Feuille d'exercices n°7

Dualité de Fenchel
Éclatement primal-dual

Exercice 1 – Propriétés de la conjuguée convexe

Module A7, Propositions 1 et 2 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction de domaine non vide.

(a) Montrer que J^* est une fonction convexe.

(b) Montrer que J^* est une fonction s.c.i.

(c) On suppose que J admet une minorante affine. Montrer que J^* est propre.

(d) En déduire que si J est convexe et propre, alors J^* est convexe, propre et s.c.i.

Exercice 2 – Théorème de Fenchel–Moreau

Module A7, Lemme 1, Proposition 5 et Théorème 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i et propre.

(a) Montrer que $$\forall\,(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad J(x) + J^*(y) \geq \langle x, y \rangle$$

(b) En déduire que J admet une minorante affine et que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle x, y \rangle - J^*(y) \Big\}$$

(c) Montrer que J^{**} est l'ensemble supérieure des minorantes affines de J.

(d) En déduire que $$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle x, y \rangle - J^*(y) \Big\}$$

Exercice 3 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^*.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\|x\|^2 \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right.$

(c) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)} \end{array} \right.$

Exercice 4 – Règle de bascule

Module A7, Lemme 3, Propositions 6 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $x \in \operatorname{dom} J$ et $p \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que $$p \in \partial J(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad J(x) + J^*(p) = \langle p, x \rangle$$

(b) Soit $y \in \mathcal{X}$ et $p \in \partial J(x)$. Montrer que
$$\langle p - y, x \rangle + J^*(y) \geq \langle p, x \rangle - \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x \rangle + J^*(y) \Big\}$$

En déduire que $$\langle p - y, x \rangle + J^*(y) \geq \langle p, x \rangle - \langle p, x \rangle + J^*(p)$$

(c) Montrer que $x \in \partial J^*(p)$.

(d) On suppose que J est s.c.i. et propre. Montrer que
$$p \in \partial J(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \partial J^*(p)$$

Exercice 5 – Règles de calcul

Module A7, Propositions 8 et 9

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^* en fonction de f^*.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \alpha\, f(x) \end{array} \right.$ **(b)** $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array} \right.$ **(c)** $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(x - x^0) \end{array} \right.$

Exercice 6 – Identité de Moreau

Module A7, Proposition 11

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$. On pose

$$p = x^0 - x^+$$

(a) Justifier que $p \in \partial J(x^+)$. En déduire que $x^+ \in \partial J^*(p)$.

(b) Montrer que $p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$.

(c) En déduire que $\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{prox}_J(x) + \operatorname{prox}_{J^*}(x)$

Exercice 7 – Éclatement de Dykstra

Soit $f, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ J(x) := f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\, \|x - r\|^2 \right\}$$

(a) Justifier que le problème considéré possède une unique solution.

(b) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x) + h(x) = \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$

(c) Écrire le problème considéré comme un problème de recherche point-selle.

(d) Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2} \left\{ f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2}\, \|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\}$$

(e) Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?

Exercice 8 – Problèmes composites

Module B7, Proposition 1

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(A\, x) + g(x) \qquad (\mathcal{P}_{\text{C-P}})$$

(a) On suppose qu'il existe une solution primale x^*. Les caractériser au premier ordre.

(b) Justifier que $\partial f(A\, x^*)$ est non vide. Soit $p \in \partial f(A\, x^*)$. Montrer que

$$-A^* p \in \partial g(x^*)$$

(c) En utilisant la conjuguée convexe de f, proposer une formulation primale-duale n'impliquant aucune composition de fonctions.

(d) Écrire le problème dual associé. Exprimer la fonction duale à l'aide de f^*, g^* et A^*.

(e) Caractériser les solutions duales. En déduire que p est une solution duale.

(f) Montrer que le problème primal-dual considéré vérifie la propriété de dualité forte.

(g) En déduire que (x^*, p) est un point-selle d'une fonction que l'on précisera.