Administración de Riesgos

Subgerencia: *Makeham Area of Risk*

Marzo 2019

Cobertura (Hedging) sencilla con derivados

Sea S_0 el precio spot de cierto activo hoy y suponga que se pacta un contrato Forward sobre dicho activo bajo strike K a plazo T. Por otra parte, las inversiones libres de riesgo en el mercado a plazo T generan un rendimiento spot (llevado a curva) de $r_0(T)$.
Luego, dado que el precio de cualquier instrumento es el valor presente actuarial de los flujos que promete. Demuestre que el strike justo para el derivado es:

$$K = S_0 e^{r_0(T)T}$$

Hint: Considere el proceso estocástico para el valor presente del activo S_T como una Martingala, es decir:

$$E\left(S_T e^{-r_0(T)T} | S_0\right) = S_0$$

Concluya que el precio del derivado al tiempo t es:

$$P = S_t - K e^{-r_0(T-t)(T-t)} \qquad \textit{Largo}$$

$$P = K e^{-r_0(T-t)(T-t)} - S_t \qquad \textit{Corto}$$

Este último resultado indica si existe una ganancia o pérdida al tiempo t para quien compra y vende el activo en T respectivamente.

Demostración

Sabemos que el precio de un Forward para una posición larga podemos expresarlo como:

$$\rightarrow P = E\left(S_T\right) e^{-r_0(T)T} - E\left(K\right) e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = E\left(S_T\right) e^{-r_0(T)T} - K e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = E\left(S_T | S_0\right) e^{-r_0(T)T} - K e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = E\left(S_T e^{-r_0(T)T} | S_0\right) - K e^{-r_0(T)T}$$

Haciendo uso del **Hint** tenemos que:

$$\rightarrow P = S_0 - Ke^{-r_0(T)T}$$

Igualando el precio a cero, porque suponemos que el precio es justo

$$\rightarrow S_0 - Ke^{-r_0(T)T} = 0$$

Despejando K tenemos lo siguiente:

$$\rightarrow K = S_0 e^{r_0(T)T}$$

De manera análoga para una posición corta, tenemos que:

$$\rightarrow P = E\left(K\right)e^{-r_0(T)T} - E\left(S_T\right)e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = Ke^{-r_0(T)T} - E\left(S_T\right)e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = Ke^{-r_0(T)T} - E\left(S_T|S_0\right)e^{-r_0(T)T}$$

$$\rightarrow P = Ke^{-r_0(T)T} - E\left(S_T e^{-r_0(T)T}|S_0\right)$$

Haciendo uso del **Hint** tenemos que:

$$\rightarrow P = Ke^{-r_0(T)T} - S_0$$

Igualando el precio a cero, porque suponemos que el precio es justo

$$\rightarrow Ke^{-r_0(T)T} - S_0 = 0$$

Despejando K tenemos lo siguiente:

$$\rightarrow K = S_0 e^{r_0(T)T}$$

Por lo tanto el precio al tiempo t, podemos concluir como sigue para cada una de las posiciones:

$$P = S_t - Ke^{-r_0(T-t)(T-t)} \qquad Largo$$

$$P = Ke^{-r_0(T-t)(T-t)} - S_t \qquad Corto \quad \blacksquare$$