Teoria da Informação

representação da informação + controle da informação

alfabeto-fonte $\xrightarrow{\text{CODIFICAÇÃO}}$ alfabeto código

abc...123...αβ... 1011011110...

- representação: otimização da codificação
  - armazenamento / transmissão } canal/meio com capacidade limitada
  - resistência a ruído → canal/meio é suscetível a perturbação gerada por fonte externa
  - COMPACTAÇÃO / COMPRESSÃO
- controle: gerenciamento
  - acesso
  - autenticidade
  - identidade
  - ⋮
  - CRIPTOGRAFIA

NyQuist

Turing

Shannon 37 → design de circuitos digitais empregando lógica booleana

Shannon / Weaver 48 → conceito ENTROPIA ⇝ "esforço" de representação

1916-2001

Ludwig Boltzmann 1870

2ª Lei da Termodinâmica

"Esforço" de codificação:

alfab. fonte $\longrightarrow$ alfab. código (0,1)

ab — a: 0, b: 1 — 1 bit/símbolo

abcd — a: 00, b: 01, c: 10, d: 11 — 2 bits/símbolo

abcdefgh — 3 bits/símbolo

CODIFICAÇÃO DE COMPRIMENTO FIXO

Probabilidades de ocorrência dos símbolos:

$$p_a = p_b = p_c = p_d = 1/4$$

CASO EQUIPROVÁVEL

$$H = \log_2 \text{tamanho alfabeto}$$

entropia

$$H = \log_2 8 = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$2^3 = 8 \text{ símbolos}$$

$H = \lg n$ onde n é o tam. alfabeto

CASO NÃO-EQUIPROVÁVEL

se alfabeto-fonte com 4 símbolos (a,b,c,d).

e se
$p_a = 1/2$ 0,5
$p_b = 1/4$ 0,25
$p_c = 1/8$ 0,125
$p_d = 1/8$ 0,125

$$H = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}}_{-0,5} + \underbrace{\frac{1}{4}\lg\frac{1}{4}}_{-0,5} + 2\left(\frac{1}{8}\lg\frac{1}{8}\right)\right)$$

$$2 \cdot \frac{-3}{8} = \frac{-3}{4} = -0,75$$

$$-1,75$$

$$\boxed{H = 1,75 \text{ bits/símbolo}}$$

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \lg \frac{1}{p_i}} \text{ ou } \boxed{-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \lg p_i}$$

$$\lg \frac{1}{2} = \lg 1 - \lg 2 = 0 - 1 = -1$$

$$\lg \frac{1}{4} = \lg 1 - \lg 4 = 0 - 2 = -2$$

$$\lg \frac{1}{8} = \lg 1 - \lg 8 = 0 - 3 = -3$$

Entropia Conjunta

Duas fontes: Se equiprováveis e independentes

I: a b c d $H(I) = lg\,4 = 2$ bits/símbolo

II: x y z $H(II) = lg\,3 = 1{,}58$ bits/símbolo

"Super" fonte $C = I + II$

alfabeto: ax ay az bx by bz cx...

$$H(C) = H(I) + H(II)$$

$$\underset{2}{lg\,4} + \underset{1{,}58}{lg\,3} = lg(4 \cdot 3) = lg\,12 = 3{,}584$$

$2 + 1{,}58 \to 3{,}58$

Entropia Conjunta Condicional

fonte A: a b c d → independente

fonte B: 0 1 → paridade da A

Se A gera a ou c, B gera 0

b ou d, B gera 1

B|A

$p(0|a) = 1$
$p(1|a) = 0$
$p(0|b) = 0$
$p(1|b) = 1$
$p(0|c) = 1$
$p(1|c) = 0$
$p(0|d) = 0$
$p(1|d) = 1$

$$H(C) = H(A) + H(B|A)$$

$H(A) = lg\,4 = 2$ bits/símbolo (se equiprovável)

$$H(B|A) = \sum_{i=1}^{t_A} p_i \cdot \sum_{j=1}^{t_B} p_{j|i} \cdot lg\frac{1}{p_{j|i}}$$

t_A: tam alfab. A

t_B: tam alfab. B

$$\underset{p_a}{\frac{1}{4}} \cdot \left(\underset{p(0|a)}{1} \cdot lg\frac{1}{1} + \underset{p(1|a)}{0} \cdot lg\frac{1}{0} \right) +$$

$$\underset{p_b}{\frac{1}{4}} \cdot \left(\underset{p(0|b)}{0} \cdot lg\frac{1}{0} + \underset{p(1|b)}{1} \cdot lg\frac{1}{1} \right) +$$

$$\underset{p_c}{\frac{1}{4}} \cdot \left(\ldots \right.$$

Neste caso, $H(B|A) = 0$

fonte B → redundante
Side information
não agrega entropia

Análise dos símbolos 2 a 2 $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{j=1}^{m} p_{j/i} \cdot lg \frac{1}{p_{j/i}}$

	A	B	C	D	TOTAIS (LINHA)
A	4	5	5	5	19
B	9	1	0	0	10
C	2	3	0	0	5
D	5	0	0	0	5
					39

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{19} lg \frac{19}{4} + 3\left(\frac{5}{19} lg \frac{19}{5}\right)\right) +$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{10} lg \frac{10}{9} + \frac{1}{10} lg\, 10\right) +$$

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{5} lg \frac{5}{2} + \frac{3}{5} lg \frac{5}{3}\right) = 1{,}23 \text{ bits/símbolo}$$

Casos

equiprovável ⇒ $H = lg\, 4 = 2$ bits/símbolo

não-equiprov. ⇒ $H = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot lg \frac{1}{p_i} = 1{,}75$ bits/símb

↳ supondo: $p_a = 1/2$, $p_b = 1/4$ e $p_c = p_d = 1/8$

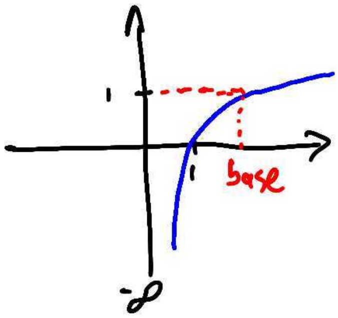
Obs.: $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{5} lg \frac{5}{5}\right)$

⇓

$1\, lg\, 1 = \emptyset$

$\log 1 = 0$

$\log 0 = -\infty$



$\log_2 a^v = v \log_2 a$

$\log \sqrt[b]{a} = \log a^{\frac{1}{b}} = \frac{\log a}{b}$

$\boxed{\log p = -\log\left(\frac{1}{p}\right)} = -(\underbrace{\log 1}_{0} - \log p)$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log_2 a = \lg a$

__Conversão__ __de__ __base__:

$\log_z a = \frac{\log_x a}{\log_x z}$ Ex.: $\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$

$\log_{10} 2 = 0{,}3010299$