Feuille d'exercices n°4
Opérateur de Moreau
Algorithme du point proximal

Exercice 1 – Opérateur de Moreau dans le cas convexe

Module A5, Propositions 1, 5 et 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que $\operatorname{prox}_J(x^0)$ est non vide et possède un unique élément.

(b) Soit $x^+ \in \mathcal{X}$. Montrer que $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$ si et seulement si $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$.

(c) En déduire que $\operatorname{prox}_J(x^0) = x^0$ si et seulement si x^0 est un minimiseur de J.

Exercice 2 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\operatorname{prox}_J(x^0)$ pour tout x^0.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\|x\|^2 \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

(c) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_1 \end{array} \right.$

(d) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(x) \end{array} \right.$

Exercice 3 – Règles de calcul

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Soit $z \in \mathcal{X}$ et $\alpha > 0$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\operatorname{prox}_J(x^0)$ en fonction de prox_f.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x-z) \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array} \right.$

Exercice 4 – Ferme non-expansivité de l'opérateur de Moreau

Module A5, Proposition 7 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

(a) Montrer que
$$\langle \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq \|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\|^2$$

(b) En déduire que prox_J est 1-lipschitzien, puis que prox_J est continu.

Exercice 5 – Inégalité proximale

Module A5, Proposition 8

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$ et $x^0 \in \mathcal{X}$. On pose
$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau J}(x^0)$$

Montrer que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq J(x^+) - \frac{1}{\tau}\langle x - x^+, x^+ - x^0 \rangle$$

Exercice 6 – Convergence de PPA dans le cas convexe Module B5, Propositions 2, 3 et 5

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme du point proximal de pas $\tau > 0$.

(a) Montrer que
$$J(x_{k+1}) \leq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k)$$
En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente. On note J^* sa limite.

(b) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau}\,(x_k - x_{k+1})$$
Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$. En déduire que
$$\langle p_{k+1} - p_k, p_{k+1}\rangle \leq 0$$

(c) Montrer que
$$\|p_{k+1}\|^2 \leq \|p_k\| \cdot \|p_{k+1}\|$$
En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(d) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$0 \leq \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{K}\|p_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_{K+1})$$

(e) En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$J(x^*) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau}\,\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle \geq \frac{1}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\big)$$

(g) Montrer que
$$k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) + J(x_{k+1}) \geq \frac{k}{\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2$$
En déduire que
$$J(x^*) + k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) \geq \frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\big)$$

(h) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$K\,J(x^*) - K\,J(x_K) \geq \sum_{k=0}^{K-1}\frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_K - x^*\|^2\big)$$
En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimum de J.

(i) Montrer que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est minimiseur de J.

> Pour montrer la convergence des itérées x_k vers un minimiseur, on peut utiliser l'équivalence entre l'algorithme du point proximal et la méthode du gradient explicite.