

Appunti di Fisica

Elisa Solinas

Aggiornato il 27 novembre 2017

Indice

1 Meccanica	5
1.1 Calcolo vettoriale	5
1.1.1 Modulo di un vettore	5
1.1.2 Somma di due vettori	5
1.1.3 Differenza di due vettori	5
1.1.4 Prodotto scalare di due vettori	6
1.1.5 Prodotto vettoriale di due vettori	6
1.1.6 Calcolo di un vettore che collega due punti	6
1.2 Equazioni del moto	6
1.2.1 Moto rettilineo uniforme	6
1.2.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato	7
1.2.3 Moto circolare uniforme	7
1.3 Leggi di Newton	7
1.3.1 Prima legge di Newton	7
1.3.2 Seconda legge di Newton	7
1.3.3 Terza legge di Newton	7
2 Elettrostatica	9
2.1 Legge di Coulomb	9
2.2 Principio di sovrapposizione	9
2.3 Campo elettrico	10
2.4 Teorema di Gauss per il campo elettrico	10
2.4.1 Distribuzione lineare	10
2.4.2 Distribuzione piana	11
2.5 Energia elettrica	12
2.5.1 Energia potenziale elettrica	12
2.5.2 Potenziale elettrico	12
2.5.3 Lavoro del campo elettrico	12
2.5.4 La forza di Coulomb è conservativa	12
2.6 Dipolo elettrico	13
2.6.1 Campo elettrico lungo l'asse del dipolo	13
2.6.2 Potenziale elettrico lungo l'asse del dipolo	13

3 Magnetostatica	15
3.1 Corrente elettrica	15
3.2 Forza di Lorentz	15
3.2.1 Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente	15
3.3 Legge di Biot-Savart	16
3.3.1 Tratto di filo rettilineo	16
3.3.2 Spira circolare	17
3.4 Legge di Ampére	18
3.4.1 Solenoide ideale	18
3.5 Legge di Faraday-Lenz	19
3.5.1 Relazione con induttanza	19
4 Circuiti	21
4.1 Resistori	22
4.1.1 Resistori collegati in parallelo	22
4.1.2 Resistori collegati in serie	22
4.2 Condensatori	23
4.2.1 Campo elettrico all'interno di un condensatore	23
4.2.2 Differenza di potenziale sulle armature del condensatore . . .	23
4.2.3 Capacità di un condensatore piano	24
4.2.4 Cosa accade all'esterno del condensatore	24
4.2.5 Carica e scarica del condensatore	24
4.2.6 Condensatori collegati in parallelo	25
4.2.7 Condensatori collegati in serie	25

Capitolo 1

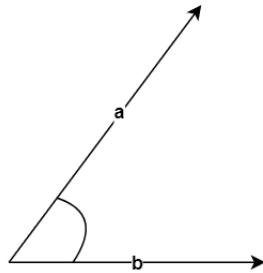
Meccanica

1.1 Calcolo vettoriale

Consideriamo due vettori in un sistema di coordinate (xyz):

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$



1.1.1 Modulo di un vettore

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.1.2 Somma di due vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

1.1.3 Differenza di due vettori

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

1.1.4 Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$$

Osservazioni

- Il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è nullo.

1.1.5 Prodotto vettoriale di due vettori

Il prodotto vettoriale tra due vettori è perpendicolare a entrambi.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \cdot \vec{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \vec{k}$$

Osservazioni

- Il prodotto vettoriale di due vettori è perpendicolare a entrambi.
- Il prodotto vettoriale di due vettori è anticomutativo, cioè:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.
- I versori della base canonica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soddisano le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \end{aligned}$$

1.1.6 Calcolo di un vettore che collega due punti

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2) & B &= (b_1, b_2) \\ \vec{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$

1.2 Equazioni del moto

1.2.1 Moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ s &= s_0 + v \cdot t \end{aligned}$$

1.2.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ v &= v_0 + a \cdot t \\ x &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

1.2.3 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme, il vettore velocità \vec{v} ha solo componente tangente alla circonferenza:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} = \omega^2 \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

1.3 Leggi di Newton

1.3.1 Prima legge di Newton

Un corpo mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché una forza non agisce su di esso.

1.3.2 Seconda legge di Newton

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e ha la stessa direzione della forza netta agente su di esso, mentre invece è inversamente proporzionale alla sua massa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

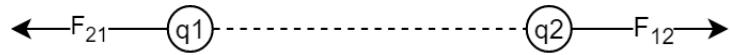
1.3.3 Terza legge di Newton

Se un corpo A esercita una forza \vec{F}_{AB} su un corpo B , allora il corpo B esercita sul corpo A una forza \vec{F}_{BA}

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Esempio 1. La forza \vec{F}_{12} esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza \vec{F}_{21} esercitata da q_2 su q_1 .

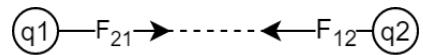
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$



Nel caso in cui le due cariche abbiano lo stesso segno:

$$\vec{F}_{12} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad \vec{F}_{21} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto:



$$\vec{F}_{12} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad \vec{F}_{21} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Capitolo 2

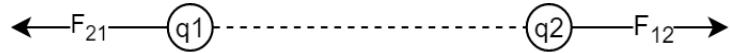
Elettrostatica

2.1 Legge di Coulomb

La forza \vec{F}_{12} esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza \vec{F}_{21} esercitata da q_2 su q_1 .

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano lo stesso segno:



$$\vec{F}_{12} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{21} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto:



$$\vec{F}_{12} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{21} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

2.2 Principio di sovrapposizione

In un sistema di n cariche, volendo valutare la forza totale agente su una carica q , è necessario sommare le forze esercitate da ciascuna carica. Ciascuna di queste forze agisce come se fosse l'unica presente.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n k_e \cdot \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_{r_i}$$

2.3 Campo elettrico

Dato un sistema di n cariche, su una carica di prova q , agisce un campo elettrico \vec{E} dato da:

$$\vec{E} = \sum_{i=0}^n k_e \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

La forza agente su q può essere espressa come:

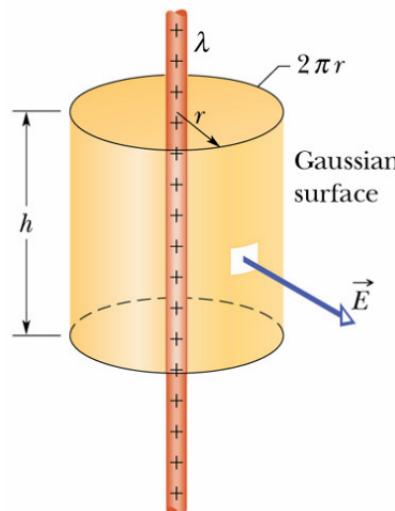
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

2.4 Teorema di Gauss per il campo elettrico

Il teorema di Gauss per il campo elettrico permette di calcolare il flusso del campo elettrico generato da una certa distribuzione di carica elettrica attraverso una superficie chiusa S contenente n cariche elettriche (positive o negative), il flusso del campo elettrico (generato dalle cariche) attraverso tale superficie è uguale al rapporto tra carica totale contenuta nella superficie chiusa e la costante dielettrica ϵ del mezzo in cui si trovano le cariche (ϵ_0 nel vuoto>):

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$$

2.4.1 Distribuzione lineare



Il campo elettrico \vec{E} è perpendicolare alla superficie gaussiana:

- $\Phi(\vec{E})$ attraverso le basi è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie laterale è pari a $E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h)$.

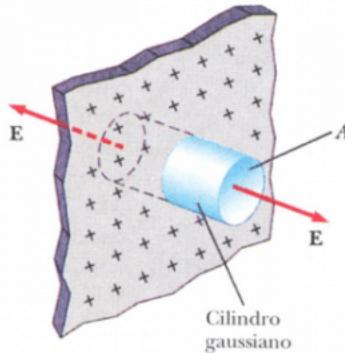
Per il teorema di Gauss:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\ \epsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\ \epsilon_0 \cdot E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h) &= q = \lambda \cdot h \\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r \cdot h}\end{aligned}$$

2.4.2 Distribuzione piana

Il campo elettrico \vec{E} è perpendicolare alla superficie gaussiana:

- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie del cilindro è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso le basi del cilindro è pari a $E \cdot A$, dove A è l'area di una base.



Per il teorema di Gauss:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\ \epsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\ \epsilon_0 \cdot (E \cdot A + E \cdot A) &= q \cdot \sigma \cdot A \\ 2 \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot A &= q = \sigma \cdot A \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

2.5 Energia elettrica

2.5.1 Energia potenziale elettrica

L'energia potenziale è l'inverso del lavoro compiuto dalla forza per spostare q_2 dal punto A al punto B .

$$\begin{aligned}\Delta U &= - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \\ &= - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_A}^{r_B} k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} dr = \\ &= k_e \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)\end{aligned}$$

2.5.2 Potenziale elettrico

Sia q_0 una carica di prova in moto da A a B , sotto l'azione di un campo elettrico \vec{E} :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{-L_{AB}}{q_0} \quad V = \frac{U}{q_0}$$

2.5.3 Lavoro del campo elettrico

Il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare una particella q_0 da A a B :

$$L_{AB} = q_0 \cdot (-\Delta V)$$

2.5.4 La forza di Coulomb è conservativa

Una forza è conservativa quando il lavoro da essa compiuto può essere scritto come una differenza di potenziale:

$$\begin{aligned}L_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = \\ &= k_e \cdot q_1 q_2 \cdot \int_A^B \frac{1}{r^2} = \left(k_e \frac{q_1 q_2}{r_B} \right) - \left(k_e \frac{q_1 q_2}{r_A} \right) = U(B) - U(A)\end{aligned}$$

Questo risultato significa che:

- Il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo.
- Il lavoro lungo uno spostamento dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo e non dal percorso seguito.

2.6 Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema composto da due cariche uguali, di segno opposto, poste a distanza d lungo un asse u_x .

Viene definito il **momento di dipolo** \vec{p} come



$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \vec{u}_x$$

2.6.1 Campo elettrico lungo l'asse del dipolo

$$\begin{aligned}\vec{E}_+ &= k_e \cdot \frac{q}{(r_x - a)^2} \cdot \vec{i} \\ \vec{E}_- &= -k_e \cdot \frac{q}{(r_x + a)^2} \cdot \vec{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= k_e \cdot \left(\frac{q}{(r_x - a)^2} - \frac{q}{(r_x^2 + a^2)^2} \right) \cdot \vec{i} = \\ &= k_e \cdot q \left(\frac{(r_x + a)^2 - (r_x - a)^2}{(r_x^2 + a^2)^2} \right) \cdot \vec{i} = \\ &= k_e \cdot q \frac{r_x^2 + a^2 + 2r_x a - r_x^2 + 2r_x a - a^2}{(r_x^2 + a^2)^2} \cdot \vec{i} = k_e \cdot \frac{4qr_x a}{(r_x^2 + a^2)^2} \cdot \vec{i}\end{aligned}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2p \cdot r_x}{(r_x^2 + \frac{d^2}{4})^2} \cdot \vec{i}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x \gg d$, cioè misurare il campo elettrico a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2pr_x}{r_x^4} \cdot \vec{i} = k_e \cdot \frac{2p}{r_x^3} \cdot \vec{i}$$

2.6.2 Potenziale elettrico lungo l'asse del dipolo

Il potenziale generato da una carica a una distanza r è dato da:

$$V(r) = k_e \cdot \frac{q}{r}$$

Perciò, il potenziale del dipolo a una distanza r_x è dato da:

$$\begin{aligned} V(r_x) &= k_e \cdot \left(\frac{q}{r_x - a} - \frac{q}{r_x + a} \right) = \\ &= k_e \cdot q \left(\frac{r_x + a - r_x + a}{r_x^2 - a^2} \right) = \\ &= k_e \cdot q \cdot \frac{2a}{r_x^2 - a^2} \end{aligned}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2 - \frac{d^2}{4}}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x \gg d$, cioè misurare il potenziale a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2}$$

Capitolo 3

Magnetostatica

3.1 Corrente elettrica

3.2 Forza di Lorentz

Una carica in moto in un campo magnetico \vec{B} è soggetta a una forza, detta **forza di Lorentz** \vec{F}_B tale che:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiché \vec{F}_B è perpendicolare a \vec{v} , il modulo della velocità non può variare, ma solo la sua direzione.

Poiché \vec{F}_B è perpendicolare allo spostamento, non può compiere lavoro sulla particella. Ciò significa che un campo magnetico uniforme non varia l'energia della particella.

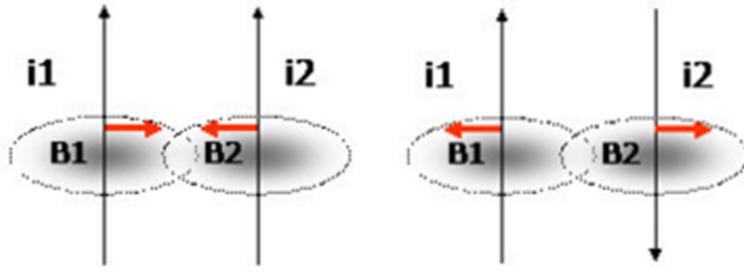
Possiamo considerare tre casi:

- \vec{v} parallelo a \vec{B} : il prodotto vettoriale è nullo e la particella non è soggetta a forza magnetica.
- \vec{v} perpendicolare a \vec{B} : se \vec{B} è costante, la particella si muove lungo una traiettoria circolare.
- Caso generale: la particella segue un moto ad elica lungo l'asse \vec{u}_B

3.2.1 Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente

Un filo rettilineo percorso da corrente I produce, a distanza r , un campo magnetico \vec{B} :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}$$



Consideriamo la seguente configurazione: due fili, di lunghezza L , posti a distanza D e percorsi, rispettivamente da una corrente I_1 e I_2 .

Sul filo 1 agisce una forza \vec{F}_{21} dovuta a \vec{B}_2 , mentre sul filo 2 agisce una forza \vec{F}_{12} dovuta a \vec{B}_1 .

Tali forze, secondo la terza legge di Newton sono eguali in modulo e hanno direzioni opposte:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} &= F_{21} = B_2 \cdot I_1 \cdot d = B_1 \cdot I_2 \cdot d = \\ &\mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi d} \cdot L\end{aligned}$$

La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono concordi, mentre è repulsiva se sono discordi.

3.3 Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart permette di calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{i \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

3.3.1 Tratto di filo rettilineo

Calcoliamo il campo magnetico generato da un filo di lunghezza L percorso da corrente I , a una distanza r :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{4\pi \cdot r} \cdot \frac{L}{\sqrt{\frac{L}{4} + r^2}}$$

Se il filo ha lunghezza infinita o è molto più lungo rispetto alla distanza a cui misuriamo il campo elettrico ($L \gg d$)

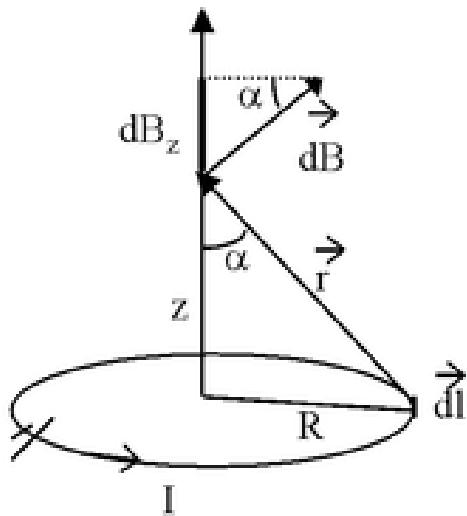
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

3.3.2 Spira circolare

Consideriamo una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I .

Calcoliamo il campo magnetico \vec{B} che essa genera in un punto P posto sull'asse perpendicolare alla spira e passante per il suo centro.

P si trova a una distanza z dal centro della spira. Scomponiamo $d\vec{B}$ in due compo-



nenti:

- dB_z lungo l'asse z
- dB_p perpendicolare a dB_z : per ragioni di simmetria, la somma di tutti i componenti dB_p è nulla

Usiamo la legge di Biot-Savart per calcolare dB_z :

$$\begin{aligned} dB_z &= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot \cos \alpha \cdot ds}{4\pi \cdot r^2} \\ r^2 &= R^2 + z^2 \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ dB_z &= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Il campo magnetico totale \vec{B} è pari a:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} = \\ &= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \vec{k} = \\ &= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

Nel centro della spira ($r = R$):

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} = \\ &= \mu_0 \cdot \frac{I}{2R} \vec{k}\end{aligned}$$

3.4 Legge di Ampére

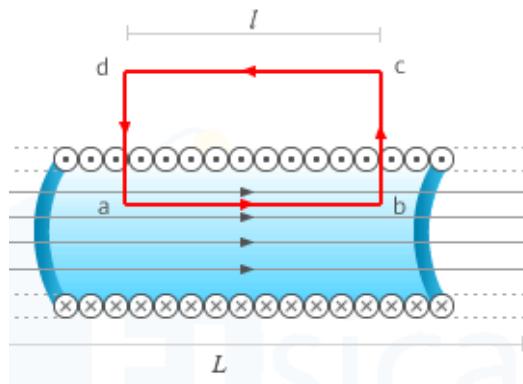
La legge di Ampére ci permette di calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

3.4.1 Solenoide ideale

Un solenoide è caratterizzato da una corrente I che scorre in un filo avvolto a spirale n volte per unità di lunghezza intorno ad un cilindro di raggio a e lunghezza L .

Se $a \ll L$, il campo magnetico \vec{B} è, in prima approssimazione, contenuto all'interno del solenoide, in direzione assiale, con intensità costante. In queste condizioni (ideali),



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} +$$

Il secondo e il quarto integrale sono nulli, in quanto o il campo \vec{B} è parallelo al cammino di integrazione (punti interni) o è nullo (punti esterni).

Il terzo integrale è nullo perché abbiamo assunto \vec{B} nullo all'esterno del solenoide.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot l$$

Utilizzando la legge di Ampére:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{L}$$

3.5 Legge di Faraday-Lenz

Secondo la legge di Faraday-Lenz, a una variazione del flusso del campo magnetico corrisponde una f.e.m. autoindotta che si oppone a tale variazione.

$$-\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = \epsilon_{indotta}$$

3.5.1 Relazione con induttanza

Consideriamo un solenoide, in cui S è la superficie della sezione della spira, l'induttanza è L e la corrente che lo percorre $i(t)$.

$$\begin{aligned} \Phi_S(\vec{B}) &= L \cdot i(t) = \oint \vec{B} \cdot \vec{n} \\ \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} &= L \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Utilizzando la legge di Ampére

$$\epsilon_{indotta} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Capitolo 4

Circuiti

Elementi circuituali in parallelo

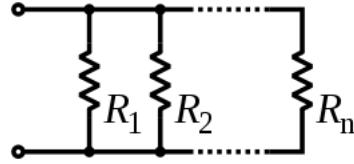
Due o più elementi circuituali collegati in parallelo godono delle seguenti proprietà:

- Ci si può spostare da un capo all'altro della configurazione attraversando un solo elemento.
- Su ciascun elemento appare la stessa differenza di potenziale.
- La corrente si suddivide tra i vari elementi.

Elementi circuituali in serie

Due o più elementi circuituali collegati in serie si godono delle seguenti proprietà:

- Per passare da un capo all'altro della configurazione è necessario attraversare in successione tutti gli elementi.
- La differenza di potenziale applicata agli estremi è pari alla somma delle differenze di potenziali su ciascun elemento.
- Tutti gli elementi sono percorsi dalla stessa corrente.



4.1 Resistori

4.1.1 Resistori collegati in parallelo

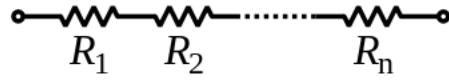
Calcoliamo la resistenza equivalente di due resistori collegati in parallelo:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\Delta V}{R_1} & i_2 &= \frac{\Delta V}{R_2} & i &= i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R} \\ \frac{\Delta V}{R} &= \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

4.1.2 Resistori collegati in serie



Calcoliamo la resistenza equivalente R di due resistori collegati in serie:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= i \cdot R_1 & \Delta V_2 &= i \cdot R_2 & \Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 = i \cdot R \\ i \cdot R &= i \cdot R_1 + i \cdot R_2 \\ R &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

4.2 Condensatori

Un condensatore piano è un sistema costituito da due superfici piane di materiale conduttore, aventi superficie S , poste a distanza d , in modo da costituire due piani paralleli.

Una superficie è caricata positivamente, l'altra negativamente.

4.2.1 Campo elettrico all'interno di un condensatore

All'interno del condensatore è presente un campo elettrico uniforme. Vediamo come calcolarlo.

Per il teorema di Gauss, una superficie piana carica genera un campo elettrico pari a:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Poiché in un condensatore abbiamo due piani carichi sarà:

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Poiché $\sigma = \frac{Q}{S}$ possiamo scrivere:

$$E = \frac{Q}{S \cdot \epsilon_0}$$

Ricordiamo che il vettore campo elettrico è entrante per la lastra con carica negativa, e uscente per la piastra con carica positiva.

Possiamo dedurre che all'esterno delle due lastre il contributo al campo elettrico di ciascuna di esse fa sì che il campo elettrico totale sia nullo; all'interno di esse, invece, il campo elettrico è doppio rispetto a quello generato da ogni singola armatura.

4.2.2 Differenza di potenziale sulle armature del condensatore

Utilizziamo la definizione di energia potenziale (in cui il punto A rappresenta una delle armature e il punto B rappresenta l'altra):

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Poiché i versori che indicano la direzione di \vec{E} e $d\vec{s}$ sono paralleli, il loro prodotto scalare è pari a 1, quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{S \cdot \epsilon_0} \cdot d$$

4.2.3 Capacità di un condensatore piano

La capacità di un condensatore è il rapporto tra la carica che può immagazzinare e la differenza di potenziale sulle armature.

Si tratta di una costante che dipende soltanto dalle caratteristiche fisiche e geometriche del condensatore.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = Q \cdot \frac{S \cdot \epsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d}$$

4.2.4 Cosa accade all'esterno del condensatore

Come abbiamo detto nel paragrafo 4.2.1, il campo elettrico all'esterno del condensatore è nullo. Ciò implica che sia nullo anche il potenziale.

4.2.5 Carica e scarica del condensatore

Processo di carica

La carica si accumula sulle armature del condensatore quando viene applicata una differenza di potenziale $\Delta V = \epsilon$

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \\ Q(t) &= C \cdot \Delta V \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \end{aligned}$$

- $t < 0$: condensatore scarico
- $t \rightarrow 0$: condensatore in carica

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - 1) = 0$$

- $t \rightarrow \infty$: condensatore carico a regime

$$\Delta V = \epsilon$$

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-\infty}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$

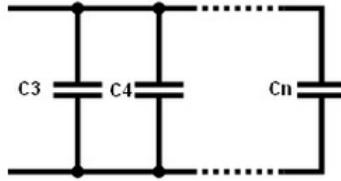
Processo di scarica

La carica accumulata sulle armature viene rilasciata, generando una $\Delta V = \epsilon$.

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}}) \\ Q(t) &= C \cdot \Delta V \cdot (e^{\frac{-t}{RC}}) \end{aligned}$$

- $t < 0$: condensatore carico

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$



- $t \rightarrow 0$: condensatore inizia a scaricarsi

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$

Il condensatore si comporta come un generatore avente una fem pari a

$$\epsilon = \frac{Q_{MAX}}{C}$$

- $t \rightarrow \infty$: condensatore scarico

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-\infty}{RC}}) = 0$$

4.2.6 Condensatori collegati in parallelo

Calcoliamo la capacità equivalente C di due condensatori collegati in serie:

$$q_1 = C_1 \cdot \Delta V \quad q_2 = C_2 \cdot \Delta V \quad q = q_1 + q_2 = C \cdot \Delta V$$

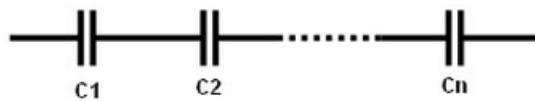
$$C \Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$

$$C = C_1 + C_2$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n condensatori vale:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

4.2.7 Condensatori collegati in serie



Calcoliamo la capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \frac{q}{C_1} & \Delta V_2 &= \frac{q}{C_2} & \Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C} \\ \frac{q}{C} &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \\ \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\end{aligned}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Esercizio 1

Siano dati due vettori in componenti cartesiane: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinare le componenti cartesiane del vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ ed il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{a}$.

Esercizio 2

Due cariche puntiformi $Q_1 = +4q$ e $Q_2 = +2q$ sono poste rispettivamente nei punti $P_1=(0,0)$ m e $P_2=(8,6)$ m di un piano cartesiano (x,y) . Nello stesso piano è presente anche un'altra carica puntiforme $q_0 = +q$ di massa m . Determinare:

- il campo elettrico \vec{E} prodotto da Q_1 e Q_2 nel punto medio M del segmento $\overline{P_1P_2}$;
- le coordinate del punto A del segmento $\overline{P_1P_2}$ in cui deve essere posta q_0 affinché q_0 sia in equilibrio.

Si supponga ora che q_0 venga messa ferma in M e poi lasciata libera di muoversi.

- Qual è la velocità di q_0 quando raggiunge il punto A ?

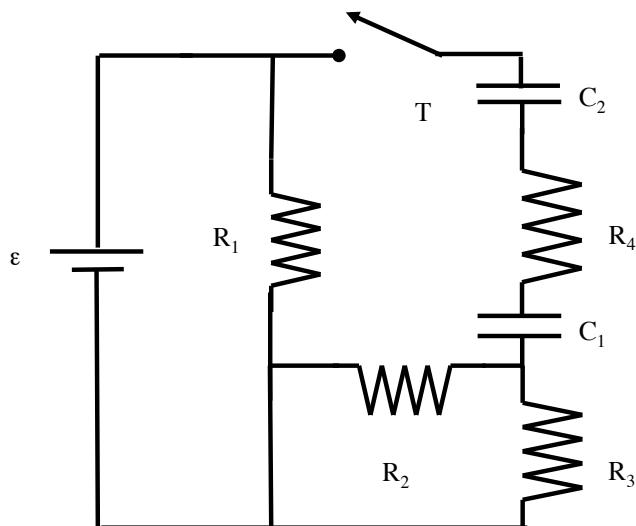
Si assuma $q=1$ mC, $m=1$ kg.

Esercizio 3

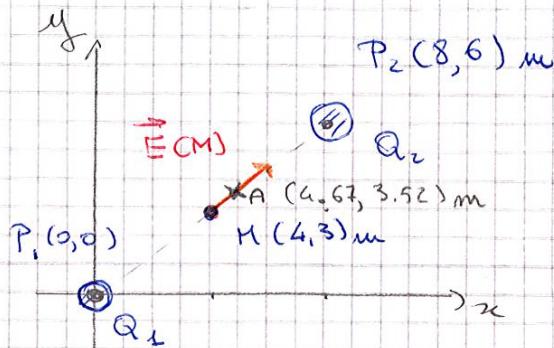
Nel circuito in figura, i resistori valgono $R_1=R_2=R_3=R_4=R=6 \Omega$, i condensatori hanno capacità $C_1=5 \mu\text{F}$, $C_2 = 1.5 C_1$ e la f.e.m. $\mathcal{E}=12$ V. Dopo essere stato a lungo aperto, con i condensatori C_1 e C_2 scarichi, l'interruttore T viene chiuso. Calcolare la carica presente sulle armature del condensatore C_1 e le correnti nei quattro resistori:

- subito prima della chiusura di T ;
- subito dopo la chiusura di T ;
- molto tempo dopo la chiusura di T .

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Esercizio n° 2



Poniamo

$$\overline{MP}_1 = \overline{MP}_2 = d/2$$

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ m} = 10 \text{ m}$$

a) Vettore da P_1 a M

$$\overrightarrow{P_1M} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

Vettore da P_2 a M

$$\overrightarrow{P_2M} = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_{Q_1}(M) = K_e \frac{Q_1}{(d/2)^2} \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_{Q_2}(M) = K_e \frac{Q_2}{(d/2)^2} \left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}(M) = K_e \frac{1}{(d/2)^2} (\underbrace{Q_1 - Q_2}_{2q}) \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right) = K_e \frac{2q}{d^2/4} \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$4q - 2q = 2q \quad |\vec{E}(M)| = \frac{8K_e q}{d^2} = 7.2 \times 10^5 \text{ N/C}$$

b) Poniamo $\overline{AP}_1 = a$ $\overline{AP}_2 = d-a$ a è l'incognita

$$\text{Vettore da } P_1 \text{ a A} \quad \overrightarrow{P_1A} = a \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$\text{Vettore da } P_2 \text{ a A} \quad \overrightarrow{P_2A} = (d-a) \left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_{Q_1}(A) = K_e \frac{Q_1}{a^2} \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right) \quad \text{Campo } \vec{E} \text{ prodotto da } Q_1 \text{ in A}$$

$$\vec{E}_{Q_2}(A) = K_e \frac{Q_2}{(d-a)^2} \left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \right) \quad \text{Campo } \vec{E} \text{ prodotto da } Q_2 \text{ in A}$$

$$\vec{E}_{Q_1}(A) + \vec{E}_{Q_2}(A) = 0 \quad \text{condizione di equilibrio}$$

$$\frac{Q_1}{a^2} + \frac{Q_2}{(d-a)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(d-a)^2 = a^2$$

$$z d^2 - 4ad + z a^2 = 0 \rightarrow a^2 - 4ad + 2zd^2 = 0$$

$$a = z d \pm \sqrt{2zd^2} \quad \text{scelgo la soluzione "-"} \\ \text{perché corrisponde a A} \\ \text{compresso tra } P_1 \text{ e } P_2$$

$$a = d(2-\sqrt{2}) = 5.86 \text{ m}$$

Il punto A ha coordinate

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = a \frac{4}{5} = \frac{4}{5} d(2-\sqrt{2}) = 4.67 \text{ m} \\ y_A = a \frac{3}{5} = \frac{3}{5} d(2-\sqrt{2}) = 3.52 \text{ m} \end{array} \right.$$

c) Il campo elettrico è conservativo

\Rightarrow conservazione dell'energia meccanica

$$(E_{kin} + E_{pot})_M = (E_{kin} + E_{pot})_A$$

- $E_{kin}(M) = 0$ in quanto nel punto M q_0 è ferma

$$E_{pot}(M) = q_0 \int_{Q_1}^{V(M)} + V(M)$$

$$V_{Q_1}(M) + V_{Q_2}(M) = k_e \frac{Q_1}{d/2} + k_e \frac{Q_2}{d/2} = k_e \frac{6q}{d/2} = k_e \frac{12q}{d}$$

- $E_{kin}(A) = \frac{1}{2} m v_A^2$

$$E_{pot}(A) = q_0 \left\{ V_{Q_1}(A) + V_{Q_2}(A) \right\}$$

$$V_{Q_1}(A) + V_{Q_2}(A) = k_e \frac{Q_1}{a} + k_e \frac{Q_2}{d-a} = k_e \frac{4q}{a} + k_e \frac{2q}{d-a}$$

$$= k_e 2q \left\{ \frac{2}{a} + \frac{1}{d-a} \right\} = \quad a(1-a) = d(\sqrt{2}-1)$$

$$= k_e 2q \frac{2ad - 2a + a}{a(d-a)} = k_e 2q \frac{1}{d(\sqrt{2}-1)^2}$$

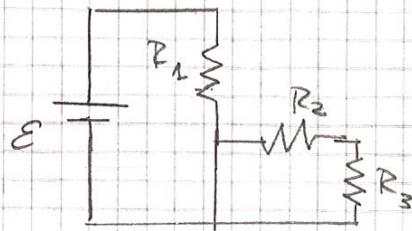
$$v_A^2 = \frac{2}{m} q_0 \left\{ 12k_e \frac{q}{a} - 2k_e \frac{a}{d} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} \right\} = 618 (\text{m/s})^2$$

$$v_A = 24.9 \text{ m/s}$$

Esercizio n°3

a) subito prima della chiusura di T

$$V_{C1} = V_{C2} = 0 \text{ V} \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0 \text{ C}$$



R_1 in serie con R_2 und in parallelo con tratto di circuito con resistenza nulla
→ In R_2 e R_3 non passa corrente

$$i_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{E}{R} = 2 \text{ A}$$

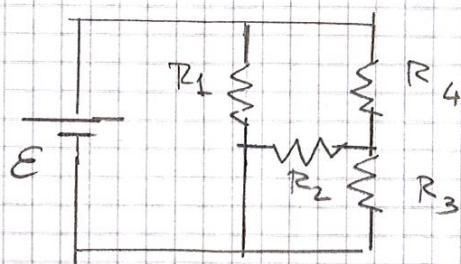
$$i_2 = i_3 = 0 \text{ A}$$

$$i_4 = 0 \text{ A} \quad (\text{T aperto})$$

b) subito dopo la chiusura di T

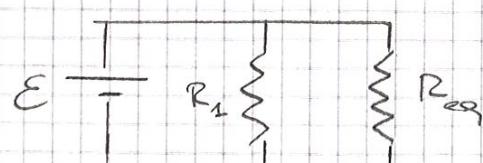
$$\underbrace{V_{C1} = V_{C2} = 0 \text{ V}}_{\text{lo ddp non compie}} \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0 \text{ C}$$

"salti"



$$R_2 \parallel R_3 \rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R}{2}$$

$$R_{23} \text{ in serie con } R_4 \quad R_{eq} = R_{23} + R_4 = \frac{3}{2} R$$



R_1 in parallelo con R_{eq}

$$i_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{E}{R} = 2 \text{ A}$$

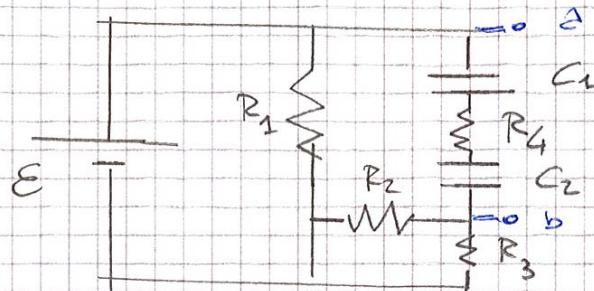
$$i_4 = i_{eq} = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{3/2 R} = \frac{2}{3} \frac{E}{R} = \frac{4}{3} \text{ A}$$

i_4 si ripartisce a metà tra R_2 e R_3

$$i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_4 = \frac{1}{3} \frac{E}{R} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

c) molto tempo dopo (a chiusura di T
 → condensatori si comportano come circuito aperto

$$i_A = 0 \text{ A}$$



HB C_1 in serie con C_2

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3}{5} C_1$$

Per quanto riguarda le correnti, si è nella stessa situazione del quanto a)

$$i_A = \frac{E}{R} = 2 \text{ A}$$

$$i_2 = i_3 = 0 \text{ A}$$

$$i_A = 0 \text{ A}$$

Per quanto riguarda lo ddp di cappi di C_{eq}

$$V_{C_{eq}} = V_a - V_b = E$$

$$Q_{eq} = C_{eq} E = \frac{3}{5} C_1 E = 36 \mu\text{F}$$

$Q_1 = Q_{eq}$ per definizione di condensatore in serie

$$Q_1 = 36 \mu\text{F}$$

Esercizio 1

Siano dati i vettori $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $\vec{a} - 2\vec{b}$ ed il modulo di \vec{a} . Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

NB: Si rammenti che se questo esercizio è sbagliato non si supera l'esame indipendentemente da come sono stati svolti gli altri esercizi.

Esercizio 2

Sia dato un sistema di assi cartesiani xyz . Nell'origine vi è un filo rettilineo di lunghezza infinita perpendicolare al piano xz , ossia parallelo all'asse y . Questo filo è percorso da una corrente $I_1 > 0$ nella direzione $-\vec{j}$. Vi è anche un altro filo rettilineo infinito parallelo all'asse y passante per il punto $(x = 0, z = D)$ ($D > 0$) e percorso da una corrente $I_2 \vec{j}$ con $I_2 > 0$.

Nel punto $P = (x = 0, y = 0, z = d)$, con $0 < D < d$, del piano xz vi è una carica q .

Risolvere i seguenti punti.

- Calcolare la forza per unità di lunghezza che agisce sul filo nell'origine dovuta all'altro filo (si ricordi che la forza è un vettore).
- Calcolare il campo magnetico (si rammenti che il campo magnetico è un vettore) generato dai fili in P .
- Supponendo che la carica q in P abbia velocità $\vec{v} = u\vec{k}$, calcolare la forza (si ricordi che la forza è un vettore) dovuta al campo magnetico che agisce sulla carica.

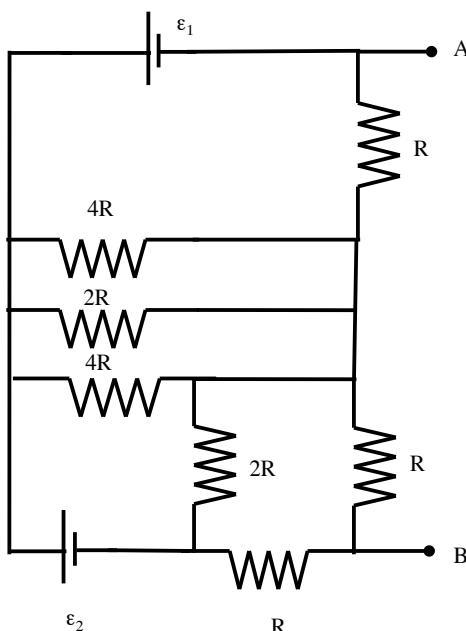
Esercizio 3

Nel circuito in figura $R=50\text{ k}\Omega$ e le f.e.m. valgono $\varepsilon_1=10\text{ V}$ e $\varepsilon_2=20\text{ V}$.

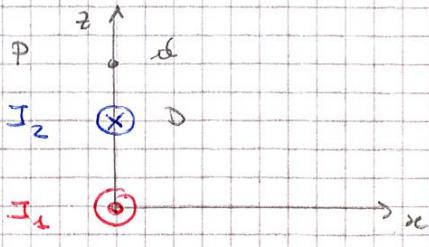
Calcolare:

- la potenza totale dissipata nel circuito;
- la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1 e quella erogata dalla f.e.m. ε_2 ;
- la capacità del condensatore che posto tra i punti A e B ha sulle sue armature, in condizioni stazionarie, una carica di $Q=10\text{ }\mu\text{C}$.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Esempio 2



$$\begin{aligned}
 \text{HB} \quad & \vec{J} \times \vec{B} = \vec{K} \\
 & \vec{J} \times \vec{K} = \vec{L} \\
 & \vec{K} \times \vec{J} = -\vec{L} \\
 & \vec{J} \times \vec{K} = -\vec{J}
 \end{aligned}$$

Correnti circolanti direzionali e verso

$$\begin{aligned}
 -I_1 \vec{J} \\
 +I_2 \vec{J}
 \end{aligned}$$

a) Campo magnetico prodotto da I_2 nell'origine

$$\vec{B}_2(0) = 2K_m \frac{I_2}{D} (-\vec{J})$$

Forza sul filo "1" esercitata dal filo "2"

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{2 \text{ su } 1} &= l I_1 (-\vec{J}) \times \vec{B}_2(0) = l I_1 (-\vec{J}) \times 2K_m \frac{I_2}{D} (-\vec{J}) \\
 &= l \left\{ 2K_m \frac{I_1 I_2}{D} (-\vec{K}) \right\} \\
 \vec{F}_{2 \text{ su } 1} / l &= -2K_m \frac{I_1 I_2}{D} \vec{K}
 \end{aligned}$$

Forza reciproca
(correnti paralleli
verso opposto)

b) Campo prodotto da I_1 in P

$$\vec{B}_1(P) = 2K_m \frac{I_1}{d} (-\vec{J})$$

Campo prodotto da I_2 in P

$$\vec{B}_2(P) = 2K_m \frac{I_2}{d-D} (+\vec{J})$$

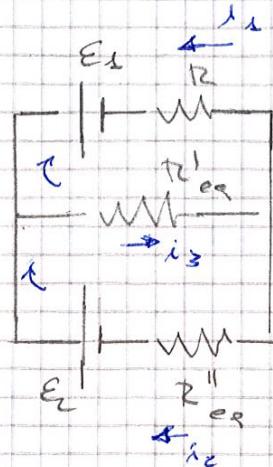
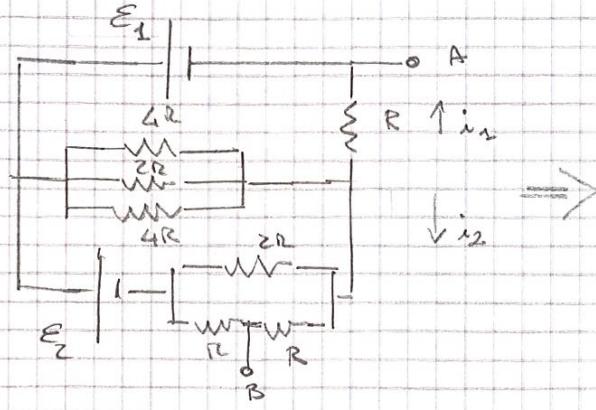
$$\vec{B}_{\text{tot}}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = 2K_m \left\{ -\frac{I_1}{d} + \frac{I_2}{d-D} \right\} \vec{K}$$

c) Forza esercitata sulla canna

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= q \vec{v} \times \vec{B}_{\text{tot}}(P) = q v K \times 2K_m \left[-\frac{I_1}{d} + \frac{I_2}{d-D} \right] \vec{K} \\
 &= 2K_m q v \left\{ -\frac{I_1}{d} + \frac{I_2}{d-D} \right\} \vec{J}
 \end{aligned}$$

Note: il verso effettivo della forza dipende dai segni
di q e del termine $\left\{ -\frac{I_1}{d} + \frac{I_2}{d-D} \right\}$

ES 13



$$\text{Nota } E_2 = 2E_1$$

a) R'_{eq} → parallelo tra $4R$, $2R$, $4R$

$$R'_{eq} = \left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} \right)^{-1} = R$$

R''_{eq} → parallelo tra $2R$ e la serie $R+R$

$$R''_{eq} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{(R+R)} \right)^{-1} = R$$

Usando Kirchhoff

$$(i_3 = i_1 + i_2)$$

$$\begin{aligned} \text{maglia superiore: } & -E_1 + i_2 R + (i_1 + i_2)R = 0 \\ \text{maglia inferiore: } & E_2 - (i_1 + i_2)R - i_2 R = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} -E_1 + 2i_2 R + i_2 R = 0 \\ E_2 - i_1 R - 2i_2 R = 0 \end{cases}$$

$$E_1 - 2E_2 + 3i_2 R = 0 \rightarrow i_2 = 0 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{E_2}{R} = \frac{10 \text{ V}}{50 \Omega} = 0.2 \text{ mA}$$

$$i_3 = i_2$$

Potenza dissipata → legge di Joule

$$\begin{aligned} W_{tot} &= R i_1^2 + R'_{eq} i_3^2 + R''_{eq} i_2^2 = (R'_{eq} + R''_{eq}) i_2^2 = 2R i_2^2 = \\ &= 2R \frac{E_2^2}{R^2} = 2 \frac{E_1^2}{R} = 4 \mu\text{W} \end{aligned}$$

b) Potenza erogata dalle f.t.m.

$$W_1 = E_1 i_1 = E_1 \cdot 0 = 0$$

$$W_2 = E_2 i_2 = E_2 \frac{E_1}{R} = \frac{2E_1^2}{R} = 4 \mu\text{W}$$

$E_2 = 2E_1$

c)

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

Usando la legge di Ohm

$$V_A + i_1 R - i_{2/2} R = V_B \rightarrow V_A - V_B = -i_1 R + \frac{i_2}{2} R = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1}{R} R = \frac{\epsilon_1}{2}$$

$$i_1 = 0 \quad = 5V$$

$$C = \frac{Q}{\epsilon_1/2} = \frac{2Q}{\epsilon_1} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-6} C}{10 V} = 2 \times 10^{-6} F = 2 \mu F$$

Esercizio 1

Siano dati i vettori $\vec{a} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = +4\vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $2\vec{a} + 5\vec{b}$ ed il modulo di \vec{a} . Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Esercizio 2

Nel piano xy di un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) vi è un rettangolo di lati L e ℓ . Il lato di lunghezza L è parallelo all'asse y , quello di lunghezza ℓ è parallelo all'asse x .

Ai vertici di questo rettangolo ci sono quattro cariche puntiformi Q ed il rettangolo si muove con velocità costante $\vec{v} = u\vec{j}$.

In tutto lo spazio vi è un campo magnetico costante $\vec{B} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

Risolvere i seguenti punti.

- Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il rettangolo.
- Calcolare la forza dovuta al campo magnetico che agisce su una qualsiasi delle cariche (si rammenti che la forza è un vettore).
- Assumendo che tutte le cariche abbiano coordinate x ed y positive, calcolare la forza elettrostatica sulla carica più vicina all'origine degli assi.

Esercizio 3

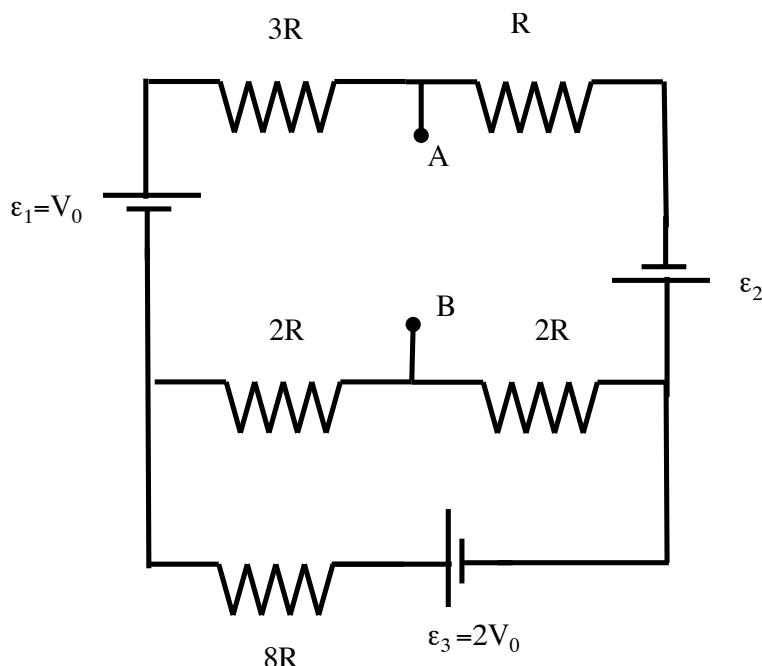
Nel circuito mostrato in figura le f.e.m. valgono rispettivamente $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = V_0$, e $\varepsilon_3 = 2V_0$.

Calcolare in funzione di V_0 e R :

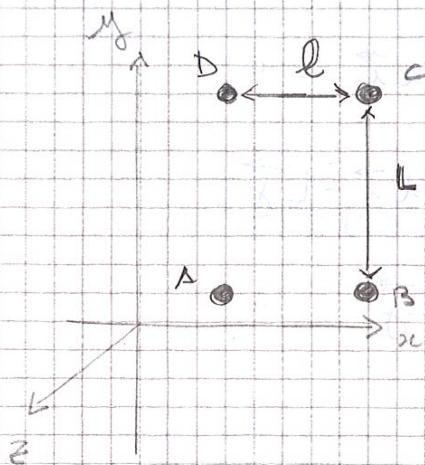
- la potenza totale dissipata nel circuito;
- la differenza di potenziale $V_A - V_B$.

Successivamente si inserisce un resistore di valore R tra i punti A e B e si sostituisce la f.e.m. ε_2 con una nuova f.e.m. $\tilde{\varepsilon}_2$

- Che valore dovrebbe avere $\tilde{\varepsilon}_2$ affinché nel nuovo resistore non passi corrente?



Esercizio



Calcolo campo (x, y)

$$A: (x_A, y_A)$$

$$B: (x_A + l, y_A)$$

$$C: (x_A + l, y_A + L)$$

$$D: (x_A, y_A + L)$$

N.B.: tutte le

cariche hanno $Z=0$

a) Flusso del campo magnetico:

Scegliendo come versore $\vec{m} = \vec{k}$

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_{\text{rettangolo}} \vec{B} \cdot \vec{m} dS = \int_{\text{rettangolo}} [\vec{a} \vec{j} + \vec{b} \vec{k}] \cdot \vec{k} dS = \\ &= \int_{\text{rettangolo}} b dS = b l L\end{aligned}$$

b) forza esercitata dal campo magnetico su una stelle cariche (= forza di Lorentz)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \vec{v} \times \vec{B} = Q (\vec{a} \vec{j}) \times (\vec{a} \vec{j} + \vec{b} \vec{k}) = \\ &= Q \vec{a} \left\{ \vec{a} \vec{j} \times \vec{j} + \vec{b} \vec{j} \times \vec{k} \right\} = Q \vec{a} \vec{b} \vec{i}\end{aligned}$$

c) Il carico più vicino all'origine è A

$$\vec{F}_{B \gg A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$$

$$\vec{F}_{C \gg A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_C|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_C}{|\vec{r}_A - \vec{r}_C|}$$

$$\vec{F}_{D \gg A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_D|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_D}{|\vec{r}_A - \vec{r}_D|}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j} + (z_A - z_B) \vec{k} = -l \vec{i}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_C = (x_A - x_C) \vec{i} + (y_A - y_C) \vec{j} + (z_A - z_C) \vec{k} = -l \vec{i} - L \vec{j}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_D = (x_A - x_D) \vec{i} + (y_A - y_D) \vec{j} + (z_A - z_D) \vec{k} = -L \vec{j}$$

$$\vec{F}_{B_{DNA}} = k_e \frac{Q^2}{l^2} (-\vec{i})$$

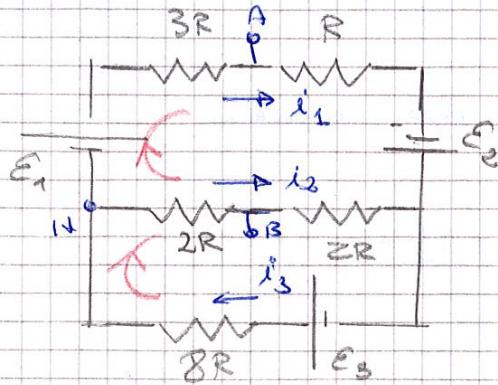
$$\vec{F}_{C_{DNA}} = k_e \frac{Q^2}{(l^2 + L^2)^{3/2}} (-l \vec{i} - L \vec{j})$$

$$\vec{F}_{D_{DNA}} = k_e \frac{Q^2}{L^2} (-\vec{j})$$

Principio di sovrapposizione:

$$\vec{F}_{tot} = -k_e Q^2 \left\{ \left[\frac{1}{l^2} + \frac{l}{(l^2 + L^2)^{3/2}} \right] \vec{i} + \left[\frac{1}{L^2} + \frac{L}{(l^2 + L^2)^{3/2}} \right] \vec{j} \right\}$$

ES #3



Miglior posso in verso orario

Per calcolare la potenza totale dissipata nel circuito occorre calcolare le 3 correnti $i_1, i_2, i_3 \rightarrow$ leggi di Kirchhoff

LdK modo : modo H $i_1 + i_2 = i_3$

LdK maglie : maglia superiore $E_1 - i_1 4R + E_2 + i_2 4R = 0$

LdK maglie : maglia inferiore $-4R i_2 + E_3 - 8R i_3 = 0$

$$\begin{cases} E_1 + E_2 - 4R i_1 + 4R i_2 = 0 \\ E_3 - 8R i_2 - 12R i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4R i_1 + 4R i_2 = -2V_0 \\ -8R i_2 - 12R i_3 = -2V_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = +\frac{1}{10} \frac{V_0}{R} \\ i_2 = -\frac{1}{10} \frac{V_0}{R} \end{cases}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$\begin{aligned} i_3 &= i_1 + i_2 \\ &= \frac{3}{10} \frac{V_0}{R} \end{aligned}$$

a) potenza dissipata (effetto Joule)

$$\begin{aligned} P &= i_1^2 (4R) + i_2^2 (4R) + i_3^2 (8R) = \\ &= \frac{16}{100} \frac{V_0^2}{R^2} 4R + \frac{1}{100} \frac{V_0^2}{R^2} 4R + \frac{9}{100} \frac{V_0^2}{R^2} 8R = \frac{140}{100} \frac{V_0^2}{R} = \frac{7}{5} \frac{V_0^2}{R} \end{aligned}$$

b)

$$V_A - V_B : \quad V_A + i_2 2R + E_1 - i_1 3R = V_B$$

$$V_A - V_B = -E_1 - i_2 2R + i_1 3R = -\frac{4}{10} V_0$$

c) Nel resistore posto fra i punti A e B non passa corrente $\rightarrow V_A - V_B = 0V$

La presenza di un nuovo resistore e di una nuova f.e.m. cambia le correnti calcolate nel quesito "a)"

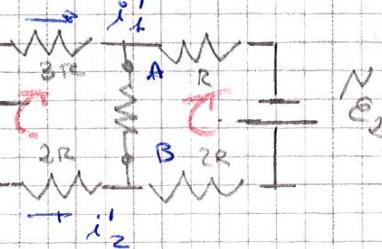
$$i_1' + i_2' = \ddot{i}_3'$$

La condizione $V_A - V_B = 0$ si traduce in due equazioni:

$$\text{I} \quad \left\{ -i_1' R + \dot{E}_2 + i_2' 2R = 0 \right. \quad (\text{DX})$$

$$\text{II} \quad \left\{ -i_1' 3R + \dot{E}_1 + i_2' 2R = 0 \right. \quad (\text{SX})$$

$$\text{III} \quad \dot{E}_3 - 8R i_1' - 12R i_2' = 0$$



Riducendo le equazioni II e III

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1' 3R - \dot{E}_1 - i_2' 2R = 0 \\ \dot{E}_3 - i_1' 8R - i_2' 12R = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3R i_1' - 2R i_2' = V_0 \\ -8R i_1' - 12R i_2' = -2V_0 \end{array} \right. \rightarrow i_1' = \frac{8}{26} \frac{V_0}{R} \quad i_2' = -\frac{1}{26} \frac{V_0}{R}$$

$$i_3' = i_1' + i_2' = \frac{7}{26} \frac{V_0}{R}$$

Sostituendo i_1' e i_2' nell'equazione I

$$\dot{E}_2 = R i_1' - 2R i_2' = +\frac{8}{26} V_0 + \frac{2}{26} V_0 = \frac{10}{26} V_0 = \frac{5}{13} V_0$$

Esercizio 1

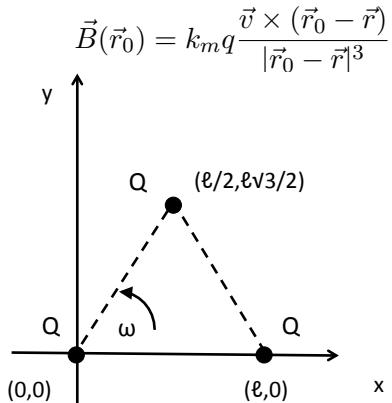
Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y) : $P=(1,2)$, $A=(1,5)$, $B=(5,2)$. Scrivere il vettore \vec{a} che va dal punto P al punto A , il vettore \vec{b} che va dal punto P al punto B ed il vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

Esercizio 2

Nel piano xy di un sistema di coordinate cartesiane xyz vi è un triangolo equilatero di lato ℓ . Un vertice del triangolo è nell'origine. Al tempo $t = 0$ un lato è sull'asse x ed il triangolo ruota attorno all'asse z con velocità angolare costante ω (vedi figura). Ai vertici di questo triangolo ci sono tre cariche elettriche puntiformi Q . In tutto lo spazio vi è un campo magnetico costante $\vec{B} = b(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$.

Calcolare:

- la forza elettrostatica sulla carica nell'origine ed il potenziale elettrostatico prodotto nell'origine dalle altre due cariche, nell'ipotesi che il potenziale all'infinito valga V_0 ;
- la forza totale sul sistema delle tre cariche dovuta al campo magnetico al tempo $t = 0$;
- il campo magnetico nell'origine generato dal moto delle cariche. Si rammenti che il campo magnetico in un punto \vec{r}_0 generato da una carica elettrica q posta in punto \vec{r} e che si muove con velocità \vec{v} è



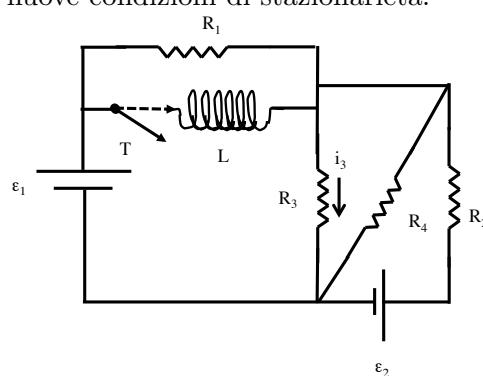
Esercizio 3

Si consideri il circuito mostrato in figura in cui $R_1 = R_2 = R$ e $R_3 = R_4 = 2R$. In una prima fase, l'interruttore T è aperto da molto tempo.

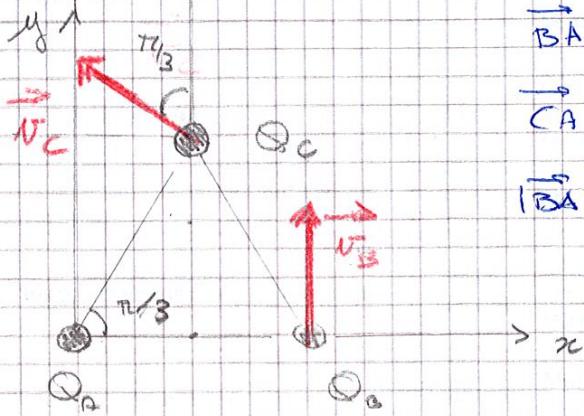
- Calcolare il rapporto tra le due f.e.m. $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ nel caso in cui $\varepsilon_2 = V_0$ e la corrente che percorre R_3 valga $i_3 = V_0/R$.

In una seconda fase si chiude l'interruttore T . Calcolare, in funzione di V_0 e R , la corrente che percorre R_2 :

- subito dopo avere chiuso l'interruttore;
- quando si raggiungono le nuove condizioni di stazionarietà.



Es #2



$$\vec{BA} = (x_A - x_B)\hat{i} + (y_A - y_B)\hat{j} = -l\hat{i}$$

$$\vec{CA} = (x_A - x_C)\hat{i} + (y_A - y_C)\hat{j} = -l/\sqrt{2}(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$$

$$|\vec{BA}| = |\vec{CA}| = l$$

$$a) \vec{F}_{Q_B \text{ su } Q_A} = K_e \frac{Q^2}{e^2} (-\hat{i})$$

$$V_{Q_B}(x,y) = K_e \frac{Q}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + C'$$

$$\vec{F}_{Q_C \text{ su } Q_A} = K_e \frac{Q^2}{e^2} \left[-\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} \right]$$

$$V_{Q_C}(x,y) = K_e \frac{Q}{\left[\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l-y\right)^2\right]^{1/2}} + C''$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = K_e \frac{Q^2}{e^2} \left(-\frac{3}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} \right)$$

Averando posto $C = C' + C''$

$$V_{\text{tot}}(x,y) = K_e Q \left\{ \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l-y\right)^2\right]^{1/2}} \right\} + C$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} V_{\text{tot}}(x,y) = V_\infty = C$$

$$V_{\text{tot}}(x,y) = K_e Q \left\{ \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l-y\right)^2\right]^{1/2}} \right\} + V_\infty$$

$$V_{\text{tot}}(x=0, y=0) = 2K_e \frac{Q}{l} + V_\infty$$

b) Velocità con cui traslano le cariche

$$|\vec{v}_A| = 0$$

$$|\vec{v}_B| = \omega l$$

$$\vec{v}_B = \omega l \hat{j}$$

$$|\vec{v}_C| = \omega l$$

$$\vec{v}_C = \text{col} \left(-\sin \frac{\pi}{3} \hat{i} + \cos \frac{\pi}{3} \hat{j} \right) = \omega l \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} \right)$$

Forza di Lorentz ($\vec{B} = b(-\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j})$)

• sull'carica Q_A

$$\vec{F}_{L,A} = Q \vec{v}_A \times \vec{B} = 0$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ j \times i = -k \\ j \times j = 0 \end{matrix}$$

• sulla carica Q_B

$$\begin{aligned} \vec{F}_{L,B} &= Q \vec{v}_B \times \vec{B} = Q \omega l \hat{j} \times b(-\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j}) = \\ &= Q \omega l b \sqrt{3} \hat{k} \end{aligned}$$

• sulla carica Q_C

$$\vec{F}_{L,C} = Q \vec{v}_C \times \vec{B} = 0 \quad \text{fond. } \vec{v}_C \parallel \vec{B}$$

$$\vec{F}_{L,\text{tot}} = \vec{F}_{L,B} = Q \omega l b \sqrt{3} \hat{k}$$

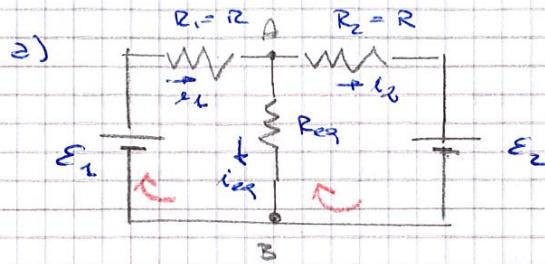
c) Si osservi che Q_B e Q_C producono lo stesso campo magnetico nell'origine (in analogia a due cariche elettriche che percorrono una stessa circolare)

\rightarrow è sufficiente calcolare il contributo di una delle due (ad es. Q_B) e moltiplicare il risultato $\times 2$

$$\vec{B}(Q_B) = K_{\mu\mu} Q \frac{\vec{v}_B \times \vec{BA}}{|BA|^3} = K_{\mu\mu} Q \frac{\omega l \hat{j} \times (-l \hat{i})}{l^3} = K_{\mu\mu} Q \omega \frac{\hat{k}}{l^3}$$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = 2 \vec{B}(Q_B) = 2 K_{\mu\mu} \frac{Q \omega}{l} \hat{k}$$

Esercizio #3



$$R_3 \parallel R_4 \quad R_{eq} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = R$$

$$\text{NB: } i_{eq} = 2 i_3$$

On modifica per vederlo a chi

$$V_A - V_B = R_{eq} i_{eq} = R_3 i_3$$

$$\rightarrow i_{eq} = \frac{R_3}{R_{eq}} i_3 = 2 i_3$$

Usando le leggi di Kirchhoff.

$$\text{LdK mod: } i_1 = i_L + i_{eq}$$

$$\text{LdK maglio ST: } E_1 - R i_1 - R i_{eq} = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 + E_2 - 3 R i_{eq} = 0$$

$$\text{LdK maglio DK: } -E_2 + R i_{eq} - R i_1 = 0$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R} - i_{eq} = \frac{5V_0}{R} - \frac{2V_0}{R} = \frac{3V_0}{R}$$

$$i_{eq} = \frac{E_2}{R} + i_1 = -\frac{V_0}{R} + \frac{2V_0}{R} = \frac{V_0}{R}$$

$$i_2 = \frac{V_0}{R}$$

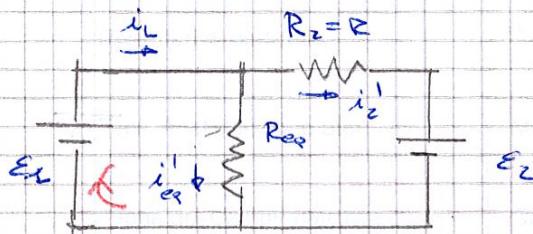
b) immediatamente dopo la chiusura di T il circuito con l'induttore continua a comportarsi come un circuito aperto

→ le correnti non cambiano

→

$$i_2 = \frac{V_0}{R}$$

c) Nelle nuove condizioni di stazarietà, L si comporta come un corto circuito in parallelo con R1 → in R1 non circola più corrente



$$E_1 - R i_2' - E_2 = 0 \quad \text{LdK和睦 esterna}$$

$$i_2' = \frac{E_1 - E_2}{R} = \frac{4V_0}{R}$$

$$i_2' = \frac{4V_0}{R}$$

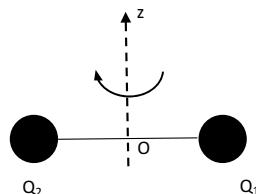
Esercizio 1

Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y) : $P=(2,1)$, $A=(4,1)$, $B=(4,3)$. Scrivere il vettore \vec{a} che va dal punto P al punto A , il vettore \vec{b} che va dal punto P al punto B e calcolare il prodotto scalare $\vec{b} \cdot \vec{a}$.

Esercizio 2

Sia dato un sistema di assi cartesiani (x, y, z) . Una sbarra di lunghezza $2R$ ruota attorno al proprio centro che si trova nell'origine della terna di assi cartesiani. L'asse z coincide con l'asse di rotazione e la velocità angolare di rotazione è costante e vale ω . Agli estremi della sbarra rotante sono fissate due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 . Nell'origine c'è una carica puntiforme q che si muove con velocità $\vec{v} = u\vec{j}$. Calcolare:

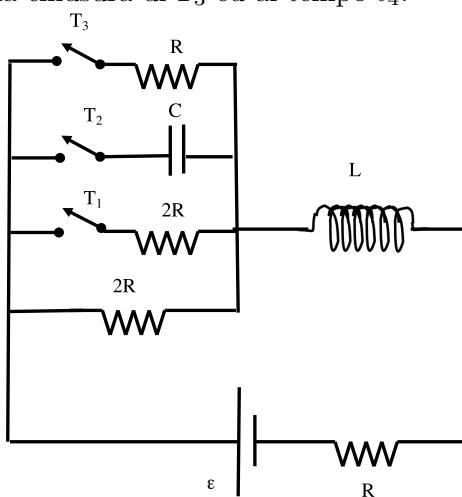
- il potenziale elettrico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine assumendo che il valore del potenziale all'infinito sia V_i ;
- il campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine quando la carica Q_1 si trova in $(R, 0, 0)$;
- il campo magnetico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine quando la carica Q_1 si trova in $(R, 0, 0)$;
- la forza totale agente sulla carica q quando si trova nell'origine.



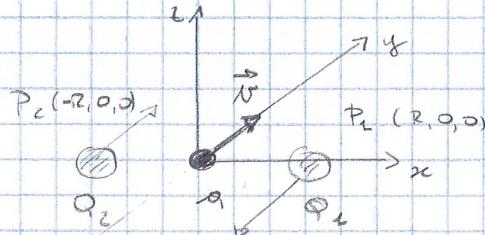
Esercizio 3

Si consideri il circuito mostrato in figura in cui $R=8 \text{ k}\Omega$, $\epsilon=24 \text{ V}$, $C=300 \mu\text{F}$ e $L=1 \text{ mH}$. Inizialmente gli interruttori T_1 , T_2 e T_3 sono aperti da molto tempo ed il condensatore C è scarico. All'istante t_1 si chiude l'interruttore T_1 , all'istante $t_2 \gg t_1$ si chiude l'interruttore T_2 ed infine all'istante $t_3 \gg t_2$ si chiude l'interruttore T_3 . Sia inoltre t_4 il tempo in cui si raggiungono le condizioni stazionarie finali. Calcolare:

- la carica presente sulle armature del condensatore ai tempi t_1 , t_2 , t_3 e t_4 ;
- la corrente che percorre l'induttore ai tempi t_1 , t_2 , t_3 e t_4 ;
- la differenza di potenziale ai capi dell'induttore immediatamente dopo la chiusura di T_1 , dopo la chiusura di T_2 , dopo la chiusura di T_3 ed al tempo t_4 .



Es #2



$$\vec{P}_1 \vec{O} = -R \vec{i}$$

$$\vec{P}_2 \vec{O} = +R \vec{i}$$

a) Potenziale generato nell'origine (uso additività dei potenziali)

$$V = V_{Q_1} + V_{Q_2} = k_e \frac{Q_1}{R} + k_e \frac{Q_2}{R} + V_i$$

In un punto di coordinate $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$V(r) = k_e \frac{Q_1}{\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}}^{1/2} + k_e \frac{Q_2}{\sqrt{(x+R)^2 + y^2 + z^2}}^{1/2} + C \quad \text{lim } V(r) = C \text{ } \forall r \rightarrow \infty$$

b) Campo \vec{E} prodotto nell'origine (uso principio di sovrapposizione)

$$\vec{E}_{Q_1} = k_e \frac{Q_1}{R^2} (-\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = k_e \frac{1}{R^2} (-Q_1 + Q_2) \vec{i}$$

$$\vec{E}_{Q_2} = k_e \frac{Q_2}{R^2} (+\vec{i})$$

c) Campo \vec{B} prodotto nell'origine (uso principio di sovrapposizione)

Q_1 ruotando può essere assimilata ad una spira di raggio R

$$\text{e percorso da una corrente } i_1 = \frac{Q_1}{I\pi} = \frac{Q_1}{2\pi/\omega}$$

$$|\vec{B}_{Q_1}| = 2k_m \frac{\pi i_1}{R} = 2k_m \frac{\pi Q_1}{2\pi/\omega} \frac{1}{R} = k_m \frac{Q_1 \omega}{R}$$

$$\vec{B}_{Q_1} = k_m \frac{Q_1 \omega}{R} (-\vec{k}) \quad \text{regola mano destra}$$

Analogamente Q_2 può essere assimilata ad una spira di

$$\text{raggio } R \text{ percorso da una corrente } i_2 = \frac{Q_2}{I\pi} = \frac{Q_2}{2\pi/\omega}$$

$$|\vec{B}_{Q_2}| = 2k_m \frac{\pi i_2}{R} = k_m \frac{\pi Q_2}{R} \frac{\omega}{\pi}$$

$$\vec{B}_{Q_2} = k_m \frac{Q_2 \omega}{R} (-\vec{k}) \quad \text{regola mano destra}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{Q_1} + \vec{B}_{Q_2} = k_m \omega \frac{1}{R} (Q_1 + Q_2) (-\vec{k})$$

v1) La forza che agisce su q si ottiene dalla
espressione della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

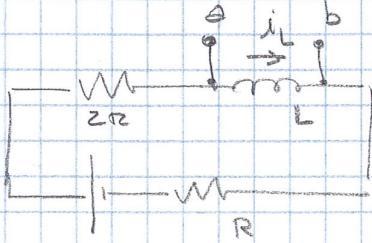
$$q \vec{E} = q k_e \frac{1}{R^2} (-Q_1 + Q_2) \vec{i}$$

$$q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \times \left(k_m \frac{\omega}{R} (Q_1 + Q_2) (-\vec{k}) \right) = \\ = q k_m \mu \frac{\omega}{R} (Q_1 + Q_2) (-\vec{k}) \quad \vec{v} \times (-\vec{k}) = -\vec{i}$$

$$\vec{F} = q \left\{ k_e \frac{-Q_1 + Q_2}{R^2} - \mu k_m \frac{\omega}{R} (Q_1 + Q_2) \right\} \vec{i}$$

Es #3

- Da $t=0$ fino a t_1 (escluso)



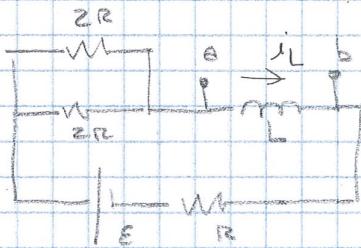
$$N_L = N_a - N_b = 0$$

subito prima
di t_1

$$E - 2R i_L - N_L - R i_L = 0 \quad i_L = \frac{E}{3R} = 1 \text{ mA}$$

$$N_C = 0 \rightarrow Q = C N_C = 0$$

- $t = t_1$



$$i_L \text{ non cambia} \rightarrow i_L = \frac{E}{3R} = 1 \text{ mA}$$

$$E - i_L R' - N_L - i_L R = 0$$

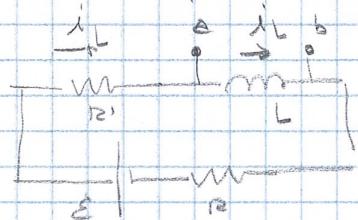
$$N_L = E - i_L (R + R') \rightarrow N_L = \underbrace{\frac{E}{3}}_{\frac{E}{2R}} = 8 \text{ V}$$

$$R' = \frac{(2R)(2R)}{2R + 2R} = R$$

(parallello $2R//2R$)

$$N_C = 0 \rightarrow Q = C N_C = 0$$

- Da t_1 fino a t_2 (escluso)

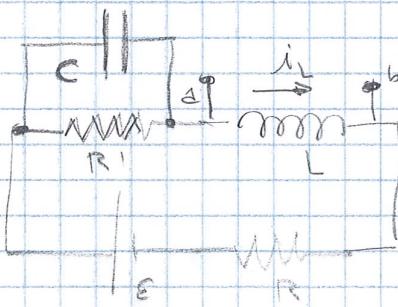


$$N_L = N_a - N_b = 0 \quad (\text{subito prima di } t_2)$$

$$E - i_L R' - N_L - i_L R = 0 \rightarrow i_L = \frac{E}{2R} = 1,5 \text{ mA}$$

$$N_C = 0 \rightarrow Q = C N_C = 0$$

- $E = E_2$



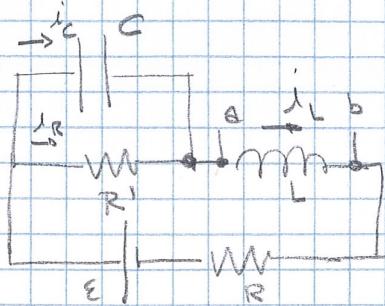
$$i_L \text{ non cambia} \rightarrow i_L = \frac{E}{2R} = 1,5 \text{ mA}$$

$$N_C \text{ non cambia} \rightarrow N_C = 0$$

$$E - N_C - N_L - i_L R = 0 \rightarrow N_L = \frac{E}{2} = 12 \text{ V}$$

$$Q = C N_C = 0$$

- Dopo t_2 e t_3 (escluso)



All'istante t_3 $\int N_L = 0$

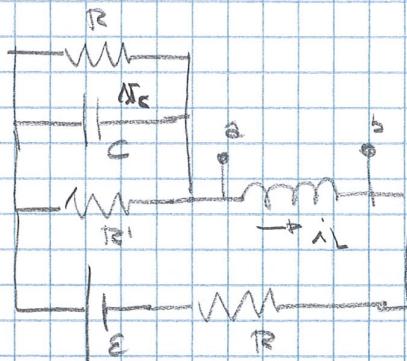
C si comporta come circuito aperto

$$i_L = i_C + i_R \rightarrow i_L = i_R$$

$$E - R' i_R - N_L - R i_R = 0 \quad i_L = \frac{E}{2R} = 1.5 \text{ mA}$$

$$N_C = R' i_L = \frac{E}{2} = 1.2 \text{ V} \quad Q = C N_C = 3.6 \text{ mC}$$

- $t = t_3$



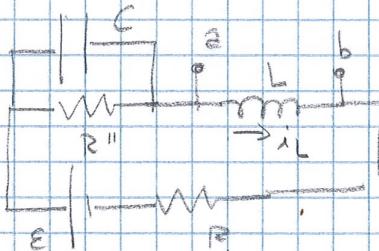
$$i_L \text{ non cambia} \quad i_L = \frac{E}{2R} = 1.5 \text{ mA}$$

$$N_C \text{ non cambia} \quad N_C = \frac{E}{2} \quad Q = C \frac{E}{2} = 3.6 \text{ mC}$$

$$E - N_C - N_L - R i_L = 0 \rightarrow N_L = 0$$

E_{12} E_{23}

- $t \gg t_3$



Combinazioni staziarie

$C \rightarrow$ circuito aperto

$L \rightarrow$ circuito chiuso

$$N_L = 0$$

$$E - R'' i_L - N_L - R i_L = 0 \rightarrow i_L = \frac{2E}{3R} = 2 \text{ mA}$$

$$N_C = i_L R'' = \frac{2E}{3R} \cdot \frac{R}{2} = \frac{E}{3} = 8 \text{ V}$$

$$Q = C N_C = 2.4 \text{ mC}$$

$$R'' = \frac{R' R}{R' + R} = \frac{R}{2}$$

parallelo $R' // R$

Esercizio 1

Siamo dati i vettori $\vec{a} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = +4\vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $2\vec{a} + 5\vec{b}$ ed il modulo di \vec{b} . Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Esercizio 2

Consideriamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z) . Nel piano xy vi è una carica puntiforme q che ruota in senso antiorario con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio R con centro nell'origine del sistema di riferimento. In tutto lo spazio vi è un campo magnetico uniforme che varia linearmente in funzione del tempo: $\vec{B}(t) = a\vec{j} + b t \vec{k}$.

Calcolare:

- il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{j}$;
- il flusso del campo magnetico ad un generico istante t attraverso la circonferenza descritta dal moto della carica q ;
- il vettore forza dovuto al campo magnetico che agisce sulla carica q quando essa si trova in $\vec{r} = R\vec{j}$;
- la forza elettromotrice indotta che è presente sulla circonferenza su cui ruota la carica.

Esercizio 3

Nel circuito in figura i resistori valgono rispettivamente $R_1=R_2=R=2\text{ k}\Omega$ e $R_0=R_3=R_4=R/2$, e la f.e.m. $\mathcal{E}=12\text{ V}$. Il condensatore ha capacità $C=3\mu\text{F}$ ed è inizialmente scarico. Dopo essere stato a lungo aperto, l'interruttore T viene chiuso.

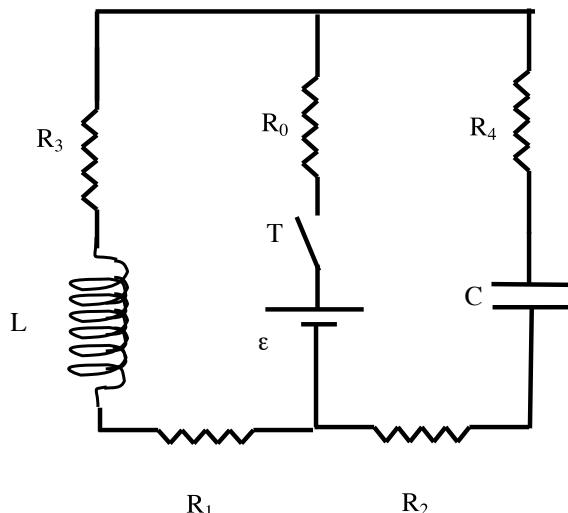
Calcolare la corrente che percorre R_0 , la carica presente su C e la differenza di potenziale ai capi di L :

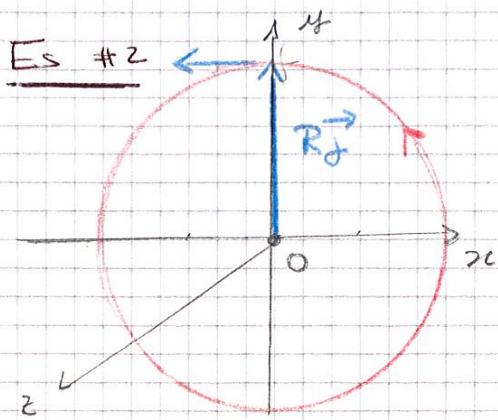
- subito dopo la chiusura di T ;
- molto tempo dopo la chiusura di T .

Si determini inoltre

- quanto vale la corrente che percorre R_0 se i valori di L e C sono tali che, ad un certo istante, la carica presente sulle armature di C è metà del valore finale e, in quello stesso istante, la differenza di potenziale ai capi di L è metà di quella iniziale.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).





a) Vettore velocità nel punto $\vec{v} = \vec{R}\omega$

$$\vec{v} = -\omega \vec{R}$$

(in alternativa: $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$)

$$\vec{N} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{K} \times \vec{R} = -\omega \vec{R} \vec{i}$$

b) Flusso di \vec{B}

Occorre scegliere un versore normale alla superficie della circonferenza.

Scegliendo $\vec{n} = \vec{K}$ (direzione ass. z positiva)

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \int (\vec{a} \vec{j} + b \vec{t} \vec{K}) \cdot \vec{K} dS = \\ &= \int b t dS = b t \pi R^2\end{aligned}$$

c) Forza di Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

con

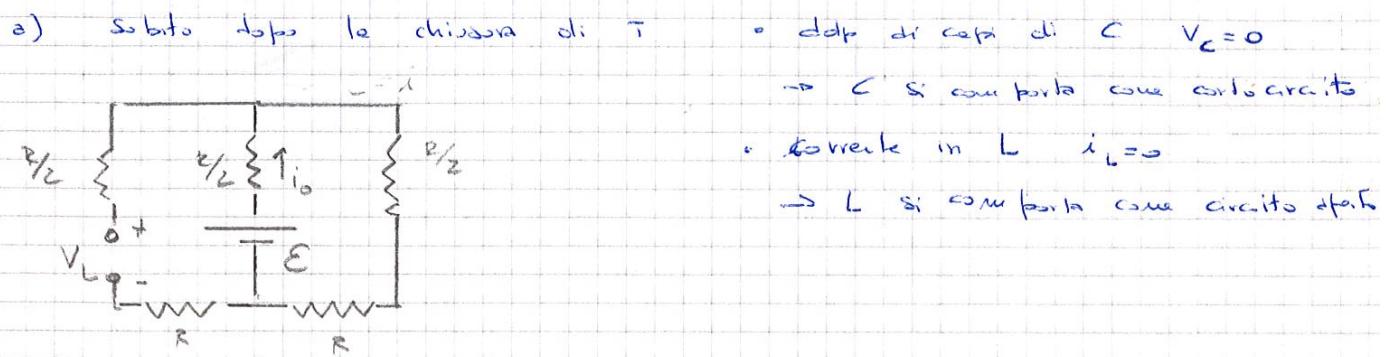
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = -\omega \vec{R} \vec{i} \\ \vec{B} = \vec{a} \vec{j} + b \vec{t} \vec{K} \end{array} \right.$$

$$\vec{F} = q (-\omega \vec{R} \vec{i}) \times (\vec{a} \vec{j} + b \vec{t} \vec{K}) = -\omega R q (\vec{a} \vec{K} - b t \vec{f})$$

d) Legge di Faraday-Lenz

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\phi_B}{dt} = - b \pi R^2$$

Es #3



LdiKirchhoff maglia DX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i(R_4 + R_2) = 0 \quad i = i_0 \quad R_0 = R_4 = \frac{R}{2} \quad R_2 = R$$

$$\mathcal{E} - i_0 (R_0 + R_4 + R_2) = 0$$

$$\mathcal{E} - i_0 2R = 0 \rightarrow i_0 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{12V}{4\text{ k}\Omega} = 3\text{ mA}$$

$$V_c = 0 \rightarrow Q = C \cdot V_c = 0 \text{ C}$$

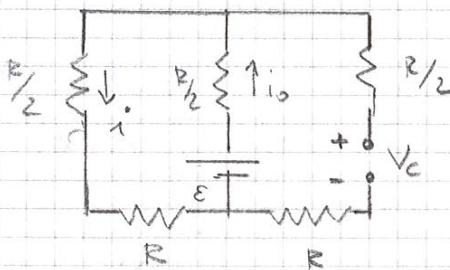
LdiKirchhoff maglia SX

$$V_L + i_0 R_0 - \mathcal{E} = 0$$

$$V_L = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R} \frac{R}{2} = \frac{3}{4} \mathcal{E} \quad V_L = \frac{3}{4} \cdot 12V = 9V$$

b) Pochi tempi dopo la chiusura di T (stazarietà)

- C si comporta come circuito aperto
- L si comporta come corto circuito $\rightarrow V_L = 0$



LdiKirchhoff maglia SX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i(R_3 + R_1) = 0 \quad i = i_0 \quad R_0 = R_3 = \frac{R}{2} \quad R_1 = R$$

$$\mathcal{E} - i_0 (R_0 + R_3 + R_1) = 0$$

$$\mathcal{E} - i_0 2R = 0 \rightarrow i_0 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{12V}{4\text{ k}\Omega} = 3\text{ mA}$$

$$V_L = 0V$$

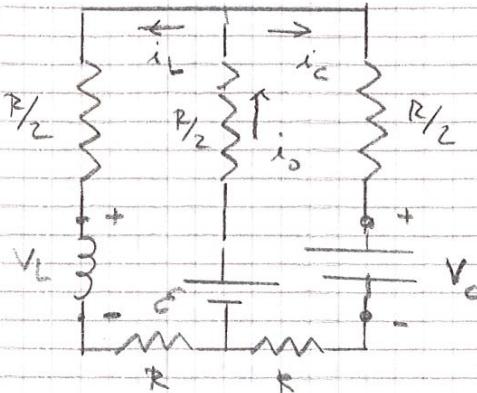
LdiKirchhoff maglia DX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - V_c = 0$$

$$V_c = \mathcal{E} - i_0 R_2 = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R} \frac{R}{2} = \frac{3}{4} \mathcal{E} \quad V_c = \frac{3}{4} \cdot 12V = 9V \rightarrow Q = C \cdot V_c = 18\mu\text{C}$$

c) Nell'istante descritto al punto c

- al capo di C è presente una ddp $V_C = \frac{3}{8} \mathcal{E}$
- al capo di L è presente una ddp $V_L = \frac{3}{8} \mathcal{E}$



raglia SX

$$i_3 R_3 + V_L + i_3 R_3 + i_0 R_0 - \mathcal{E} = 0$$

$$i_3 (R_1 + R_3) + i_0 R_0 - \mathcal{E} + \frac{3}{8} \mathcal{E} = 0$$

$$\frac{3}{2} R i_3 + R/2 i_0 - \frac{5}{8} \mathcal{E} = 0$$

raglia DX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i_4 R_4 - V_C - i_4 R_2 = 0$$

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i_4 (R_2 + R_4) - \frac{3}{8} \mathcal{E} = 0$$

$$\frac{5}{8} \mathcal{E} - i_0 R/2 - i_4 \frac{3}{2} R = 0$$

L'equazione dei nodi:

$$i_0 = i_3 + i_4$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} R i_3 + R/2 i_0 - \frac{5}{8} \mathcal{E} = 0 \\ \frac{5}{8} \mathcal{E} - i_0 R/2 - \frac{3}{2} R i_4 = 0 \end{cases}$$

$$i_0 = i_3 + i_4$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 3 i_3 + i_0 - \frac{5}{4} \mathcal{E}/2 = 0 \\ \frac{5}{4} \mathcal{E}/2 - i_0 - \frac{3}{4} i_4 = 0 \end{cases}$$

$$i_3 = i_0 - i_4$$

Le cui soluzioni sono

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{12V}{4k\Omega} = 3 \text{ mA}$$

$$i_3 = + \frac{\mathcal{E}}{4R} = + \frac{12V}{8k\Omega} = + 1.5 \mu\text{A}$$

$$i_4 = + \frac{\mathcal{E}}{4R} = \frac{12V}{8k\Omega} = 1.5 \mu\text{A}$$

Esercizio 1

Siamo dati i vettori $\vec{a} = 3\vec{i} - 14\vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcolare il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, il modulo di \vec{s} ed il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Esercizio 2

Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz . Nel piano xy vi è una carica puntiforme q di massa m che ruota in senso antiorario con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio R con centro in $(R, 0, 0)$. Risolvere i seguenti punti.

- Calcolare il vettore velocità della carica q quando essa si trova nell'origine.
- Calcolare il vettore accelerazione della carica q quando essa si trova nell'origine.
- Calcolare il vettore campo elettrico generato dalla carica q nel centro della circonferenza quando essa si trova nell'origine.
- Calcolare il potenziale elettrico all'infinito se il potenziale elettrico nel centro della circonferenza è nullo.
- Calcolare il vettore campo magnetico necessario per far muovere la particella carica lungo l'orbita circolare con velocità angolare costante.

Esercizio 3

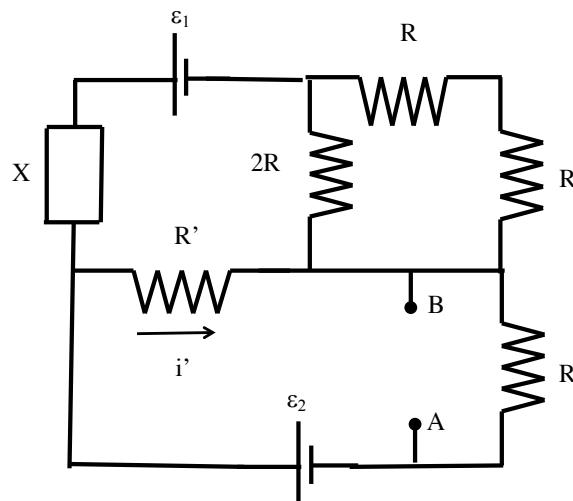
Nel circuito mostrato in figura $R=1 \text{ k}\Omega$, $R'=R/2$, $\varepsilon_1=6 \text{ V}$ e $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Il circuito è in condizioni stazionarie. Si calcoli la corrente i' nel resistore R' e la differenza di potenziale $V_B - V_A$ nei seguenti casi:

- X è un induttore di induttanza $L=100 \text{ mH}$;
- X è un condensatore di capacità $C=100 \text{ nF}$.

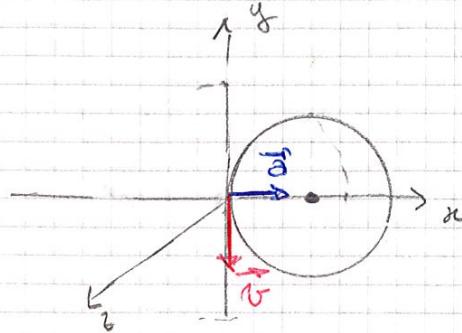
Si determini inoltre

- il valore di $V_B - V_A$ quando X è una f.e.m. tale per cui $i'=0$.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



a) Come si vede dalla figura la velocità della carica è $\vec{v} = -\omega R \vec{f}$

Alla alternativa si può usare la definizione del vettore

$$\text{Velocità angolare} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \vec{k}) \times (-R \vec{i}) = -\omega R \vec{f}$$

b) Seconce il moto è circolare uniforme (ω è costante)

l'unica componente dell'accelerazione è quella centripeta

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{i} = \omega^2 R \vec{i}$$

c) Campo \vec{E} prodotto da q

$$\vec{E} = K_e q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

$$= K_e \frac{q \vec{i}}{R^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= O \vec{i} + O \vec{j} \\ \vec{r} &= R \vec{i} + O \vec{j} \\ \vec{r} - \vec{r}_0 &= R \vec{i} \end{aligned}$$

d) Potenziale nel centro della circonference

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} + V_0$$

$$r=R \quad V(R) = K_e \frac{q}{R} + V_0 = 0 \quad \rightarrow V_0 = -K_e \frac{q}{R}$$

Potenziale all'infinito

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} - K_e \frac{q}{R}$$

$$V_{\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = -K_e \frac{q}{R}$$

e) Campo magnetico per far muovere la partecile di moto circolare uniforme \rightarrow Deve essere perpendicolare al piano $x-y$

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow m \vec{a}_c = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow m \omega R = q v B$$

$\underbrace{\text{Forza}}_{\text{centripeta}} \quad \underbrace{\text{Forza di}}_{\text{Lorenz}}$

$$\rightarrow B = \frac{mv}{q}$$

(moto di circolazione)

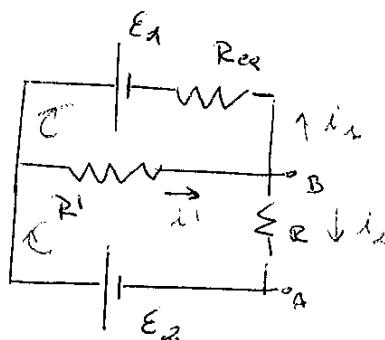
Per quanto riguarda il verso $q \vec{v} \times \vec{B}$ deve esser diretto lungo $+z$ (conse acc. centripeta)

$$q (-\omega R \vec{j}) \times \vec{B} \vec{k} = -q \omega R B \vec{i} \rightarrow \begin{cases} q > 0 & B < 0 \\ q < 0 & B > 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{m \omega}{q} \vec{k}$$

Esercizio 3

a) $X = L$ stazionarietà \Rightarrow corto circuito



$R_{eq} = (R \text{ in serie con } R) \text{ in parallelo con } 2R$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R+2R} \right)^{-1} = R$$

LdK maglia sup.

$$-E_1 + i_1 R_{eq} + i^1 R^1 = 0 \quad | -E_1 + i_1 R + i^1 R/2 = 0$$

LdK maglia int.

$$+E_2 - i^1 R^1 - i_2 R = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2E_2 - i^1 R/2 - i_2 R = 0 \\ i_1 = i^1 - i_2 \end{array} \right.$$

LdK nodi

$$i^1 = i_1 + i_2$$

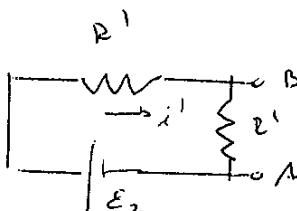
Risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} i^1 = \frac{3E_2}{2R} = 9 \text{ mA} \\ i_2 = \frac{5E_1}{4R} = 7.5 \text{ mA} \end{array} \right.$$

$$V_B - i_2 R = V_A$$

$$V_B - V_A = i_2 R = \frac{5E_1}{4} = 7.5 \text{ V}$$

b) $X = C$ stazionarietà \Rightarrow circuito aperto



Corta solo la maglia int.

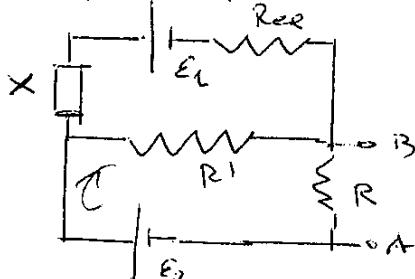
$$E_2 - i^1 (R^1 + R) = 0$$

$$i^1 = \frac{2E_2}{R^1 + R} = \frac{2E_2}{\frac{3}{2}R} = \frac{4}{3} \frac{E_2}{R} = 8 \text{ mA}$$

$$V_B - V_A = i^1 R = \frac{4}{3} \frac{E_2}{R} R = 8 \text{ V}$$

c) Se in R' non circola corrente $\rightarrow X$ è una f.e.m.

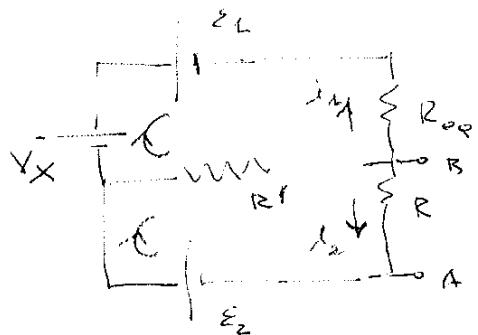
Per trovare $V_B - V_A$ non è necessario determinare il valore di questa f.e.m. (*) ma è sufficiente considerare la maglie ref.



$$\text{LdK} \quad E_2 - i^1 R^1 - (V_B - V_A) = 0$$

$$V_B - V_A = E_2 = 12 \text{ V}$$

(+) Nel caso si voglia determinare il valore della f.e.m. V_x



$$\left. \begin{array}{l} \text{Maglie super.} \\ \text{Maglie inf.} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} V_x - \varepsilon_1 + i_1 R_{eq} = 0 \\ \varepsilon_2 - i_2 R = 0 \\ i_1 + i_2 = 0 \end{array}$$

$$\text{risolvendo il sistema} \quad i_2 = 2\varepsilon_1 / R \Rightarrow V_x = \varepsilon_1 - i_1 R_{eq} = 3\varepsilon$$

$$V_B - V_A = i_2 R = 2\varepsilon_1 = 12 \text{ V}$$

Esercizio 1

Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y) : $P=(0,0)$, $A=(1,3)$, $B=(2,1)$. Determinare il vettore \vec{a} che va dal punto P al punto A , il vettore \vec{b} che va dal punto P al punto B e la lunghezza del vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

Esercizio 2

Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz . Nel piano (x, y) vi è una carica elettrica puntiforme q di massa m che ruota in senso orario su una circonferenza di raggio R con velocità uniforme. Quando essa si trova nell'origine la sua velocità è $\vec{v} = -\frac{1}{2}u\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}u\vec{j}$, dove u è un parametro noto. Calcolare:

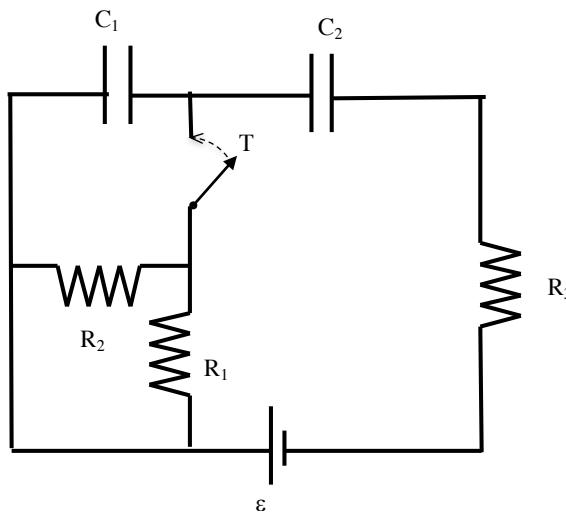
- il vettore accelerazione della carica q quando essa si trova nell'origine;
- il modulo della velocità angolare della carica q quando essa si trova nell'origine;
- il numero di passaggi al secondo della carica q per l'origine;
- la corrente associata al moto della carica q ;
- il vettore campo magnetico generato dalla carica q nel centro della circonferenza;
- il vettore campo magnetico necessario per far muovere la carica q lungo l'orbita circolare;
- il potenziale elettrico all'infinito prodotto dalla carica q , quando essa si trova nell'origine, se il potenziale elettrico nel centro della circonferenza è nullo.

Esercizio 3

Nel circuito mostrato in figura $R_1=R_2=R$, $R_3=2R$, $C_1=C_2=C$ e $\varepsilon=V_0$. Inizialmente il circuito è in condizioni stazionarie con l'interruttore T aperto. Al tempo t_0 si chiude l'interruttore T . Calcolare la carica presente su C_1 , la carica presente su C_2 e la corrente in R_1 :

- subito prima di chiudere T ;
- subito dopo avere chiuso T ;
- quando viene raggiunta nuovamente la stazionarietà.

$(R=500 \Omega$, $C=10 \text{ nF}$, e $V_0=6 \text{ V}$. Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



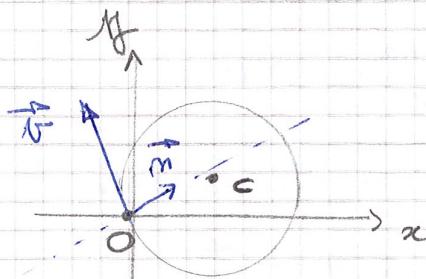
Es #2

$$\vec{N} = -\frac{\mu}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\vec{j}$$

$$\text{Direzione di } \vec{N} \quad \vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Direzione \perp a \vec{N} (su cui si trae il centro della circonferenza)

$$\vec{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$



Coordinate del centro della circonferenza

$$C: x_c = R\frac{\sqrt{3}}{2}, y_c = R\frac{1}{2}$$

a) vettore accelerazione (HB accelerazione = accelerazione centripeta)

$$|\vec{a}_c| = \frac{\mu^2}{R} \quad \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \frac{3}{4}\mu^2 = \mu^2$$

$$\vec{a}_c = |\vec{a}_c| \vec{m} = \frac{\mu^2}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right)$$

b) velocità tangenziale

$$|\vec{v}| = \omega R \rightarrow \omega = \frac{|\vec{N}|}{R} = \frac{\mu}{R}$$

c) passaggi al secondo per il punto O (0,0) \Rightarrow frequenze di rivoluzione

$$2\pi f = \omega \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu}{2\pi R}$$

d) corrente associate al moto

$$i = qf = \frac{q\mu}{2\pi R}$$

e) campo magnetico prodotto da q

Il voto di q assimilabile a corrente di percorrenza
Spira circolare

$$|\vec{B}| = 2K_m \frac{i\pi R^2}{R^3} = 2K_m \frac{q\mu}{2\pi R} \quad \frac{i}{R} = K_m \frac{q\mu}{R^2}$$

Direzione di \vec{B} : regola mano DX

$$\vec{B} = K_m \frac{q\mu}{R} (-\vec{i}) \quad (\vec{i} \text{ verso asse } z)$$

f) Campo magnetico necessario per fare muovere q lungo la circonferenza

$$q \vec{v} \times \vec{B} = \frac{mv^2}{R} \vec{m}$$

\vec{F} Lorentz \vec{F} centrif.

$\rightarrow \vec{B}$ diretto lungo asse z

Passando ai moduli

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} = \frac{mu}{qR}$$

Disequazione di $B \rightarrow$ regola moltiplicativa

$$\vec{B} = \frac{mu}{qR} \vec{m}$$

g) $V(x,y) = k_e \frac{q}{(x^2+y^2)^{1/2}} + C$ potenziale in un punto generico
di coordinate (x,y)

Per determinare la costante additiva C , si osserva la condizione
che

$$V(x,y) = 0 \rightarrow k_e \frac{q}{R} + C = 0$$

$$C = -k_e \frac{q}{R}$$

lim $V(x,y) = C = -k_e \frac{q}{R}$

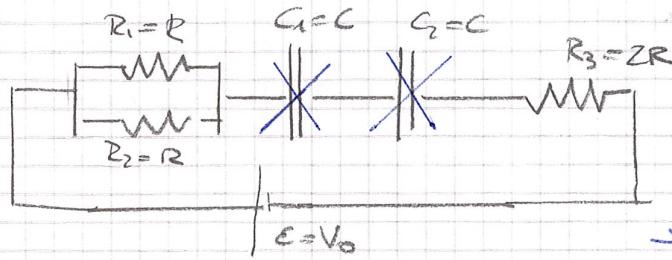
$x \rightarrow \infty$

$y \rightarrow \infty$

Il campo \vec{E} è il gradiente del potenziale V

Es #3

a) Circuito prima della chiusura di T



C_1 e C_2 si comportano
come circuiti aperti
(capacità in serie)

$$\rightarrow \dot{i}_1 = i(R_1) = 0$$

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C}{2}$$

La d.d.p. sulle armature di C_{eq} è pari a V_0

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = CV_0/2$$

Per sfarzare di condensatori in serie, questo stesso carica
è presente sia su C_1 sia su C_2

$$Q_1 = CV_0/2 = 30 \text{ mC} \quad V_{d1} = \frac{V_0}{2}$$

$$Q_2 = CV_0/2 = 30 \text{ mC} \quad V_{d2} = \frac{V_0}{2}$$

b) Subito dopo la chiusura di T

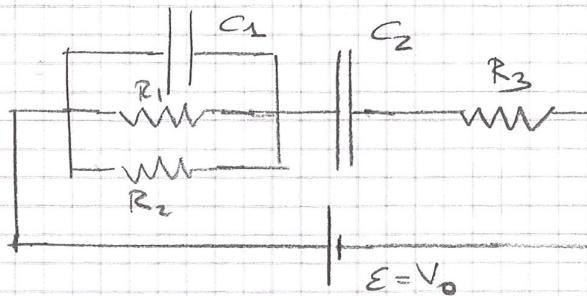
→ d.d.p. e carica preserte sulle armature restano invariate

$$Q_1 = CV_0/2 = 30 \text{ mC}$$

$$Q_2 = CV_0/2 = 30 \text{ mC}$$

I condensatori entrano in coniazione

Nota: C_1, R_1, R_2 sono in parallelo tra loro \Rightarrow



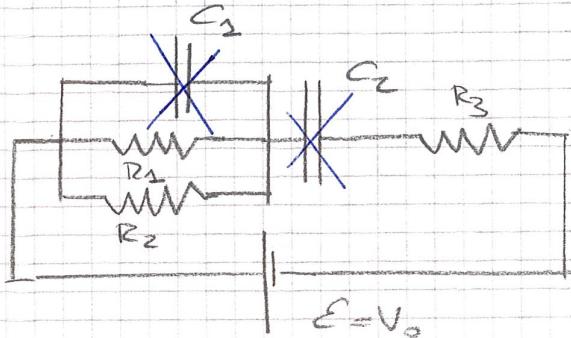
la d.d.p. ai capi di R_1
è pari alla d.d.p. ai capi
di C_1

$$\dot{i}_1 R_1 = V_{d1} = \frac{V_0}{2}$$

$$i_1 = \frac{V_{d1}}{R_1} = \frac{V_0}{2R} = 6 \text{ mA}$$

c) molto tempo dopo la chiusura di T, C_1 e C_2 si comportano come circuiti aperti

$$i_1 = i(R_4) = 0$$



\Rightarrow ddp di capi di R_1 è lo stesso ddp presente ai capi di C_1

$$V_{C1} = i_1 R_1 = 0 \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0$$

Per trovare V_{C2} si può usare L'Kirchhoff per le maglie

$$E - i_1 R_1 - V_{C2} - i_3 R_3 = 0$$

$$\text{Siccome } i_1 = i_3 = 0 \rightarrow V_{C2} = E = V_o \rightarrow Q_2 = C_2 V_{C2} = C V_o = 60 \text{ mC}$$

Ricapitolando

	a)	b)	c)
i_1	0	$V_o / 2R$	0
Q_1	$C V_o / 2$	$C V_o / 2$	0
Q_2	$C V_o / 2$	$C V_o / 2$	$C V_o$

Esercizio 1

Consideriamo il vettore $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ ed il vettore \vec{v} che va dal punto $P = (2, -2\sqrt{3})$ all'origine $O = (0, 0)$. Calcolare \vec{u}^2 ed il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Esercizio 2

Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz . Nel piano xy vi è una carica q che ruota in senso orario su una circonferenza di raggio R con modulo della velocità costante. Quando essa si trova nell'origine degli assi O la sua accelerazione è $\vec{a} = b\vec{i} + \sqrt{3}b\vec{j}$.

Calcolare:

- il modulo dell'accelerazione e dire quali dimensioni ha la costante b ;
- il modulo della velocità angolare quando la carica q si trova nell'origine O ;
- il vettore velocità della carica q quando essa si trova nell'origine O ;
- il numero di passaggi al secondo della carica per l'origine O ;
- il vettore campo magnetico generato dalla carica ad un'altezza $z = h$ sull'asse passante per il centro della circonferenza percorsa da q ;
- il potenziale elettrico all'infinito se il potenziale elettrico nel punto sulla circonferenza diametralmente opposto all'origine O è nullo.

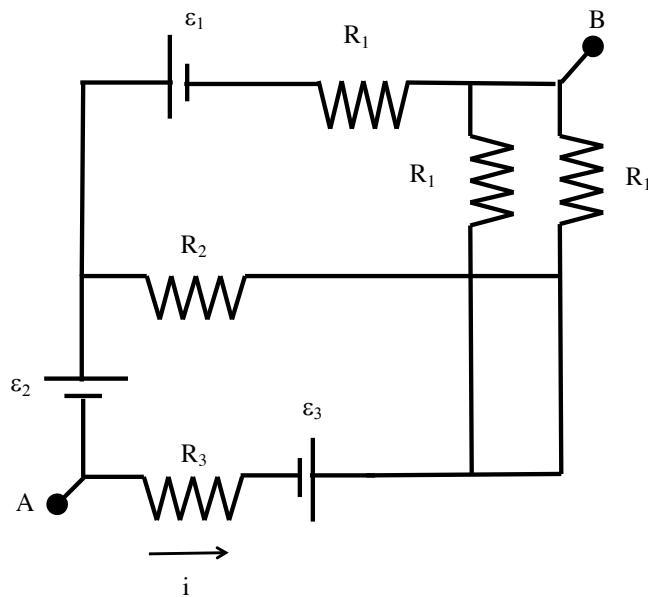
Esercizio 3

Nel circuito mostrato in figura le resistenze valgono $R_1=R$, $R_2=R/2$, $R_3=3R$ e le f.e.m. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=V_0$ e $\varepsilon_3=2 V_0$.

Calcolare:

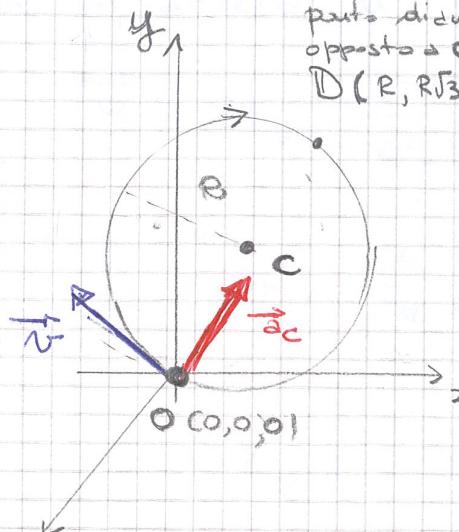
- la corrente i nel resistore R_3 specificando se il verso è concorde a quello indicato in figura;
- la differenza di potenziale $V_B - V_A$;
- la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1 .

($R=1 \Omega$, e $V_0=27$ V. Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



ES 42

a)



punto di centro lungo
opposto a \vec{v}
 $D(R, R\sqrt{3}, 0)$

moto circolare uniforme

$$\vec{a} = \vec{a}_c \quad \text{acc. centripetale}$$

$$\vec{m}_N = \frac{\vec{a}_c}{|\vec{a}_c|}$$

$$|\vec{a}_c| = |\vec{a}| = \sqrt{b^2 + 3b^2} = 2b \quad (26)$$

$$\Rightarrow \vec{m}_N = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$$

Dimensionalmente

$$[a_c] = L/T^2$$

$$[b] = [a_c] = L/T^2$$

b) $a_c = \omega^2 R \quad \omega = \sqrt{a_c/R} = \sqrt{2b/R} \quad \text{Velocità angolare}$

c) Vettore velocità

$$|\vec{v}| = \omega R = \sqrt{2bR}$$

\vec{v} è perpendicolare a \vec{m}_N (\Rightarrow tangente alla circonferenza)

Vettore tangente alla circonferenza in O:

$$\vec{m}_T = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \vec{m}_T = \sqrt{2bR} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

d) Numero di passaggi al secondo per l'angolo θ = frequenza

$$2\pi f = \omega \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2b/R}$$

e) La conica in moto sullo stesso fermezza equivale ad una spira circolare di raggio R percorsa dalla conica

$$i = qf = \frac{\varphi}{2\pi} \sqrt{2b/R}$$

Il campo magnetico prodotto dall'azere delle spine di un'altezza h vale

$$\vec{B} = 2K_m \frac{i\pi R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \underbrace{(-\vec{K})}_{\text{regola mano dx}} =$$

$$= 2K_m \frac{q}{2\pi} \underbrace{\sqrt{\frac{2b}{R}}}_{i} \frac{\pi R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \underbrace{(-\vec{K})}_{\text{ }} =$$

$$= -K_m q \sqrt{\frac{2b}{R}} \left(\frac{R}{R^2 + h^2} \right)^{3/2} \vec{K}$$

f) Potenziale prodotto da carica puntiforme

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} + V_0$$

Per determinare V_0 si utilizza la condizione

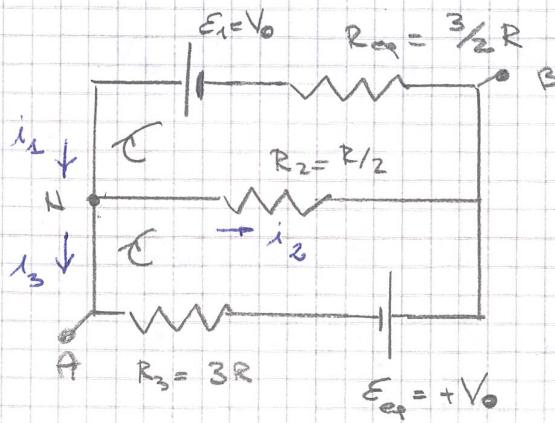
$$V(r=2R) = 0 \rightarrow V_0 = -K_e \frac{q}{2R}$$

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} - K_e \frac{q}{2R}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = -K_e \frac{q}{2R}$$

Esercizio 3

a) Il circuito si può semplificare nel modo seguente



R_{eq} : resistenza equivalente alle 3 resistenze R_1 e R_2 , in serie con R_3 : $R_{eq} = R + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{3}{2}R$

$$E_{eq} = E_3 - E_2 = V_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_2 + i_3 \end{array} \right.$$

Ld Kirchhoff modo N

$$\left\{ \begin{array}{l} -E_1 + i_1 R_{eq} + i_2 R_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ld Kirchhoff maglie superiore

$$-E_{eq} + i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0$$

Ld Kirchhoff maglie inferiore

$$\left\{ \begin{array}{l} -V_0 + (i_2 + i_3) \frac{3}{2}R + i_2 R/2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -V_0 + i_3 3R - i_2 R/2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ZR i_2 + \frac{3}{2}R i_3 = V_0 \end{array} \right.$$

$$\frac{R/2 i_2 - 3R i_3}{27/2 R i_3 = 5V_0} = -V_0 \quad \times 4 \quad \leftarrow \text{sottraggo membro a membro}$$

$$i_3 = \frac{10}{27} \frac{V_0}{R} = \frac{10 \cdot 22V}{27 \cdot 152} = 10 A$$

$$i = i_3 = \frac{10}{27} \frac{V_0}{R} = 10 A \quad \text{concorda al verso di } i \text{ nel testo del problema}$$

$$i_2 = \frac{2}{9} \frac{V_0}{R} = 6 A$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{16}{27} \frac{V_0}{R} = 16 A$$

b) D.D.P. Tra B e A \rightarrow legge di Kirchhoff sulla maglia esterna

$$V_A + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + i_1 R_1 = V_B$$

$$V_B - V_A = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + i_1 R_1 = V_o - V_o + \underbrace{\frac{16}{27} \frac{V_o}{R}}_{R_1} = \frac{16}{27} V_o = 16 \text{ V}$$
$$i_1 = \frac{16}{27} \frac{V_o}{R}$$

c) Potenza erogata dalla fonte \mathcal{E}_1

$$W_1 = \mathcal{E}_1 \cdot i_1 = V_o \frac{16}{27} \frac{V_o}{R} = \frac{16}{27} \frac{V_o^2}{R} = 432 \text{ W}$$

Esercizio 1

Siamo dati i vettori $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$. Calcolare il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, il vettore differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ed il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{d}$.

Esercizio 2

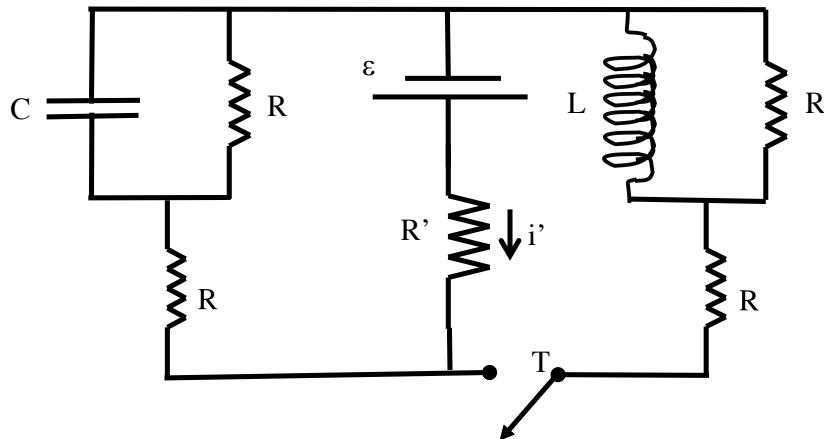
Consideriamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z) . Nel piano xz vi è una carica puntiforme q che ruota con velocità angolare costante ω su una circonferenza di raggio R con centro nel punto di coordinate $(R, 0, R)$. In tutto lo spazio vi è un campo magnetico uniforme $\vec{B}(t) = at^2\vec{j} + bt\vec{k}$. Calcolare:

- il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{k}$;
- il flusso del campo magnetico attraverso il cerchio sulla cui circonferenza ruota la carica;
- la forza (vettore) dovuta al campo magnetico che agisce sulla carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{i}$;
- la forza elettromotrice indotta presente sulla circonferenza su cui ruota la carica.

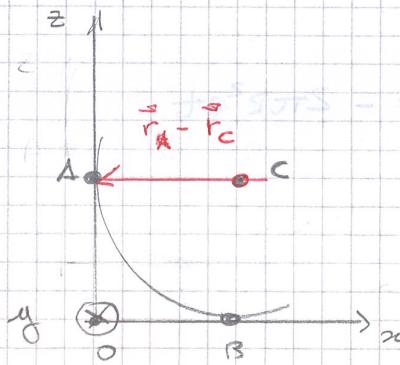
Esercizio 3

Si consideri il circuito mostrato in figura. Siano $\epsilon = 48$ V, $C = 150 \mu\text{F}$, $R = 2 \text{ k}\Omega$, $R' = 2R$, e $L = 100 \text{ mH}$. Dopo essere stato a lungo aperto, l'interruttore T viene chiuso. Calcolare la corrente i' che percorre il resistore R' , la carica presente sulle armature del condensatore C e la d.d.p. ai capi dell'induttore L nei seguenti istanti:

- immediatamente prima della chiusura dell'interruttore T ;
- subito dopo la chiusura dell'interruttore T ;
- quando si raggiunge la nuova condizione di stazionarietà.



Esempio #2



SR seg.z: terna destrorsa \rightarrow d'asse z
entra nel foglio

a) Carica nel punto A

$$\vec{N}_A = \omega R \vec{K} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega < 0 & \text{Anti-Orario} \quad (\Rightarrow \vec{N}_A \text{ verso alto}) \\ \omega > 0 & \text{Orario} \quad (\Rightarrow \vec{N}_A \text{ verso basso}) \end{array} \right.$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} \vec{N}_A &= \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (-R \vec{i}) \\ &= \vec{\omega} \vec{j} \times (-R \vec{i}) = \omega R \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \end{aligned}$$

b) Flusso di \vec{B} attraverso la circonferenza

Occorre definire un versore che dia l'orientazione della superficie

Scelta: $\vec{m} = \vec{j}$

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{B}} &= \int \vec{B} \cdot \vec{m} \, ds = \int (at^2 \vec{j} + bt \vec{K}) \cdot \vec{j} \, ds \\ &= at^2 \int ds = at^2 \pi R^2 \end{aligned}$$

c) Forza sulla conica quando si trova in B \rightarrow forza di Lorentz

$$\vec{v} = -\omega R \vec{i}$$

Alternativamente $\vec{N}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (-R \vec{K}) =$

$$= \vec{\omega} \vec{j} \times (-R \vec{K}) = -\omega R \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Lorentz}} &= q \vec{N}_B \times \vec{B} = q (-\omega R \vec{i}) \times (at^2 \vec{j} + bt \vec{K}) \\ &= q (-\omega R) [at^2 \vec{i} \times \vec{j} + bt \vec{i} \times \vec{K}] = \end{aligned}$$

$$= q \omega R \left\{ -at^2 \vec{K} + bt \vec{j} \right\}$$

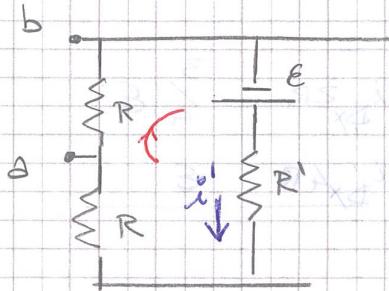
d) f.e.m. induktiv \rightarrow Faraday - Lenz

$$E_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \pi r^2 B dt = - 2\pi r^2 B \frac{dt}{dt}$$

Esercizio 3

a) Interruttore T aperto / stazionarietà

- condensatore $C \Rightarrow$ circuito aperto
- non circola corrente nella maglia ΔX



LeqKirchoff delle tensioni applicata alla maglia ΔX

$$E - i' R' - i' (2R) = 0 \rightarrow i' = \frac{E}{R' + 2R} = \frac{E}{4R} = 6 \text{ mA}$$

Carica sul condensatore

$$Q = C(V_a - V_b) = C i' R = C \frac{E}{4R} R = \frac{CE}{4} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ C}$$

Nella maglia ΔX non circola corrente

$$i_L = 0 \text{ A}$$

$$V_L = 0 \text{ V}$$

b) Interruttore T subito dopo la chiusura

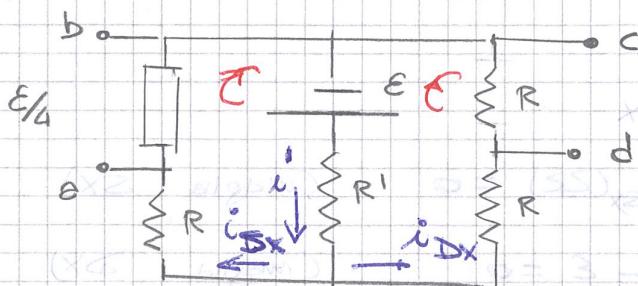
- la rdcp di capi del condensatore è la stessa del quesito a)

$$V_a - V_b = \frac{E}{4} \quad (\text{ma passa corrente})$$

- la corrente nell'induttore è la stessa del quesito a)

$$i_L = 0$$

(ma la rdcp ai due capi non è nulla)



NB: nella maglia di ΔX
è percorsa da una corrente

i_{DX} che passa solo
nel resistore in parallelo a L

LdK dei nodi $i = i_{sx} + i_{dx}$

$$\text{LdK maglie: } \left\{ \begin{array}{l} E - i' R' - i_{sx} R - \frac{E}{4} = 0 \quad (\text{maglia SX}) \\ i_{dx} (2R) + i' R' - E = 0 \quad (\text{maglia DX}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i_{sx} + i_{dx}) R' + i_{sx} R = \frac{3}{4} E \\ (i_{sx} + i_{dx}) R' + i_{dx} 2R = E \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_{sx} 3R + i_{dx} 2R = \frac{3}{4} E \\ i_{sx} 2R + i_{dx} 4R = E \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (i_{sx} + i_{dx}) R' + i_{sx} R = \frac{3}{4} E \\ (i_{sx} + i_{dx}) R' + i_{dx} 2R = E \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_{sx} 3R + i_{dx} 2R = \frac{3}{4} E \\ i_{sx} 2R + i_{dx} 4R = E \end{array} \right.$$

$$R' = 2R$$

Risolvendo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{sx} = \frac{E}{8R} \\ i_{dx} = \frac{3}{16} \frac{E}{R} \end{array} \right. \Rightarrow i = \frac{5}{16} \frac{E}{R} = 7.5 \times 10^{-3} A$$

- Carica sul condensatore

$$Q = C(V_a - V_b) = C \frac{E}{4} = 1.8 \times 10^{-3} C$$

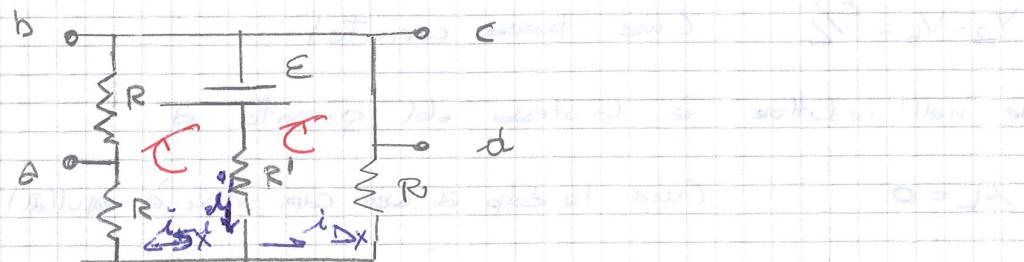
- ddp sui capi dell'induttore

$$V_d - V_c = i_{dx} R = \frac{3}{16} E = 9 V$$

c) Interruttore T chiuso / stazionarietà

- condensatore C \rightarrow circuito aperto

- induttore L \rightarrow corto circuito in parallelo ad una resistenza



LdK dei modi $i = i_{sx} + i_{dx}$

$$\text{LdK delle maglie: } \left\{ \begin{array}{l} E - i' R' - i_{sx} (2R) = 0 \quad (\text{maglia SX}) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} E - i' R' - i_{sx} (2R) = 0 \\ R i_{dx} + i' R' - E = 0 \end{array} \right. \quad (\text{maglia DX})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i_{sx} + i_{dx}) R' + i_{sx} 2R = E \\ i_{dx} R' + (i_{sx} + i_{dx}) R' = E \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_{sx} 4R + i_{dx} 2R = E \\ i_{sx} 2R + i_{dx} 3R = E \end{array} \right.$$

$\underbrace{\qquad}_{R'=2R}$

Risolvendo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{sx} = \frac{E}{8R} \\ i_{dx} = -\frac{E}{4R} \end{array} \right. \Rightarrow i = \frac{3E}{8R} = 9 \times 10^{-3} A$$

- Carica sul condensatore

$$Q = C \underbrace{(V_A - V_B)}_{= i_s R} = C \frac{E}{8} = 0.9 \times 10^{-3} C$$

$$V_A - V_B = i_s R$$

- Cdps di carpi dell'induttore

$$V_A - V_C = 0 \text{ V}$$

Esercizio 1

In un sistema di assi cartesiano (x, y) siano dati i punti $A=(0,7)$ e $B=(12,2)$. Scrivere il vettore \vec{r}_{AB} che va dal punto A al punto B e determinarne il modulo.

Esercizio 2

Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate x, y, z . Nel piano xy vi è una carica puntiforme $q > 0$ posta in $(-a, 0)$ ed una carica puntiforme q posta in $(a, 0)$. Risolvere i seguenti quesiti.

- Calcolare il vettore campo elettrico \vec{E} nel punto $(0, h)$.
- Per quale valore di h è $\vec{E} = 0$?
- Calcolare il lavoro necessario per portare la carica q dall'infinito a $(a, 0)$ supponendo che la carica in $(-a, 0)$ sia già presente.
- Supponiamo che le due cariche ruotino attorno all'asse z nel piano xy con modulo della velocità angolare $\omega > 0$ costante. Calcolare il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto $(a, 0)$.
- Calcolare il vettore campo magnetico generato dalle cariche in moto nell'origine degli assi.

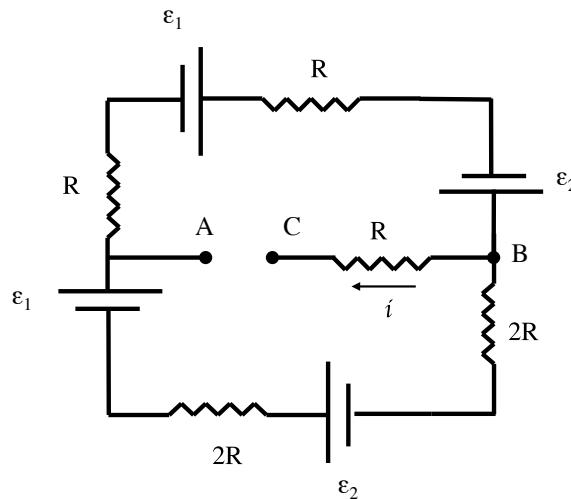
Esercizio 3

Nel circuito in figura $R=10 \Omega$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ con $\varepsilon=10$ V.

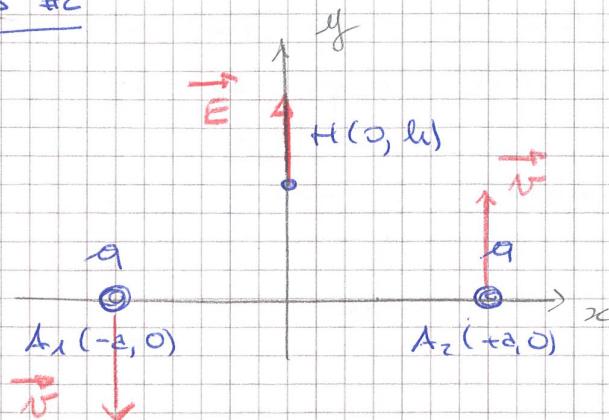
Determinare:

- la corrente che percorre il circuito;
- la differenza di potenziale $V_A - V_B$;
- il valore della f.e.m. V_0 che deve essere posta tra i punti A e C in modo che $V_A = V_B$ (disegnare la f.e.m. sul circuito in modo che si capisca la polarità);
- la corrente i che scorre nel resistore posto nel ramo centrale del circuito (vedi figura) qualora tra A e C sia presente la f.e.m. V_0 calcolata nel quesito c).

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Esercizio 2



Velocità posizione

$$A_1: \vec{r}_{A1} = -\vec{a}\hat{i}$$

$$A_2: \vec{r}_{A2} = +\vec{a}\hat{i}$$

$$H: \vec{r}_H = h\hat{j}$$

2) Campo elettrico in $H = (0, h)$

Principio di sovrapposizione

• Carica in A_1

$$\vec{E}_1 = K_e q \frac{\vec{r}_H - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_H - \vec{r}_{A1}|^3} = \frac{K_e q}{(h^2 + a^2)^{3/2}} (\vec{a}\hat{i} + \vec{h}\hat{j})$$

• Carica in A_2

$$\vec{E}_2 = K_e q \frac{\vec{r}_H - \vec{r}_{A2}}{|\vec{r}_H - \vec{r}_{A2}|^3} = \frac{K_e q}{(h^2 + a^2)^{3/2}} (-\vec{a}\hat{i} + \vec{h}\hat{j})$$

$$\vec{E}(0, h) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{K_e q}{(h^2 + a^2)^{3/2}} 2h\hat{j}$$

b) Valori di h per i quali $\vec{E}(0, h) = 0$

• $h = 0$

• $h \rightarrow \infty$

c) Lavoro fatto dalla forza elettrica per portare q dall'infinito in A_2

$$L_{\infty \rightarrow A_2} = q(V_\infty - V_{A2}) \rightarrow L_{\infty \rightarrow A_2} = -K_e \frac{q^2}{2a}$$

$$V(r) = K_e \frac{q}{r+a} + V_\infty$$

Lavoro fatto da un agente esterno contro il campo elettrico perportare q al ∞

$$\text{di } A_2 : L = +K_e \frac{q^2}{2a} \quad (\text{l'energia potenziale del sistema aumenta})$$

d) Velocità delle cariche

$$\text{• Carica in } A_1 \quad \vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A1} = \vec{\omega} K \times (-\vec{a}\hat{i}) = -\omega a \hat{j}$$

$$\text{• Carica in } A_2 \quad \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A2} = \vec{\omega} K \times (\vec{a}\hat{i}) = \omega a \hat{j}$$

c) Le due cariche in moto circolare sono assi simmetrici
ad una spira circolare percorsa da corrente

$$i = \frac{Z_a}{I} \quad \text{dove } \omega I = 2\pi \rightarrow \frac{1}{I} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow i = \frac{q\omega}{\tau c}$$

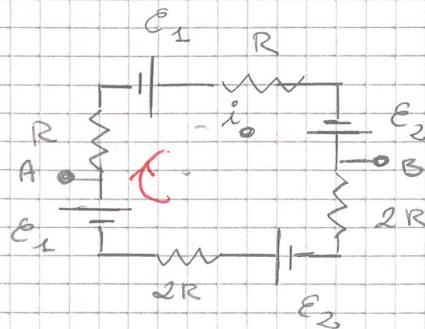
Allora \vec{B} vale

$$|\vec{B}(z,0)| = Z_{Km} \frac{i \tau c}{R} = Z_{Km} \frac{\tau c}{a} \left(\frac{q\omega}{\tau c} \right) = Z_{Km} \frac{q\omega}{a}$$

il verso è dato dalla regola della mano dx, pertanto

$$\vec{B}(z,0) = Z_{Km} \frac{q\omega}{a} \hat{K}$$

Esercizio #3



- a) Applico le leggi di Kirchhoff per le maglie
(la maglia 1 è percorsa da un'unica corrente i_0)

$$E_1 - i_0 R + \mathcal{E}_2 - i_0 ZR + \mathcal{E}_2 - i_0 ZR + \mathcal{E}_2 - i_0 R = 0$$

$$2(E_1 + \mathcal{E}_2) = 6i_0 R$$

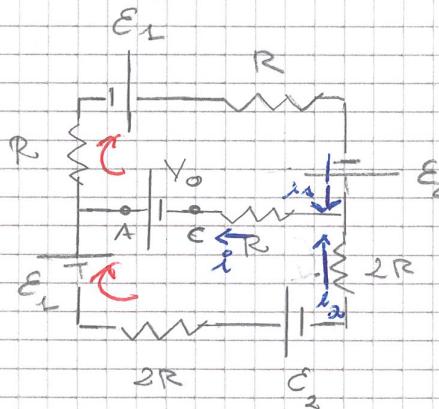
$$i_0 = \frac{E_1 + \mathcal{E}_2}{3R} = \frac{3\mathcal{E}}{3R} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1 \text{ A}$$

b) $V_A - i_0 R + \mathcal{E}_1 - i_0 R + \mathcal{E}_2 = V_B$

$$V_A - V_B = 2i_0 R - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 2\mathcal{E} - 3\mathcal{E} = -\mathcal{E} = -10 \text{ V}$$

ovvero $V_A < V_B$

- c) Assumiamo che la f.e.m. abbia il terminale positivo connesso ad A e quello negativo connesso a C



LeK modo (im B) $i_1 + i_2 = i$

Maglia superiore (percorsa verso destra)

$$-i_R + V_0 - i_1 ZR + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 0$$

Maglia inferiore (percorsa verso destra)

$$+i_2 ZR + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - V_0 + iR = 0$$

$$\begin{cases} -(i_1 + i_2)R + V_o - i_1 R + 3\varepsilon = 0 \\ i_2 4R + 3\varepsilon - V_o + (i_1 + i_2)R = 0 \end{cases}$$

Inoltre $V_A = V_B \rightarrow V_A - V_o + iR = V_B \rightarrow i = V_o/R$

$$\Rightarrow \begin{cases} -i_1 R + 3\varepsilon = 0 & i_1 = \frac{3\varepsilon}{2R} \\ i_2 4R + 3\varepsilon = 0 & i_2 = -\frac{3\varepsilon}{4R} \end{cases}$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{3\varepsilon}{2R} - \frac{3\varepsilon}{4R} = \frac{3\varepsilon}{4R} = 0.75 \text{ A}$$

$$V_o = iR = 7.5 \text{ V}$$

Esercizio 1

In un sistema di assi cartesiani (x, y) siano dati i punti $A=(2,4)$, $B=(6,1)$ e $C=(6,4)$. Scrivere i vettori: \vec{r}_{AB} che va dal punto A al punto B, \vec{r}_{AC} che va dal punto A al punto C. Calcolare inoltre il prodotto scalare $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AC}$.

Esercizio 2

Nel piano xy vi è una carica q_1 in $(0,0)$ ed una seconda carica q_2 in (a,b) , con $a, b > 0$, inizialmente ferme. Risolvere i seguenti punti.

- Calcolare il vettore campo elettrico in $(0,0)$ dovuto alla carica q_2 , ossia $\vec{E}_2(0,0)$.
- Calcolare il potenziale elettrico generato dalla carica q_1 nel punto dove si trova la carica q_2 .
- Quanto vale la carica q_2 se il lavoro fatto contro il campo elettrico per portarla dall'infinito a (a,b) , quando la carica in $(0,0)$ è già presente, è $L = k_e \frac{q_1 q_2}{a}$?

Si consideri ora il caso in cui le cariche si muovono con velocità $\vec{v}_1 = V_1 \vec{j}$ (carica q_1) $\vec{v}_2 = V_2 \vec{j}$ (carica q_2).

- Calcolare il vettore campo magnetico $\vec{B}_2(0,0)$ generato dalla carica q_2 nell'origine.
- Calcolare la forza dovuta al campo magnetico sulla carica q_1 .

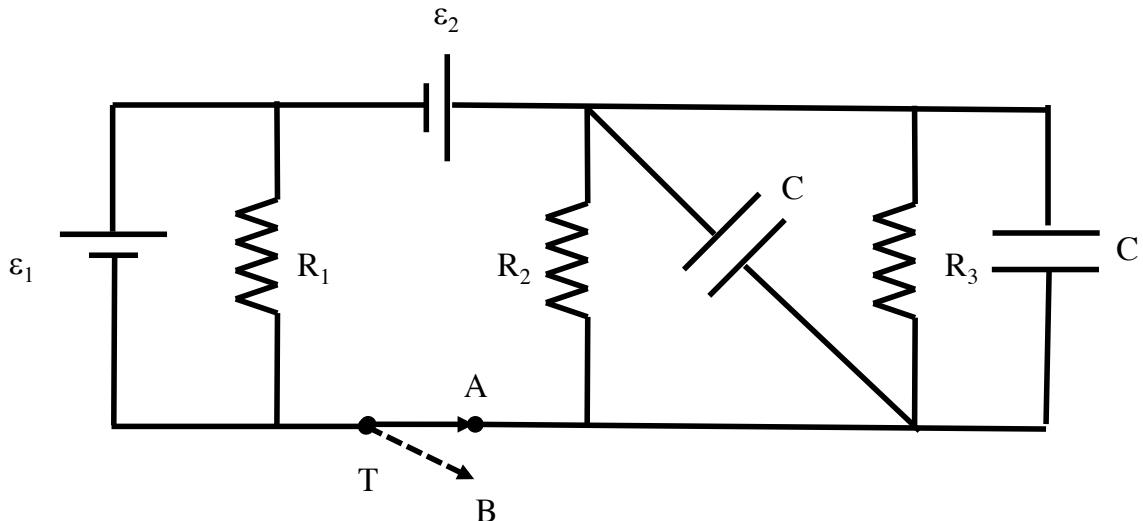
Esercizio 3

Nel circuito in figura tutti i resistori valgono $R=10 \text{ k}\Omega$, le f.e.m. valgono rispettivamente $\varepsilon_1 = V_0$, $\varepsilon_2 = 2V_0$ con $V_0=20 \text{ V}$ e le capacità $C=10 \text{ nF}$.

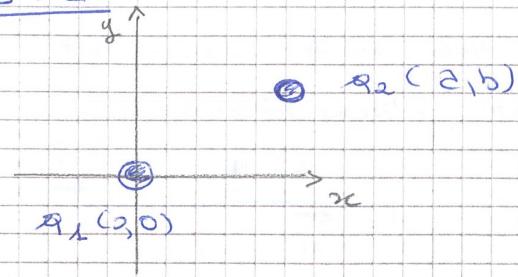
Inizialmente l'interruttore T è chiuso in posizione A ed il circuito è in condizioni stazionarie. Successivamente l'interruttore T viene aperto portandolo in posizione B. Determinare la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1 e la corrente nel resistore R_3 nei seguenti istanti:

- immediatamente prima dell'apertura di T;
- subito dopo l'apertura di T;
- quando si raggiunge la nuova condizione di stazionarietà.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Esercizio



$$\vec{r}_{Q_1 Q_2} = \vec{a} \hat{i} + \vec{b} \hat{j} = -\vec{r}_{Q_2 Q_1}$$

$$|\vec{r}_{Q_1 Q_2}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a) Campo \vec{E} prodotto da q_2 in $(0,0)$

$$\vec{E}_2(0,0) = K_e \frac{\vec{q}_2}{|r_{Q_2 Q_1}|^2} = K_e \frac{\vec{q}_2}{(a^2+b^2)} \left(-\frac{\vec{a} \hat{i} + \vec{b} \hat{j}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) =$$

$$= -K_e \frac{\vec{q}_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} (\vec{a} \hat{i} + \vec{b} \hat{j})$$

b) potenziale elettrico prodotto da q_1

$$V(x,y) = K_e \frac{q_1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} + V_0 \Rightarrow V_{Q_1}(a,b) = K_e \frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + V_0$$

c) Ricorda:

Lavoro fatto da \vec{E} per portare q da A a B: $L_{AB} = q[V(A) - V(B)]$

Lavoro fatto contro \vec{E} per portare q da B ad A: $L = q[V(A) - V(B)]$

Lavoro fatto contro \vec{E} per portare q_2 dall'insieme di (a,b)

$$L = q_2 \left[K_e \frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + V_0 - V_0 \right] = K_e \frac{q_1 q_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = K_e \frac{q_1^2}{a}$$

$$\Rightarrow q_2 = q_1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \quad \text{X}$$

Note: q_1 e q_2 sono dello stesso segno. Il lavoro fatto contro \vec{E} è positivo \Rightarrow l'energia potenziale del sistema dimentica

d) Il campo magnetico prodotto da una conica puntiforme è legato al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{B} = \frac{k_m}{K_e} \vec{V} \times \vec{E}$$

In questo caso: $\vec{B}_2(0,0) = \frac{k_m}{K_e} V_2 \hat{j} \times \vec{E}_2(0,0) =$

$$= \frac{k_m V_2 q_2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (-\hat{q}_2) (\hat{a} \hat{i} + \hat{b} \hat{j}) =$$

$$= \frac{k_m V_2 q_2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{a} \hat{k}$$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
 $\hat{i} \times \hat{j} = 0$

e) Applicando la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q_1 (V_2 \hat{j}) \times \vec{B}_2(0,0) = k_m \frac{q_1 V_1 q_2 V_2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{a} \hat{j} \times \hat{k} =$$

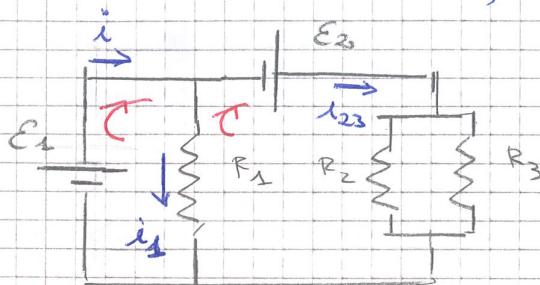
$$= k_m \frac{q_1 V_1 q_2 V_2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{a} (+\hat{i}) = k_m \frac{q_1^2 V_1 V_2}{(a^2 + b^2)} (+\hat{i})$$

Note: è una forza attrattiva (analogia con fili paralleli percorsi da correnti equivearse che si avvicinano)

ES 23

a) stazionarietà prima dell'apertura di T

- condensatori chiusi, non fanno corrente



$$R_2 \parallel R_3 \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{2}$$

$$i = i_1 + i_{23}$$

LdK maglia sx $E_1 - i_1 R_1 = 0$

LdK maglia DX $E_2 - i_{23} R_{eq} + i_1 R_1 = 0$

$$i_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{V_0}{R}$$

$$i_{23} = \frac{E_2 + i_1 R_1}{R_{eq}} = \frac{3V_0}{R/2} = \frac{6V_0}{R} \rightarrow \text{si ripartiscono uguali tra } R_2 \text{ e } R_3$$

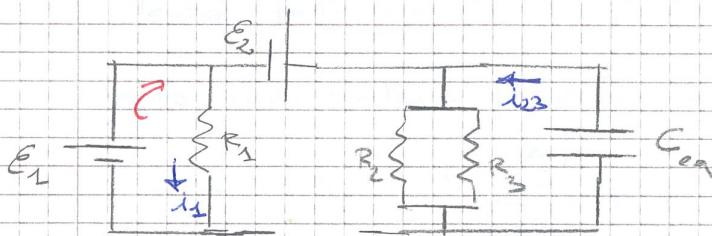
$$i = \frac{7V_0}{R}$$

$$i(R_3) = \frac{3V_0}{R} = 6 \mu A$$

potenza erogata da E_1 : $P(E_1) = E_1 \cdot i = \frac{7V_0^2}{R} = 280 \mu W$

diff presso di capi dei condensatori: $V_C = i_{23} R_{eq} = \frac{6V_0}{R} \frac{R}{2} = 3V_0 = 6V$

b) subito dopo l'apertura di T:



- la maglia SX è scollaggiata dalla maglia DX

- i condensatori chiusi cominciano a scaricarsi sulle resistenze in parallelo $R_2 \parallel R_3$

$$i_{23} = \frac{V_C}{R_{eq}} = \frac{3V_0}{R/2} = \frac{6V_0}{R} \rightarrow i(R_3) = \frac{3V_0}{R} = 6 \mu A$$

potenza erogata di E_1 : $P(E_1) = E_1 \cdot i_1 = V_0 \frac{V_0}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} = 40 \mu W$

c) stazionarietà con T aperto

- maglia SX: continua ad essere percorsa dalla corrente $i_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{V_0}{R_1}$

potenza erogata da E_1 : $P(E_1) = E_1 \cdot i_1 = \frac{V_0^2}{R_1} = 40 \mu W$

- maglia DX: i condensatori sono scambiati

$$i(R_3) = 0$$

Esercizio 1

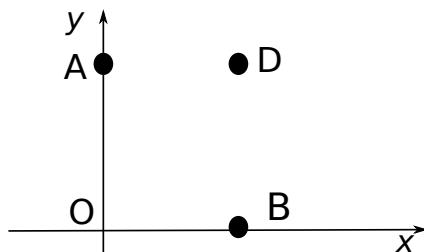
In un sistema di assi cartesiani siano dati i vettori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Scrivere i vettori somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Dire se i vettori \vec{s} e \vec{d} sono perpendicolari giustificando la risposta.

Esercizio 2

Siano date due cariche elettriche puntiformi $Q_A = 4q_0$ e Q_B poste rispettivamente nei punti $A = (0, 3d)$ e $B = (3d, 0)$ di un piano cartesiano. Una terza carica elettrica $Q_D = -q_0$, inizialmente ferma nel punto $D = (3d, 3d)$, viene spostata per effetto del campo elettrico dal punto D al punto $P = (2d, d)$.

Determinare in funzione dei parametri d e q_0 :

- il valore di Q_B per il quale la forza che agisce su Q_D nel punto P è nulla;
- la forza che agisce su Q_D quando inizialmente si trova nel punto D ;
- il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare Q_D dal punto D al punto P ;
- la velocità e l'accelerazione di Q_D quando si trova in P , assumendo che la massa della carica Q_D sia nota e valga m_D .

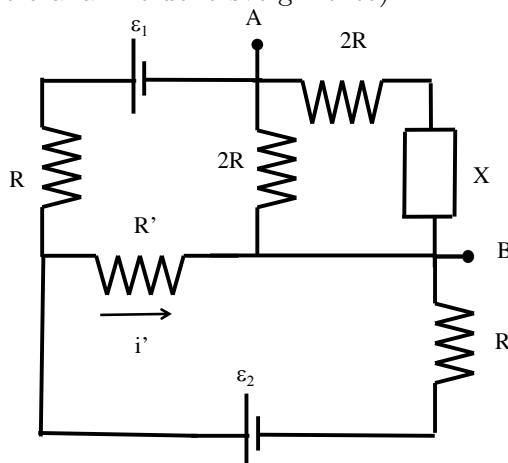


Esercizio 3

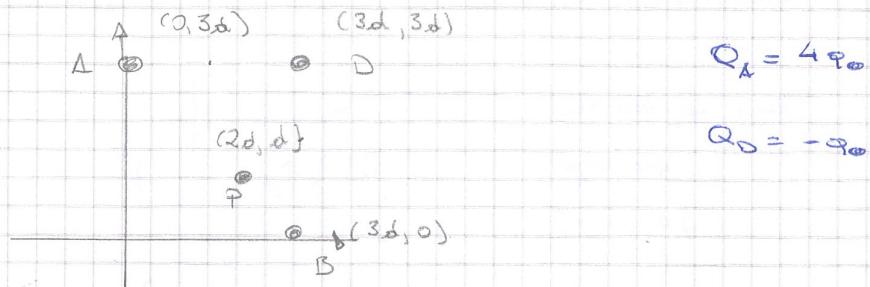
Nel circuito in figura $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R' = 2R$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = V_0$ con $V_0 = 60 \text{ V}$. Il circuito è in condizioni stazionarie. Determinare la corrente i' che percorre il resistore R' e la differenza di potenziale $V_A - V_B$ nei seguenti casi:

- X è un condensatore di capacità $C = 1 \text{ nF}$;
- X è un induttore di induttanza $L = 10 \text{ mH}$;
- X è un resistore di resistenza $2R$.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es 42



$$Q_A = 4q_0$$

$$Q_D = -q_0$$

a) Determino i vettori \vec{r}_{AP} e \vec{r}_{BP}

$$\vec{r}_{AP} = 2d\hat{i} - 2d\hat{j} \quad |\vec{r}_{AP}| = 2d\sqrt{2}$$

$$\vec{r}_{BP} = -d\hat{i} + d\hat{j} \quad |\vec{r}_{BP}| = d\sqrt{2}$$

Campo elettrico prodotto da Q_A in P: $\vec{E}_{Q_A}(P) = K_e \frac{Q_A}{8d^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{j})$

Campo elettrico prodotto da Q_B in P: $\vec{E}_{Q_B}(P) = K_e \frac{Q_B}{2d^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{i} + \hat{j})$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_{Q_A}(P) + \vec{E}_{Q_B}(P) = 0 \Rightarrow \frac{Q_A}{8d^2} = \frac{Q_B}{2d^2} \rightarrow Q_B = \frac{1}{4} Q_A = q_0$$

b) Determino i vettori \vec{r}_{AD} e \vec{r}_{BD}

$$\vec{r}_{AD} = 3d\hat{i} \quad |\vec{r}_{AD}| = 3d$$

$$\vec{r}_{BD} = 3d\hat{j} \quad |\vec{r}_{BD}| = 3d$$

Campo elettrico prodotto da Q_A in D: $\vec{E}_{Q_A}(D) = K_e \frac{Q_A}{9d^2} \hat{i}$

Campo elettrico prodotto da Q_B in D: $\vec{E}_{Q_B}(D) = K_e \frac{Q_B}{9d^2} \hat{j}$

$$\vec{E}(D) = \vec{E}_{Q_A}(D) + \vec{E}_{Q_B}(D) = K_e \frac{4q_0}{9d^2} \hat{i} + K_e \frac{q_0}{9d^2} \hat{j}$$

$$\vec{F} = Q_D \vec{E}(D) = -K_e \frac{q_0^2}{9d^2} (4\hat{i} + \hat{j})$$

c) $L = Q_D (V(D) - V(P))$

Scorso Additività dei potenziali

$$V(B) = K_e \frac{Q_A}{3d} + K_e \frac{Q_B}{3d}$$

$$\Rightarrow L = Q_D \left\{ K_e \left(\frac{(Q_A + Q_B)}{3d} \right) \frac{1}{3d} - \left(\frac{Q_A + 2Q_B}{3d} \right) \frac{1}{2d\sqrt{2}} \right\}$$

$$V(P) = K_e \frac{Q_A}{2d\sqrt{2}} + K_e \frac{Q_B}{d\sqrt{2}}$$

$$= -K_e \frac{q_0^2}{d} \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{5}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]}_{\approx -0.45} \quad \text{NB: } L > 0$$

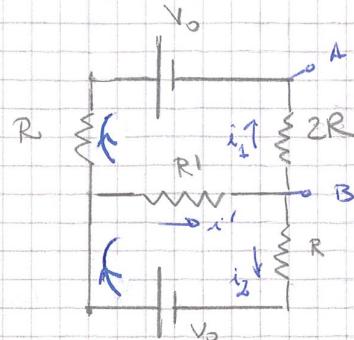
d) Applicando conservazione energia meccanica

$$\frac{1}{2} m_f v_f^2 - \frac{1}{2} m_i v_i^2 = Q_D [V(B) - V(P)] = K_e \frac{q_0^2}{d} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3} \right] \Rightarrow N_f = \frac{2K_e q_0^2}{m_f d} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3} \right]$$

$$N_f = 0$$

Es #3

a) $X = C \rightarrow$ in condizioni stazionarie si comporta come circuito aperto



Ld Kirchhoff modi

$$i^1 = i_1 + i_2$$

Flusso sup.

$$-V_o + 3Ri_1 + Ri^1 i^1 = 0$$

Flusso inf.

$$V_o - Ri_2 - R^1 i^1 = 0$$

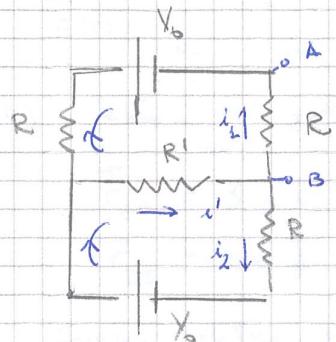
$$\Rightarrow 3Ri_1 - Ri_2 = 0 \Rightarrow i_2 = 3i_1$$

$$i^1 = 4i_1$$

$$-V_o + 3Ri_1 + (2R)(4i_1) = 0 \quad i_1 = \frac{V_o}{10R} \quad i^1 = \frac{4V_o}{10R} = 21.8 \text{ mA}$$

$$V_A + 2Ri_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{2V_o}{10} = -10.9 \text{ V}$$

b) $X = L \rightarrow$ in condizioni stazionarie si comporta come corto circuito



Ld Kirchhoff modi

$$i^1 = i_1 + i_2$$

Flusso sup.

$$-V_o + i_1 ZR + i^1 ZR = 0$$

Flusso inf.

$$+V_o - i_2 R - i^1 ZR = 0$$

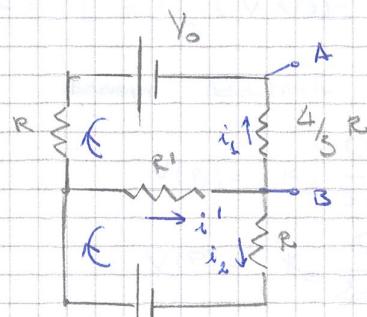
$$\Rightarrow i_1 ZR - i_2 R = 0 \Rightarrow i_2 = 2i_1$$

$$i^1 = 3i_1$$

$$-V_o + 2Ri_1 + (2R)(3i_1) = 0 \quad i_1 = \frac{V_o}{8R} \quad i^1 = \frac{3V_o}{8R} = 22.5 \text{ mA}$$

$$V_A + R i_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{V_o}{8} = -7.5 \text{ V}$$

c) $X = R$



Ld Kirchhoff modi

$$i^1 = i_1 + i_2$$

Flusso sup.

$$-V_o + \frac{7}{3}R i_1 + R^1 i^1 = 0$$

Flusso inf.

$$V_o - R i_2 - R^1 i^1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}R i_1 - R i_2 = 0 \quad i_2 = \frac{7}{3}i_1$$

$$i^1 = \frac{10}{3}i_1$$

$$-V_o + \frac{7}{3}R i_1 + (2R)\left(\frac{10}{3}i_1\right) = 0 \quad + \quad i_1 = \frac{V_o}{27R} \quad i^1 = \frac{10}{27}\frac{V_o}{R} = 22.2 \text{ mA}$$

$$V_A + \frac{7}{3}R i_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{4}{27}V_o = -8.9 \text{ V}$$