Feuille d'exercices n°5
Algorithme FBS (*Forward-Backward Splitting*)
Algorithme BCD (*Block-Coordinate Descent*)

Exercice 1 – Règle de Fermat dans l'éclatement d'opérateurs

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On suppose que $f + g$ admet un minimiseur x^*.

(a) On suppose que f est continûment différentiable au voisinage de x^*. Montrer que

$$-\nabla f(x^*) \in \partial g(x^*)$$

En déduire que, pour tout $\tau > 0$, $\quad x^* = \operatorname{prox}_{\tau g}(x^* - \tau \nabla f(x^*))$

(b) On suppose que f et g sont convexes. A-t-on

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)\,?$$

Exercice 2 – Itérations FBS

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f différentiable. On suppose que $f + g$ est minorée. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$x_{k+1} \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in \mathcal{X}} \tilde{J}_k(x) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{J}_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2 + g(x)$$

À quoi correspond la fonction $\tilde{J}_k$?

(b) Montrer que $\quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau J_k}(x_k) \qquad$ avec $\qquad J_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$

À quoi correspond la fonction J_k ?

Exercice 3 – Convergence de FBS

Module B4, Corollaire 1 et 2, Lemme 1 et Proposition 4, 6 et 7

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f une fonction L-régulière. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\qquad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \dfrac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$

(b) Justifier que $\qquad g(x_{k+1}) + \dfrac{1}{2\,\tau} \|x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k)\|^2 \leq g(x_k) + \dfrac{1}{2\,\tau} \|\tau \nabla f(x_k)\|^2$

En déduire que $\qquad J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{\tau} - L \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$

(c) On suppose dans cette question que g est **convexe**. Montrer que

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau} \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k) \rangle$$

En déduire que
$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tau} - L \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(d) Sous quelles conditions sur τ la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ? Justifier que, dans ce cas, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Qu'en est-il du cas où g convexe ?

(e) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau} (x_{k+1} - x_k) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$.

(f) On suppose désormais que $\tau \in \left]\, 0\,; 1/L \,\right[$. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} - L \right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$

En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(g) On suppose à présent que J est continue sur son domaine supposé fermé et est KŁ. Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente, et que sa limite est point critique de J.

Exercice 4 – Convergence du critère dans l'algorithme BCD

Module B6, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X}\times\mathcal{Z} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On suppose qu'il existe $(x^0, z^0) \in \operatorname{dom} J$ tel que l'ensemble de sous-niveau $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0,z^0)} J$ soit borné. On considère la suite $((x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J\big(x, z_k\big) \\ z_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{Z}} J\big(x_{k+1}, z\big) \end{cases}$$

Montrer que les suites $(J(x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(J(x_{k+1}, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes, convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 5 – Sous-différentiels partiels

On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & |x + y| + 2\,|x - y| \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}$, calculer les sous-différentiels des fonctions partielles convexes

$$x \mapsto f(x, y^0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x^0, y)$$

en $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, que l'on notera respectivement $\partial_x f(x, y^0)$ et $\partial_y f(x^0, y)$.

(c) Soit $a \neq 0$. Vérifier que $0 \in \partial_x f(a, a)$ et $0 \in \partial_y f(a, a)$.

(d) Montrer que $(0, 0) \notin \partial J(a, a)$ si $a \neq 0$. Comment interpréter ce résultat ?