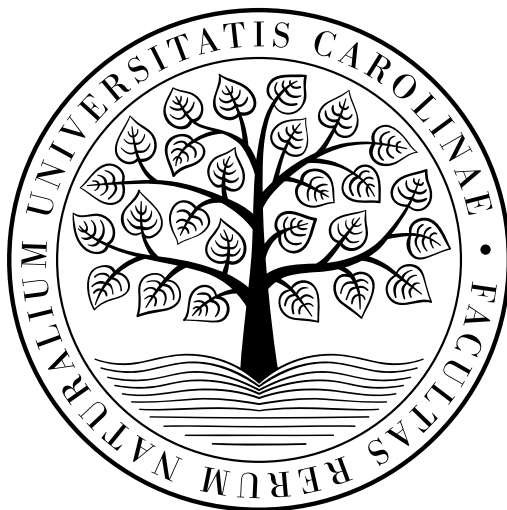


Přírodovědecká fakulta

Univerzita Karlova



# Hodnocení kartografických zobrazení s využitím variačních kritérií

Matematická kartografie

Eliška Králová, Eliška Pospěchová

1.N-GKDPZ

Praha 2025

# 1 Zadání

## Úloha č. 4: Hodnocení kartografických zobrazení s využitím variačních kritérií

Na základě globálních variačních kritérií proveďte zhodnocení níže uvedených zobrazení a rozhodněte o jejich vhodnosti (či nevhodnosti) pro mapy velkých územních celků.

Přehled *lokálních variačních kritérií* v bodě  $P = [u, v]$ :

- Airyho kritérium:

$$h^2(u, v) = \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2}{2},$$

- komplexní kritérium:

$$h^2(u, v) = \frac{|a-1| + |b-1|}{2} + \frac{a}{b} - 1.$$

Pro kartografická zobrazení volená v normální poloze spočítejte hodnoty lokálních kritérií  $h^2(u, v)$  v uzlových bodech geografické sítě pokrývajících zadané území a jeho nejbližší okolí s kroky  $\Delta u = \Delta v = 10^\circ$  (resp. s polovičním krokem, je-li třeba), území by mělo být pokryto alespoň 30 uzlovými body. Při výpočtu využijte osové symetrie geografické sítě dle rovníku či základního poledníku. Z hodnot lokálních kritérií  $h^2(u, v)$  v uzlových bodech určete pro každé kartografické zobrazení hodnoty globálních kritérií.

*Globální variační kritérium  $H^2$*

$$H^2 = \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} h^2 \cos u \, du \, dv,$$

nahraďte diskrétní vztahy, uvažujte neváženou i váženou variantu

$$H_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^2(u_i, v_i), \quad H_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i h^2(u_i, v_i)}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

kde váha  $p_i = \cos u_i$ . Přehled analyzovaných kartografických zobrazení:

- Bonneovo,
- Mercator-Sansonovo,
- Eckertovo V.,
- Winkel-Tripel,
- Hammer-Aitoffovo.

V uzlových bodech geografické sítě vypočtete měřítkové číslo  $M(u, v)$  mapy jako funkci polohy

$$M(u, v) = \frac{M}{\max_{\forall A} m(u, v, A)} = \frac{M}{a(u, v)},$$

vygenerujte také jeho izočáry. Výchozí hodnotu měřítkového čísla volte pro formát A4, pro mapu planisféry např.  $M = 100000000$ . Výpočty proved'te na jednotkové kouli, zeměpisnou šířku  $u_0$  nezkreslené rovnoběžky volte tak, aby procházela (stejně jako základní poledník) středem zobrazovaného území.

V přehledných tabulkách uveďte hodnoty globálních kritérií (vážená i nevážená varianta) a rozhodněte, které z kartografických zobrazení je nejvhodnější pro znázornění zvoleného územního celku. V závěru také zhodnoťte, jaké varianční kritérium dle Vašeho názoru lépe vystihuje vlastnosti kartografického zobrazení.

Výpočty proved'te s využitím programu Proj4 či skriptu v programu MATLAB.

## 2 Popis a rozbor problému

Hodnocení kartografických zobrazení spočívá především ve zohlednění zkreslení zobrazovaného území délkového, plošného i úhlového. U větších územních celků, kde je nezbytné tyto vlastnosti zobrazení zkoumat nejen v krajních částech mapy, ale v celém mapovém poli, se uplatňují složitější variační kritéria. Tato kritéria umožňují komplexně posoudit, nakolik je dané kartografické zobrazení vhodné či nevhodné pro konkrétní oblast.

Základem těchto kritérií je kvantitativní charakteristika, kterou představují poloosy  $a$  a  $b$  Tissotovy elipsy. Tyto poloosy v jednotlivých bodech vyjadřují extrémní délkové zkreslení.

Pro znázornění rozsáhlejších geografických celků se nejčastěji využívají nepravá zobrazení. Mezi nimi nalezneme i řadu kompenzačních zobrazení, která zkreslují všechny tři parametry, avšak zpravidla jen mírně.

### 2.1 Variační kritéria

Variační kritéria se rozlišují na dvě hlavní skupiny – lokální a globální. Lokální kritéria jsou založena na délce poloos  $a$  a  $b$  Tissotovy elipsy a stanovují se pouze v konkrétních bodech mapy. Naproti tomu globální kritéria hodnotí celé zobrazované území. Vycházejí z lokálních kritérií, přičemž se při jejich určení provádí integrace přes celé zobrazované území.

#### 2.1.1 Lokální kritéria

Prvním používaným lokálním kritériem je Airyho kritérium, které zohledňuje jen délkové zkreslení v bodě  $P = [u, v]$ :

$$h^2(u, v) = \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2}{2}. \quad (1)$$

Dalším kritériem je komplexní kritérium, které zohledňuje délkové a úhlové zkreslení:

$$h^2(u, v) = \frac{|a-1| + |b-1|}{2} + \frac{a}{b} - 1. \quad (2)$$

#### 2.1.2 Globální kritéria

V podstatě představují střední hodnotu lokálního kritéria  $h^2(u, v)$  na intervalu  $\Omega = (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$ :

$$H^2 = \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} h^2 du dv. \quad (3)$$

V praxi se často používají diskrétní hodnoty vypočteny v uzlových bodech dostatečně husté zeměpisné sítě. Využívá se osové souměrnosti podél rovníku nebo základního poledníku. Její nevážená varianta se vypočítá

jako:

$$H^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^2(u_i, v_i). \quad (4)$$

Pro potlačení vlivu polárních oblastí se využívá vážená varianta ve tvaru:

$$H^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i h^2(u_i, v_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (5)$$

kde váhou bodu je  $p_i = \cos u_i$  pro danou zeměpisnou šířku bodu.

## 2.2 Měřítkové číslo mapy

Měřítkové číslo mapy  $M$  lze vyjádřit vztahem:

$$M(u, v) = \frac{M}{\max_{\forall A} m(u, v, A)} = \frac{M}{a(u, v)}. \quad (6)$$

Hodnoty měřítkového čísla mapy lze v uzlových bodech geografické sítě znázornit pomocí izochar.

## 3 Použitá kartografická zobrazení

### 3.1 Mercator-Sansonovo zobrazení

Mercator-Sansonovo zobrazení patří mezi nepravá válcová sinusoidální zobrazení. Zobrazení je ekvivalentní, ekvidistantní v rovnoběžkách a má nezkreslený základní poledník. Obrazem poledníků jsou sinusoidy a obrazem rovnoběžek jsou úsečky s konstantní odlehlostí. Toto zobrazení je vhodné využít pro mapy kontinentů. Nevýhodou zobrazení je však velké zkreslení v polárních oblastech. Zobrazovací rovnice a měřítko délek v poledníkovém směru Mercator-Sansonova zobrazení lze vyjádřit vztahy:

$$x = R v \cos u, \quad (7)$$

$$y = R u, \quad (8)$$

$$m_p = \sqrt{1 + v^2 \sin^2 u}. \quad (9)$$

### 3.2 Bonneovo zobrazení

Bonneovo zobrazení nebo-li "srdcové" zobrazení patří mezi nepravá kuželová zobrazení. Zobrazení je ekvivalentní, ekvidistantní v rovnoběžkách a má jednu nezkreslenou rovnoběžku  $u_0$ . Toto zobrazení je vhodné využít pro mapy kontinentů nebo větších územních celků v oblasti kolem základního poledníku a rovníku. Zobrazovací rovnice v polárním a v pravoúhlém tvaru a měřítko déle v poledníkovém směru Bonneova zobrazení lze vyjádřit vztahy:

$$\rho = \rho_0 + R(u_0 - u), \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{R v \cos u}{\rho}, \quad (11)$$

$$x = R(u_0 - u) \cos \frac{v \cos u}{\cot u_0 + u_0 - u}, \quad (12)$$

$$y = R \left( \cot u_0 - (u_0 - u) \sin \frac{v \cos u}{\cot u_0 + u_0 - u} \right), \quad (13)$$

$$m_p = \sqrt{1 - (\varepsilon - v \sin u)^2}. \quad (14)$$

### 3.3 Zobrazení Eckert V

Zobrazení Eckert V patří mezi pseudokuželová a kompenzační zobrazení. Zobrazení je ekvivalentní a má dvě nezkreslené rovnoběžky. Obraz středního poledníku má stejnou délku jako obraz základního poledníku a obraz rovníku má dvakrát větší délku než obraz pólu. Zobrazovací rovnice lze vyjádřit pomocí aritmetického průměru Mercator-Sansonova zobrazení (15), (16) a Marinova válcového ekvidistantního zobrazení (17), (18):

$$x = R v \cos u, \quad (15)$$

$$y = R u, \quad (16)$$

$$x = R v, \quad (17)$$

$$y = R u. \quad (18)$$

### 3.4 Zobrazení Winkel-Tripel

Zobrazení Winkel-Tripel je kombinací jednoduchého válcového zobrazení a modifikovaného azimutálního zobrazení. Zobrazení je kompenzační a má nezkrácený střední poledník. Střední poledník a rovník se zobrazují jako úsečky. Toto zobrazení je využito převážně pro mapy světa. Zobrazovací rovnice lze vyjádřit aritmetickým průměrem ze souřadnic válcového a Aitovova zobrazení následovně:

$$x = \frac{1}{2}R v(\cos u_1 + \cos u), \quad (19)$$

$$y = R v. \quad (20)$$

### 3.5 Hammerovo zobrazení

Hammerovo zobrazení patří mezi modifikovaná azimutální zobrazení. Zobrazení vzniklo průmětem Lambertova azimutálního ekvivalentního zobrazení na rovinu skloněnou o  $60^\circ$ . Základní poledník a rovník se zobrazí jako úsečky, kdy vše ostatní jsou křivky. Toto zobrazení se využívá pro politické mapy světa. Zobrazovací rovnice Hammerova zobrazení lze vyjádřit vztahy:

$$x = \frac{2R \sin u}{\sqrt{2(1 + \cos u \cdot \cos \frac{v}{2})}}, \quad (21)$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}R \cos u \sin \frac{v}{2}}{\sqrt{1 + \cos u \cdot \cos \frac{v}{2}}}. \quad (22)$$

## 4 Postup a výpočty

Pro hodnocení kartografických zobrazení byly vybrány skandinávské státy a Grónsko, které byly staženy ze stránky *Boundaries.us* (2016) jako textové soubory. Tyto soubory byly načteny v SW ArcGIS Pro, kde byl zjednodušen průběh hranic jednotlivých států pro následné vykreslení v SW MATLAB.

Nejprve byl vytvořen Python skript *mk.py*, který využívá knihovnu PyProj pro výpočet hodnot poloos Tissotovy elipsy pro zadaná zobrazení. Ve skriptu *optimal\_projections\_pyproj* byly nejprve nadefinovány hodnocená kartografická zobrazení a vstupní parametry pro vykreslení skandinávských států a Grónska společně se zvolenou nezkreslenou rovnoběžkou  $u_0 = 75^\circ$ . Dále byly vytvořeny uzlové body geografické sítě, pro která byla spočtena variační kritéria podle vzorců uvedených v kapitole 2.1. Následně byla vykreslena geografická síť a zvolené státy. Nakonec bylo spočteno měřítkové číslo mapy podle vzorce (6) uvedeného v kapitole 2.2 a vykresleny izočáry jeho hodnot.

## 5 Skripty v programech

Všechny skripty pro výpočet souřadnic bodů byly společně se všemi výpočty napsány v SW MATLAB a v programovacím jazyce Python.

- **graticule\_proj.m** - skript pro vykreslení geografické sítě
- **mk.py** - skript pro výpočet poloos Tissotovy elipsy v daném kartografickém zobrazení
- **optimal\_projections\_proj.m** - skript pro výpočet variačních kritérií, vykreslení zvolených států, výpočet měřítkového čísla a pro vykreslení izočar
- **sinu.m** - skript zobrazovacích rovnic Mercator-Sansonova zobrazení
- **uv\_sd.m** - skript pro převod zeměpisných souřadnic bodu na kartografické souřadnice v obecné poloze vzhledem ke kartografickému pólu

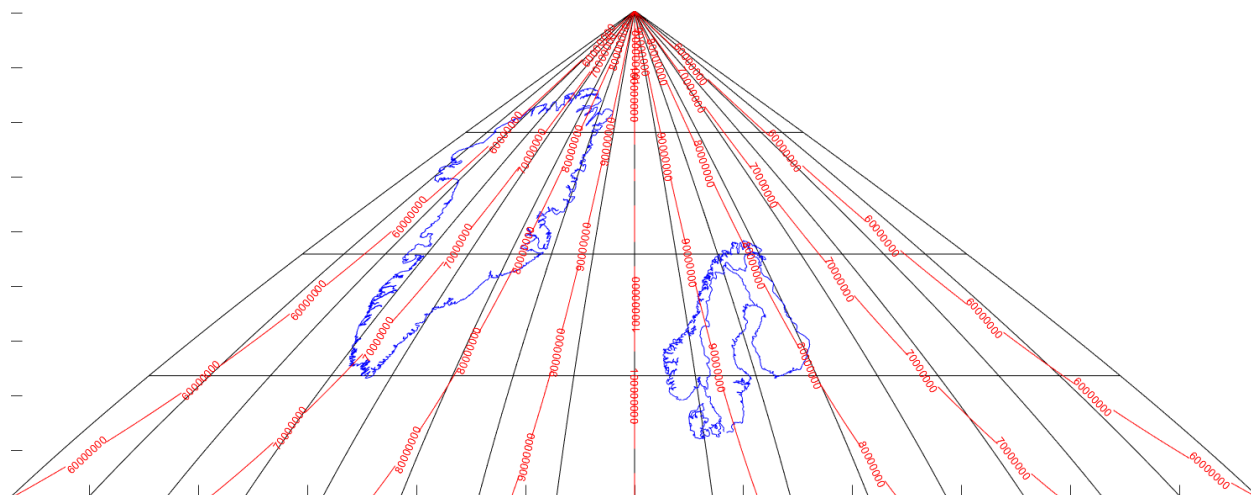


## 6 Výsledky

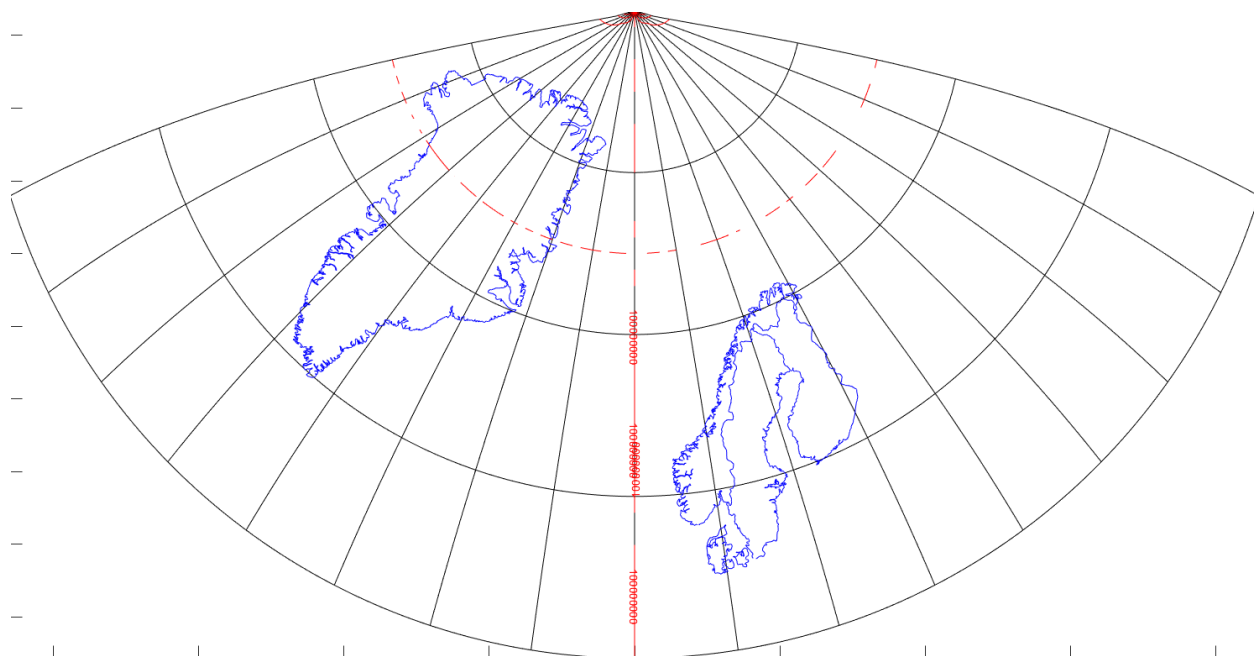
Pro vybraná kartografická zobrazení byly pro skandinávské státy a Grónsko vypočítány hodnoty globálních kritérií (vážené i nevážené varianty), jejichž hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce (*Tabulka 1*). Vygenerované izočáry jednotlivých zobrazení s krokem 10 000 000 jsou patrné na následujících obrázcích (*Obrázek 1 až 5*).

Zobrazení	Airyho kritérium		Komplexní kritérium	
	vážené	nevážené	vážené	nevážené
<b>Mercator-Sansonovo</b>	0.1479	0.1276	1.3136	1.1989
<b>Bonneovo</b>	0.0054	0.0015	0.1052	0.0918
<b>Eckert V</b>	$2.3718 \cdot 10^7$	0.2730	$1.7611 \cdot 10^3$	1.0744
<b>Winkel-Tripel</b>	$2.0422 \cdot 10^6$	0.0441	488.2702	0.5877
<b>Hammerovo</b>	0.1842	0.1159	1.5823	1.1863

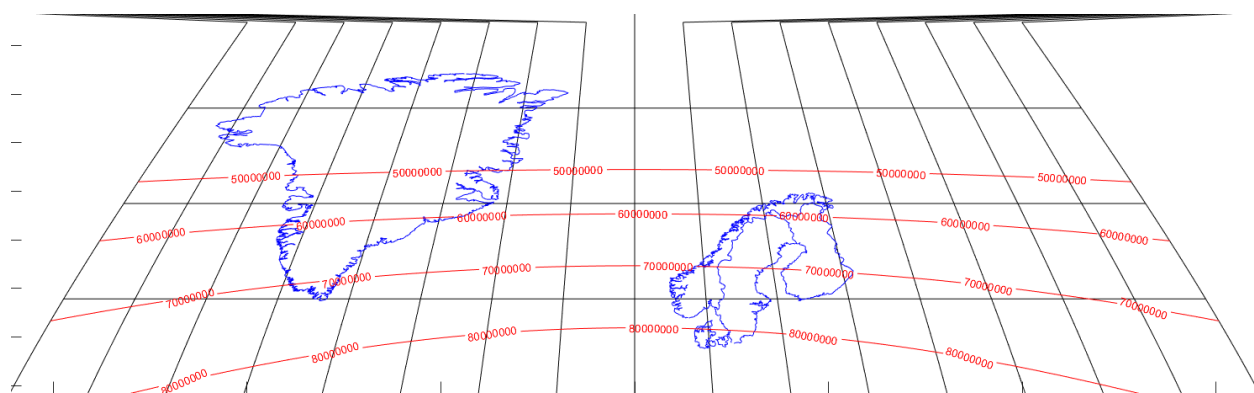
*Tabulka 1: Hodnoty globálních kritérií pro jednotlivá zobrazení*



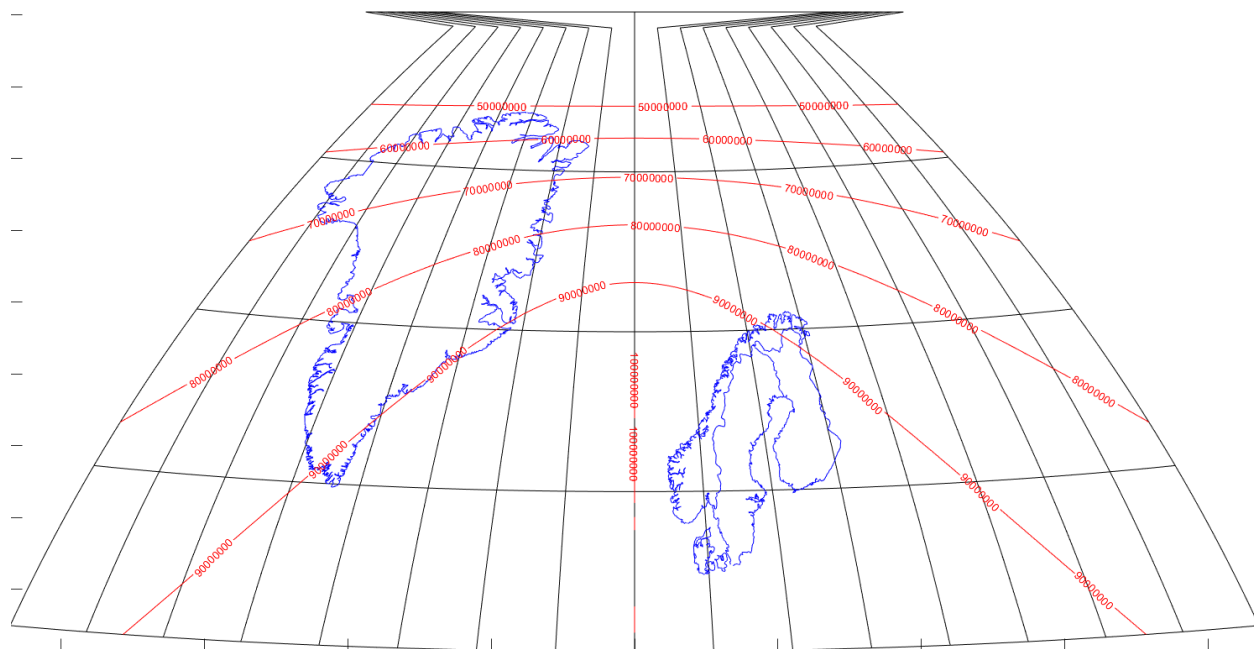
*Obrázek 1: Isočáry měřítkového čísla pro Mercator-Sansonovo zobrazení*



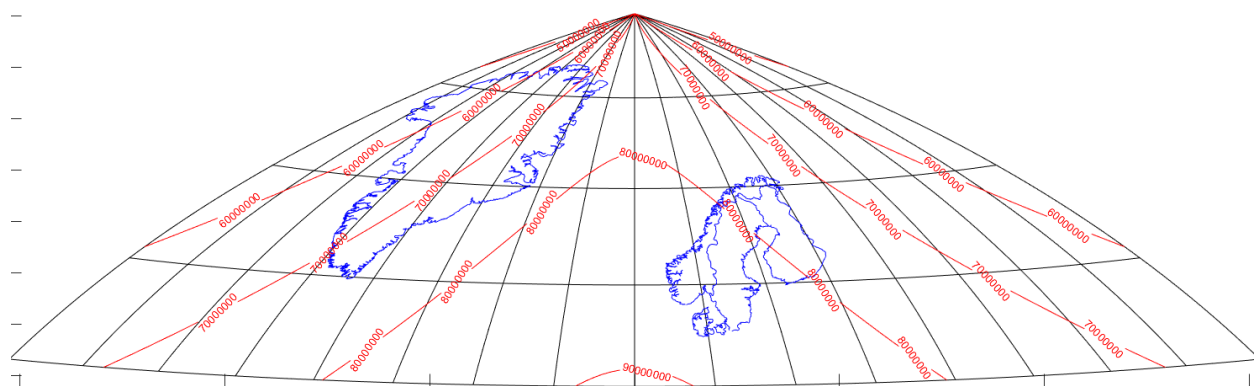
Obrázek 2: Isočáry měřítkového čísla pro Bonneovo zobrazení



Obrázek 3: Isočáry měřítkového čísla pro zobrazení Eckert V



Obrázek 4: Izočáry měřítkového čísla pro zobrazení Winkel-Tripel



Obrázek 5: Izočáry měřítkového čísla pro Hammerovo zobrazení

## 7 Zhodnocení výsledků a závěr

V rámci této úlohy byly vzájemně porovnány globálně variační kritéria pro zvolená kartografická zobrazení a následně byla posouzena vhodnost použití pro skandinávské státy a Grónsko. Jako globální variační kritéria bylo využito Airyho a komplexní kritérium ve vážených i nevážených variantách. Pro každé zobrazení byly též vypočteny měřítková čísla a vykresleny izočáry těchto hodnot.

Při porovnání vypočtených hodnot globálních kritérií znázorněné v tabulce (*Tabulka 4*) je patrné jako nejlepší zobrazení skandinávských států a Grónska Bonneovo zobrazení. Pro toto zobrazení činily hodnoty Airyho kritéria 0.0054 (vážená varianta) a 0.0015 (nevážená varianta) a komplexního kritéria 0.1052 (vážená varianta) a 0.0918 (nevážená varianta). Nejhorší zobrazení naopak bylo zobrazení Eckert V s hodnotou Airyho kritéria  $2.3718 \cdot 10^7$  (vážená varianta) a hodnotou  $1.7611 \cdot 10^3$  (vážená varianta) pro komplexní kritérium. Jelikož se zobrazované území nachází blízko severnímu pólu, dosahovaly nevážené varianty variačních kritérií výrazně lepších výsledků, než vážené varianty. I dle vykreslených izočar měřítkového čísla se jeví jako nejlepší kartografické zobrazení pro danou oblast Bonneovo zobrazení, u kterého není příliš velký nárůst měřítkového čísla. Na závěr lze říci, že nejlepší variační kritérium pro zvolenou oblast je nevážená varianta komplexního kritéria. Sice nedosahuje nejnižších hodnot, ale zohledňuje délkové i úhlové zkreslení a nepotlačuje vliv polárních oblastí.

## Zdroje

BAYER, T. (2025): Nepravá zobrazení. Polykónická zobrazení. Přednáška pro předmět Matematická kartografie, Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK [cit. 23.5.2025].

BOUNDARIES.US (2016): Country boundaries. <https://boundaries.us/country/> [cit. 15.5.2025].