Module B1
Méthodes d'optimisation du premier ordre

Sauf mention contraire, $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\| \cdot \|$ la norme qui découle du produit scalaire.

L'objectif de ce module est de poser les bases théoriques des méthodes d'optimisation du premier ordre, avec en particulier la règle de Fermat, ainsi que de présenter les enjeux et les problématiques rencontrés en optimisation numérique.

1 Problèmes d'optimisation

1.1 Définitions

Résoudre un problème d'optimisation, c'est chercher à minimiser ou à maximiser une fonction dite *objectif*.

Définition 1 (Minimiseurs et minimum)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction et $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $J(x^*) \in \mathbb{R}$. On dit que x^* est un *minimiseur (global)* de J si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x^*) \leq J(x)$$

L'ensemble des minimiseurs (globaux) de J (éventuellement vide) est noté

$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} J(x) \subset \mathcal{X}$$

Dans ce cas, la valeur réelle $J(x^*)$ est appelée *minimum (global)* de J, notée

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) \in \mathbb{R}$$

Remarque : Dans la définition précédente, il est inutile de considérer les fonctions pouvant prendre la valeur $-\infty$ car celles-ci ne peuvent admettre de minimiseur ni de minimum.

On précise parfois minimiseur / minimum **global** pour les distinguer de leur homologue local :

Définition 2 (Minimiseurs locaux)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction et $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $J(x^*) \in \mathbb{R}$. On dit que x^* est un *minimiseur local* de J s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(x^*) \subset \mathcal{X}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{V}(x^*), \qquad J(x^*) \leq J(x)$$

Dans ce cas, la valeur réelle $J(x^*)$ est appelée *minimum local* de J.

Notons que, si le minimum **global** (lorsqu'il existe) d'une fonction est unique, ses minimiseurs peuvent ne pas l'être (il suffit de considérer n'importe quelle fonction constante). En particulier, tous les minimiseurs de J prennent la même valeur par J, qui vaut le minimum de J :

$$\forall\, x^* \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J(x), \qquad J(x^*) = \min_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

En revanche, une fonction peut admettre plusieurs minima locaux.

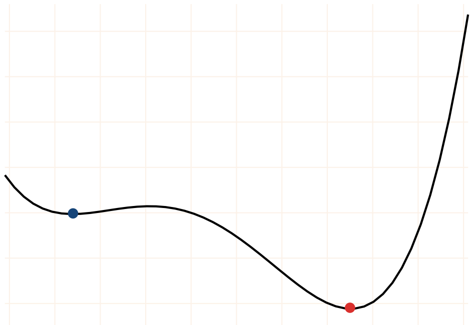

Figure 1 – Minimiseur global *versus* minimiseur local. En bleu un minimiseur local, en rouge le minimiseur global.

Signalons, même s'ils seront relativement peu utilisés dans ce cours, la définition des maximiseurs et du maximum d'une fonction :

Définition 3 (Maximiseurs et maximum)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction et $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $J(x^*) \in \mathbb{R}$. On dit que x^* est un *maximiseur (global)* de J si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x^*) \geq J(x)$$

L'ensemble des maximiseurs (globaux) de J (éventuellement vide) est noté

$$\operatorname*{argmax}_{x\in\mathcal{X}} J(x) \subset \mathcal{X}$$

Dans ce cas, la valeur réelle $J(x^*)$ est appelée *maximum (global)* de J, notée

$$\max_{x\in\mathcal{X}} J(x) \in \mathbb{R}$$

En réalité, il est aisé de vérifier que x^* est un maximiseur de J si et seulement si x^* est un minimiseur de $-J$. C'est pourquoi on peut confondre la notion d'optimisation et celle de minimisation, comme on le fera à partir de maintenant.

Il est clair qu'un minimiseur global est un minimiseur local. En général, la réciproque est fausse, sauf dans le cas convexe :

Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**. Si $x^* \in \mathcal{X}$ est un minimiseur local de J, alors x^* est un minimiseur global de J.

DÉMONSTRATION : Admis. La preuve se trouve dans le module **B1 : Minimisation d'une fonction. Conditions d'optimalité.** (3MA261).

On peut à présent formaliser davantage le cadre des problèmes d'optimisation. On appelle *problème d'optimisation* la recherche d'un minimiseur ou d'un maximiseur d'une fonction objectif $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, c'est-à-dire, dans le cas d'un problème de minimisation, la recherche d'un point $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $J(x^*) \in \mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x^*) \leq J(x)$$

On le note de manière équivalente

$$\text{Minimiser } J \qquad \text{ou} \qquad \min_{x\in\mathcal{X}} J(x) \tag{$\mathcal{P}$}$$

On parle de problème d'optimisation *sans contraintes*, car on ne contraint pas explicitement x à appartenir à un ensemble particulier. *A contrario*, un *problème d'optimisation sous contraintes* la recherche d'un point $x^* \in \mathcal{C}$ tel que $J(x^*) \in \mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad J(x^*) \leq J(x)$$

où l'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ est appelé *ensemble des contraintes* ou *ensemble admissible* (dans ce cas, tout point $x \in \mathcal{C}$ est appelé *point admissible*). Ce problème est alors noté

$$\text{Minimiser } J(x) \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{C} \qquad \text{ou} \qquad \min_{x\in\mathcal{C}} J(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{c}}$}$$

En utilisant une fonction indicatrice, il est toujours possible d'écrire un problème d'optimisation sous contraintes comme un problème d'optimisation non contraint, en définissant une nouvelle fonction objectif $\widetilde{J} : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en posant

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \widetilde{J}(x) = J(x) + \chi_{\mathcal{C}}(x)$$

C'est la raison pour laquelle, sauf dans le cas particulier de la dualité de LAGRANGE (module **A6 : Dualité min-max**), on ne considérera dans ce cours que des problèmes d'optimisation **non contrainte**.

Terminons ce paragraphe avec la notion de problèmes équivalents. Cette notion est formalisée ici d'une manière non standard :

Définition 4 (Problèmes d'optimisation équivalents)

Soit $J_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $J_2 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On note $(\mathcal{P}_1)$ (resp. $(\mathcal{P}_2)$) le problème d'optimisation de fonction objectif J_1 (resp. J_2). On dit que les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont équivalents s'il existe deux applications $M_1 : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{Z}}$ et $M_2 : \mathcal{Z} \to 2^{\mathcal{X}}$ telles que

$$x^* \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J_1(x) \qquad \Longrightarrow \qquad M_1(x^*) \in \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{Z}} J_2(z)$$

$$\text{et} \qquad z^* \in \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{Z}} J_2(z) \qquad \Longrightarrow \qquad M_2(z^*) \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J_1(x)$$

Un cas particulier de problèmes équivalents est celui où les fonctions objectifs partagent mêmes minimiseurs. Ainsi, cette définition permet de généraliser cette notion ; il faut noter notamment que deux problèmes équivalents selon cette définition n'ont pas nécessairement le même nombre de solutions. Même lorsqu'elle n'est pas mentionnée de manière formelle, la notion de problèmes équivalents est très utile pour la résolution de problèmes d'optimisation. Il est parfois possible d'introduire un problème auxiliaire dont les solutions permettent d'obtenir les solutions du problème initialement considéré. Remarquons enfin qu'aucune condition n'est imposée sur le minimum atteint dans les problèmes considérés.

EXEMPLE

Problèmes d'optimisation équivalents. Considérons les deux fonctions objectifs suivantes :

$$J_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & -x^2 + \chi_{[\,0\,;1\,]}(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad J_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ z & \mapsto & -z^2 + \chi_{[\,-1\,;1\,]}(z) \end{array} \right.$$

Alors l'optimisation de ces deux fonctions définit deux problèmes équivalents, avec

$$M_1(x) = \{x, -x\} \qquad \text{et} \qquad M_2(z) = \{|z|\}$$

On remarque en particulier que la première fonction admet un unique minimiseur, tandis que le second en admet deux.

1.2 Existence et unicité des minimiseurs

Commençons par noter qu'une condition nécessaire d'existence de minimiseurs est le fait que J ne prenne pas la valeur $-\infty$ et ne soit pas identiquement égale à $+\infty$. Si J est convexe, cela revient à imposer que J soit propre.

Une autre notion qui apparaît souvent en optimisation est la suivante :

Définition 5 (Suite minimisante)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On appelle *suite minimisante* de J toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ vérifiant

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

Notons que, si $\operatorname{dom} J \neq \emptyset$, alors de toute suite minimisante, on peut extraire une sous-suite d'éléments appartenant au domaine de J. Dans le cas contraire, les $J(x_k)$ valent $+\infty$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit le fait que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la borne inférieure de J (qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ si le domaine de J est non vide). Par conséquent, on considère dorénavant que les suites minimisantes vivent dans le domaine de J.

Proposition 2

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On suppose que $\operatorname{dom} J \neq \emptyset$. Alors J admet une suite minimisante.

DÉMONSTRATION : La preuve repose sur la caractérisation de la borne inférieure d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$. Notons

$$m = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

- **Cas $m = -\infty$.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in \operatorname{dom} J$ tel que $J(x_k) \leq -k$. Par comparaison,

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = -\infty$$

- **Cas $m \in \mathbb{R}$.** Posons $\varepsilon_k = 1/(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe $x_k \in \operatorname{dom} J$ tel que
$$m \leq J(x_k) < m + \varepsilon_k$$
de sorte que, par encadrement, on a
$$\lim_{k \to +\infty} J(x_k) = m \quad \blacksquare$$

Lorsque l'on étudie un problème d'optimisation, une question importante est celle de l'existence d'un minimiseur. Les résultats suivants permettent d'établir l'existence de minimiseurs sous certaines hypothèses. Si la fonction objectif considérée n'entre pas dans le champ d'application de ces résultats, elle peut ne pas admettre de minimiseur. Dans ce cas, pour le démontrer, une manière de procéder est d'exhiber une suite minimisante telle que la suite des images par la fonction objectif tend vers $-\infty$.

Mentionnons ci-dessous quelques résultats d'existence de minimiseurs. Il ne s'agit bien évidemment pas d'une liste exhaustive, mais de résultats classiques et généralement suffisants dans les applications. Le résultat suivant est une généralisation du théorème bien connu de WEIERSTRASS :

Proposition 3 (Existence de minimiseurs I)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On suppose que son domaine est **compact non vide** et que J est **continue** sur son domaine. Alors J admet un minimiseur.

DÉMONSTRATION : Admis.

La proposition 3 est utile lorsque le domaine de la fonction objectif est borné et qu'elle est continue sur son domaine. Cependant, un grand nombre de problèmes d'optimisation ne vérifie pas cette hypothèse. Dans ce cas, c'est en général la propriété dite de *coercivité* qui sera utilisée. Avant de l'introduire, on établit le résultat général suivant :

Proposition 4

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **continue** sur son domaine. Supposons qu'il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ tel que l'ensemble de niveau inférieur
$$\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid J(x) \leq J(x^0) \right\}$$
soit borné. Alors J admet un minimiseur.

DÉMONSTRATION : Considérons la fonction suivante :
$$\tilde{J} = J + \chi_{\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J}$$
qui est une restriction de J sur l'ensemble $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ (qui est inclus dans $\operatorname{dom} J$). La continuité de J sur $\operatorname{dom} J$ implique la continuité de $\tilde{J}$ sur son domaine. Or, par hypothèse et construction, l'ensemble $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ est un ensemble fermé et borné en dimension finie donc un ensemble compact. D'après la proposition 3, la fonction $\tilde{J}$ admet donc un minimiseur, ce qui signifie qu'il existe $x^* \in \mathcal{X}$ tel que
$$\forall\, x \in \operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J, \qquad J(x) \geq J(x^*)$$
En particulier, puisque x^0 appartient à $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$, on a
$$J(x^0) \geq J(x^*)$$

Or, par définition de l'ensemble $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$, on a

$$\forall\, x \notin \mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J, \qquad J(x) > J(x^0) > J(x^*)$$

ce qui prouve que x^* est un minimiseur global de J. ■

Parmi les fonctions qui satisfont les hypothèses de la proposition précédente, il y a les fonctions *coercives* et continues sur leur domaine.

Définition 6 (Fonction coercive)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. On dit que J est *coercive*, ou encore *infinie à l'infini*, si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = +\infty$$

> Dans certains domaines des mathématiques, les termes *coercif* et *coercivité* désignent une tout autre propriété (connue aussi sous le nom d'*ellipticité*). Aussi, pour éviter toute ambiguïté, on parle parfois de *fonctions infinies à l'infini* (comme dans le polycopié du cours 3MA261 : Calcul différentiel et optimisation par exemple).

Exercice

Montrer que toute fonction $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de domaine **borné** est coercive.

Exemple

Fonctions coercives. D'après la définition, la norme euclidienne est une fonction coercive. De plus, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$$

alors $x \mapsto f(\|x\|)$ est une fonction coercive. De manière générale, si J est coercive, alors $f \circ J$ l'est également.

Proposition 5 (Existence de minimiseurs II)

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction telle que $\mathrm{dom}\, J$ soit **fermé et non vide**. On suppose que J **coercive** et **continue sur son domaine**. Alors J admet un minimiseur.

Démonstration : Il suffit de montrer que, dans ce cas, la fonction J est telle qu'il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ tel que l'ensemble de niveau inférieur

$$\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid J(x) \leq J(x^0) \right\}$$

soit compact, c'est-à-dire fermé et borné.

- **$\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$ est fermé.** On commence par noter que $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J \subset \mathrm{dom}\, J$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$. On suppose qu'elle converge vers x. Le domaine de J étant fermé, on en déduit que $J(x) \in \mathrm{dom}\, J$. Ainsi, on a par définition de la suite des x_k et par continuité de J sur son domaine

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad J(x_k) \leq J(x_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x)$$

Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité pour obtenir que $J(x) \leq J(x^0)$.

- **$\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$ est borné.** On l'établit par l'absurde, en supposant que pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$, l'ensemble $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$ n'est pas borné. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Par hypothèse, il existe donc une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\|_2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad J(x_k) \leq J(x_0)$$

La suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, en particulier, elle ne peut pas diverger vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que J soit coercive.

Ainsi, la fonction J est continue sur le compact $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$, donc elle y admet un minimiseur, noté x^*. Par définition de x^*, on a

$$\forall\, x \notin \mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J, \qquad J(x) > J(x^0) \geq J(x^*)$$

Aussi, x^* est un minimiseur de J sur $\mathcal{X}$. ■

Attention, dans les propositions 3 et 5, l'hypothèse de continuité est importante :

Contre-exemple

Fonction discontinue sur un compact. Considérons la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que cette fonction n'est pas continue en 0, mais que son domaine est compact. Alors on peut vérifier que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} J(x) = 0$$

Autrement dit, J n'admet pas de minimiseur. Pourtant, cette fonction est coercive.

De la même manière, le caractère compact (c'est-à-dire borné et fermé en dimension finie) du domaine est essentiel :

Contre-exemple

Domaine non fermé. Considérons la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \,]\,-1\,;1\,[\\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on peut vérifier que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) > -1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} J(x) = -1$$

Autrement dit, J n'admet pas de minimiseur. Pourtant, cette fonction est coercive, convexe et continue sur son domaine.

Contre-exemple

Domaine non borné. Considérons la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \exp(x)$$

Alors on peut vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} J(x) = 0$$

Autrement dit, J n'admet pas de minimiseur. Pourtant, cette fonction est convexe et continue sur son domaine, qui est fermé.

En réalité, il est possible de remplacer dans la proposition 5 l'hypothèse de continuité sur le domaine fermé non vide par celle de semi-continuité inférieure (module **A1 : Éléments de topologie**) :

Proposition 6 (Existence de minimiseurs III)

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction **coercive** et **s.c.i.** On suppose que son domaine est non vide. Alors J admet un minimiseur.

DÉMONSTRATION : Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante de J (qui existe d'après la proposition 2). Si cette suite n'est pas bornée, alors la suite des $\|x_k\|$ diverge vers $+\infty$. La coercivité de J assurerait donc que $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que cette suite a pour limite la borne inférieure de J (qui appartient à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ car $\operatorname{dom} J \neq \emptyset$). Par conséquent, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons x^* sa limite. Puisque J est s.c.i., il s'ensuit que

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} J(x) \leq J(x^*) \leq \liminf_{j\to+\infty} J(x_{k_j}) = \lim_{j\to+\infty} J(x_{k_j}) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

Autrement dit, x^* est un minimiseur de J. ■

En dimension infinie, de toute suite bornée on ne peut extraire que des sous-suites *faiblement* convergentes. Cependant, il est possible de montrer que, dans ce cas, ajouter l'hypothèse de convexité sur J permet d'assurer l'existence d'un minimiseur.

Terminons ce paragraphe avec deux résultats spécifiques aux fonctions convexes.

Proposition 7 (Unicité du minimiseur)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction **strictement convexe**. Alors J admet au plus un minimiseur.

DÉMONSTRATION : Supposons que J admet deux minimiseurs $x_1 \neq x_2$. Ces deux points appartiennent nécessairement au domaine de J. La fonction J étant strictement convexe, on a alors

$$J\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{J(x_1)+J(x_2)}{2} = J(x_1)$$

où le point $(x_1+x_2)/2$ appartient au domaine, convexe, de J. Ceci est absurde car x_1 est un minimiseur de J. ■

Proposition 8 (Minimiseur d'une fonction fortement convexe)

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. On suppose que J est **fortement convexe**, de module α, et propre. Alors J admet un unique minimiseur.

Démonstration : L'unicité du minimiseur est une conséquence directe de la stricte convexité de J. Il suffit alors de montrer que la fonction J est coercive. Puisqu'on est en dimension finie, J est sous-différentiable en tout point de l'intérieur relatif (non vide) de son domaine. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$ tel que $\partial J(x^0)$ soit non vide. Soit $p \in \partial J(x^0)$. Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq J(x^0) + \langle p, x - x^0 \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - x^0\|_2^2$$

En développant le carré, on montre qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in R$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) \geq \langle a, x \rangle + b + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$$

Il suffit alors d'expliciter l'écriture du produit scalaire et de la norme au carrée, et de montrer (par l'absurde) que si $\|x_k\|_2$ tend vers $+\infty$, alors au moins une des coordonnées de la suite des x_k tend vers $+\infty$ aussi. ■

En dimension infinie, l'existence d'une minorante affine pour une fonction convexe s.c.i. et propre découle du théorème de Fenchel–Moreau (module **A8 : Dualité de Fenchel et conjuguée convexe**), de sorte que toute fonction fortement convexe s.c.i. propre est coercive. La remarque de la page 8 assure donc l'existence d'un minimiseur pour toute fonction fortement convexe.

2 Condition d'optimalité du premier ordre

2.1 Points critiques

Définition 7 (Point critique ou stationnaire)

Soit $J : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On appelle *point critique* ou *point stationnaire* de J tout point $x^* \in \mathcal{X}$ tel que

$$0 \in \partial J(x^*)$$

On note $\operatorname{crit} J$ l'ensemble des points critiques de J.

Dans le cas différentiable, les points critiques sont exactement les zéros du gradient. Dans le cas d'une fonction réelle continûment dérivable, il existe quatre types de points critiques isolés :

- **minima locaux** : la dérivée y change de signe, passant du négatif au positif ;
- **maxima locaux** : la dérivée y change de signe, passant du positif au négatif ;
- **points d'inflexion montants** : la dérivée reste positive au voisinage du point ;
- **points d'inflexion descendants** : la dérivée reste négative au voisinage du point.

Il existe évidemment des exemples de points critiques non isolés, pour lesquels la dérivée reste nulle sur un voisinage.

2.2 Règle de Fermat

Proposition 9 (Condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**. Soit $x^* \in \operatorname{dom} J$. Alors on a l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

(i) x^* est un minimiseur de J ;

(ii) $0 \in \partial J(x^*)$.

Cette condition est également connue sous le nom de *règle / théorème de Fermat* ; on parle parfois d'*équation d'Euler–Lagrange*.

Démonstration : Par définition, si x^* est un minimiseur de J si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq J(x^*) = J(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle$$

c'est-à-dire si et seulement si $0 \in \partial J(x^*)$. ■

Si J n'est pas convexe, alors cette condition n'est plus suffisante :

Proposition 10 (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Soit $x^* \in \operatorname{dom} J$ un minimiseur de J. Alors $0 \in \partial J(x^*)$.

Autrement dit, tout minimiseur est un point critique. La réciproque est en générale fausse, puisqu'il existe des points critiques qui ne sont pas des minimiseurs. Dans le cas différentiable, on peut citer par exemple les minimiseurs locaux ou les maximiseurs (locaux et globaux).

Démonstration : En reprenant les calculs de la preuve précédente, on prouve que si x^* est un minimiseur de J, alors $0 \in \hat{\partial} J(x^*) \subset \partial J(x^*)$. ■

3 Algorithmes du premier ordre

3.1 Algorithmes d'optimisation

On formalise ici la notion d'algorithme utilisée dans ce cours.

Définition 8 (Algorithme)

On définit un *algorithme* comme une application $\mathcal{A}$ qui pour tout $k \in \mathbb{N}$, associe au point courant x_k et un ensemble de *paramètres* $\mathcal{P}_k$ (appartenant à un espace vectoriel de dimension finie) un nouveau point x_{k+1}. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = \mathcal{A}(x_k; \mathcal{P})$$

est alors dite générée par $\mathcal{A}$. Le point initial x_0 est un des éléments de $\mathcal{P}$.

Remarque : Dans cette définition, on suppose que la suite générée par $\mathcal{A}$ est infinie. En pratique, cette suite sera toujours finie (ou, plus exactement, tronquée).

Un algorithme d'optimisation $\mathcal{A}$ vise à résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en générant une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ qui doit, idéalement, converger vers un point x^* minimiseur de J :

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \text{avec} \qquad x^* \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

Un algorithme d'optimisation $\mathcal{A}$ **du premier ordre** quant à lui tente de trouver un **minimiseur** de J en recherchant un **point critique** de J. Il doit donc être conçu de sorte de générer une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \text{avec} \qquad 0 \in \partial J(x^*)$$

De manière générale, il faut donc s'assurer par ailleurs que le point critique trouvé est bien un minimiseur de J.

3.2 Modes de convergence

Démontrer la convergence d'un algorithme, c'est démontrer que la suite générée par celui-ci converge bien vers un point satisfaisant les conditions désirées. Dans le cadre des méthodes d'optimisation du premier ordre, ces conditions peuvent être écrites sous les trois formes suivantes

- (minimiseur) $$x^* \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J(x) \tag{C1}$$
- (minimum) $$J(x^*) = \min_{x\in\mathcal{X}} J(x) \tag{C2}$$
- (point critique) $$0 \in \partial J(x^*) \tag{C3}$$

La propriété la plus forte est la première, dans le sens où si x^* est un minimiseur de J, alors $J(x^*)$ est le minimum de J et x^* est un point critique de J. La seconde condition est moins exploitable, car elle ne concerne que la valeur du minimum ; or celle-ci n'est pas suffisante pour déterminer un minimum. Enfin, la dernière condition est la plus faible, car un point critique n'est pas nécessairement un minimiseur. Notons que, même si la condition (C3) semble équivalente à la condition (C1) dans le cas d'une fonction convexe, elles sont en réalité très différentes : savoir qu'un point x^* admet pour (sous-)gradient 0 ne permet pas de le déterminer.

Les preuves de convergence d'algorithmes du premier ordre s'attachent donc à démontrer tout ou partie des propriétés suivantes sur les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générées par un algorithme $\mathcal{A}$. Commençons par les propriétés de convergence *forte*, c'est-à-dire portant sur la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

- convergence de la suite des itérés x_k :
$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \tag{A-I}$$
- convergence des itérés vers un minimiseur de J :
$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \text{avec} \qquad x^* \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J(x) \tag{A-II}$$
- convergence des itérés vers un point critique de J :
$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \text{avec} \qquad 0 \in \partial J(x^*) \tag{A-III}$$

Il s'agit en général des propriétés les plus difficiles à établir. Pour certains algorithmes, il est même nécessaire de se contenter de la convergence d'une sous-suite (ou de toutes les sous-suites). Le deuxième ensemble de propriétés concerne la convergence de la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$:

- convergence en valeur / du critère :

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J^* \tag{B-I}$$

- convergence en valeur / du critère vers le minimum de J (suite minimisante) :

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \min_{x\in\mathcal{X}} J(x) \tag{B-II}$$

La première propriété est souvent la plus facile à établir (et, pour une certaine classe d'algorithmes, dans une forme plus forte, à savoir la monotonie de la suite des $J(x_k)$). Enfin, considérons les propriétés de convergence du premier ordre à proprement parler, c'est-à-dire celles qui concernent la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec p_k un sous-gradient de J en x_k) :

- convergence des sous-gradients :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, \exists\, p_k \in \partial J(x_k), \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = p^* \tag{C-I}$$

- convergence vers le critère d'optimalité / des sous-gradients vers 0 :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, \exists\, p_k \in \partial J(x_k), \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = 0 \tag{C-II}$$

Insistons sur le fait qu'en général, la dernière propriété ne suffit pas (même dans le cas convexe), à démontrer la convergence forte de l'algorithme vers un minimiseur de J. Notons par ailleurs qu'il n'est pas toujours possible de démontrer tous ces modes de convergence pour un même algorithme. Toutefois, sous certaines hypothèses sur le problème (sur la fonction objectif J), il existe des liens naturels entre certains modes de convergence. En voici quelques uns :

Proposition 11 (Cas continu)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par un algorithme $\mathcal{A}$. Soit $x^* \in \operatorname{dom} J$. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(i) le point $x^* \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} J)$ et J est continue au voisinage de x^* ;

(ii) la fonction J est continue sur son domaine et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \qquad x_k \in \operatorname{dom} J$$

Alors $$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x^*)$$

De plus, si x^* est un minimiseur de J, alors $J(x^*)$ est le minimum de J.

Autrement dit, la convergence des itérées (A-I) (resp. vers un minimiseur (A-II)) implique la convergence en valeur (B-I) (resp. vers le minimum (B-II)).

Dans le cas convexe, on a le résultat suivant :

Proposition 12 (Cas convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** propre. On suppose que J admet un minimiseur. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par un algorithme $\mathcal{A}$. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est **bornée** et que

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, \qquad p_k \in \partial J(x_k) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = 0$$

Alors la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimum de J.

DÉMONSTRATION : Soit $k \in \mathbb{N}$ et x^* un minimiseur de J. D'après la convexité de J,

$$J(x^*) \geq J(x_k) + \langle p_k, x^* - x_k \rangle$$

L'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ permet d'obtenir la majoration suivante :

$$0 \leq J(x_k) - J(x^*) \leq \|p_k\| \, \|x_k - x^*\|$$

Par comparaison, on obtient le résultat désiré. ■

Ce dernier résultat nécessite de montrer que la suite générée par l'algorithme est bornée. Ce n'est pas toujours le cas, ni évident à établir. Notons par ailleurs que rien ne garantit la convergence forte de l'algorithme.

Grâce à la fermeture du sous-différentiel, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par un algorithme $\mathcal{A}$. Soit $x^* \in \operatorname{dom} J$. On suppose que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x^*)$$

et que $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad p_k \in \partial J(x_k) \quad$ avec $\quad \displaystyle\lim_{k\to+\infty} p_k = 0$

Alors $\qquad 0 \in \partial J(x^*)$

Autrement dit, la convergence des itérées (A-I), du critère d'optimalité (C-I) et des sous-gradients vers 0 (B-II) implique la convergence des itérés vers un point critique (A-III).

Dans le cas fortement convexe en dimension finie, on peut établir le résultat suivant :

Proposition 14

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe, de module α, s.c.i. et propre. Soit x^* l'unique minimiseur de J. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par un algorithme $\mathcal{A}$. Alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k - x^*\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha} \left(J(x_k) - \min_{\mathcal{X}} J \right)$$

DÉMONSTRATION : Soit $k \in \mathbb{N}$. On écrit la définition de la forte convexité de J aux points x_k et x^* :

$$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad J(\lambda\, x_k + (1-\lambda)\, x^*) \leq \lambda\, J(x_k) + (1-\lambda)\, J(x^*) - \frac{\alpha}{2}\, \lambda\, (1-\lambda)\, \|x_k - x^*\|_2^2$$

Par définition de x^*, on a

$$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad J(x^*) \leq J(\lambda\, x_k + (1-\lambda)\, x^*)$$

de sorte que l'inégalité précédente se simplifie en

$$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad \|x_k - x^*\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha\,(1-\lambda)} \left(J(x_k) - J(x^*) \right)$$

Il suffit alors de majorer la quantité $1-\lambda$ pour obtenir le résultat désiré. ■

Ainsi, si J est fortement convexe s.c.i. en dimension finie, alors toute suite minimisante de J converge vers le minimiseur de J. Ce résultat n'est évident pas vrai en général (il suffit de considérer par exemple une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et la suite des entiers naturels). Autrement dit, la convergence du critère vers le minimum (B-II) entraîne la convergence forte vers le minimiseur (A-II).

Les différents modes de convergence permettent de définir des *critères d'arrêt* pour les algorithmes, c'est-à-dire de définir une condition qui, une fois satisfaite, entraîne l'arrêt des itérations. Un bon critère d'arrêt doit stopper les itérations en un temps fini raisonnable (quelques secondes, minutes, heures en général, suivant les applications), aboutir à une itération suffisamment proche du point recherché et ne doit pas être trop complexe à calculer.

Ainsi par exemple, si on a démontré que la convergence des sous-gradients vers 0 (C-II), un critère d'arrêt pourrait être défini à l'aide d'un seuil dit de *tolérance* $\varepsilon > 0$, qui permettrait d'arrêter les itérations dès que la condition suivante est satisfaite pour un certain $k \in \mathbb{N}$:

$$\|p_k\| < \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad p_k \in \partial J(x_k)$$

Ce critère est exploitable à condition qu'un tel p_k soit calculable (et on a vu dans le module **A2 : Sous-différentiabilité** qu'il est parfois difficile à déterminer) et avec une complexité raisonnable. Évidemment, si ε est choisi trop grand, alors le point final obtenu x_k peut être trop éloigné d'un minimiseur (ou d'un point critique) de J. En revanche, si ε est trop petit, il faudra peut-être trop d'itérations pour satisfaire le critère d'arrêt défini. En pratique, le choix de la valeur ε est parfois difficile, d'autant que le lien entre la valeur $\|p_k\|$ et la distance de x_k au minimiseur / point critique x^* (le cas échéant) n'est pas toujours explicite.

Pour s'affranchir de cette difficulté, on serait tenté d'utiliser un autre mode de convergence. Le plus naturel est d'utiliser la convergence des itérés x_k vers un point x^* (A). En effet, définir comme critère d'arrêt

$$\|x_k - x^*\| < \varepsilon$$

permet de contrôler très précisément l'erreur commise. Malheureusement, un tel critère d'arrêt nécessite de connaître le point x^*, ce qui n'est évidemment pas le cas puisque c'est justement le point recherché. Un moyen simple d'utiliser la convergence des itérés (si elle est démontrée) est de définir plutôt un critère d'arrêt de la forme

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$$

Malheureusement, il est alors difficile d'en déduire l'erreur commise à l'issu des itérations. Si ε est choisi très petit (par exemple $\varepsilon = 10^{-9}$), on peut numériquement estimer que le point limite x^* est atteint, car la suite des itérés reste constante à un arrondi près (même si rien n'interdit à la suite des itérées de "stagner" momentanément !). Les mêmes remarques sont valables si on utilise la convergence du critère (B).

3.3 Taux de convergence

Afin de pour définir des critères d'arrêt raisonnables, il est souvent utile d'avoir une idée de la *vitesse* de convergence d'un algorithme, c'est-à-dire de la vitesse de convergence de la distance des suites générées par l'algorithme à leur limite (s'il a été démontré qu'elle existait) vers 0. On prend l'exemple de la convergence des itérés.

Définition 9 (Taux de convergence)

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par un algorithme $\mathcal{A}$. On suppose qu'elle converge vers $x^* \in \mathcal{X}$, et qu'elle ne converge pas en un nombre fini d'itérations. La convergence de l'algorithme $\mathcal{A}$ est dite :

- *linéaire* s'il existe $\tau \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|} = \tau$$
- *d'ordre p* s'il existe $\tau \in [\,0\,;+\infty\,[$ tel que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|^p} = \tau$$

Remarque : Si $p=2$, on parle de taux de convergence *quadratique*.

La convergence linéaire est la plus intéressante, mais généralement réservée à des problèmes très réguliers. Elle se traduit par une décroissante exponentielle de l'erreur (ici $\|x_k - x^*\|$). On peut parfois démontrer des taux de convergence linéaire (ou d'ordre p) pour les suites $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

> Afin de conserver une taille raisonnable pour ce polycopié, l'estimation des taux de convergence pour les algorithmes étudiés ne sera pas examinée.

Pour aller plus loin

Optimisation sous contraintes. L'introduction de la droite achevée permet de transformer les problèmes d'optimisation sous contraintes en problèmes non contraints. Plus précisément, elle permet d'utiliser un formalisme commun pour étudier les deux types de problèmes, en incorporant dans la fonction objectif les contraintes à l'aide de l'indicatrice de l'ensemble admissible. De fait, un problème sous contraintes (différentiable ou non) peut donc toujours être vu comme un problème d'optimisation **non différentiable** non contraint.

Problèmes équivalents. Pour certains algorithmes, il peut être plus simple d'introduire un problème auxiliaire équivalent et s'intéresser à la résolution de ce problème auxiliaire pour en déduire celle du problème initial.

Modes de convergence. Pour chacune des méthodes d'optimisation que l'on étudiera dans les modules suivront, on s'attachera à démontrer les différents modes de convergence présentés dans ce module.