EPITA /S_2 Février 2017

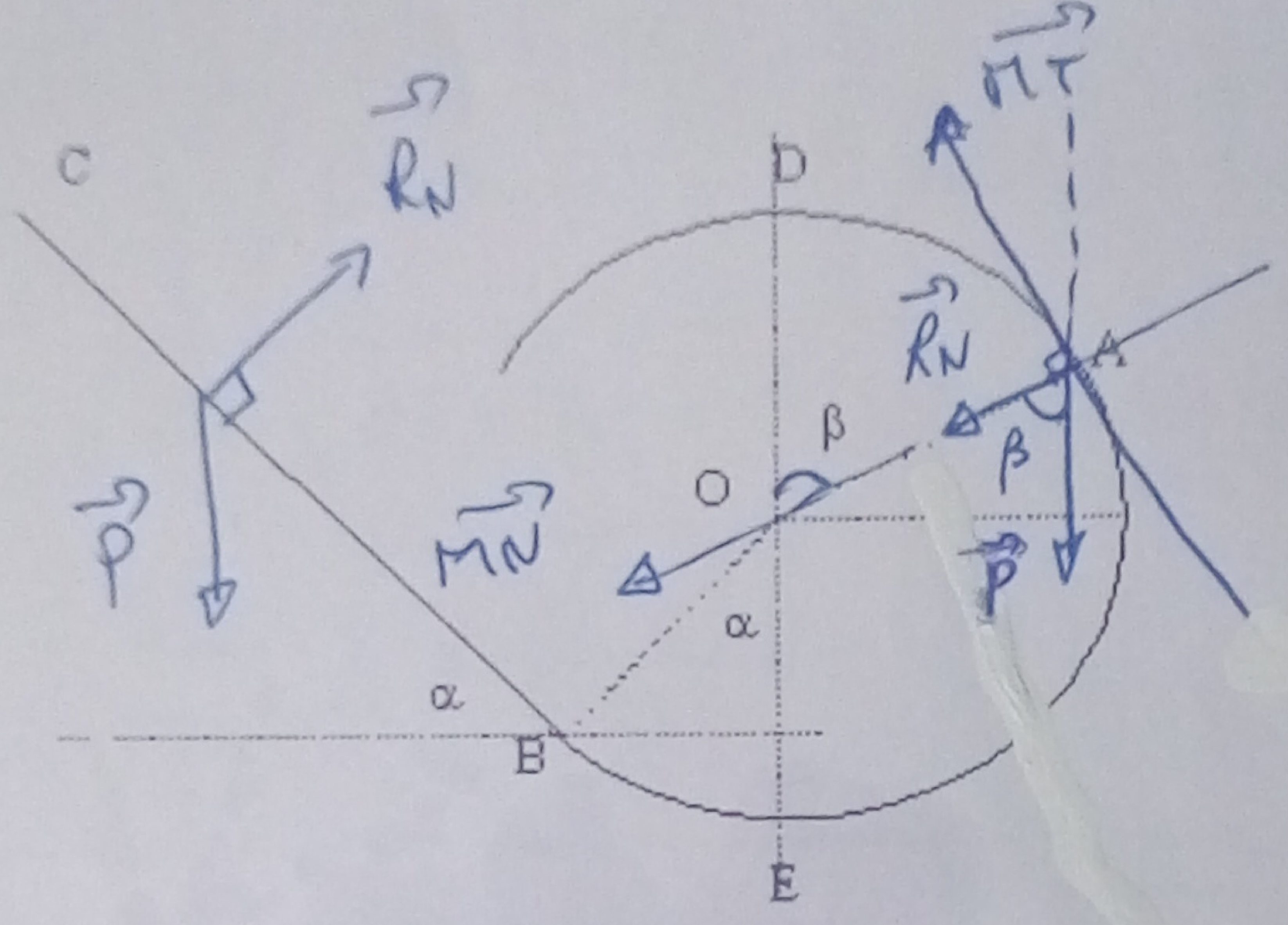
NOM : .... PRENOM : Corrigé .... GROUPE : ....

Contrôle n°2 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

Exercice 1 (7 points)

Un solide de masse m se déplace dans une glissière constituée d'une partie rectiligne BC suivie d'une partie circulaire de centre O et de rayon R. **Les frottements sont négligés.** Le solide est lâché du point C **sans vitesse initiale**. On a α=(BOE) et β=(AOD).



1-a) Représenter les forces agissant sur le solide entre C et B.

b) Utiliser le théorème d'énergie cinétique pour exprimer la vitesse au point B. On prend l'origine des altitudes au point B. Le trajet BC est incliné d'un angle α.
Faire le calcul pour BC = 2m ; g = 10m.s^{-2} ; α = 30°.

$$\Delta E_{C\to B} = W(\vec{R_N}) + \underbrace{W(\vec{P})}_{\text{moteur}}$$

$$\Delta E_{C\to B} = 0 + mgh \quad \text{avec } h = BC\sin(\alpha)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - 0 = \cancel{m}g\,BC\sin(\alpha)$$

$$v_B = \sqrt{2g\,BC\sin(\alpha)}$$

$$A.N: \quad v_B = \sqrt{2\times10\times2\times\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}\ m/s$$

2- a) Utiliser le théorème d'énergie mécanique pour exprimer la vitesse au point A en fonction de BC, α, β, R et g. Faire le calcul pour R = 0,5m ; β = 60° ; BC = 2m ; g = 10m.s^{-2} ; α = 30°.

$E_{mA} = E_{mc}$ car frottements négligés.

$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2} m \underbrace{v_c^2}_{0} + mgz_c$ $\begin{cases} z_c = BC\sin(\alpha) \\ z_A = R\cos\beta + R\cos(\alpha) \end{cases}$

$\frac{v_A^2}{2} = g\left(BC\sin(\alpha) - R(\cos(\alpha) + \cos(\beta))\right)$

$v_A = \sqrt{2g\left(BC\sin(\alpha) - R(\cos(\alpha) + \cos(\beta))\right)}$

A.N $v_A = \sqrt{20\left(2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)}$

$= \sqrt{5(4 - \sqrt{3} - 1)} = \sqrt{5(3 - \sqrt{3})}$ m s^{-1}

b) Représenter sur le schéma les forces appliquées sur le solide au point A.

c) Utiliser la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, pour exprimer la norme de la réaction R_N au point A, en fonction de m, g, BC, R, α et β.

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.

projection sur $\vec{MN}$: $R_N + P\cos(\beta) = m a_N$.

$R_N = m\frac{v_A^2}{R} - mg\cos(\beta)$.

$R_N = m\left[2g\left(\frac{BC\sin(\alpha)}{R} - \frac{R}{R}(\cos(\alpha) + \cos\beta)\right) - mg\cos(\beta)\right]$

$R_N = mg\left[2\frac{BC}{R}\sin(\alpha) - 2\cos\alpha - 2\cos\beta - \cos(\beta)\right]$

$\boxed{R_N = mg\left[2\frac{BC}{R}\sin(\alpha) - 2\cos(\alpha) - 3\cos(\beta)\right]}$

3- Calculer l'énergie mécanique minimale au point C pour atteindre le point D. On donne m = 200g.

au point $E_{m_C} = \underset{0}{E_c} + E_{pp} = mg\, BC \sin(\alpha)$.

au pt D : $E_{m_D} = \frac{1}{2} m v_D^2 + mg z_D = \frac{1}{2} m v_D^2 + mg(R + R\cos(\alpha))$

$E_{mC} = E_{mD} \Rightarrow \underbrace{mg\, BC \sin(\alpha)}_{E_{mC}} = \frac{1}{2} m v_D^2 + mg(R)(1+\cos\alpha)$

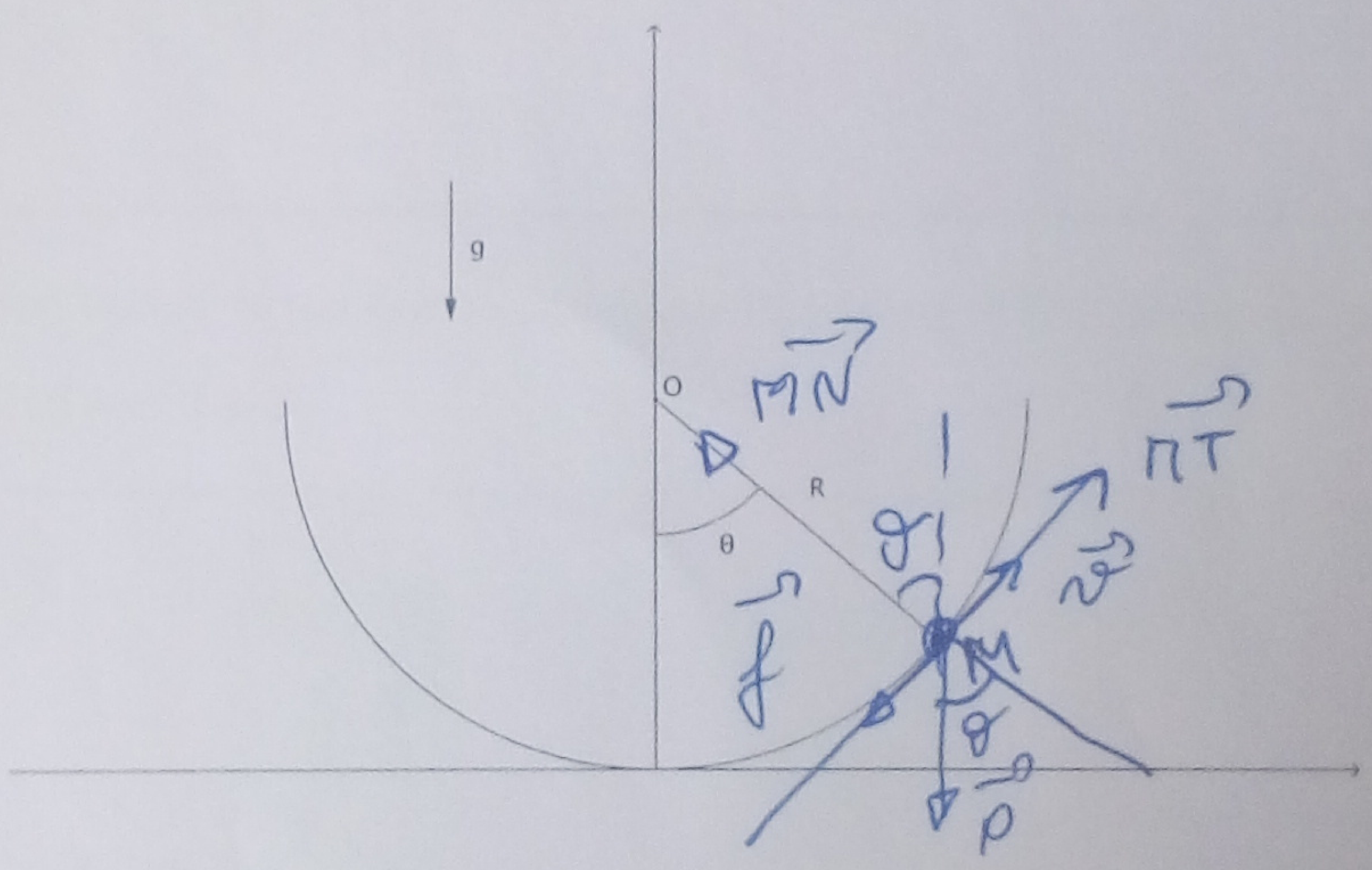
$E_{mC} = E_{mC_{min}}$ lorsque $v_D = 0$.

$\Rightarrow E_{c_{min}} = mgR(1+\cos(\alpha)) = 0,2 \times 10 \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\simeq 1,85$ J

$(\sqrt{3} \simeq 1,7)$.

Exercice 2 ***Etude d'une oscillation amortie*** (6 points).



On s'intéresse au mouvement d'un objet M de masse m le long d'un demi-cercle de rayon R et de centre O. Les frottements pouvant être modélisés par : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
La masse m est lâchée à un angle θ_0, sans vitesse initiale.

1-Citer les forces extérieures appliquées au point M et les représenter sur le schéma.

$\vec{f}$ = force de frottement.
$\vec{P}$ = poids de la masse m.
$\vec{R}_N$ = réaction normale de la force de contact au point M.

2-a) Ecrire la deuxième loi de Newton. Projeter cette équation dans la base de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$.

$$\sum \vec{F}_{ar} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} (1)\ \text{sur } \vec{MT} : -f - mg\sin(\theta) = m\frac{dv}{dt} = ma_T \\ (2)\ \text{sur } \vec{MN} : R_N - mg\cos(\theta) = m\frac{v^2}{R} = ma_N \end{cases}$$

b) En déduire l'expression de la réaction R_N, ainsi que l'équation différentielle qui exprime l'angle $\theta(t)$ en fonction de ses dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

$$(1) \Rightarrow m\frac{d}{dt}(\underbrace{R\dot{\theta}}_{v}) + mg\sin(\theta) + \alpha(\underbrace{R\dot{\theta}}_{v}) = 0$$

$$mR\ddot{\theta} + mg\sin(\theta) + \alpha R\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin(\theta) + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin(\theta) = 0} \text{ (Eq^n diff)}$$

$$(2) \Rightarrow R_N = m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} + mg\cos(\theta)$$

$$\boxed{R_N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos(\theta)}$$

c) On se place dans le cas où la masse m est lâchée avec un angle θ_0 suffisamment petit pour pouvoir dire que $\sin(\theta) \approx \theta$. Réécrire l'équation différentielle et préciser les différents régimes selon les valeurs du coefficient de frottement α.

d) Illustrer à l'aide des courbes θ(t), les régimes cités dans la question (2c).

l'éq diff ds le cas des petites oscillations

$\sin\theta \simeq \theta$

(1) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$.

éq caractéristique : $r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{g}{R} = 0$.

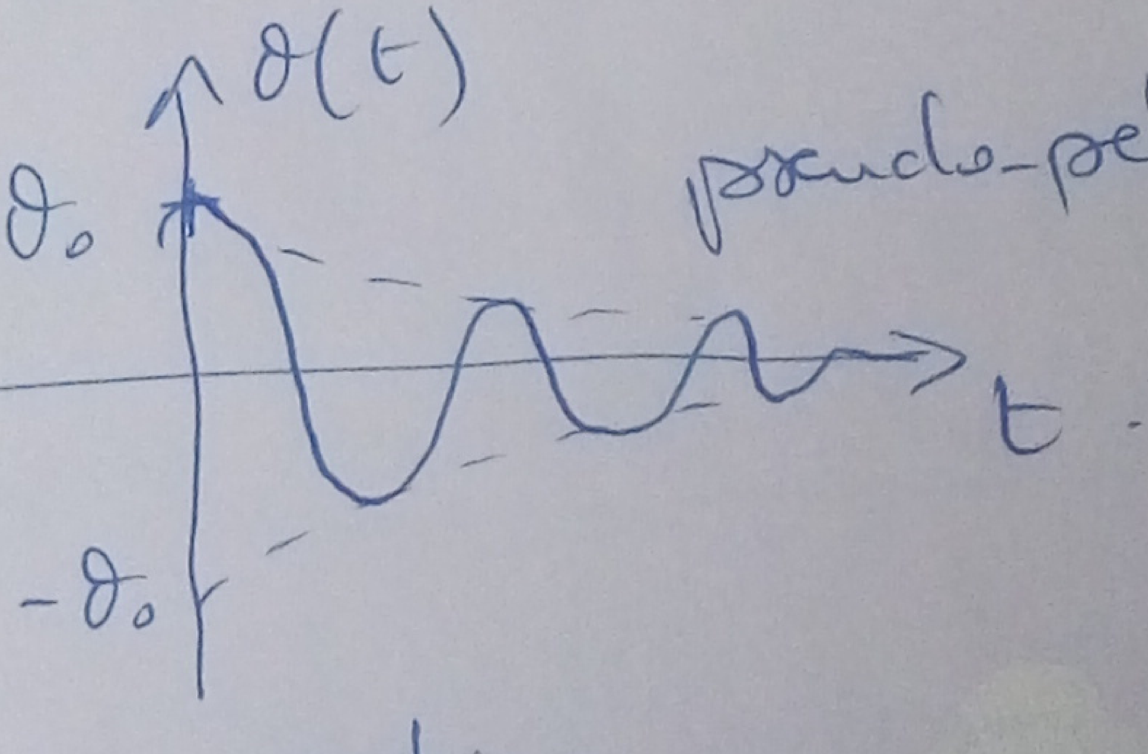
$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{g}{R}\right)$

si $\Delta > 0$ $\frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{g}{R}}$ régime apériodique.

si $\Delta = 0$ $\frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$ " critique.

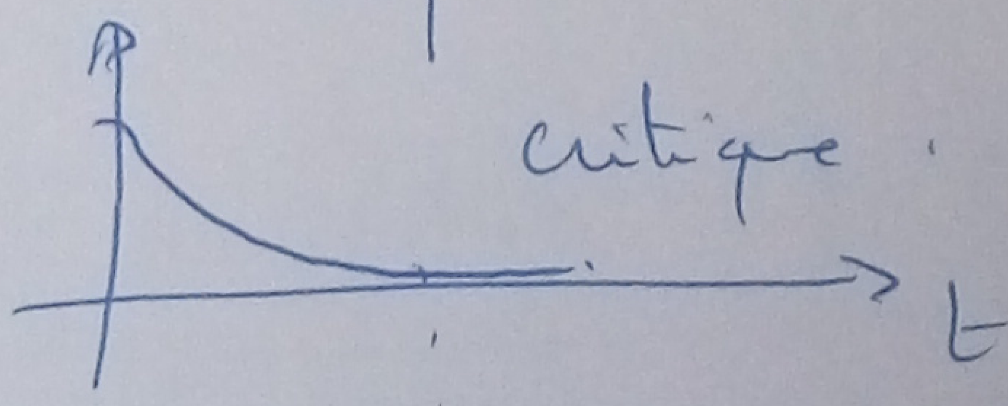
si $\Delta < 0$ $\frac{\alpha}{m} < 2\sqrt{\frac{g}{R}}$ " pseudo-périodique.

d) • $\frac{\alpha}{m} < 2\sqrt{\frac{g}{R}}$



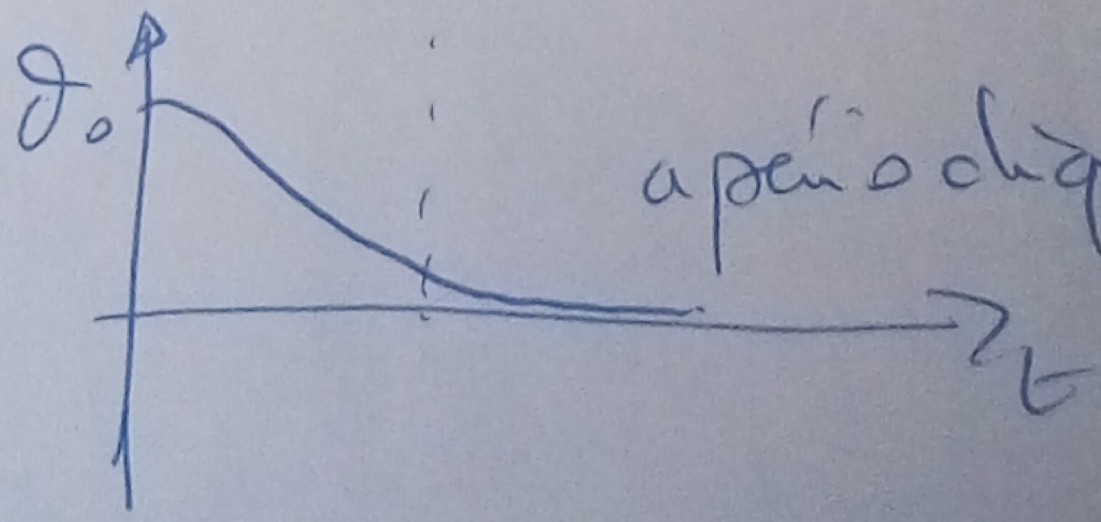
pseudo-périodique.

• $\frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$



critique.

• $\frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{g}{R}}$



apériodique.

Exercice 3 **Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.** (7 points)

1-Un calorimètre contient une masse $m_1 = 200g$ d'eau. La température initiale de l'ensemble est θ_1=20°C. On ajoute une masse m_2= 300g d'eau à la température θ_2=80°C.
a) Quelle serait la température d'équilibre thermique θ_e de l'ensemble si la capacité thermique C_{cal} du calorimètre était négligeable ? On donne la capacité massique de l'eau : $c_e = 4.10^3 JK^{-1}kg^{-1}$.

$$\sum Q_i = 0$$
$$m_1 \cancel{C_e}(\theta_{éq} - \theta_1) + m_2 \cancel{C_e}(\theta_{éq} - \theta_2) = 0$$
$$\theta_{éq}(m_1 + m_2) = m_1\theta_1 + m_2\theta_2$$
$$\theta_{éq} = \frac{m_1\theta_1 + m_2\theta_2}{m_1 + m_2}$$
A.N $$\theta_{éq} = \frac{20\cancel{0} \cdot 2\cancel{0} + 3\cancel{0}\cancel{0} \cdot 80}{2\cancel{0}\cancel{0} + 3\cancel{0}\cancel{0}} = 56°C$$

b) On mesure en fait une température d'équilibre thermique θ_e = 50°C. Déterminer la capacité thermique C_{cal} du calorimètre.

$$\sum Q_i = 0. \quad Q_1 + Q_2 + Q_{cal} = 0$$
$$m_1 C_e(\theta_{éq} - \theta_1) + m_2 C_e(\theta_{éq} - \theta_2) + C_{cal}(\theta_{éq} - \theta_1) = 0$$
$$C_{cal} = -\frac{\theta_{éq}(m_1 + m_2)C_e - m_1\theta_1 C_e - m_2\theta_2 C_e}{\theta_{éq} - \theta_1}$$
$$= -\frac{C_e[\theta_{éq}(m_1 + m_2) - m_1\theta_1 - m_2\theta_2]}{\theta_{éq} - \theta_1}$$
$$= -\frac{4.\cancel{10^3}.\cancel{10^{-3}}[50(200+300) - 200.20 - 300.80]}{50-20}$$
$$C_{cal} = -\frac{4(25000 - 4000 - 24000)}{30} = -\frac{4}{3\cancel{0}}(-3\cancel{000}) = 400 JK^{-1}$$

2- Un calorimètre de capacité négligeable contient une masse $m_1 = 200g$ d'eau à la température initiale $\theta_1 = 70°C$. On y place un glaçon de masse $m_2 = 80g$ sortant du congélateur à la température $\theta_2 = -23°C$. Déterminer la température d'équilibre θ_e sachant que le glaçon fond dans sa totalité.
Données : Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 300.10^3 Jkg^{-1}$.
Capacité massique de l'eau : $c_e = 4.10^3 JK^{-1}kg^{-1}$.
Capacité massique de la glace : $c_g = 2.10^3 JK^{-1}kg^{-1}$

glace : $-23°C \xrightarrow[C_g]{} 0° \xrightarrow[L_f]{} 0° \xrightarrow[C_e]{} \theta_{éq}$

$\sum Q_i = 0 \Rightarrow m_1 C_e(\theta_{éq} - \theta_1) + m_g C_g(0 - (-23))$
$+ L_f \cdot m_g + m_g C_e(\theta_{éq} - 0°) = 0$

$\theta_e(m_e C_e + m_g C_e) = -m_g L_f + m_e C_e \theta_1 - 23 m_g C_g$

$\theta_e = \dfrac{m_e C_e \theta_1 - 23 m_g C_g - m_g L_f}{(m_e + m_g) C_e}$

A.N $\theta_e = \dfrac{200 \cdot 4 \cdot \cancel{10^3} \cdot 70 - 80(23 \times 2\cancel{10^3} + 300 \cdot \cancel{10^3})}{4 \cdot \cancel{10^3}(280)} \simeq 25°C$

3- On désire obteneir un bain d'eau tiède à 37°C, d'un volume total **V** = 250L, en mélangeant un volume V_1 d'eau chaude à la température initiale θ_1=70°C et un volume V_2 d'eau froide à la température initiale θ_2=15°C.
Déterminer les volumes V_1 et V_2 en supposant négligeables toutes les fuites thermiques lors du mélange. Données : Capacité massique de l'eau : $c_e = 4.10^3 JK^{-1}kg^{-1}$.
Masse volumique de l'eau : ρ_e = 1kg/L.

$\sum Q_i = 0 \quad Q_1 + Q_2 = 0$

$m_1 \cancel{C_e}(\theta_{éq} - \theta_1) + m_2 \cancel{C_e}(\theta_{éq} - \theta_2) = 0$

$\cancel{\rho} V_1(\theta_{éq} - \theta_1) + \cancel{\rho} V_2(\theta_{éq} - \theta_2) = 0$

$V_1(37 - 70) + V_2(37 - 15) = 0$

$\begin{cases} -33V_1 + 22V_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = 250 \end{cases} \Rightarrow -3V_1 + 2V_2 = 0$

$-3V_1 + 2(250 - V_1) = 0$

$V_1 = 500 \Rightarrow V_1 = 100L$

$V_2 = 150L$