $u_\delta$  úhlu  $\delta$  určují zeměpisnou šířku jednotlivých vrcholů dvanáctistěnu:

$$u_\gamma = 90^\circ - \gamma \approx 52,6226^\circ \quad (10)$$

$$u_\delta = 90^\circ - \gamma - \delta = 10,8120^\circ \quad (11)$$

Vrcholy na severní polokouli tedy mají souřadnice:

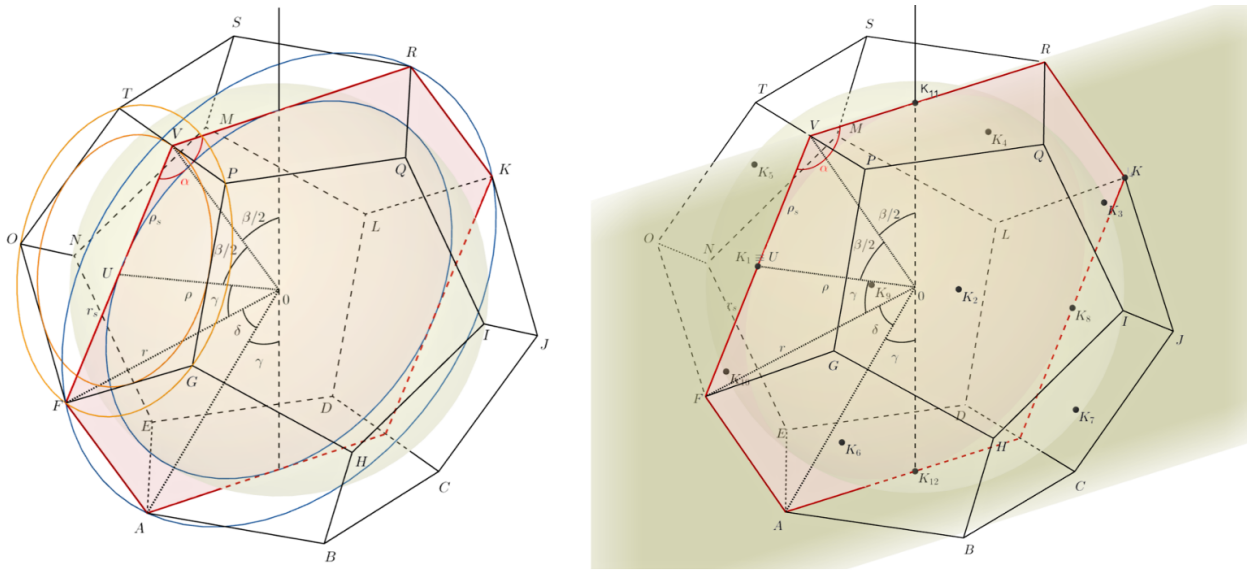
$$P = [u_\gamma, 36^\circ], Q = [u_\gamma, 108^\circ], R = [u_\gamma, 180^\circ], S = [u_\gamma, 252^\circ], T = [u_\gamma, 324^\circ] \quad (12)$$

$$G = [u_\delta, 36^\circ], I = [u_\delta, 108^\circ], K = [u_\delta, 180^\circ], M = [u_\delta, 252^\circ], O = [u_\delta, 324^\circ] \quad (13)$$

Pro jižní polokouli mají vrcholy zeměpisnou šířku s opačným znaménkem:

$$A = [-u_\gamma, 0^\circ], B = [-u_\gamma, 72^\circ], C = [-u_\gamma, 144^\circ], D = [-u_\gamma, 216^\circ], E = [-u_\gamma, 288^\circ] \quad (14)$$

$$F = [-u_\delta, 0^\circ], H = [-u_\delta, 72^\circ], J = [-u_\delta, 144^\circ], L = [-u_\delta, 216^\circ], N = [-u_\delta, 288^\circ] \quad (15)$$



Obrázek 1: Řez dvanáctistěnem v rovině základního poledníku (zdroj: Bayer, 2025)

### 3 Výpočty a mezivýpočty

V rámci této úlohy bylo zjištění vlastností gnómonické projekce v některé okrajovém bodě jedné ze stěn Platonského tělesa.

#### 3.1 Měřítko $m_p$ v poledníku a měřítko $m_r$ v rovnoběžce

Pro samotný výpočet měřítek bylo nutné nejdříve vypočítat parciální derivace zobrazovacích rovnic gnómonické projekce:

$$fu = \frac{\delta x}{\delta u} = -\frac{R}{\cos^2(90^\circ - u)} \cos d = -\frac{R}{\sin^2 u} \cos d \quad (16)$$

$$fv = \frac{\delta x}{\delta v} = -R \tan(90^\circ - u) \sin v \quad (17)$$

$$gu = \frac{\delta y}{\delta u} = -\frac{R}{\cos^2(90^\circ - u)} \sin d = -\frac{R}{\sin^2 u} \sin d \quad (18)$$

$$gv = \frac{\delta y}{\delta v} = R \tan(90^\circ - u) \cos v \quad (19)$$

Poté lze již vypočítat samotná délková měřítka:

$$m_p^2 = \frac{fu^2 + gu^2}{R^2} = \frac{1}{\sin^4 u} \quad (20)$$

$$m_r^2 = \frac{fv^2 + gv^2}{R^2 \cos^2 u} = \frac{1}{\sin^2 u} \quad (21)$$

#### 3.2 Poloosy $a$ , $b$ Tissotovy indikatrix

Poloosa  $a$  vyjadřuje maximální délkové zkreslení a poloosa  $b$  naopak nejmenší délkové zkreslení:

$$a = m_p^2 \cos^2 A_1 + m_r^2 \sin^2 A_1 + p \sin A_1 \cos A_1 \quad (22)$$

$$b = m_p^2 \cos^2 A_2 + m_r^2 \sin^2 A_2 + p \sin A_2 \cos A_2, \quad (23)$$

kde  $A_1$ ,  $A_2$  jsou azimuty hlavních paprsků a proměnná  $p$ :

$$A_1 = \arctan \frac{p}{m_p^2 - m_r^2} \quad (24)$$

$$A_2 = A_1 + \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

$$p = 2 \cdot (fu \, fv + gu \, gv) \quad (26)$$

Jelikož se jedná o gnómonickou projekci, která patří mezi jednoduchá zobrazení, délky poloos se rovnají délkovým měřítkům ( $m_p = b$ ,  $m_r = a$ ).

### 3.3 Zkreslení úhlu mezi poledníkem a rovnoběžkou

Pro výpočet úhlu  $\omega'$  mezi obrazem poledníku a rovnoběžky slouží tento vzorec:

$$\tan \omega' = \frac{gu \, fv - gv \, fu}{fu \, fv + gu \, gv} \quad (27)$$

### 3.4 Maximální úhlové zkreslení $\Delta\omega$

Vzorec pro výpočet maximálního úhlového zkreslení vypadá následovně:

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|b - a|}{b + a} = \frac{|m_p - m_r|}{m_p + m_r} \quad (28)$$

### 3.5 Měřítko ploch $P$

Měřítko ploch lze vyjádřit následujícím vzorcem i za pomoci znalosti vzorce pro jednoduchá zobrazení:

$$P = \frac{gu \, fv - fu \, gv}{r^2 \cos u} = m_p \, m_r = \frac{1}{\sin^3 u} \quad (29)$$

### 3.6 Meridiánová konvergence $c$

Meridiánová konvergence udává úhel, který svírá obraz místního poledníku v daném bodě s obrazem základního poledníku. Jinak řečeno udává rozdíl mezi skutečným severem a zdánlivým severem. Její výpočet je následující:

$$c = |\sigma_p - \sigma_0| = \left| \sigma_p - \frac{\pi}{2} \right|, \quad (30)$$

kde  $\sigma_p$  je směrnice obrazu poledníku:

$$\tan \sigma_p = \frac{gu}{fu} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v \Rightarrow \sigma_p = v \quad (31)$$

## 4 Skripty v programech

Všechny skripty pro tvorbu polyedrického glóbu společně se všemi výpočty byly napsány v SW MATLAB.

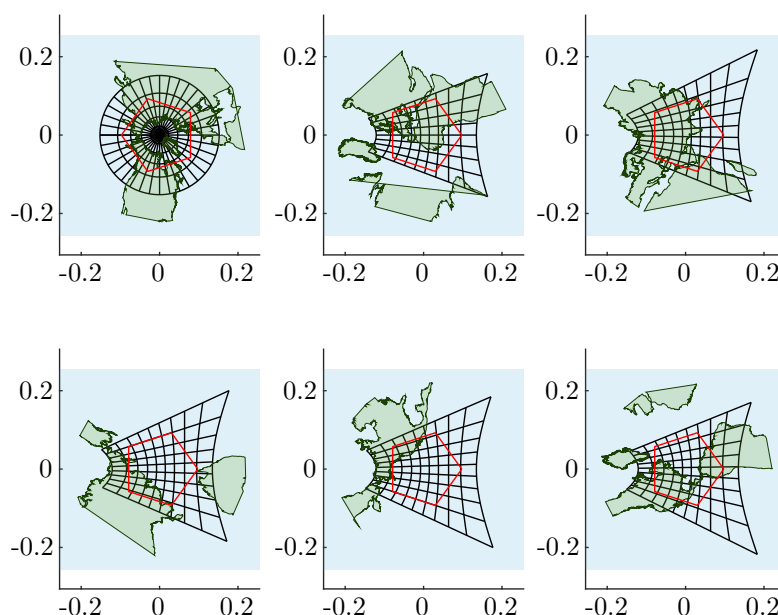
- **boundary** - skript pro vykreslení ořezových hranic plošek
- **continent** - skript pro nahrání kontinentů z textových souborů
- **globeFace** - skript s definovanými parametry pro vykreslení jedné plošky glóbu
- **gnom\_distortions** - skript pro výpočet vlastností gnómonické projekce v daném bodě a pro vykreslení Tissotovy indikatrix
- **gnom** - skript pro gnómonickou projekci s použitím vzorců (2) v kapitole 2
- **graticule** - skript pro vykreslení geografické sítě
- **u2\_n** - skript pro vykreslení plošek severní polokoule
- **u2\_s** - skript pro vykreslení plošek jižní polokoule
- **uv\_sd** - skript pro transformaci souřadnic bodu do obecné polohy vzhledem ke kartografickému pólu



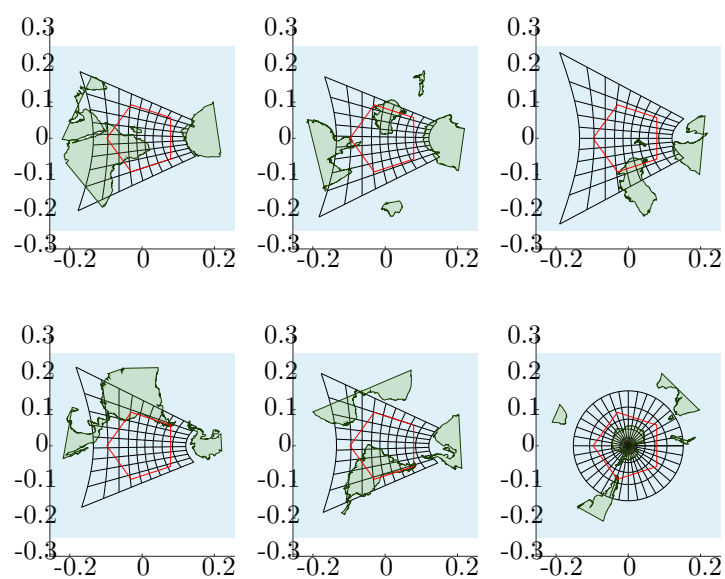
## 5 Konstrukce polyedrického glóbu

Prvním krokem pro tvorbu jednotlivých plošek bylo definování společných parametrů, jako jsou rozestupy geografické sítě, poloměr glóbu a měřítkové číslo. Poté byly pro každou plošku určeny souřadnice kartografických pólů podle zmíněných předpisů (6), (7) a (8) v kapitole 2. V téže kapitole jsou uvedeny též vrcholy jednotlivých plošek (12), (13), (14) a (15). Jako poslední krok před samotným vykreslením plošek polyedrického glóbu bylo kromě rozestupů geografické sítě nutné definovat také její rozsah – tedy minimální a maximální hodnoty zeměpisné šířky a délky. Ty byly voleny tak, aby měly přesah přes krajní body (vrcholy) plošek.

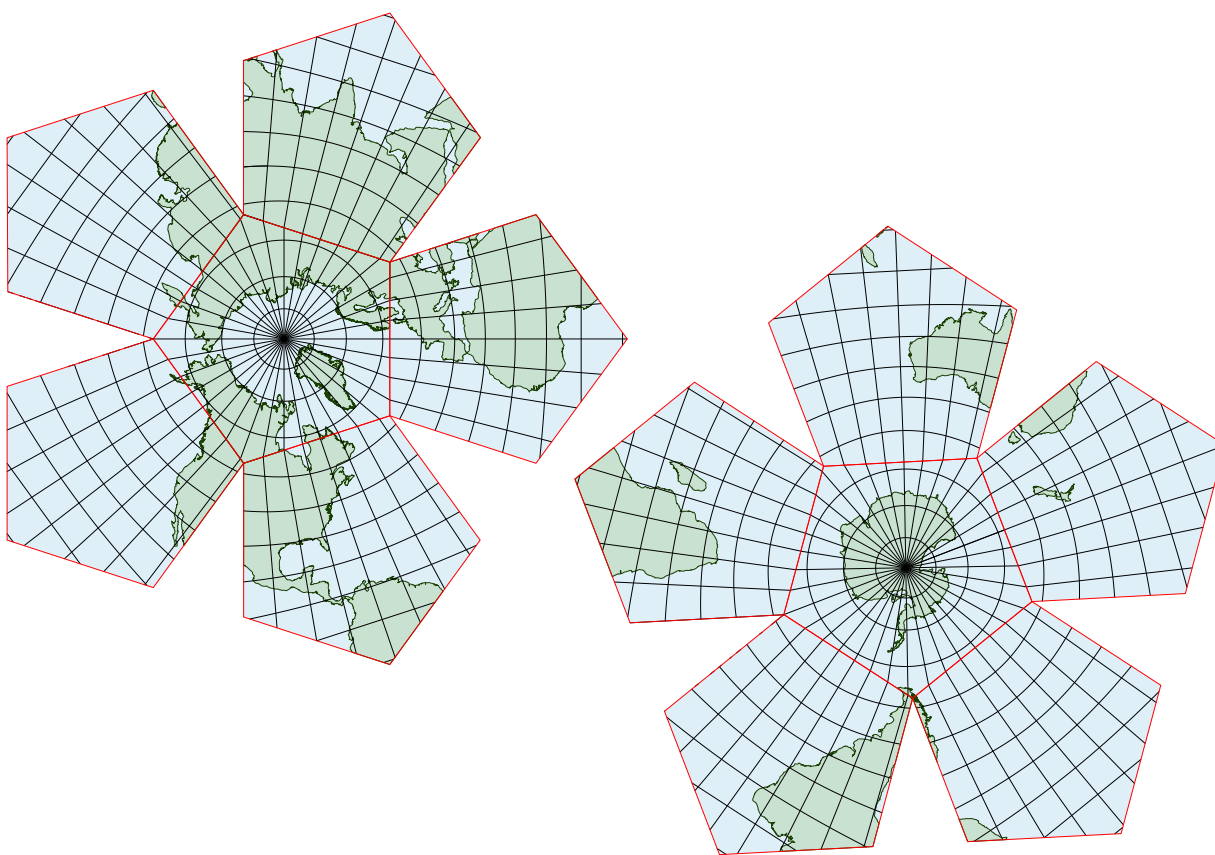
Po vykreslení severní a jižní polokoule (*Obrázek 2* a *Obrázek 3*) pomocí skriptů uvedených v kapitole 4, bylo nutné oříznout jednotlivé plošky podle ořezových linií. Výstupní grafy byly tedy uloženy ve vektorovém formátu \*.svg a poté otevřeny v SW Inkscape. Pro snazší oříznutí a následné složení plošek byly soubory \*.svg uloženy do vektorového formátu \*.dxf, který lze bez problému otevřít v SW ArcGIS Pro. Zde poté byly jednotlivé plošky oříznuty a sestaveny k sobě pro vyexportování ve formátu \*.pdf (*Obrázek 4*).



*Obrázek 2: Severní polokoule dvanáctistěnou ze SW MATLAB*



Obrázek 3: Jižní polokoule dvanáctistěnu ze SW MATLAB



Obrázek 4: Výsledný model rozloženého dvanáctistěnu

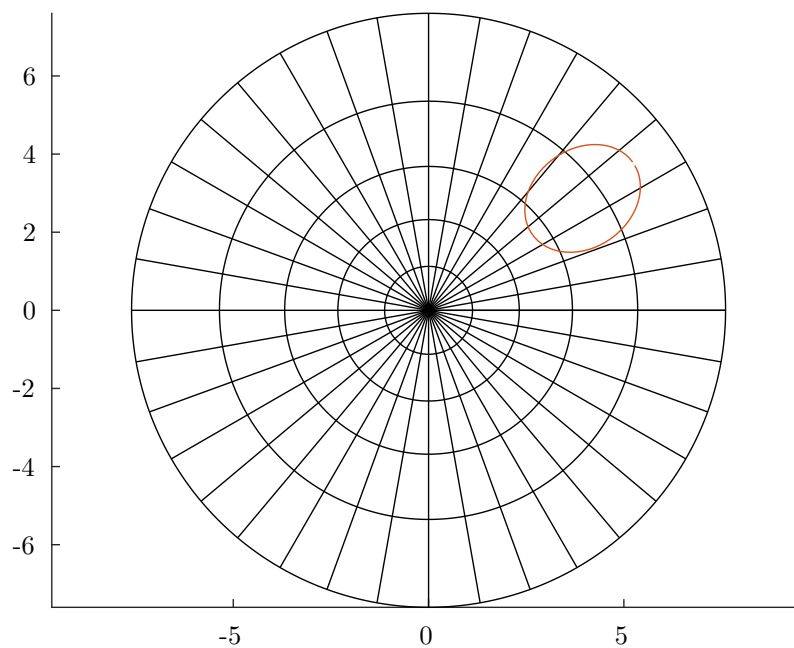
## 6 Výsledky

Pro výpočet vlastností gnómonické projekce byl zvolen bod  $P = [52,6226^\circ; 36^\circ]$  umístěný na jižní polokouli na základním poledníku. Vypočítané parametry pro daný bod jsou uvedeny v následující tabulce (*Tabulka 1*).

Vlastnosti gnómonické projekce	Hodnota (MATLAB)	Hodnota (pyproj)
Měřítko $m_p$ v poledníku	1,583593	1,581638
Měřítko $m_r$ v rovnoběžce	1,258409	1,260527
Poloosa $a$ Tissotovy indikatrix	1,583593	1,581638
Poloosa $b$ Tissotovy indikatrix	1,258409	1,260527
Úhel $\omega'$ mezi obrazem poledníku a rovnoběžky	$90^\circ$	$89,999999^\circ$
Maximální úhlové zkreslení $\Delta\omega$	$13^\circ 8' 25''$	$12^\circ 58' 28''$
Měřítko ploch $P$	1,992808	1,993698
Meridiánová konvergence $c$	$54^\circ$	$36^\circ$

*Tabulka 1: Vlastnosti gnómonické projekce v bodě  $P$*

Výsledné vykreslení Tissotovy indikatrix v bodě  $P$  je zobrazeno na dalším obrázku (*Obrázek 5*).



*Obrázek 5: Tissotova indikatrix v bodě  $P$*

## 7 Zhodnocení výsledků a závěr

Při porovnání hodnot vlastností gnómonické projekce v SW MATLAB a pomocí knihovny pyproj, znázorněné v tabulce (*Tabulka 1*), jsou patrné obdobné hodnoty. Největší rozdíl nastal u meridiánové konvergence  $c$ , která vyšla o  $18^\circ$  jinak. Rozdíly ostatních hodnot jsou maximálně v řádech desetin.

V rámci této úlohy byl vytvořen polyedrický glóbus (dvanáctistěn) za použití gnómonické projekce. Při tvorbě byly do jednotlivých stěn polyedrického glóbu zakresleny geografické sítě a kontinenty. Zároveň byly zjištěny vlastnosti projekce ve zvoleném bodě na okraji jedné z plošek tělesa. Zde byla též následně zkonstruována Tissotova indikatrix. Ze zjištěných parametrů vyplývá, že v poledníkovém směru je větší délkové zkreslení než ve směru rovnoběžek. Toto tvrzení bylo potvrzeno i pomocí knihovny pyproj.

Výsledné plošky byly ze SW MATLAB vytištěny a slepeny v jeden glóbus.

## Zdroje

BAYER, T. (2025): Kartografická zkreslení. Délkové zkreslení, plošné zkreslení, podmínky konformity. Tissotova indikatrix. Přednáška pro předmět Matematická kartografie, Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK [cit. 10.4.2025].

BAYER, T. (2025): Konstrukce globů na platonských tělesech - návod na cvičení. Výukový materiál pro předmět Matematická kartografie, Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK [cit. 7.4.2025].

ESRI (2025): World continents. <https://hub.arcgis.com/datasets/esri::world-continents/about> [cit. 7.4.2025].