Feuille d'exercices n°3

Fonctions régulières
Méthodes de gradient explicite

Exercice 1 – Exemples de fonctions régulières Soit $a > 0$. Montrer que les deux fonctions suivantes sont régulières. Donner une estimation de la constante de Lipschitz de la dérivée.

(a) $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^2/2 & \text{si } |t| \leq a \\ a\,|t| - a^2/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

(b) $$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| - a \ln\left(1 + \dfrac{|t|}{a}\right) \end{array} \right.$$

Exercice 2 – Fonctions composites Module A4, proposition 3

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que $x \mapsto f(A\,x + b)$ est une fonction régulière et donner une estimation de la constante de Lipschitz du gradient de cette fonction.

Exercice 3 – Lemme de descente Module A4, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $(x, z) \in \mathcal{X}^2$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & J(x + t\,(z - x)) - \langle \nabla J(x), x + t\,(z - x) \rangle \end{array} \right.$$

(a) Vérifier que
$$J(z) - J(x) - \langle \nabla J(x), z - x \rangle = \Big[f(t) \Big]_1^0$$

(b) Montrer que
$$\Big[f(t) \Big]_1^0 \leq \left| \Big[f(t) \Big]_1^0 \right| \leq L \int_0^1 t\, \|z - x\|^2$$

(c) En déduire que
$$J(z) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), z - x \rangle + \frac{L}{2}\, \|x - z\|^2$$

Exercice 4 – Monotonie de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas régulier Module B2, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = \Big[J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \Big]_0^\tau = -\int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \rangle \,\mathrm{d}t$$

En déduire que

$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = -\tau\, \|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \rangle \,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que
$$J(x_{k+1}) - J(x_k) \leq -\left(\tau - \frac{\tau^2}{2}\, L \right) \|\nabla J(x_k)\|^2$$

(c) En déduire que la suite $(J(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Exercice 5 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas convexe

Module B2, lemme 1, propositions 5 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** L-régulière. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \left]0\,;2/L\right[$.

(a) Montrer que l'ensemble des points fixes de la méthode du gradient est l'ensemble des minimiseurs de J.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2 = \|x_k-x^*\|^2 - 2\,\tau\,\langle \nabla J(x_k)-\nabla J(x^*), x_k-x^*\rangle + \tau^2\,\|\nabla J(x_k)-\nabla J(x^*)\|^2$$

En déduire que $\qquad \|x_{k+1}-x^*\|^2 \leq \|x_k-x^*\|^2 - \dfrac{2}{L}\left(\tau - \dfrac{\tau^2}{2}\,L\right)\|\nabla J(x_k)-\nabla J(x^*)\|^2$

puis que la suite $(\|x_k-x^*\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(c) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(d) Montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0$$

(e) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est minimiseur de J.

Exercice 6 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas coercif et KŁ

Module B2, corollaire 2, lemme 2 & proposition 9

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et L-régulière. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \left]0\,;2/L\right[$.

(a) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$$

En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Justifier que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est point critique de J.

On suppose à présent que J est également une fonction KŁ.

(c) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point critique de J.

⋆ Exercice 7 – Lemme de Baillon–Haddad

Module A4, lemme 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$\exists\, L>0, \qquad \forall\,(x,z)\in\mathcal{X}^2, \quad \langle \nabla J(x)-\nabla J(z), x-z\rangle \geq \frac{1}{L}\,\|\nabla J(x)-\nabla J(z)\|^2$$

(a) Montrer que J est L-régulière.

(b) Montrer que J est convexe.

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et L-régulière. Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$.

(c) Vérifier que, pour tout $p \in \mathcal{X}$,

$$\langle \nabla J(z)-\nabla J(x), p-x\rangle - \frac{L}{2}\,\|p-x\|^2 = \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z)-\nabla J(x)\|^2 - \frac{L}{2}\left\|\frac{\nabla J(z)-\nabla J(x)}{L} - (p-x)\right\|^2$$

En déduire que $\qquad \displaystyle\sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z)-\nabla J(x), p-x\rangle - \frac{L}{2}\,\|p-x\|^2\right\} = \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z)-\nabla J(x)\|^2$

et $\qquad \displaystyle\sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z)-\nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\,\|p-x\|^2\right\} = \langle \nabla J(z)-\nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z)-\nabla J(x)\|^2$

(d) Soit $p \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\langle \nabla J(z)-\nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\,\|p-x\|^2 \leq J(x) - J(p) + \langle \nabla J(z), p\rangle - \langle \nabla J(x), x\rangle$$

En déduire que

$$\langle \nabla J(z)-\nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z)-\nabla J(x)\|^2 \leq -\langle \nabla J(x), x\rangle + J(x) + \sup_{p\in\mathcal{X}}\Big\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\Big\}$$

(e) Vérifier que
$$\langle \nabla J(z), z\rangle - J(z) = \sup_{p\in\mathcal{X}}\Big\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\Big\}$$

(f) Conclure.