Appunti di Fisica

Elisa Solinas

Università degli Studi di Torino
Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2016-2017

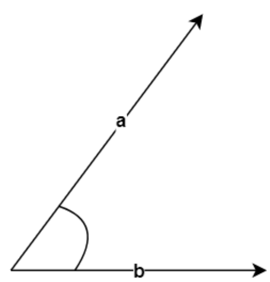
Indice

1. Meccanica

1.1 Calcolo vettoriale

Consideriamo due vettori in un sistema di coordinate (xyz):

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$



1.1.1 Modulo di un vettore

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.1.2 Somma di due vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

1.1.3 Differenza di due vettori

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

1.1.4 Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$$

Osservazioni

- Il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è nullo.

1.1.5 Prodotto vettoriale di due vettori

Il prodotto vettoriale tra due vettori è perpendicolare a entrambi.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \vec{k}$$

Osservazioni

- Il prodotto vettoriale di due vettori è perpendicolare a entrambi.
- Il prodotto vettoriale di due vettori è anticommutativo, cioe:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.
- I versori della base canonica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soddisano le seguenti equazioni:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

1.1.6 Calcolo di un vettore che collega due punti

$$A = (a_1, a_2) \qquad B = (b_1, b_2)$$
$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

1.2 Equazioni del moto

1.2.1 Moto rettilineo uniforme

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$s = s_0 + v \cdot t$$

1.2.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1.2.3 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme, il vettore velocità $\vec{v}$ ha solo componente tangente alla circonferenza:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} = \omega^2 \cdot \vec{r}$$

1.3 Leggi di Newton

1.3.1 Prima legge di Newton

Un corpo mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché una forza non agisce su di esso.

1.3.2 Seconda legge di Newton

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e ha la stessa direzione della forza netta agente su di esso, mentre invece è inversamente proporzionale alla sua massa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

1.3.3 Terza legge di Newton

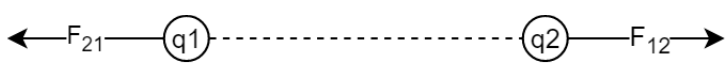
Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un corpo B, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza $\vec{F}_{BA}$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Esempio 1. *La forza $\vec{F}_{12}$ esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza $\vec{F}_{21}$ esercitata da q_2 su q_1.*

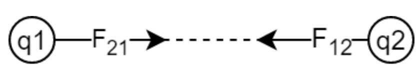
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano lo stesso segno:



$$\vec{F}_{12} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \vec{F}_{21} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto:



$$\vec{F}_{12} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \vec{F}_{21} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

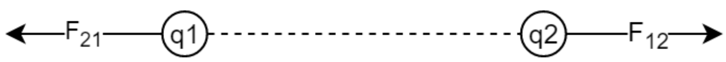
2. Elettrostatica

2.1 Legge di Coulomb

La forza $\vec{F}_{12}$ esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza $\vec{F}_{21}$ esercitata da q_2 su q_1.

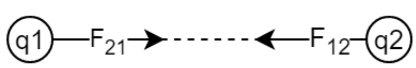
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano lo stesso segno:



$$\vec{F}_{12} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$
$$\vec{F}_{21} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto:



$$\vec{F}_{12} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$
$$\vec{F}_{21} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

2.2 Principio di sovrapposizione

In un sistema di n cariche, volendo valutare la forza totale agente su una carica q, è necessario sommare le forze esercitate da ciascuna carica. Ciascuna di queste forze agisce come se fosse l'unica presente.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} k_e \cdot \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_{r_i}$$

2.3 Campo elettrico

Dato un sistema di n cariche, su una carica di prova q, agisce un campo elettrico $\vec{E}$ dato da:

$$\vec{E} = \sum_{i=0}^{n} k_e \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

La forza agente su q può essere espressa come:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

2.4 Teorema di Gauss per il campo elettrico

Il teorema di Gauss per il campo elettrico permette di calcolare il flusso del campo elettrico generato da una certa distribuzione di carica elettrica attraverso una superficie senza svolgere i calcoli prescritti dalla definizione di flusso. Data una superficie chiusa S contenente n cariche elettriche (positive o negative), il flusso del campo elettrico (generato dalle cariche) attraverso tale superficie è uguale al rapporto tra carica totale contenuta nella superficie chiusa e la costante dielettrica ε del mezzo in cui si trovano le cariche (ε_0 nel vuoto):

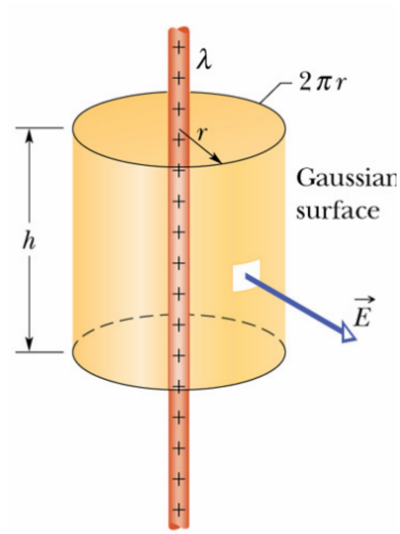
$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

2.4.1 Distribuzione lineare

Il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare alla superficie gaussiana:
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso le basi è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie laterale è pari a $E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h)$.

Per il teorema di Gauss:

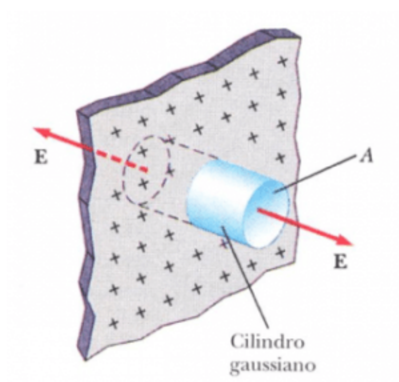
$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\
\varepsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\
\varepsilon_0 \cdot E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h) &= q = \lambda \cdot h \\
\vec{E} &= \frac{\lambda}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \pi \cdot r \cdot h}
\end{aligned}$$



2.4.2 Distribuzione piana

Il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare alla superficie gaussiana:

- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie del cilindro è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la le basi del cilindro è pari a $E \cdot A$, dove A è l'area di una base.



Per il teorema di Gauss:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\
\varepsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\
\varepsilon_0 \cdot (E \cdot A + E \cdot A) &= q \cdot \sigma \cdot A \\
2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot A &= q = \sigma \cdot A \\
E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

2.5 Energia elettrica

2.5.1 Energia potenziale elettrica

L'energia potenziale è l'inverso del lavoro compiuto dalla forza per spostare q_2 dal punto A al punto B.

$$\Delta U = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$
$$= -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} dr =$$
$$= k_e \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

2.5.2 Potenziale elettrico

Sia q_0 una carica di prova in moto da A a B, sotto l'azione di un campo elettrico $\vec{E}$:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{-L_{AB}}{q_0} \qquad V = \frac{U}{q_0}$$

2.5.3 Lavoro del campo elettrico

Il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare una particella q_0 da A a B:

$$L_{AB} = q_0 \cdot (-\Delta V)$$

2.5.4 La forza di Coulomb è conservativa

Una forza è conservativa quando il lavoro da essa compiuto può essere scritto come una differenza di potenziale:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} =$$
$$= k_e \cdot q_1 q_2 \cdot \int_A^B \frac{1}{r^2} = \left(k_e \frac{q_1 q_2}{r_B}\right) - \left(k_e \frac{q_1 q_2}{r_A}\right) = U(B) - U(A)$$

Questo risultato significa che:

- Il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo.
- Il lavoro lungo uno spostamento dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo e non dal percorso seguito.

2.6 Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema composto da due cariche uguali, di segno opposto, poste a distanza d lungo un asse u_x.
Viene definito il **momento di dipolo** $\vec{p}$ come

$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \vec{u}_x$$

2.6.1 Campo elettrico lungo l'asse del dipolo

$$\vec{E}_{+} = k_e \cdot \frac{q}{(r_x - a)^2} \cdot \vec{i}$$
$$\vec{E}_{-} = -k_e \cdot \frac{q}{(r_x + a)^2} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E} = k_e \cdot \left(\frac{q}{(r_x - a)^2} - \frac{q}{(r_x^2 + a^2)^2} \right) \cdot \vec{i} =$$
$$= k_e \cdot q \left(\frac{(r_x + a)^2 - (r_x - a)^2}{(r_x^2 + a^2)^2} \right) \cdot \vec{i} =$$
$$= k_e \cdot q \frac{r_x^2 + a^2 + 2r_x a - r_x^2 + 2r_x a - a^2}{(r_x^2 + a^2)^2} \cdot \vec{i} == k_e \cdot \frac{4qr_x a}{(r_x^2 + a^2)^2} \cdot \vec{i}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2p \cdot r_x}{(r_x^2 + \frac{d}{2}^2)^2} \cdot \vec{i}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x >>> d$, cioè misurare il campo elettrico a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2pr_x}{r_x^4} \cdot \vec{i} = k_e \cdot \frac{2p}{r_x^3} \cdot \vec{i}$$

2.6.2 Potenziale elettrico lungo l'asse del dipolo

Il potenziale generato da una carica a una distanza r è dato da:

$$V(r) = k_e \cdot \frac{q}{r}$$

Perciò, il potenziale del dipolo a una distanza r_x è dato da:

$$V(r_x) = k_e \cdot \left(\frac{q}{r_x - a} - \frac{q}{r_x + a} \right) =$$
$$k_e \cdot q \left(\frac{r_x + a - r_x + a}{r_x^2 - a^2} \right) =$$
$$k_e \cdot q \cdot \frac{2a}{r_x^2 - a^2}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2 - \frac{d}{2}^2}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x >>> d$, cioè misurare il potenziale a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2}$$

3. Magnetostatica

3.1 Corrente elettrica

3.2 Forza di Lorentz

Una carica in moto in un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta a una forza, detta **forza di Lorentz** $\vec{F}_B$ tale che:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiché $\vec{F}_B$ è perpendicolare a $\vec{v}$, il modulo della velocità non può variare, ma solo la sua direzione.
Poiché $\vec{F}_B$ è perpendicolare allo spostamento, non può compiere lavoro sulla particella. Ciò significa che un campo magnetico uniforme non varia l'energia della particella.

Possiamo considerare tre casi:

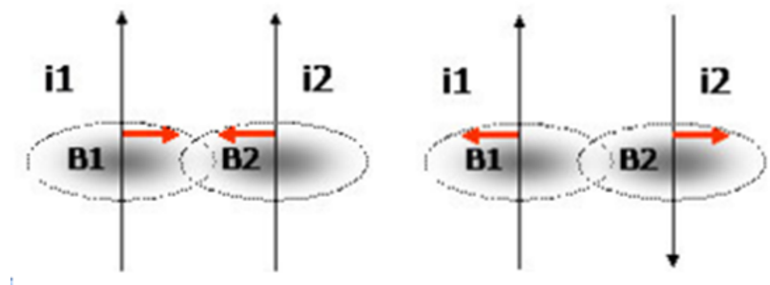
- $\vec{v}$ parallelo a $\vec{B}$: il prodotto vettoriale è nullo e la particella non è soggetta a forza magnetica.
- $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$: se $\vec{B}$ è costante, la particella si muove lungo una traiettoria circolare.
- Caso generale: la particella segue un moto ad elica lungo l'asse $\vec{u}_B$

3.2.1 Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente

Un filo rettilineo percorso da corrente I produce, a distanza r, un campo magnetico $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

Consideriamo la seguente configurazione: due fili, di lunghezza L, posti a distanza D e percorsi, rispettivamente da una corrente I_1 e I_2.



Sul filo 1 agisce una forza $\vec{F}_{21}$ dovuta a $\vec{B}_2$, mentre sul filo 2 agisce una forza $\vec{F}_{12}$ dovuta a $\vec{B}_1$.
Tali forze, secondo la terza legge di Newton sono eguali in modulo e hanno direzioni opposte:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} F_{12} = F_{21} = B_2 \cdot I_1 \cdot d = B_1 \cdot I_2 \cdot d = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi d} \cdot L$$

La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono concordi, mentre è repulsiva se sono discordi.

3.3 Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart permette di calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{i \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

3.3.1 Tratto di filo rettilineo

Calcoliamo il campo magnetico generato da un filo di lungezza L percorso da corrente I, a una distanza r:

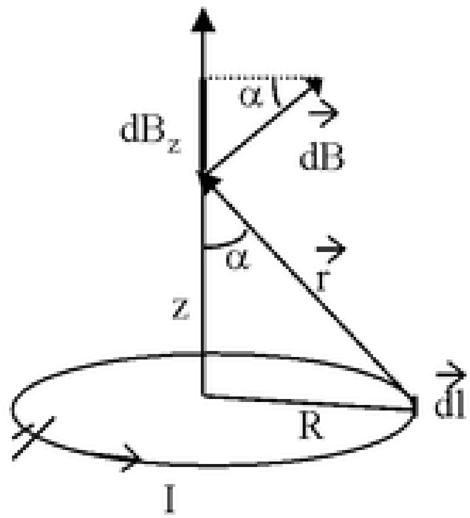
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{4\pi \cdot r} \cdot \frac{L}{\sqrt{\frac{L}{4} + r^2}}$$

Se il filo ha lunghezza infinita o è molto più lungo rispetto alla distanza a cui misuriamo il campo elettrico ($L >>> d$)

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

3.3.2 Spira circolare

Consideriamo una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I.
Calcoliamo il campo magnetico $\vec{B}$ che essa genera in un punto P posto sull'asse perpendicolare alla spira e passante per il suo centro.
P si trova a una distanza z dal centro della spira. Scomponiamo $d\vec{B}$ in due componenti:



- dB_z lungo l'asse z
- dB_p perpendicolare a dB_z: per ragioni di simmetria, la somma di tutti i componenti dB_p è nulla

Usiamo la legge di Biot-Savart per calcolare dBz:

$$dB_z = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot \cos\alpha \cdot ds}{4\pi \cdot r^2}$$

$$r^2 = R^2 + z^2 \qquad \cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$dB_z = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Il campo magnetico totale B è pari a:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} = \\ = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \vec{k} = \\ = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

Nel centro della spira ($r = R$):

$$\begin{aligned}\vec{B} = \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} = \\ = \mu_0 \cdot \frac{I}{2R}\vec{k}\end{aligned}$$

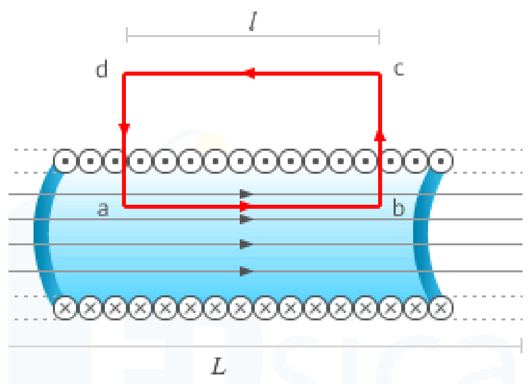
3.4 Legge di Ampére

La legge di Ampére ci permette di calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

3.4.1 Solenoide ideale

Un solenoide è caratterizzato da una corrente I che scorre in un filo avvolto a spirale n volte per unità di lunghezza intorno ad un cilindro di raggio a e lunghezza L.
Se $a <<< L$, il campo magnetico $\vec{B}$ è, in prima approssimazione, contenuto all'interno del solenoide, in direzione assiale, con intensità costante. In queste condizioni (ideali),



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} +$$

Il secondo e il quarto integrale sono nulli, in quanto o il campo $\vec{B}$ è parallelo al cammino di integrazione (punti interni) o è nullo (punti esterni).
Il terzo integrale è nullo perché abbiamo assunto $\vec{B}$ nullo all'esterno del solenoide.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot l$$

Utilizzando la legg e di Ampére:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{L}$$

3.5 Legge di Faraday-Lenz

Secondo la legge di Faraday-Lenz, a una variazione del flusso del campo magnetico corrisponde una f.e.m. autoindotta che si oppone a tale variazione.

$$-\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = \varepsilon_{indotta}$$

3.5.1 Relazione con induttanza

Consideriamo un solenoide, in cui S è la superficie della sezione della spira, l'induttanza è L e la corrente che lo percorre $i(t)$.

$$\Phi_S(\vec{B}) = L \cdot i(t) = \oint \vec{B} \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Utilizzando la legge di Ampére

$$\varepsilon_{indotta} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

4. Circuiti

Elementi circuitali in parallelo

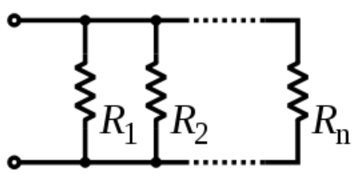
Due o più elementi circuitali collegati in parallelo godono delle seguenti proprietà:
- Ci si può spostare da un capo all'altro della configurazione attraversando un solo elemento.
- Su ciascun elemento appare la stessa differenza di potenziale.
- La corrente si suddivide tra i vari elementi.

Elementi circuitali in serie

Due o più elementi circuitali collegati in serie si godono delle seguenti proprietà:
- Per passare da un capo all'altro della configurazione è necessario attraversare in successione tutti gli elementi.
- La differenza di potenziale applicata agli estremi è pari alla somma delle differenze di potenziali su ciascun elemento.
- Tutti gli elementi sono percorsi dalla stessa corrente.

4.1 Resistori

4.1.1 Resistori collegati in parallelo



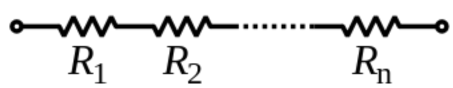
Calcoliamo la resistenza equivalente di due resistori collegati in parallelo:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \qquad i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \qquad \begin{aligned} i = i_1 + i_2 &= \frac{\Delta V}{R} \\ \frac{\Delta V}{R} &= \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

4.1.2 Resistori collegati in serie



Calcoliamo la resistenza equivalente R di due resistori collegati in serie:

$$\Delta V_1 = i \cdot R_1 \qquad \Delta V_2 = i \cdot R_2 \qquad \begin{aligned} \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 &= i \cdot R \\ i \cdot R &= i \cdot R_1 + i \cdot R_2 \\ R &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

4.2 Condensatori

Un condensatore piano è un sistema costituito da due superfici piane di materiale conduttore, aventi superficie S, poste a distanza d, in modo da costituire due piani paralleli.
Una superficie è caricata positivamente, l'altra negativamente.

4.2.1 Campo elettrico all'interno di un condensatore

All'interno del condensatore è presente un campo elettrico uniforme. Vediamo come calcolarlo.

Per il teorema di Gauss, una superficie piana carica genera un campo elettrico pari a:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

Poiché in un condensatore abbiamo due piani carichi sarà:

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Poiché $\sigma = \frac{Q}{S}$ possiamo scrivere:

$$E = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0}$$

Ricordiamo che il vettore campo elettrico è entrante per la lastra con carica negativa, e uscente per la piastra con carica positiva.
Possiamo dedurre che all'esterno delle due lastre il contributo al campo elettrico di ciascuna di esse fa si che il campo elettrico totale sia nullo; all'interno di esse, invece, il campo elettrico è doppio rispetto a quello generato da ogni singola armatura.

4.2.2 Differenza di potenziale sulle armature del condensatore

Utilizziamo la definizione di energia potenziale (in cui il punto A rappresenta una delle armature e il punto B rappresenta l'altra):

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Poiché i versori che indicano la direzione di $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ sono paralleli, il loro prodotto scalare è pari a 1, quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0} \cdot d$$

4.2.3 Capacità di un condensatore piano

La capacità di un condensatore è il rapporto tra la carica che può immagazzinare e la differenza di potenziale sulle armature.
Si tratta di una costante che dipende soltanto dalle caratteristiche fisiche e geometriche del condensatore.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = Q \cdot \frac{S \cdot \varepsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{S \cdot \varepsilon_0}{d}$$

4.2.4 Cosa accade all'esterno del condensatore

Come abbiamo detto nel paragrafo 4.2.1, il campo elettrico all'esterno del condensatore è nullo. Ciò implica che sia nullo anche il potenziale.

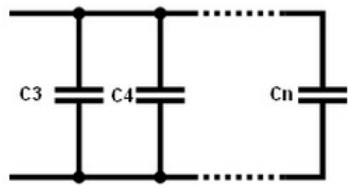
4.2.5 Carica e scarica del condensatore

Processo di carica

La carica si accumula sulle armature del condensatore quando viene applicata una differenza di potenziale $\Delta V = \varepsilon$

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$Q(t) = C \cdot \Delta V \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$



- $t < 0$: condensatore scarico
- $t \to 0$: condensatore in carica

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - 1) = 0$$

- $t \to \infty$: condensatore carico a regime

$$\Delta V = \varepsilon$$

$$Q(t) = Q_{MAX}(1 - e^{\frac{-\infty}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \varepsilon$$

Processo di scarica

La carica accumulata sulle armature viene rilasciata, generando una $\Delta V = \varepsilon$.

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$Q(t) = C \cdot \Delta V \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$

- $t < 0$: condensatore carico

$$Q(t) = Q_{MAX}(e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \varepsilon$$

- $t \to 0$: condensatore inizia a scaricarsi

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \varepsilon$$

Il condensatore si comporta come un generatore avente una fem pari a

$$\varepsilon = \frac{Q_{MAX}}{C}$$

- $t \to \infty$: condensatore scarico

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-\infty}{RC}}) = 0$$

4.2.6 Condensatori collegati in parallelo

Calcoliamo la capacità equivalente C di due condensatori collegati in serie:

$$q_1 = C_1 \cdot \Delta V \qquad q_2 = C_2 \cdot \Delta V \qquad q = q_1 + q_2 = C \cdot \Delta V$$

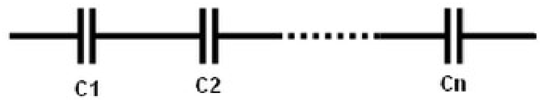
$$C\Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$

$$C = C_1 + C_2$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n condensatori vale:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

4.2.7 Condensatori collegati in serie



Calcoliamo la capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo:

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C}$$

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2014 - 2015
Esame di Fisica - 22/06/2015

Esercizio 1
Siano dati due vettori in componenti cartesiane: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinare le componenti cartesiane del vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ ed il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{a}$.

Esercizio 2
Due cariche puntiformi $Q_1 = +4q$ e $Q_2 = +2q$ sono poste rispettivamente nei punti P_1=(0,0) m e P_2=(8,6) m di un piano cartesiano (x, y). Nello stesso piano è presente anche un'altra carica puntiforme $q_0 = +q$ di massa m. Determinare:

a) il campo elettrico $\vec{E}$ prodotto da Q_1 e Q_2 nel punto medio M del del segmento $\overline{P_1P_2}$;

b) le coordinate del punto A del segmento $\overline{P_1P_2}$ in cui deve essere posta q_0 affinchè q_0 sia in equilibrio.

Si supponga ora che q_0 venga messa ferma in M e poi lasciata libera di muoversi.

c) Qual è la velocità di q_0 quando raggiunge il punto A?

Si assuma q=1 mC, m=1 kg.

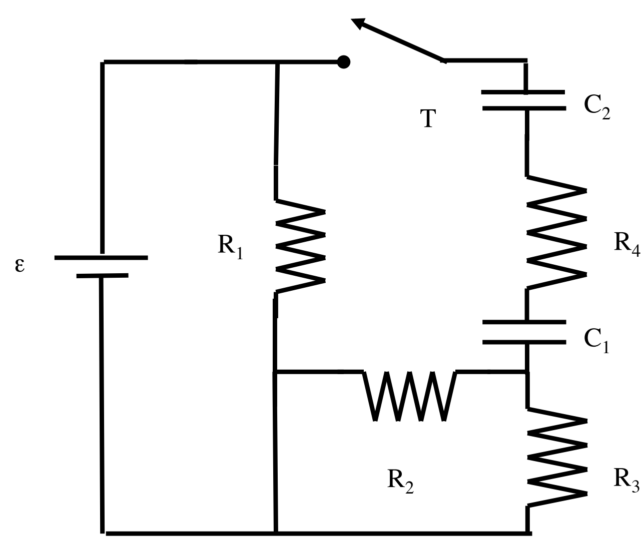
Esercizio 3
Nel circuito in figura, i resistori valgono R_1=R_2=R_3=R_4=R=6 Ω, i condensatori hanno capacità C_1=5 μF, $C_2 = 1.5\ C_1$ e la f.e.m. $\mathcal{E}$= 12 V. Dopo essere stato a lungo aperto, con i condensatori C_1 e C_2 scarichi, l'interruttore T viene chiuso. Calcolare la carica presente sulle armature del condensatore C_1 e le correnti nei quattro resistori:

a) subito prima della chiusura di T;

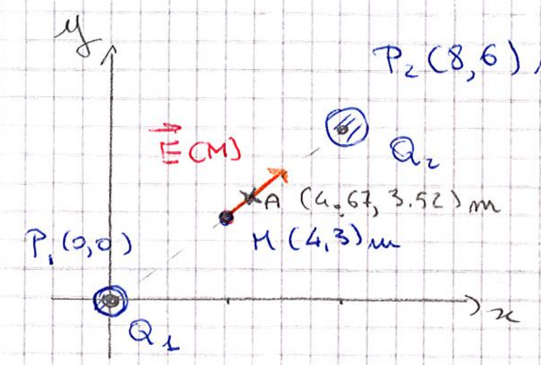
b) subito dopo la chiusura di T;

c) molto tempo dopo la chiusura di T.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Esercizio #2



Poniamo

$$\overline{MP_1} = \overline{MP_2} = d/2$$

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2}\ m = 10\ m$$

a) Vettore da P_1 a M $\qquad \overrightarrow{P_1M} = \frac{d}{2}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$

Vettore da P_2 a M $\qquad \overrightarrow{P_2M} = \frac{d}{2}\left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right)$

$$\vec{E}_{Q_1}(M) = K_e \frac{Q_1}{(d/2)^2}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_{Q_2}(M) = K_e \frac{Q_2}{(d/2)^2}\left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}(M) = K_e \frac{1}{(d/2)^2}\underbrace{(Q_1 - Q_2)}_{4q - 2q = 2q}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = K_e \frac{2q}{d^2/4}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$

$$|\vec{E}(M)| = \frac{8K_e q}{d^2} = 7.2 \times 10^5\ N/C$$

b) Poniamo $\qquad \overline{AP_1} = a \qquad \overline{AP_2} = d - a \qquad$ a è l'incognita

Vettore da P_1 a A $\qquad \overrightarrow{P_1A} = a\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$

Vettore da P_2 a A $\qquad \overrightarrow{P_2A} = (d-a)\left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right)$

$$\vec{E}_{Q_1}(A) = K_e \frac{Q_1}{a^2}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$ Campo $\vec{E}$ prodotto da Q_1 in A

$$\vec{E}_{Q_2}(A) = K_e \frac{Q_2}{(d-a)^2}\left(-\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$ Campo $\vec{E}$ prodotto da Q_2 in A

$$\vec{E}_{Q_1}(A) + \vec{E}_{Q_2}(A) = 0$$ Condizione di equilibrio

$$\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{(d-a)^2} = 0 \rightarrow 2(d-a)^2 = a^2$$

$$2d^2 - 4ad + 2a^2 = a^2 \rightarrow a^2 - 4ad + 2d^2 = 0$$

$$a = 2d \pm \sqrt{2d^2}$$ scelgo la soluzione "–" perché corrisponde a A compreso tra P_1 e P_2

$$a = d(2-\sqrt{2}) = 5.86\ m$$

Il punto A ha coordinate
$$\begin{cases} x_A = a\,4/5 = 4/5\, d(2-\sqrt{2}) = 4.69\ m \\ y_A = a\,3/5 = 3/5\, d(2-\sqrt{2}) = 3.52\ m \end{cases}$$

c) Il campo elettrico è conservativo
→ conservazione dell'energia meccanica

$$(E_{kin} + E_{pot})_M = (E_{kin} + E_{pot})_A$$

- $E_{kin}(M) = 0$ in quanto nel punto M q_0 è ferma

$$E_{pot}(M) = q_0 \{ V_{Q_1}(M) + V_{Q_2}(M) \}$$

$$V_{Q_1}(M) + V_{Q_2}(M) = k_e \frac{Q_1}{d/2} + k_e \frac{Q_2}{d/2} = k_e \frac{6q}{d/2} = k_e \frac{12q}{d}$$

- $E_{kin}(A) = \frac{1}{2} m v_A^2$

$$E_{pot}(A) = q_0 \{ V_{Q_1}(A) + V_{Q_2}(A) \}$$

$$V_{Q_1}(A) + V_{Q_2}(A) = k_e \frac{Q_1}{a} + k_e \frac{Q_2}{d-a} = k_e \frac{4q}{a} + k_e \frac{2q}{d-a}$$

$$= k_e 2q \left\{ \frac{2}{a} + \frac{1}{d-a} \right\} =$$ $d - a = d(\sqrt{2}-1)$

$$= k_e 2q \frac{2d - 2a + a}{a(d-a)} = k_e 2q \frac{1}{d(\sqrt{2}-1)^2}$$

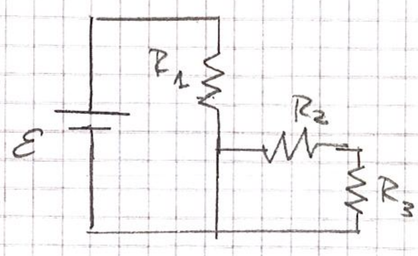
$$v_A^2 = \frac{2}{m} q_0 \left\{ 12 k_e \frac{q}{d} - 2k_e \frac{q}{d} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} \right\} = 618\ (m/s)^2$$

$$v_A = 24.9\ m/s$$

Esercizio #3

a) subito prima della chiusura di T

$$V_{C1} = V_{C2} = 0\ V \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0\ C$$



R_1 in serie con R_2 ed in parallelo con ~~tratto~~ tratto di circuito con resistenza nulla

→ in R_2 e R_3 non passa corrente

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2A$$

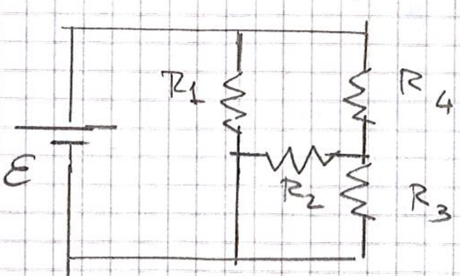
$$i_2 = i_3 = 0\ A$$

$$i_4 = 0\ A \quad (T \text{ aperto})$$

b) subito dopo la chiusura di T

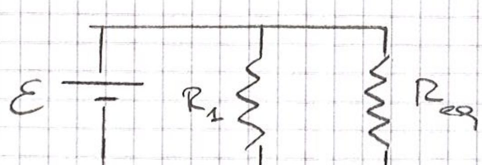
$$\underbrace{V_{C1} = V_{C2} = 0\ V}_{} \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0\ C$$

la ddp non compie "salti"



$$R_2 \,//\, R_3 \rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R}{2}$$

R_{23} in serie con R_4 $\quad R_{eq} = R_{23} + R_4 = \frac{3}{2}R$



R_1 in parallelo con R_{eq}

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2A$$

$$i_4 = i_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{3/2\, R} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4}{3}\ A$$

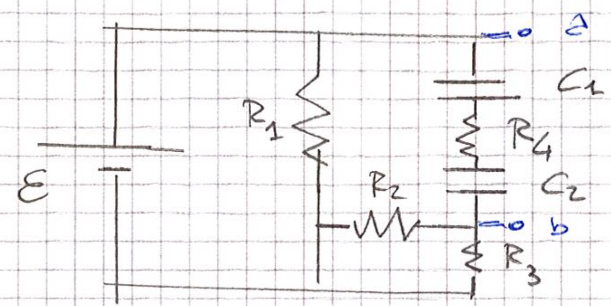
i_4 si ripartisce a metà tra R_2 e R_3

$$i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_4 = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2}{3}\ A$$

c) molto tempo dopo la chiusura di T

→ condensatori si comportano come circuito aperto

$$i_4 = 0\,A$$



NB C_1 in serie con C_2

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3}{5} C_1$$

Per quanto riguarda le correnti, si è nella stessa situazione del quesito a)

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2A$$

$$i_2 = i_3 = 0\,A$$

$$i_4 = 0\,A$$

Per quanto riguarda la ddp ai capi di C_{eq}

$$V_{C_{eq}} = V_a - V_b = \mathcal{E}$$

$$Q_{eq} = C_{eq}\,\mathcal{E} = \frac{3}{5} C_1 \mathcal{E} = 36\ \mu F$$

$Q_1 = Q_{eq}$ per definizione di condensatore in serie

$$Q_1 = 36\ \mu F$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2014 - 2015
Esame di Fisica - 13/07/2015

Esercizio 1

Siano dati i vettori $\vec{a} = -3\ \vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = -4\ \vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $\vec{a} - 2\vec{b}$ ed il modulo di $\vec{a}$. Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

NB: Si rammenti che se questo eserczio è sbagliato non si supera l'esame indipendentemente da come sono stati svolti gli altri esercizi.

Esercizio 2

Sia dato un sistema di assi cartesiani xyz. Nell'origine vi è un filo rettilineo di lunghezza infinita perpendicolare al piano xz, ossia parallelo all'asse y. Questo filo è percorso da una corrente $I_1 > 0$ nella direzione $-\vec{j}$. Vi è anche un altro filo rettilineo infinito parallelo all'asse y passante per il punto $(x = 0, z = D)$ $(D > 0)$ e percorso da una corrente $I_2\ \vec{j}$ con $I_2 > 0$.

Nel punto $P = (x = 0, y = 0, z = d)$, con $0 < D < d$, del piano xz vi è una carica q.

Risolvere i seguenti punti.

a) Calcolare la forza per unità di lunghezza che agisce sul filo nell'origine dovuta all'altro filo (si ricordi che la forza è un vettore).

b) Calcolare il campo magnetico (si rammenti che il campo magnetico è un vettore) generato dai fili in P.

c) Supponendo che la carica q in P abbia velocità $\vec{v} = u\vec{k}$, calcolare la forza (si ricordi che la forza è un vettore) dovuta al campo magnetico che agisce sulla carica.

Esercizio 3

Nel circuito in figura R=50 kΩ e le f.e.m. valgono ε_1=10 V e ε_2=20 V.

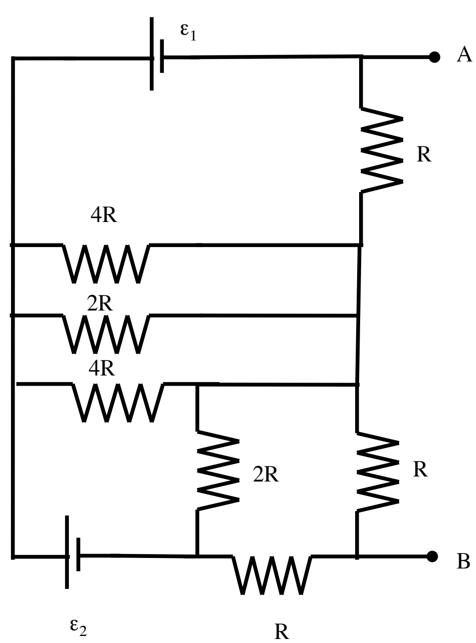
Calcolare:

a) la potenza totale dissipata nel circuito;

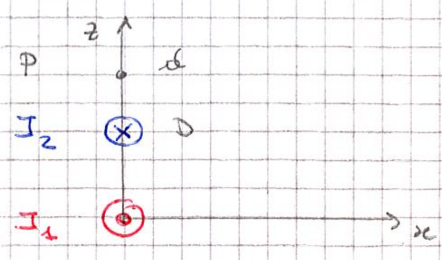
b) la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1 e quella erogata dalla f.e.m. ε_2;

c) la capacità del condensatore che posto tra i punti A e B ha sulle sue armature, in condizioni stazionarie, una carica di Q=10 μC.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



NB $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

Correnti (includendo direzione e verso)

$-I_1\vec{j}$

$+I_2\vec{j}$

a) Campo magnetico prodotto da I_2 nell'origine

$$\vec{B}_2(0)=2K_m\frac{I_2}{D}(-\vec{i})$$

Forza sul filo "1" esercitata dal filo "2"

$$\vec{F}_{2\,su\,1}=l\,I_1(-\vec{j})\times\vec{B}_2(0)=l\,I_1(-\vec{j})\times 2K_m\frac{I_2}{D}(-\vec{i})$$

$$=l\left\{2K_m\frac{I_1I_2}{D}(-\vec{k})\right\}$$

$$\vec{F}_{2\,su\,1}/l=-2K_m\frac{I_1I_2}{D}\vec{k}$$

Forza repulsiva (correnti parallele verso opposto)

b) Campo prodotto da I_1 in P

$$\vec{B}_1(P)=2K_m\frac{I_1}{d}(-\vec{i})$$

Campo prodotto da I_2 in P

$$\vec{B}_2(P)=2K_m\frac{I_2}{d-D}(+\vec{i})$$

$$\vec{B}_{tot}(P)=\vec{B}_1(P)+\vec{B}_2(P)=2K_m\left\{-\frac{I_1}{d}+\frac{I_2}{d-D}\right\}\vec{k}$$

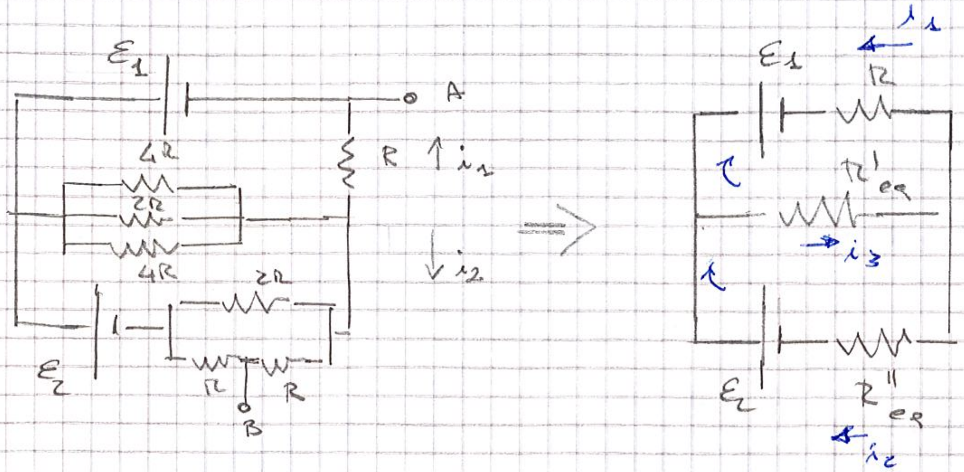
c) Forze esercitate sulla carica

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}_{tot}(P)=q\,u\,\vec{k}\times 2K_m\left[-\frac{I_1}{d}+\frac{I_2}{d-D}\right]\vec{i}$$

$$=2K_m\,q\,u\left\{-\frac{I_1}{d}+\frac{I_2}{d-D}\right\}\vec{j}$$

Nota: il verso effettivo della forza dipende dai segni di q e del termine $\left\{-\frac{I_1}{d}+\frac{I_2}{d-D}\right\}$

Es #13



Nota $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1$

a) R'_{eq} → parallelo tra 4R, 2R, 4R

$$R'_{eq} = \left(1/_{4R} + 1/_{2R} + \frac{1}{4R} \right)^{-1} = R$$

R''_{eq} → parallelo tra 2R e la serie R+R

$$R''_{eq} = \left(1/_{2R} + 1/_{(R+R)} \right)^{-1} = R$$

Usando Kirchhoff $\qquad (i_3 = i_1 + i_2)$

maglia superiore $\begin{cases} -\mathcal{E}_1 + i_1 R + (i_1 + i_2) R = 0 \\ \mathcal{E}_2 - (i_1 + i_2) R - i_2 R = 0 \end{cases}$ maglia inferiore $\rightarrow \begin{cases} -\mathcal{E}_1 + 2 i_1 R + i_2 R = 0 \\ \mathcal{E}_2 - i_1 R - 2 i_2 R = 0 \end{cases}$

$$\mathcal{E}_1 - 2\mathcal{E}_2 + 3 i_1 = 0 \quad \rightarrow \quad i_1 = 0 \text{ A}$$

$$i_2 = \mathcal{E}_1/_R = \frac{10\text{V}}{50\text{k}\Omega} = 0.2 \text{ mA}$$

$$i_3 = i_2$$

Potenza dissipata → legge di Joule

$$W_{tot} = \underbrace{R i_1^2}_{=0} + R'_{eq} i_3^2 + R''_{eq} i_2^2 = (R'_{eq} + R''_{eq}) i_2^2 = 2R i_2^2 = 2R \, \mathcal{E}_1^2/_{R^2} = 2 \, \mathcal{E}_1^2/_R = 4 \text{ mW}$$

b) Potenza erogata dalle fem

$$W_1 = \mathcal{E}_1 i_1 = \mathcal{E}_1 \cdot 0 = 0$$

$$W_2 = \mathcal{E}_2 i_2 = \mathcal{E}_2 \, \mathcal{E}_1/_R \underset{\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1}{\overset{}{=}} 2\mathcal{E}_1^2/_R = 4 \text{ mW}$$

c)

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

Usando la legge di Ohm

$$V_A + i_1 R - \frac{i_2}{2} R = V_B \quad \rightarrow \quad V_A - V_B = -i_1 R + \frac{i_2}{2} R = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_1}{R} R = \mathcal{E}_1/2$$

$i_1 = 0$

$$= 5\,V$$

$$C = \frac{Q}{\mathcal{E}_1/2} = \frac{2Q}{\mathcal{E}_1} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-6}\,C}{10\,V} = 2 \times 10^{-6}\,F = 2\,\mu F$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2014 - 2015
Esame di Fisica - 07/09/2015

Esercizio 1

Siano dati i vettori $\vec{a} = -5\,\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = +4\,\vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $2\vec{a} + 5\vec{b}$ ed il modulo di $\vec{a}$. Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Esercizio 2

Nel piano xy di un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) vi è un rettangolo di lati L e ℓ. Il lato di lunghezza L è parallelo all'asse y, quello di lunghezza ℓ è parallelo all'asse x.
Ai vertici di questo rettangolo ci sono quattro cariche puntiformi Q ed il rettangolo si muove con velocità costante $\vec{v} = u\vec{j}$.
In tutto lo spazio vi è un campo magnetico costante $\vec{B} = a\vec{j} + b\vec{k}$.
Risolvere i seguenti punti.

a) Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il rettangolo.

b) Calcolare la forza dovuta al campo magnetico che agisce su una qualsiasi delle cariche (si rammenti che la forza è un vettore).

c) Assumendo che tutte le cariche abbiano coordinate x ed y positive, calcolare la forza elettrostatica sulla carica più vicina all'origine degli assi.

Esercizio 3

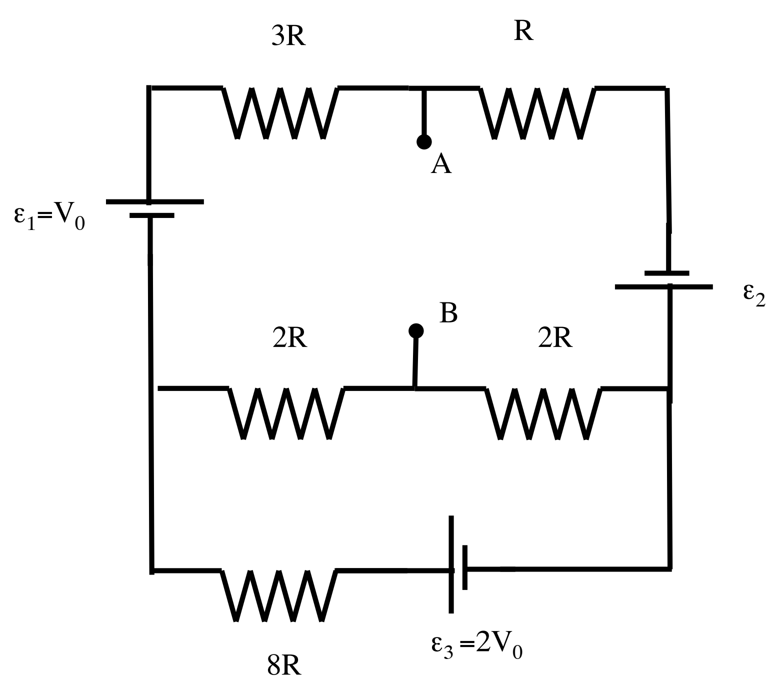
Nel circuito mostrato in figura le f.e.m. valgono rispettivamente $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = V_0$, e $\varepsilon_3 = 2V_0$. Calcolare in funzione di V_0 e R:

a) la potenza totale dissipata nel circuito;

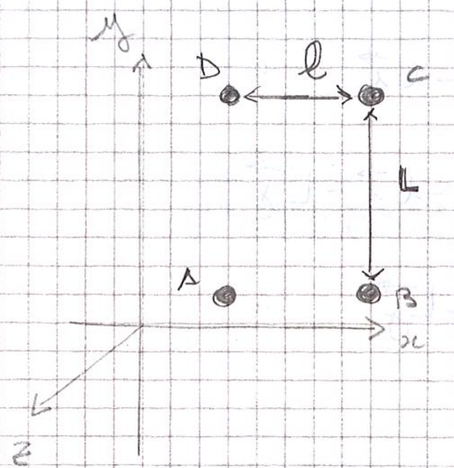
b) la differenza di potenziale $V_A - V_B$.

Successivamente si inserisce un resistore di valore R tra i punti A e B e si sostituisce la f.e.m. ε_2 con una nuova f.e.m. $\tilde{\varepsilon}_2$

c) Che valore dovrebbe avere $\tilde{\varepsilon}_2$ affinchè nel nuovo resistore non passi corrente?



Es #2



Nel piano (x, y)

$A: (x_A, y_A)$

$B: (x_A + l, y_A)$

$C: (x_A + l, y_A + L)$

$D: (x_A, y_A + L)$

NB: tutte le cariche hanno $z = 0$

a) Flusso del campo magnetico:

Scegliendo come versore ~~positivo~~ $\vec{n} = \vec{k}$

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_{rettangolo} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{rettangolo} [a\vec{j} + b\vec{k}] \cdot \vec{k} \, dS =$$

$$= \int_{rettangolo} b \, dS = b\,l\,L$$

b) forza esercitata dal campo magnetico su una delle cariche (= forza di Lorentz)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = Q(u\vec{j}) \times (a\vec{j} + b\vec{k}) =$$

$$= Qu\{a\underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{=0} + b\underbrace{\vec{j} \times \vec{k}}_{\vec{i}}\} = Qub\,\vec{i}$$

c) La carica più vicina all'origine è A

$$\vec{F}_{B\,su\,A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$$

$$\vec{F}_{C\,su\,A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_C|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_C}{|\vec{r}_A - \vec{r}_C|}$$

$$\vec{F}_{D\,su\,A} = k_e \frac{Q^2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_D|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_D}{|\vec{r}_A - \vec{r}_D|}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k} = -l\vec{i}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_C = (x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j} + (z_A - z_C)\vec{k} = -l\vec{i} - L\vec{j}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_D = (x_A - x_D)\vec{i} + (y_A - y_D)\vec{j} + (z_A - z_D)\vec{k} = -L\vec{j}$$

$$\vec{F}_{B \to A} = k_e \frac{Q^2}{l^2}(-\vec{i})$$

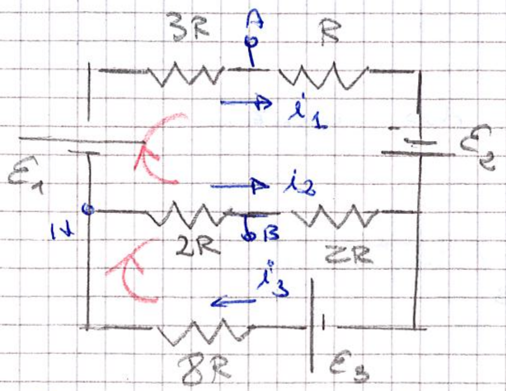
$$\vec{F}_{C \to A} = k_e \frac{Q^2}{(l^2+L^2)^{3/2}}(-l\vec{i} - L\vec{j})$$

$$\vec{F}_{D \to A} = k_e \frac{Q^3}{L^2}(-\vec{j})$$

Principio di sovrapposizione:

$$\vec{F}_{tot} = -k_e Q^2 \left\{ \left[\frac{1}{l^2} + \frac{l}{(l^2+L^2)^{3/2}} \right]\vec{i} + \left[\frac{1}{L^2} + \frac{L}{(l^2+L^2)^{3/2}} \right]\vec{j} \right\}$$

ES #3



Maglie percorse in verso orario

Per calcolare la potenza totale dissipata nel circuito occorre calcolare le 3 correnti $i_1, i_2, i_3 \to$ leggi di Kirchhoff

LdK nodi: nodo N $\quad i_1 + i_2 = i_3$

LdK maglie: maglia superiore $\quad \mathcal{E}_1 - i_1 4R + \mathcal{E}_2 + i_2 4R = 0$

LdK maglie: maglia inferiore $\quad -4R\, i_2 + \mathcal{E}_3 - 8R\, i_3 = 0$

$i_3 = i_1 + i_2$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 4R\, i_1 + 4R\, i_2 = 0 \\ \mathcal{E}_3 - 8R\, i_1 - 12R\, i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4R\, i_1 + 4R\, i_2 = -2V_0 \\ -8R\, i_1 - 12R\, i_2 = -2V_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = +\frac{4}{10}\frac{V_0}{R} \\ i_2 = -\frac{1}{10}\frac{V_0}{R} \end{cases} \qquad i_3 = i_1 + i_2 = +\frac{3}{10}\frac{V_0}{R}$$

a) potenza dissipata (effetto Joule)

$$P = i_1^2(4R) + i_2^2(4R) + i_3^2(8R) =$$

$$= \frac{16}{100}\frac{V_0^2}{R^2}4R + \frac{1}{100}\frac{V_0^2}{R^2}4R + \frac{9}{100}\frac{V_0^2}{R^2}8R = \frac{140}{100}\frac{V_0^2}{R} = \frac{7}{5}\frac{V_0^2}{R}$$

b) $V_A - V_B$: $\quad V_A + i_2 2R + \mathcal{E}_1 - i_1 3R = V_B$

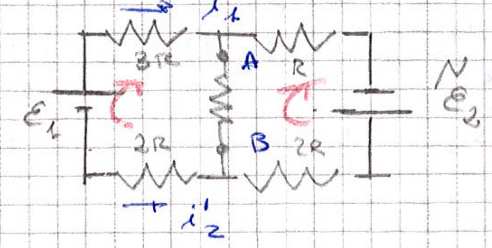
$$V_A - V_B = -\mathcal{E}_1 - i_2 2R + i_1 3R = -\frac{4}{10}V_0$$

c) Nel resistore posto fra i punti A e B non passa corrente $\to V_A - V_B = 0\,V$

La presenza di un nuovo resistore e di una nuova f.e.m. cambia le correnti calcolate nel quesito "a)"

$$i_1' + i_2' = i_3'$$

La condizione $V_A - V_B = 0$ si traduce in due equazioni



$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} -i_1' R + \tilde{\mathcal{E}}_2 + i_2' 2R = 0 \quad (DX) \\ -i_1' 3R + \mathcal{E}_1 + i_2' 2R = 0 \quad (SX) \end{cases}$$

$$\mathrm{III} \quad \mathcal{E}_3 - 8R\, i_1' - 12R\, i_2' = 0$$

~~Dal~~ Risolvendo le equazioni II e III

$$\begin{cases} i_1' 3R - \mathcal{E}_1 - i_2' 2R = 0 \\ \mathcal{E}_3 - i_1' 8R - i_2' 12R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3R\, i_1' - 2R\, i_2' = V_0 \\ -8R\, i_1' - 12R\, i_2' = -2V_0 \end{cases} \rightarrow \quad i_1' = \frac{8}{26}\frac{V_0}{R} \qquad i_2' = -\frac{1}{26}\frac{V_0}{R}$$

$$i_3' = i_1' + i_2' = \frac{7}{26}\frac{V_0}{R}$$

Sostituendo i_1' e i_2' nell'equazione I

$$\tilde{\mathcal{E}}_2 = R i_1' - 2R i_2' = +\frac{8}{26} V_0 + \frac{2}{26} V_0 = \frac{10}{26} V_0 = \frac{5}{13} V_0$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2014 - 2015
Esame di Fisica - 23/09/2015

Esercizio 1
Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y): P=(1,2), A=(1,5), B=(5,2). Scrivere il vettore $\vec{a}$ che va dal punto P al punto A, il vettore $\vec{b}$ che va dal punto P al punto B ed il vettore $\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}$.

Esercizio 2
Nel piano xy di un sistema di coordinate cartesiane xyz vi è un triangolo equilatero di lato ℓ. Un vertice del triangolo è nell'origine. Al tempo $t = 0$ un lato è sull'asse x ed il triangolo ruota attorno all'asse z con velocità angolare costante ω (vedi figura). Ai vertici di questo triangolo ci sono tre cariche elettriche puntiformi Q. In tutto lo spazio vi è un campo magnetico costante $\vec{B} = b(-\sqrt{3}\ \vec{i} + \vec{j})$.

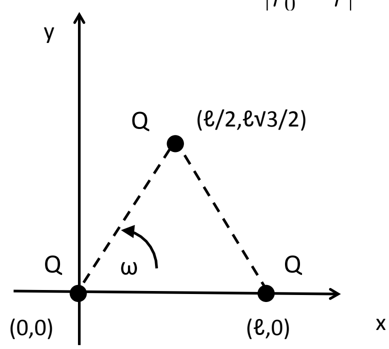
Calcolare:

a) la forza elettrostatica sulla carica nell'origine ed il potenziale elettrostatico prodotto nell'origine dalle altre due cariche, nell'ipotesi che il potenziale all'infinito valga V_0;

b) la forza totale sul sistema delle tre cariche dovuta al campo magnetico al tempo $t = 0$;

c) il campo magnetico nell'origine generato dal moto delle cariche. Si rammenti che il campo magnetico in un punto $\vec{r}_0$ generato da una carica elettrica q posta in punto $\vec{r}$ e che si muove con velocità $\vec{v}$ è

$$\vec{B}(\vec{r}_0) = k_m q \frac{\vec{v} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$



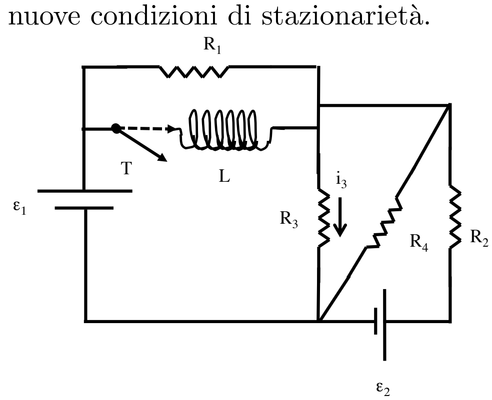
Esercizio 3
Si consideri il circuito mostrato in figura in cui $R_1 = R_2 = R$ e $R_3 = R_4 = 2R$. In una prima fase, l'interruttore T è aperto da molto tempo.

a) Calcolare il rapporto tra le due f.e.m. $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ nel caso in cui $\varepsilon_2 = V_0$ e la corrente che percorre R_3 valga $i_3 = V_0/R$.

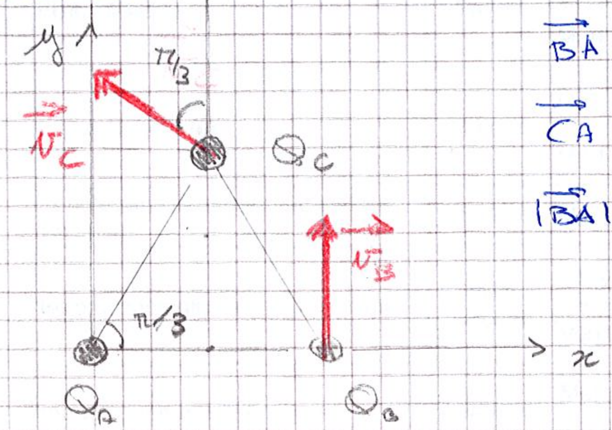
In una seconda fase si chiude l'interruttore T. Calcolare, in funzione di V_0 e R, la corrente che percorre R_2:

b) subito dopo avere chiuso l'interruttore;

c) quando si raggiugono le nuove condizioni di stazionarietà.



Es #2



$$\vec{BA} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} = -l\vec{i}$$

$$\vec{CA} = (x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j} = -l/_2\,(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$$

$$|\vec{BA}| = |\vec{CA}| = l$$

a) $$\vec{F}_{Q_B \to Q_A} = K_e \frac{Q^2}{l^2}(-\vec{i}) \qquad V_{Q_B}(x,y) = K_e \frac{Q}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + C'$$

$$\vec{F}_{Q_C \to Q_A} = K_e \frac{Q^2}{l^2}\left[-\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right] \qquad V_{Q_C}(x,y) = K_e \frac{Q}{[(\frac{l}{2}-x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}l - y)^2]^{1/2}} + C''$$

$$\vec{F}_{tot} = K_e \frac{Q^2}{l^2}\left(-\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$

Avendo posto $C = C' + C''$

$$V_{tot}(x,y) = K_e Q \left\{\frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(\frac{l}{2}-x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}l - y)^2]^{1/2}}\right\} + C$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} V_{tot}(x,y) = V_0 = C$$

$$V_{tot}(x,y) = K_e Q \left\{\frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(\frac{l}{2}-x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}l - y)^2]^{1/2}}\right\} + V_0$$

$$V_{tot}(x=0, y=0) = 2K_e \frac{Q}{l} + V_0$$

b) Velocità con cui traslano le cariche

$|\vec{v}_A| = 0$

$|\vec{v}_B| = \omega l \qquad \vec{v}_B = \omega l \vec{j}$

$|\vec{v}_C| = \omega l \qquad \vec{v}_C = \omega l \left(-\sin\frac{\pi}{3}\vec{i} + \cos\frac{\pi}{3}\vec{j}\right) = \frac{\omega l}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$

Forza di Lorentz $\quad \left(\vec{B} = b\left(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)\right)$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$
$\vec{j} \times \vec{j} = 0$

- sulla carica Q_A $\qquad \vec{F}_{L,A} = Q\,\vec{v}_A \times \vec{B} = 0$
- sulla carica Q_B $\qquad \vec{F}_{L,B} = Q\,\vec{v}_B \times \vec{B} = Q\omega l\,\vec{j} \times b\left(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right) =$
$$= Q\omega l b\sqrt{3}\,\vec{k}$$
- sulla carica Q_C $\qquad \vec{F}_{L,C} = Q\,\vec{v}_C \times \vec{B} = 0 \quad$ poiché $\vec{v}_C \parallel \vec{B}$

$$\vec{F}_{L,tot} = \vec{F}_{L,B} = Q\omega l b\sqrt{3}\,\vec{k}$$

c) Si osservi che Q_B e Q_C producono lo stesso campo magnetico nell'origine (in analogia a due cariche elettriche che percorrono una spira circolare)
→ è sufficiente calcolare il contributo di una delle due (ad es. Q_B) e moltiplicare il risultato $\times 2$

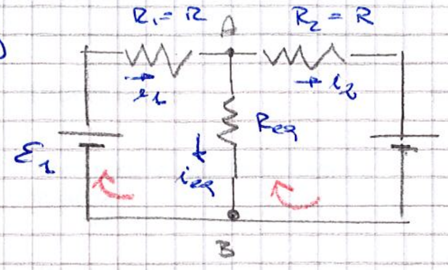
$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$$\vec{B}(Q_B) = K_m Q \frac{\vec{v}_B \times \vec{BA}}{|\vec{BA}|^3} = K_m Q \frac{\omega l\,\vec{j} \times (-l\,\vec{i})}{l^3} = K_m Q\omega \frac{l^2\vec{k}}{l^3}$$

$$\vec{B}_{tot} = 2\vec{B}(Q_B) = 2K_m \frac{Q\omega}{l}\,\vec{k}$$

Es #3

a)



$R_3 // R_4 \qquad R_{eq} = \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = R$

NB: $i_{eq} = 2\, i_3$

Un modo per vederlo è che

$V_A - V_B = R_{eq}\, i_{eq} = R_3\, i_3$

$\rightarrow i_{eq} = \dfrac{R_3}{R_{eq}}\, i_3 = 2\, i_3$

Usando le leggi di Kirchhoff.

LdK nodi $\quad i_1 = i_2 + i_{eq}$

LdK maglia SX $\quad \mathcal{E}_1 - R i_1 - R i_{eq} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 3 R i_{eq} = 0$

LdK maglia DX $\quad -\mathcal{E}_2 + R i_{eq} - R i_2 = 0$

$\mathcal{E}_1 = 3 R i_{eq} - \mathcal{E}_2 = 6V_0 - V_0 = 5V_0$

$$i_1 = \mathcal{E}_1/R - i_{eq} = 5V_0/R - 2V_0/R = 3V_0/R$$

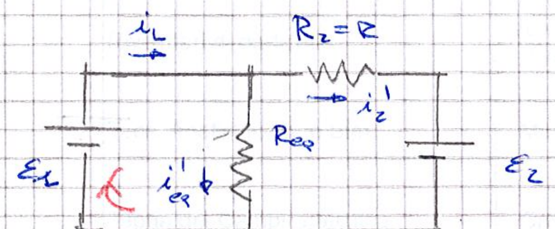
$$i_2 = -\mathcal{E}_2/R + i_{eq} = -V_0/R + 2V_0/R = V_0/R$$

$$\boxed{i_2^{\circ} = V_0/R}$$

b) Immediatamente dopo la chiusura di T il ramo con l'induttore continua a comportarsi come un circuito aperto

$\rightarrow$ le correnti non cambiano $\rightarrow \quad \boxed{i_2^{\circ} = V_0/R}$

c) Nelle nuove condizioni di stazionarietà, L si comporta come un corto circuito in parallelo con R_1 $\rightarrow$ in R_1 non circola più corrente



$\mathcal{E}_1 - R i_2' - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad$ LdK maglia esterna

$$i_2' = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R} = 4V_0/R \qquad \boxed{i_2^{\circ\prime} = 4V_0/R}$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2014 - 2015
Esame di Fisica - 05/02/2016

Esercizio 1
Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y): P=(2,1), A=(4,1), B=(4,3). Scrivere il vettore $\vec{a}$ che va dal punto P al punto A, il vettore $\vec{b}$ che va dal punto P al punto B e calcolare il prodotto scalare $\vec{b} \cdot \vec{a}$.

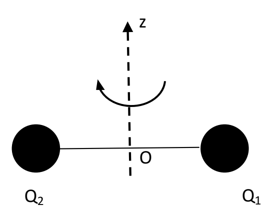
Esercizio 2
Sia dato un sistema di assi cartesiani (x, y, z). Una sbarra di lunghezza $2R$ ruota attorno al proprio centro che si trova nell'origine della terna di assi cartesiani. L'asse z coincide con l'asse di rotazione e la velocità angolare di rotazione è costante e vale ω. Agli estremi della sbarra rotante sono fissate due cariche puntiformi Q_1 e Q_2. Nell'origine c'è una carica puntiforme q che si muove con velocità $\vec{v} = u\vec{j}$. Calcolare:

a) il potenziale elettrico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine assumendo che il valore del potenziale all'infinito sia V_i;

b) il campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine quando la carica Q_1 si trova in $(R, 0, 0)$;

c) il campo magnetico generato da Q_1 e Q_2 nell'origine quando la carica Q_1 si trova in $(R, 0, 0)$;

d) la forza totale agente sulla carica q quando si trova nell'origine.

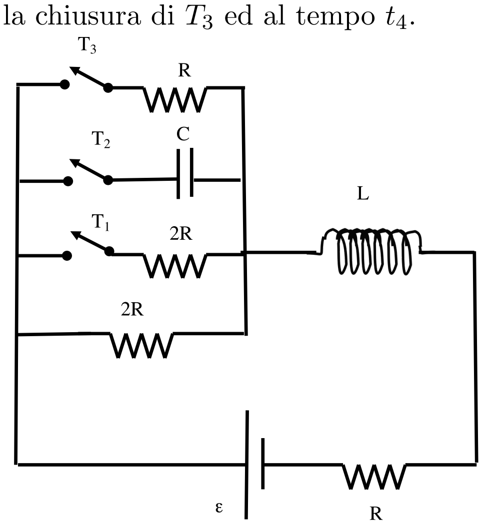


Esercizio 3
Si consideri il circuito mostrato in figura in cui R=8 kΩ, ε=24 V, C=300 μF e L=1 mH. Inizialmente gli interruttori T_1, T_2 e T_3 sono aperti da molto tempo ed il condensatore C è scarico. All'istante t_1 si chiude l'interruttore T_1, all'istante $t_2 \gg t_1$ si chiude l'interruttore T_2 ed infine all'istante $t_3 \gg t_2$ si chiude l'interruttore T_3. Sia inoltre t_4 il tempo in cui si raggiungono le condizioni stazionarie finali. Calcolare:

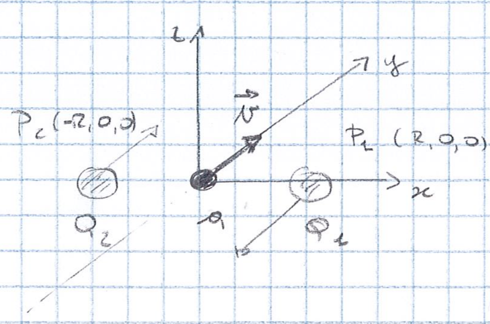
a) la carica presente sulle armature del condensatore ai tempi t_1, t_2, t_3 e t_4;

b) la corrente che percorre l'induttore ai tempi t_1, t_2, t_3 e t_4;

c) la differenza di potenziale ai capi dell'induttore immediatemente dopo la chiusura di T_1, dopo la chiusura di T_2 , dopo la chiusura di T_3 ed al tempo t_4.



Es #2



$$\overrightarrow{P_1O} = -R\vec{i}$$
$$\overrightarrow{P_2O} = +R\vec{i}$$

a) potenziale generato nell'origine (uso additività dei potenziali)

$$V = V_{Q_1} + V_{Q_2} = K_e\frac{Q_1}{R} + K_e\frac{Q_2}{R} + V_i$$

In un punto di coordinate $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$V(r) = K_e\frac{Q_1}{[(x-R)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + K_e\frac{Q_2}{[(x+R)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + C \qquad \lim_{r\to\infty} V(r) = C = V_i$$

b) Campo $\vec{E}$ prodotto nell'origine (uso principio sovrapposizione)

$$\vec{E}_{Q_1} = K_e\frac{Q_1}{R^2}(-\vec{i}) \qquad \vec{E} = K_e\frac{1}{R^2}(-Q_1+Q_2)\vec{i}$$

$$\vec{E}_{Q_2} = K_e\frac{Q_2}{R^2}(+\vec{i})$$

c) Campo $\vec{B}$ prodotto nell'origine (uso principio di sovrapposizione)

Q_1 ruotando può essere assimilato ad una spira di raggio R

e percorsa da una corrente $i_1 = \frac{Q_1}{T} = \frac{Q_1}{2\pi/\omega}$

$$|\vec{B}_{Q_1}| = 2K_m\frac{\pi i_1}{R} = \cancel{2}K_m\frac{\cancel{\pi}Q_1}{\cancel{2\pi}/\omega}\frac{1}{R} = K_m\frac{Q_1}{R}\omega$$

$$\vec{B}_{Q_1} = K_m\frac{Q_1}{R}\omega(-\vec{k}) \quad \text{regola mano destra}$$

Analogamente Q_2 può essere assimilata ad una spira di raggio R percorsa da una corrente $i_2 = \frac{Q_2}{T} = \frac{Q_2}{2\pi/\omega}$

$$|\vec{B}_{Q_2}| = 2K_m\frac{\pi i_2}{R} = K_m\frac{\cancel{\pi}Q_2}{R}\frac{\omega}{\cancel{\pi}}$$

$$\vec{B}_{Q_2} = K_m\frac{Q_2}{R}\omega(-\vec{k}) \quad \text{regola mano destra}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{Q_1} + \vec{B}_{Q_2} = K_m\, \omega\, \frac{1}{R}\, (Q_1 + Q_2)\, (-\vec{k})$$

d) La forza che agisce su q si ottiene dalla espressione della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\, (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$q\vec{E} = q\, K_e\, \frac{1}{R^2}\, (-Q_1 + Q_2)\, \vec{i}$$

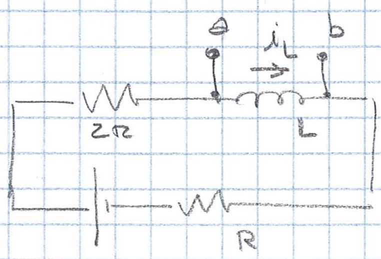
$$q\, \vec{v} \times \vec{B} = q\, (u\vec{j}) \times \left(K_m \frac{\omega}{R}\right) (Q_1 + Q_2)\, (-\vec{k}) =$$

$$= q\, K_m\, u\, \frac{\omega}{R}\, (Q_1 + Q_2)(-\vec{i}) \qquad \vec{j} \times (-\vec{k}) = -\vec{i}$$

$$\vec{F} = q \left\{ K_e\, \frac{-Q_1 + Q_2}{R^2} - u\, K_m\, \frac{\omega}{R}\, (Q_1 + Q_2) \right\} \vec{i}$$

Es #3

- Da $t=0$ fino a t_1 (escluso)



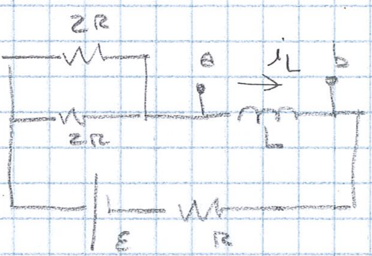
subito prima di t_1

$V_L = V_a - V_b = 0$

$\mathcal{E} - 2R\, i_L - V_L - R i_L = 0 \qquad i_L = \mathcal{E}/3R = 1\,mA$

$V_C = 0 \rightarrow Q = C V_C = 0$

- $t = t_1$



$R' = \dfrac{(2R)(2R)}{2R+2R} = R$

(parallelo $2R // 2R$)

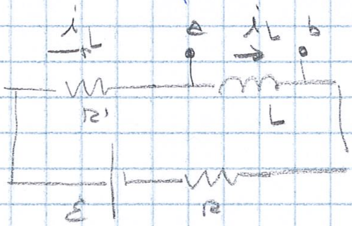
i_L non cambia $\rightarrow i_L = \mathcal{E}/3R = 1\,mA$

$\mathcal{E} - i_L R' - V_L - i_L R = 0$

$V_L = \mathcal{E} - \underbrace{i_L}_{\mathcal{E}/3R} \underbrace{(R+R')}_{2R} \rightarrow \quad V_L = \mathcal{E}/3 = 8V$

$V_C = 0 \rightarrow Q = C V_C = 0$

- Da t_1 fino a t_2 (escluso)

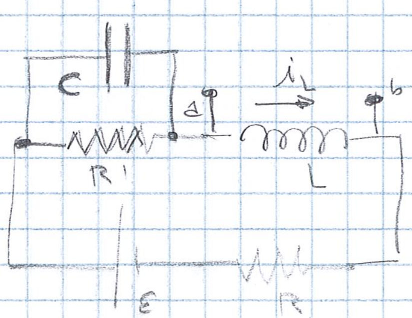


$V_L = V_a - V_b = 0$ (subito prima di t_2)

$\mathcal{E} - i_L R' - V_L - i_L R = 0 \rightarrow i_L = \mathcal{E}/2R = 1{,}5\,mA$

$V_C = 0 \rightarrow Q = C V_C = 0$

- $t = t_2$



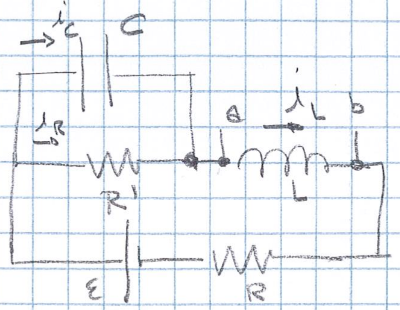
i_L non cambia $\rightarrow i_L = \mathcal{E}/2R = 1{,}5\,mA$

V_C non cambia $\rightarrow V_C = 0$

$\mathcal{E} - V_C - V_L - i_L R = 0 \rightarrow V_L = \mathcal{E}/2 = 12V$

$Q = C V_C = 0$

• Da t_2 a t_3 (escluso)



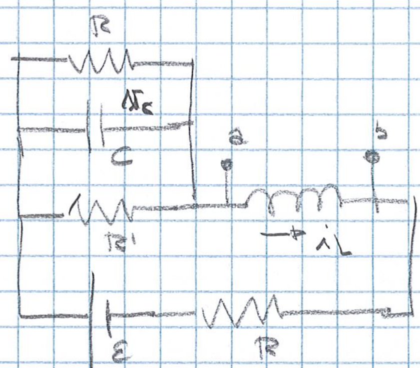
All'istante t_3 $\begin{cases} v_L = 0 \\ C \text{ si comporta come circuito aperto} \end{cases}$

$i_L = i_C + i_R \rightarrow i_L = i_R$

$\mathcal{E} - R' i_L - v_L - R i_L = 0 \qquad i_L = \frac{\mathcal{E}}{2R} = 1.5 \text{ mA}$

$v_C = R' i_L = \frac{\mathcal{E}}{2} = 12 \text{ V} \qquad Q = C v_C = 3.6 \text{ mC}$

• $t = t_3$

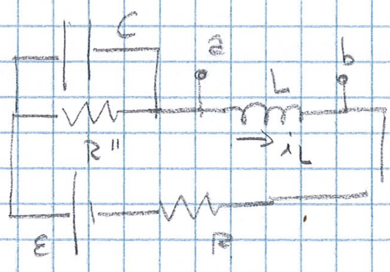


i_L non cambia $\quad i_L = \frac{\mathcal{E}}{2R} = 1.5 \text{ mA}$

v_C non cambia $\quad v_C = \frac{\mathcal{E}}{2} \qquad Q = C\frac{\mathcal{E}}{2} = 3.6 \text{ mC}$

$\mathcal{E} - \underbrace{v_C}_{\mathcal{E}/2} - v_L - \underbrace{R i_L}_{\frac{\mathcal{E}}{2R}R} = 0 \rightarrow v_L = 0$

• $t \gg t_3$



Condizioni stazionarie

C → circuito aperto

L → corto circuito $\qquad v_L = 0$

$\mathcal{E} - R'' i_L - v_L - R i_L = 0 \Rightarrow i_L = \frac{2\mathcal{E}}{3R} = 2 \text{ mA}$

$R'' = \frac{R'R}{R'+R} = \frac{R}{2}$

parallelo $R' /\!/ R$

$v_C = i_L R'' = \frac{2\mathcal{E}}{3R}\frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}}{3} = 8 \text{ V}$

$Q = C v_C = 2{,}4 \text{ mC}$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2015 - 2016
Esame di Fisica - 22/06/2016

Esercizio 1
Siamo dati i vettori $\vec{a} = -5\ \vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{b} = +4\ \vec{i} - \vec{j}$. Calcolare $2\vec{a} + 5\vec{b}$ ed il modulo di $\vec{b}$. Calcolare anche il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Esercizio 2
Consideriamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z). Nel piano xy vi è una carica puntiforme q che ruota in senso antiorario con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio R con centro nell'origine del sistema di riferimento. In tutto lo spazio vi è un campo magnetico uniforme che varia linearmente in funzione del tempo: $\vec{B}(t) = a\vec{j} + bt\vec{k}$.
Calcolare:

a) il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{j}$;

b) il flusso del campo magnetico ad un generico istante t attraverso la circonferenza descritta dal moto della carica q;

c) il vettore forza dovuto al campo magnetico che agisce sulla carica q quando essa si trova in $\vec{r} = R\vec{j}$;

d) la forza elettromotrice indotta che è presente sulla circonferenza su cui ruota la carica.

Esercizio 3
Nel circuito in figura i resistori valgono rispettivamente R_1=R_2=R=2 $k\Omega$ e R_0=R_3=R_4=$R/2$, e la f.e.m. $\mathcal{E}$= 12 V. Il condensatore ha capacità C=3μF ed è inizialmente scarico. Dopo essere stato a lungo aperto, l'interruttore T viene chiuso.
Calcolare la corrente che percorre R_0, la carica presente su C e la differenza di potenziale ai capi di L:

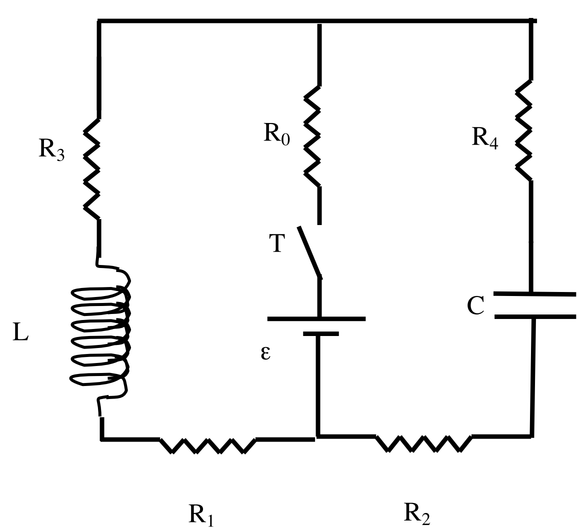
a) subito dopo la chiusura di T;

b) molto tempo dopo la chiusura di T.

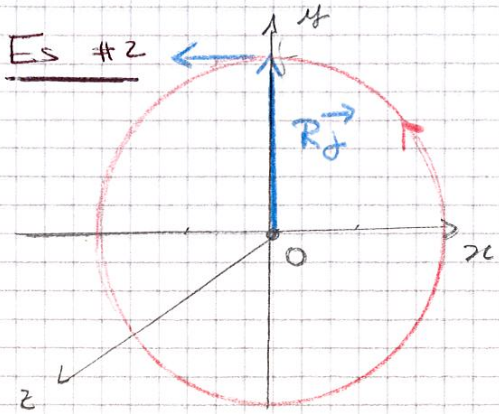
Si determini inoltre

c) quanto vale la corrente che percorre R_0 se i valori di L e C sono tali che, ad un certo istante, la carica presente sulle armature di C è metà del valore finale e, in quello stesso istante, la differenza di potenziale ai capi di L è metà di quella iniziale.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



a) Vettore velocità nel punto $\vec{r} = R\vec{j}$

$$\vec{v} = -\omega R \vec{i}$$

(In alternativa: $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times R\vec{j} = -\omega R \vec{i} \ )$$

b) Flusso di $\vec{B}$

Occorre scegliere un verso normale alla superficie della circonferenza.

Scegliendo $\vec{n} = \vec{k}$ (direzione asse z positivo)

$$\phi_{\vec{B}} = \int \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS =$$

$$= \int (a\vec{j} + bt\vec{k}) \cdot \vec{k} \, dS =$$

$$= \int bt \, dS = bt \pi R^2$$

c) Forza di Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

con $\begin{cases} \vec{v} = -\omega R \vec{i} \\ \vec{B} = a\vec{j} + bt\vec{k} \end{cases}$

$$\vec{F} = q(-\omega R \vec{i}) \times (a\vec{j} + bt\vec{k}) = -\omega R q (a\vec{k} - bt\vec{j})$$

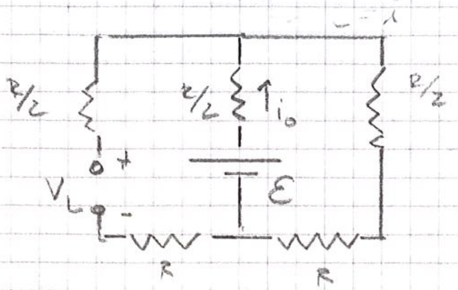
d) Legge di Faraday Lenz

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi_{\vec{B}}}{dt} = -b\pi R^2$$

Es #3

a) Subito dopo la chiusura di T

- ddp ai capi di C $V_C = 0$
  $\rightarrow$ C si comporta come corto circuito
- corrente in L $i_L = 0$
  $\rightarrow$ L si comporta come circuito aperto



L. di Kirchhoff maglia DX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i(R_4 + R_2) = 0 \qquad i = i_0 \qquad R_0 = R_4 = R/2 \qquad R_2 = R$$

$$\mathcal{E} - i_0 (R_0 + R_4 + R_2) = 0$$

$$\mathcal{E} - i_0 2R = 0 \longrightarrow i_0 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{12\,V}{4\,k\Omega} = 3\,mA$$

$$V_C = 0 \rightarrow Q = C \cdot V_C = 0\ C$$

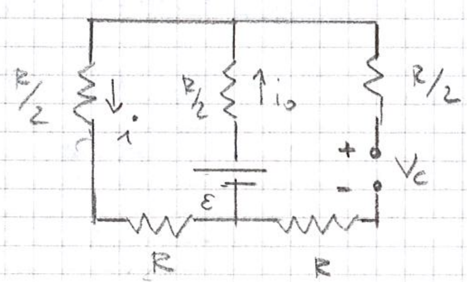
L. di Kirchhoff maglia SX

$$V_L + i_0 R_0 - \mathcal{E} = 0$$

$$V_L = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R}\frac{R}{2} = \frac{3}{4}\mathcal{E} \qquad V_L = \frac{3}{4}\mathcal{E} = 9\,V$$

b) Molto tempo dopo la chiusura di T (stazionarietà)

- C si comporta come circuito aperto
- L si comporta come corto circuito $\rightarrow V_L = 0$



L. di Kirchhoff maglia SX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i(R_3 + R_1) = 0 \qquad i = i_0 \qquad R_0 = R_3 = R/2 \qquad R_1 = R$$

$$\mathcal{E} - i_0 (R_0 + R_3 + R_1) = 0$$

$$\mathcal{E} - i_0 2R = 0 \longrightarrow i_0 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{12\,V}{4\,k\Omega} = 3\,mA$$

$$V_L = 0\,V$$

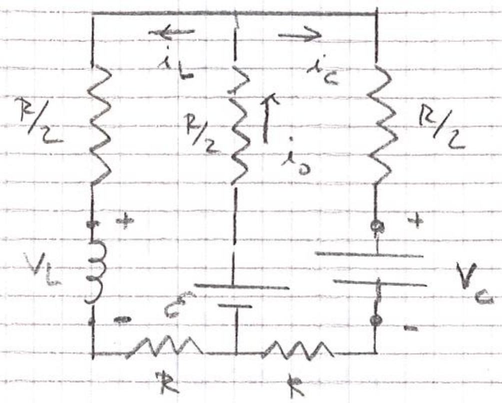
L. di Kirchhoff maglia DX

$$\mathcal{E} - i_0 R_0 - V_C = 0$$

$$V_C = \mathcal{E} - i_0 R/2 = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R}\frac{R}{2} = \frac{3}{4}\mathcal{E} \qquad V_C = \frac{3}{4}\mathcal{E} = 9\,V \rightarrow Q = C \cdot V_C = 18\,\mu C$$

c) Nell' istante descritto al punto c

- ai capi di C è presente una ddp $V_C = \frac{3}{8}\mathcal{E}$
- ai capi di L è presente una ddp $V_L = \frac{3}{8}\mathcal{E}$



Maglia SX

$i_3 R_1 + V_L + i_3 R_3 + i_0 R_0 - \mathcal{E} = 0$

$i_3 (R_1 + R_3) + i_0 R_0 - \mathcal{E} + \frac{3}{8}\mathcal{E} = 0$

$\frac{3}{2} R i_3 + \frac{R}{2} i_0 - \frac{5}{8}\mathcal{E} = 0$

Maglia DX

$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i_4 R_4 - V_C - i_4 R_2 = 0$

$\mathcal{E} - i_0 R_0 - i_4 (R_2 + R_4) - \frac{3}{8}\mathcal{E} = 0$

$\frac{5}{8}\mathcal{E} - i_0 \frac{R}{2} - i_4 \frac{3}{2} R = 0$

L. di Kirchhoff dei nodi

$i_0 = i_3 + i_4$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} R i_3 + \frac{R}{2} i_0 - \frac{5}{8}\mathcal{E} = 0 \\ \frac{5}{8}\mathcal{E} - i_0 \frac{R}{2} - \frac{3}{2} R i_4 = 0 \\ i_0 = i_3 + i_4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 3 i_3 + i_0 - \frac{5}{4}\frac{\mathcal{E}}{R} = 0 \\ \frac{5}{4}\frac{\mathcal{E}}{R} - i_0 - 3 i_4 = 0 \\ i_3 = i_0 - i_4 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono

$i_0 = \mathcal{E}/2R = \frac{12V}{4k\Omega} = 3\ mA$

$i_3 = + \mathcal{E}/4R = + \frac{12V}{8k\Omega} = +1.5\ mA$

$i_4 = + \mathcal{E}/4R = \frac{12V}{8k\Omega} = 1.5\ mA$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2015 - 2016
Esame di Fisica - 20/07/2016

Esercizio 1
Siamo dati i vettori $\vec{a} = 3\vec{i} - 14\vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcolare il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, il modulo di $\vec{s}$ ed il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Esercizio 2
Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz. Nel piano xy vi è una carica puntiforme q di massa m che ruota in senso antiorario con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio R con centro in $(R, 0, 0)$. Risolvere i seguenti punti.

a) Calcolare il vettore velocità della carica q quando essa si trova nell'origine.

b) Calcolare il vettore accelerazione della carica q quando essa si trova nell'origine.

c) Calcolare il vettore campo elettrico generato dalla carica q nel centro della circonferenza quando essa si trova nell'origine.

d) Calcolare il potenziale elettrico all'infinito se il potenziale elettrico nel centro della circonferenza è nullo.

e) Calcolare il vettore campo magnetico necessario per far muovere la particella carica lungo l'orbita circolare con velocità angolare costante.

Esercizio 3
Nel circuito mostrato in figura R=1 kΩ, R'=$R/2$, ε_1=6 V e $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Il circuito è in condizioni stazionarie. Si calcoli la corrente i' nel resistore R' e la differenza di potenziale $V_B - V_A$ nei seguenti casi:

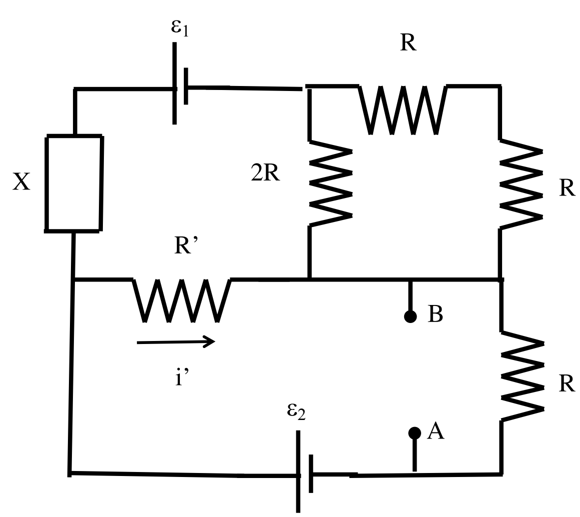
a) X è un induttore di induttanza L=100 mH;

b) X è un condensatore di capacità C=100 nF.

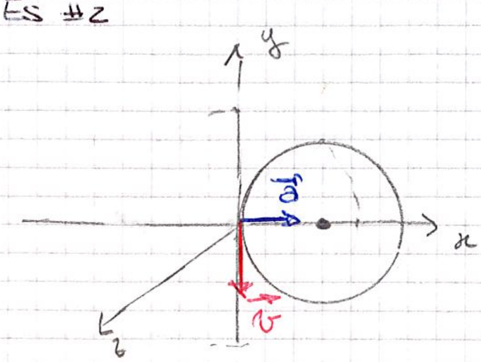
Si determini inoltre

c) il valore di $V_B - V_A$ quando X è una f.e.m. tale per cui i'=0.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



a) Come si vede dalla figura la velocità della carica è $\vec{v} = -\omega R \vec{j}$

In alternativa si poteva usare la definizione del vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \vec{k}) \times (-R\vec{i}) = -\omega R \vec{j}$$

b) Siccome il moto è circolare <u>uniforme</u> (ω è costante)

l'unica componente dell'accelerazione è quella centripeta

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{i} = \omega^2 R \vec{i}$$

c) Campo $\vec{E}$ prodotto da q

$$\vec{E} = K_e q \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\vec{r}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$
$$\vec{r} = R\vec{i} + 0\vec{j}$$
$$\vec{r}-\vec{r}_0 = R\vec{i}$$

$$= K_e \frac{q}{R^2}\vec{i}$$

d) Potenziale nel centro della circonferenza

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} + V_0$$

$r = R$ $\quad V(R) = K_e \frac{q}{R} + V_0 = 0 \quad \rightarrow V_0 = -K_e \frac{q}{R}$

Potenziale all'infinito

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} - K_e \frac{q}{R}$$

$$V_\infty = \lim_{r\to\infty} V(r) = -K_e \frac{q}{R}$$

e) Campo magnetico per far muovere le particelle di moto circolare uniforme → Deve essere perpendicolare al piano x, y

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \underbrace{m a_c}_{\text{Forza centripeta}} = \underbrace{q v B}_{\text{Forza di Lorentz}} \rightarrow m\omega^2 R = q\,\omega R B$$

$$\rightarrow B = \frac{m\omega}{q}$$

(moto di ciclotrone)

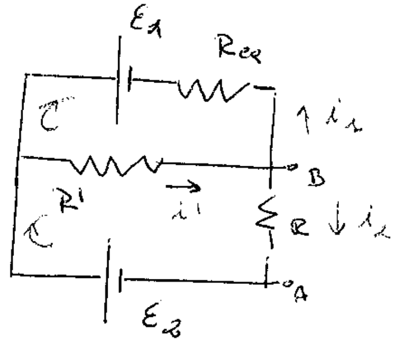
Per quanto riguarda il verso $q\vec{v}\times\vec{B}$ deve esser diretto lungo $+\vec{i}$ (come acc centripeta)

$$q(-\omega R\vec{j}) \times B\vec{K} = -q\omega R B\,\vec{i} \rightarrow \begin{cases} q>0 & B<0 \\ q<0 & B>0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{m\omega}{q}\vec{K}$$

Es #3

a) $X = L$ stazionarietà $\Rightarrow$ corto circuito



R_{eq} : (R in serie con R) in parallelo con 2R

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R+R}\right)^{-1} = R$$

LdK maglia sup. $\quad -\mathcal{E}_1 + i_1 R_{eq} + i'R' = 0$

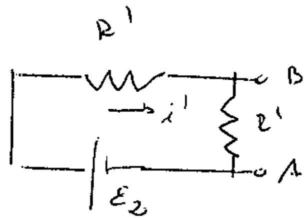
LdK maglia inf. $\quad +\mathcal{E}_2 - i'R' - i_2 R = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\mathcal{E}_1 + i_1 R + i' R/2 = 0 \\ 2\mathcal{E}_1 - i' R/2 - i_2 R = 0 \\ i_1 = i' - i_2 \end{cases}$

LdK nodi $\quad i' = i_1 + i_2$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} i' = 3\mathcal{E}_1/2R = 9 \text{ mA} \\ i_2 = 5\mathcal{E}_1/4R = 7{,}5 \text{ mA} \end{cases}$

$$V_B - i_2 R = V_A \qquad V_B - V_A = i_2 R = \frac{5\mathcal{E}_1}{4} = 7{,}5 \text{ V}$$

b) $X = C$ stazionarietà $\Rightarrow$ circuito aperto



Conta solo la maglia inf.

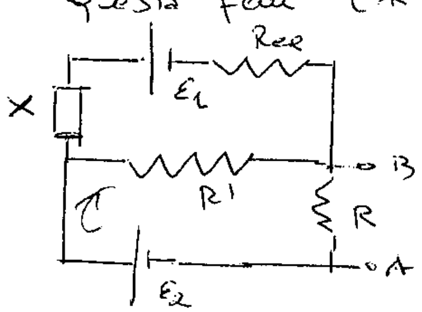
$$\mathcal{E}_2 - i'(R'+R) = 0$$

$$i' = \frac{2\mathcal{E}_1}{R'+R} = \frac{2\mathcal{E}_1}{\frac{3}{2}R} = \frac{4}{3}\frac{\mathcal{E}_1}{R} = 8 \text{ mA}$$

$$V_B - V_A = i'R = \frac{4\mathcal{E}_1}{3} = 8 \text{ V}$$

c) Se in R' non circola corrente $\rightarrow$ X è una f.e.m.

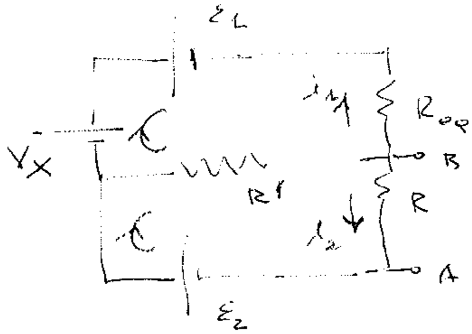
Per trovare $V_B - V_A$ non è necessario determinare il valore di questa fem (*) ma è sufficiente considerare la maglia inf



LdK $\quad \mathcal{E}_2 - i'R' - (V_B - V_A) = 0$

$$V_B - V_A = \mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$$

(4) Nel caso si voglia determinare il valore della f.e.m V_x



maglia ~~esterna~~ sup. $\quad V_x - \mathcal{E}_1 + i_1 R_{eq} = 0$

maglia inf. $\quad \mathcal{E}_2 - i_2 R = 0$

$i_1 + i_2 = 0$

Risolvendo il sistema $\quad i_2 = 2\mathcal{E}_1/R \Rightarrow V_x = \mathcal{E}_1 - i_1 R_{eq} = 3\mathcal{E}$

$V_B - V_A = i_2 R = 2\mathcal{E}_1 = 12\ V$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2015 - 2016
Esame di Fisica - 08/09/2016

Esercizio 1
Si considerino i seguenti punti in piano cartesiano (x, y): P=(0,0), A=(1,3), B=(2,1). Determinare il vettore $\vec{a}$ che va dal punto P al punto A, il vettore $\vec{b}$ che va dal punto P al punto B e la lunghezza del vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

Esercizio 2
Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz. Nel piano (x, y) vi è una carica elettrica puntiforme q di massa m che ruota in senso orario su una circonferenza di raggio R con velocità uniforme. Quando essa si trova nell'origine la sua velocità è $\vec{v} = -\frac{1}{2}u\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}u\vec{j}$, dove u è un parametro noto. Calcolare:

a) il vettore accelerazione della carica q quando essa si trova nell'origine;

b) il modulo della velocità angolare della carica q quando essa si trova nell'origine;

c) il numero di passaggi al secondo della carica q per l'origine;

d) la corrente associata al moto della carica q;

e) il vettore campo magnetico generato dalla carica q nel centro della circonferenza;

f) il vettore campo magnetico necessario per far muovere la carica q lungo l'orbita circolare;

g) il potenziale elettrico all'infinito prodotto dalla carica q, quando essa si trova nell'origine, se il potenziale elettrico nel centro della circonferenza è nullo.

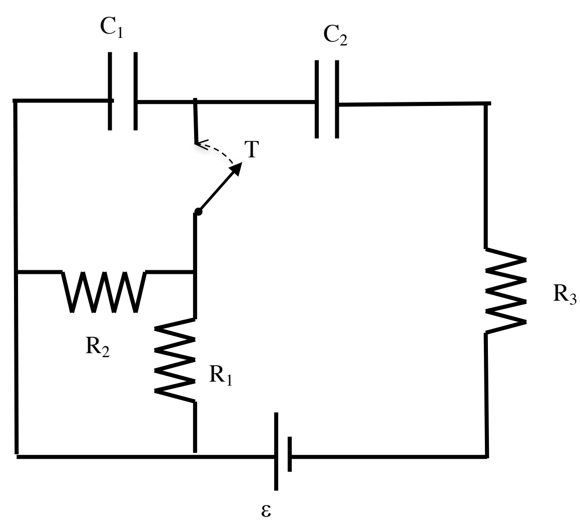
Esercizio 3
Nel circuito mostrato in figura R_1=R_2=R, R_3=$2R$, C_1=C_2=C e ε=V_0. Inizialmente il circuito è in condizioni stazionarie con l'interruttore T aperto. Al tempo t_0 si chiude l'interruttore T. Calcolare la carica presente su C_1, la carica presente su C_2 e la corrente in R_1:

a) subito prima di chiudere T;

b) subito dopo avere chiuso T;

c) quando viene raggiunta nuovamente la stazionarietà.

(R=500 Ω, C=10 nF, e V_0=6 V. Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



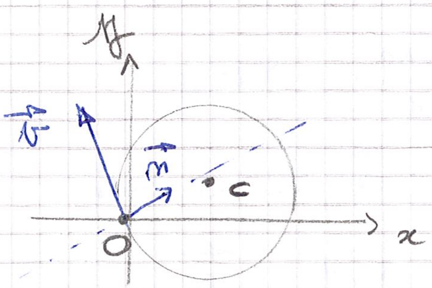
Es #2

$$\vec{v} = -\frac{u}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}u\vec{j}$$

Direzione di $\vec{v}$ $\quad \vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

Direzione $\perp$ a $\vec{v}$ (su cui si trova il centro della circonferenza)

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$



Coordinate del centro della circonferenza

$$C: \ x_c = R\sqrt{3}/2 \qquad y_c = R/2$$

a) vettore accelerazione (NB accelerazione = accelerazione centripeta)

$$|\vec{a}_c| = v^2/R \qquad v^2 = u^2/4 + 3/4\, u^2 = u^2$$

$$\vec{a}_c = |\vec{a}_c|\,\vec{n} = \frac{u^2}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

b) velocità angolare

$$|\vec{v}| = \omega R \rightarrow \omega = \frac{|\vec{v}|}{R} = \frac{u}{R}$$

c) passaggi al secondo per il punto O (0,0) $\Rightarrow$ frequenza di rivoluzione

$$2\pi f = \omega \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{2\pi R}$$

d) corrente associata al moto

$$i = qf = \frac{qu}{2\pi R}$$

e) campo magnetico prodotto da q
moto di q assimilabile a corrente che percorre una spira circolare

$$|\vec{B}| = 2k_m \frac{i\pi R^2}{R^3} = \cancel{2}k_m \frac{qu}{\cancel{2\pi}R}\frac{\cancel{\pi}}{R} = k_m\frac{qu}{R^2}$$

Direzione di $\vec{B}$: regola mano DX

$$\vec{B} = k_m \frac{qu}{R}(-\vec{k}) \qquad (\vec{k} \text{ versore asse } z)$$

f) Campo magnetico necessario per fare muovere q lungo la circonferenza

$$\underbrace{q\vec{v}\times\vec{B}}_{\vec{F}\ \text{Lorentz}} = \underbrace{\frac{mv^2}{R}\vec{n}}_{\vec{F}\ \text{centripeta}} \rightarrow \vec{B} \text{ diretto lungo asse } z$$

Passando ai moduli

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} = \frac{mu}{qR}$$

Direzione di $\vec{B}$ ⇒ regola mano DX

$$\vec{B} = \frac{mu}{qR}\vec{k}$$

g) $V(x,y) = K_e \dfrac{q}{(x^2+y^2)^{1/2}} + C$ potenziale in un punto generico di coordinate (x,y)

Per determinare la costante additiva C, si usa la condizione che

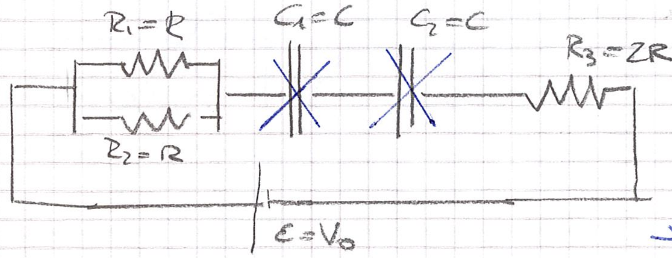
$$V(x_e,y_e) = 0 \rightarrow K_e \frac{q}{R} + C = 0$$

$$C = -K_e\frac{q}{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} V(x,y) = C = -K_e\frac{q}{R}$$

Es #3

a) Circuito prima della chiusura di T



C_1 e C_2 si comportano come circuiti aperti (capacità in serie)

$\Rightarrow \quad i_1 = i(R_1) = 0$

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C}{2}$$

La ddp sulle armature di C_{eq} è pari a V_0

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = \frac{CV_0}{2}$$

Per definizione di condensatori in serie, questa stessa carica è presente sia su C_1 sia su C_2

$$Q_1 = \frac{CV_0}{2} = 30\,mC \qquad V_{C1} = \frac{V_0}{2}$$

$$Q_2 = \frac{CV_0}{2} = 30\,mC \qquad V_{C2} = \frac{V_0}{2}$$

b) Subito dopo la chiusura di T

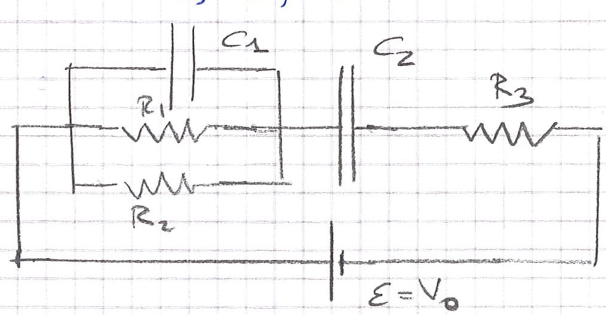
$\Rightarrow$ ddp e carica presente sulle armature restano invariate

$$Q_1 = \frac{CV_0}{2} = 30\,mC$$

$$Q_2 = \frac{CV_0}{2} = 30\,mC$$

I condensatori entrano in conduzione

Nota: C_1, R_1, R_2 sono in parallelo tra loro $\Rightarrow$



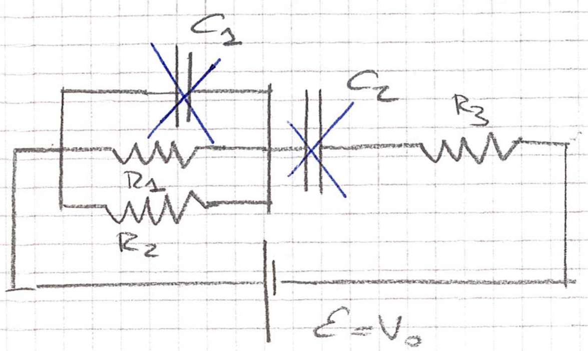
la d.d.p. ai capi di R_1 è pari alla ddp ai capi di C_1

$$i_1 R_1 = V_{C1} = \frac{V_0}{2}$$

$$i_1 = \frac{V_{C1}}{R_1} = \frac{V_0}{2R} = 6\,mA$$

c) molto tempo dopo la chiusura di T, C_1 e C_2 si comportano come circuiti aperti

$i_1 = i(R_1) = 0$



La ddp ai capi di R_1 è la stessa ddp presente ai capi di C_1

$$V_{C1} = i_1 R_1 = 0 \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 0$$

Per trovare V_{C2} si può usare LdKirchhoff per le maglie

$$\mathcal{E} - i_1 R_1 - V_{C2} - i_3 R_3 = 0$$

Siccome $i_1 = i_3 = 0 \rightarrow V_{C2} = \mathcal{E} = V_0 \rightarrow Q_2 = C_2 V_{C2} = CV_0 = 60$ mC

Riepilogando

	a)	b)	c)
i_1	0	$V_0/2R$	0
Q_1	$CV_0/2$	$CV_0/2$	0
Q_2	$CV_0/2$	$CV_0/2$	CV_0

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2015 - 2016
Esame di Fisica - 27/09/2016

Esercizio 1
Consideriamo il vettore $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ ed il vettore $\vec{v}$ che va dal punto $P = (2, -2\sqrt{3})$ all'origine $O = (0, 0)$. Calcolare $\vec{u}^2$ ed il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Esercizio 2
Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate xyz. Nel piano xy vi è una carica q che ruota in senso orario su una circonferenza di raggio R con modulo della velocità costante. Quando essa si trova nell'origine degli assi O la sua accelerazione è $\vec{a} = b\vec{i} + \sqrt{3}b\vec{j}$.
Calcolare:

a) il modulo dell'accelerazione e dire quali dimensioni ha la costante b;

b) il modulo della velocità angolare quando la carica q si trova nell'origine O;

c) il vettore velocità della carica q quando essa si trova nell'origine O;

d) il numero di passaggi al secondo della carica per l'origine O;

e) il vettore campo magnetico generato dalla carica ad un'altezza $z = h$ sull'asse passante per il centro della circonferenza percorsa da q;

f) il potenziale elettrico all'infinito se il potenziale elettrico nel punto sulla circonferenza diametralmente opposto all'origine O è nullo.

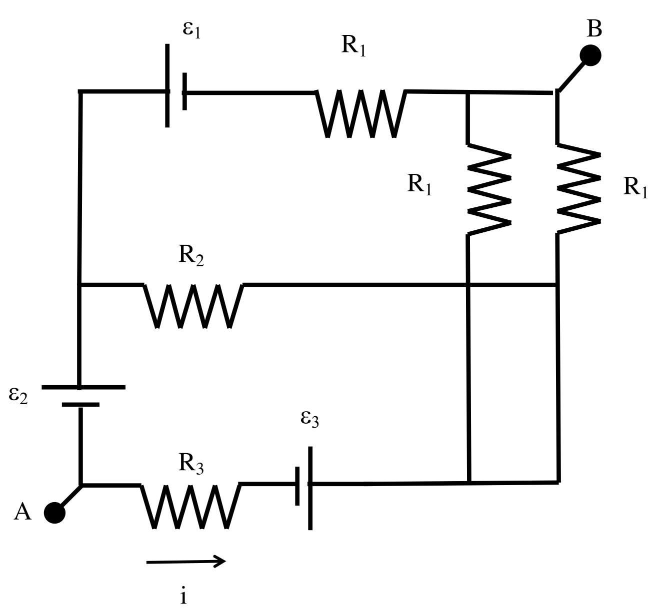
Esercizio 3
Nel circuito mostrato in figura le resistenze valgono R_1=R, R_2=$R/2$, R_3=$3R$ e le f.e.m. ε_1=ε_2=V_0 e ε_3=2 V_0.
Calcolare:

a) la corrente i nel resistore R_3 specificando se il verso è concorde a quello indicato in figura;

b) la differenza di potenziale $V_B - V_A$;

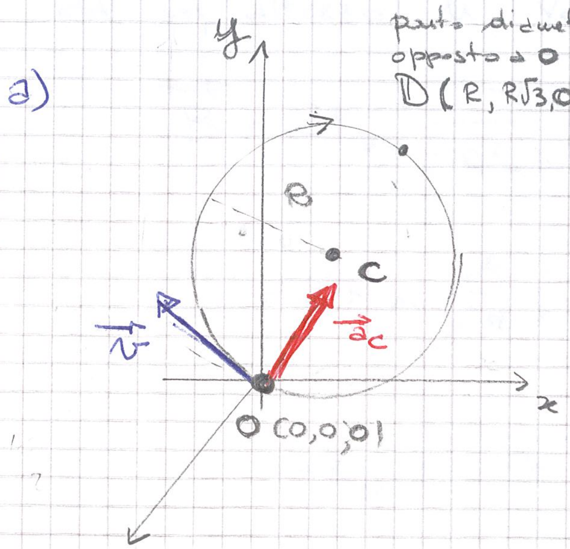
c) la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1.

(R=1 Ω, e V_0=27 V. Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2

a)



punto diametralmente opposto a O
$D(R, R\sqrt{3}, 0)$

Moto circolare uniforme

$\vec{a} = \vec{a}_c$ acc. centripeta

$$\vec{u}_N = \frac{\vec{a}_c}{|\vec{a}_c|}$$

$$|\vec{a}_c| = |\vec{a}| = \sqrt{b^2 + 3b^2} = 2b$$

$$\Rightarrow \vec{u}_N = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Dimensionalmente $[a_c] = L/T^2$

$$[b] = [a_c] = L/T^2$$

b) $a_c = \omega^2 R$ $\qquad \omega = \sqrt{a_c/R} = \sqrt{2b/R}$ velocità angolare

c) Vettore velocità

$$|\vec{v}| = \omega R = \sqrt{2bR}$$

$\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{u}_N$ ($\Rightarrow$ tangente alla circonferenza)

Versore tangente alla circonferenza in O:

$$\vec{u}_T = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}_T = \sqrt{2bR}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

d) Numero di passaggi al secondo per l'origine O = frequenza

$$2\pi f = \omega \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2b/R}$$

e) La carica in moto sulla circonferenza equivale ad una spira circolare di raggio R percorsa dalla corrente

$$i = q f = \frac{q}{2\pi}\sqrt{2b/R}$$

Il campo magnetico prodotto sull'asse delle spira ad un'altezza h vale

$$\vec{B} = 2K_m \frac{i\pi R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} \underbrace{(-\vec{K})}_{\text{regola mano DX}} =$$

$$= \cancel{2}K_m \underbrace{\frac{q}{\cancel{2}\pi}\sqrt{\frac{2b}{R}}}_{i} \frac{\cancel{\pi}R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} (-\vec{K}) =$$

$$= -K_m\, q\sqrt{2b} \left(\frac{R}{R^2+h^2}\right)^{3/2} \vec{K}$$

f) Potenziale prodotto da carica puntiforme

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} + V_0$$

Per determinare V_0 sfruttiamo la condizione

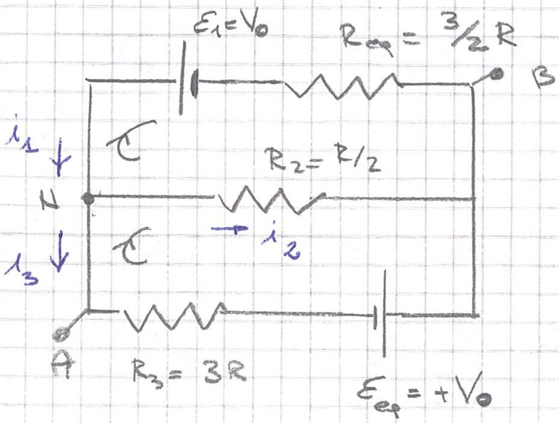
$$V(r=2R) = 0 \rightarrow V_0 = -K_e \frac{q}{2R}$$

$$V(r) = K_e \frac{q}{r} - K_e \frac{q}{2R}$$

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = -K_e \frac{q}{2R}$$

Es #3

a) Il circuito si può semplificare nel modo seguente



R_{eq} : resistenza equivalente alle 3 resistenze R_1 (R_1 in serie con $R_1 // R_1$)

$$R_{eq} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{3}{2}R$$

$$\mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = V_0$$

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 & \text{L. di Kirchhoff nodo N} \\ -\mathcal{E}_1 + i_1 R_{eq} + i_2 R_2 = 0 & \text{L. di Kirchhoff maglia superiore} \\ -\mathcal{E}_{eq} + i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0 & \text{L. di Kirchhoff maglia inferiore} \end{cases}$$

Verso percorrenza ORARIO

$$\begin{cases} -V_0 + (i_2 + i_3)\frac{3}{2}R + i_2 \frac{R}{2} = 0 \\ -V_0 + i_3 3R - i_2 \frac{R}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2R\, i_2 + \frac{3}{2} R\, i_3 = V_0 \\ \frac{R}{2} i_2 - 3R i_3 = -V_0 \end{cases}$$

$\times 4$ e sottraggo membro a membro

$$\frac{27}{2} R i_3 = 5 V_0 \rightarrow i_3 = \frac{10}{27}\frac{V_0}{R} = \frac{10 \cdot 27\,V}{27 \cdot 1\,\Omega} = 10\,A$$

$$i = i_3 = \frac{10}{27}\frac{V_0}{R} = 10\,A$$ concorde al verso di i nel testo del problema

$$i_2 = \frac{2}{9}\frac{V_0}{R} = 6\,A$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{16}{27}\frac{V_0}{R} = 16\,A$$

b) D.D.P. tra B e A $\Rightarrow$ legge di Kirchhoff della maglia esterna

$$V_A + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + i_1 R_1 = V_B$$

$$V_B - V_A = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + i_1 R_1 = V_0 - V_0 + \underbrace{\frac{16}{27}\frac{V_0}{R}}_{i_1 = \frac{16}{27}\frac{V_0}{R}} \underbrace{R}_{R_1} = \frac{16}{27} V_0 = 16\ V$$

c) Potenza erogata dalla fem $\mathcal{E}_1$

$$W_1 = \mathcal{E}_1 \cdot i_1 = V_0 \frac{16}{27}\frac{V_0}{R} = \frac{16}{27}\frac{V_0^2}{R} = 432\ W$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2015 - 2016
Esame di Fisica - 02/02/2017

Esercizio 1
Siamo dati i vettori $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$. Calcolare il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, il vettore differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ed il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{d}$.

Esercizio 2
Consideriamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z). Nel piano xz vi è una carica puntiforme q che ruota con velocità angolare costante ω su una circonferenza di raggio R con centro nel punto di coordinate $(R, 0, R)$. In tutto lo spazio vi è un campo magnetico uniforme $\vec{B}(t) = at^2\vec{j} + bt\vec{k}$.
Calcolare:

a) il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{k}$;

b) il flusso del campo magnetico attraverso il cerchio sulla cui circonferenza ruota la carica;

c) la forza (vettore) dovuta al campo magnetico che agisce sulla carica q quando essa si trova nel punto individuato dal vettore $\vec{r} = R\vec{i}$;

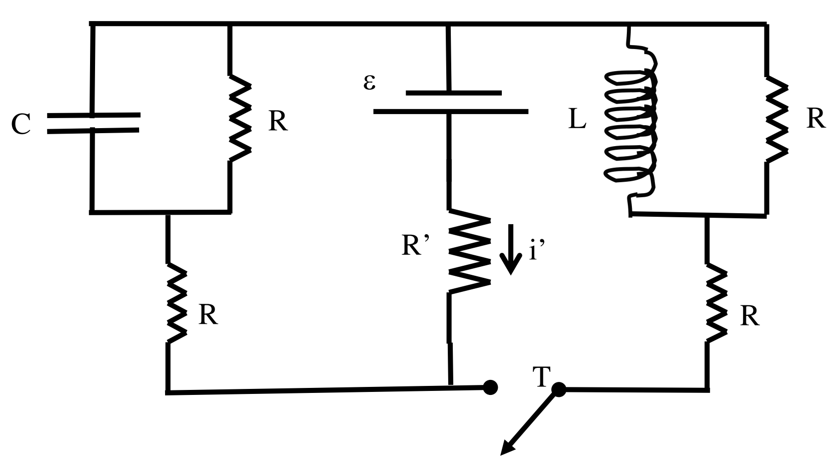
d) la forza elettromotrice indotta presente sulla circonferenza su cui ruota la carica.

Esercizio 3
Si consideri il circuito mostrato in figura. Siano ε=48 V, C=150 μF, R=2 kΩ, $R' = 2R$, e L=100 mH. Dopo essere stato a lungo aperto, l'interruttore T viene chiuso. Calcolare la corrente i' che percorre il resistore R', la carica presente sulle armature del condensatore C e la d.d.p. ai capi dell'induttore L nei seguenti istanti:

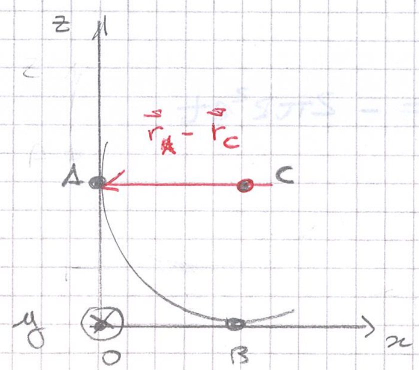
a) immediatamente prima della chiusura dell'interruttore T;

b) subito dopo la chiusura dell'interruttore T;

c) quando si raggiunge la nuova condizione di stazionarietà.



Es #2



SR xyz : terna destrorsa $\Rightarrow$ asse y entrante nel foglio

a) Carica nel punto A

$$\vec{v}_A = \omega R \vec{k} \qquad \begin{cases} \omega < 0 & \text{Anti-orario} \quad (\Rightarrow \vec{v}_A \text{ verso alto}) \\ \omega > 0 & \text{Orario} \quad (\Rightarrow \vec{v}_A \text{ verso basso}) \end{cases}$$

Alternativamente: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (-R\vec{i})$

$$= \omega \vec{j} \times (-R\vec{i}) = \omega R \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

b) Flusso di $\vec{B}$ attraverso la circonferenza

Occorre definire un versore che dia l'orientazione della superficie

Scelta: $\vec{n} = \vec{j}$

$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \int (at^2 \vec{j} + bt\vec{k}) \cdot \vec{j}\, dS$$

$$= at^2 \int dS = at^2 \pi R^2$$

c) Forza sulla carica quando si trova in B $\rightarrow$ forza di Lorentz

$$\vec{v}_B = -\omega R \vec{i}$$

(Alternativamente $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (-R\vec{k}) =$

$$= \omega \vec{j} \times (-R\vec{k}) = -\omega R \vec{i}$$

$$\vec{F}_{Lorentz} = q \vec{v}_B \times \vec{B} = q(-\omega R \vec{i}) \times (at^2 \vec{j} + bt\vec{k})$$

$$= q(-\omega R)\left[at^2 \vec{i} \times \vec{j} + bt\, \vec{i} \times \vec{k}\right] =$$

$$= q\omega R \left\{-at^2 \vec{k} + bt\vec{j}\right\}$$

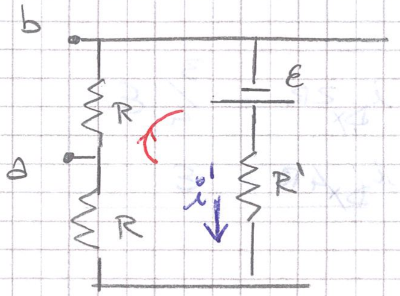
d) f.e.m. indotta $\rightarrow$ Faraday - Lenz

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{ at^2 \pi R^2 \right\} = -2\pi R^2 a t$$

Es #3

a) Interruttore T aperto / stazionarietà

- condensatore C ⇒ circuito aperto
- non circola corrente nella maglia DX



L. di Kirchoff delle tensioni applicata alla maglia SX

$$\mathcal{E} - i'R' - i'(2R) = 0 \rightarrow i' = \frac{\mathcal{E}}{R'+2R} = \frac{\mathcal{E}}{4R} = 6\ mA$$

Carica sul condensatore

$$Q = C(V_a - V_b) = C\,i'R = C\frac{\mathcal{E}}{4R}R = \frac{C\mathcal{E}}{4} = 1.8\times 10^{-3}\ C$$

Nella maglia DX non circola corrente

$$i_L = 0 \quad A$$
$$V_L = 0 \quad V$$

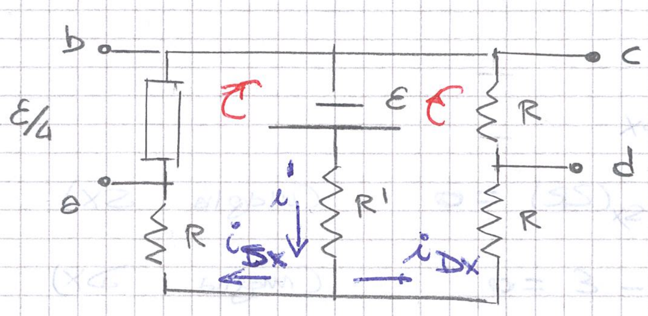
b) Interruttore T subito dopo la chiusura

- la ddp ai capi del condensatore è la stessa del quesito a)

$$V_a - V_b = \mathcal{E}/4 \qquad \text{(ma passa corrente)}$$

- la corrente nell'induttore è la stessa del quesito a

$$i_L = 0 \qquad \text{(ma la ddp ai suoi capi non è nulla)}$$



NB: ~~nella~~ maglia di DX è percorsa da una corrente $i_{DX} \neq 0$ che passa solo nel resistore in parallelo a L

LdK dei nodi $\quad i' = i_{SX} + i_{DX}$

LdK maglie :
$$\begin{cases} \mathcal{E} - i'R'' - i_{SX}R - \mathcal{E}/4 = 0 & \text{(maglia SX)} \\ i_{DX}(2R) + i'R' - \mathcal{E} = 0 & \text{(maglia DX)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i_{SX}+i_{DX})R' + i_{SX}R = \frac{3}{4}\mathcal{E} \\ (i_{SX}+i_{DX})R' + i_{DX}2R = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{SX}3R + i_{DX}2R = \frac{3}{4}\mathcal{E} \\ i_{SX}2R + i_{DX}4R = \mathcal{E} \end{cases}$$

$R' = 2R$

Risolvendo il sistema : $\begin{cases} i_{SX} = \mathcal{E}/8R \\ i_{DX} = \frac{3}{16}\mathcal{E}/R \end{cases} \Rightarrow i' = \frac{5}{16}\frac{\mathcal{E}}{R} = 7.5 \times 10^{-3}\, A$

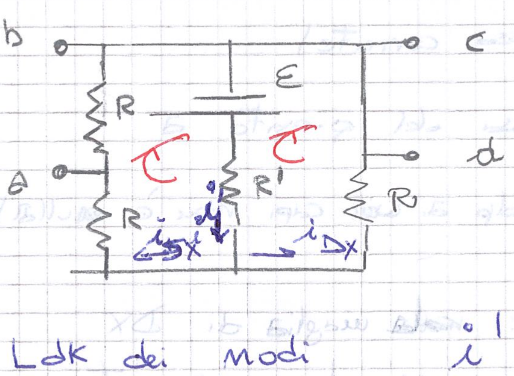
- Carica sul condensatore

$$Q = C(V_a - V_b) = C\,\mathcal{E}/4 = 1.8 \times 10^{-3}\, C$$

- ddp ai capi dell'induttore

$$V_d - V_c = i_{DX}R = \frac{3}{16}\mathcal{E} = 9\, V$$

c) Interruttore T chiuso / stazionarietà
- condensatore $C \Rightarrow$ circuito aperto
- induttore $L \Rightarrow$ corto circuito in parallelo ad una resistore



LdK dei nodi $\quad i' = i_{SX} + i_{DX}$

LdK delle maglie
$$\begin{cases} \mathcal{E} - i'R' - i_{SX}(2R) = 0 & \text{(maglia SX)} \\ R\,i_{DX} + i'R' - \mathcal{E} = 0 & \text{(maglia DX)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i_{Sx}+i_{Dx})R' + i_{Sx}2R = \mathcal{E} \\ i_{Dx}R + (i_{Sx}+i_{Dx})R' = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{Sx}4R + i_{Dx}2R = \mathcal{E} \\ i_{Sx}2R + i_{Dx}3R = \mathcal{E} \end{cases}$$

$R' = 2R$

Risolvendo il sistema: $\begin{cases} i_{Sx} = \mathcal{E}/8R \\ i_{Dx} = \mathcal{E}/4R \end{cases} \Rightarrow i' = 3\mathcal{E}/8R = 3\times10^{-3}\ A$

- Carica sul condensatore

$$Q = C\underbrace{(V_a - V_b)}_{V_a - V_b = i_S R} = C\,\mathcal{E}/8 = 0.9\times10^{-3}\ C$$

- Volt ai capi dell'induttore

$$V_a - V_c = 0\ V$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2016 - 2017
Esame di Fisica - 16/06/2017

Esercizio 1
In un sistema di assi cartesiano (x, y) siano dati i punti A=(0,7) e B=(12,2). Scrivere il vettore $\vec{r}_{AB}$ che va dal punto A al punto B e determinarne il modulo.

Esercizio 2
Consideriamo lo spazio tridimensionale di coordinate x, y, z Nel piano xy vi è una carica puntiforme $q > 0$ posta in $(-a, 0)$ ed una carica puntiforme q posta in $(a, 0)$. Risolvere i seguenti quesiti.

a) Calcolare il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto $(0, h)$.

b) Per quale valore di h è $\vec{E} = 0$?

c) Calcolare il lavoro necessario per portare la carica q dall'infinito a $(a, 0)$ supponendo che la carica in $(-a, 0)$ sia già presente.

d) Supponiamo che le due cariche ruotino attorno all'asse z nel piano xy con modulo della velocità angolare $\omega > 0$ costante. Calcolare il vettore velocità della carica q quando essa si trova nel punto $(a, 0)$.

e) Calcolare il vettore campo magnetico generato dalle cariche in moto nell'origine degli assi.

Esercizio 3
Nel circuito in figura R=10 Ω e $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ con ε=10 V.
Determinare:

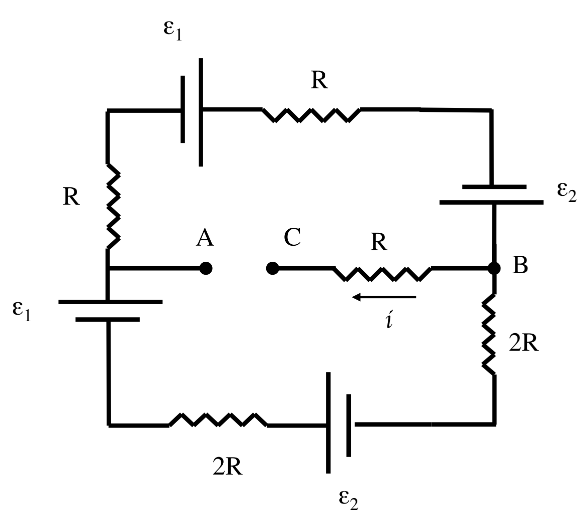
a) la corrente che percorre il circuito;

b) la differenza di potenziale $V_A - V_B$;

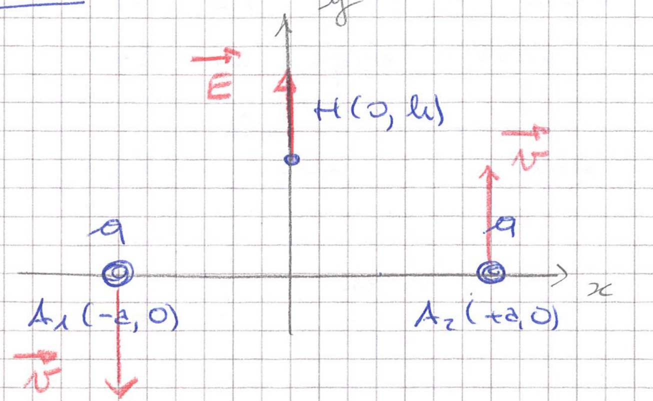
c) il valore della f.e.m. V_0 che deve essere posta tra i punti A e C in modo che $V_A = V_B$ (disegnare la f.e.m. sul circuito in modo che si capisca la polarità);

d) la corrente i che scorre nel resistore posto nel ramo centrale del circuito (vedi figura) qualora tra A e C sia presente la f.e.m. V_0 calcolata nel quesito c).

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



Vettori posizione

A_1: $\vec{r}_{A1} = -a\vec{i}$

A_2: $\vec{r}_{A2} = +a\vec{i}$

H: $\vec{r}_H = h\vec{j}$

a) Campo elettrico in $H = (0,h)$

Principio di sovrapposizione

- Carica in A_1 $\quad \vec{E}_1 = K_e q \dfrac{\vec{r}_H - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_H - \vec{r}_{A1}|^3} = \dfrac{K_e q}{(h^2+a^2)^{3/2}}(a\vec{i}+h\vec{j})$

- Carica in A_2 $\quad \vec{E}_2 = K_e q \dfrac{\vec{r}_H - \vec{r}_{A2}}{|\vec{r}_H - \vec{r}_{A2}|^3} = \dfrac{K_e q}{(h^2+a^2)^{3/2}}(-a\vec{i}+h\vec{j})$

$$\vec{E}(0,h) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{K_e q}{(h^2+a^2)^{3/2}} 2h\vec{j}$$

b) Valori di h per i quali $\vec{E}(0,h) = 0$

- $h = 0$
- $h \to \infty$

c) Lavoro fatto dalla forza elettrica per portare q dall'infinito in A_2

$L_{\infty \to A_2} = q(V_\infty - V_{A2}) \quad \Rightarrow \quad L_{\infty \to A2} = -K_e \dfrac{q^2}{2a}$

$V(r) = K_e \dfrac{q}{r+a} + V_0$

Lavoro fatto da un agente esterno contro il campo elettrico per portare q da ∞ a A_2 : $L = +K_e \dfrac{q^2}{2a}$ (l'energia potenziale del sistema aumenta)

d) Velocità delle cariche

- Carica in A_1 $\quad \vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A1} = \omega\vec{k} \times (-a\vec{i}) = -\omega a\vec{j}$

- Carica in A_2 $\quad \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A2} = \omega\vec{k} \times (a\vec{i}) = \omega a\vec{j}$

c) Le due cariche in moto circolare sono assimilabili ad una spira circolare percorsa da corrente

$$i = \frac{2q}{T} \qquad \text{dove} \quad \omega T = 2\pi \;\rightarrow\; \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow i = \frac{q\omega}{\pi}$$

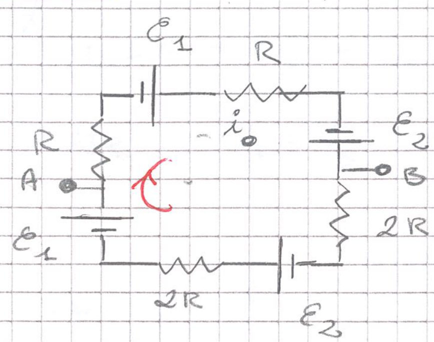
Nell'origine $\vec{B}$ vale

$$|\vec{B}(0,0)| = 2k_m \frac{i\pi}{R} = 2k_m \frac{\pi}{a}\left(\frac{q\omega}{\pi}\right) = 2k_m \frac{q\omega}{a}$$

il verso è dato dalla regola della mano DX, pertanto

$$\vec{B}(0,0) = 2k_m \frac{q\omega}{a}\vec{k}$$

Es #3



a) Applico L. di Kirchhoff per le maglie
(la maglia è percorsa da un'unica corrente i_0)

$$\mathcal{E}_1 - i_0 R + \mathcal{E}_2 - i_0 2R + \mathcal{E}_2 - i_0 2R + \mathcal{E}_2 - i_0 R = 0$$

$$2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 6 i_0 R$$

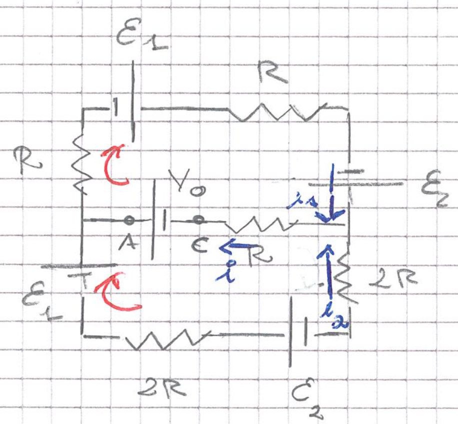
$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3R} = \frac{3\mathcal{E}}{3R} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1\,A$$

b) $V_A - i_0 R + \mathcal{E}_1 - i_0 R + \mathcal{E}_2 = V_B$

$$V_A - V_B = 2 i_0 R - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 2\mathcal{E} - 3\mathcal{E} = -\mathcal{E} = -10\,V$$

ovvero $V_A < V_B$

c) Assumiamo che la f.e.m. abbia il terminale positivo connesso ad A e quello negativo connesso a C



LdK nodi (in B) $\quad i_1 + i_2 = i$

Maglia superiore (percorsa senso orario)

$$-iR + V_0 - i_1 2R + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 0$$

Maglia inferiore (percorsa senso orario)

$$+i_2 4R + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - V_0 + iR = 0$$

$$\begin{cases} -(i_1+i_2)R + V_0 - i_1 R + 3\mathcal{E} = 0 \\ i_2 4R + 3\mathcal{E} - V_0 + (i_1+i_2)R = 0 \end{cases}$$

Inoltre $V_A = V_B \rightarrow V_A - V_0 + iR_1 = V_B \Rightarrow i = V_0/R$

$$\rightarrow \begin{cases} -i_1 2R + 3\mathcal{E} = 0 & i_1 = 3\mathcal{E}/2R \\ i_2 4R + 3\mathcal{E} = 0 & i_2 = -3\mathcal{E}/4R \end{cases}$$

$$i = i_1 + i_2 = 3\mathcal{E}/2R - 3\mathcal{E}/4R = 3\mathcal{E}/4R = 0.75\ A$$

$$V_0 = iR = 7.5\ V$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2016 - 2017
Esame di Fisica - 24/07/2017

Esercizio 1
In un sistema di assi cartesiano (x, y) siano dati i punti A=(2,4), B=(6,1) e C=(6,4). Scrivere i vettori: $\vec{r}_{AB}$ che va dal punto A al punto B, $\vec{r}_{AC}$ che va dal punto A al punto C. Calcolare inoltre il prodotto scalare $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AC}$.

Esercizio 2
Nel piano xy vi è una carica q_1 in $(0, 0)$ ed una seconda carica q_2 in (a, b), con $a, b > 0$, inizialmente ferme. Risolvere i seguenti punti.

a) Calcolare il vettore campo elettrico in $(0, 0)$ dovuto alla carica q_2, ossia $\vec{E}_2(0, 0)$.

b) Calcolare il potenziale elettrico generato dalla carica q_1 nel punto dove si trova la carica q_2.

c) Quanto vale la carica q_2 se il lavoro fatto contro il campo elettrico per portarla dall'infinito a (a, b), quando la carica in $(0, 0)$ è già presente, è $L = k_e \frac{q_1^2}{a}$?

Si consideri ora il caso in cui le cariche si muovono con velocità $\vec{v_1} = V_1\vec{j}$ (carica q_1) $\vec{v_2} = V_2\vec{j}$ (carica q_2).

d) Calcolare il vettore campo magnetico $\vec{B_2}(0, 0)$ generato dalla carica q_2 nell'origine.

e) Calcolare la forza dovuta al campo magnetico sulla carica q_1.

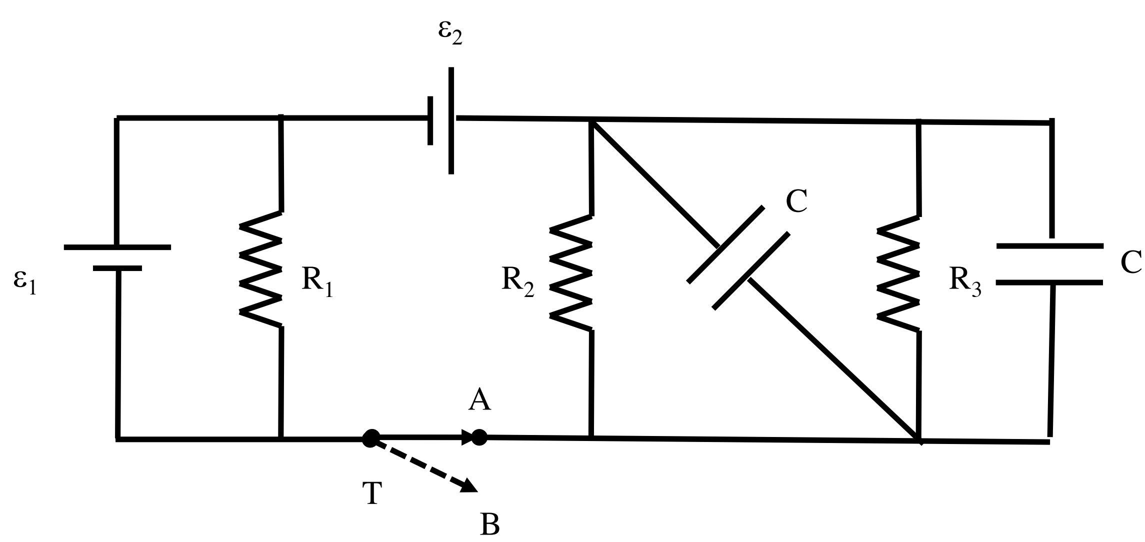
Esercizio 3
Nel circuito in figura tutti i resistori valgono R=10 kΩ, le f.e.m. valgono rispettivamente $\varepsilon_1 = V_0$, $\varepsilon_2 = 2V_0$ con V_0=20 V e le capacità C=10 nF.
Inizialmente l'interruttore T è chiuso in posizione A ed il circuito è in condizioni stazionarie. Successivamente l'interruttore T viene aperto portandolo in posizione B. Determinare la potenza erogata dalla f.e.m. ε_1 e la corrente nel resistore R_3 nei seguenti istanti:

a) immediatamente prima dell'apertura di T;

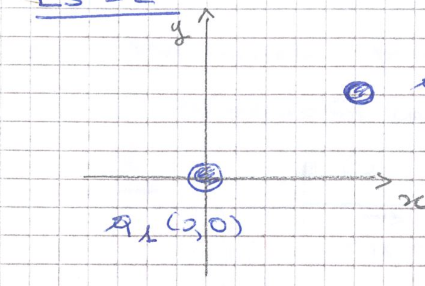
b) subito dopo l'apertura di T;

c) quando si raggiunge la nuova condizione di stazionarietà.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



$$\vec r_{Q_1Q_2} = a\vec i + b\vec j = -\vec r_{Q_2Q_1}$$

$$|\vec r_{Q_1Q_2}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

a) Campo $\vec E$ prodotto da q_2 in $(0,0)$

$$\vec E_2(0,0) = K_e \frac{q_2}{r^2_{Q_2Q_1}} \frac{\vec r_{Q_2Q_1}}{|\vec r_{Q_2Q_1}|} = K_e \frac{q_2}{(a^2+b^2)}\left(-\frac{a\vec i + b\vec j}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$$= -K_e\frac{q_2}{(a^2+b^2)^{3/2}}(a\vec i+b\vec j)$$

b) potenziale elettrico prodotto da q_1

$$V_{Q_1}(x,y) = K_e \frac{q_1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + V_0 \Rightarrow V_{Q_1}(a,b) = K_e\frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}}+V_0$$

c) Ricorda:

lavoro fatto da $\vec E$ per portare q da A a B: $L_{AB} = q[V(A)-V(B)]$

lavoro fatto contro $\vec E$ per portare q da B ad A: $L = q[V(A)-V(B)]$

lavoro fatto contro $\vec E$ per portare q_2 dall'infinito ad (a,b)

$$L = q_2\left[K_e\frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}}+V_0 - V_0\right] = K_e\frac{q_1q_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = K_e\frac{q_1^2}{a}$$

$$\Rightarrow q_2 = q_1\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Nota: Q_1 e Q_2 sono dello stesso segno. Il lavoro fatto contro $\vec E$ è positivo $\Rightarrow$ l'energia potenziale del sistema aumenta

d) Il campo ~~elettr~~ magnetico prodotto da una carica puntiforme è legato al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{B} = \frac{K_m}{K_e} \vec{v} \times \vec{E}$$

In questo caso: $\vec{B}_2(0,0) = \frac{K_m}{K_e} V_2 \vec{j} \times \vec{E}_2(0,0) =$

$$= K_m V_2 \vec{j} \times \frac{(-q_2)}{(a^2+b^2)^{3/2}} (a\vec{i} + b\vec{j}) =$$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{j} = 0$

$$= \frac{K_m V_2 q_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} a\vec{k}$$

e) Applicando la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q_1 (V_1 \vec{j}) \times \vec{B}_2(0,0) = K_m \frac{q_1 V_1 q_2 V_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} a \, \vec{j} \times \vec{k} =$$

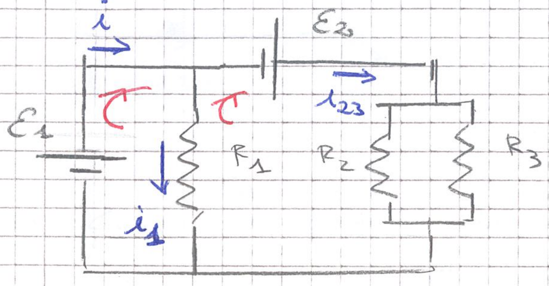
$$= K_m \frac{q_1 V_1 q_2 V_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} a \, (+\vec{i}) = K_m \frac{q_1^2 V_1 V_2}{(a^2+b^2)} (+\vec{i})$$

Nota: è una forza attrattiva (analogia con fili paralleli percorsi da correnti equiverse che si attraggono)

Es #3

a) stazionarietà prima dell'apertura di T

• condensatori carichi, non passa corrente



$R_2 // R_3$: $R_{eq} = R/2$

$i = i_1 + i_{23}$

LdK maglia SX $\quad \mathcal{E}_1 - i_1 R_1 = 0$

LdK maglia DX $\quad \mathcal{E}_2 - i_{23} R_{eq} + i_1 R_1 = 0$

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = \frac{V_0}{R}$$

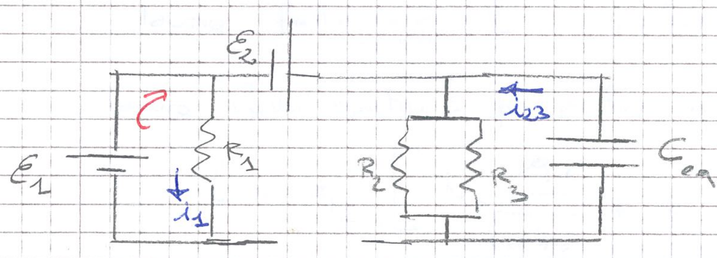
$$i_{23} = \frac{\mathcal{E}_2 + i_1 R_1}{R_{eq}} = \frac{3V_0}{R/2} = \frac{6V_0}{R}$$ → si ripartisce metà tra R_2 e R_3

$$i = \frac{7V_0}{R} \qquad i(R_3) = \frac{3V_0}{R} = 6 \text{ mA}$$

potenza erogata da $\mathcal{E}_1$: $P(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 \cdot i = \frac{7V_0^2}{R} = 280$ mW

ddp presente ai capi dei condensatori: $V_C = i_{23} \cdot R_{eq} = \frac{6V_0}{R} \cdot \frac{R}{2} = 3V_0 = 60$

b) subito dopo l'apertura di T:



• la maglia SX è scollegata dalla maglia DX

• i condensatori carichi cominciano a scaricarsi sulle resistenze in parallelo $R_2 // R_3$

$$i_{23} = \frac{V_C}{R_{eq}} = \frac{3V_0}{R/2} = \frac{6V_0}{R} \rightarrow i(R_3) = \frac{3V_0}{R} = 6 \text{ mA}$$

potenza erogata di $\mathcal{E}_1$: $P(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 \cdot i_1 = V_0 \frac{V_0}{R_1} = \frac{V_0^2}{R} = 40$ mW

c) stazionarietà con T aperto

• maglia SX: continua ad essere percorsa dalla corrente $i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} = \frac{V_0}{R}$

potenza erogata da $\mathcal{E}_1$: $P(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 \cdot i_1 = \frac{V_0^2}{R} = 40$ mW

• maglia DX: i condensatori sono scarichi

$$i(R_3) = 0$$

Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2016 - 2017
Esame di Fisica - 06/09/2017

Esercizio 1
In un sistema di assi cartesiano siano dati i vettori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Scrivere i vettori somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Dire se i vettori $\vec{s}$ e $\vec{d}$ sono perpendicolari giustificando la risposta.

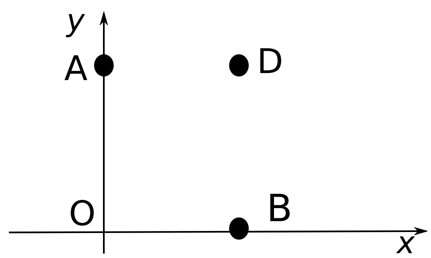
Esercizio 2
Siano date due cariche elettriche puntiformi Q_A=4q_0 e Q_B poste rispettivamente nei punti A=(0,3d) e B=(3d,0) di un piano cartesiano. Una terza carica elettrica Q_D=$-q_0$, inizialmente ferma nel punto D=(3d,3d), viene spostata per effetto del campo elettrico dal punto D al punto P=(2d,d). Determinare in funzione dei parametri d e q_0:

a) il valore di Q_B per il quale la forza che agisce su Q_D nel punto P è nulla;

b) la forza che agisce su Q_D quando inizialmente si trova nel punto D;

c) il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare Q_D dal punto dal D punto al punto P;

d) la velocità e l'accelerazione di Q_D quando si trova in P, assumendo che la massa della carica Q_D sia nota e valga m_D.



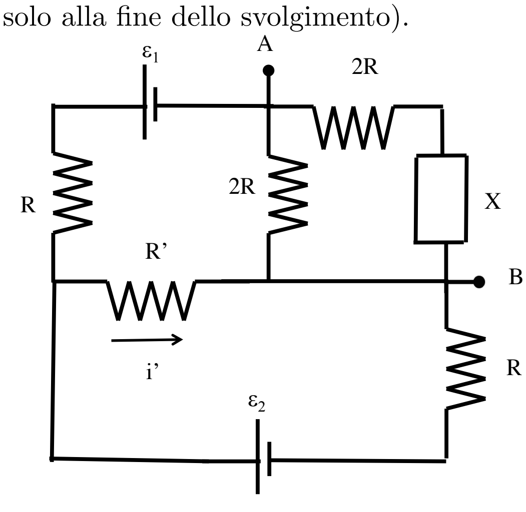
Esercizio 3
Nel circuito in figura R=1 kΩ, $R' = 2R$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = V_0$ con V_0=60 V. Il circuito è in condizioni stazionarie. Determinare la corrente i' che percorre il resistore R' e la differenza di potenziale $V_A - V_B$ nei seguenti casi:

a) X è un condensatore di capacità C=1 nF;

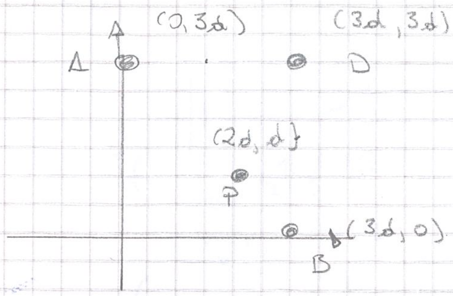
b) X è un induttore di induttanza L=10 mH;

c) X è un resistore di resistenza 2R.

(Sostituire i valori numerici solo alla fine dello svolgimento).



Es #2



$Q_A = 4q_0$

$Q_D = -q_0$

a) Determino i vettori $\vec r_{AP}$ e $\vec r_{BP}$

$\vec r_{AP} = 2d\vec i - 2d\vec j \qquad |\vec r_{AP}| = 2d\sqrt{2}$

$\vec r_{BP} = -d\vec i + d\vec j \qquad |\vec r_{BP}| = d\sqrt{2}$

Campo elettrico prodotto da Q_A in P : $\vec E_{Q_A}(P) = K_e \dfrac{Q_A}{8d^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec i - \vec j)$

Campo elettrico prodotto da Q_B in P $\vec E_{Q_B}(P) = K_e \dfrac{Q_B}{2d^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec i + \vec j)$

$\vec E(P) = \vec E_{Q_A}(P) + \vec E_{Q_B}(P) = 0 \Rightarrow \dfrac{Q_A}{8d^2} = \dfrac{Q_B}{2d^2} \rightarrow Q_B = \dfrac{1}{4}Q_A = q_0$

b) Determino i vettori $\vec r_{AD}$ e $\vec r_{BD}$

$\vec r_{AD} = 3d\vec i \qquad |\vec r_{AD}| = 3d$

$\vec r_{BD} = 3d\vec j \qquad |\vec r_{BD}| = 3d$

Campo elettrico prodotto da Q_A in D $\vec E_{Q_A}(D) = K_e \dfrac{Q_A}{9d^2}\vec i$

Campo elettrico prodotto da Q_B in D $\vec E_{Q_B}(D) = K_e \dfrac{Q_B}{9d^2}\vec j$

$\vec E(D) = \vec E_{Q_A}(D) + \vec E_{Q_B}(D) = K_e \dfrac{4q_0}{9d^2}\vec i + K_e \dfrac{q_0}{9d^2}\vec j$

$$\vec F = Q_D \vec E(D) = -K_e \frac{q_0^2}{9d^2}(4\vec i + \vec j)$$

c) $L = Q_D(V(D) - V(P))$

~~Sovrapp~~ Additività dei potenziali

$V(B) = K_e \dfrac{Q_A}{3d} + K_e \dfrac{Q_B}{3d} \Rightarrow L = Q_D K_e \left\{ (Q_A + Q_B)\dfrac{1}{3d} - (Q_A + 2Q_B)\dfrac{1}{2d\sqrt{2}} \right\}$

$V(P) = K_e \dfrac{Q_A}{2d\sqrt{2}} + K_e \dfrac{Q_B}{d\sqrt{2}}$

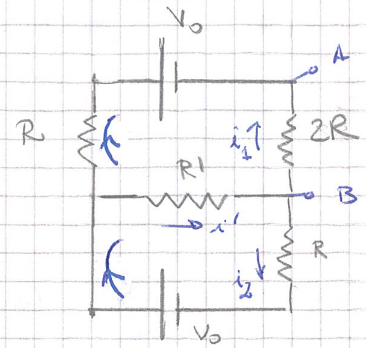
$= -K_e q_0^2 \dfrac{1}{d} \underbrace{\left[\dfrac{5}{3} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right]}_{\simeq -0.45}$ NB: $L > 0$

d) Applicando conservazione energia meccanica

$$\frac{1}{2}m_D v_f^2 - \underbrace{\frac{1}{2}m_D v_i^2}_{v_i = 0} = Q_D\left[V(B) - V(P)\right] = \frac{K_e q_0^2}{d}\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}\right] \rightarrow v_f^2 = \frac{2K_e q_0^2}{m_D d}\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}\right]$$

Es #3

a) $X = C \rightarrow$ in condizioni stazionarie si comporta come circuito aperto



L di Kirchhoff nodi $\qquad i' = i_1 + i_2$

Maglia sup. $\qquad -V_0 + 3R i_1 + R' i' = 0$

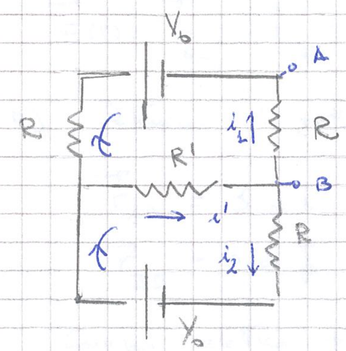
Maglia inf. $\qquad V_0 - R i_2 - R' i' = 0$

$$\Rightarrow 3R i_1 - R i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = 3 i_1$$
$$i' = 4 i_1$$

$$-V_0 + 3R i_1 + (2R)(4 i_1) = 0 \qquad i_1 = \frac{V_0}{11R} \qquad i' = \frac{4V_0}{11R} = 21.8 \text{ mA}$$

$$V_A + 2R i_1 = V_B \rightarrow V_A - V_B = -\frac{2V_0}{11} = -10.9 \text{ V}$$

b) $X = L \rightarrow$ in condizioni stazionarie si comporta come corto circuito



L di Kirchhoff nodi $\qquad i' = i_1 + i_2$

Maglia sup. $\qquad -V_0 + i_1 2R + i' 2R = 0$

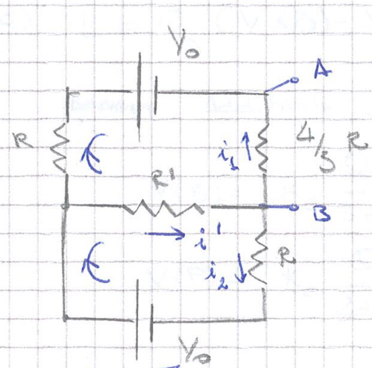
Maglia inf. $\qquad +V_0 - i_2 R - i' 2R = 0$

$$\Rightarrow i_1 2R - i_2 R = 0 \Rightarrow i_2 = 2 i_1$$
$$i' = 3 i_1$$

$$-V_0 + 2R i_1 + (2R)(3 i_1) = 0 \qquad i_1 = \frac{V_0}{8R} \qquad i' = \frac{3V_0}{8R} = 22.5 \text{ mA}$$

$$V_A + R i_1 = V_B \rightarrow V_A - V_B = -\frac{V_0}{8} = -7.5 \text{ V}$$

c) $X = R$



L di Kirchhoff nodi $\qquad i' = i_1 + i_2$

Maglia sup. $\qquad -V_0 + \frac{7}{3} R i_1 + R' i' = 0$

Maglia inf. $\qquad V_0 - R i_2 - R' i' = 0$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} R i_1 - R i_2 = 0 \qquad i_2 = \frac{7}{3} i_1$$
$$i' = \frac{10}{3} i_1$$

$$-V_0 + \frac{7}{3} R i_1 + (2R)\left(\frac{10}{3} i_1\right) = 0 \rightarrow i_1 = \frac{V_0}{9R} \qquad i' = \frac{10}{27} \frac{V_0}{R} = 22.2 \text{ mA}$$

$$V_A + \frac{4}{3} R i_1 = V_B \rightarrow V_A - V_B = -\frac{4}{27} V_0 = -8.9 \text{ V}$$