Feuille d'exercices n°6

Dualité min-max
Dualité de Lagrange

Exercice 1 – Dualité faible

Module A6, Proposition 1

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose qu'il existe $(x^0, y^0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tel que

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x; y^0) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(x^0, y) < +\infty$$

(a) Soit $(x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \mathcal{L}(x'; y') \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(b) En déduire que
$$\sup_{y' \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \inf_{x' \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

Exercice 2 – Existence d'un point-selle

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que

(i) la fonction $\quad x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son minimum en $\bar{x}$;

(ii) la fonction $\quad y \mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son maximum en $\bar{y}$;

(iii) son saut de dualité $\mathcal{G}$ est nul.

(a) Montrer que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(b) Montrer que
$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y})$$

(c) En déduire que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

Exercice 3 – Propriétés des points-selles

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$.

(a) Montrer que
$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

puis que
$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(b) En déduire que
$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(c) Montrer que
$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

En déduire que les fonctions $\quad x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ et $\quad y \mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$

atteignent respectivement leur minimum et leur maximum.

Exercice 4 – Points-selles dans le cas convexe

Module A6, Propositions 3 et 4

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction convexe-concave propre.

(a) On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$. Montrer que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y (-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est-il un point critique de $\mathcal{L}$?

(b) On suppose qu'il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ tel que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y (-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) Construire une fonction $\mathcal{L}$ convexe-concave admettant un point critique qui ne soit pas un point-selle.

Exercice 5 – Dualité min-max

Module A6, Corollaire 3

Soit $J : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. On suppose qu'il existe une fonction s.c.i. $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$

Soit $(x^*, y^*) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$. Montrer que (x^*, y^*) est un point-selle de $\mathcal{L}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le problème primal $(\mathcal{P})$ admet comme solution le point x^* ;

(ii) le problème dual $(\mathcal{D})$ admet comme solution le point y^* ;

(iii) les problèmes primal et dual admettent la même valeur optimale, c'est-à-dire que

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} E(y)$$

Exercice 6 – Points-selles du lagrangien augmenté

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X} \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ de même domaine. On suppose h est continûment différentiables sur son domaine Intéressons-nous au problème d'optimisation suivant

$$\min_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ h(x) = 0}} \; J(x) \tag{$\mathcal{P}_{\mathrm{ce}}$}$$

(a) Écrire le lagrangien et le lagrangien augmenté pour le problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{ce}})$.

(b) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu}) \in \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^+)^m$ un point-selle du lagrangien. Après avoir justifié que $h(\bar{x}) = 0$, montrer que pour tout $(x, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \mu) + \frac{1}{2\,\tau} \|h(\bar{x})\|_2^2 \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{\mu}) + \frac{1}{2\,\tau} \|h(\bar{x})\|_2^2 \leq \mathcal{L}(x, \bar{\mu}) + \frac{1}{2\,\tau} \|h(x)\|_2^2$$

En déduire que $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$.

(c) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$. Justifier que $\bar{\mu}$ est une solution duale de $(\mathcal{P}_e)$.

(d) Justifier que

$$\mu \mapsto \mathcal{L}_\tau(\bar{x}; \mu) = J(\bar{x}) + \langle \mu, h(\bar{x}) \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|h(\bar{x})\|_2^2$$

admet un maximum sur $\mathbb{R}^m$. Montrer que si $h(\bar{x}) \neq 0$, alors cette fonction n'est pas majorée.

(e) Montrer que $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partielle

$$x \mapsto \mathcal{L}_\tau(x; \bar{\mu}) = J(x) + \langle \bar{\mu}, h(x) \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|h(x)\|_2^2$$

en déduire que $\bar{x}$ est une solution primale.