Reinforcement Learning – HW 3

Alon Ressler , 201547510, alonress@gmail.com
Eliran Shabat, 201602877, shabat.eliran@gmail.com

Programing Question 1

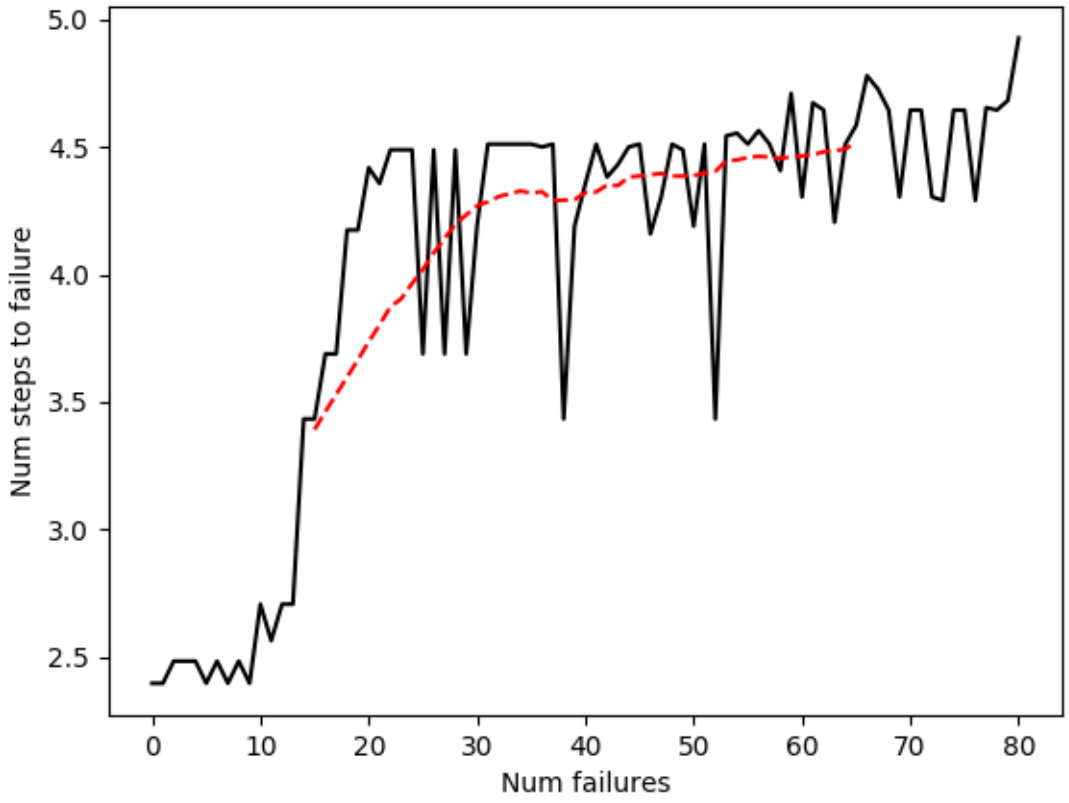
We implemented the off-policy model-based learning by following the given instructions.

Path to execution directory:
/specific/a/home/cc/students/cs/eliranshabat/courses/msc/RL/hw3

The code is implemented in the file:
/specific/a/home/cc/students/cs/eliranshabat/courses/msc/RL/hw3/control.py

The algorithm converged after 81 trials.

Learning curve:



Programing Question 2

We implemented Q-learning for the FrozenLake environment using a tabular and function-approximation methods.

Path to execution directory:
/specific/a/home/cc/students/cs/eliranshabat/courses/msc/RL/hw3

The code is implemented in the following files:
/specific/a/home/cc/students/cs/eliranshabat/courses/msc/RL/tabular_Q.py
/specific/a/home/cc/students/cs/eliranshabat/courses/msc/RL/network_Q.py

For the tabular case, we received a score of 0.2135 and the following Q-function:

```
[[1.66773351e-01 6.74114362e-02 8.76232402e-02 1.29524059e-01]
 [1.68149072e-04 1.10859524e-03 5.46226793e-04 1.09788639e-01]
 [6.43360602e-04 1.31912990e-02 8.36529762e-03 5.35260040e-03]
 [4.23242725e-03 2.92972347e-03 6.01371014e-04 6.48914148e-02]
 [1.71976554e-01 7.91620353e-02 2.41553043e-03 3.49254573e-02]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [5.95170746e-01 3.20803632e-06 7.68882310e-07 7.63933325e-06]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [6.30565673e-03 5.71717603e-02 8.35091431e-02 3.91005079e-01]
 [1.10947271e-01 5.71858642e-01 1.34448082e-01 1.52485667e-02]
 [8.73417089e-01 1.18821246e-03 1.18281904e-03 2.18672163e-03]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [1.52912333e-02 1.71805960e-01 6.46930216e-01 1.28222412e-01]
 [5.65964732e-01 8.51173973e-01 4.84896638e-01 2.56591228e-01]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]]
```

Using the function-approximation method, we received a score of 0.0375.
The score we got by using function approximation is lower then the score received using the tabular approach. It seems reasonable because function approximation is useful when dealing with large state space. In out case, the state space is small, so using a table we can get a good approximation for the MDP.

שאלה 1:

נתונים שני MDP כך ש: $Q^*_{M'}(s,a) = Q^*_M(s,a) + f(s)$

נגדיר את $\pi^*_{M'}(s)$ ו- $\pi^*_M(s)$ להיות המדיניות האופטימליות ב-'M ו-M.

כיוון ש-$\pi^*_{M'}(s)$ היא אופטימלית מתקיים:

$$\pi^*_{M'}(s) = \arg\max_a Q^*_{M'}(s,a)$$

נציב את הנתון ונקבל:

$$\pi^*_{M'}(s) = \arg\max_a Q^*_{M'}(s,a) = \arg\max_a Q_M(s,a) + f(s)$$

$$= \arg\max_a Q_M(s,a) = \pi^*_M(s)$$

לפי הגדרה וכיוון ש-π^*_M היא אופטימלית ב-M

לכן סה"כ קיבלנו ש: $\pi^*_{M'}(s) = \pi_M(s)$ לכל מצב s
לכן המדיניות האופטימלית שווה בשני ה-MDPs.

(2) נסמן תחילה ב π^* את המדיניות האופטימלית עבור M'.
נחשב כעת את $V_{M'}^{\pi^*}(s)$ לפי הגדרה:

$$V_{M'}^{\pi^*}(s) = E^{\pi^*}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \left(R(s_t, a_t, s_{t+1}) + \phi(s_t) - \gamma \phi(s_{t+1}) \right) \middle| s_0 = s \right]$$

$$= E^{\pi^*}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(s_t, a_t, s_{t+1}) \middle| s_0 = s \right] + E^{\pi^*}\left[\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \phi(s_t) - \gamma^{t+1} \phi(s_{t+1})}_{= \phi(s_0) = \phi(s)} \middle| s_0 = s \right]$$

$$= V_M^{\pi^*}(s) + \phi(s)$$

כאשר בשוויון הראשון המעבר הראשון נבע מפשוט הגדרה והשני נובע מכך שהטור טלסקופי.
נשים לב ש π^* כי לא בהכרח המדיניות האופטימלית עבור M.
אבל נטען שכן.

<u>טענה</u>
π^* אופטימלית גם עבור M.

<u>הוכחה</u>
נניח בשלילה אחרת.
כלומר קיימת מדיניות $\hat{\pi}$ ומצב s כך ש

$$V_M^{\hat{\pi}}(s) > V_M^{\pi^*}(s)$$

נוסיף $\phi(s)$ לשני צדדים ונקבל:

$$V_M^{\hat{\pi}}(s) + \phi(s) > V_M^{\pi^*}(s) + \phi(s)$$

כעת, לפי מה שטענו קודם נקבל:

1. $V_M^{\pi^*}(s) + \phi(s) = V_{M'}^{\pi^*}(s)$
2. $V_M^{\hat{\pi}}(s) + \phi(s) = V_{M'}^{\hat{\pi}}(s)$

וקיבלנו

$$V_{M'}^{\hat{\pi}}(s) > V_{M'}^{\pi^*}(s)$$

וזו סתירה לכך ש π^* אופטימלית ב M'

∎

ולכן המדיניות האופטימלית לא השתנתה כנדרש.