Phase 1 – Validation d'un moteur de pricing Monte Carlo

Projet `RiskWorkbench` - Eliot KATZENMAYER

2 septembre 2025

1 Introduction

Cette première phase avait pour objectif d'établir un socle robuste pour le pricing d'options vanilles européennes sous hypothèse du modèle de Black–Scholes. Deux volets étaient poursuivis : d'une part, la mise en œuvre des formules fermées analytiques comme référence de validation ; d'autre part, le développement d'un moteur Monte Carlo générique permettant de simuler les dynamiques de prix sous mesure risque-neutre. L'exigence principale était de garantir à la fois la justesse numérique et la stabilité statistique des estimateurs.

2 Architecture logicielle

L'implémentation a été structurée en modules spécialisés, de manière à séparer clairement les responsabilités :

— **Générateur aléatoire normal standard** : encapsule la graine et fournit des tirages $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ reproductibles.

— **Accumulateur statistique** : basé sur l'algorithme de Welford, permet de calculer en ligne la moyenne, la variance et les intervalles de confiance.

— **Modèle de marché (GBM)** : implémente la dynamique $dS_t/S_t = (r-q)\,dt + \sigma\,dW_t$ sous mesure Q, avec simulation exacte et multipas.

— **Payoffs vanilles** : fonctions *call* et *put* européens.

— **Orchestrateur Monte Carlo** : simule les trajectoires, applique les payoffs, actualise et calcule les statistiques.

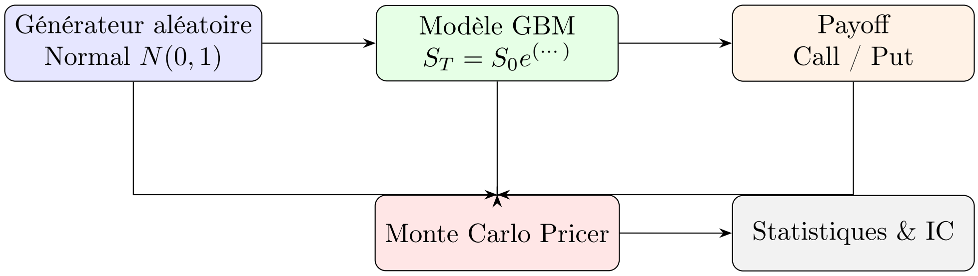

FIGURE 1 – Architecture logicielle du pricer Monte Carlo en Phase 1

3 Méthodologie de validation

La validation s'est appuyée sur un ensemble de micro-expériences systématiques :

1. **Convergence en** N : on a évalué la demi-largeur de l'intervalle de confiance 95% en fonction du nombre de trajectoires simulées. La relation attendue $O(1/\sqrt{N})$ a été vérifiée empiriquement.
2. **Invariance au pas** : les prix obtenus avec $n\_steps = 1$, 10 et 50 se sont révélés statistiquement équivalents, confirmant la cohérence entre schéma exact et multipas.
3. **Cas de référence** : pour différents scénarios (ITM/OTM, maturité courte/longue), le prix théorique de Black–Scholes a toujours été contenu dans l'intervalle de confiance Monte Carlo.
4. **Suivi de convergence** : l'analyse des journaux de convergence a montré la stabilité de la quantité $c = \text{half\_width} \times \sqrt{N}$, signature caractéristique d'une simulation Monte Carlo non-biaisée.

Conditions expérimentales.

Les expériences ont été réalisées avec le compilateur `g++` (standard C++17), en mode optimisation `-O3`, sur un processeur Intel Core i5-12500H. Les simulations ont été exécutées via l'exécutable `mc_runner`, avec une graine initiale fixée à 42, un schéma exact à un seul pas ($n_{\text{steps}} = 1$), et des lots de 10^5 trajectoires. Sauf mention contraire, les temps rapportés correspondent à la moyenne de k exécutions indépendantes.

Modèle et estimateur.

Sous Q :

— $\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)\,dt + \sigma\,dW_t$,

— $S_T = S_0 \exp\big((r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\,Z\big)$,

— $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Le prix MC : $\hat{P}_N = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{payoff}(S_T^{(i)})$, avec erreur-type $\text{SE} = \hat{\sigma}/\sqrt{N}$ et IC95% $[\hat{P} \pm 1.96\,\text{SE}]$.

4 Résultats et discussion

Les résultats numériques montrent que :

- les estimateurs Monte Carlo sont non-biaisés et reproduisent fidèlement les formules analytiques de Black–Scholes ;
- la convergence suit la loi théorique en $1/\sqrt{N}$ avec une constante $c \approx 27.1$;
- la robustesse est assurée même dans des configurations extrêmes (deep ITM/OTM, taux négatifs) ;
- l'efficacité est satisfaisante, avec environ un million de trajectoires simulées en moins de 50 ms en mode optimisé.

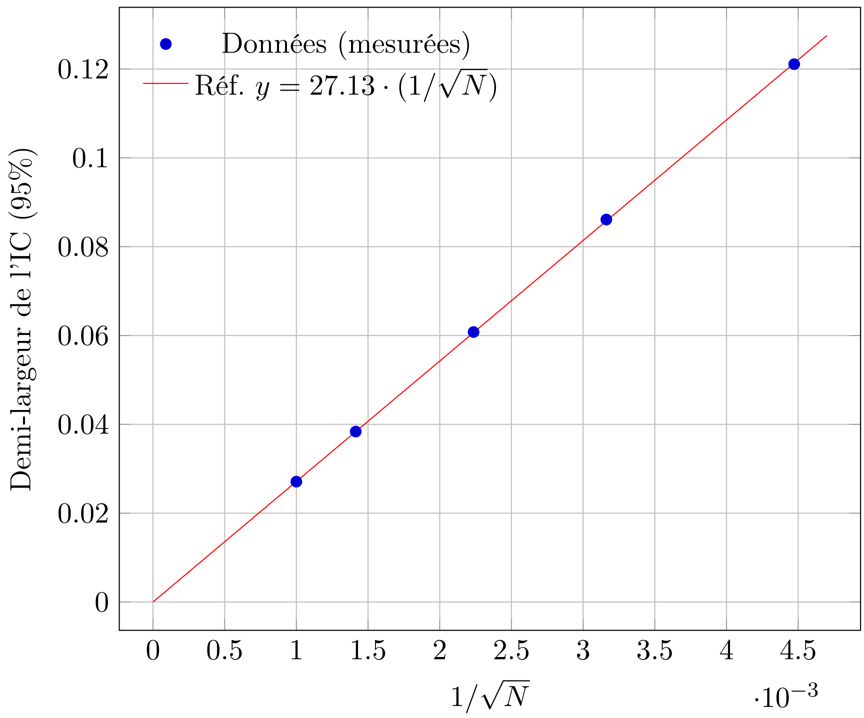

FIGURE 2 – Relation linéaire attendue entre la demi-largeur d'IC (95%) et $1/\sqrt{N}$.

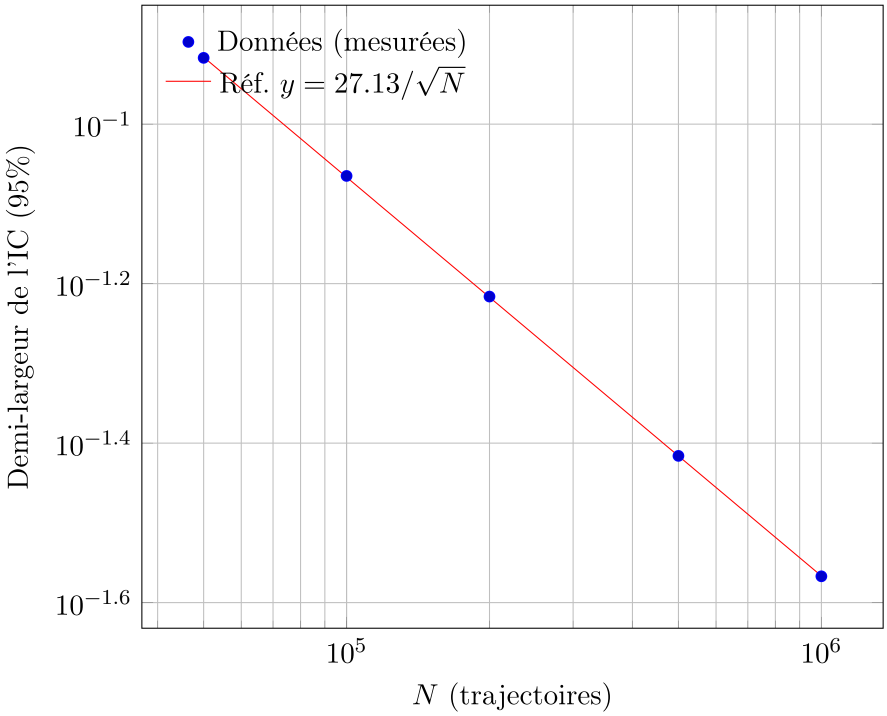

FIGURE 3 – Décroissance en $N^{-1/2}$ de la demi-largeur de l'IC (95%) en échelle log–log.

5 Conclusion

La Phase 1 a permis d'atteindre l'ensemble des objectifs fixés : mise en place d'une architecture modulaire, validation numérique rigoureuse, et obtention de performances suffisantes pour des expériences sur plusieurs millions de trajectoires. Ce socle valide ouvre la voie à la Phase 2, qui portera sur l'intégration de techniques de réduction de variance et sur l'estimation des sensibilités (*Greeks*).