Feuille d'exercices n°1
Éléments de topologie
Calcul sous-différentiel

Exercice 1 – Indicatrices d'ensemble

Module A1, Propositions 2, 6 & 8

Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{X}$ deux ensembles non vides.

(a) Justifier que
$$\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$$

(b) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est convexe. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ convexe.

(c) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est fermé. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ s.c.i.

(d) Montrer que
$$\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} + \chi_{\mathcal{A}_2}$$
À quelle condition $\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est-il non vide ?

(e) En déduire que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont convexes, fermés et non vides, alors $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est convexe, s.c.i. et propre.

Exercice 2 – Fonctions continues sur son domaine fermé

Module A1, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Soit $x^0 \in \operatorname{dom} J$. Montrer que J est s.c.i. en x^0.

(b) Soit $x^0 \notin \operatorname{dom} J$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^0. Montrer que l'ensemble
$$\left\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{dom} J \right\}$$
est fini.

(c) On suppose que $\operatorname{dom} J$ est fermé non vide. Montrer que J est s.c.i.

Exercice 3 – Enveloppe supérieure de fonctions convexes s.c.i

Module A1, Propositions 5 & 11

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. propre pour tout $i \in \mathcal{I}$. On note f l'enveloppe supérieure des f_i. Pour toute fonction $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit
$$\operatorname{epi} g = \left\{ (x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t \geq g(x) \right\}$$

(a) Soit $(x,y) \in \operatorname{epi} f$. Montrer que
$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \qquad y \geq f_i(x)$$

(b) En déduire que
$$(x,y) \in \operatorname{epi} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{epi} f_i$$

(c) Justifier que $\operatorname{epi} f_i$ est convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(d) Montrer que $\operatorname{epi} f$ est convexe. En déduire que f est convexe.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que
$$\left\{ x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x) \right\}$$
est fermé pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(f) En déduire que $\operatorname{epi} f_i$ est fermé, puis que $\operatorname{epi} f$ est fermé.

(g) En raisonnant par l'absurde, montrer que f est s.c.i.

(h) La fonction f est-elle propre ?

Exercice 4 – Fonction convexe non continue

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de f ? La fonction f est-elle continue sur $\operatorname{dom} f$?

(b) Montrer que f est convexe.

(c) La fonction f est-elle s.c.i. ?

Exercice 5 – Caractérisation des fonctions fortement convexes

Module A1, Proposition 13

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module α.

(a) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On introduit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{\alpha}{2}\, \|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

(b) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

(c) Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

Exercice 6 – Sous-différentiel de la norme

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

(a) Justifier que $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

(b) Montrer que $\|\cdot\|$ est différentiable sur $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, de gradient

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \nabla\|\cdot\|(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

(c) Montrer que tout $p \in \mathcal{X}$ de norme inférieure ou égale à 1 est sous-gradient de $\|\cdot\|$ en 0.

(d) Montrer que, si $\|p\| > 1$, alors

$$p \in \partial\|\cdot\|(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \|p\| \geq \|p\|^2$$

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

Exercice 7 – Sous-différentiel de la somme de fonctions convexes

Module A2, Proposition 8

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ deux fonctions convexes telles que $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

(a) Montrer que $\qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f+g), \qquad \partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$

(b) On considère la fonction réelle définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est convexe, propre et s.c.i.

(c) Supposons qu'il existe $p \in \partial f(0)$. Justifier que

$$\forall\, x > 0, \qquad -1 \geq p\,\sqrt{x}$$

et que $p < 0$. Montrer que ce n'est pas possible.

(d) Justifier que la fonction $g = \chi_{]-\infty\,;0]}$ est convexe, propre et s.c.i. Montrer que $\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$.

(e) Vérifier que $\partial(f+g)(0) = \,]-\infty\,;+\infty\,[$. Conclure.