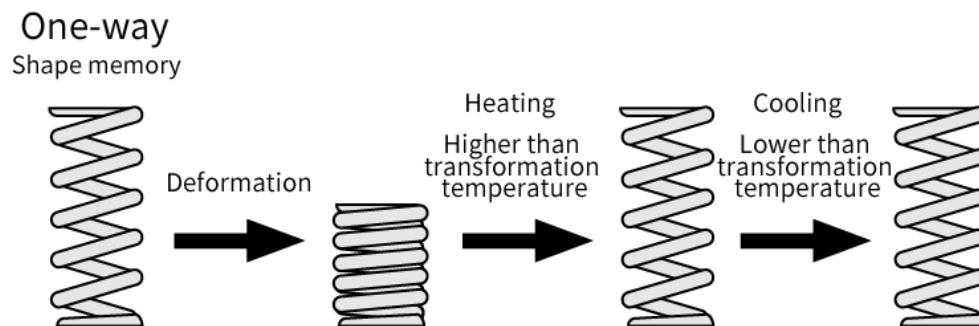


# Mecânica dos Sistemas Inteligentes

## Lista 1



*Figura 1: Shape Memory Alloys - Furukawa Techno Material*

Nome: Maria Elisa Tomás Matias Alexandre

DRE: 121147062

Professor: Luã Guedes Costa

## 1ª Questão

O enunciado pede que seja realizada a implementação, validação e análise de dois métodos numéricos para resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs): o Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) com passo fixo e o Runge-Kutta-Dormand-Prince adaptativo (DOPRI45/RK45) com controle de erros.

### Definição do Problema

Conforme pedido no enunciado, ambos os métodos foram abstraídos em funções e classes para garantir maior versatilidade durante a modelagem computacional. O desempenho destes métodos numéricos foi validado através da simulação de um oscilador harmônico linear forçado e amortecido utilizando os métodos citados e realizando uma comparação entre os resultados adquiridos e a solução analítica. A análise de convergência e a aplicabilidade dos métodos também serão discutidas.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \gamma \sin(\Omega t)$$

*Figura 2: Modelo do oscilador harmônico linear utilizado para validar os métodos*

Para a figura acima, tem-se que:

- x: posição
- $\zeta$ : razão de amortecimento
- $\omega_n$ : frequência natural
- $\gamma$ : amplitude de forçamento
- $\Omega$ : frequência de forçamento

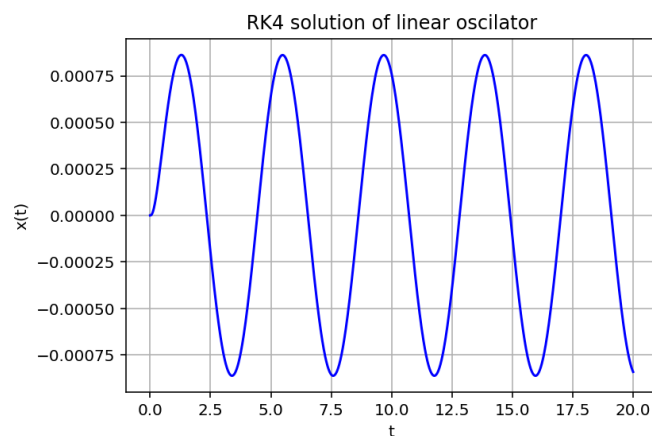
### Implementação Generalizada

Para realizar a implementação generalizada, as funções dos métodos numéricos foram construídas seguindo o raciocínio pedido. Para o RK4, foram feitas 2 funções gerais, a primeira função aplica o método para um determinado ponto em função do tempo, do espaço e da EDO definido pelo usuário e a outra função

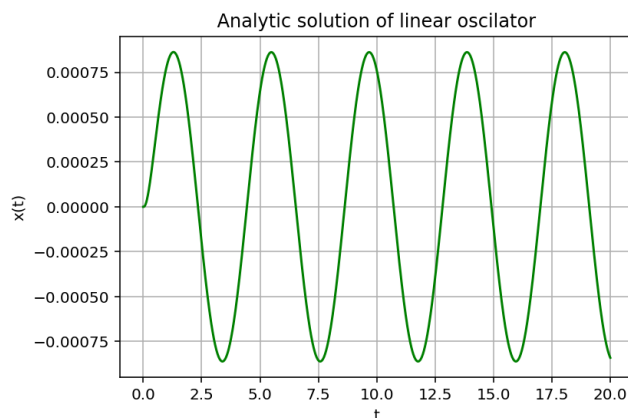
integra os pontos no domínio do tempo. Para o RK45, também foram feitas 2 funções gerais, assim como no método anterior, porém, este método inclui em sua função de definição etapas para estimar o erro e controlar automaticamente o tamanho de passo. Para ambos os métodos, é necessário que as EDOs sejam representadas como variáveis de estado. A abstração das funções é importante pois permite que os métodos RK4 e RK45 sejam aplicados em diferentes modelos, permitindo assim que os métodos possam ser validados em diferentes sistemas.

### Validação e Resultados

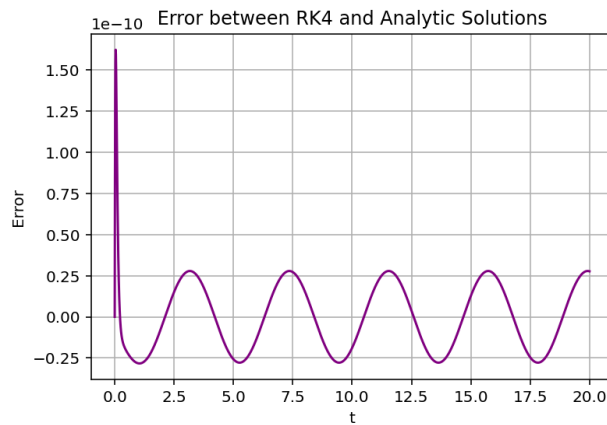
A solução analítica foi adquirida através da biblioteca SymPy, que possui um módulo para resolver equações diferenciais, servindo, assim, como base para validação numérica. Os resultados encontrados se encontram a seguir.



**Figura 3: Solução Oscilador Linear utilizando RK4**

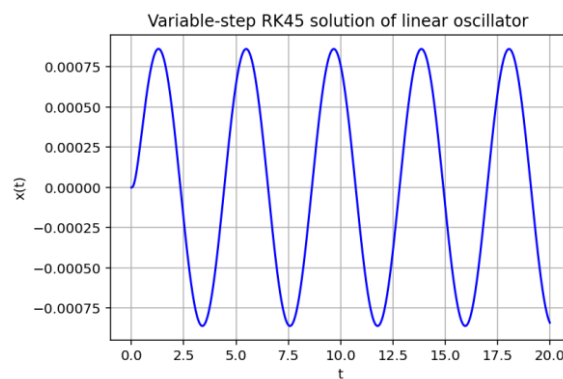


**Figura 4: Solução Oscilador Linear utilizando o Solver**

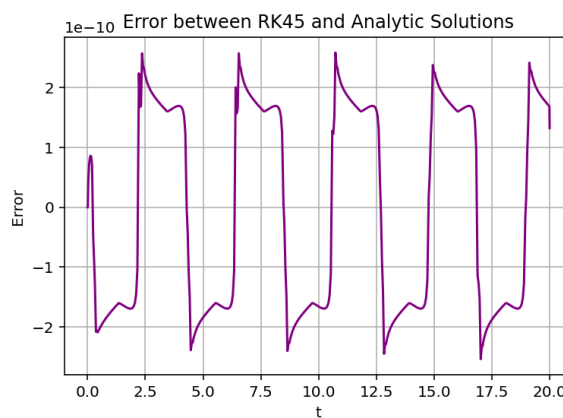


**Figura 5: Erro entre as soluções obtidas pelos métodos numérico RK4 e analítico.**

É interessante notar que a solução obtida pelo método RK4 corresponde muito bem ao resultado analítico, pois o erro é da ordem de  $10^{-10}$ , indicando, assim, excelente precisão para o intervalo de tempo escolhido.



**Figura 6: Solução Oscilador Linear utilizando RK45**



**Figura 7: Erro entre as soluções obtidas pelos métodos numérico RK45 e analítico.**

O método RK45 produz precisão semelhante, com erro também da ordem de  $10^{-10}$ . Algumas mudanças no patamar do erro são visíveis devido ao passo de tempo adaptativo.

### Análise de Convergência

Para o método RK4, o erro diminui à medida que o tamanho do passo ( $dt$ ) é reduzido. Para  $dt$  suficientemente pequeno, o erro global é dominado pelo erro de truncamento (convergência de 4ª ordem).

O método RK45 controla o erro local, aumenta o tamanho do passo quando a solução é suave e diminui-o próxima a mudanças rápidas. A convergência é determinada pela tolerância escolhida ( $tol$ ).

Ambos os métodos apresentam ótimos resultados quando comparados com a solução analítica. A convergência é observada à medida que  $dt$ , para o método RK4, ou  $tol$ , para o método RK45 são refinados.

### Aplicabilidade dos Métodos e Limitações

O método RK4 é ideal para problemas com soluções suaves, cujo custo computacional é previsível, ou seja, o número de etapas é fixo, e sistemas mais simples. Porém, o RK4 tem algumas limitações, normalmente é um método ineficiente para problemas rígidos ou que mudam rapidamente (requer etapas pequenas) e não possui controle automático de erros.

O método RK45 é ideal para problemas com regiões de mudança rápida ou rigidez e em modelos cujo controle de erros é crítico. Também possui algumas limitações, já que este método não é ideal para sistemas altamente rígidos. Para este tipo de sistema, é recomendado que sejam utilizados métodos implícitos (Fórmula de Diferenciação Regressiva, Radau), métodos multietapas (Adams-Bashforth-Moulton), ou integradores simpléticos (sistemas harmônicos ou conservativos).

A implementação generalizada dos métodos RK4 e RK45 fornecem ferramentas robustas e reutilizáveis para modelagem computacional. Ambos os métodos

resolvem com precisão o oscilador harmônico linear e possuem excelentes resultados, bem próximos à solução analítica. O método RK4 é mais simples e bastante eficaz para problemas não rígidos. Já o método RK45 é muito eficiente para modelos com dinâmica de variáveis e controle de erros. Para sistemas rígidos e/ou altamente oscilatórios, métodos implícitos ou integradores especializados devem ser considerados.

## 2ª Questão

O enunciado pede que seja feita a avaliação dos Mapas de Poincaré, com o auxílio do método de Runge-Kutta de quarta ordem, para os sistemas dinâmicos descritos a seguir.

- Oscilador linear não dissipativo:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \gamma \sin(\Omega t)$$

- Oscilador biestável tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma \sin(\Omega t)$$

- Pêndulo simples:

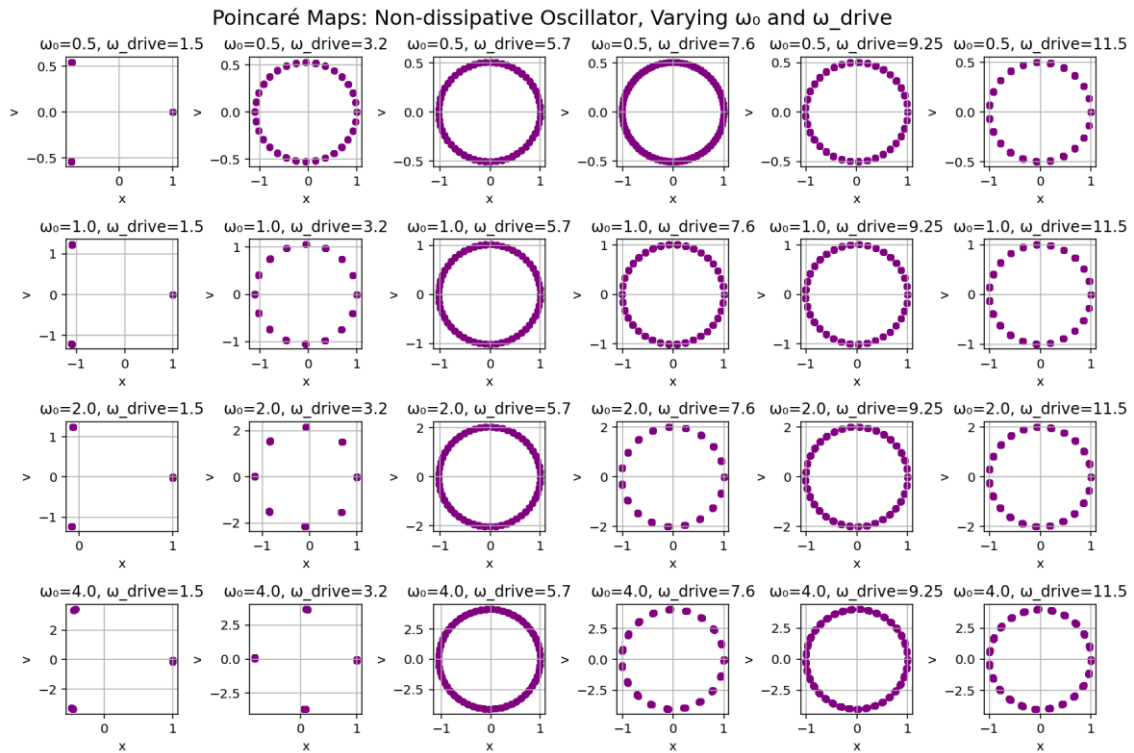
$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\phi) = \gamma \sin(\Omega t)$$

**Figura 8: Sistemas a serem analisados nesta questão**

Para cada sistema, foi feito um código em Python contendo o método de solução, Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), abstraído em 2 funções gerais (definição do método e integrador), a EDO do sistema a ser analisado, representado por meio de variáveis de estado e, por fim, uma função main para computar as constantes e rodar o modelo.

### 2.1 Oscilador Linear Não Dissipativo

Este sistema representa um oscilador harmônico forçado clássico sem amortecimento. Conforme pedido pela questão, os resultados obtidos variando os valores da frequência natural  $\omega_n$  e da frequência de forçamento adimensional  $\Omega$  se encontram a seguir:



**Figura 9: Diferentes Mapas de Poincaré para o Oscilador Não-Dissipativo**

### Interpretação Geral

O mapa de Poincaré mostra uma curva regular e fechada, assemelhando-se a uma elipse ou círculo. Cada ponto representa o estado  $(x, \dot{x})$  do sistema quando a solução percorre um período  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . O formato regular obtido indica que o movimento é puramente periódico: o sistema segue uma trajetória previsível e repetitiva no espaço de fase.

Analisando fisicamente a solução, a ausência de amortecimento faz com que a energia seja conservada, exceto a parte de energia originada do forçamento periódico. O sistema responde na frequência de forçamento, levando a oscilações simples e previsíveis. A ausência de dispersão ou ramificações múltiplas significa que não há sensibilidade às condições iniciais ou ao caos. O sistema muda apenas devido à oscilação harmônica. Este é o comportamento esperado para sistemas lineares, onde a superposição e a regularidade dominam.

### Estrutura dos Resultados

Cada sub-gráfico mostra a seção de Poincaré no espaço de fase para um par  $(\omega_n, \Omega)$ . Os resultados presentes na mesma linha possuem o mesmo valor da frequência natural e os valores da frequência de condução são crescentes: 1,5, 3,2, 5,7, 7,6, 9,25, 11,5. Os resultados presentes na mesma coluna possuem o mesmo valor para a frequência de condução e os valores da frequência natural são crescentes: 0,5, 1,0, 2,0, 4,0.

### Interpretação Física

Ao observar a primeira linha, ou seja, casos em que a frequência natural é muito baixa, o sistema apresenta seções de Poincaré circulares ou quase circulares quando  $\Omega > \omega_n$ . Já para situações em que as duas frequências são próximas, os pontos do espaço de fase começam a preencher uma curva fechada. Para os casos em que  $\Omega < \omega_n$ , a curva permanece quase circular, mas o raio aumenta ligeiramente com a amplitude de acionamento. Conforme a frequência natural for aumentando, B. Aumente os círculos do espaço de fase aumentam, mostrando amplitudes maiores para as variáveis envolvidas. Além disso, o número de pontos por ciclo de acionamento aumenta, pois o movimento se torna mais complexo, mas, ainda continua regular e não caótico.

### Ressonância e Comensurabilidade

Como não há amortecimento, o sistema não se estabiliza. Logo, ele continua oscilando e traçando órbitas periódicas. Este sistema também não possui caos visível, pois as seções mostram curvas regulares e fechadas, estado típico de osciladores forçados lineares e não dissipativos. Para frequências forçadas muito baixas, apenas alguns pontos por ciclo são amostrados, pois o movimento é mais lento.

### Crescimento da Amplitude

À medida que  $\omega_n$  e  $\Omega$  aumentam, o raio do círculo do espaço de fase aumenta, refletindo uma maior entrada de energia do termo de força. A forma permanece regular, sem sinais de bifurcação ou caos.

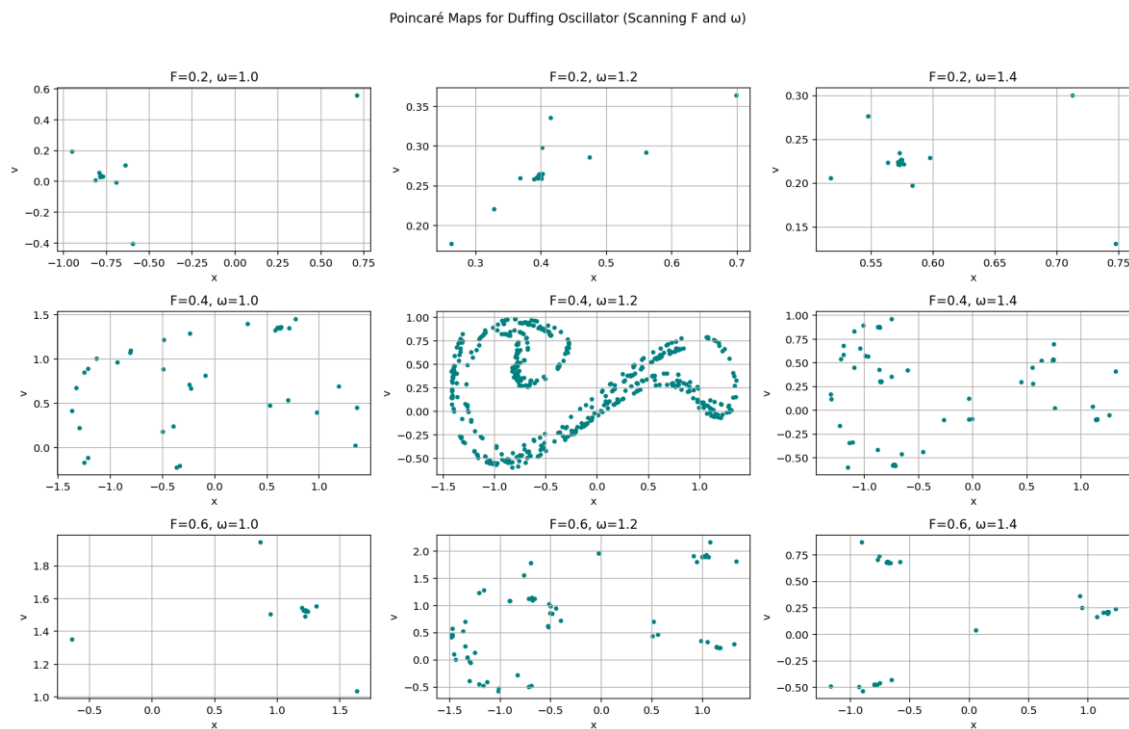
### Relação entre $\Omega$ e $\omega_n$



A razão entre as frequências controla a aparência do espaço de fase. Para razões racionais, o espaço de fase é amostrado regularmente, resultando em curvas fechadas. Para razões irracionais, a curva seria preenchida de forma mais densa. Nenhum pico de ressonância é observado, mas em um caso quando as frequências do sistema são muito próximas, a amplitude é maximizada.

## 2.2 Oscilador Biestável do Tipo Duffing

Conforme pedido pela questão, os resultados obtidos variando os valores da amplitude de forçamento adimensional  $\gamma$  e da frequência de forçamento adimensional  $\Omega$  se encontram a seguir:



**Figura 10: Mapas de Poincaré para Oscilador de Duffing**

## Interpretação Geral

O mapa de Poincaré é irregular e complexo, com clusters (agrupamentos de pontos que revelam padrões no comportamento de longo prazo do sistema), ramificações e possivelmente pontos dispersos. O movimento não se repete em um ciclo simples, em vez disso, os estados amostrados preenchem uma região, frequentemente indicativa de caos ou multiperiodicidade.

Ao realizar uma análise física do problema, percebe-se que o oscilador de Duffing pode apresentar uma variedade de comportamentos: periódico, quase periódico e caótico. Isso ocorre devido a diferença de valores dos parâmetros do sistema. A presença de múltiplas ramificações ou pontos dispersos no mapa sugere que o sistema pode ter múltiplos atratores estáveis ou instáveis. Pequenas mudanças nas condições iniciais podem levar a comportamentos de longo prazo muito diferentes, fenômeno conhecido como sensibilidade às condições iniciais, uma característica do caos. O sistema pode "saltar" entre diferentes tipos de movimento (biestabilidade).

### Varredura de Parâmetros

Cada sub-gráfico mostra a seção de Poincaré no espaço de fase para um par ( $\gamma$ ,  $\Omega$ ). Os resultados presentes na mesma linha possuem o mesmo valor para a amplitude de forçamento adimensional e os valores da frequência de forçamento são crescentes: 1,0, 1,2, 1,4. Os resultados presentes na mesma coluna possuem o mesmo valor para a frequência de forçamento e os valores da amplitude de forçamento adimensional são crescentes: 0,2, 0,4, 0,6.

### Interpretação Física

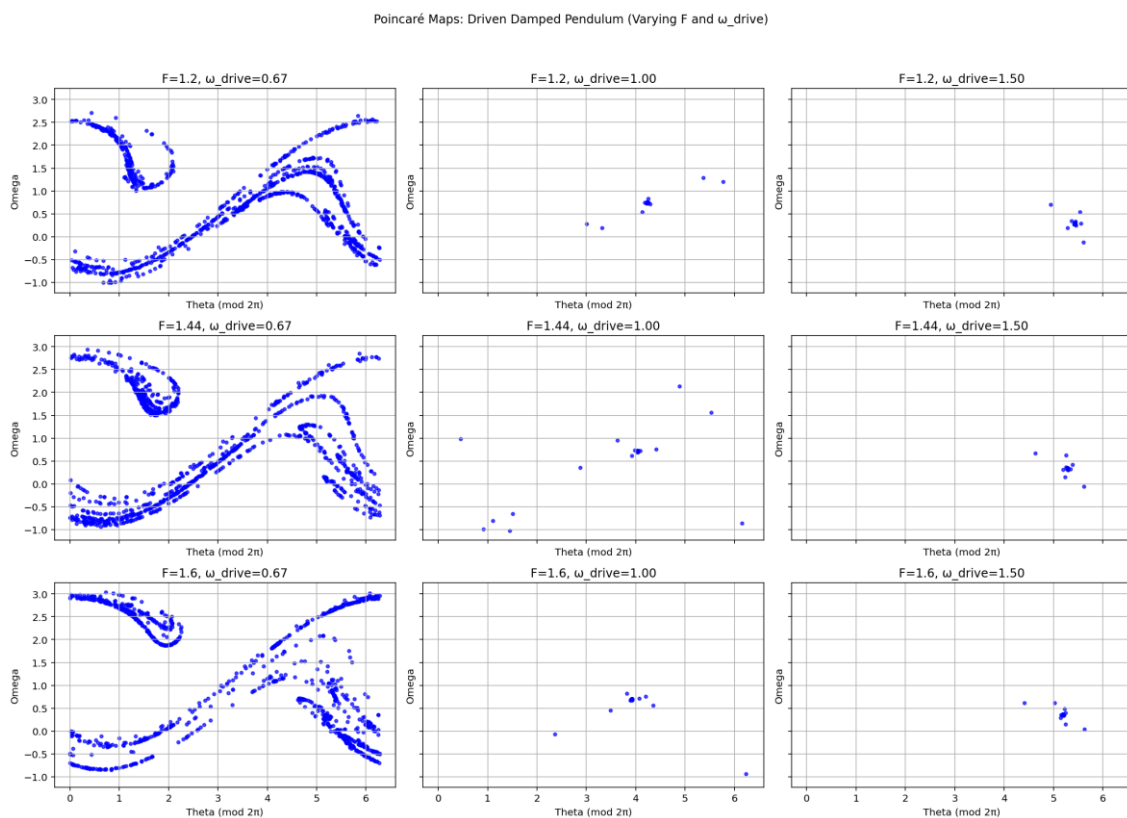
Ao analisar todas as respostas com baixa amplitude de forçamento adimensional, ou seja,  $\gamma = 0.2$ , os mapas demonstram, somente, um pequeno número de pontos dispersos. Isto indica que o movimento do sistema é regular ou quase periódico. O sistema observado não é caótico e sim um atrator simples. Quando o sistema possui  $\gamma = 0.4$  e  $\Omega = 1.2$ , é possível perceber padrões densos e complexos. Assim é possível perceber que neste caso, o sistema possui característica caótica. O atrator é fractal, demonstrando, assim, sensibilidade às condições iniciais. Para o mesmo valor de  $\gamma = 0.4$ , quando  $\Omega = 1.0$ , é possível perceber uma maior dispersão de pontos quando comparado aos casos de amplitude de forçamento baixa. Nesta região, o sistema está em transição para dinâmicas mais complexas. Já para  $\Omega = 1.4$ , é possível perceber que os pontos estão dispersos e não tão organizados quando  $\Omega = 1.2$ , indicando, assim, um comportamento mais complexo, talvez fracamente caótico. Ao analisar todos os sistemas com alta amplitude de forçamento, ou seja,  $\gamma = 0.6$ , é possível perceber que os pontos são mais dispersos, alguns mais agrupados, mas menos regulares se comparados aos sistemas com  $\gamma = 0.4$ . O sistema é fortemente caótico ou intermitentemente regular. Para  $\Omega = 1.2$ , a dispersão é ainda maior, sem uma estrutura clara, reforçando o regime caótico.

### Observações

O oscilador de Duffing transita de uma dinâmica regular para uma caótica à medida que a força motriz  $\Omega$  aumenta, dependendo da frequência motriz ( $\gamma$ ). Atratores caóticos são mais proeminentes em  $\Omega$  intermediários a altos e em certos valores de  $\gamma$ . A estrutura do mapa é uma impressão digital da complexidade dinâmica não linear, mostrando como o sistema explora o espaço de fase de forma não repetitiva.

### 2.3 Pêndulo Simples Amortecido

Conforme pedido pela questão, os resultados obtidos variando os valores da amplitude de forçamento adimensional  $\gamma$  e da frequência de forçamento adimensional  $\Omega$  se encontram a seguir:



**Figura 11: Mapas de Poincaré para o Pêndulo Simples Amortecido**

### Análise Geral

O mapa de Poincaré indica vários "ramos" distintos e pontos dispersos. Isto significa que o sistema pode se estabelecer em diferentes órbitas periódicas ou

explorar uma ampla região do espaço de fase (caos). A presença destes pontos dispersos e a ausência de uma curva fechada simples são indicações claras de uma dinâmica complexa e não linear. O sistema pode transitar entre movimento regular, quase periódico e caótico, dependendo da interação entre amortecimento, a amplitude de forçamento adimensional e a frequência de forçamento adimensional.

### Estrutura dos Resultados

Cada sub-gráfico mostra a seção de Poincaré no espaço de fase para um par ( $\gamma$ ,  $\Omega$ ). Os resultados presentes na mesma linha possuem o mesmo valor para a amplitude de forçamento adimensional e os valores da frequência de forçamento são crescentes: 1,2, 1,44, 1,6. Os resultados presentes na mesma coluna possuem o mesmo valor para a frequência de forçamento e os valores da amplitude de forçamento adimensional são crescentes: 0,67, 1,00, 1,50.

### Interpretação Física

Para os sistemas nos quais  $\Omega = 0.67$ , os mapas possuem estruturas complexas e densas, características de uma resposta caótica. Neste caso, à medida que  $\gamma$  aumenta, a estrutura se torna mais complexa. Para  $\gamma = 1.2$ , o sistema exibe uma mistura de comportamento periódico e caótico. Para os outros valores de  $\gamma$ , o caos se torna mais pronunciado, com pontos mais dispersos e regiões maiores preenchidas no espaço de fase. Quando  $\Omega = 1.00$ , os mapas de Poincaré tornam-se mais esparsos, com menos pontos e menos dispersão. Neste caso, o sistema tende a órbitas mais regulares e periódicas. À medida que  $\gamma$  aumenta, os pontos permanecem relativamente isolados, sugerindo que o pêndulo é menos suscetível ao caos nessa frequência para as amplitudes escolhidas. Por fim, quando  $\Omega = 1.5$ , os mapas mostram pequenos aglomerados ou pontos isolados, indicando comportamento muito periódico. Nesta situação, o sistema está preso a órbitas específicas, e o aumento de  $\gamma$  não introduz caos nessa alta frequência dentro da faixa testada. O pêndulo responde fracamente à força motriz, oscilando de maneira regular e previsível.

Para a situação de baixa frequência e alta amplitude, o pêndulo é fortemente perturbado, levando a um comportamento caótico. Porém, quando o pêndulo opera à alta frequência, ele não consegue acompanhar efetivamente a força motriz rápida, resultando em movimento periódico ou quase periódico, independentemente da amplitude.

### 3ª Questão

O enunciado pede que seja feita a determinação de pontos de equilíbrio e a análise de sua estabilidade para quatro sistemas dinâmicos não lineares:

- Oscilador de Duffing
- Pêndulo simples (sem dissipação)
- Sistema de Lorenz
- Oscilador acoplado multiestável com dois graus de liberdade

(a) Oscilador tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

(b) Pêndulo simples sem dissipação:

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\phi) = 0$$

(c) Sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

(d) Sistema multiestável com 2 graus de liberdade:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 2\zeta_1\dot{x}_1 - 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1x_1^3 - \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) &= 0 \\ \rho\ddot{x}_2 + 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_2x_2 + \beta_2x_2^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) &= 0\end{aligned}$$

**Figura 12: Sistemas Analisados Questão 3**

Para resolver o problema, foram feitos 4 códigos em python, cada um contendo a função do sistema a ser analisado e uma função para encontrar o jacobiano do sistema, além da criação de 3 loopings para percorrer o espaço da solução e registrar os pontos de equilíbrio.

#### Abordagem Geral

Os pontos de equilíbrio de um sistema representado por suas variáveis de estado,  $\dot{x} = f(x)$ , são todos os pontos nos quais  $f(x) = 0$ .

A natureza de um ponto de equilíbrio é determinada pela linearização do sistema, realizada pela matriz Jacobiana, próximo a esse ponto. Além disso, é preciso

também realizar uma análise dos autovalores. Se todos os autovalores possuem parte real negativa, o ponto é estável. Se todos os autovalores possuem parte real positiva, o ponto é instável. Se os autovalores possuem parte real negativa e positiva ou zero, é necessário realizar uma análise condicional pois o ponto pode ser sela, centro ou indeterminado.

### Oscilador de Duffing

Este modelo é representado em variáveis de estado da seguinte forma:

$$x_1 = x \quad (1)$$

$$x_2 = \dot{x} \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -2\zeta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 \quad (4)$$

Conforme citado anteriormente, para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário encontrar os pontos nos quais  $\dot{x} = 0$ . Dessa forma, é necessário encontrar os pontos que satisfazem as seguintes condições:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (6)$$

Aplicando (3) e (5) em (6), tem-se que:

$$-\alpha x_1 - \beta x_1^3 = 0$$

$$x_1(-\alpha - \beta x_1^2) = 0 \quad (8)$$

Para que (8) seja verdade, é necessário que:

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}$$

Para  $\alpha = -1$  e  $\beta = 1$ , os pontos de equilíbrio são:

$$(x_1, x_2) = (1,0); (-1,0); (0,0)$$

Com os pontos de equilíbrio previamente definidos, é necessário então encontrar a Matriz Jacobiana de cada ponto do sistema. Com esta matriz, é possível determinar os pontos de equilíbrio através dos autovalores da matriz jacobiana, que é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Para o ponto  $(1,0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[-0.1 + 1.41067j \quad -0.1 - 1.41067j]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa, o ponto  $(1,0)$  é estável.

Para o ponto  $(-1,0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[-0.1 + 1.41067j \quad -0.1 - 1.41067j]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa, o ponto  $(-1,0)$  é estável.

Para o ponto  $(0,0)$ , a matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[0.90498756 \quad -1.10498756]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa e positiva, o ponto  $(0,0)$  é de sela ou de centro.

### Pêndulo Simples (Sem Amortecimento)

Este modelo é representado em variáveis de estado da seguinte forma:

$$x_1 = \phi \quad (1)$$

$$x_2 = \dot{\phi} \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 \sin x_1 \quad (4)$$

Conforme citado anteriormente, para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário encontrar os pontos nos quais  $\dot{x} = 0$ . Dessa forma, é necessário encontrar os pontos que satisfazem as seguintes condições:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (6)$$

Aplicando (3) e (5) em (6), tem-se que:

$$-\omega_n^2 \sin x_1 = 0 \quad (8)$$

Para que (8) seja verdade, é necessário que:

$$\sin x_1 = 0$$



Sendo

$$\omega_n^2 = \frac{g}{L}$$

Os pontos de equilíbrio, considerando que  $\phi \in [-2\pi; 2\pi]$ , são:

$$(x_1, x_2) = (-2\pi, 0); (-\pi, 0); (0, 0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$$

Com os pontos de equilíbrio previamente definidos, é necessário então encontrar a Matriz Jacobiana de cada ponto do sistema e os autovalores da matriz jacobiana.

Para o ponto  $(-2\pi, 0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[0. + 3.13209195j \ 0. - 3.13209195j]$ . Como a parte real dos autovalores é zero, o ponto  $(-2\pi, 0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

Para o ponto  $(-\pi, 0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[3.13209195 \ -3.13209195]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa e positiva, o ponto  $(-\pi, 0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

Para o ponto  $(0, 0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[0. + 3.13209195j \ 0. - 3.13209195j]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa e positiva, o ponto  $(0,0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

Para o ponto  $(\pi, 0)$ , a matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[3.13209195 \ -3.13209195]$ . Como a parte real dos autovalores é zero, o ponto  $(\pi, 0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

Para o ponto  $(2\pi, 0)$ , a matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[0. + 3.13209195j \ 0. - 3.13209195j]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa e positiva, o ponto  $(2\pi, 0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

A análise de autovalores mostra apenas comportamento oscilatório (centro) ou de sela; não pode determinar estabilidade assintótica devido à ausência de amortecimento.

### Sistema de Lorenz

Este modelo é representado em variáveis de estado da seguinte forma:

$$x_1 = x \quad (1)$$

$$x_2 = y \quad (2)$$

$$x_3 = z \quad (3)$$

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(\rho - x_3) - x_2 \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - \beta x_3 \quad (6)$$

Conforme citado anteriormente, para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário encontrar os pontos nos quais  $\dot{x} = 0$ . Dessa forma, é necessário encontrar os pontos que satisfazem as seguintes condições:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 = 0 \quad (9)$$

Realizando algumas manipulações algébricas e tendo  $(\sigma, \rho, \beta) = (10.0, 28.0, 8.0/3.0)$ , os pontos de equilíbrio são:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0); (-8.485, -8.485, 27);$$

Com os pontos de equilíbrio previamente definidos, é necessário então encontrar a Matriz Jacobiana de cada ponto do sistema e os autovalores da matriz jacobiana.

Para o ponto  $(0,0,0)$ , a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.67 \end{bmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são  $[-22.82772345 \quad 11.82772345 \quad -2.66666667]$ . Como a parte real dos autovalores é positiva e negativa, o ponto  $(0,0,0)$  não possui estabilidade definida, pode ser de sela ou de centro.

O atrator de Lorenz tem uma dinâmica complexa não totalmente capturada pela linearização local. Para uma determinada faixa de parâmetros, o comportamento global é caótico e não pode ser determinado apenas por autovalores.

### Oscilador Multiestável Acoplado (2 graus de liberdade)

Este sistema é mais complexo e é representado em variáveis de estado da seguinte forma:

$$x_1 = x_1 \quad (1)$$

$$x_2 = x_2 \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_2 \quad (4)$$

$$\ddot{x}_1 = -2\zeta_1 \dot{x}_1 + 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - (1 + \alpha_1)x_1 - \beta_1 x_1^3 + \rho\Omega_s^2 (x_2 - x_1) \quad (5)$$

$$\ddot{x}_2 = -2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^3 - \rho\Omega_s^2 (x_2 - x_1) \quad (6)$$

Os pontos de equilíbrio são os quais  $\dot{x} = 0$ . Dessa forma, é necessário encontrar os pontos que satisfazem as seguintes condições:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{x}_1 = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{x}_2 = 0 \quad (10)$$

Realizando algumas manipulações algébricas, um dos pontos de equilíbrio encontrado corresponde a:

$$(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = (0,0,0,0)$$

Para o ponto (0,0,0,0), a matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0. & 1. & 0. & 0. \\ -3. & -0.4 & 1. & 0.2 \\ 0. & 0. & 0. & 1. \\ 1. & 0.2 & -2. & -0.2 \end{bmatrix}$$

***Figura 13: Matriz Jacobiana Sistema Multiestável***

(não consegui criar no word uma matriz 4x4)

Os autovalores desta matriz são  $[-0.2618034 + 1.88400981j \quad -0.2618034 - 1.88400981j \quad -0.0381966 + 1.1749498j \quad -0.0381966 - 1.1749498j]$ . Como a parte real dos autovalores é negativa, o ponto (0,0,0,0) é estável.

### Limitações da Autoanálise

As principais dificuldades encontradas na hora de executar o código ocorreram quando o sistema possuía estabilidade mista, os pontos de centro, que foram observados no sistema do pêndulo não amortecido. Para este caso, os autovalores se encontram no eixo imaginário, dessa forma, a execução da análise de forma linear limita a determinação da estabilidade de sistemas não lineares. Outra barreira encontrada foi ao observar sistemas com autovalores degenerados ou partes reais nulas. Nestes casos, é necessário realizar uma análise das regiões não-lineares, que como citado anteriormente, não conseguem ser determinadas com clareza por este método. Por fim, ao observar os sistemas caóticos, como, por exemplo, o sistema de Lorenz, a análise de equilíbrio é feita somente perto dos pontos de equilíbrio encontrados, pois o comportamento global do sistema pode ser imprevisível.

A análise analítica de equilíbrio e estabilidade possibilita o melhor entendimento das características dinâmicas de muitos sistemas simples, mas quando se deseja observar sistemas não lineares e de alta dimensão, torna-se necessário então implementar métodos numéricos aprimorados. Além disso, esta análise de estabilidade também é inconclusiva em casos de centros ou pontos degenerados. Dessa forma, é necessário maior investigações para estes casos.

## 4ª Questão

O enunciado da questão pede para mostrar como um oscilador com memória de forma pode ser utilizado para atenuação de vibrações. Para resolver o problema, foi feito um código em python contendo a função simulando o comportamento do material SMA, além de 2 funções relacionadas ao método Runge-Kutta-Dormand-Prince (passo adaptativo e integrador) e, por fim, a função main

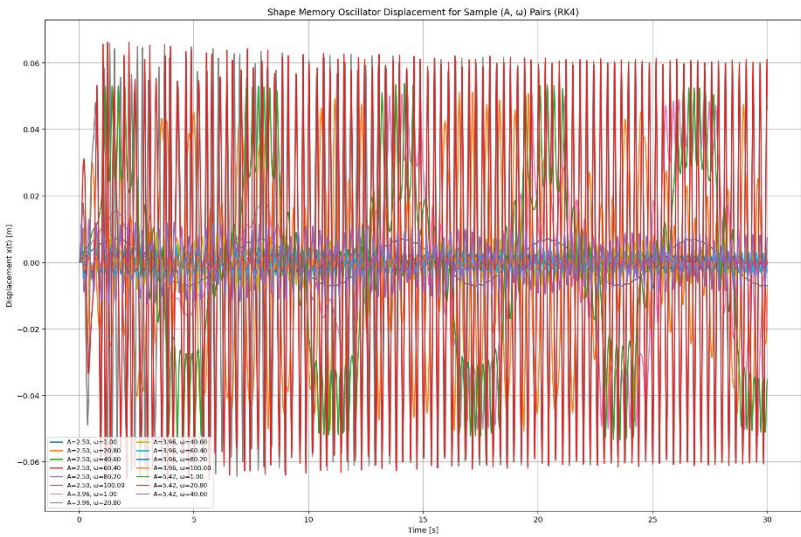
contendo métodos para salvar os pontos da solução e plotagem de dados. Os valores para as constantes foram utilizados conforme sugerido pela tabela do enunciado.

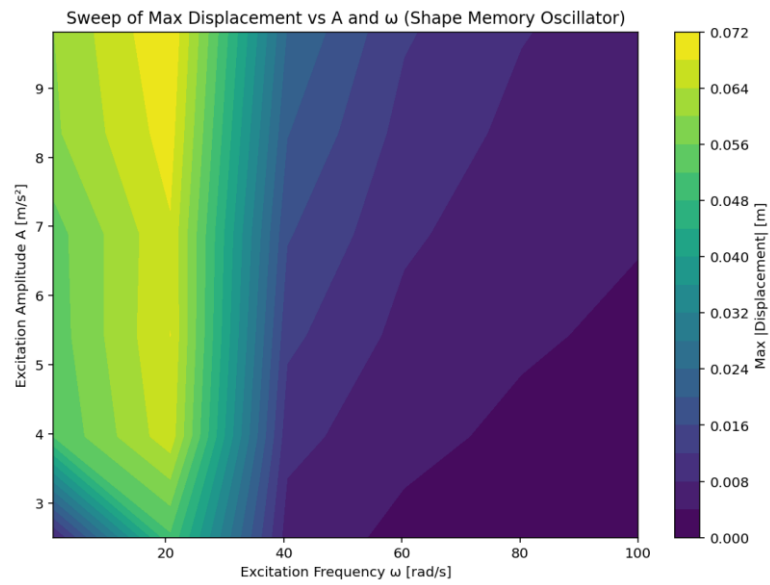
Parâmetros	Valor	Unidade
$\zeta$	0.025	—
$A$	2.5 $\rightarrow$ 9.81	m/s <sup>2</sup>
$\omega$	1 $\rightarrow$ 100	rad/s
$a$	15	N/(K·m·kg)
$b$	60 $\times 10^4$	N/(m <sup>3</sup> ·kg)
$T_a$	313	K
$T_m$	287	K

Conforme pedido no enunciado, os valores da Amplitude e Frequência de Excitação devem ser alterados para realizar a análise, logo, as faixas de varredura foram:

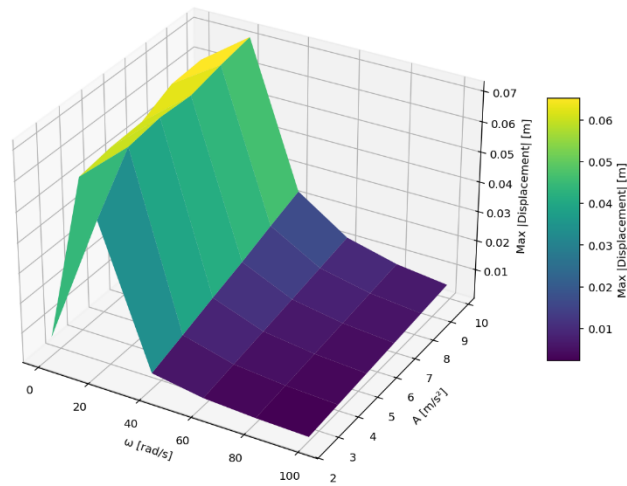
- Amplitude de excitação, A: 2,5, 3,96, 5,42, 6,89, 8,35, 9,81 m/s<sup>2</sup>
- Frequência de excitação,  $\omega$ : 1,0, 20,8, 40,6, 60,4, 80,2, 100,0 rad/s

Os resultados obtidos pelo código se encontram a seguir.

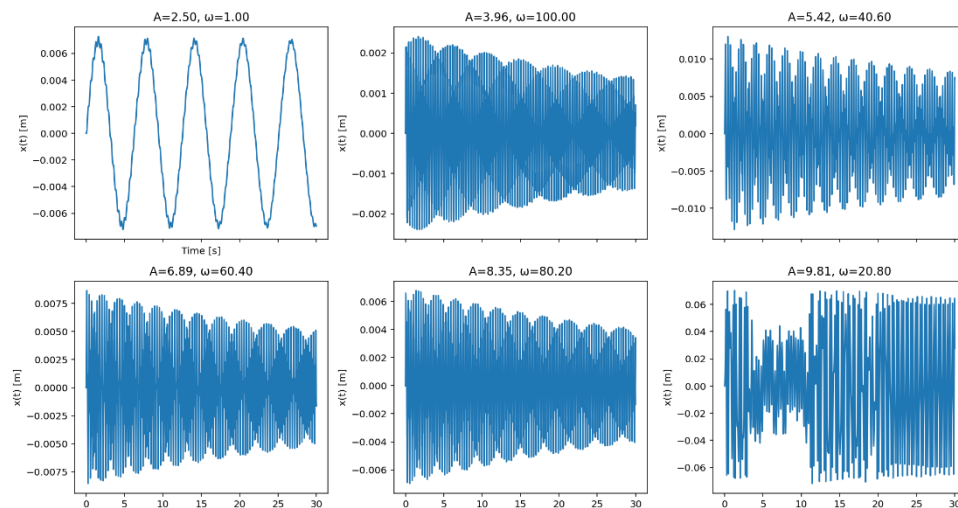




Sweep of Max Displacement (3D Surface)



Shape Memory Oscillator: Selected Time Series



Em um primeiro momento, é possível perceber que os resultados encontrados ilustram que o comportamento do sistema difere conforme a mudança dos parâmetros atrelados ao sistema, que serão comentados a seguir.

Analizando, primeiramente, o mapa de calor abaixo é possível perceber que ele exibe o deslocamento absoluto máximo para cada combinação de amplitude e frequência de excitação. Valores menores indicam melhor atenuação da vibração. É possível perceber que para valores de  $\omega$  baixos e amplitude altas, maior é o deslocamento, mostrando, assim, efeitos de ressonância. Para as situações em que o  $\omega$  é alto, independentemente do valor da amplitude, o deslocamento é baixo, indicando, assim, forte atenuação. Para valores intermediários, tanto de  $\omega$  quanto da amplitude, ocorrem as zonas de transição de atenuação efetiva.

Abaixo, tem-se uma tabela com o deslocamento absoluto máximo de acordo com a frequência e amplitude de excitação.

	$\omega$ = 1.0	$\omega$ = 20.8	$\omega$ = 40.6	$\omega$ = 60.4	$\omega$ = 80.2	$\omega$ = 100.0
$A = 2.5$	0,00726	0,05118	0,00595	0,00311	0,00205	0,00151
$A = 3.96$	0,05212	0,06651	0,00945	0,00494	0,00326	0,00241
$A = 5.42$	0,05380	0,06803	0,01301	0,00679	0,00447	0,00331
$A = 6.89$	0,05428	0,06744	0,01638	0,00865	0,00570	0,00422
$A = 8.35$	0,05923	0,06984	0,02019	0,01055	0,00696	0,00516
$A = 9.81$	0,05989	0,07170	0,02373	0,01248	0,00820	0,00608

Observando agora superfície 3D plotada, é possível observar um "vale" de baixo deslocamento em frequências mais altas e amplitudes moderadas. Para cada par  $(A, \omega)$ , o sistema foi classificado como "atenuado" se o deslocamento do pico fosse baixo. Para as simulações que possuem amplitude baixa e  $\omega$  alto, a atenuação é consistentemente forte. Já para as situações em que a amplitude é alta e o  $\omega$  é baixo, a ressonância é o fenômeno dominante, reduzindo a atenuação.



Analisando, agora, o comportamento de cada sistema (par amplitude e frequência). Para baixas frequências ( $\omega = 1$  rad/s, todos A) é possível perceber que o deslocamento é alto e os efeitos de ressonância são visíveis. Além disso, os termos não lineares limitam o crescimento, mas não o suprimem completamente. Observando as faixas de frequências intermediárias ( $\omega = 20,8$ – $40,6$  rad/s), nota-se que o deslocamento cai e os efeitos não lineares deslocam e ampliam a ressonância. Já para os valores de frequência alta ( $\omega = 60,4$ – $100,0$  rad/s), o deslocamento é muito baixo e o sistema é altamente eficaz para atenuação de vibrações. No sistema de alta amplitude ( $A = 9,81$  m/s<sup>2</sup>), o deslocamento aumenta e o movimento é controlado. Por fim, para a amplitude mais baixa ( $A=2,5$  m/s<sup>2</sup>), o deslocamento permanece baixo mesmo na ressonância; melhor atenuação.

Pode-se concluir que o oscilador com memória de forma proporciona atenuação robusta de vibração de banda larga, especialmente em frequências de excitação mais altas e amplitudes moderadas. Efeitos não lineares garantem estabilidade e previnem desastres de ressonância, tornando esta abordagem altamente adequada para o controle de vibração no mundo real em sistemas mecânicos inteligentes.