Feuille d'exercices n°2

Calcul sous-différentiel
Méthodes d'optimisation du premier ordre
Propriété de Kurdyka–Łojasiewicz

Exercice 1 – Sous-différentiels convexe et limitant

Module A2, Propositions 12

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. On admet que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \partial f(x) = \hat{\partial} f(x)$$

avec $\partial f(x)$ le sous-différentiel convexe de f. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$. Montrer que le sous-différentiel limitant de f en x^0 vaut le sous-différentiel convexe de f.

Exercice 2 – Sous-différentiel d'une somme

Module A2, Proposition 16

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions telles que $\operatorname{dom}(f+g) \neq \emptyset$. Soit $x^0 \in \operatorname{dom}(f+g)$. On suppose que $f(x^0)$ est fini et que g est continûment différentiable au voisinage de x^0.

(a) Soit $p \in \partial f(x^0)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\operatorname{dom} f$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \big(f(x_k) + g(x_k)\big) = f(x^0) + g(x^0)$$

et une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geq f(x_k) + \langle p_k, x - x_k\rangle + o(\|x - x_k\|) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = p$$

(b) Justifier qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \quad g(x) \geq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x - x_k\rangle + o(\|x - x_k\|)$$

En déduire que
$$\forall\, k \geq k_0, \quad p_k + \nabla g(x_k) \in \hat{\partial}(f+g)(x_k)$$

(c) Montrer que
$$\partial f(x^0) + \nabla g(x^0) \subset \partial(f+g)(x^0)$$

(d) En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions $f+g$ et $-g$, montrer que

$$\partial(f+g)(x^0) \subset \partial f(x^0) + \nabla g(x^0)$$

Exercice 3 – Fonctions coercives continues sur leur domaine

Module B1, Propositions 4 & 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive continue sur son domaine. Soit $M \in \mathbb{R}$. On définit l'*ensemble de niveau inférieur* $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ par

$$\operatorname{niv}_{\leq M} J = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid J(x) \leq M \Big\}$$

(a) Montrer que $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ est un ensemble fermé. *On pourra remarquer que* $\operatorname{niv}_{\leq M} \subset \operatorname{dom} J$.

(b) Montrer qu'il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ pour lequel $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ soit borné.

(c) En déduire que J atteint son minimum et son maximum sur $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$.

(d) Conclure quant à l'existence d'un minimiseur pour J.

Exercice 4 – Fonctions s.c.i. coercives

Module B1, Proposition 6

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

On pourra distinguer les cas $\inf J = -\infty$ *et* $\inf J \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une telle suite. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k\| \leq M$$

(c) Justifier que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, de limite notée x^*.

(d) Montrer que

$$J(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

En déduire que J admet un minimiseur.

Exercice 5 – Règle de Fermat

Module B1, Propositions 1, 9 & 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine non vide et soit $x^* \in \operatorname{dom} J$.

(a) On suppose que x^* est un minimiseur local de J. Montrer $0 \in \partial J(x^*)$.

(b) On suppose que J est convexe. Montrer que tout minimiseur local de J est un minimiseur global de J.

(c) On suppose que J est convexe. Montrer que si $0 \in \partial J(x^*)$, alors x^* est un minimiseur global de J.

Exercice 6 – Fonctions fortement convexes en dimension finie

Module A3, Proposition 2, Module B1, Propositions 7 et 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module $\alpha > 0$.

(a) Justifier que la fonction

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) = J(x) - \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2$$

est convexe

(b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) \geq \langle a, x\rangle + b + \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2$$

(c) En déduire que J est coercive.

(d) Montrer que J admet exactement un minimiseur x^*.

(e) Soit $x \in \operatorname{dom} J$ tel que $\partial J(x) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $p \in \partial J(x)$,

$$J(x) - J(x^*) \geq \frac{1}{2\,\alpha}\,\|p\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{p}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\,(x - x^*)\right\|_2^2$$

(f) En déduire que J satisfait la propriété KŁ en x^*.

Exercice 7 – Convergence d'un algorithme d'optimisation

Module B1, Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé et non vide. On suppose que J est continue sur son domaine. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^*. On suppose par ailleurs que

(1) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \partial J(x_k)$;

(2) la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démontrer que x^* est un point critique de J.