Appunti di Fisica

Elisa Solinas

Aggiornato il December 1, 2017

Contents

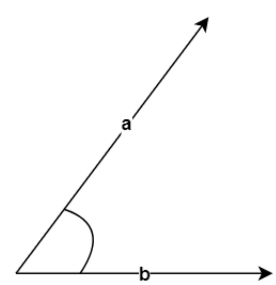
Chapter 1

Meccanica

1.1 Calcolo vettoriale

Consideriamo due vettori in un sistema di coordinate (xyz):

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$



1.1.1 Modulo di un vettore

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.1.2 Somma di due vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

1.1.3 Differenza di due vettori

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

1.1.4 Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$$

Osservazioni

- Il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è nullo.

1.1.5 Prodotto vettoriale di due vettori

Il prodotto vettoriale tra due vettori è perpendicolare a entrambi.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \vec{k}$$

Osservazioni

- Il prodotto vettoriale di due vettori è perpendicolare a entrambi.
- Il prodotto vettoriale di due vettori è anticommutativo, cioe:

  $$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.
- I versori della base canonica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soddisano le seguenti equazioni:

  $$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
  $$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$
  $$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

1.1.6 Calcolo di un vettore che collega due punti

$$A = (a_1, a_2) \qquad B = (b_1, b_2)$$
$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

1.2 Equazioni del moto

1.2.1 Moto rettilineo uniforme

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$s = s_0 + v \cdot t$$

1.2.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1.2.3 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme, il vettore velocità $\vec{v}$ ha solo componente tangente alla circonferenza:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{a} = \frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} = \omega^2 \cdot \vec{r}$$

1.3 Leggi di Newton

1.3.1 Prima legge di Newton

Un corpo mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché una forza non agisce su di esso.

1.3.2 Seconda legge di Newton

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e ha la stessa direzione della forza netta agente su di esso, mentre invece è inversamente proporzionale alla sua massa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

1.3.3 Terza legge di Newton

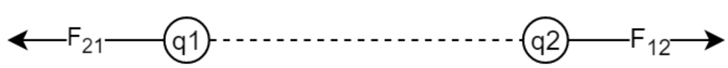
Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un corpo B, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza $\vec{F}_{BA}$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Esempio 1. *La forza $\vec{F}_{12}$ esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza $\vec{F}_{21}$ esercitata da q_2 su q_1.*

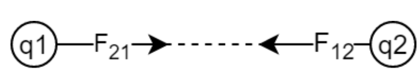
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano lo stesso segno:



$$\vec{F}_{12} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \vec{F}_{21} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto:



$$\vec{F}_{12} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \vec{F}_{21} = -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Chapter 2

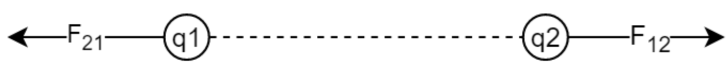
Elettrostatica

2.1 Legge di Coulomb

La forza $\vec{F}_{12}$ esercitata da q_1 su q_2 è uguale in modulo e opposta in direzione alla forza $\vec{F}_{21}$ esercitata da q_2 su q_1.

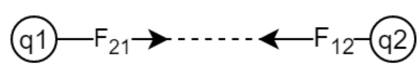
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano lo **stesso segno**, la forza è attrattiva (le due cariche si attraggono):



$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \\ \vec{F}_{21} &= k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

Nel caso in cui le due cariche abbiano **segno opposto**, la forza è repulsiva (le due cariche si respingono):



$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \\ \vec{F}_{21} &= -k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

2.2 Principio di sovrapposizione

In un sistema di n cariche, volendo valutare la forza totale agente su una carica q, è necessario sommare le forze esercitate da ciascuna carica. Ciascuna di queste forze agisce come se fosse l'unica presente.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} k_e \cdot \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_{r_i}$$

2.3 Campo elettrico

Dato un sistema di n cariche, su una carica di prova q, agisce un campo elettrico $\vec{E}$ dato da:

$$\vec{E} = \sum_{i=0}^{n} k_e \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

La forza agente su q può essere espressa come:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

2.4 Teorema di Gauss per il campo elettrico

Il teorema di Gauss per il campo elettrico permette di calcolare il flusso del campo elettrico generato da una certa distribuzione di carica elettrica attraverso una superficie senza svolgere i calcoli prescritti dalla definizione di flusso.
Data una superficie chiusa S contenente n cariche elettriche (positive o negative), il flusso del campo elettrico (generato dalle cariche) attraverso tale superficie è uguale al rapporto tra carica totale contenuta nella superficie chiusa e la costante dielettrica ϵ del mezzo in cui si trovano le cariche (ϵ_0 nel vuoto):

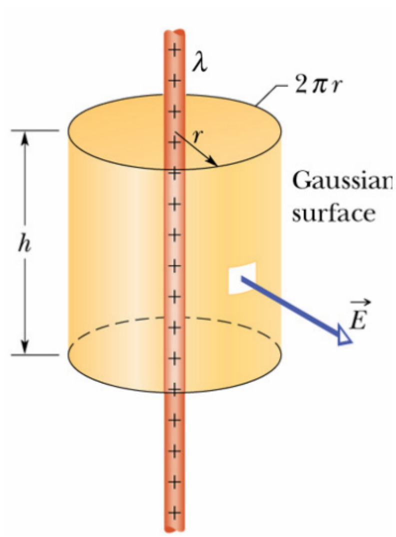
$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\epsilon_0}$$

2.4.1 Distribuzione lineare

Una distribuzione uniforme lineare di carica (es. *una sottile asticella carica*) di lunghezza L, con densità di carica lineare positiva uniformemente distribuita

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

Dove q rappresenta la carica totale di cui è dotata l'intera asticella. Il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare



alla superficie gaussiana:

- $\Phi(\vec{E})$ attraverso le basi è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie laterale è pari a $E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h)$.

Per il teorema di Gauss:

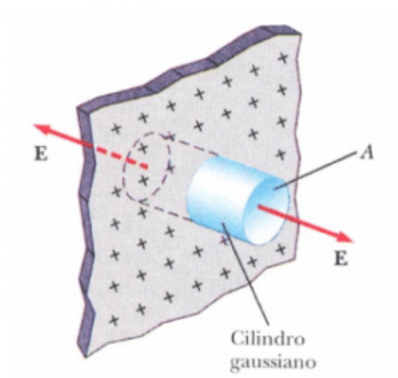
$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\
\epsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\
\epsilon_0 \cdot E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h) &= q = \lambda \cdot h \\
\vec{E} &= \frac{\lambda}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r \cdot h}
\end{aligned}$$

2.4.2 Distribuzione piana

Una distribuzione uniforme piana di carica, avente area A, è caratterizzata da una densità superficiale:

$$q = \sigma \cdot A$$

In una distribuzione di carica piana, la cui superficie Il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare alla superficie



gaussiana:

- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la superficie del cilindro è nullo.
- $\Phi(\vec{E})$ attraverso la le basi del cilindro è pari a $E \cdot A$, dove A è l'area di una base.

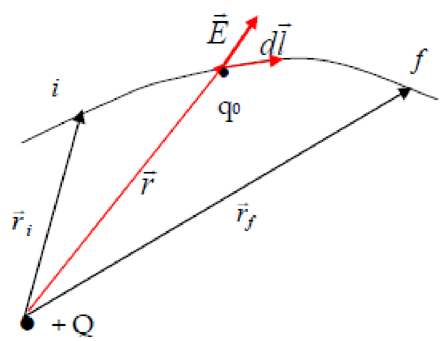
Per il teorema di Gauss:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \cdot \Phi(\vec{E}) &= q \\
\epsilon_0 \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= q \\
\epsilon_0 \cdot (E \cdot A + E \cdot A) &= q \cdot \sigma \cdot A \\
2 \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot A &= q = \sigma \cdot A \\
E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}
\end{aligned}$$

2.5 Energia elettrica

2.5.1 La forza elettrica è conservativa

Posta una carica Q, ferma in un punto origine, calcoliamo il lavoro fatto dalla forza elettrica $\vec{F}$ per portare una carica q_0 da un punto iniziale $i(\vec{r}_i)$ a un punto $f(\vec{r}_f)$.



$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = k_e \cdot (q_0 \cdot Q) \cdot \int_i^f \frac{1}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{l}$$

Osserviamo che

$$\vec{u}_r = dl \cdot \cos\theta = dr$$

Possiamo quindi scrivere:

$$L = k_e \cdot (q_0 \cdot Q) \cdot \int_i^f \frac{1}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{l} = k_e \cdot (q_0 \cdot Q) \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right) = U(i) - U(f)$$

Siamo riusciti a scrivere il lavoro della forza elettrica come una differenza di potenziali: ciò significa che la forza elettrica è conservativa.
Il lavoro della forza elettrica non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione del punto iniziale e del punto finale.
Inoltre, il lavoro della forza elettrica lungo un percorso chiuso è nullo.

2.5.2 Energia potenziale elettrica

L'energia potenziale è l'inverso del lavoro compiuto dalla forza nello spostamento di una carica q_0 dal punto A al punto B.

$$\Delta U = -L_{AB} = k_e \cdot q_1 \cdot q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) =$$

Finora abbiamo parlato di variazione di energia potenziale tra due punti. Un'estensione del concetto porta alla definizione di energia potenziale in un singolo punto b, scegliendo un punto di riferimento a

e assegnando un valore di riferimento U_a all'energia potenziale in quel punto.
Spesso conviene scegliere il punto a di riferimento a distanza infinita, scegliendo $U_a = 0$ in quel punto.
Consideriamo il caso di una carica q_1 ferma nell'origine, e una carica q_2 che si sposta da $\vec{r}_a$ a $\vec{r}_b$ Se, in questo caso, b rappresenta un generico punto di coordinata r:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

2.5.3 Potenziale elettrico

Sia q_0 una carica di prova in moto da A a B, sotto l'azione di un campo elettrico $\vec{E}$.
Definiamo la differenza di potenziale (che sta all'energia potenziale elettrica come il campo elettrico sta alla forza di Coulomb):

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{L_{AB}}{q_0}$$

Analogamente al calcolo dell'energia potenziale, calcolare il potenziale in un punto b è necessario prendere come riferimento il potenziale in un punto a.

$$V(b) = k_e \cdot \frac{q}{r_b} + V_a$$

Solitamente, consideriamo come punto di riferimento un punto all'infinito, a cui attribuiamo il valore di potenziale zero.

Per calcolare il campo elettrico dato il potenziale è necessario l'operatore **gradiente**. L'operatore gradiente, applicato a una funzione scalare, restituisce un vettore avente come componenti le derivate parziali della funzione.

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla} V(r) =$$

2.6 Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema composto da due cariche uguali, di segno opposto, poste a distanza d lungo un asse x, che identifichiamo con il versore $\vec{u}_x$.
Viene definito il **momento di dipolo** $\vec{p}$ come

$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \vec{u}_x$$

2.6.1 Campo elettrico lungo l'asse del dipolo

Il campo elettrico lungo l'asse del dipolo è pari alla somma dei campi elettrici generati da ciascuna carica.

$$\vec{E}_+ = k_e \cdot \frac{q}{(r_x - a)^2} \cdot \vec{i}$$
$$\vec{E}_- = -k_e \cdot \frac{q}{(r_x + a)^2} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E} = k_e \cdot \left(\frac{q}{(r_x - a)^2} - \frac{q}{(r_x + a)^2}\right) \cdot \vec{i} = k_e \cdot q \left(\frac{(r_x + a)^2 - (r_x - a)^2}{(r_x^2 - a^2)^2}\right) \cdot \vec{i} =$$
$$k_e \cdot q \frac{r_x^2 + a^2 + 2r_x a - r_x^2 + 2r_x a - a^2}{(r_x^2 - a^2)^2} \cdot \vec{i} = k_e \cdot \frac{4qr_x a}{(r_x^2 - a^2)^2} \cdot \vec{i}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2p \cdot r_x}{(r_x^2 - (\frac{d}{2})^2)^2} \cdot \vec{i}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x >>> d$, cioè misurare il campo elettrico a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{2pr_x}{r_x^4} \cdot \vec{i} = k_e \cdot \frac{2p}{r_x^3} \cdot \vec{i}$$

2.6.2 Potenziale elettrico lungo l'asse del dipolo

Il potenziale generato da una carica a una distanza r è dato da:

$$V(r) = k_e \cdot \frac{q}{r}$$

Perciò, il potenziale del dipolo a una distanza r_x è dato dalla somma dei potenziali dovuti a ciascuna carica (**additività dei potenziali**):

$$V(r_x) = k_e \cdot \left(\frac{q}{r_x - a} - \frac{q}{r_x + a}\right) = k_e \cdot q \left(\frac{r_x + a - r_x + a}{r_x^2 - a^2}\right) = k_e \cdot q \cdot \frac{2a}{r_x^2 - a^2}$$

Ricordando che $a = \frac{d}{2}$ e che $p = qd$:

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2 - (\frac{d}{2})^2}$$

Ha senso, in applicazioni reali considerare $r_x >>> d$, cioè misurare il potenziale a distanze molto maggiori della distanza tra le cariche del dipolo.

$$\vec{V} = k_e \cdot \frac{p}{r_x^2}$$

Chapter 3

Magnetostatica

3.1 Forza di Lorentz

Una carica in moto in un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta a una forza, detta **forza di Lorentz** $\vec{F}_B$ tale che:

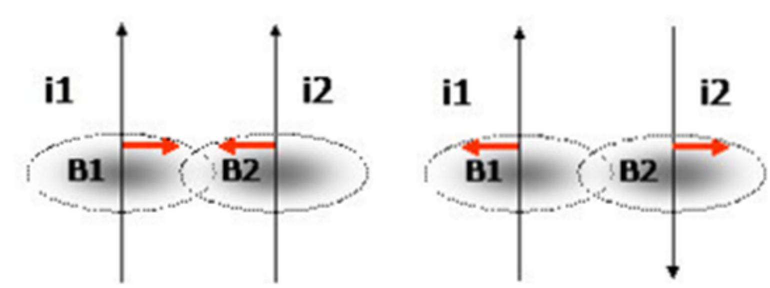
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiché $\vec{F}_B$ è perpendicolare a $\vec{v}$, il modulo della velocità non può variare, ma solo la sua direzione. Poiché $\vec{F}_B$ è perpendicolare allo spostamento, non può compiere lavoro sulla particella. Ciò significa che se il campo magnetico è uniforme non varia l'energia della particella.

Possiamo considerare tre casi:

- $\vec{v}$ parallelo a $\vec{B}$: il prodotto vettoriale è nullo e la particella non è soggetta a forza magnetica.
- $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$: se $\vec{B}$ è costante, la particella si muove lungo una traiettoria circolare.
- Caso generale: la particella segue un moto ad elica lungo l'asse $\vec{u}_B$

3.1.1 Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente



Un filo rettilineo percorso da corrente I produce, a distanza r, un campo magnetico $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

Consideriamo la seguente configurazione: due fili, di lunghezza L, posti a distanza D e percorsi, rispettivamente da una corrente I_1 e I_2.
Sul filo 1 agisce una forza $\vec{F}_{21}$ dovuta a $\vec{B}_2$, mentre sul filo 2 agisce una forza $\vec{F}_{12}$ dovuta a $\vec{B}_1$.

$$\vec{F}_{21} = L \cdot (\vec{I}_1 \times \vec{B}_2) = I_1 \cdot L \cdot B_2 \cdot \vec{u}_d = I_1 \cdot L \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot d} \cdot \vec{u}_d$$
$$\vec{F}_{12} = L \cdot (\vec{I}_2 \times \vec{B}_1) = I_2 \cdot L \cdot B_1 \cdot \vec{u}_d = I_2 \cdot L \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi \cdot d} \cdot \vec{u}_d$$

Tali forze, secondo la terza legge di Newton sono eguali in modulo e hanno direzioni opposte:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = I_1 \cdot L \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot d} \cdot \vec{u}_d = I_2 \cdot L \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi \cdot d} \cdot \vec{u}_d$$
$$F_{12} = F_{21} = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi d}$$

La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono concordi, mentre è repulsiva se sono discordi.

3.2 Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart permette di calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{i \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

3.2.1 Spira circolare

Consideriamo una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I.
Calcoliamo il campo magnetico $\vec{B}$ che essa genera in un punto P posto sull'asse perpendicolare alla spira e passante per il suo centro.
P si trova a una distanza z dal centro della spira. Scomponiamo $d\vec{B}$ in due componenti:

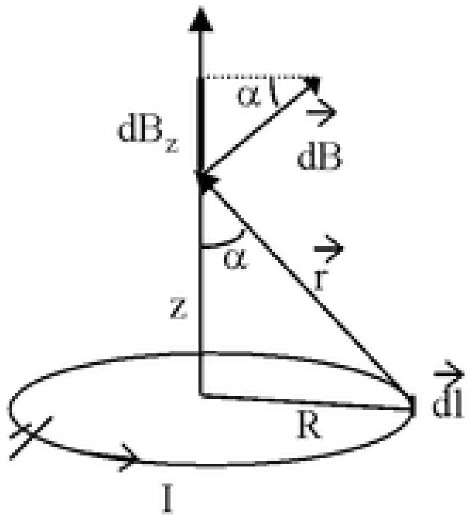
- dB_z lungo l'asse z
- dB_p perpendicolare a dB_z: per ragioni di simmetria, la somma di tutti i componenti dB_p è nulla

Usiamo la legge di Biot-Savart per calcolare dBz:

$$dB_z = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot \cos\alpha \cdot ds}{4\pi \cdot r^2}$$
$$r^2 = R^2 + z^2 \qquad \cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$
$$dB_z = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Il campo magnetico totale B è pari a:

$$\vec{B} = \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} =$$
$$= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \vec{k} =$$
$$= \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k}$$



Nel centro della spira ($r = R$):

$$\vec{B} = \int dB_z \cdot \vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int dS \cdot \vec{k} =$$

$$\mu_0 \cdot \frac{I \cdot R}{4\pi \cdot (R)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi \cdot R\vec{k} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2R}\vec{k}$$

3.3 Legge di Ampére

La legge di Ampére ci permette di calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

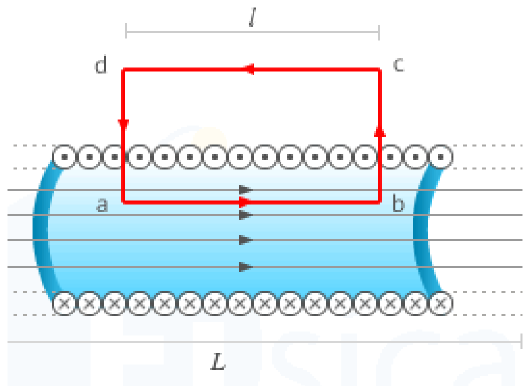
3.3.1 Solenoide ideale

Un solenoide è caratterizzato da una corrente I che scorre in un filo avvolto a spirale n volte per unità di lunghezza intorno ad un cilindro di raggio a e lunghezza L.
Se $a <<< L$, il campo magnetico $\vec{B}$ è, in prima approssimazione, contenuto all'interno del solenoide, in direzione assiale, con intensità costante. In queste condizioni (ideali),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} +$$

Il secondo e il quarto integrale sono nulli, in quanto o il campo $\vec{B}$ è parallelo al cammino di integrazione (punti interni) o è nullo (punti esterni).
Il terzo integrale è nullo perché abbiamo assunto $\vec{B}$ nullo all'esterno del solenoide.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot l$$



Utilizzando la legge di Ampére:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{L}$$

3.4 Legge di Faraday-Lenz

Secondo la legge di Faraday-Lenz, a una variazione del flusso del campo magnetico corrisponde una f.e.m. autoindotta che si oppone a tale variazione.

$$-\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = \epsilon_{indotta}$$

3.4.1 Relazione con induttanza

Consideriamo un solenoide, in cui S è la superficie della sezione della spira, l'induttanza è L e la corrente che lo percorre è $i(t)$.

$$\Phi_S(\vec{B}) = L \cdot i(t) = \oint \vec{B} \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Per la legge di Ampére, al variare del flusso del campo magnetico, il solenoide genera una fem.
In particolare, una variazione del flusso avviene al variare della corrente elettrica.

$$\epsilon_{indotta} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Chapter 4

Circuiti

4.1 Corrente elettrica

La corrente elettrica i è definita come la quantità di carica che nell'unità di tempo attraversa un elemento di area entro un conduttore.
Il verso della corrente è quello in cui si muovono le cariche positive, anche quando, nella realtà i portatori di carica dovessero essere negativi.

4.1.1 Leggi di Kirchhoff

Prima legge Kirchhoff (ai nodi): *In qualunque nodo di un circuito elettrico la corrente totale entrante è uguale alla corrente totale uscente.*
Seconda legge Kirchhoff (alle maglie): *la somma algebrica di tutte le differnze di potenziale di una maglia è zero.*

4.2 Analisi dei circuiti

Solitamente lo scopo dell'analisi di un circuito consiste nel trovare la corrente in modulo e verso, dati i valori di f.e.m. e resistenza del circuito.
Attribuire arbitrariamente il segno della corrente: nella maggior parte dei casi siamo in grado di sceglierlo correttamente (per esempio sfruttando i generatori di corrente, in quanto la corrente va dal polo negativo a quello positivo), ma se dovessimo sceglierlo in maniera errata, ciò verrà segnalato dal segno negativo della corrente che otterremo come risultato.
Partendo da un qualunque punto fissato arbitrariamente, percorrere un giro completo della maglia sommando algebricamente le differenze di potenziale che via via si incontrano ai capi di tutti gli elementi, applicando la legge di Kirchhoff alle maglie.

Esempio 2. *Consideriamo il seguente circuito: Partendo dal punto a, in cui il potenziale ha valore V_a, procediamo in senso orario: incontriamo dapprima il resistore, attraverso il quale il potenziale cade di $\Delta V_R = i \cdot R$, cosicché il potenziale in b risulta $V_b = V_a - i \cdot R$.*
Proseguendo, incontriamo la batteria, ove entriamo dal polo negativo, per cui il potenziale cresce di una quantità pari alla f.e.m. E.
Possiamo quindi scrivere

$$V_a = V_b + E = V_a - i \cdot R + E$$

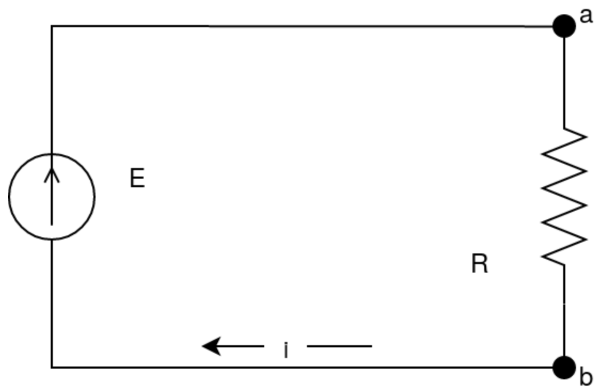


Figure 4.1: Circuito

Sfruttando la legge di Kirchhoff alle maglie:

$$E - i \cdot R = 0$$
$$i = \frac{E}{R}$$

4.2.1 Differenza di potenziale nei circuiti

Per determinare la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi di un circuito, si parte da un punto e ci si sposta lungo il circuito verso l'altro punto, sommando algebricamente le variazioni di potenziale incontrate.
Questa somma algebrica è la differenza di potenziale tra i punti.

Si può seguire un **qualunque** cammino tra i due punti lungo il circuito ottenendo lo stesso valore di differenza di potenziale, dato che un aspetto fondamentale del concetto di potenziale è l'indipendenza dal cammino.

4.2.2 Forza elettromotrice

Per spostare le cariche nei circuiti elettrici è generalmente necessaria una sorgente esterna di energia. Il circuito deve quindi contenere un dispositivo che mantenga una differenza di potenziale tra due punti. Un qualunque dispositivo che svolga questo compito in un circuito elettrico è detto sorgente di **forza elettromotrice**. Può essere utile considerare un generatore di f.e.m. come un meccanismo che crea un'elevazione di potenziale, vi *innalza* le cariche, da cui esse *cadono* poi verso *valle* attraverso il resto del circuito.

4.3 Determinazione di circuiti equivalenti

Elementi circuitali in parallelo

Due o più elementi circuitali collegati in parallelo godono delle seguenti proprietà:

- Ci si può spostare da un capo all'altro della configurazione attraversando un solo elemento.

- Su ciascun elemento appare la stessa differenza di potenziale.
- La corrente si suddivide tra i vari elementi.

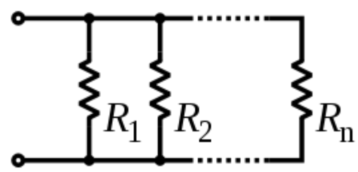
Elementi circuitali in serie

Due o più elementi circuitali collegati in serie si godono delle seguenti proprietà:

- Per passare da un capo all'altro della configurazione è necessario attraversare in successione tutti gli elementi.
- La differenza di potenziale applicata agli estremi è pari alla somma delle differenze di potenziali su ciascun elemento.
- Tutti gli elementi sono percorsi dalla stessa corrente.

4.4 Resistori

4.4.1 Resistori collegati in parallelo



Calcoliamo la resistenza equivalente di due resistori collegati in parallelo:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \qquad i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \qquad i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

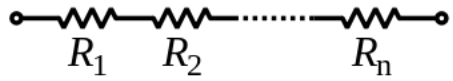
4.4.2 Resistori collegati in serie

Calcoliamo la resistenza equivalente R di due resistori collegati in serie:

$$\Delta V_1 = i \cdot R_1 \qquad \Delta V_2 = i \cdot R_2 \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = i \cdot R$$

$$i \cdot R = i \cdot R_1 + i \cdot R_2$$

$$R = R_1 + R_2$$



Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

4.5 Condensatori

Un condensatore piano è un sistema costituito da due superfici piane di materiale conduttore, aventi superficie S, poste a distanza d, in modo da costituire due piani paralleli.
Una superficie è caricata positivamente, l'altra negativamente.

4.5.1 Campo elettrico all'interno di un condensatore

All'interno del condensatore è presente un campo elettrico uniforme. Vediamo come calcolarlo.

Per il teorema di Gauss, una superficie piana carica genera un campo elettrico pari a:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Poiché in un condensatore abbiamo due piani carichi sarà:

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Poiché $\sigma = \frac{Q}{S}$ possiamo scrivere:

$$E = \frac{Q}{S \cdot \epsilon_0}$$

Ricordiamo che il vettore campo elettrico è entrante per la lastra con carica negativa, e uscente per la piastra con carica positiva.
Possiamo dedurre che all'esterno delle due lastre il contributo al campo elettrico di ciascuna di esse fa si che il campo elettrico totale sia nullo; all'interno di esse, invece, il campo elettrico è doppio rispetto a quello generato da ogni singola armatura.

4.5.2 Differenza di potenziale sulle armature del condensatore

Utilizziamo la definizione di energia potenziale (in cui il punto A rappresenta una delle armature e il punto B rappresenta l'altra):

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Poiché i versori che indicano la direzione di $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ sono paralleli, il loro prodotto scalare è pari a 1, quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{S \cdot \epsilon_0} \cdot d$$

4.5.3 Capacità di un condensatore piano

La capacità di un condensatore è il rapporto tra la carica che può immagazzinare e la differenza di potenziale sulle armature.
Si tratta di una costante che dipende soltanto dalle caratteristiche fisiche e geometriche del condensatore.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = Q \cdot \frac{S \cdot \epsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d}$$

4.5.4 Cosa accade all'esterno del condensatore

Come abbiamo detto nel paragrafo 4.2.1, il campo elettrico all'esterno del condensatore è nullo. Ciò implica che sia nullo anche il potenziale.

4.5.5 Carica e scarica del condensatore

Processo di carica

La carica si accumula sulle armature del condensatore quando viene applicata una differenza di potenziale $\Delta V = \epsilon$

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$
$$Q(t) = C \cdot \Delta V \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

- $t < 0$: condensatore scarico
- $t \to 0$: condensatore in carica

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} \cdot (1 - 1) = 0$$

- $t \to \infty$: condensatore carico a regime

$$\Delta V = \epsilon$$
$$Q(t) = Q_{MAX}(1 - e^{\frac{-\infty}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$

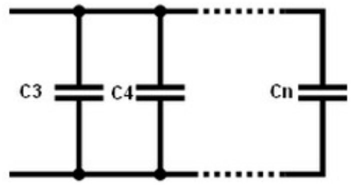
Processo di scarica

La carica accumulata sulle armature viene rilasciata, generando una $\Delta V = \epsilon$.

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$
$$Q(t) = C \cdot \Delta V \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$

- $t < 0$: condensatore carico

$$Q(t) = Q_{MAX}(e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$



- $t \to 0$: condensatore inizia a scaricarsi

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-t}{RC}})$$
$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-0}{RC}}) = Q_{MAX} = C \cdot \epsilon$$

Il condensatore si comporta come un generatore avente una fem pari a

$$\epsilon = \frac{Q_{MAX}}{C}$$

- $t \to \infty$: condensatore scarico

$$Q(t) = Q_{MAX} \cdot (e^{\frac{-\infty}{RC}}) = 0$$

4.5.6 Condensatori collegati in parallelo

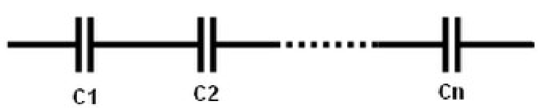
Calcoliamo la capacità equivalente C di due condensatori collegati in serie:

$$q_1 = C_1 \cdot \Delta V \qquad q_2 = C_2 \cdot \Delta V \qquad q = q_1 + q_2 = C \cdot \Delta V$$
$$C\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$
$$C = C_1 + C_2$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n condensatori vale:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

4.5.7 Condensatori collegati in serie



Calcoliamo la capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo:

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C}$$
$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Possiamo dimostrare, per induzione, che per n resistori vale:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

4.6 Induttori

L'induttore è quell'elemento circuitale che immagazzina energia nel campo magnetico generato dalle sue spire percorse da corrente, proprio come il condensatore accumula energia nel campo elettrico tra le sue armature cariche.
Un induttore è caratterizzato da un'**induttanza**, una grandezza che dipende dalle proprietà geometriche.
L'induttanza L è definita come la costante di proporzionalità tra la f.e.m. indotta e la derivata temporale della corrente:

$$\epsilon_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Il verso della f.e.m. indotta è tale da opporsi alla variazione di corrente.

4.6.1 Induttori nei circuiti

All'istante iniziale l'induttore si comporta come una resistenza di valore infinito, che pian piano si riduce a zero quando la corrente raggiunge il suo valore stazionario.

$\mathrm{m} = 10^{-3}$ (milli); $\mu = 10^{-6}$ (micro); $\mathrm{n} = 10^{-9}$ (nano); $\mathrm{p} = 10^{-12}$ (pico)

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \mathrm{N\ m^2 C^{-2}};$$
$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \ \mathrm{m\ T\ A^{-1}}$$

Elettrostatica

Campo elettrico prodotto in $\vec{r}$ da una carica puntiforme q posta in $\vec{r_o}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_o}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r_o}|}.$$

Potenziale elettrico prodotto in $\vec{r}$ da una carica puntiforme q posta in $\vec{r_o}$:

$$V(\vec{r}) = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_o}|}.$$

Nel caso in cui la carica puntiforme q sia posta nell'origine del SR le precedenti espressioni diventano:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{q}{r^2} \vec{u_r} \quad V(\vec{r}) = k_e \frac{q}{r}.$$

Forza su una particella di carica q_0 posta in un campo elettrico: $\vec{F} = q_0 \vec{E}$.
Momento di dipolo elettrico: $\vec{p} = q\vec{d}$

Condensatore

Capacità : $C = \frac{q}{V}$
Condensatori in serie: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
Condensatori in parallelo: $C = C_1 + C_2$
Energia immagazzinata in un condensatore:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

Condensatore piano formato da armature di area A poste a distanza d e densità di carica superficiale σ (nel caso tra le armature ci sia il vuoto):
capacità: $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, campo elettrico: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, differenza di potenziale: $V = Ed$.

Resistenze

Resistenze in serie: $R_{eq} = R_1 + R_2$;
Resistenze in parallelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Legge di Ohm: $V = RI$
Potenza assorbita nella resistenza: $P = RI^2$
Potenza erogata da una forza elettromotrice (f.e.m.): $P = VI$

Circuito RC

Carica del condensatore: $q(t) = q_0(1 - e^{-t/\tau})$; $i(t) = \frac{dq}{dt} = i_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau = RC$
Scarica del condensatore: $q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$.

Magnetismo

Modulo del campo magnetico generato da un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso da una corrente I in punto a distanza r dal filo:

$$B = 2k_m \frac{I}{r}$$

Modulo del campo magnetico generato da un solenoide rettilineo ideale: $B = 4\pi k_m nI = \mu_0 nI$
Campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente, lungo l'asse della spira:

$$\vec{B} = 2k_m \frac{I\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{n}$$

Forza su una particella carica q_0 in moto in un campo magnetico:

$$\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

Forza su un filo rettilineo di lunghezza l percorso da corrente:

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l$$

Modulo della forza fra due fili rettilinei paralleli percorsi da corrente:

$$F = 2k_m \frac{I_1 I_2}{d} l$$

Momento di dipolo magnetico di una spira di area S: $\vec{m} = IS$
Flusso campo magnetico attraverso una superficie Σ:

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

f.e.m. indotta: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$

Induttanza

f.e.m. autoindotta: $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$
Induttanza di solenoide rettilineo: $L = 4\pi k_m n^2 lS = \mu_0 n^2 lS$
Energia immagazzinata in un solenoide: $U_M = \frac{1}{2}LI^2$
Induttanze in serie: $L_{eq} = L_1 + L_2$;
Induttanze in parallelo: $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

Circuito LR

Corrente dopo chiusura: $I = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ con $\tau = L/R$
Corrente dopo apertura: $I = I_0 e^{-t/\tau}$

Circuito LC

Carica: $q = q_0 cos(\omega_0 t + \phi)$ con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Circuito RLC (in serie)

Impedenza in presenza di una f.e.m. alternata con pulsazione ω:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$