Module B4
Éclatement primal d'opérateurs

Sauf mention contraire, $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme qui découle du produit scalaire.

Dans ce module, on s'intéresse au problème de minimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x) \tag{$\mathcal{P}$}$$

où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont des fonctions s.c.i. de domaine non vide, telle que le domaine de $f + g$ soit également non vide. On supposera que ce problème admet au moins une solution. L'objectif de ce module est d'étudier le cas où la somme $f+g$ n'est ni différentiable (ou régulière, c'est-à-dire de gradient lipschitzien), ni simple (c'est-à-dire que son opérateur proximal n'est pas évaluable numériquement), mais que chacun des termes f et g est régulier ou simple.

1 Principe et observations

1.1 Motivation

Notons J la fonction objectif du problème $(\mathcal{P})$:

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = f(x) + g(x)$$

Il est opportun de signaler que, même si seulement f ou g est différentiable, rien de garantit la différentiabilité de J. Il en est de même pour la régularité (qui est un cas particulier de la différentiabilité), ni de la convexité. De manière analogue, si seulement f ou g est simple, c'est-à-dire si l'opérateur prox_f ou prox_g est calculable, rien ne garantit en revanche que J soit simple (ni même que prox_J soit non vide pour un point donné). La somme de deux fonctions simples n'est pas simple non plus. Ainsi, on suppose ici que, quels que soient les propriétés des termes f et g, la somme J n'est ni régulière ni simple, de sorte que ni la méthode du gradient explicite (**B2 : Méthodes du gradient explicite**), ni l'algorithme du point proximal (**B3 : Algorithme du point proximal**) n'est applicable.

Par ailleurs, on rappelle que la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre (règle de Fermat) assure que les solutions du problème $(\mathcal{P})$ sont des points critiques de J, c'est-à-dire des points x^* pour lesquels son sous-différentiel en x^* contient le vecteur nul ; autrement dit, ces points vérifient l'inclusion

$$0 \in \partial(f+g)(x^*)$$

(la réciproque étant vraie si $f+g$ est convexe). On a vu dans le module **A2 : Sous-différentiabilité** que le lien entre le sous-différentiel de la somme $f+g$ et les sous-différentiels respectifs de f et g n'est pas simple. En général, on a

$$\partial(f+g)(x) \neq \partial f(x) + \partial g(x)$$

Les cas d'égalité comprennent entre autres le cas où f et g sont convexes propres avec f ou g continue en un point $x \in \operatorname{intr}(\operatorname{dom} J)$ et le cas où f (ou g) est continûment différentiable dans un voisinage de $x \in \operatorname{dom} J$.

1.2 Premier exemple : *feasibility problem*

Considérons dans ce paragraphe un problème courant en optimisation : la recherche d'un point admissible d'un problème d'optimisation (en anglais, *feasibility problem*). La connaissance d'un tel point peut-être utile, en particulier pour initialiser des méthodes qui auraient besoin d'être initialisées avec un point admissible. On va s'intéresser en particulier au cas du problème d'optimisation $(\mathcal{P})$, où la fonction objectif J est la somme de deux fonctions f et g, de domaine respectif $\operatorname{dom} f$ et $\operatorname{dom} g$.

Commençons par remarquer que, si la projection sur $\operatorname{dom} J$ est calculable, il suffit de calculer la projection d'un point x^0 sur $\operatorname{dom} J$: par définition, $\operatorname{proj}_{\operatorname{dom} J}(x^0)$ appartient à l'ensemble $\operatorname{dom} J$, donc à l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$. En revanche, même si les projections sur $\mathcal{C}_1 = \operatorname{dom} f$ et sur $\mathcal{C}_2 = \operatorname{dom} g$ sont calculables, rien ne garantit que celle sur $\operatorname{dom} J = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ l'est. Dans ce cas, le problème de la recherche d'un point admissible est le problème suivant :

$$\text{Trouver } x \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$$

que l'on peut réécrire sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \chi_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{feasibility}}$}$$

En effet, tous les points admissibles de $(\mathcal{P})$ sont admissibles pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$ et sont optimaux (car ils prennent la valeur nulle). Si la projection sur $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ n'est pas calculable, la fonction $\chi_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}$ n'est pas simple, donc il n'est pas possible d'appliquer l'algorithme du point proximal. Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \mathcal{X}$, le problème $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$ n'est pas différentiable, donc la méthode du gradient explicite n'est pas non plus envisageable.

Remarquons que $\chi_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} = \chi_{\mathcal{C}_1} + \chi_{\mathcal{C}_2}$. Le problème $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$ se réécrit alors

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x)$$

Si on suppose que les projections sur $\mathcal{C}_1$ et sur $\mathcal{C}_2$ sont calculables, alors ce problème satisfait les hypothèses choisies dans ce module, puisque $\chi_{\mathcal{C}_1}$ et $\chi_{\mathcal{C}_2}$ sont simples.

1.3 Méthode de Douglas–Rachford

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont convexes, fermés et non vides, on peut utiliser la méthode de Douglas–Rachford pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_{\text{feasibility}})$. Cette méthode peut en réalité être utilisée pour résoudre le problème générique $(\mathcal{P})$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes** simples, telles qu'il existe $x^* \in \mathcal{X}$ vérifiant

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)$$

Autrement dit, si f ou g est continue en x^*, par convexité, on en revient à supposer l'existence d'un minimiseur. Les itérations de la méthode de Douglas–Rachford s'écrivent

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \mu \left(p_{k+1/2} - x_{k+1} \right) \end{cases}$$

avec $\mu \in \left]0\,;2\right[$.

> Dans la littérature, l'algorithme de Douglas–Rachford (DRS) désigne souvent uniquement le cas particulier où le paramètre μ vaut 1 ; dans le cas général, on parle plutôt de l'algorithme de Peaceman–Rachford (PRS).

Appliquées au problème ($\mathcal{P}_{\text{feasibility}}$), les itérations de la méthode de DOUGLAS–RACHFORD s'écrivent

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(2\,x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \big(p_{k+1/2} - x_{k+1}\big) \end{cases}$$

> Une manière plus simple de minimiser la somme de deux fonctions f et g convexes et simples serait d'appliquer l'algorithme implicite-implicite dans lequel les itérées sont définies par
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau f}\big(\operatorname{prox}_{\tau g}(x_k)\big)$$
>
> Cependant, les propriétés de convergence de ce schéma sont moins intéressantes que celle de la méthode de DOUGLAS–RACHFORD.

> L'étude des propriétés de la méthode de DOUGLAS–RACHFORD fait appel à la théorie des opérateurs maximaux monotones, qui utilise un formalisme différent, mais complémentaire, de celui posé dans ce cours. C'est la raison pour laquelle, malgré l'importance de cet algorithme en optimisation moderne, la convergence de cette méthode ne sera pas étudiée dans ce cours.

2 *Forward-backward splitting*

2.1 Position du problème

On s'intéresse au problème ($\mathcal{P}$) dans le cas où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière, c'est-à-dire qu'elle est différentiable et que son gradient est lipschitzien de constante L ; et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction simple, c'est-à-dire qu'il est possible d'évaluer son opérateur proximal prox_g.

La règle de FERMAT s'écrit dans le cas que nous sommes en train de considérer

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*) \qquad \text{soit} \qquad x^* \in x^* - \tau\,\nabla f(x^*) - \tau\,\partial g(x^*)$$

pour tout $\tau > 0$; ainsi, si g est **convexe**, alors, en utilisant la caractérisation du point proximal, on obtient

$$x^* = \operatorname{prox}_{\tau g}\big(x^* - \tau\,\nabla f(x^*)\big)$$

de sorte que les points critiques x^* de J peuvent être vus comme des points fixes. Réciproquement, si g est quelconque (non nécessairement convexe), alors de tels points fixes sont des points critiques de J, en vertu de la proposition 6 du module **A5 : Opérateur proximal de MOREAU**.

2.2 Algorithme FBS

L'interprétation des points critiques de J comme des points fixes justifie de considérer les itérations du point fixe suivantes :

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}\big(x_k - \tau_k\,\nabla f(x_k)\big) \quad \text{avec } \tau_k > 0$$

Cette méthode est connue sous le nom d'*algorithme du gradient explicite-implicite*. On parle également d'éclatement explicite-implicite, ou *forward-backward splitting* (FBS) en anglais.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut interpréter un point x_{k+1} comme étant calculé en appliquant successivement un pas de gradient *explicite* sur f, de pas de temps τ_k :

$$x_{k+1/2} = x_k - \tau_k \nabla f(x_k)$$

puis un pas proximal, c'est-à-dire de (sous-)gradient *implicite*, sur g, de même pas de temps :

$$x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}(x_{k+1/2})$$

d'où le nom de la méthode.

Notons que cette méthode génère des points des points admissibles, car on sait que le point proximal x_{k+1} appartient au domaine de g, qui est égal au domaine de J. Si g est convexe, alors la suite des itérés est définie de manière unique. Remarquons que si $g = 0$, alors on retrouve les itérations de la méthode du gradient explicite. Si $f = 0$, alors on retrouve les itérations de l'algorithme du point proximal.

En utilisant la définition du point proximal, on peut montrer que

$$x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ g(x) + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{\tau}{2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right\}$$

L'ajout de termes constants par rapport à x ne modifiant pas les minimiseurs, on a :

$$x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \tilde{f}_k(x) + g(x) \right\} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{f}_k : x \mapsto f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2$$

La fonction $\tilde{f}_k$ est une approximation quadratique de la fonction f autour de x_k ; aussi, le point x_{k+1} peut être vu comme un minimiseur d'une approximation de J autour du point précédent x_k. Il est clair qu'à cause de la présence du terme $g(x)$, cette approximation n'est plus quadratique, ni même différentiable. En revanche, si g est convexe, elle est fortement convexe (de module $1/\tau$).

Établissons dès à présent quelques résultats sur l'approximation $\tilde{J}_k = \tilde{f}_k + g$.

Proposition 1 (Lien entre le minimum de J et de $\tilde{J}_k$)

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J admet un minimiseur. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau \nabla f(x^0)\right)$$

et on pose

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \dfrac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Si $\tau \in \,]\,0\,; 1/L\,]$, alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) \geq J(x) \qquad \text{et} \qquad \min_{x \in \mathcal{X}} \tilde{J}(x) \geq \min_{x \in \mathcal{X}} J(x)$$

Démonstration : Soit x^* un minimiseur de J. On rappelle que, par définition, x^+ est un minimiseur de $\tilde{J}$.

- **Démontrons que $\tilde{J}(x) \geq J(x)$.** Si $\tau \in \,]\,0\,; 1/L\,]$, alors $L \leq 1/\tau$ et donc f est τ-régulière. Aussi, le lemme de descente (proposition 4 du module **A4 : Fonctions régulières**) assure que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) \leq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2$$

Il suffit d'ajouter $g(x)$ à cette inégalité pour obtenir le résultat annoncé.

- **Démontrons que** $\tilde{J}(x^+) \geq J(x^*)$**.** En effet, on a

$$\tilde{J}(x^+) - J(x^*) = \tilde{J}(x^+) - J(x^+) + J(x^+) - J(x^*) \geq \tilde{J}(x^+) - J(x^+)$$

par optimalité de x^*. On utilise alors le point précédent pour conclure. ■

Si g est supposée convexe, alors on a de plus la minoration suivante :

Proposition 2

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe** s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ = \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\, \nabla f(x^0)\right)$$

et on pose pour $\tau > 0$

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Alors on a $\qquad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) - \tilde{J}(x^+) \geq \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|x - x^+\|^2$

Démonstration : En effet, par définition de $\tilde{J}$, on a (après simplification)

$$\tilde{J}(x) - \tilde{J}(x^+) = g(x) - g(x^+) + \frac{1}{\tau}\,\langle x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0), x - x^+ \rangle + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x - x^+\|^2$$

Or, en appliquant la règle de Fermat à la définition de x^+, il s'ensuit que

$$-\frac{1}{\tau}\,(x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0)) \in \partial g(x^+)$$

La convexité de g entraîne alors que

$$g(x) \geq g(x^+) - \frac{1}{\tau}\,\langle x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0), x - x^+ \rangle$$

et la conclusion suit. ■

Si f est supposée convexe, alors on a une autre majoration :

Proposition 3

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière **convexe** et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J admet un minimiseur. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\, \nabla f(x^0)\right)$$

et on pose pour $\tau > 0$

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Alors on a $\qquad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) - J(x) \leq \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|x - x^0\|^2$

DÉMONSTRATION : En effet, on a

$$\tilde{J}(x) - J(x) = -f(x) + f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2$$

La majoration découle de la convexité de f. ■

On utilisera ces trois résultats dans la section suivante pour démontrer la convergence des itérées dans le cas convexe.

Une autre manière d'interpréter ces itérations est de les réécrire de la manière suivante :

$$x_{k+1} = \underset{x \in \mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x) + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2 \right\}$$

c'est-à-dire comme un pas de l'algorithme du point proximal pour la fonction

$$x \mapsto f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$$

qui est une autre approximation de la fonction J autour de x_k, obtenue en linéarisant la partie différentiable de la fonction objectif J.

2.3 Propriétés de convergence

Commençons par établir que, si les pas de temps τ_k sont correctement choisis, alors l'algorithme FBS est un schéma de descente. Pour le démontrer, prouvons le lemme suivant :

Lemme 1 (Lemme de descente)

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\tau > 0$. On définit le point suivant :

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\, f(x^0)\right)$$

Alors
$$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} - L \right) \|x^+ - x^0\|^2$$

Par ailleurs, si g est **convexe**, alors on a

$$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tau} - L \right) \|x^+ - x^0\|^2$$

Notons que l'on peut résumer ce résultat par l'inégalité suivante :

$$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\tau} - L \right) \|x^+ - x^0\|^2$$

où Q vaut 2 si g est convexe, et 1 sinon.

DÉMONSTRATION : Considérons séparément les cas où g est convexe ou non.

- **g n'est pas convexe.** Commençons par noter que, par optimalité, on a

$$g(x^+) + \frac{1}{2\,\tau} \|x^+ - x^0 + \tau\, \nabla f(x^0)\|^2 \leq g(x^0) + \frac{1}{2\,\tau} \|\tau\, \nabla f(x^0)\|^2$$

  Par ailleurs, la proposition 4 du module **A4 : Fonctions régulières** assure que

$$f(x^+) \le f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x^+ - x^0 \rangle + \frac{L}{2} \|x^+ - x^0\|^2$$

En sommant les deux inégalités et en réarrangeant les termes, on en déduit le résultat souhaité.

- g **est convexe.** Dans ce cas, on peut caractériser le point proximal de manière plus optimale à l'aide de l'inégalité proximale (proposition 8 du module **A5 : Opérateur proximal de Moreau**) :

$$g(x^0) \ge g(x^+) - \frac{1}{\tau} \langle x^0 - x^+, x^+ - x^0 + \tau \nabla f(x^0) \rangle$$

qu'il suffit de combiner à nouveau avec l'inégalité obtenue avec la proposition 4 du module **A4 : Fonctions régulières**. ■

Corollaire 1 (Convergence du critère)

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g} \left(x_k - \tau_k \nabla f(x_k) \right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. Si $\tau_k \in \,]\,0\,; Q/L\,[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers une valeur J^*. De plus, on a

$$J(x_{k+1}) \le J(x_k) - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\tau_k} - L \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence directe du lemme de descente, qui assure que, puisque la quantité $Q/\tau_k - L$ est strictement positive, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La convergence découle du fait que cette suite soit minorée par la borne inférieure de J. ■

Corollaire 2

Soit $J = f + g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g} \left(x_k - \tau \nabla f(x_k) \right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. Si $\tau \in \,]\,0\,; Q/L\,[$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$$

Démonstration : Il suffit de sommer les inégalités du corollaire 1 pour k entre 0 et $K-1$; après télescopage des termes, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\tau} - L \right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \le J(x_0) - J(x_K) \le J(x_0) - \inf J$$

Il s'ensuit que la série de terme général $\|x_{k+1} - x_k\|^2$ est absolument convergente, donc la suite des $\|x_{k+1} - x_k\|$ converge vers 0. ■

Intéressons-nous à présent à la convergence vers le critère d'optimalité. Puisque f est continûment différentiable, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\partial J(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1}) + \partial g(x_{k+1})$$

Par ailleurs, la règle de FERMAT appliquée à la définition de l'opérateur proximal assure que (proposition 6 du module **A5 : Opérateur proximal de MOREAU**)

$$x_k - \tau_k \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \tau_k \partial g(x_{k+1})$$

Combinons ces deux relations. Il s'ensuit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{x_k - x_{k+1}}{\tau_k} + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \in \partial J(x_{k+1})$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 4 (Convergence des sous-gradients)

Soit $J = f+g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On définit également

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad p_{k+1} = \frac{x_k - x_{k+1}}{\tau} + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \in \partial J(x_{k+1})$$

Si $\tau \in \,]\,0\,; Q/L\,[$, alors la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par ailleurs, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|p_{k+1}\| \le \left(\frac{1}{\tau} + L\right) \|x_{k+1} - x_k\|$$

DÉMONSTRATION : La majoration des $\|p_k\|$ est obtenue grâce à l'inégalité triangulaire et à la régularité de f. La convergence vers 0 est alors une conséquence du corollaire 2. ■

Si la fonction J est continue sur son domaine et que la suite des itérés admet au moins une valeur d'adhérence, alors on peut montrer que la suite des $J(x_k)$ converge vers la valeur d'un point critique de J et que tout point de l'adhérence de la suite des x_k est un point critique de J :

Proposition 5

Soit $J = f+g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x^* \in \operatorname{dom} J$. Si $\tau \in \,]\,0\,; Q/L\,[$, alors x^* est un point critique de J et

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x^*)$$

DÉMONSTRATION : On démontre séparément les deux affirmations.

- x^* **est un point critique.** Il s'agit d'une conséquence de la fermeture du sous-différentiel et de la proposition 1.
- $J^* = J(x^*)$**.** Cette égalité découle de la continuité de J en x^* et de la convergence de la suite des $J(x_k)$. ■

L'hypothèse selon laquelle la suite des itérés est d'adhérence non vide (et possède donc au moins un point d'accumulation) est vérifiée dès que la fonction J est coercive (en particulier, de domaine borné). Par ailleurs, la condition $x^* \in \operatorname{dom} J$ est satisfaite si le domaine de J (et donc celui de g) est fermé.

Pour obtenir une convergence des itérés, on peut démontrer le résultat suivant, qui est une stricte application du théorème d'ATTOUCH–BOLTE–SVAITER (module **A3 : Propriété de KURDYKA–ŁOJASIEWICZ**) :

Proposition 6 (Convergence des itérés I)

Soit $J = f+g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau\,\nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x^* \in \operatorname{dom} J$ et que J satisfait la propriété KŁ en x^*. Si $\tau \in \,]\,0\,; Q/L\,[$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.

DÉMONSTRATION : La condition de décroissance a été démontrée dans le corollaire 1, la condition d'erreur relative dans la proposition 1 et la condition de continuité est une conséquence des hypothèses. ■

Dans le cas où f et g (donc J) sont convexes, on peut s'affranchir de l'hypothèse KŁ.

Proposition 7 (Convergence des itérés II)

Soit $J = f+g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction **convexe** L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction **convexe** propre et continue sur son domaine supposé fermé. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau\,\nabla f(x_k)\right)$$

Si $\tau \in \,]\,0\,; 1/L\,]$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de J.

DÉMONSTRATION : Soit x^* un minimiseur de J. Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $\tilde{J}_k = \tilde{f}_k + g$.

- **La suite** $(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ **converge.** D'après la proposition 3, on a

$$\begin{aligned}\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) &= J(x^*) + \tilde{J}_k(x^*) - J(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) \\ &\leq J(x^*) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x^* - x_{k+1}\|^2 - \tilde{J}_k(x_{k+1})\end{aligned}$$

On peut alors appliquer la proposition 2, et obtenir

$$\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) \leq J(x^*) + \tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k) - \tilde{J}_k(x_{k+1})$$

Il s'ensuit que, d'après la proposition 1,

$$\big(\tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k)\big) - \big(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})\big) \geq \tilde{J}_k(x_{k+1}) - J(x^*) \geq 0$$

de sorte que la suite des $\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})$ est décroissante. Par optimalité de x_{k+1}, elle est également minorée par 0. Aussi, elle est convergente.

- **La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.** Puisque, d'après les propositions 1 et 2, on a

$$\tilde{J}_k(x_{k+1}) - J(x^*) = \tilde{J}_k(x_{k+1}) - \tilde{J}_k(x^*) + \tilde{J}_k(x^*) - J(x^*) \geq \frac{1}{\tau}\,\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

le calcul précédent assure en réalité que

$$\big(\tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k)\big) - \big(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})\big) \geq \frac{1}{\tau}\,\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

En sommant pour k entre 1 et K, il s'ensuit que

$$\tilde{J}_0(x^*) - \tilde{J}_0(x_1) \geq \big(\tilde{J}_0(x^*) - \tilde{J}_0(x_1)\big) - \big(\tilde{J}_K(x^*) - \tilde{J}_K(x_{K+1})\big) \geq \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{K}\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

La série de terme général $\|x^* - x_{k+1}\|^2$ converge donc absolument. Par conséquence, la suite $\|x^* - x_{k+1}\|$ converge vers 0. ■

2.4 Exemples d'application

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser à deux applications génériques de l'algorithme FBS, à savoir l'algorithme du gradient projeté et l'algorithme ISTA.

Une première application célèbre de l'éclatement explicite-implicite est l'application de l'algorithme de descente explicite-implicite au problème d'optimisation convexe lisse sous contraintes suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{C}} f(x) \qquad (\mathcal{P}_{\text{grad. proj.}})$$

avec f une fonction L-régulière et $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble **convexe**, fermé et non vide, qui peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation non contraint en introduisant l'indicatrice de $\mathcal{C}$:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ f(x) + \chi_{\mathcal{C}}(x) \Big\}$$

Si la projection sur $\mathcal{C}$ est calculable pour tout point $x \in \mathcal{X}$, alors les itérées FBS s'écrivent

$$x_0 \in \mathcal{X}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}\big(x_k - \tau_k\,\nabla f(x_k)\big) \qquad \text{avec } \tau_k > 0$$

Autrement dit, le point x_{k+1} s'obtient en appliquant un pas de descente de gradient explicite sur f en x_k ; si le point obtenu n'est pas admissible, alors il est projeté sur l'ensemble admissible. Il n'est pas évident qu'un tel schéma puisse être un schéma de descente ; pourtant, la proposition 7 assure que si f est **convexe** et que $\tau_k \leq 1/L$, alors c'est bien le cas.

Lorsque la fonction f est fortement convexe, et que l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe, alors la somme $f + \chi_{\mathcal{C}}$ est fortement convexe. Dans ce cas, on peut démontrer un autre résultat de convergence :

Proposition 8

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et fortement convexe de module $\alpha > 0$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, fermé et non vide. Si $0 < \tau < 2\,\alpha/L^2$, alors l'algorithme du gradient projeté converge linéairement vers une solution x^* du problème $(\mathcal{P}_{\text{grad. proj.}})$: il existe $\beta \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k - x^*\| \leq \beta^k\, \|x_0 - x^*\|$$

DÉMONSTRATION : Commençons par noter que l'*inégalité d'*EULER assure que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle \nabla f(x^*), x^* - x\rangle \geq 0$$

En multipliant cette inégalité par $\tau > 0$ et en écrivant que $0 = x - x$, on obtient

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle x^* - (x^* - \tau\, \nabla f(x^*)), x - x^*\rangle \geq 0$$

La caractérisation de la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ assure que

$$x^* = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^* - \tau\, \nabla f(x^*))$$

Autrement dit, $x^* \in \mathcal{C}$ un point fixe de l'algorithme. On rappelle que la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ est une application lipschitzienne de constante de LIPSCHITZ 1. Aussi, on a

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &\leq \big\|\big(x_k - \tau\, \nabla\, f(x_k)\big) - \big(x_{k-1} - \tau\, \nabla\, f(x_{k-1})\big)\big\| \\ &\leq \big\|x_k - x_{k-1} - \tau\, \big(\nabla\, f(x_k) - \nabla\, f(x_{k-1})\big)\big\|\end{aligned}$$

de sorte que, en élevant au carré, puis en utilisant la régularité de f après avoir développé le carré de droite, on obtient

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq (1 + \tau^2\, L^2)\, \|x_{k-1} - x^*\|^2 - 2\,\tau\, \big\langle x_{k-1} - x^*, \nabla\, f(x_{k-1}) - \nabla\, f(x^*)\big\rangle$$

Par ailleurs, la forte convexité de f assure que

$$\big\langle x_{k-1} - x^*, \nabla\, f(x_{k-1}) - \nabla\, f(x^*)\big\rangle \geq \alpha\, \|x_{k-1} - x^*\|^2$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq (1 + \tau^2\, L^2 - 2\,\alpha\,\tau)\, \|x_{k-1} - x^*\|^2$$

la quantité $1 + \tau^2\, L^2 - 2\,\alpha\,\tau$ étant strictement comprise entre 0 et 1 si $\tau \in \big]\,0\,; 2\,\alpha/L^2\,\big[$ (il suffit d'étudier les variations de la fonction convexe $\tau \mapsto 1 + \tau^2\, L^2 - 2\,\alpha\,\tau$, en notant que $\alpha \leq L$). En appliquant récursivement la formule obtenue, on démontre le résultat voulu. ■

Une autre application intéressante est l'algorithme ISTA (pour *Iterative shrinkage-thresholding algorithm*) proposé par TEBOULLE *et al.* pour résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \Big\{ f(x) + \|x\|_1 \Big\} \qquad (\mathcal{P}_{\text{ISTA}})$$

avec f une fonction L-régulière. On rappelle que, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ et que $x = (x_{(i)})_{1 \leq i \leq n}$, alors la norme ℓ_1 est définie de manière séparable par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_{(i)}|$$

Ainsi, les itérations de l'algorithme FBS s'écrivent pour ce problème

$$x_0 \in \mathcal{X}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\|\cdot\|_1}\big(x_k - \tau_k\, \nabla f(x_k)\big) \qquad \text{avec } \tau_k > 0$$

Explicitons l'expression de ces itérations. Il est aisé de vérifier que, grâce à la nature séparable de la norme ℓ_1, si on pose $x_{k+1} = \big((x_{k+1})_{(i)}\big)_{1 \leq i \leq n}$, alors

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \quad (x_{k+1})_{(i)} = \mathrm{prox}_{|\cdot|}\left((x_k)_{(i)} - \tau_k\,\frac{\partial f}{\partial x_{(i)}}(x_k)\right)$$

Il s'ensuit que (d'après un exemple de la section 1.2 du module **A5 : Opérateur proximal de Moreau**), on a

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \quad (x_{k+1})_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |(x_{k+1/2})_{(i)}| \leq 1 \\ \dfrac{(x_{k+1/2})_{(i)}}{|(x_{k+1/2})_{(i)}|}\,\big(|(x_{k+1/2})_{(i)}| - 1\big) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec
$$(x_{k+1/2})_{(i)} = (x_k)_{(i)} - \tau_k\,\frac{\partial f}{\partial x_{(i)}}(x_k)$$

Autrement dit, l'algorithme consiste en premier lieu à calculer un pas de descente de gradient explicite sur f, puis à effectuer un seuillage doux sur chaque composante du point obtenu.

3 Éclatement de type Dykstra

3.1 Position du problème

Dans cette section, on s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\,\|x-r\|^2 \right\} \tag{$\mathcal{P}_{\text{Dykstra}}$}$$

où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ sont des fonctions **convexes**, s.c.i. et propres et $r \in \mathcal{X}$. Il s'agit donc d'un problème de la forme $(\mathcal{P})$ dans le cas particulier où g est fortement convexe, puisqu'il se décompose alors de la manière suivante :

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad g(x) = h(x) + \frac{1}{2}\,\|x-r\|^2$$

On suppose que f et h sont simples ; en particulier, notons que, puisque

$$g(x) + \frac{1}{2}\,\|x-x^0\|^2 = h(x) + \left\|x - \frac{x^0+r}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\,\|r\|^2 - \left\|\frac{x^0+r}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x^0\|^2$$

il s'ensuit que h est simple si et seulement si g est simple.

3.2 Algorithme

*Ce qui suit fait appel à la notion de dualité de Fenchel introduite et développée dans les modules **A6 : Dualité min-max** et **A8 : Dualité de Fenchel et conjuguée convexe**.*

Soit $x \in \mathcal{X}$. Par hypothèse sur les fonctions f et h, on a les identités $f = f^{**}$ et $h = h^{**}$; autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= \sup_{y_1\in\mathcal{X}} \left\{ \langle y_1, x\rangle - f^*(y_1) \right\} + \sup_{y_2\in\mathcal{X}} \left\{ \langle y_2, x\rangle - h^*(y_2) \right\} \\ &= \sup_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1+y_2, x\rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ f(x) + g(x) \right\} = \min_{x\in\mathcal{X}} \sup_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1+y_2, x\rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2}\,\|x-r\|^2 \right\}$$

Définissons la fonction de couplage

$$\mathcal{L}(x; y_1, y_2) = \langle y_1+y_2, x\rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2}\,\|x-r\|^2$$

Puisque pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$, on a

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\} = \frac{1}{2} \|r\|^2 - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2$$

le problème dual associé à cette fonction de couplage est le problème de maximisation suivant :

$$\max_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ -f^*(y_1) - h^*(y_2) - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\} \qquad (\mathcal{D}_{\text{Dykstra}})$$

Intéressons-nous aux solutions (y_1^*, y_2^*) de ce problème de maximisation **concave** ; la CNS d'optimalité du premier ordre assure qu'elles sont caractérisées par le système d'inclusion suivant :

$$\begin{cases} r - y_1^* - y_2^* \in \partial f^*(y_1^*) \\ r - y_1^* - y_2^* \in \partial h^*(y_2^*) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1^* \in \partial f(r - y_1^* - y_2^*) \\ y_2^* \in \partial h(r - y_1^* - y_2^*) \end{cases}$$

En utilisant l'inclusion $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial (f + g)(x)$, il s'ensuit que

$$y_1^* + y_2^* + (r - y_1^* - y_2^*) - r = 0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Autrement dit, si le problème dual $\mathcal{D}_{\text{Dysktra}}$) admet une solution (y_1^*, y_2^*), alors le point

$$x^* = r - y_1^* - y_2^*$$

est une solution du problème (primal) $(\mathcal{P}_{\text{Dykstra}})$.

Le principe de l'algorithme de Dykstra pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{Dykstra}})$ cherche donc à résoudre le problème de minimisation (équivalent) dual $(\mathcal{D}_{\text{Dykstra}})$. Cette résolution peut être, en général, réalisée en appliquant un algorithme de type *descentes par blocs*, que nous verrons plus en détails au cours prochain. Suivant la méthode de résolution choisie, on obtient des algorithmes différents.

Si on choisit la méthode de minimisation alternée, qui consiste, comme son nom l'indique, à alterner des minimisations des fonctions partielles, on a l'algorithme suivant dans le domaine dual :

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{y_1 \in \mathcal{X}} \left\{ f^*(y_1) + \frac{1}{2} \|y_1 + (y_2)_k - r\|^2 \right\} \\ (y_2)_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{y_2 \in \mathcal{X}} \left\{ h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|(y_1)_{k+1} + y_2 - r\|^2 \right\} \end{cases}$$

On reconnaît dans l'algorithme précédent l'expression des opérateurs proximaux des conjuguées convexes f^* et h^*, de sorte que l'algorithme s'écrit

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = \operatorname{prox}_{f^*} \left(r - (y_2)_k\right) \\ (y_2)_{k+1} = \operatorname{prox}_{h^*} \left(r - (y_1)_{k+1}\right) \end{cases}$$

En utilisant l'identité de Moreau, on peut réécrire les itérations de l'algorithme

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = r - (y_2)_k - \operatorname{prox}_{f} \left(r - (y_2)_k\right) \\ (y_2)_{k+1} = r - (y_1)_{k+1} - \operatorname{prox}_{h} \left(r - (y_1)_{k+1}\right) \end{cases}$$

On peut alors introduire la variable x_k, définie à partir du lien entre x^* et (y_1^*, y_2^*) :

$$x_{k+1} = r - (y_1)_{k+1} - (y_2)_{k+1}$$

En introduisant une quatrième variable, on peut alors réécrire l'algorithme sous la forme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

3.3 Propriétés de convergence

*L'étude de la convergence de cet algorithme repose sur des résultats de convergence qui seront établis dans le module **B6 : Éclatement de variables**.*

Posons pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$

$$E(y_1, y_2) = f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - r\|^2$$

Notons que la fonction E est visiblement fortement convexe, donc coercive. En particulier, elle est biconvexe, et son domaine vérifie

$$\operatorname{dom} E = \operatorname{dom} f^* \times \operatorname{dom} h^*$$

Lemme 2

Soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_2)_{k+1} &= z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} &= \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} &= x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} &= \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Alors la suites $(E((y_1)_{k+1}, (y_2)_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(E((y_1)_{k+1}, (y_2)_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers la même limite.

Démonstration : On applique la proposition 1 du module **B6 : Éclatement de variables**, appliquée au problème dual de minimisation de E. ■

Proposition 9

Soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On pose

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\|x - r\|^2$$

On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_2)_{k+1} &= z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} &= \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} &= x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} &= \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimiseur de J.

Démonstration : Il s'agit d'une application de la proposition 2 du module **B6 : Éclatement de variables**, appliquée au problème dual de minimisation de E, qui assure que la suite $(((y_1)_k, (y_2)_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et que toutes ses valeurs d'adhérence sont points critiques de E. Or, E admet un unique point critique, qui est son minimiseur. On en déduit que la suite $(((y_1)_k, (y_2)_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, ce qui implique la convergence des x_k. ■

3.4 Exemple d'applications

À nouveau, une application historique de l'algorithme de DYKSTRA est la projection sur l'intersection de deux convexes (on parle d'ailleurs parfois de l'*algorithme de projection de* DYSKTRA). Ce problème s'écrit

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) \right\}$$

où $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{X}$ sont deux ensembles convexes fermés non vides, d'intersection non vide. L'algorithme de DYKSTRA s'écrit alors

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_1}(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_2}(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Il est classique de choisir pour initialisation

$$x_0 = z_0 = r \qquad \text{et} \qquad (y_1)_0 = (y_2)_0 = 0$$

Par définition de la projection, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \mathcal{C}_2 \qquad \text{et} \qquad z_k \in \mathcal{C}_1$$

et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point appartenant à l'intersection $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Une autre application est l'évaluation de l'opérateur proximal de la somme de deux fonctions simples. En effet, on reconnaît dans le problème $(\mathcal{P}_{\text{DYKSTRA}})$ l'expression du point proximal $\mathrm{prox}_{f+h}(r)$. L'algorithme de DYKSTRA permet alors de générer une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ce point proximal.

Pour aller plus loin

Problèmes d'optimisation non lisse et non convexe. L'intérêt principal des méthodes présentées ici se révèle pour des problèmes plus généraux non lisses (dans le sens non différentiables ou non régulières). Parmi ces problèmes, on pourra citer les problèmes d'optimisation sous contraintes (la présence des contraintes rendant automatiquement le problème non contraint non lisse). Les deux méthodes présentées dans ce module sont donc très fréquemment utilisées dans les applications.

Accélération par inertie. La méthode FBS peut être accélérée de manière optimale à l'aide d'une stratégie d'extrapolation de type Nesterov. L'algorithme qui en résulte est connu sous le nom de méthode FISTA.

Descentes par coordonnées. L'analyse de la convergence de l'algorithme de Dykstra repose sur celle de l'algorithme des descentes par coordonnées, qui sera étudiée dans le module **B6 : Éclatement de variables**. Cette méthode fait partie d'une famille de méthodes dites d'éclatement par coordonnées. L'idée est, au lieu de décomposer le traitement sur les parties de la fonction objectif, de le décomposer sur la variable sur laquelle on minimise.