# Universidad Nacional Autonoma de México

*Algebra Lienal II*

por


ATRISTÁIN CHEW GUSTAVO YAIR.
BALLESTEROS MARTÍNEZ NIDIA PAULINA.
ENCISO RODRÍGUEZ SANDRA.
LOZANO NOYOLA MAYLÉN MONTSERRAT.
SOLANO GARCÍA ANGELICA DAFNE.
VIVEROS PAZ ELIOT H.

División de Matemáticas e Ingeneria
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLAN


Un trabajo por estudiantes de Actuaría para la acreditación de la materia ALGEBRA LINEAL II.

FEBRERO 2018

# Tabla de Contenido

# Introducción

En una primera definición de lo que es el algerba lineal, precisaré los objetos con los que estaré trabajando a lo largo de esta obra, los cuales tendrán métodos y atributos, *e.g*: un vector es un objeto, que tiene como atributos magnitud, coordenadas en algun $\mathbb{R}^n$, y como métodos, producto punto, la multiplicación por escalares, etc.

Así, tengo un ambiente, en donde conviven mis objetos con otros objetos, y forman un espacio bien definido.

Se da por hecho que el lector tiene conocimientos previos en algebra superior, como son las estructuras algebraicas simples, como un campo, un grupo abeliano, que se harán uso de ellos en el capítulo 6, pues en esta obra se trataran otro tipo de estructuras, como lo son los anillos conmutativos.

En el primer capìtulo se harà una descripción detallada de lo que son las funciones lineales, recordando el concepto de transformación lineal; espacios duales y el doble dual; y concluyendo con la transpuesta de una transformación lineal.

Se va a hacer incapie en los espacios Euclideos, y el estudio de las bases que se analizarón en el curso de Algebra Lienal I, de esta manera, se liga ese curso con Algebra Lineal II.

## Aspectos generales

Es importante recordar definiciones, no solo Algebraícos, si no tambien de otras disiplinas vistas a lo largo de carreras de Area I. Es por ello que en los apéndices, están una serie de definiciones de apoyo en el caso de que el alumno necesite reforzar definiciones, teoremas, resultados, etc, para un óptimo estudio del curso en cuestión.

En el Apéndice A, podemos encontrar la definición de lo que es un Espacio vectorial, un subespacio, bases y coordenadas, definiciones básicas para cualquier estudio algebráico; también, se hallan las definiciones de: Transformación lineal y su algebra, Isomorfismo y las representaciones matriciales de las transformaciones lineales, además de algunos resultados de gran importancia para el primer capítulo.

Por otro lado, en el Apéndice B, uested puede encontrar algunas definiciones relativas a teorias de grupos. Estas, son diferentes ambientes para nuestros objetos, los vectores, en los cuales estaremos haciendo mencion. Son estas estructuturas en donde se van a mover a través de sus métodos, las transformaciones, que se definieron en el apéndice anterior.

Finalmente en el Apéndice C, están las soluciones a los problemas planteados en cada unididad de nuestro trabajo. Ahí, están extensamente desarrollados problemas prácticos, los cuales no están incluidos integramente en el contendio normal.

Es importante decir que, el código con el que fue hecho este trabajo, se encuentra en **GitHub**, y usted, podrá acceder enteramente a él si va a la siguiente paguina:

**> https://github.com/eyreheath/Algebra-Lineal-II-2019-2.git**

CHAPTER 1

# ESPACIOS DUALES

Vamos a definir uno de los entornos en los que van a vivir nuestros objetos, los vectores, especificamente para los espacios duales, ya que es importante definir las reglas del ambiente, pues será en el en donde convivan los vectores; se trata de un ambiente bien definido, con sus propios metodos y atributos, al ambiente que me refiero son los espacios vectoriales.

Si el lector necesita recordar un poco de las estructuras albegraicas básicas, puede consultar el Apéndice, en donde, se definen distintos tipos de entornos, los cuales son un preludio al que se describirá a continuación.

Para este capítulo, es importante definir un metodo, entre nuestros objetos, al que vamos a llamar Funcion Lineal, ya que de esta definición se desprenden muchos teoremas.

Estamos formando las bases de toda la construcción teórica del espacio dual, para que estén bien definido.
Un poco de la lógica que estamos siguiendo es parte de Kennet Hoffman, ya que el define este método dentro de las transformaciones lineales, y es natural pensarlo asi, ya que en el fondo el espacio dual se define a partir de las transformaciones lineales. [3].

De hecho, que una función sea lineal es un supuesto muy fuerte, de lo contrario, no podriamos construir lo que a continuación se hará.

## 1.1 Funciones lineales

Las funciones, estudian desde el curso de cálculo I, en donde se define con un rango y con una imagen, en donde cada elemento del primero pasa por una *transformación*, para caer en otro conjunto, pero nunca nos hablaron de la importancia de las funciones que son lineales; y es que estas tienen un lugar especial en el álgebra, dadas sus propiedades que a continuacion vamos a esbozar.

Y es que en esta ocasión, las funciones lineales forman conjuntos interesantes entre ellas, que nos dan una visión diferente de lo que son las bases, pues a partir de estas bases especiales, podemos formular ideas mas abstractas.

Es bueno recordar, también, que en el apéndice está uno de los teoremas más importantes para nuestro estudio, y me refiero al teorema 10, ya que, a partir de transformaciones lineales se define el rango y la nulidad, la cual es una base de un espacio vectorial, tal que si aplcamos una transformación lineal a cualquier vector de esta, podrémos percatarnos que siempre va a dar cero; y la importancia radica en que si tenemos la nulidad y el rango, podemos saber la dimensión del espacio en cuestion.

**Definición 1.1.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Phi$, una transformacion f de $\mathbb{V}$ en el cuerpo, es tambien una **Funcion Lineal** sobre $\mathbb{V}$, i.e:

$$f\left(c\alpha+\beta\right)=cf\alpha+f\beta$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son vectores, y c es un escalar del cuerpo.

Podriamos decir que una función lineal separa las sumas y saca los escalares. Un ejemplo no trivial es de las integrales en un intervalo definido:

**Ejemplo 1.1.** *Sea* $[a,b]$ *una vecindad cerrada y* $C([a,b])$ *todas las funciones sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *sobre el intervalo definido. Entonces*

$$F(g)=\int_a^b g(t)dt$$

El ejemplo anterior, nos da una nocion de la importancia de la continuidad en las funciones, pues son en este conjuto de operadores en donde estan definidos, a su vez, otros métodos.

Una pregunta para el lector seria: ¿Existen funciones lineales definidas en un espacio no continuo?. Es mas, ¿nos debería importar la continuidad?. Para fines prácticos, en este momento nos es suficiente que sean lienal el método, en otro caso no tiene sentido hablar de espacios vectoriales, porque ¿de qué forma se comunicarían entre ellos si no a través de operadores? pero el que sea lineal nos da ventajas teóricas que estarémos estudiando a continuación.

## 1.2 El espacio dual

**Definición 1.2.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre $\mathbb{V}$ forman un espacio vectorial distinto, al cual llamaremos **espacio dual**, y se denota:

$$\mathbb{V}^*=L(\mathbb{V},\Phi)$$

Cuando la dimension del espacio $\mathbb{V}$ es finita, podemos describir tambien a $\mathbb{V}^*$, aún mas, podemos saber por el *Teorema 11* del apéndice A que:

$$dim\mathbb{V}^* = dim\mathbb{V}$$

.

Dada la naturaleza de las transformaciones, sabes que si tenemos una base $\mathscr{B} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ sobre $\mathbb{V}$, y le aplicamos una transformación lineal f, entonces hay un funcional único tal que:

$$\mathrm{f}_i(\alpha_i) = \delta_i$$

De esta forma, podemos obtener varios funcionales lineales independientes, *i.e*, hemos definido uno de los métedos mas importantes, ya que a partir de aqui, nuestros objetos podrán interectuar entre ellos a través de los funcionales lineales. Aun mas, podemos decir que el espacio dual que acabamos de definir es el conjunto de nuestros métodos, sin embargo también sería valioso preguntarse si este conjunto es único, ya que de no ser asi, tendríamos muchos conjuntos con identicos elementos haciendo exactamente lo mismo:

**Teorema 1.1.** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre el cuerpo $\Phi$ y sea $\mathscr{B} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ una base del espacio. Entonces existe una única base dual $\mathscr{B}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ de $\mathbb{V}^*$ tal que $f_i(\alpha_i) = \delta_{ij}$. Es decir, cada funcional lineal es una combinacion lienal entre el funcional evaluado en el vector por elfuncional. Ademas, cada vector es una combinacion lienal de del funcional lienal evaluado en un ve tor por el vector.*

***Proof:*** *El espacio dual nos dice que hay una relación lineal abstracta entre los vectores $\alpha_{i,j}$ con $i = 1, ..., n$, es decir las filas de una matriz, y los vectores columna $f(\alpha_i)$.La base $\mathscr{B}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ es*

*única, ya que para cada $\alpha_i$ existe un funcional único.*

*Ahora, si cada vector $\alpha$ tiene representación*

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

*al aplicarle el funcional:*

$$\begin{aligned} f_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} \\ &= x_i \end{aligned}$$

*de esta manera, obtenemos lo que habíamos planteado, una expresión única para cada combinacion lienal que forma la base dual:*

$$\alpha = \sum_{i=1^n} f_i(\alpha)\alpha_i$$

Una parte de nuestro estudio, está enfocado en la existencia única de algunos métodos, especiales, ya que nos provee de afirmaciones más claras: si $\mathscr{B}$ es una base ordenada del espacio $\mathbb{V}$, y $\mathscr{B}^*$ es como la describimos, la base dual, entonces cada uno de sus elementos $f_i$ es una función que asigna a cada vector $\alpha$ en el espacio, la i-ésima entrada del vector respecto a la base ordenada. Es por ello que podemos decir que los elementos $f_i$ son funciones cooredenadas.

En muchos libros de álgebra lineal, puedes encntrar ejemplos de transformaciones que son lineales, sin embargo, a continuación se expondrá una ejemplo de una transformación que no es lineal.

**Ejemplo 1.2.** *Sea $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\mathrm{T}f = f(0)+1$. Entonces $\mathrm{T}$ no es lineal, pues:*

$$\mathrm{T}(f+g) = (f+g)+1 = f(0)+g(0)+1$$

$$\mathrm{T}f+\mathrm{T}g = [f(0)+1]+[g(0)+1] = f(0)g(0)+2$$

Este es un bune ejemplo para recalcar la importantacia en la linealidad de las funciones, ya que si nos aventuraramos a generar un espacio a través de una base, no llegaríamos a mucho.[2]

Hemos visto que el espacio dual es un metodo interesante, ya que es un conjunto de funciones lineales, y que estos funcionales lineales forman una base natural del espacio vectorial $\mathbb{V}$, es decir, un espacio vectorial tiene este atributo de poseer bases con vectores que operan otros vectores, se podría pensar como vectores anidados, que nos dan una idea, a su vez, de un atributo mas del espacio vectorial.

Es como si hubiera vectores con métodos especiales, sin embargo sería natural preguntar si es que acaso estos vectores con métodos especiales provienen de otra base del espacio vectorial.

Recordemos un poco como es que interactuan nuestros objetos, los vectores, entre ellos a través de las transformaciones lineales. Para ello, vamos a instanciar en la memoria el teorema 11 del apéndice, el cual nos relata como es que una base de un subespacio $\mathscr{V}$ culquiera de un espacio vectorial $\mathbb{W}$ al interactuar con una base del espacio, forman un nuevo espacio vectorial.

*Id est,* nuestros objetos, al estar contenidos en bases, pueden transportarse a otros espacios a través de un véhiculo llamado transformación.

Vamos a ejemplificar todas estas palabras con un problema propuesto por Friedberg[1], específicamente en la páguina 113, el expone:

**Ejemplo 1.3.** *Sea $\beta = \{(2,1),(3,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}$. Lo que queremos averiguar es la base dual $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ de $\beta$. Para ello, vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$1 = f_1(2,1) = f_1(2e_1+e_2) = 2f_1(e_1)+f_1(e_2)$$

$$0 = f_1(3,1) = f_1(3e_1+e_2) = 3f_1(e_1)+f_1(e_2)$$

*Al resolverlo, vemos que $f_1(e_1) = -1$ y $f_1(e_2) = 3$, por lo que $f_1(x,y) = -x+3y$. Y de forma semejante: $f_2(x,y) = x-2y$.*

Con este pequeño ejercicio, obtuvimos lo que expuse mas arriba. A partir de dos objetos bien definidos, en una base, estos, se comunicaron con otros vectores en otra base a través de la transformación lineal expuesta.

## 1.3 El doble dual

Ya sabemos como es que se comunican los objetos a partir de sus métodos. Además, deben estar bien definidos, pues de lo contrario no se lograrían comunicar entre ellos, y hago énfasis, de nuevo en la linealidad.

Sin embargo, también habríamos de pensar en el caso en el que *ya sabemos* cual es la base a la que llegaron los vectores iniciales, y lo que queremos ahora es determinar la base de donde han venido, y los atributos del espacio de donde provienen; aqui harémos mencion nuevamente del teorema 10, pues también nos interesan los atributos del espacio original.

**Teorema 1.2.** *Sea $\mathbb{V}$ un epsacio vectorial de dimensión finita sobre $\Phi$. Para cada vector $\alpha$ del espacio, se define:*

$$L_\alpha(f) = f(\alpha)$$

*donde $f$ pertence al espacio $\mathbb{V}^*$. Ademàs, tenemos que $\alpha \to L_\alpha$, es un isomorfismo de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{V}^{**}$.*

***Proof:*** *Sabemos que la relación entre cualquier $\alpha$, $L_\alpha$ es lineal. Supongamos ahora que $\alpha$ y $\beta$ pertenecen a $\mathbb{V}$, sea $c$ un escalar del cuerpo $\Phi$, y sea, además, $\gamma = c\alpha + \beta$. Así, para cada funcionala $f$ en el espacio $\mathbb{V}^*$, se tiene que*

$$L_\gamma(f) = f\left(\gamma\right)$$

*pues así hemos definido la aplicación lineal,*

$$= f\left(c\alpha + \beta\right)$$

$$= cf(\alpha) + f\left(\beta\right)$$

$$cL_\alpha(f) + L_\beta()$$

*Entonces*

$$L_\gamma = cL_\alpha + L_\beta$$

*Por lo tanto, la aplicación $\alpha \to L_\alpha$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}^*$*
*En la definicion 12 del apéndice, se declara el atributo no singular, y para nuestra demostración, sabemos que cumple con esa definición, pues $L_\alpha = 0$ si y solo si $\alpha = 0$, haciendo que nuestra transformación sea no singular de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}^*$; aun más,*

$$dim\mathbb{V}^{**} = dim\mathbb{V}^* = dim\mathbb{V}$$

*por lo que por el teorema 13 del apéndice, es un isomorfismo de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}^*$.*

Ya vimos que en efecto, si tenemos una base del espacio $\mathbb{V}*$, es posible averiguar de que base de $\mathbb{V}$ es que son originarios esos vectores. Podriamos decir que estamos iterando un proceso para obtener mas información acerca de nuestro entorno.

Vamos a formalizar este resultado a manra de corolario, ya que queremos afirmar que esto pasa, teniendo en cuenta la linealidad de las transformaciones:

**Corolario 1.1.** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre el cuerpo $\Phi$. Toda base de $\mathbb{V}^*$ es dual de alguna base de $\mathbb{V}$.*

***Proof:*** *Declaremos la base dada, id est $\mathscr{B}^* = \{f_1,...,f_n\}$ una base de $\mathbb{V}^*$. Por el teorema 1 de este capìtulo, tenemos que existe una base $\{L_1,...,L_n\}$ de $\mathbb{V}^{**}$ de forma tal*

$$L_i(f_i) = \delta_{ij}$$

*sabemos, por el teorema anterior que exsiste un único vector $\alpha$ de $\mathbb{V}$ tal que*

$$L_i(f) = f(\alpha_i)$$

*para todo $f$ en $\mathbb{V}^*$, lo que significa que $L_i = \alpha_i$, por este hecho concluimos que hay una base $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ en $\mathbb{V}$ de forma que $\mathscr{B}^*$ es su dual.*

## 1.4 Transpuesta de una transformacón lineal

Ya vimos que es posible, de alguna forma, regresar a nuetros objetos a su lugar de origen, pero ¿será posible que los objetos se comuniquen desde distintos duales?

Ejemplifiquemos esta parte con una situación de la vida diaria: vivo en el estado de México, y todos los dias dias tengo que trasladarme a la Ciudad de México para ir a trabajar; por otro lado, hay una chica Francesa que vive en la provincia de Nice, y todos los dias tiene que transladarse a París para ir a trabajar. Ambos somos objetos de un mismo cuerpo, en este caso nos caracterisamos por ser humanos, ¿Hay alguna forma de que ella y yo nos conozcamos, dado que venimos de lados distintos y vamos hacia lados totalmente distintos?.

Esta es la parte en la que las cosas se empiezan a poner mas interesantes, pues ahora vamos a considerar que nuestros objetos se comunican entre sus duales, todo sobre el mismo cuerpo, como lo vimos en el ejemplo anterior.

**Teorema 1.3.** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\Phi$. Para cada transformación lineal de $\mathrm{T}$ de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, existe una única transformación lineal $\mathrm{T}^{\mathrm{t}}$ de $\mathbb{W}^*$ en $\mathbb{V}^*$ de forma tal*

$$\left(\mathrm{T}^{\mathrm{t}} g\right)\alpha = g(\mathrm{T}\alpha)$$

*para todo $g$ de $\mathbb{W}^*$ y todo $\alpha$ de $\mathbb{V}$.*

*También podemos represntarlo en su forma matricial, que en muchas ocasiones vamos a usar esta notación para ciertas demostraciones:*

$$\left[\mathrm{T^t}\right]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \left([\mathrm{T}]_{\beta}^{\gamma}\right)^t$$

***Proof:*** *Para una $g \in \mathbb{W}^*$, es fácil de ver que $\mathbb{T}(g) = g \circ f$ es una función lineal en $\mathbb{V}$ por lo que es un elemnto de $\mathbb{V}^*$. De esta manera $\mathrm{T^t}$ va de $\mathbb{W}^*$ a $\mathbb{V}^*$.Por otro lado, sea $\beta = \{x_1, ..., x_n\}$ y $\gamma = \{y_1, ..., y_n\}$, con bases duales $\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ y $\gamma^* = \{g_1, ..., g_n\}$, respectivamente. Hagamos $A = [\mathrm{T}]_{\beta}^{\gamma}$ y $B = \left[\mathrm{T^t}\right]_{\gamma^*}^{\beta^*}$, entonces:*

$$\mathrm{T}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} y_k con i = (1, ..., n)$$

*y*

$$\mathrm{T^t}\left(g_j\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} y_i con j = (1, ..., m)$$

*lo que queremos ver es que $B = A^t$. Por el teorema uno de este caoítulo, tenemos que:*

$$\mathrm{T^t}\left(g_j\right) = g_i \circ T = \sum_{i=1}^{n} (g_i \circ T)(x_i) f_i$$

*, por lo que*

$$B_{ij} = (g_i \circ T)(x_i) = g_i(\mathrm{T}(x_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki} y_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki} g_j(y_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} \delta_{jk} = A_{ji} = \left(A^t\right)_{ij}$$

*Asi, desde un punto matricial, pudimos ver que, la transformacion transpuesta de un elemento del espacio dual aplicado a un vector del espacio original, es lo mismo que caclcular el elemento del espacio dual por la transformacion aplicada al vector del esapacio original, i.e,, encontramos dos formas de comunicar a los vectores en distintos espacios, a través de transformaciones.*

Anteriormente, logramos comunicar a los vectores, que vivian en distintos espacios, a través de sus duales, pero lo que no dijimos es que tambien existe una conexion entre los objetos, si los comunicamos entre sus bases.

Y la importancia de las bases reside en que son capaces de darnos atributos del mismo espacio vectorial, con ayuda de una transformación bien definida; y esto lo vimos con la representacion matricial, que fue un resultado que nos ha dado luces de la imortancia del espacio dual.

## 1.5 Problemas

A continuación, se le dejan una lista de problemas al lector, para reforzar la teoría que se ha visto en este primer capítulo. En este momento se debe ser capaz de penar en objetos, cuyas residencias y destinos son completamente distintos. En otros problemas no necesariamente va a ser así

**Problema 1.1.** *Encontrar la base* $\mathscr{B}$ *de* $E = \mathbb{R}_1[x]$ *cuya dual es* $\mathscr{B}^* = \{f_1, f_2\}$*, siendo*

$$f_1[p(x)] = \int_0^1 p(x)\,dx, \quad f_2[p(x)] = \int_0^2 p(x)\,dx.$$

**Problema 1.2.** *Encontrar la base dual de la base de* $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B} = \{(1,-2),(3,4)\}$.

**Problema 1.3.** *Usando el concepto de matriz inversa, encontrar la base dual de la base de* $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathscr{B} = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}.$$

**Problema 1.4.** *Sea* $E = \{p \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}\, p \leq 2\}$ *y* $\varphi \in E^*$, $\varphi(p) = p(1)+p(-1)$. *Hallar las coordenadas de* $\varphi$ *en la base dual de la* $\mathscr{B} = \{5, 2+3x, 1-x^2\}$.

**Problema 1.5.** *Sea* $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial real,* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *una base del mismo y* $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *la forma lineal que cumple* $g(e_1+e_2) = 2$, $g(e_2-e_3) = 1$, $g(e_3-e_1) = 3$. *Hallar las coordenadas de* $g$ *en* $\mathscr{B}^*$.

**Problema 1.6.** *Sea* $\mathbb{K}$ *cuerpo con característica distinta de* $2.$ *y de* $7.$ *Estudiar si las siguientes formas lineales forman una base del espacio dual de* $\mathbb{K}^3$

$$f_1(x,y,z) = 2x - y + 3z,$$

$$f_2(x,y,z) = 3x - 5y + z,$$

$$f_3(x,y,z) = 4x + 7y + z,$$

*En caso afirmativo, hallar las coordenadas de* $f(x,y,z) = x + y + z$ *en tal base.*

**Problema 1.7.** *Sea* $\mathbb{E}$ *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$, *de dimensión finita* $n$ *y* $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de* $\mathbb{E}$. *Demostrar que* $\mathscr{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *es base de* $\mathbb{E}^*$, *en donde*

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_1(e_2) = 0 \\ \quad\cdots \\ f_1(e_n) = 0 \end{cases} \begin{cases} f_2(e_1) = 0 \\ f_2(e_2) = 1 \\ \quad\cdots \\ f_2(e_n) = 0 \end{cases} \cdots \begin{cases} f_n(e_1) = 0 \\ f_n(e_2) = 0 \\ \quad\cdots \\ f_n(e_n) = 1. \end{cases}$$

**Problema 1.8.** *Se consideran los elementos de* $(\mathbb{R}_2[x])^*$ :

$$\phi_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \quad \phi_2(p) = p'(1), \quad \phi_3(p) = p(0).$$

*Hallar una base de* $\mathbb{R}_2[x]$ *cuya dual es* $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

CHAPTER 2

# Formas Bilineales

Vamos a describir un método que une el capítulo anterior con este capítulo nuevo, lleno de interesantes características; atributos que esbozan la relacion entre nuestro objetos, cuya vida esta definida sobre un ambiente cualquiera, aqui le llamamos cuerpo, pues puede tener cualesquiera elementos, siempre y cuando cumpla con los axiomas de un grupo.
Hay un espacio especial para nosotros, ya que además de que tiene definido, como es usual, dos operaciones binarias, estas interectuan con los objetos de manera especial, dando lugar al tema principal que nos interesa en este capítulo:

## 2.1 Espacio con producto intero

En matemáticas, la tendencia es tratar de cuantificar muchos objetos de la naturaleza, con el motivo de entender las propiedades de la misma, es por ello que a lo largo de la historia, se han inventado un sin número de métodos para medir casi cualquier cosa; y aquí en algebra no es la escepción. En alegebra nos interesa medir algo mas complejo que si bien no está en la naturaleza, está en la abtración de las matemáticas.
El poder medir un objeto de nuestro espacio, es lo mismo a averiguar un poco mas de la naturaleza de los vectores, y es aquí donde hacemos referencia a otros cursos en matemáticas, como lo es el cálculo, o la topología, donde fue en estas materias que se nos da una inducción de lo que es una métrica o una norma.
Longitud y ortogonalidad serán dos conceptos que estaremos ocupando más adelante con frecuencia, pero antes de ello:

**Definición 2.1.** Sea $\Phi$ el cuerpo de los numeros reales, de los complejos, y $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo. Un **producto interno** sobre $\mathbb{V}$ es una función que asigana a cada par ordenada de vectores $\alpha$ y $\beta$ de $\mathbb{V}$ un escalar $\left(\alpha|\beta\right)$ del cuepro de forma tal que para cualesquiera $\alpha$ , $\beta$ y $\gamma$, del espacio vectorial y todos los escalares c:

- $(\alpha+\beta|\gamma) = (\alpha\|\gamma) + (\beta)$
- $(c\alpha|\beta) = c\,(\alpha|\beta)$
- $(\beta|\alpha) = (\alpha\bar{|}\beta)$ conjungación compleja.
- $(\alpha|\alpha) > 0 si \alpha \neq 0$

Vease que con esta definición es muy facil demostrar que es un espacio vectorial, pues las primeras tres condiciones implican que

$$(\alpha|c\beta+\gamma) = \bar{c}\,(\alpha|\beta) + (\alpha|\gamma)$$

de esta manera tenemos dos elementos de este nuevo ambiente, uno de ellos multiplicado por un escalar del cuerpo, y , como en un primer curso de Algebra lineal se demostró, basta con probar que este nuevo elemento es parta también del espacio vectorial para que fuese subespacio vectorial. Veamos un ejemplo con aquel método del que hemos estado haciendo incapié desde el último capítulo, con una transformación lineal.

**Ejemplo 2.1.** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\Phi$ y suponga usted que* $(|)$ *es un producto interno sobre el espacio $\mathbb{W}$. Si* $\mathrm{T}$ *es una transformación lineal no singular de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ entonces la igualdad*

$$p_T = (\mathrm{T}\alpha|\mathrm{T}\beta)$$

*define un producto interno $p_T$ sobre $\mathbb{V}$*

Vamos a poder construir nuevos productos internos a partir del que acabamos de exponer:

**Ejemplo 2.2.** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita, y sea*

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$$

*una base ordenanda del espacio vectorial. Se además $\epsilon_1,...,\epsilon_n$ los vectores de la base canónica en $\Phi^n$ de forma tal que $\mathrm{T}\alpha_j = \epsilon_j$ con $j = 1,...,n$. Id est, si* $\mathrm{T}$ *es el isomorfismo natural de $\mathbb{V}$ sobre el producto interno canónico sobre $\Phi^n$, entonces:*

$$p_T\left(\sum_j x_j\alpha_j, \sum_k y_k\alpha_k\right) = \sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j$$

*Con este ejemplo, hacemos la conexión íntima, entre el capítulo pasado, y este que tiene que ver, entre otras cosas con formas bilineales. Pero vamos a ver que esta pasando con este ejemplo.*

*Para cada base de $\mathbb{V}$ existe un producto interno sobre el espacio con la pripiedad de que*

$$(\alpha_j|\alpha_k) = \delta_{jk}$$

.

**Ejemplo 2.3.** *Recordemos el ejemplo uno del capítuo uno, ahí, exponía un funcional lineal, con una integral bien definida en cero y uno, retomemos este ejemplo. Sea* T *el operador lineal "multiplicación por t,", i.e,,* $(\mathrm{T}f)t = tf(t)0$. *Entre otras cosas, T es lineal, y no singular, esto último se pude ver de la siguietne manera: supongamos que* $\mathrm{T}f = 0$, *entonces* $tf(t) = 0$, *por lo que* $f(t) = 0$ *o* $f = 0$. *Si ahora deffinimos un producto interno como sigue:*

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g\bar{(}t)dt$$

*entonces, podemos hacer un producto interno nuevo sobre* $\mathbb{V}$ *haciendo*

$$p_T(f,g) = \int_0^1 (\mathrm{T}f)t(\mathrm{T}\bar{g})tdt$$

$$= \int_0^1 f(f)\bar{g}()t^2dt$$

Una nota importante para el lector, es que la pasada notación que se le dio a los prodcutos internos, es, o muy antigua, o casi nadie la conoce o usa. Esta es una notacion de Hoffman[3].
En la siguiente parte, haremos uso de la notación más común para los productos internos cuando se usen. Quize poner ambas notaciones, ya que el lector se puede enfrentar a las dos, y presentarle dos formas de represntar una misma idea no esta demas.

## 2.2 Formas Bilineales

Recordando el concepto de una transformación lineal T de un espacio vextorial V en un espacio W; es una función tal que $\mathbb{T}(cv+w) = c\mathbb{T}v + \mathbb{T}w$ y podemos observar que es lineal en la primera entrada. Ahora si generalizamos este consepto y le pedimos ahora que sea lenal en las dos entradas y si satisfacen eso las llamaremos formas bilineales. Este tipo de funciones tiene muchas aplicaciones de las cuales solo estudiaremos algunas en este curso.

Se dice que una forma bilineal $\beta$ no degenerada en la primer variable si $\beta$(V,W)=0 $\forall$ w $\in$ W $\Rightarrow v = 0$
Analogicamente para la segunda variable.

En general una forma bilineal es no degenerada si es no degenerada en ambas variables

**Ejemplo 2.4.** $\mathbb{R}^n$ *y* $<,>$ $\mathbb{R}^n$ *es producto interior de* $\mathbb{R}^n$; $\beta(x,y)$ *es una forma bilineal no degenerada* $<x,y>^n_{\mathbb{R}}$

*Sea* $x \in \mathbb{R}^n$ *fija, si* $(x)(y) = 0 \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = 0$

**Ejemplo 2.5.** *Sea* $\mathrm{A} \in M_k^{nxm}$ *y* $\beta$*:* $k^m \times k^n \rightarrow k$
$\beta(x \times y) = y^T \mathrm{A}_x$ *es una forma bilineal no degenerada* $\Leftrightarrow$ *m=n y* $|\,A\,| \neq 0$

$$(y_1,...,y_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{d1} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{bmatrix} = 0$$

**Definición 2.2.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre k Una forma sobre $\mathbb{V}$ es una funcion g : $\mathbb{V}$ ×V→ k tal que

- $g(cx+y,z) = cg(x,z)+g(y,z)$
- $g(x,cy+z) = cg(x,y)+g(x,z)$

$\forall x,y,z \in$V$, c \in$ ‘k

A este tipo de Formas se dice que son sesquilineales. Ahora bien si la forma saca al escalar c de la igualdad 2 sin conjugado se dice que la forma es una forma bilineal que en pocas palabras signi ca que es lineal en la primera y segunda entrada. [1]

**Definición 2.3.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre  y g una forma bilineal sobre $\mathbb{V}$ sean u, v ∈ $\mathbb{V}$. Se dice que g es simétrica si: g(u,v) = g(v,u)
Notese que todo producto interno sobre $\mathbb{R}^n$

**Definición 2.4.** Sea $\mathbb{V}$ en espacio vectorial sobre  y g una forma sobre $\mathbb{V}$ se dice que q es una forma no degenerada (o no singular) si:

- Para cada vector no nulo v de $\mathbb{V}$ existe u ∈ $\mathbb{V}$ tal que g(v,u)≠ 0
- Para cada vector no nulo u de $\mathbb{V}$ existe v ∈ $\mathbb{V}$ tal que g(u,v)≠ 0

**Teorema 2.1.** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre , g una forma bilineal sobre $\mathbb{V}$ y $\epsilon$ = $e_i$ una base ordenada de $\mathbb{V}$ sean u,v ∈ $\mathbb{V}$ Tales que $[u]_\epsilon = X$ y $[v]_\epsilon = Y$ entonces, existe una unica matriz* C = $c_i j \in M_{n\times n}(K)$ *tal que $g(u,v) = X^tCY$ A esta matriz se le conoce como la matriz osociada a g respecto a la base ordenada $\epsilon$ y la podemos denotar como $C = [g]_\epsilon$*

## 2.3 Formas Cuadraticas

Se tiene que una forma cuadratica o forma bilineal simetrica es una aplicacion matematica que asigna a cada elemento de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ un numero real, de una manera que generaliza la operacion $ax^2$ un espacio vectorial de dimension superior a 1.

## 2.4 Problemas

**Problema 2.1.** *Demostrar que una forma bilineal antisimétrica* $\phi$ *, definida sobre un espacio vectorial E, verifica:* $\forall x \in E, \phi(x,x) = 0$ *Deducir de aquí por qué es posible limitarse a las formas bilineales simétricas para engendrar formas cuadráticas.*

**Problema 2.2.** *Sea E el espacio vectorial* $\mathbb{R}$ *referido a su base canónica:* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *y f la forma bilineal definida por:*

$$f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

*Escribir la matriz de f en la base canónica. Escribir la matriz de f en la base* $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ *que cumple:*
$e'_1 = e_1; e'_2 = 2e_1 + e_2; e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$
*Dar la expresión de la forma cuadratica, q, asociada a f, respecto de cada una de las bases.*

CHAPTER 3

# Teoría de Determinates

C

CHAPTER 4

# POLINOMIOS

P

CHAPTER 5

# TRIANGULACIÓN DE OPERADORES

T

CHAPTER 6

# DESCOMPOSICIÓN DE UN ESPACIO EN SUMAS DIRECTAS

## 6.1 Teorema de Cayley-Hamilton

***Lema* .1.** *Sea $\mathbb{A}$ un operador en un espacio de dimensi´on finita y sea $\mathbb{W}$ un subespacio invariante bajo $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{B}$ = v1, . . . , vn es una base del espacio de modo que $\mathbb{W}$ = gen(v1, . . . , vk), entonces es posible describir la matriz asociada al operador por bloques como*

$$[\mathbb{A}]_{\beta}= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

*donde $\mathbb{A}_{\mathbb{1}}$ es la matriz asociada al operador $\mathbb{A}$ restringido por el espacio $\mathbb{W}$*

**Corolario 6.1.** *El polinomio caracterítico de $\mathbb{A}|$ divide al polinomio caracterítico de $\mathbb{A}$*

*Demostración*

$$\mathscr{P}_{\mathbb{A}}=\det \begin{bmatrix} xI - A_1 & A_2 \\ 0 & xI - A_3 \end{bmatrix} =\text{det(xI - }\mathbb{A}_{\mathbb{1}}\text{) det(xI - }\mathbb{A}\text{)}$$

**Teorema 6.1.** *(Cayley-Hamilton) Sea $\mathbb{A} : \mathbb{V} \longrightarrow V unespaciodedimensi\acute{o}nfinita,$*

## 6.2 Polinomios y triangulaciones

## 6.3 Cálculo del polinomio minimal

## 6.4 Vectores propios generalizados

## 6.5 Forma canónica de Jordan

## 6.6

CHAPTER 7

# El toerema espectral y la forma de Jordan

E

CHAPTER 8

# CONCLUSIÓN

C

APPENDIX A

## Apéndice A: Definiciones y Teoremas

## A.1 Espacios Vectoriales

***Definición .1.*** ***Espacio vectorial*** *o lineal es aquel que cumple con:*

- *Un cuerpo $\Phi$ de escalares*
- *Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos llamados vectores*
- *La **adición**:*
  - *conmuta:* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
  - *asocia:* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
  - *la existenci y unicidad del vector nulo:* $\alpha + 0 = \alpha$
  - *Para todo $\alpha$ en $\mathbb{V}$ existe $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$*
- *La **Multiplicación escalar** asocia cualquier escalar $c_i$ del campo $\Phi$ con un objeto del conjunto $\mathbb{V}$ , de tal manera que:*
  - $1 * \alpha = \alpha$
  - $(c_1 * c_2) * \alpha = c_1 * (c_2 * \alpha)$
  - $c * (\alpha + \beta) = c * \alpha + c * \beta$
  - $(c_1 + c_2) * \alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$

***Definición .2.*** *Sea $\beta$ en $\mathbb{V}$, llamamos combinación **lineal** de los vectores $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en $\mathbb{V}$ si existen escalares $c_1, ..., c_2$ en $\Phi$, tal que:*

$$\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$$

***Definición .3.*** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre el campo $\Phi$. Un* ***Subespacio*** *de $\mathbb{V}$ es un conjunto $\mathscr{W}$ contenido en $\mathbb{V}$, con las operaciones de adicion vectorial y multiplicación escalar sobre $\mathbb{V}$, entonces $\mathscr{W}$ es tambien un espacio vectorial sobre $\Phi$.*

***Teorema .1.*** *Un sunconjunto $\mathscr{W}$ no vacio de $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si para todo $\alpha, \beta$ de y cualquier escalar$c_i$ en el campo, el vector $c\alpha + \beta$ está en $\mathscr{W}$*

***Teorema .2.*** *Sea un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre el campo $\Phi$, la intersección de cualquier colección de subespacios de $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.*

***Definición .4.*** *Sea $\mathscr{S}$ un subconjunto de vectores en $\mathbb{V}$. El Subespacio generado por $\mathscr{S}$ es la intersección $\mathscr{W}$ de todos los subpesacios de $\mathbb{V}$ que contienen a $\mathscr{S}$. Cuando $\mathscr{S}$ un conjunto finito de vectores, v.gr, $\mathscr{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, enotnces $\mathscr{W}$ es el subespacio generado por $\alpha_1, ..., \alpha_n$*

***Teorema .3.*** *El subespacio generado por un subconjunto $\mathscr{S}$ no vacio de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de $\mathscr{S}$.*

***Definición .5.*** *Sea un espacio $\mathbb{V}$ sobre el campo $\Phi$. Un subconjunto $\mathscr{S}$ de $\mathbb{V}$ se dice* ***linealmente dependiente*** *si existen vectores distintos $\alpha_i$ en $\mathscr{S}$ y escalares $c_i$ en $\Phi$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$*
*Además podemos deducir de lo anterior que:*

- *Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.*
- *Un conjunto es linealmente dependiente si y solo si para todos los vectores distintos $\alpha_i$ de $\mathscr{S}$ elegidos aleatoriamente, de tal manera que $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$ entonces $c_i = 0$.*

***Definición .6.*** *Sea $\mathbb{V}$. Una* ***base*** *de $\mathbb{V}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que genera a $\mathbb{V}$. Además, podemos añadir que el espacio vectorial $\mathbb{V}$ es de dimension finita si tiene una base finita.*

***Teorema .4.*** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio generado por un conjunto finito de vectores $\beta_1, ..., \beta_m$. Entonces todo conjunto independiente de vectores de $\mathbb{V}$ es finito y no contiene mas de* ***m*** *vectores.*

***Corolario .1.*** *Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimension finita, entonces dos bases cualesquiera de $\mathbb{V}$ tienen el mismo número de elementos.*

***Corolario .2.*** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sea $n = dim\mathbb{V}$. Entonces:*

- *Cualquier subconunto de $\mathbb{V}$ que contenga mas de* ***n*** *vectores es linealmente dependiente.*
- *Ningun subconjunto de $\mathbb{V}$ que contenga menos de* ***n*** *vectores puede generar $\mathbb{V}$.*

***Lema .2.*** *Sea $\mathscr{S}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $\beta$ un vector en $\mathbb{V}$*

***Teorema .5.*** *Sea $\mathscr{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ con dimension finita, entonces, todo subconjunto linealmente independiente de $\mathscr{W}$ es finito y es parte de una base de $\mathscr{W}$.*

***Corolario .3.*** *Si $\mathscr{W}$ es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimension finta $\mathbb{V}$, entonces $\mathscr{W}$ es de dimension finita y $dim\mathscr{W} < dim\mathbb{V}$.*

***Corolario .4.*** *En un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimension finta todo conjunto linealmente independiente de vectores es parte de una base.*

***Corolario .5.*** *Sea $\mathrm{A}$ una matriz $n_x n$ sobre el cuerpo $\Phi$, y supongase que los vectores fila de $\mathscr{A}$ forman un conjunto lienalmente independiente de vectores de $\Phi^n$. Entonces $\mathscr{A}$ es inversible.*

***Teorema .6.*** *Sea $\mathscr{W}_1$ y $\mathscr{W}_2$ subespacios de dimension finita, entonces $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$ es de dimension finta y*

$$dim\mathscr{W}_1 + dim\mathscr{W}_2 = dim\left(\mathscr{W}_1 \bigcap \mathscr{W}_2\right) + dim\left(\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2\right)$$

.

***Definición .7.*** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimension finita. Definimos una **base ordenada** de $\mathbb{V}$ como una sucesión finita de vectores linealmente independientes y genera $\mathbb{V}$.*

***Teorema .7.*** *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con dimension n sobre un campo $\Phi$, y sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ bases ordenadas de $\mathbb{V}$. Entonces existe una única matriz con dimension nxn inversible con elementos en $\Phi$, entonces:*

- $[\alpha]_{\mathscr{B}_1} = \mathrm{P}[\alpha]_{\mathscr{B}_2}$
- $[\alpha]_{\mathscr{B}_2} = \mathrm{P}^{-1}[\alpha]_{\mathscr{B}_1}$

*para todo vector $\alpha$ en . Las columnas $\mathrm{P}$ estàn dadas por*

$$\mathrm{P}_j = \left[\alpha_j\right]_{\mathscr{B}}$$

***Teorema .8.*** *Sea $\mathrm{P}$ una matriz escalón no nula reducid por filas. Entonces los vectores fila no nulos de $\mathrm{P}$ forman una base del espacio de filas de $\mathrm{P}$*

***Teorema .9.*** *Sea m y n dos enteros positivos y sea $\Phi$ un cuerpo. Suponga que $\mathscr{W}$ es un subespacio de $\Phi^n$ y la dimensión de $\mathscr{W}$ es finita. Entonces existe una única matriz escalón $m_x n$ reducida por filas sobre el cuerpo que tiene a $\mathscr{W}$ como espacio de filas.*

***Corolario .6.*** *Cada matriz $m_x n$ A es equivalente por filas a una sola matriz escalón reducida por fila*

***Corolario .7.*** *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ matrices $m_x n$ sobre un cuerpo $\Phi$. Entonces $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son equivalntes por filas si y solo si tienen el mismo espacio de filas.*

***Definición .8.*** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Phi$. Una **transformación lineal** de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ es una funciónb $\mathrm{T}$ de V en $\mathbb{W}$ tal que:*

$$\mathrm{T}\left(c\alpha + \beta\right) = c\mathrm{T}\alpha + c\mathrm{T}\beta$$

*para todo $\alpha$ y $\beta$ en $\mathbb{V}$ y c en el cuerpo.*

***Definición .9.*** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Phi$ y sea $\mathrm{T}$ una trasnformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. LLamamos **espacio nulo** de la transformación como el conjuto de todos los vectores $\alpha$ en $\mathbb{V}$ tal que $\mathrm{T}\alpha = 0$. Si la dimension de $\mathbb{V}$ es finita, el **rango** de $\mathrm{T}$ es la dimension de la imagen de $\mathrm{T}$. La **nulidad de** $\mathrm{T}$ es la dimension del espacio nulo de $\mathrm{T}$.*

***Teorema .10.*** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Phi$ y sea $\mathrm{T}$ una trasnformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Supongase que $\mathbb{V}$ es de dimension finita. Entonces*

$$rango(\mathrm{T}) + nulidad(\mathrm{T}) = dim(\mathbb{V})$$

.

***Teorema .11.*** *Sea $\mathscr{V}$ un subespacio vectorial de dimension finita n sobre el cuerpo $\Phi$ y sea $\mathbb{W}$ un espacio vectorial de dimension finita m sobre el cuerpo. Entonces el espacio $L(\mathscr{V}, \mathbb{W})$ es de dimension finita y tiene dimension $mn$*

***Definición .10.*** *Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\Phi$, entonces un **operador lineal** sobre $\mathbb{V}$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$.*

***Definición .11.*** *Una función $\mathrm{T}$ de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ se dice **inversible** si existe una función $\mathrm{U}$ de $\mathbb{W}$ en $\mathbb{V}$ tal que $\mathrm{UT}$ es la función identidad de $\mathbb{V}$ y $\mathrm{TU}$ es la función identidad de $\mathbb{W}$. $\mathrm{T}$ es inversible, ( la función $\mathrm{U}$ es única y se representa por $T^{-1}$ ), si y solo si:*

- $\mathrm{T}$ *es inyectiva, i.e,* $\mathrm{T}\alpha = \mathrm{T}\beta$ *implica* $\alpha = \beta$
- $\mathrm{T}$ *es sobreyectiva, i.e, la imagen de* $\mathrm{T}$ *es* $\mathbb{W}$

***Definición .12.*** *Sea $\mathrm{T}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ sobre un cuerpo $\Phi$, entonces $\mathrm{T}(\alpha - \beta) = \mathrm{T}\alpha - \mathrm{T}\beta$ , así $\mathrm{T}\alpha = \mathrm{T}\beta$ si y solo si $\mathrm{T}(\alpha - \beta) = 0$. Entonces, se dice que $T$ es **no singular** si $\mathrm{T}\gamma$ implica que $\gamma = 0$, i.e, el espacio nulo de $T$ es $\{0\}$.*

***Teorema .12.*** *Sea $T$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ $\mathbb{W}$. Entonces $\mathrm{T}$ es no singular si y solo si $\mathrm{T}$ aplica a cada subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ sobre un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{W}$.*

***Teorema .13.*** *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales con $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$ sobre un cuerpo $\Phi$. Si $\mathrm{T}$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\mathrm{T}$ *es inversible.*
- $\mathrm{T}$ *es no singular.*
- $\mathrm{T}$ *es sobreyectiva, i.e,* $img(\mathrm{T}) = \mathbb{W}$.
- *Si* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es una base de* $\mathbb{V}$, *entonces* $\{\mathrm{T}\alpha_1, ..., \mathrm{T}\alpha_n\}$ *es una base de* $\mathbb{W}$.

***Definición .13.*** *Sea $\mathrm{T}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ sobre un cuerpo $\Phi$. Si la transformación lineal $\mathrm{T}$ es sobreyectiva e inyectiva, se dice que es un **isomorfismo** de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, o simplemente que $\mathbb{V}$ es isomorfo a $\mathscr{W}$.*

***Teorema* .14.** *Todo espacio vectorial de dimension n sobre el cuerpo $\Phi$ es isomorfo al espacio $\Phi^n$.*

***Definición* .14.** *Sean dos espacios de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ sobre un cuerpo $\Phi$, de dimension n y m respectivamente; sean $\mathscr{B}_v = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ y $\mathscr{B}_w = \left\{\beta_1,...,\beta_m\right\}$ dos bases ordenadas. Si $\mathrm{T}$ es una transformación lineal cualquiera, entonces $\mathrm{T}$ está determinada sobre los vectores $\alpha_j$, y $\mathrm{T}\alpha_j$ se representa como la combinación lineal:*

$$\mathrm{T}\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_{ij}\beta_i$$

*. La transformación $\mathrm{T}$ está determinada por pos $mn$ escalares $\mathrm{A}_{ij}$. La matriz $\mathrm{A}$ de dimensión $m_x n$ se llama **matriz de** $\mathrm{T}$ **respecto a las bases** $\mathscr{B}_v = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ **y** $\mathscr{B}_w = \left\{\beta_1,...,\beta_m\right\}$ .*

***Teorema* .15.** *Sean dos espacios de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ y sea $\mathrm{T}$ es una transformación lineal cualquiera, entonces existe una única matriz asociada a dicha transformacion, y puede representarse como:*

$$[\mathrm{T}\alpha]_{\mathscr{B}_{\mathscr{W}}} = \mathrm{A}[\alpha]_{B_V}$$

APPENDIX B

## APÉNDICE B: ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

### B.1 Teoría de grupos

***Definición* .15.** *Un **Grupo** se define como:*

- *Un conjunto $\mathscr{G}$*
- *Una correspondendia que asocia a cada par de elementos $x,y$ de $\mathscr{G}$, un elemento de $\mathscr{G}$ $xy$ de tal modo que:*
  - *$x(yz) = (xy)z$ para todo $x,y,z$ en $\mathscr{G}$, i.e, es asociativo.*
  - *La existencia y unicidad del elemento neutro $e$ en $\mathscr{G}$, de tal manera que $ex = xe = x$ para todo $x$ en $\mathscr{G}$*
  - *a cada elemento $x$ de $\mathscr{G}$ le corresponde un elemento $x^{-1}$ en $\mathscr{G}$ de tal manera que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$*

***Definición* .16.** *Un **anillo** $\mathscr{A}$ es un conjunto, que tiene como métodos la adicción y la multiplicación. Además tiene los siguientes atributos:*

- *Es un **grupo conmutativo** respecto a la adicción.*
- *La multiplicación es asociativa y tiene un elemento unitario.*
- *Para cada $\alpha_i$ en $\mathscr{A}$, con $i$ en $\{1,2,3\}$, tenemos que:*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$$

*También, definimos el elemento neutro aditivo 0, como único, y el elemento netruo multiplicativo como 1. No asumimos que $1 \neq 0$*

APPENDIX C

# Appendix C: Solución a problemas

## C.1 Espacio Dual

**Solución .1.** *Llamemos* $\mathscr{B} = \{e_1(x), e_2(x)\}$, *siendo* $e_1(x) = a_1 + b_1x$, $e_2(x) = a_2 + b_2x$. *Por definición de base dual,*

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_2(e_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_1 + b_1x)\,dx = 1 \\ \int_0^2 (a_1 + b_1x)\,dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[a_1x + b_1x^2/2\right]_0^1 = 1 \\ \left[a_1x + b_1x^2/2\right]_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1/2 = 1 \\ 2a_1 + 2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow e_1(x) = 2 - 2x.$$

$$\begin{cases} f_1(e_2) = 0 \\ f_2(e_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_2 + b_2x)\,dx = 0 \\ \int_0^2 (a_2 + b_2x)\,dx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[a_2x + b_2x^2/2\right]_0^1 = 0 \\ \left[a_2x + b_2x^2/2\right]_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2/2 = 0 \\ 2a_2 + 2b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -1/2 \\ b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow e_2(x) = -1/2 + x.$$

*Por tanto,* $\mathscr{B} = \{2 - 2x, -1/2 + x\}$.

**Solución .2.** *Llamemos* $B^* = \{f_1, f_2\}$. *Dado que* $f_1$ *y* $f_2$ *pertenecen a* $(\mathbb{R}^2)^*$, *son aplicaciones lineales de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$ *y sus expresiones matriciales en las respectivas bases canónicas tienen la forma*

$$f_1 \equiv [y_1] = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f_2 \equiv [y_1] = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

*Por definición de base dual:*

$$\begin{cases} f_1(1,-2) = 1 \\ f_1(3,4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [1] \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4/10 \\ b = -3/10 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = (4/10)x_1 - (3/10)x_2.$$

$$\begin{cases} f_2(1,-2) = 0 \\ f_2(3,4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [0] \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2/10 \\ d = 1/10 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = (2/10)x_1 + (1/10)x_2.$$

*Por tanto, la base pedida es $B^* = \{f_1, f_2\}$ siendo:*

$$f_1(x_1,x_2) = \frac{1}{10}(4x_1 - 3x_2), \quad f_2(x_1,x_2) = \frac{1}{10}(2x_1 + x_2).$$

**Solución .3.** *Llamemos $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$. Dado que $f_1$, $f_2$ y $f_3$ pertenecen a $(\mathbb{R}^3)^*$, son aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y sus expresiones matriciales en las respectivas bases canónicas tienen la forma*

$$f_i \equiv \ [y_1] = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3),$$

*o de forma equivalente*

$$f_i(x_1,x_2,x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 \quad (i = 1,2,3).$$

*Por definición de base dual:*

$$\begin{cases} f_1(2,1,1) = 1 \\ f_1(1,2,1) = 0 \\ f_1(1,1,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + 2c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(2,1,1) = 0 \\ f_2(1,2,1) = 1 \\ f_2(1,1,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 = 1 \\ a_2 + b_2 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(2,1,1) = 0 \\ f_3(1,2,1) = 0 \\ f_3(1,1,2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 + 2b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 + b_3 + 2c_3 = 1. \end{cases}$$

*En vez de resolver los tres sistemas anteriores, podemos expresar*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Por tanto, la base pedida es* $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ *siendo:*

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}(3x_1 - x_2 - x_3),$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}(-x_1 + 3x_2 - x_3),$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + 3x_3).$$

**Solución .4.** *Sea* $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ *la base dual de* $B$*, y sea* $\varphi = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$*. Por definición de base dual,*

$$\begin{cases} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(5) = \lambda_1 \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(2+3x) = \lambda_2 \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(1-x^2) = \lambda_3. \end{cases}$$

*Por tanto,*

$$\begin{cases} \lambda_1 = \varphi(5) = 5+5 = 10 \\ \lambda_2 = \varphi(2+3x) = 5+(-1) = 4 \\ \lambda_3 = \varphi(1-x^2) = 0+0 = 0, \end{cases}$$

*luego las coordenadas pedidas son* $(10,4,0)$.

**Solución .5.** *Dado que la aplicación g es lineal:*

$$\begin{cases} g(e_1+e_2) = 2 \\ g(e_2-e_3) = 1 \\ g(e_3-e_1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(e_1)+g(e_2) = 2 \\ g(e_2)-g(e_3) = 1 \\ g(e_3)-g(e_1) = 3. \end{cases}$$

*Resolviendo, obtenemos* $g(e_1) = -1$, $g(e_2) = 3$, $g(e_3) = 2$*. Sea* $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$*, y* $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$*. Por definición de base dual:*

$$\begin{cases} g(e_1) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_1) = \lambda_1 \\ g(e_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_2) = \lambda_2 \\ g(e_3) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_3) = \lambda_3. \end{cases}$$

*Las coordenadas de g en* $B^*$ *son por tanto* $(-1,3,2)$.

**Solución .6.** *Dado que* $\dim\left(\mathbb{K}^3\right)^* = 3$*, los vectores* $f_1$*,* $f_2$*,* $f_3$ *forman base de* $\left(\mathbb{K}^3\right)^*$ *si, y sólo si, son linealmente independientes. Supongamos que*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}).$$

*Entonces,*

$$\begin{cases} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(1,0,0) = 0(1,0,0) \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0,1,0) = 0(0,1,0) \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0,0,1) = 0(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 5\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

*El determinante de la matriz del sistema es*

$$\begin{vmatrix} 2 & amp;\,3 & 4 \\ -1 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & \end{vmatrix} = -10-4+63+60-14+3=98.$$

*Podemos expresar* $98 = 2\cdot 7^2$ *y dado que la característica de un cuerpo es infinito a un número primo, si*

$$98 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{98\ veces}$$

*fuera* $0$ *la característica de* $\mathbb{K}$ *sería infinito o un número primo dividiento a* $98$*. Como la característica de* $\mathbb{K}$ *es distinta de* $2$ *y* $7$*, se verifica* $98 \neq 0$*. La única solución del sistema* $(*)$ *es la trivial, en consecuencia* $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ *es base del dual de* $\mathbb{K}^3$*. Si* $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ *son las coordenadas de* $f$ *en* $B$*,* $f = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3$*. Entonces,*

$$\begin{cases} (\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\xi_3 f_3)(1,0,0) = f(1,0,0) \\ (\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\xi_3 f_3)(0,1,0) = f(0,1,0) \\ (\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\xi_3 f_3)(0,0,1) = f(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1+3\xi_2+4\xi_3 = 1 \\ -\xi_1-5\xi_2+7\xi_3 = 1 \\ 3\xi_1+\xi_2+\xi_3 = 1. \end{cases}$$

*Resolviendo obtenemos* $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (15/49, -3/49.1/7)$.

**Solución .7.** *Dado que* $\dim E^* = \dim \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K}) = (\dim E)(\dim \mathbb{K}) = n\cdot 1 = n$*, basta demostrar que* $B^*$ *es un sistema libre. Para todo* $i = 1,2,\dots,n$ *y teniendo en cuenta que* $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ *(deltas de Kronecker):*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n)(e_i) = 0(e_i) \Rightarrow \lambda_i = 0,$$

*luego* $B^*$ *es base de* $E^*$.

**Solución .8.** *Llamemos* $B = \{e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$*, siendo* $e_1(x) = a_1+b_1x+c_1x^2$*,* $e_2(x) = a_2+b_2x+c_2x^2$*,* $e_3(x) = a_3+b_3x+c_3x^2$*. Por definición de base dual,*

$$\begin{cases} \phi_1(e_1) = 1 \\ \phi_2(e_1) = 0 \\ \phi_3(e_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_1+b_1x+c_1x^2)\,dx = 1 \\ b_1+2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1/2+c_1/3 = 1 \\ b_1+2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = -3/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(e_2) = 0 \\ \phi_2(e_2) = 1 \\ \phi_3(e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_2+b_2x+c_2x^2)\,dx = 1 \\ b_2+2c_2 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2+b_2/2+c_2/3 = 0 \\ b_2+2c_2 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = -1/2 \\ c_2 = 3/4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(e_3) = 0 \\ \phi_2(e_3) = 0 \\ \phi_3(e_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_3 + b_3 x + c_3 x^2)\, dx = 1 \\ b_3 + 2c_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3 + b_3/2 + c_3/3 = 0 \\ b_3 + 2c_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = -3 \\ c_2 = 3/2. \end{cases}$$

*La base pedida es por tanto es:*

$$B = \{3x - 3x^2/2,\ -x/2 + 3x^2/4,\ 1 - 3x + 3x^2/2\}.$$

## C.2 Formas Bilineales

**Solución .9.** *Sabemos que, por definición, una forma bilineal antisimétrica cumple:*

$$\phi(x, y) = -\phi(y, x), \forall x, y \in E$$

*Podemos hacer entonces:*

$$\phi(x, y) = -\phi(y, x) \Rightarrow 2\phi(x, x) = 0 \Rightarrow \phi(x, x) = 0, \forall x \in E$$

*Según lo visto, podemos decir que toda forma cuadrática asociada a una forma bilineal antisimétrica es nula, puesto que se cumple:*

$$\varphi(x) = \phi(x, x) = 0, \forall x \in E$$

*Por lo tanto, si demostramos que toda forma bilineal se puede poner como suma de una forma bilineal simétrica, f1, y otra forma bilineal antisimétrica, f2, es decir:*

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(y, x)$$

*Habremos reducido el estudio de las formas bilineales al de las formas bilineales simétricas en cuanto a generación de formas cuadráticas se refiere:*

$$\varpi(x) = f(x, x) = f_1(x, x) + f_2(x, x) = f_1(x, x)$$

*Definimos entonces para cualquier forma bilineal f:*

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(y, x)]$$
$$f_2(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(y, x)]$$

*Es fácil ver que f1 es una forma bilineal simétrica y que f2 es una forma bilineal antisimétrica. Además se tiene:*

$$(f_1 + f_2)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

$$= \frac{1}{2}[f(x,y)+f(y,x)] = f(x,y) + \frac{1}{2}[f(x,y)-f(y,x)]$$
$$= f(x,y)$$

*Es decir, que se cumple, tal como queríamos demostrar:*

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$$

*Donde f1 es una forma bilineal simétrica y f2 una forma bilineal antisimétrica.*

**Solución .10.** *La matriz de f en la base canónica está dada por:*

$$f(x,y) = X^t \Omega Y = (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{bmatrix}$$

*Para conocer la matriz de f en la base $B = \{e'_1, e'_2; e'_3\}$ debemos calcular antes la matriz de paso, P, de la base B a la Base Base B'; Puesto que nos dan las imágenes de los vectores de la base, tenemos:*

$$e'_1 = e_1$$
$$e'_2 = 2e_1 + e_2$$
$$e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$$

$\Rightarrow$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Y puesto que la matriz $\Omega$ es congruente con $\Omega'$, podemos poner:*

$$\Omega' = P^t \Omega P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*La forma cuadrática q tendrá como expresión en cada una de las bases:*

$$q_B(x) = x_1^2 + 6\text{ů}x_2^2 + 56\text{ů}x_3^2 - 4\text{ů}x_1x_2 + 14\text{ů}x_1x_3 - 36\text{ů}x_2x_3$$

$$q'_B(x) = x_1^2 + 2\text{ů}x_2^2 - x_3^2$$

# BIBLIOGRAPHY

[1] I. A. J. S. L. E. FRIEDBERG, STEPHEN H, *Linear Algebra*, Publicaciones Cultura, 1982.

[2] F. G. J. J. GROSSMAN, STANLEY., *Álgeba Lineal, 7ma ed*, Prentice Hall, 2012.

[3] K. R. HOFFMAN, K., *Linear Algebra, 2da ed*, Prentice Hall, 1971.