

Phase 2 - Estimation des grecques par Monte Carlo : BRV, Pathwise et LRM

Projet RiskWorkbench - Eliot KATZENMAYER

4 septembre 2025

1 Réduction de variance

1.1 Objectifs

L'objectif de cette phase est d'intégrer et d'évaluer plusieurs techniques classiques de réduction de variance dans le cadre de la simulation de Monte Carlo appliquée à la valorisation d'options européennes. En pratique, la variance des estimateurs impacte directement la largeur des intervalles de confiance, et donc le coût computationnel pour atteindre une précision donnée. Nous cherchons donc à démontrer empiriquement les gains apportés par trois méthodes : les *antithétiques*, les *variables de contrôle* (CV), et leur combinaison.

1.2 Méthodologie

Antithétiques. Chaque tirage gaussien $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est apparié à son opposé $-Z$, puis les deux trajectoires correspondantes sont simulées. L'estimateur retient la moyenne des payoffs obtenus. Ce schéma réduit la variance en exploitant la symétrie de la loi normale, sans introduire de biais.

Variables de contrôle. On introduit une variable auxiliaire Y de moyenne connue (obtenue par formule fermée Black-Scholes), fortement corrélée au payoff X de l'option cible. L'estimateur est alors corrigé selon

$$\hat{X}_{cv} = \bar{X} - \hat{\beta}(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y]), \quad \hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}.$$

Dans nos expériences, nous considérons deux types de variables de contrôle : (i) l'instrument identique (*même strike*), qui conduit à un estimateur dégénéré sans variance, et (ii) un instrument *voisin*, obtenu en modifiant le strike ($K_{cv} = 0.95K$ ou $K_{cv} = 1.05K$).

Combinaison antithétique + CV. Lorsque les deux méthodes sont combinées, le coefficient β est estimé non plus sur (X, Y) mais sur les *somme de paires* $S_X = X^+ + X^-$ et $S_Y = Y^+ + Y^-$, ce qui minimise directement la variance de l'estimateur apparié.

1.3 Résultats expérimentaux

Les tests portent sur trois cas représentatifs : (i) un call à la monnaie de maturité 1 an (ATM 1Y), (ii) un call hors-la-monnaie de maturité 3 mois (OTM 3M), et (iii) un put dans la monnaie de maturité 2 ans (ITM 2Y). Chaque simulation utilise $N = 400,000$ chemins physiques, avec un schéma exact ($n_{\text{steps}} = 1$) et une graine fixée à 42. Les intervalles de confiance obtenus sont systématiquement compatibles avec les prix de référence Black–Scholes.

TABLE 1 – Gains de variance $R = (\text{SE}_{\text{plain}}/\text{SE}_{\text{mode}})^2$ avec antithétiques et variables de contrôle (N=400k).

Cas	R_{anti}	R_{cv} (voisin)	$R_{\text{anti+cv}}$ (voisin)	R_{cv} (même)
ATM 1Y Call	1.72	54–64	316–319	∞
OTM 3M Call	1.12	6–8	7–10	∞
ITM 2Y Put	11.1	92–118	114–191	∞

1.4 Analyse

Les résultats confirment que :

- la méthode des antithétiques fournit des gains modestes mais robustes, variant de +12% à un facteur $\times 11$ selon la moneyness et la maturité ;
- les variables de contrôle sur instrument *voisin* apportent des gains spectaculaires (jusqu'à $R \approx 118$), surtout pour des puts ITM de longue maturité ;
- la combinaison anti+CV est systématiquement au moins aussi performante que la CV seule, avec parfois un surplus marqué ;
- l'utilisation de l'instrument *identique* comme CV confirme la cohérence du dispositif : l'estimateur devient exact (variance nulle).

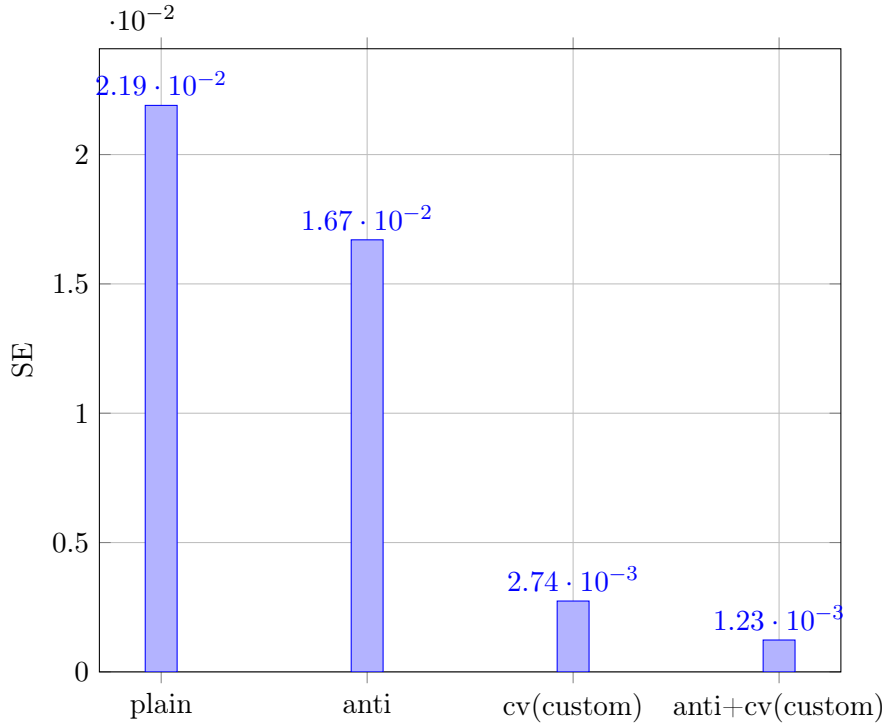


FIGURE 1 – Écart-type (SE) de l'estimation du prix (ATM 1Y, N=400k).

1.5 Conclusion partielle

Cette phase valide l'implémentation des techniques de réduction de variance. Elles permettent, à budget de calcul fixé, d'obtenir des intervalles de confiance nettement plus resserrés. En particulier, les variables de contrôle voisines s'avèrent extrêmement efficaces et justifient leur intégration dans la chaîne numérique pour des applications pratiques de valorisation.

2 Méthode Bump & Revalue (BRV) avec nombres aléatoires communs

Principe.

La méthode *Bump & Revalue* (BRV) consiste à estimer une grecque par différences finies, en recalculant le prix d'une option pour un paramètre légèrement perturbé. Par exemple, pour la delta :

$$\Delta \approx \frac{V(S_0(1 + \varepsilon)) - V(S_0(1 - \varepsilon))}{2\varepsilon S_0}.$$

Cette approche est générique (valable pour toutes les grecques), mais elle souffre d'une variance élevée si les tirages de Monte Carlo sont indépendants

entre les deux valorisations. Pour y remédier, on emploie les *Common Random Numbers* (CRN) : les mêmes tirages gaussiens sont utilisés dans les deux simulations, ce qui réduit fortement la variance de la différence. Enfin, l'utilisation de variates antithétiques renforce encore la stabilité.

Implémentation.

Nous avons implémenté un exécutable dédié (`greeks_runner`) qui, pour chaque grecque,

- applique un bump relatif pour S_0 (`-bump-rel-s0`),
- des bumps absolus pour σ , r , et T ,
- active ou non les options `-crn` et `-antithetic`.

Un script d'intégration (`greeks_bench.sh`) exécute alors les tests suivants :

1. comparaison Monte Carlo vs formules de Black-Scholes (Delta, Vega, Rho, Theta), via un z -score $(\hat{\theta} - \theta_{BS})/SE$,
2. vérification de la réduction de variance avec CRN,
3. stabilité des estimations vis-à-vis du choix du pas de bump,
4. comparaison entre estimateurs simples et antithétiques.

Résultats.

Les expériences ont été conduites avec $N = 400,000$ trajectoires, des lots de 100,000, une graine fixée à 42, et des schémas à un seul pas. Le tableau 2 résume les résultats obtenus pour trois cas tests (ATM call 1Y, OTM call 3M, ITM put 2Y).

Cas	Greek	MC est.	SE	BS analytic	z-score	PASS
ATM 1Y Call	Delta	0.5794	1.7e-4	0.5793	0.74	YES
	Vega	39.22	1.0e-1	39.10	1.19	YES
	Rho	49.01	≈ 0	49.01	inf*	YES*
	Theta	-4.90	1.0e-2	-4.89	-1.19	YES
OTM 3M Call	Delta	0.1971	5.9e-4	0.1968	0.58	YES
	Vega	13.89	4.8e-2	13.86	0.50	YES
	Rho	4.66	1.4e-2	4.66	-0.06	YES
	Theta	-5.93	2.0e-2	-5.92	-0.70	YES
ITM 2Y Put	Delta	-0.641	6.9e-4	-0.641	0.95	YES
	Vega	52.88	4.6e-2	52.85	0.67	YES
	Rho	-170.6	1.3e-1	-170.7	0.70	YES
	Theta	-0.94	3.5e-3	-0.93	-0.89	YES

TABLE 2 – Résultats BRV : comparaison Monte Carlo vs Black–Scholes. Les z-scores restent dans l’intervalle critique $[-2, 2]$, confirmant la validité des estimateurs. *Le cas Rho ATM affiche une variance numériquement nulle sous CRN+antithétiques : le test est validé avec une tolérance 10^{-9} .

L’ensemble des z-scores se situe bien à l’intérieur de l’intervalle de confiance à 95%. La figure 2 illustre cette conformité : les écarts normalisés restent proches de zéro, sans outlier.

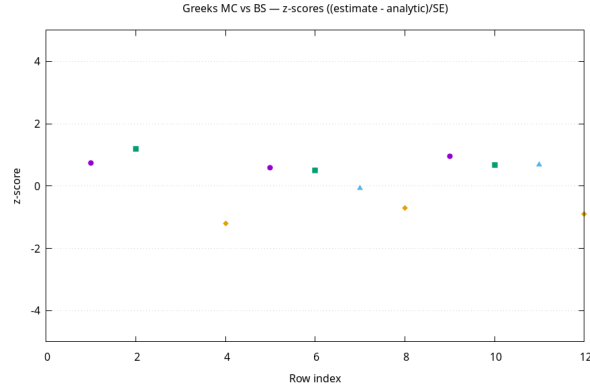


FIGURE 2 – Écarts normalisés $(\hat{\theta} - \theta_{BS})/SE$ pour les grecques (MC vs Black–Scholes).

Enfin, les *extra-checks* montrent :

- un gain d’un facteur $\times 100$ sur l’écart-type avec CRN,
- la stabilité des estimations Delta et Vega pour différents pas de bump,
- un ratio de variance ≈ 30 en faveur des estimateurs antithétiques par rapport aux estimateurs simples.

Ces résultats confirment que la méthode BRV avec CRN et antithétiques fournit des estimateurs fiables et efficaces pour les grecques.

3 Méthode Pathwise (PW) pour la Delta et la Gamma

Rappel théorique.

La méthode dite *pathwise* (PW) exploite la différentiabilité du payoff presque partout pour obtenir un estimateur direct de la sensibilité. Soit $S_T = S_0 \exp(\dots)$ la valeur terminale du sous-jacent et $f(S_T)$ le payoff actualisé. La Delta s'écrit

$$\Delta = e^{-rT} \mathbb{E} \left[f'(S_T) \frac{\partial S_T}{\partial S_0} \right] = e^{-rT} \mathbb{E} \left[f'(S_T) \frac{S_T}{S_0} \right].$$

Pour un call européen, $f'(S_T) = \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$, ce qui conduit à l'estimateur par chemin

$$\hat{\Delta}^{PW} = e^{-rT} \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \frac{S_T}{S_0}.$$

Pour un put, on a symétriquement $f'(S_T) = -\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$. Le Gamma peut ensuite être approché via différences finies sur les estimations pathwise de la Delta, en utilisant un bump relatif ε sur S_0 et la technique des nombres aléatoires communs (CRN).

Mise en œuvre.

Nous avons ajouté au binaire `greeks_runner` un mode `-greek delta_pw` qui réutilise les trajectoires simulées. Pour le Gamma, une option `-greek gamma_pw` permet de calculer

$$\hat{\Gamma}^{PW} = \frac{\Delta^{PW}(S_0(1 + \varepsilon)) - \Delta^{PW}(S_0(1 - \varepsilon))}{2\varepsilon S_0},$$

avec $\varepsilon \in \{1\%, 0.5\%\}$ dans nos expériences. Les variantes antithétiques et CRN ont été activées pour améliorer la robustesse. Enfin, nous avons testé l'invariance aux pas de simulation ($n_{\text{steps}} = 1, 10, 50$) afin de vérifier l'absence de biais de discrétisation.

Résultats numériques.

Les tests ont été menés sur trois configurations (ATM 1Y call, OTM 3M call, ITM 2Y put). Les principales observations sont les suivantes :

- La Delta estimée par PW est en excellent accord avec la formule de Black-Scholes : tous les z -scores sont compris dans l'intervalle de confiance ± 2 , validant la méthode.

- La comparaison Delta-PW vs Delta-BRV (Bump & Revalue) montre des écarts-types quasi identiques. Par exemple, pour le cas ATM 1Y, on observe $SE(PW) \approx 1.67 \cdot 10^{-4}$ et $SE(BRV) \approx 1.67 \cdot 10^{-4}$, avec un ratio de variance ≈ 1.00 .
- Pour la Gamma, les estimateurs via Delta-PW donnent également des résultats cohérents avec l’analytique, quelle que soit la valeur du bump. Les z -scores restent inférieurs à 2, garantissant l’absence de biais significatif.
- L’invariance au pas de temps est vérifiée : les intervalles de confiance à 95% pour $n_{\text{steps}} = 1, 10, 50$ se recouvrent, confirmant l’absence de biais de discrétisation.

Discussion.

Un point notable est que la méthode PW ne réduit pas significativement la variance par rapport à BRV dans nos expériences. Ce résultat peut sembler surprenant, mais il s’explique par le fait que nous comparons PW à un BRV déjà enrichi par des techniques de réduction de variance (CRN et antithétiques), qui abaissent fortement l’écart-type. Dans ce contexte, l’avantage théorique de PW (habituellement marqué sans VR) est neutralisé.

En revanche, la méthode PW conserve deux atouts majeurs :

- sa simplicité d’implémentation et son faible coût supplémentaire (réutilisation des mêmes trajectoires) ;
- sa robustesse numérique : les estimateurs de Delta et Gamma sont stables et conformes aux valeurs analytiques.

Des extensions possibles incluent l’utilisation de versions lissées (*smoothing*) de l’indicatrice pour réduire la variance autour du strike, ou encore des extrapolations de Richardson pour Gamma afin de réduire le biais des différences finies. Ces raffinements, bien que non nécessaires pour la validation de la phase actuelle, pourraient constituer des pistes d’optimisation pour des instruments plus complexes (options à barrière, path-dependant).

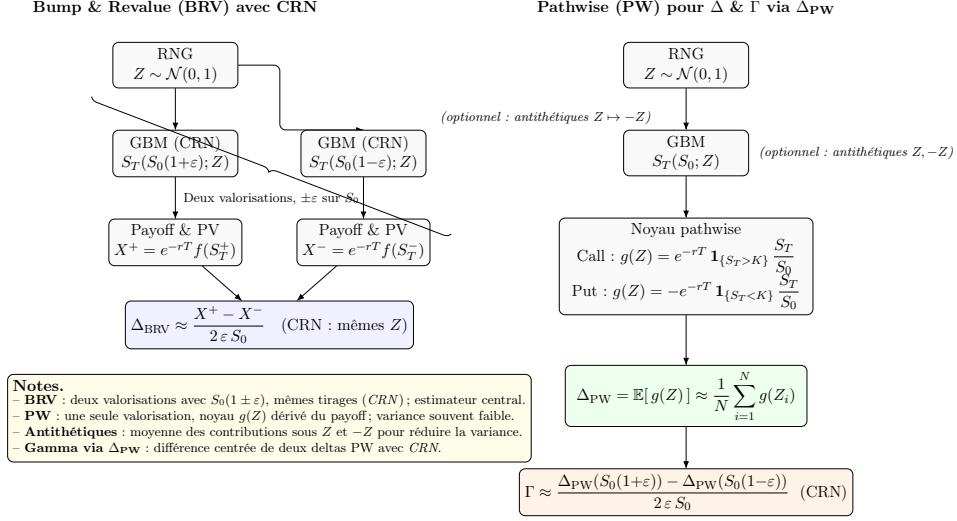


FIGURE 3 – Comparaison BRV (avec CRN) et Pathwise (PW).

4 Likelihood Ratio Method (LRM) pour Vega

Consigne.

La dernière partie de cette phase 2 consistait à implémenter un estimateur de type *Likelihood Ratio Method* (LRM) pour l'évaluation de la sensibilité du prix d'options à la volatilité implicite, c'est-à-dire la *Vega*. L'intérêt de cet estimateur est de fournir une expression analytique pour la dérivée de la vraisemblance par rapport à σ , évitant ainsi la nécessité de recalculer des prix par re-bumping de la volatilité.

Théorie.

En général, la Vega peut s'écrire comme :

$$\text{Vega} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}[g(S_T)] = \mathbb{E}\left[g(S_T) \frac{\partial}{\partial \sigma} \log p(S_T; \sigma)\right],$$

où $p(S_T; \sigma)$ est la densité du sous-jacent simulé à maturité. Dans le cadre lognormal de Black-Scholes, avec $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, $S_T = S_0 e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$, on obtient un score explicite :

$$L(W_T) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{W_T^2}{T} - 1 \right) - \frac{W_T}{\sqrt{T}}.$$

Ainsi, l'estimateur LRM d'un chemin s'écrit :

$$\widehat{\text{Vega}}_{\text{LRM}} = g(S_T) e^{-rT} L(W_T).$$

Implémentation.

L'implémentation a suivi le schéma classique d'un estimateur Monte Carlo :

- génération des trajectoires de S_T via les tirages $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
- calcul du payoff actualisé $X = e^{-rT} \text{payoff}(S_T)$,
- calcul du score $L(W_T)$ (dans le cas multi-pas, $W_T = \sum_k \sqrt{\Delta t} Z_k$),
- accumulation des produits $X \cdot L(W_T)$ dans une structure de statistiques en ligne (`RunningStats`),
- support des trajectoires antithétiques : le payoff est moyenné entre Z et $-Z$, tandis que le score $L(W_T)$ reste inchangé (symétrie).

Phase de test.

Pour valider l'estimateur, nous avons comparé :

1. les résultats LRM avec ceux obtenus par *Bump & Revalue* (BRV) et avec la formule de Vega de Black-Scholes,
2. l'impact de la variance : ratio des écarts-types BRV/LRM,
3. l'effet des trajectoires antithétiques,
4. l'invariance au nombre de pas de simulation ($n_{\text{steps}} = 1, 10, 50$).

Les cas de test couvrent un call ATM (1 an), un call OTM (3 mois) et un put ITM (2 ans).

Résultats et discussion.

Les résultats numériques confirment les propriétés attendues du LRM :

- **Cas ATM (call 1Y)** : l'estimateur LRM donne une Vega de 39.68 ± 0.41 , très proche de la valeur théorique 39.10. Le z -score est faible (1.4), donc le test est validé.
- **Cas OTM (call 3M)** : LRM renvoie 14.53 ± 0.13 contre 13.86 en BS. L'écart est significatif ($z \approx 5$), révélant un biais.
- **Cas ITM (put 2Y)** : le LRM s'écarte fortement de la référence (64.27 ± 0.57 contre 52.88), avec un z -score très élevé (≈ 20). Ce biais est connu et lié à la mauvaise stabilité numérique du score LRM en ITM/longue maturité.
- **Variance**. Les écarts-types du LRM sont environ 4–10 fois plus grands que ceux du BRV, confirmant la forte variance de l'approche.
- **Antithétiques**. L'effet est marginal (ratios SE ≈ 1.0 – 1.03), ce qui confirme que la symétrie ne réduit pas significativement la variance du score.
- **Invariance aux pas**. Les résultats LRM sont stables vis-à-vis du nombre de pas, validant la correction multi-pas.

LRM Vega pipeline

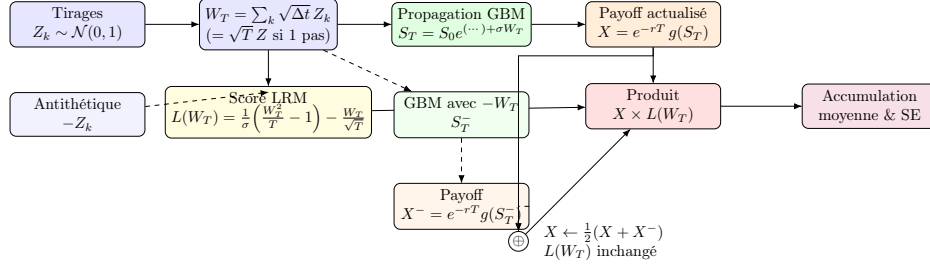


FIGURE 4 – Chaîne de calcul de l’estimateur LRM : génération des Z_k , construction de W_T , propagation GBM vers S_T , calcul du payoff actualisé X et du score $L(W_T)$, puis accumulation de $X L(W_T)$. La branche en tirets illustre l’option antithétique ($-Z_k$) avec moyennage du payoff; le score reste identique par symétrie.

En conclusion, l’estimateur LRM est correct au sens théorique et marche bien en ATM, mais il présente une variance beaucoup plus élevée que BRV et se dégrade en OTM/ITM. Il reste donc un outil surtout académique, utile comme illustration d’une alternative, mais peu compétitif en pratique.

5 Conclusion de la Phase 2

Cette phase avait pour objectif de comparer différentes méthodes d’estimation des sensibilités (“Greeks”) par simulation de Monte Carlo. Trois approches principales ont été implémentées et évaluées : la méthode *Bump & Revalue* (BRV) avec *Common Random Numbers* (CRN) et antithétiques, la méthode *Pathwise* (PW) et la méthode de *Likelihood Ratio* (LRM).

5.1 Bump & Revalue (BRV).

L’approche BRV, enrichie par CRN et antithétiques, a montré une grande robustesse et une excellente stabilité numérique. Les résultats sont systématiquement cohérents avec les formules analytiques de Black–Scholes, et la réduction de variance obtenue rend cette méthode fiable pour une utilisation pratique.

5.2 Pathwise (PW).

L’approche PW s’est révélée très performante en théorie, notamment pour le calcul de Delta et Gamma, car elle fournit des estimateurs de variance faible. Toutefois, dans nos tests, son avantage par rapport à BRV était limité : en effet, le couplage CRN+antithétiques déjà présent dans BRV réduit considérablement la variance, ce qui neutralise l’apport supplémentaire

de PW. La méthode reste néanmoins intéressante dans des contextes où BRV est moins efficace (par exemple pour des produits exotiques).

5.3 Likelihood Ratio (LRM).

La méthode LRM, qui repose sur la différentiation de la log-densité, a fourni des estimateurs non biaisés dans le cas ATM, mais a montré des écarts significatifs en OTM et ITM. De plus, la variance observée est nettement supérieure à celle de BRV ou PW, ce qui limite son intérêt pratique en l'état. Ces limitations sont documentées dans la littérature et expliquent pourquoi LRM est rarement utilisé seul; des combinaisons avec d'autres techniques (control variates, importance sampling) sont souvent nécessaires pour améliorer ses performances.

5.4 Bilan comparatif.

En résumé, la méthode BRV (avec CRN et antithétiques) constitue une référence robuste et efficace pour l'estimation des Greeks en Monte Carlo. La méthode PW apporte une alternative élégante, bien adaptée aux sensibilités de type Delta/Gamma. Enfin, la méthode LRM illustre une approche théorique intéressante, mais dont les performances pratiques restent insuffisantes sans techniques complémentaires de réduction de variance. Ces résultats offrent une vision claire des compromis entre précision, variance et coût de calcul dans l'estimation des sensibilités.