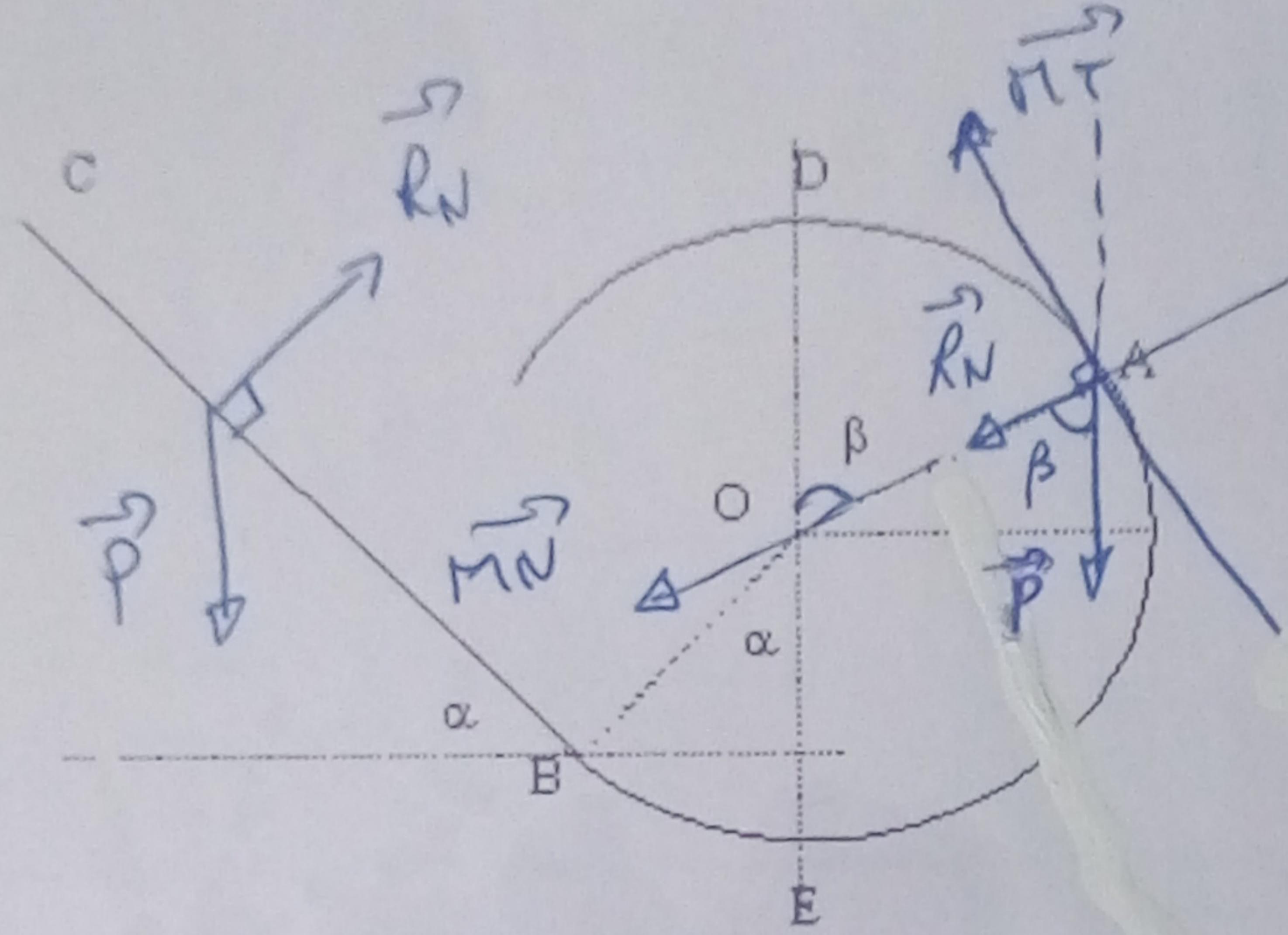


Contrôle n°2 de Physique

*Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet*

Exercice I (7 points)

Un solide de masse m se déplace dans une glissière constituée d'une partie rectiligne BC suivie d'une partie circulaire de centre O et de rayon R. **Les frottements sont négligés.** Le solide est lâché du point C sans vitesse initiale. On a $\alpha = (\text{BOE})$ et $\beta = (\text{AOD})$.



1-a) Représenter les forces agissant sur le solide entre C et B.

b) Utiliser le théorème d'énergie cinétique pour exprimer la vitesse au point B. On prend l'origine des altitudes au point B. Le trajet BC est incliné d'un angle α . Faire le calcul pour $BC = 2\text{m}$; $g = 10\text{m.s}^{-2}$; $\alpha = 30^\circ$.

$$\Delta E_{C \rightarrow B} = \cancel{W(R_N)} + \underbrace{W(P)}_{\text{motice}}$$

$$\Delta E_{C \rightarrow B} = 0 + mg h \quad \text{avec } h = BC \sin(\alpha)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = mg BC \sin(\alpha)$$

$$v_B = \sqrt{2g BC \sin(\alpha)}$$

$$\text{A.N.: } v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 2 \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} \text{ m.s}^{-1}$$

2- a) Utiliser le théorème d'énergie mécanique pour exprimer la vitesse au point A en fonction de BC, α , β , R et g. Faire le calcul pour $R = 0,5\text{m}$; $\beta = 60^\circ$; $BC = 2\text{m}$; $g = 10\text{m.s}^{-2}$; $\alpha = 30^\circ$.

$$E_{mA} = E_{mc} \quad \text{car frottements négligés}$$

$$\frac{1}{2} \mu m \dot{\gamma}_A^2 + \mu g \dot{\gamma}_A = \frac{1}{2} \mu \dot{\gamma}_C^2 + \mu g \dot{\gamma}_C \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_C = BC \sin(\alpha) \\ \dot{\gamma}_A = R(\cos(\alpha) + \cos(\beta)) \end{cases}$$

$$\frac{\dot{\gamma}_A^2}{2} = g (BC \sin(\alpha) - R(\cos(\alpha) + \cos(\beta)))$$

$$N_A = \sqrt{2g(BC \sin(\alpha) - R(\cos(\alpha) + \cos(\beta)))}$$

$$\begin{aligned} A.N \quad \dot{\gamma}_A &= \sqrt{2g(2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}))} \\ &= \sqrt{5(4 - \sqrt{3} - 1)} = \sqrt{5(3 - \sqrt{3})} \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

b) Représenter sur le schéma les forces appliquées sur le solide au point A.

c) Utiliser la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet (\vec{u}_T, \vec{u}_N), pour exprimer la norme de la réaction R_N au point A, en fonction de m, g, BC, R, α et β .

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m \vec{a}$$

$$\text{projection sur } \vec{MN}: R_N + P \cos(\beta) = m a_N$$

$$R_N = m \frac{\dot{\gamma}_A^2}{R} - mg \cos(\beta)$$

$$R_N = m \left[2g \left(\frac{BC \sin(\alpha)}{R} - \frac{R(\cos(\alpha) + \cos(\beta))}{R} \right) - mg \cos(\beta) \right]$$

$$R_N = mg \left[2 \frac{BC}{R} \sin(\alpha) - 2 \cos(\alpha) - 2 \cos(\beta) - \cos(\beta) \right]$$

$$R_N = mg \left[2 \frac{BC}{R} \sin(\alpha) - 2 \cos(\alpha) - 3 \cos(\beta) \right]$$

3- Calculer l'énergie mécanique minimale au point C pour atteindre le point D. On donne $m = 200\text{g}$.

$$\text{au point } E_m = E_C + E_{pp} = mg BC \sin(\alpha) .$$

$$\text{au pt D: } E_m = \frac{1}{2} m \dot{J}_D^2 + mg \dot{\theta}_D = \frac{1}{2} m \dot{J}_D^2 + mg(R + R\alpha)$$

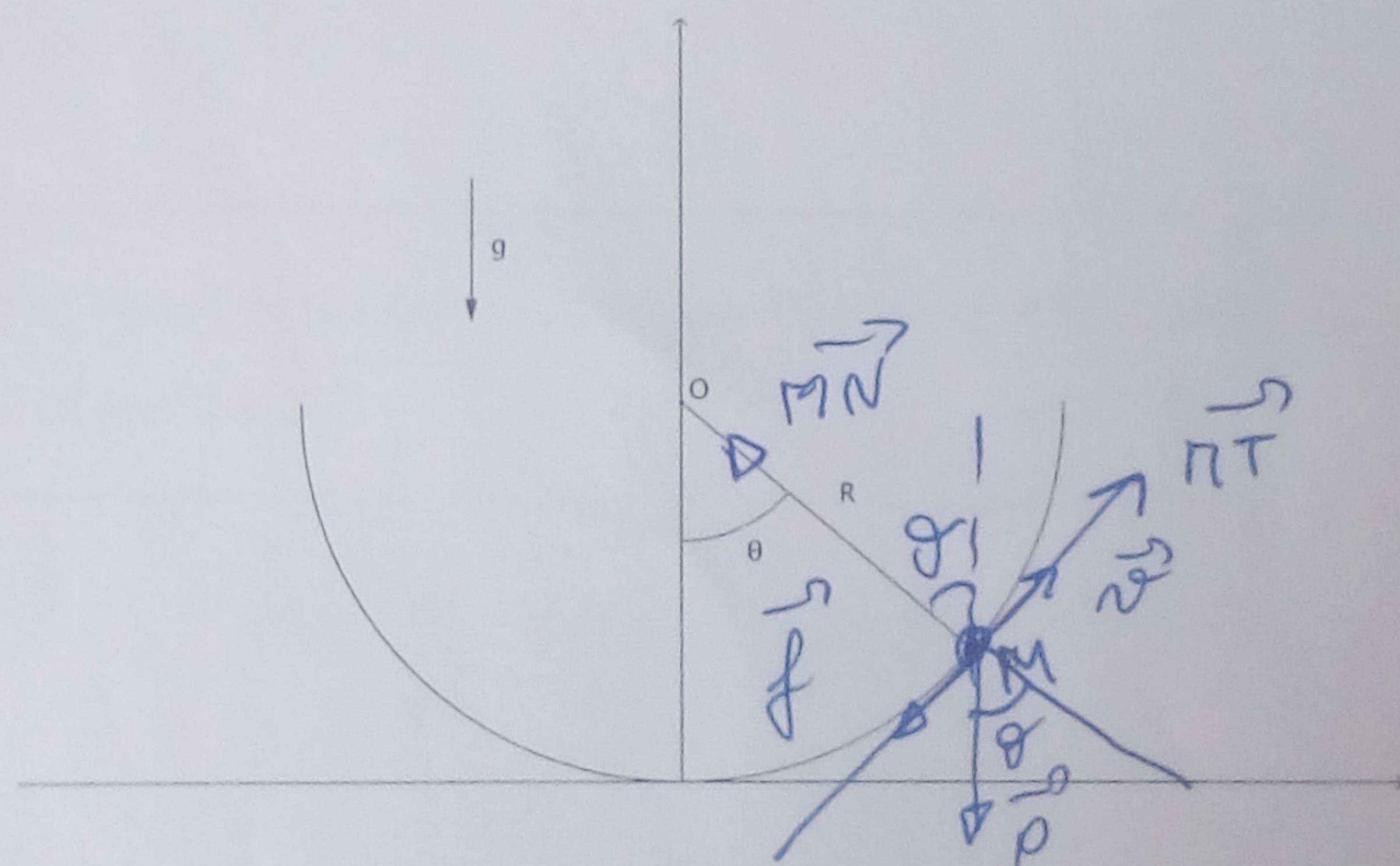
$$E_{mc} = E_{mD} \Rightarrow mg BC \sin(\alpha) = \frac{1}{2} m \dot{J}_D^2 + mg(R)(1 + \cos\alpha)$$

$$E_{mc} = E_{min} \text{ lorsque } \dot{J}_D = 0 .$$

$$\Rightarrow E_{min} = mg R (1 + \cos\alpha) = 0,2 \times 10 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,85 \text{ J} .$$

Exercice 2 Etude d'une oscillation amortie (6 points).

$$(\sqrt{3} \approx 1,7)$$



On s'intéresse au mouvement d'un objet M de masse m le long d'un demi-cercle de rayon R et de centre O. Les frottements pouvant être modélisés par : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. La masse m est lâchée à un angle θ_0 , sans vitesse initiale.

1-Citer les forces extérieures appliquées au point M et les représenter sur le schéma.

- | |
|--|
| \vec{f} = force de frottement .
\vec{P} = poids de la masse m .
$\vec{R_N}$ = réaction normale de la force de contact au point M . |
|--|

2-a) Ecrire la deuxième loi de Newton. Projeter cette équation dans la base de Frenet (\vec{u}_T, \vec{u}_N).

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m \vec{a} \\ \text{(1)} \quad \text{sur } \vec{u}_T: -f - mg \sin(\theta) &= m \frac{d\theta}{dt} = ma_T \\ \text{(2)} \quad \text{sur } \vec{u}_N: R_N - mg \cos(\theta) &= m \frac{\dot{\theta}^2}{R} = ma_N \end{aligned}$$

b) En déduire l'expression de la réaction R_N , ainsi que l'équation différentielle qui exprime l'angle $\theta(t)$ en fonction de ses dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

$$\begin{aligned} \text{(1)} \Rightarrow m \frac{d}{dt} \left(\frac{R \ddot{\theta}}{m} \right) + mg \sin(\theta) + \alpha \left(\frac{R \ddot{\theta}}{m} \right) &= 0 \\ m R \ddot{\theta} + mg \sin(\theta) + \alpha R \ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) + \frac{\alpha}{m} \ddot{\theta} &= 0 \\ \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0} & \quad (\text{Eq du PP}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \Rightarrow R_N &= m \frac{R \ddot{\theta}^2}{m} + mg \cos(\theta) \\ \boxed{R_N = m R \ddot{\theta}^2 + mg \cos(\theta)} & \end{aligned}$$

- c) On se place dans le cas où la masse m est lâchée avec un angle θ_0 suffisamment petit pour pouvoir dire que $\sin(\theta) \approx \theta$. Réécrire l'équation différentielle et préciser les différents régimes selon les valeurs du coefficient de frottement α .
- d) Illustrer à l'aide des courbes $\theta(t)$, les régimes cités dans la question (2c).

l'éq diff ds le cas des petites oscillations
 $\sin\theta \approx \theta$

$$(1) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0.$$

éq caractéristique : $r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{g}{R} = 0$

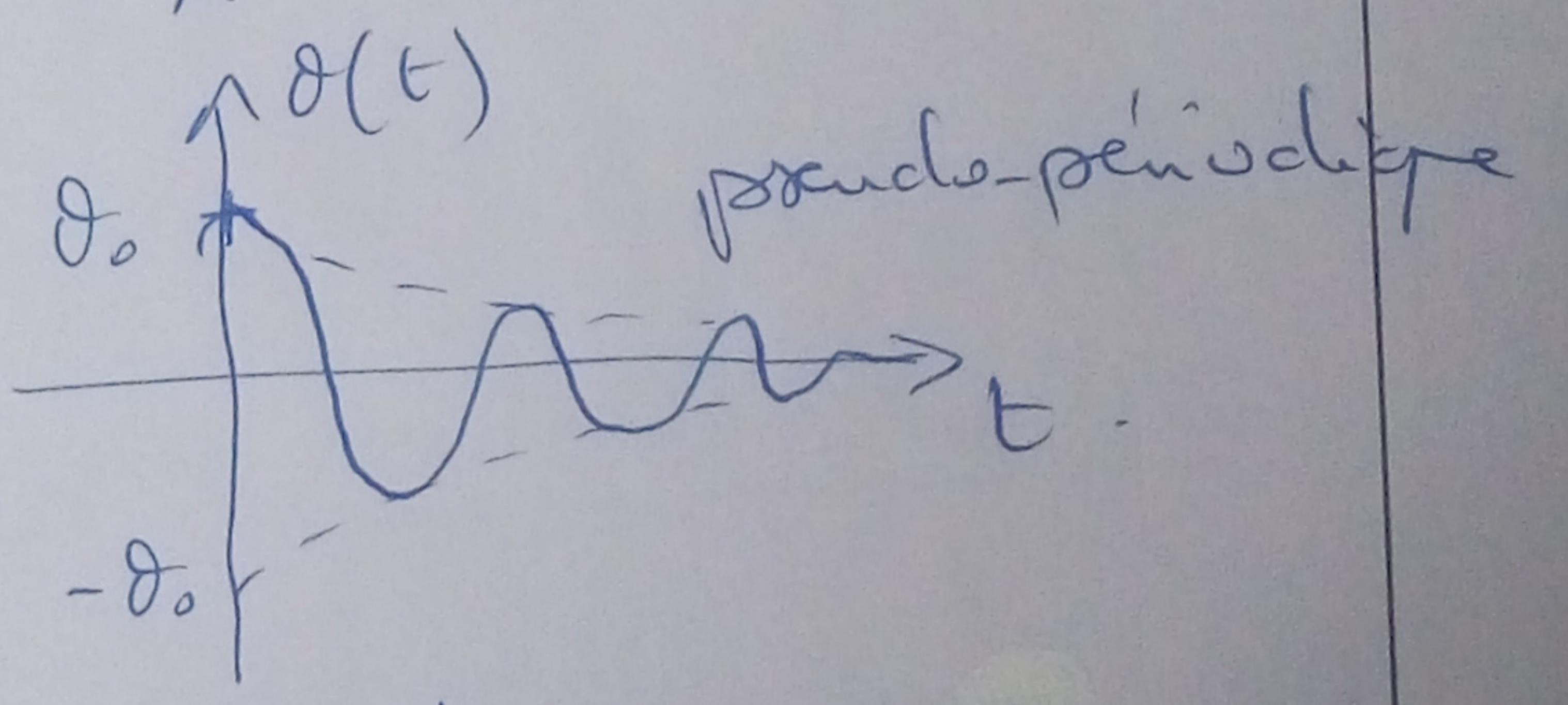
$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{g}{R}\right)$$

si $\Delta > 0 \quad \frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{g}{R}} \quad$ régime aperiodiques.

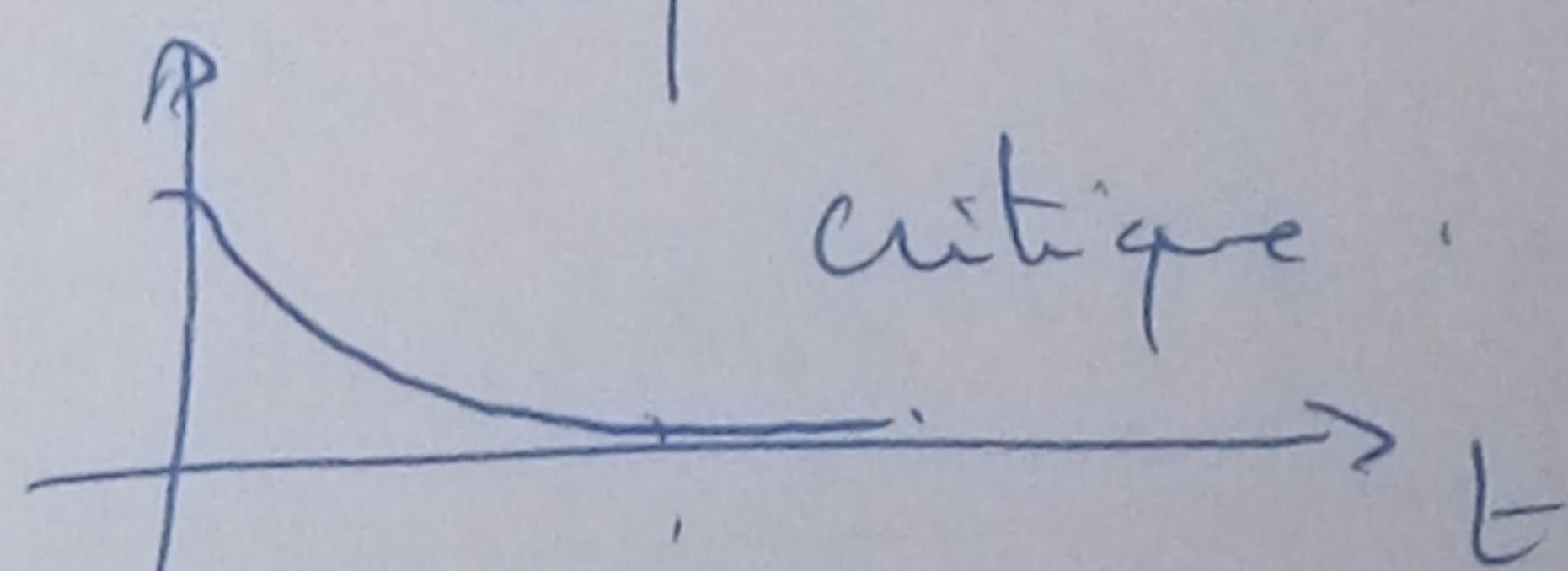
si $\Delta = 0 \quad \frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{R}} \quad$ " critique.

si $\Delta < 0 \quad \frac{\alpha}{m} < 2\sqrt{\frac{g}{R}} \quad$ " pseudo-périodiques.

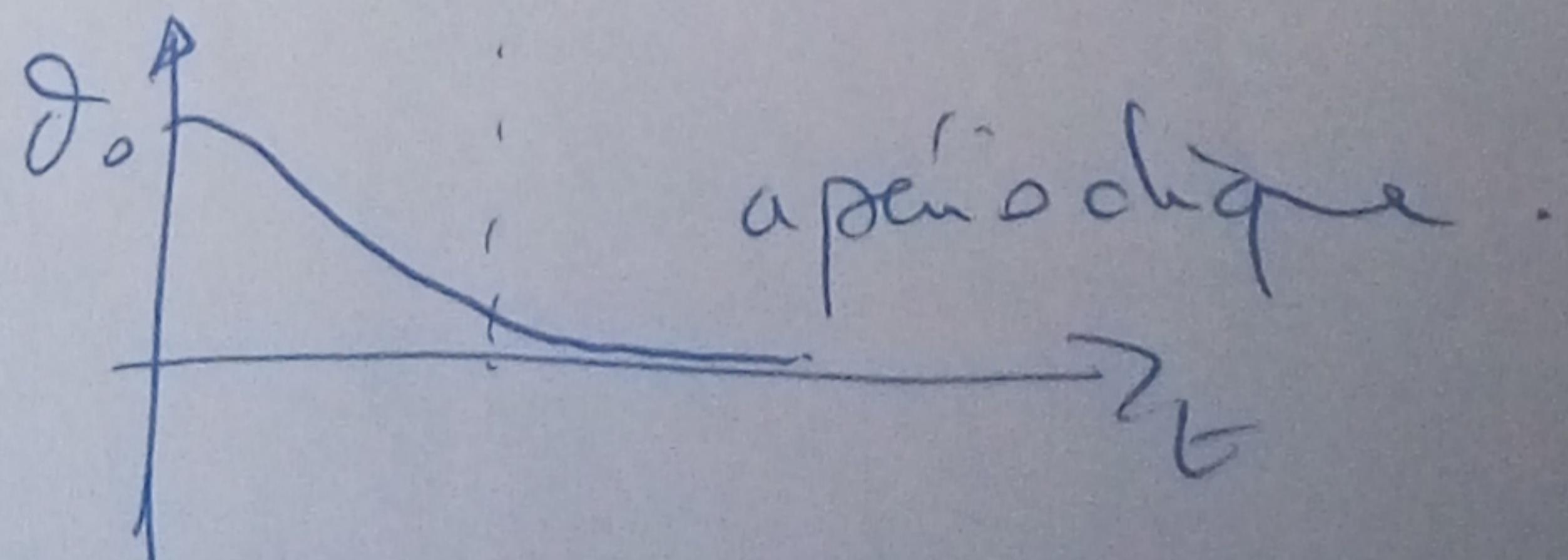
d). $\frac{\alpha}{m} < 2\sqrt{\frac{g}{R}}$



$$\bullet \frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$$



$$\bullet \frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{g}{R}}$$



Exercice 3 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. (7 points)

1-Un calorimètre contient une masse $m_1 = 200\text{g}$ d'eau. La température initiale de l'ensemble est $\theta_1=20^\circ\text{C}$. On ajoute une masse $m_2=300\text{g}$ d'eau à la température $\theta_2=80^\circ\text{C}$.

a) Quelle serait la température d'équilibre thermique θ_e de l'ensemble si la capacité thermique C_{cal} du calorimètre était négligeable ? On donne la capacité massique de l'eau : $c_e = 4,10^3 \text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$.

$$\sum Q_i = 0$$

$$m_1 c_e (\theta_{eq} - \theta_1) + m_2 c_e (\theta_{eq} - \theta_2) = 0$$

$$\theta_{eq} (m_1 + m_2) = m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2$$

$$\theta_{eq} = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{A.N} \quad \theta_{eq} = \frac{200 \cdot 20 + 300 \cdot 80}{200 + 300} = 56^\circ\text{C}$$

b) On mesure en fait une température d'équilibre thermique $\theta_e = 50^\circ\text{C}$. Déterminer la capacité thermique C_{cal} du calorimètre.

$$\sum Q_i = 0. \quad Q_1 + Q_2 + Q_{\text{cal}} = 0.$$

$$m_1 c_e (\theta_{eq} - \theta_1) + m_2 c_e (\theta_{eq} - \theta_2) + C_{\text{cal}} (\theta_{eq} - \theta_e) = 0$$

$$C_{\text{cal}} = - \frac{\theta_{eq} (m_1 + m_2) c_e - m_1 \theta_1 c_e - m_2 \theta_2 c_e}{\theta_{eq} - \theta_e}$$

$$= - \frac{c_e [\theta_{eq} (m_1 + m_2) - m_1 \theta_1 - m_2 \theta_2]}{\theta_{eq} - \theta_e}$$

$$= - \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot [50(200 + 300) - 200 \cdot 20 - 300 \cdot 80]}{50 - 20}$$

$$C_{\text{cal}} = - \frac{4 (25000 - 4000 - 24000)}{30} = - \frac{4}{30} (-8000) = 400 \text{ J K}^{-1}$$

2- Un calorimètre de capacité négligeable contient une masse $m_1 = 200\text{g}$ d'eau à la température initiale $\theta_1 = 70^\circ\text{C}$. On y place un glaçon de masse $m_2 = 80\text{g}$ sortant du congélateur à la température $\theta_2 = -23^\circ\text{C}$. Déterminer la température d'équilibre θ_e sachant que le glaçon fond dans sa totalité.

Données : Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 300 \cdot 10^3 \text{Jkg}^{-1}$.

Capacité massique de l'eau : $c_e = 4 \cdot 10^3 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

Capacité massique de la glace : $c_g = 2 \cdot 10^3 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

$$\text{glace : } -23^\circ\text{C} \xrightarrow[c_g]{\quad} 0^\circ \xrightarrow[L_f]{\quad} 0^\circ \xrightarrow[c_e]{\quad} \theta_e$$

$$\sum Q_i = 0 \Rightarrow m_1 c_e (\theta_e - \theta_1) + m g C_g (0 - (-23)) \\ + L_f \cdot m g + m g C_e (\theta_e - 0) = 0$$

$$\theta_e (m_e c_e + m g C_e) = -m g h_f + m_e c_e \theta_1 - 23 m g C_g$$

$$\theta_e = \frac{m_e c_e \theta_1 - 23 m g C_g - m g L_f}{(m_e + m g) C_e}$$

$$\text{A.N } \theta_e = \frac{200 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 70 - 80 (23 \times 2 \cdot 10^3 + 300 \cdot 10^3)}{4 \cdot 10^3 (280)} \approx 25^\circ\text{C}$$

3- On désire obtenir un bain d'eau tiède à 37°C , d'un volume total $V = 250\text{L}$, en mélangeant un volume V_1 d'eau chaude à la température initiale $\theta_1 = 70^\circ\text{C}$ et un volume V_2 d'eau froide à la température initiale $\theta_2 = 15^\circ\text{C}$.

Déterminer les volumes V_1 et V_2 en supposant négligeables toutes les fuites thermiques lors du mélange. Données : Capacité massique de l'eau : $c_e = 4 \cdot 10^3 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1\text{kg/L}$.

$$\sum Q_i = 0 \quad Q_1 + Q_2 = 0$$

$$m_1 \varphi_e (\theta_e - \theta_1) + m_2 \varphi_e (\theta_e - \theta_2) = 0$$

$$\rho V_1 (\theta_e - \theta_1) + \rho V_2 (\theta_e - \theta_2) = 0$$

$$V_1 (37 - 70) + V_2 (37 - 15) = 0$$

$$\begin{cases} -33 V_1 + 22 V_2 = 0 \Rightarrow -3 V_1 + 2 V_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = 250 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3 V_1 + 2 (250 - V_1) &= 0 \\ V_1 &= 500 \Rightarrow V_1 = 100\text{L} \\ V_2 &= 150\text{L} \end{aligned}$$