Universidad Rey Juan Carlos

Máster Universitario en Ingeniería de Sistemas de Decisión

Caso Práctico II: Probabilidades y Variables Aleatorias

Autor:

Elisa Cascudo

Asignatura:

Modelización y Tratamiento de la Incertidumbre

13 Octubre 2025

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Tarea IV

Una SICAV desea invertir un capital de un millón de euros. Tras un estudio de mercado, consideran finalmente tres posibles alternativas:

- *La primera compañía es una empresa de software en la que, con probabilidad 0.1, se obtiene un beneficio neto de 5 millones de euros, con probabilidad 0.3, se obtiene un beneficio neto de un millón de euros, y, con probabilidad 0.6, se pierde todo lo invertido.*
- *La segunda compañía es una empresa de hardware en la que, con probabilidad 0.2, se obtiene un beneficio neto de 3 millones de euros, con probabilidad 0.4, se obtiene un beneficio neto de un millón de euros, y, con probabilidad 0.4, se pierde todo lo invertido*
- *La tercera compañía es una empresa de biotecnología en la que, con probabilidad 0.1, se obtiene un beneficio neto de 6 millones de euros, con probabilidad 0.7, no se obtiene beneficio neto pero tampoco se pierde la inversión inicial, y con probabilidad 0.2 se pierde todo lo invertido*

Para poder decidir finalmente en que empresa invertirán su capital, los responsables de la SICAV deciden encargar un estudio estadístico, respondiendo a las siguientes preguntas:

i) Representa gráficamente las funciones de probabilidad de masa del posible beneficio obtenido de cada una de las empresas.

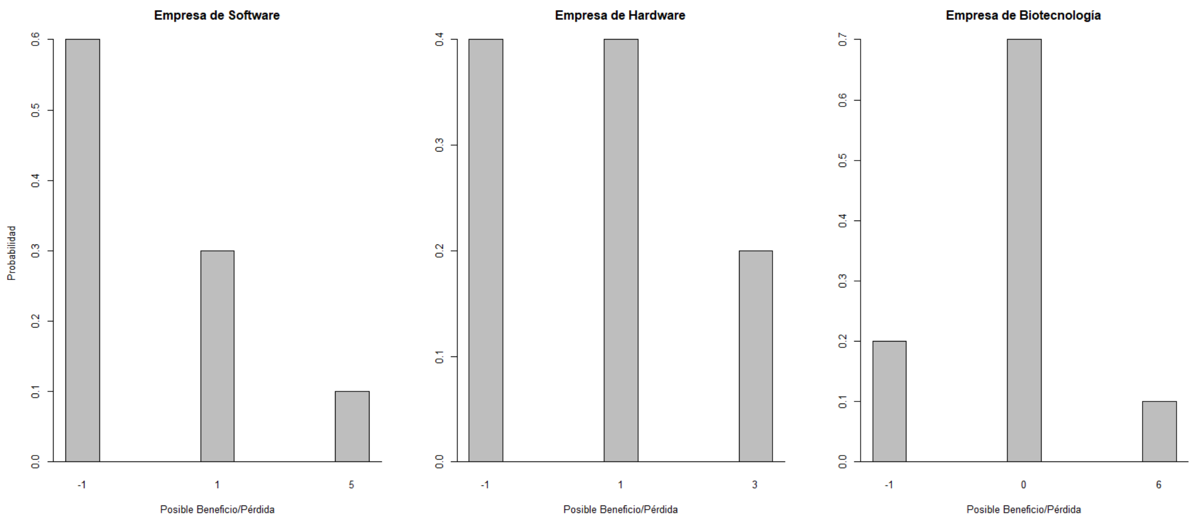

Figura 1: Representación gráfica de la función de probabilidad de masa del beneficio obtenido de cada una de las empresas. Elaboración propia.

ii) Calcula la esperanza y la varianza de cada una de las inversiones.

Para obtener la esperanza y la varianza de cada una de las inversiones, se van a emplear las definiciones aplicadas a variables aleatorias discretas de ambos conceptos.

La esperanza de una variable aleatoria discreta, $\mathbf{E}[X]$, se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$

Y a su vez, la varianza de una variable aleatoria discreta, $\mathrm{Var}[X]$, se define como:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sum_i x_i^2 \cdot p(x_i) - (\mathbb{E}[X])^2$$

Como ejemplo, explicaremos el proceso de calculo de la esperanza y la varianza para la empresa de software. En realidad los cálculos se realizaran utilizando R, por lo que se añadirá mas adelante el código empleado para obtener la información requerida. Al final, se mostrarán los resultados para cada una de las tres empresas en el Cuadro ... .

Sustituyendo los valores dados para la empresa de software en la definición de esperanza, obtenemos:

$$\mathbb{E}[X] = (-1)(0{,}6) + (1)(0{,}3) + (5)(0{,}1)$$

$$\mathbb{E}[X] = -0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}2$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X] = 0{,}2$.

Realizando ahora los mismo, pero para la varianza: Primero calculamos $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_i x_i^2 \cdot p(x_i)$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathbb{E}[X^2] = (-1)^2(0{,}6) + (1)^2(0{,}3) + (5)^2(0{,}1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = (1)(0{,}6) + (1)(0{,}3) + (25)(0{,}1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0{,}6 + 0{,}3 + 2{,}5 = 3{,}4$$

Ahora calculamos la varianza:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 3{,}4 - (0{,}2)^2$$

$$\mathrm{Var}[X] = 3{,}4 - 0{,}04 = 3{,}36$$

Por lo tanto, $\mathrm{Var}[X] = 3{,}36$.

Para implementar estos cálculos en R se ha hecho lo siguiente:

```r
#Empresa de software
x1 <- c(-1, 1, 5)
y1 <- c(0.6, 0.3, 0.1)
# Esperanza
esperanza <- sum(x1 * y1)
esperanza #resultado: 0.2

# Varianza
varianza <- sum((x1 - esperanza)^2 * y1)
varianza #resultado: 3.36
```

Una vez calculadas la esperanza y la varianza para cada una de las empresas, se obtienen los siguientes resultados:

Empresa	**Esperanza**	**Varianza**
Software	0,2	3,36
Hardware	0,6	2,24
Biotecnología	0,4	3,64

Cuadro 1: Esperanza y varianza para cada una de las inversiones

iii) ¿Cuál crees que es la inversión mas segura? Razona tu respuesta.

La inversión más segura corresponde a la empresa de hardware, dado que presenta la distribución de probabilidades de beneficio más equilibradas. A pesar de mostrar una probabilidad de pérdida relativamente elevada, como se observa en la representación gráfica de la función de masa de probabilidad (Figura 1), otros indicadores estadísticos respaldan esta elección.

El análisis de la esperanza matemática y la varianza, presentado en el Cuadro 1, constituye el fundamento principal de esta decisión. La empresa de hardware no solo exhibe la esperanza más elevada, es decir, el valor esperado de ganancias más alto de pormedio, sino que también registra la menor varianza entre las tres opciones evaluadas.

La varianza, como medida de dispersión de los datos respecto a la media, proporciona información crucial sobre el riesgo asociado a cada inversión. Una varianza alta indica que los valores están muy dispersos alrededor de la media, mientras que una varianza baja señala que los datos se concentran cerca de ella. En este contexto, la empresa de hardware combina la mayor esperanza de beneficios con la menor variabilidad, lo que se traduce en un nivel de riesgo inferior al de las otras dos alternativas de inversión.

iv) ¿Cuál crees que es la inversión que conlleva más riesgos.

Siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado en el apartado anterior, la inversión que conlleva mayor riesgo corresponde a la empresa de Biotecnología.

A primera vista, la información presentada en la Figura 1 podría resultar engañosa. La probabilidad de pérdidas en esta empresa es significativamente inferior a la observada en la empresa de Software. Este indicador podría sugerir se trata de una opción de menor riesgo. Pero hay que considerar, que para una empresa, obtener cero ganancias también presenta un riesgo, y esta acumula la mayor probabilidad dentro de la empresa de biotecnología.

Además, Al incorporar los estadísticos del Cuadro 1, se observa que, si bien las ganancias promedio (esperanza) no son las más bajas entre las tres opciones, la empresa de biotecnología registra la varianza más elevada (3.64). Esta alta varianza indica que los resultados potenciales presentan una gran dispersión respecto a la media, lo que se traduce en menor predictibilidad y mayor incertidumbre. En consecuencia, a pesar de sus aparentes ventajas en términos de menor probabilidad de pérdidas, la empresa de biotecnología constituye la inversión de mayor riesgo entre las tres alternativas evaluadas.

v) ¿Cuál es la probabilidad de que la inversión más arriesgada proporcione más beneficios que la más segura? Razona la respuesta.

El objetivo de este análisis es calcular la probabilidad de que la inversión más arriesgada, representada por la empresa de biotecnología, genere un beneficio superior al de la inversión más segura, representada por la empresa de hardware. Designamos:

- H: la empresa de menor riesgo (hardware)
- B: la empresa de mayor riesgo (biotecnología)

Dado que se desea comparar los beneficios obtenidos por ambas inversiones, es necesario considerar todas las probabilidades conjuntas de los posibles resultados de ambas variables aleatorias; es decir, combinaciones en las que se observan simultáneamente los resultados de H y B, aplicando la regla del producto. Posteriormente, se identifican los casos en los que el beneficio de la empresa de mayor riesgo B es superior al de la empresa de menor riesgo H. Los resultados de este procedimiento se pueden observar a continuación en el Cuadro 2, con los casos en los que los beneficios de la empresa de mayor riesgo son superiores a las de menor riesgo en negrita, B>H:

H	**B**	**P(H)**	**P(B)**	**P(H,B)**
3	**6**	**0,2**	**0,1**	**0,02**
1	**6**	**0,4**	**0,1**	**0,04**
-1	**6**	**0,4**	**0,1**	**0,04**
3	0	0,2	0,7	0,14
1	0	0,4	0,7	0,28
-1	**0**	**0,4**	**0,7**	**0,28**
3	-1	0,2	0,2	0,04
1	-1	0,4	0,2	0,08
-1	-1	0,4	0,2	0,08

Cuadro 2: Probabilidades conjuntas, P(H,B) de los beneficios de la empresa de hardware y de biotecnología. Aquellos casos en los que la empresa de biotecnología presenta mayor beneficio que la empresa de hardware están marcados a negrita. Elaboración propia.

Finalmente, se suman las probabilidades de todos aquellos casos en los que la inversión en la empresa de biotecnología proporciona un mayor rendimiento que la inversión en la empresa de hardware. Estamos aplicando el principio de inclusión-exclusión, asumiendo que las variables son independientes.

$$P(\mathrm{B} > \mathrm{H}) = P(H = 3, B = 6) + P(H = 1, B = 6) + P(H = 0, B = 6) + P(H = -1, B = 0)$$

$$P(\mathrm{B} > \mathrm{H}) = 0,02 + 0,04 + 0,04 + 0,28$$

$$P(\mathrm{B} > \mathrm{H}) = 0,38 = 38\,\%$$

vi) Si un total de 10 SICAV distintas decidiesen invertir cada una un millón de euros en la empresa con más riesgos y otro millón de euros en la empresa más segura ¿cuántas de ellas es de esperar que obtengan más beneficios de la inversión más arriesgada que de las más segura? Razona la respuesta.

Según los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, se espera que la empresa de mayor riesgo proporcione mayores beneficios que la empresa de menor riesgo en el 38 % de los casos. Esto se representa mediante la siguiente probabilidad:

$$P(\mathrm{B} > \mathrm{H}) = 0,38 = 38\,\%$$

Dado que se trata de 10 SICAV que realizan inversiones independientes en ambas empresas, podemos suponer que aproximadamente el 38 % de ellas obtendrán mayores beneficios al invertir en la empresa más arriesgada. Esto se traduce en un valor esperado de 3,8 SICAV.

Sin embargo, dado que no tiene sentido hablar de una fracción de una SICAV en este contexto, es razonable redondear este valor a 4 SICAV, proporcionando así una estimación más coherente y aplicable en la práctica.

Tarea V

Tras obtener un gran éxito en su inversión, los directivos de la SICAV, deciden celebrarlo con una comida para todo el personal de la empresa. Para los postres, deciden encargar tartas a una prestigiosa pastelería. El problema es que en dicha pastelería ha entrado un nuevo trabajador, inexperto todavía, al que se le caen, en promedio, tres trocitos de cáscara de huevo cada dos tartas que hace.

i)Si la SICAV sólo encarga una tarta ¿cuál es el número esperado de trocitos de cáscara de huevo que se pueden encontrar en la misma?

Para resolver este ejercicio, utilizaremos la distribución de Poisson, ya que se trata de un evento puntual (la aparición de trozos de huevo) dentro de un conjunto determinado, en este caso, un número de tartas.

Definimos λ como el número promedio de sucesos (trozos de huevo) por unidad (una tarta). Si se observan 3 trozos de huevo en 2 tartas, entonces:

$$\lambda = \frac{3 \text{ trozos de huevo}}{2 \text{ tartas}} = 1{,}5 \text{ trozos de huevo por tarta}$$

En una distribución de Poisson, la esperanza matemática $E[X]$ está dada por:

$$E[X] = \lambda$$

Por lo tanto:

$$E[X] = 1{,}5$$

El número esperado de trozos de huevo en una sola tarta es: 1,5.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún trocito de cáscara de huevo en la tarta que han encargado?

Sea X la variable aleatoria que representa el suceso de trozos de huevo en una tarta. Supondremos que X sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 1.5$, es decir:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 1{,}5).$$

Si deseamos calcular la probabilidad de que no haya ningún trozo de huevo en una tarta, es decir, $P(X = 0)$, aplicamos la fórmula de la distribución de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!},$$

donde en este caso $k = 0$ y $n = 1$ (una sola tarta). Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$P(X=0) = \frac{(1{,}5)^0 \cdot e^{-1{,}5}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-1{,}5}}{1} = e^{-1{,}5}.$$

$$e^{-1{,}5} \approx \frac{1}{e^{1{,}5}} \approx \frac{1}{4{,}48169} \approx 0{,}22313$$

Por lo tanto:

$$P(X=0) \approx 0{,}22313 \approx 22,31\,\%$$

iii) Basándote en el promedio de trocitos de cáscara de huevo que deja caer el pastelero inexperto ¿crees que es posible que se encontrasen siete trocitos de cáscara de huevo en la tarta? Razona la respuesta.

El número promedio de trocitos de cáscara de huevo que deja caer el pastelero por tarta, como se ha calculado anteriormente, es:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda = 1{,}5.$$

Dado que X sigue una distribución de Poisson, la varianza también es igual al parámetro:

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda = 1{,}5.$$

A partir de la varianza, podemos calcular la desviación estándar como:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}225.$$

Esto significa que tanto la media como la dispersión de los datos están centradas en torno a valores bajos. Encontrar 7 trocitos de cáscara en una sola tarta representa un valor significativamente alejado del promedio. En concreto, podemos calcular cuántas desviaciones estándar por encima de la media representa ese valor:

$$Z = \frac{7-\mu}{\sigma} = \frac{7-1{,}5}{\sqrt{1{,}5}} \approx \frac{5{,}5}{1{,}225} \approx 4{,}49.$$

Es decir, el valor 7 está aproximadamente a 4,5 desviaciones estándar por encima de la media, lo cual lo convierte en un evento altamente improbable.

Por lo tanto, podemos concluir que es muy poco probable que se encuentren 7 trocitos de cáscara en una sola tarta, bajo el supuesto de que el número de trozos siga efectivamente una distribución de Poisson con $\lambda = 1{,}5$.

iv) Si la SICAV encarga en total seis tartas ¿cuál es la probabilidad de que no haya ningún trocito de cáscara de huevo en ninguna de las tartas? p

En este apartado, se desea calcular la probabilidad de que no se encuentren trozos de cáscara de huevo en un conjunto de $n = 6$ tartas. Dado que el número promedio de trozos por tarta es $\lambda = 1{,}5$, el nuevo parámetro de la distribución de Poisson para el total de tartas será:

$$\lambda_{6\text{ tartas}} = \lambda \cdot n = 1{,}5 \cdot 6 = 9.$$

Por lo tanto, la variable aleatoria X, que representa el número total de trozos en las 6 tartas, sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 9$:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 9).$$

Se desea calcular la probabilidad de que no haya ningún trozo en ninguna de las 6 tartas, es decir, $P(X = 0)$. Utilizando la fórmula de la distribución de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

para $k = 0$, se tiene:

$$P(X = 0) = \frac{9^0 \cdot e^{-9}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-9}}{1} = e^{-9}.$$

Calculando el valor numérico:

$$P(X = 0) = e^{-9} \approx 0{,}0001234.$$

Expresado en porcentaje:

$$P(X = 0) \approx 0{,}01234\,\%.$$

La probabilidad de que no haya ningún trozo de cáscara de huevo en 6 tartas es prácticamente nula (alrededor de un 0,012 %). Esto indica que es casi imposible que no aparezca ningún trozo de cáscara en un conjunto de 6 tartas, bajo el supuesto de que el número de trozos siga una distribución de Poisson con $\lambda = 1{,}5$ por tarta.

Tarea VI

El tiempo (en minutos) X hasta que llegan las tartas encargadas a la sede de la SICAV sigue una distribución uniforme X U(25,45). Hay directivos que deben viajar inmediatamente después de la celebración a sus lugares de residencia. Se desea, por tanto, estudiar con mayor detalle la distribución estadística de dicho tiempo, contestando a las siguientes preguntas:

i) Representa gráficamente las funciones de distribución y las funciones de densidad de X.

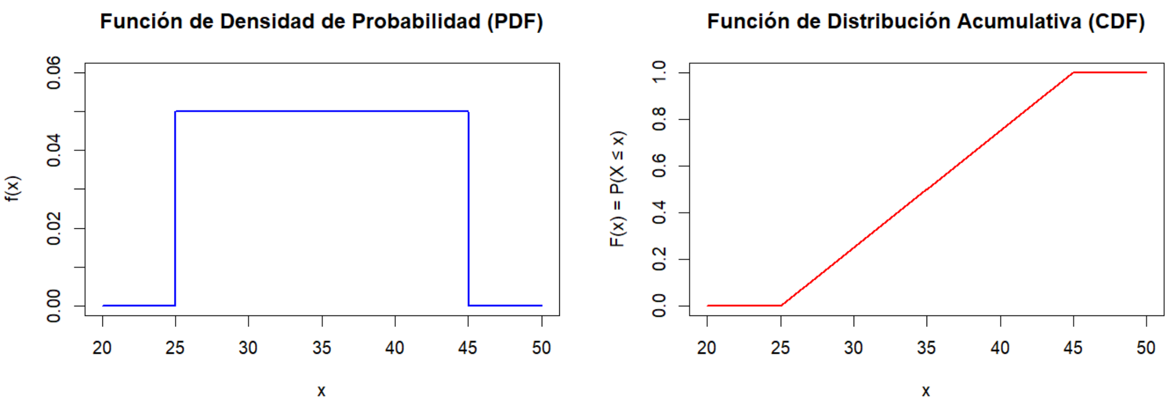

Figura 2: Representaciones gráficas de las funciones de densidad y de distribución de la distribución uniforme, respectivamente. Elaboración propia.

ii) Calcula la esperanza y la varianza de X.

Sea $X \sim U(a, b)$ una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$, donde $a = 25$ y $b = 45$.

La esperanza matemática (media) de X está dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{25+45}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

La varianza de X se calcula mediante la fórmula:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(45-25)^2}{12} = \frac{20^2}{12} = \frac{400}{12} \approx 33{,}33.$$

iii) Calcula la probabilidad de que el tiempo X sea, como mucho, 30 minutos.

Sea $X \sim U(25, 45)$ una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $[25, 45]$. Queremos calcular la probabilidad de que X sea, como máximo, 30 minutos:

$$P(X \leq 30).$$

La función de distribución acumulada (CDF) de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 25, \\ \frac{x-25}{45-25}, & 25 \leq x \leq 45, \\ 1, & x > 45. \end{cases}$$

Para $x = 30$, tenemos

$$P(X \leq 30) = F_X(30) = \frac{30-25}{45-25} = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo sea como máximo 30 minutos es del 25 %.

iv) Calcula la probabilidad de que el tiempo X esté comprendido entre 30 y 40 minutos.

Sea $X \sim U(25, 45)$ una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $[25, 45]$. Queremos calcular la probabilidad de que el tiempo esté comprendido entre 30 y 40 minutos:

$$P(30 \leq X \leq 40).$$

Utilizando la función de distribución acumulada $F_X(x)$, tenemos:

$$P(30 \leq X \leq 40) = F_X(40) - F_X(30).$$

$$F_X(40) = \frac{x-25}{45-25} = \frac{40-25}{20} = \frac{15}{20} = 0{,}75,$$

$$F_X(30) = \frac{x-25}{45-25} = \frac{30-25}{20} = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

$$P(30 \leq X \leq 40) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}50.$$

Es decir, la probabilidad de que el tiempo esté entre 30 y 40 minutos es del 50 %.

v) Calcula el percentil 90 de esta distribución. ¿Qué interpretación das a este resultado?

Sea $X \sim U(25, 45)$ una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $[25, 45]$. El percentil 90, denotado como P_{90}, es el valor $x_{0,9}$ tal que

$$P(X \leq x_{0,9}) = 0{,}9.$$

Utilizando la función de distribución acumulada,

$$F_X(x) = \frac{x - 25}{45 - 25} = \frac{x - 25}{20}, \quad 25 \leq x \leq 45,$$

se iguala a 0.9 y se despeja x:

$$\frac{x_{0,9} - 25}{20} = 0{,}9 \implies x_{0,9} - 25 = 18 \implies x_{0,9} = 43.$$

Por lo tanto, el percentil 90 de la distribución uniforme $U(25, 45)$ es 43. Esto quiere decir que si el percentil 90 es 43 minutos, el 90 % de las tartas se entregan en un tiempo igual o menor a 43 minutos. En otras palabras, sólo el 10 % de las tartas tardan más de 43 minutos en ser entregadas. Por lo tanto, 43 minutos puede considerarse un tiempo límite máximo razonable para la mayoría de las entregas.

vi) Calcula la probabilidad de que el tiempo X sea mayor de 40 minutos sabiendo que dicho tiempo es de al menos 30 minutos ¿Qué interpretación das a este resultado?

Sea $X \sim U(25, 45)$ una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $[25, 45]$. Queremos calcular la probabilidad condicional de que el tiempo sea mayor de 40 minutos, dado que ya sabemos que es al menos 30 minutos:

$$P(X > 40 \mid X \geq 30).$$

Por definición de probabilidad condicional,

$$P(X > 40 \mid X \geq 30) = \frac{P(X > 40 \cap X \geq 30)}{P(X \geq 30)} = \frac{P(X > 40)}{P(X \geq 30)}.$$

Calculamos primero los términos del numerador y denominador:

$$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - F_X(40).$$

$$F_X(40) = \frac{40 - 25}{20} = \frac{15}{20} = 0{,}75,$$
$$P(X > 40) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - F_X(30) = 1 - \frac{30 - 25}{20} = 1 - \frac{5}{20} = 0{,}75.$$

Por lo tanto, la probabilidad condicional es

$$P(X > 40 \mid X \geq 30) = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333.$$

Dado que el tiempo ya es al menos 30 minutos, la probabilidad de que sea mayor de 40 minutos es aproximadamente 33,33 %.

Tarea VII

TAREA VII. La empresa VACIS es la encargada de gestionar las comunicaciones de la SICAV. Desean hacer un estudio de la viabilidad económica de implantar algún tipo de tarifa premium que permita reducir la factura telefónica en llamadas a móviles. Se sabe que el tiempo (en minutos) X que dura una llamada cualquiera realizada por un trabajador de VACIS a un teléfono móvil externo sigue una distribución exponencial X Exp(1), con una duración media de la llamada de 8 minutos. Para poder tomar alguna decisión al respecto, se desea responder previamente a las siguientes preguntas:

i) Representa gráficamente las funciones de distribución y las funciones de densidad de X.

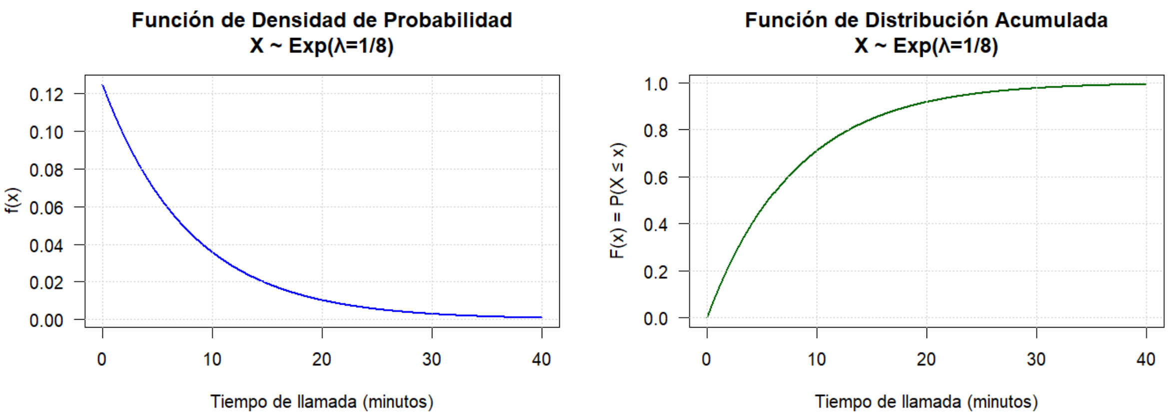

Figura 3: Representación gráfica de las funciones de distribución y de densidad de X. Elaboración propia.

ii) Calcula la esperanza y la varianza de X.

Sea $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ la variable aleatoria que representa la duración (en minutos) de una llamada realizada por un trabajador de la empresa VACIS a un teléfono móvil externo. Se sabe que el tiempo medio de una llamada es de 8 minutos, es decir:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{8}$$

Entonces, la distribución de X es:

$$X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{8}\right)$$

La esperanza de una variable exponencial es:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 8$$

La varianza se calcula como:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 64$$

iii) Calcula la probabilidad de que una llamada cualquiera a móvil dure menos de 9 minutos.

Queremos calcular la probabilidad de que una llamada cualquiera dure menos de 9 minutos, es decir:

$$P(X < 9)$$

$$P(X < 9) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{1}{8}\cdot 9} = 1 - e^{-1{,}125}$$

Calculamos el valor numérico:

$$P(X < 9) \approx 1 - e^{-1{,}125} \approx 1 - 0{,}32465 = 0{,}67535$$

La probabilidad de que una llamada dure menos de 9 minutos es aproximadamente de 67,5 %.

iv) Calcula la probabilidad de que una llamada cualquiera a móvil dure entre 7 y 9 minutos.

En este apartado queremos calcular la probabilidad de que una llamada dure entre 7 y 9 minutos, es decir:

$$P(7 < X < 9)$$

$$P(7 < X < 9) = P(X < 9) - P(X < 7) = F_X(9) - F_X(7)$$

Sustituyendo:

$$F_X(9) = 1 - e^{-\frac{9}{8}} \approx 1 - e^{-1{,}125} \approx 1 - 0{,}32465 = 0{,}67535$$

$$F_X(7) = 1 - e^{-\frac{7}{8}} \approx 1 - e^{-0{,}875} \approx 1 - 0{,}41686 = 0{,}58314$$

$$P(7 < X < 9) = 0{,}67535 - 0{,}58314 = 0{,}09221$$

La probabilidad de que una llamada dure entre 7 y 9 minutos es aproximadamente 9,2 %.

v) Calcula el percentil 80 de esta distribución. ¿Qué interpretación das a este resultado?

Ahora queremos calcular el percentil 80 tal que:

$$P(X \leq x_{0,8}) = 0{,}8$$

$$1 - e^{-\lambda x} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda x} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad -\lambda x = \ln(0{,}2) \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\ln(0{,}2)}{\lambda}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{1}{8}$:

$$x_{0,8} = -\frac{\ln(0{,}2)}{1/8} = -8 \cdot \ln(0{,}2)$$

$$\ln(0{,}2) \approx -1{,}6094 \quad \Rightarrow \quad x_{0,8} \approx -8 \cdot (-1{,}6094) = 12{,}875$$

Por lo tanto, el percentil 80 de la distribución es aproximadamente 12,88 minutos. El 80 % de las llamadas realizadas por los trabajadores de VACIS tienen una duración menor o igual a aproximadamente 12,88 minutos. Solo el 20 % de las llamadas superan ese tiempo. Este valor podría considerarse como un tiempo maximo habitual de tiempo de llamada.

vi) Si a diario se realizan, en promedio, un total de 1000 llamadas a móvil, ¿cuál es el tiempo total que se emplea en dichas llamadas? ¿Por qué?

Si diariamente se realizan en promedio 1000 llamadas, entonces el tiempo total medio diario empleado en llamadas es:

$$\mathbb{E}[T] = 1000 \cdot \mathbb{E}[X] = 1000 \cdot 8 = 8000 \text{ minutos.}$$

vii) Si el coste de las llamadas a móvil con la tarifa actual es:

- *10 céntimos de euro por establecimiento de llamada;*
- *1 céntimo de euro por cada segundo hasta el minuto 1 de conversación;*
- *0.5 céntimos de euro por cada segundo a partir del minuto 1 de conversación.*

Calcula el coste medio diario por las llamadas a móviles. Calcula también la desviación típica asociada a este resultado.

Para cada llamada, el coste de su duración X en segundos estará determinado por tres fases distintas:

- Coste fijo: 10 céntimos de euro por establecimiento de llamada.
- Para los primeros 60 segundos (1 minuto): 60 segundos $\times$ 1 céntimo/segundo = 60 céntimos,
- Para los segundos adicionales (después del primer minuto): si $X > 1$, entonces hay $(X-1) \times 60$ segundos adicionales. El coste adicional es:

$$(X-1) \times 60 \text{ segundos} \times 0{,}5 \text{ céntimos/segundo} = 30(X-1) \text{ céntimos.}$$

Esta información se puede representar como una función a trozos:

$$C(X) = \begin{cases} 10 + 60X & \text{si } X \leq 1 \\ 70 + 30(X-1) & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

Transformándola a euros en vez de céntimos de euro, ya que es el valor final que nos interesa:

$$C(X) = \begin{cases} 0{,}10 + 0{,}60X & \text{si } X \leq 1 \\ 0{,}10 + 0{,}60 + 0{,}30(X-1) & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

Simplificando:

$$C(X) = \begin{cases} 0{,}10 + 0{,}60X & \text{si } X \leq 1 \\ 0{,}40 + 0{,}30X & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

Al ser una función a trozos, no podemos hacer una transformación lineal directa de la exponencial dada al principio de este ejercicio. Por lo tanto, debemos calcular la esperanza del coste total de las llamadas diarias de otra manera. Para ello, utilizaremos la definición de esperanza para distribuciones continuas:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} C(x)\, f_X(x)\, dx$$

Calculamos ahora la esperanza para cada uno de los tramos, sabiendo que:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ya que X corresponde al tiempo de llamada, y el tiempo siempre debe ser una variable mayor o igual a cero, nos quedaremos solo con la primera parte de esta función. Sustituyendo:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{8} e^{-x/8}$$

$$\mathbb{E}_1[X] = \int_0^1 (0{,}10 + 0{,}60x) \cdot \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx = 0{,}0463$$

$$\mathbb{E}_2[X] = \int_1^\infty (0{,}40 + 0{,}30x) \cdot \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx = 2{,}7357$$

Los resultados de estas integrales se han calculado en R, utilizando el siguiente código:

```
funcion1 <- function(x) { (0.10 + 0.60 * x) * (1/8) * exp(-x / 8) }
funcion2 <- function(x) { (0.40 + 0.30 * x) * (1/8) * exp(-x / 8) }

resultado1 <- integrate(funcion1, lower = 0, upper = 1)
resultado2 <- integrate(funcion2, lower = 1, upper = Inf)

print(resultado1)
print(resultado2)
```

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}[C(X)] = \mathbb{E}_1[X] + \mathbb{E}_2[X] = 0{,}0463 + 2{,}7357 = 2{,}7820$$

Es decir, el coste medio por llamada es de aproximadamente 2,78 euros. Si multiplicamos por las 1000 llamadas que se realizan en promedio al día, el coste medio diario total será de 2782 euros.

Para calcular la desviación típica, es necesario obtener la varianza de esta nueva distribución. La definición de varianza de una distribución es:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Lo único que nos faltaría calcular sería $\mathbb{E}[C(X)^2]$:

$$\mathbb{E}[C(X)^2] = \int_0^1 (0{,}10 + 0{,}60x)^2 \cdot \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx + \int_1^\infty (0{,}40 + 0{,}30x)^2 \cdot \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx = 13{,}58572$$

Así que el valor de la varianza será:

$$\text{Var}(C) = \mathbb{E}[C(X)^2] - (\mathbb{E}[C(X)])^2 = 13{,}58572 - (2{,}7820)^2 = 5{,}8442$$

Por último, calculamos la desviación típica del coste de llamadas diario:

$$\sigma_T = \sqrt{1000 \cdot \text{Var}(C)} = \sqrt{1000 \cdot 5{,}8442} = 76{,}45$$

Se concluye que el coste de llamadas diario es de 2782 euros, con una desviación típica de 76,45 euros.