

# Statistical Mechanics and Critical Phenomena

Autore: Agnello Elisabetta

anno: 2025/2026

---

github.com/elisabettagnello

---

# Indice

<b>1 Lezione 1</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione alla Meccanica Statistica . . . . .	1
1.1.1 Approccio Probabilistico e Distribuzione di Equilibrio . . . . .	1
1.1.2 La Distribuzione Canonica di Boltzmann . . . . .	2
1.1.3 Insieme Canonico vs. Microcanonico . . . . .	3
1.2 Entropia . . . . .	3
<b>2 Lezione 2</b>	<b>5</b>
2.1 Definizione di Entropia . . . . .	5
2.1.1 Caso Discreto . . . . .	5
2.1.2 Caso Continuo . . . . .	6
2.1.3 Caso di L Stati Equiprobabili . . . . .	6
2.1.4 Teorema di Shannon . . . . .	7
2.2 Derivazione della Distribuzione di Boltzmann . . . . .	8
2.3 Relazioni Termodinamiche Fondamentali . . . . .	9
2.4 Corrispondenza tra Meccanica Statistica e Termodinamica . . . . .	11
<b>3 Lezione 3</b>	<b>13</b>
3.1 Introduzione ai Funzionali . . . . .	13
3.1.1 Derivata Funzionale . . . . .	14
3.2 Sistemi Magnetici e Transizioni di Fase . . . . .	16
3.2.1 Framework Generale . . . . .	16
3.2.2 Grandezze/Funzioni Fondamentali . . . . .	17
<b>4 Lezione 4</b>	<b>19</b>
4.1 Teorema di Fluttuazione-Dissipazione (FDT) . . . . .	19
4.2 Rottura Spontanea di Simmetria . . . . .	21
4.2.1 Il Paradosso della Simmetria . . . . .	21
<b>5 Lezione 5</b>	<b>23</b>
5.1 Rottura di simmetria . . . . .	23
5.1.1 Stati puri e miscele statistiche . . . . .	23
5.1.2 Singolarità e ordine dei limiti . . . . .	24
5.1.3 Proprietà della funzione di energia libera . . . . .	24
5.1.4 Transizioni di Fase e Criterio di Ehrenfest . . . . .	25
5.1.5 Lunghezza di Correlazione e Universalità . . . . .	26
5.1.6 Teorema di Lee-Yang e Singolarità . . . . .	26
5.1.7 Ruolo delle condizioni al contorno . . . . .	26

---

<b>6 Lezione 6</b>	<b>29</b>
6.1 Stato e Fase . . . . .	29
6.2 Rottura Spontanea di Simmetria . . . . .	30
6.3 Proprietà di Clustering . . . . .	30
6.4 Modello di Ising e Approssimazione di Campo Medio . . . . .	31
<b>7 Lezione 7</b>	<b>35</b>
7.1 Fenomeni Critici e Lunghezza di Correlazione . . . . .	35
7.2 Equazioni del Campo Medio . . . . .	36
7.2.1 Dimostrazione dell'equivalenza con $\text{arctanh}()$ . . . . .	37
7.3 Relazioni Esatte di Dobrushin, Lanford e Ruelle (DLR) . . . . .	38
7.4 Approssimazione di Campo Medio . . . . .	39
7.4.1 Caso omogeneo e con campo magnetico costante . . . . .	39
7.4.2 Caso con campo magnetico nullo . . . . .	40
7.4.3 Risoluzione grafica . . . . .	40
7.4.4 Stabilità dell'Energia Libera . . . . .	41
<b>8 Lezione 8</b>	<b>43</b>
8.1 Soluzioni in MFA con Campo Magnetico Nullo . . . . .	43
8.1.1 Espansione vicino al Punto Critico . . . . .	45
8.1.2 Dipendenza dalla Dimensionalità . . . . .	46
8.1.3 Il Caso $D = 1$ . . . . .	47
8.1.4 Espansione a Bassa Temperatura . . . . .	47
8.2 Analisi con Campo Esterno Non Nullo . . . . .	48
8.2.1 Forma dell'Energia Libera e Metastabilità . . . . .	48
8.2.2 Isteresi . . . . .	48
8.3 Riassunto degli Esponenti Critici (MFA) . . . . .	50
<b>9 Lezione 9</b>	<b>51</b>
9.1 Risoluzione Esatta di un Modello con Forze Deboli a Lungo Raggio . . . . .	51
9.1.1 Trasformazione di Hubbard-Stratonovich . . . . .	52
9.1.2 Calcolo della Funzione di Partizione Z . . . . .	53
9.1.3 Metodo del Punto di Sella . . . . .	54
9.2 Validità della M.F.A. e Funzioni di Correlazione . . . . .	55
<b>10 Lezione 10</b>	<b>57</b>
10.1 Matrice di Risposta . . . . .	57
10.1.1 Soluzione in Spazio di Fourier . . . . .	58
10.1.2 Funzione di Green e Funzione di Correlazione . . . . .	59
10.2 Energia Interna e Calore Specifico . . . . .	59
10.2.1 Energia Interna . . . . .	59
10.2.2 Calore Specifico ( $C_v$ ) . . . . .	60
10.2.3 Comportamento Critico (Vicino a $T_c$ ) . . . . .	60
10.2.4 Decadimento della Correlazione . . . . .	61
10.2.5 Analisi Dimensionale del Calore Specifico . . . . .	61

---

---

<b>11 Lezione 11</b>	<b>63</b>
11.1 Analisi del Calore Specifico . . . . .	63
11.2 Lunghezza di Correlazione $\xi$ e Esponente $\nu$ . . . . .	64
11.2.1 Decadimento Esponenziale e Divergenza di $\xi$ . . . . .	64
11.2.2 Dimensione Critica Superiore e Universalità . . . . .	64
11.3 Limite $D \rightarrow \infty$ e Funzioni di Bessel . . . . .	65
11.3.1 Impostazione del Calcolo . . . . .	65
11.3.2 Funzioni di Bessel Modificate . . . . .	66
11.3.3 Espansione per $D \rightarrow \infty$ . . . . .	66
11.4 Decadimento Esponenziale lontano da $T_c$ . . . . .	67
11.4.1 Teorema sulla Trasformata di Fourier . . . . .	67
11.4.2 Applicazione a $G_0(n)$ . . . . .	68
<b>12 Lezione 12</b>	<b>71</b>
12.1 Validità di MFA e Fenomenologia delle Fluttuazioni . . . . .	71
12.1.1 Comportamento delle Funzioni di Correlazione . . . . .	71
12.1.2 Natura della Transizione di Fase . . . . .	72
12.1.3 Argomento della "Bolla" e Energia delle Fluttuazioni . . . . .	72
12.1.4 Potenziale Efficace e Suscettività . . . . .	73
12.2 Riepilogo degli Esponenti Critici (MFA) . . . . .	74
12.3 Integrali Gaussiani . . . . .	75
12.3.1 Integrale Gaussiano 1D . . . . .	75
<b>13 Lezione 13</b>	<b>77</b>
13.1 Integrale Gaussiano . . . . .	77
13.1.1 Integrale N-Dimensionale . . . . .	78
13.2 Espansione a Bassa Temperatura del Modello di Ising . . . . .	80
13.2.1 Calcolo delle Eccitazioni ( $K=0, 1, 2$ ) . . . . .	80
13.2.2 Espansione della Funzione di Partizione . . . . .	81
13.2.3 Densità di Energia Libera . . . . .	82
<b>14 Lezione 14</b>	<b>85</b>
14.1 Teorema dei Cluster Connessi . . . . .	85
14.1.1 Definizione e Contributo dei Cluster . . . . .	85
14.1.2 Cancellazione dei Diagrammi Disconnessi . . . . .	85
14.2 Il Modello Gaussiano . . . . .	86
14.2.1 L'Integrale Gaussiano Multidimensionale . . . . .	87
14.2.2 Calcolo delle Funzioni di Correlazione con il Metodo dei Campi Sorgente . . . . .	88
14.2.3 Funzioni di Correlazione di Ordine Superiore . . . . .	89
<b>15 Lezione 15</b>	<b>91</b>
15.1 Funzioni di Correlazione nel Modello Gaussiano . . . . .	91
15.2 Funzioni di Correlazione Connesse . . . . .	92
15.3 Espansione ad Alta Temperatura del GM . . . . .	93
15.3.1 Analisi dei Termini . . . . .	93
15.4 Espansione ad Alta T nel Modello di Ising . . . . .	94
15.4.1 Character Expansion . . . . .	95
15.4.2 Funzione di Partizione e Loop . . . . .	95

---

---

<b>16 Lezione 16</b>	<b>97</b>
16.1 Espansione ad Alta T e Variabili di Link . . . . .	97
16.1.1 Contributi all'Energia Libera . . . . .	98
16.2 Dal Reticolo alla Teoria di Campo (Continuo) . . . . .	99
16.2.1 Derivazione dell'Azione nel Continuo . . . . .	100
16.3 Il Modello $\varphi^4$ (Ginzburg-Landau) . . . . .	101
<b>17 Lezione 17</b>	<b>103</b>
17.1 Teoria di Landau-Ginzburg . . . . .	103
17.1.1 Analisi dei Minimi e Rottura di Simmetria . . . . .	104
17.1.2 Relazione con il Modello di Ising . . . . .	105
17.1.3 Formulazione su Reticolo e Analisi Dimensionale . . . . .	105
17.1.4 Il Problema del Parametro Adimensionale . . . . .	106
17.2 Teoria delle Perturbazioni . . . . .	107
<b>18 Lezione 18</b>	<b>109</b>
18.1 Teoria delle Perturbazioni nel Modello di Landau-Ginzburg . . . . .	109
18.1.1 La Funzione di Correlazione a Due Punti . . . . .	109
18.2 Correzione al Primo Ordine ( $n = 1$ ) . . . . .	110
18.2.1 Il Numeratore . . . . .	110
18.2.2 Il Denominatore . . . . .	112
18.2.3 Cancellazione dei Diagrammi Disconnessi . . . . .	112
18.3 Correzione al Secondo Ordine ( $n = 2$ ) . . . . .	113
18.3.1 Riepilogo della Procedura . . . . .	114
<b>19 Lezione 19</b>	<b>115</b>
19.1 Il Contributo al Secondo Ordine . . . . .	115
19.2 Regole di Feynman Generali per la Molteplicità . . . . .	117
19.3 Il Controllo Zero-Dimensionale . . . . .	117
<b>20 Lezione 20</b>	<b>119</b>
20.1 Calcolo degli Integrali nei Diagrammi di Feynman . . . . .	119
20.1.1 Il Diagramma ad una Bolla . . . . .	120
20.1.2 Il Diagramma a Doppia Bolla . . . . .	121
20.1.3 Il Diagramma a Cactus . . . . .	122
20.1.4 Il Diagramma Tramonto . . . . .	123
20.2 Regole Generali di Feynman . . . . .	124
20.3 Irriducibilità a una Particella (1PI) . . . . .	124
20.3.1 Sviluppo in Serie della Funzione di Correlazione . . . . .	125
20.3.2 Risommazione della Serie e Autoenergia . . . . .	125
20.4 Funzione di Correlazione a 4 Punti . . . . .	126
<b>21 Lezione 22</b>	<b>129</b>
21.1 Gruppo di Rinormalizzazione . . . . .	129
21.1.1 Modello Gaussiano e Rinormalizzazione . . . . .	129
21.1.2 La Nuova Costante di Accoppiamento . . . . .	130
21.1.3 Inversione della Serie . . . . .	132
21.1.4 Definizione Operativa e Calcolo Perturbativo . . . . .	133

# Lezione 1

Data: 29/09/2025

Bibliografia: Giorgio Parisi - "Statistical Field Theory", ch. 1

## 1.1 Introduzione alla Meccanica Statistica

Iniziamo con una distinzione fondamentale tra due approcci allo studio dei sistemi a molte particelle: la termodinamica e la meccanica statistica.

La **termodinamica** è una scienza **fenomenologica**. Questo significa che si basa sull'osservazione dei fenomeni macroscopici e sulla richiesta di consistenza matematica tra le quantità definite (come il calore, il lavoro, l'entropia), senza investigare la natura microscopica del sistema. Le leggi della termodinamica vengono derivate da principi generali e postulati matematici.

La **meccanica statistica**, al contrario, ha un approccio "fondamentale". Essa si propone di derivare le proprietà macroscopiche di un sistema a partire da due punti principali:

1. L'**Hamiltoniana** del sistema, che descrive le interazioni tra le particelle (o, più in generale, i gradi di libertà microscopici).
2. Il fatto che il numero di particelle è **molto grande** (tipicamente dell'ordine del numero di Avogadro,  $N_A \approx 10^{23}$ ).

Quindi, in meccanica statistica, le proprietà macroscopiche sono una conseguenza delle equazioni del moto dei singoli componenti microscopici del sistema.

### 1.1.1 Approccio Probabilistico e Distribuzione di Equilibrio

Dato il numero enorme di particelle, risolvere le equazioni del moto per ciascuna di esse è impraticabile e, in fondo, non è ciò che ci interessa. Anche se avessimo computer potentissimi, avremmo bisogno delle condizioni iniziali per  $\approx 10^{23}$  particelle, un'informazione inaccessibile. Inoltre, siamo interessati al comportamento *tipico* e *macroscopico* del sistema, non alla traiettoria esatta di ogni singola particella.

Per queste ragioni, si adotta un **approccio probabilistico**. L'obiettivo è determinare la distribuzione di probabilità di equilibrio del sistema nello spazio delle fasi. Lo stato microscopico di un sistema di  $N$  particelle in 3 dimensioni è descritto da  $3N$  coordinate generalizzate  $q_i$  e  $3N$  momenti coniugati  $p_i$ .

$$\begin{aligned} q_i & i = 1, \dots, 3N \\ p_i & i = 1, \dots, 3N \end{aligned} \quad (1.1)$$

Si assume che, per tempi sufficientemente lunghi ( $t \rightarrow \infty$ ), il sistema raggiunga una **distribuzione di probabilità di equilibrio**, che indichiamo con  $P_{eq}[q, p]$ . Raggiungere l'equilibrio significa che le proprietà macroscopiche del sistema, che sono medie statistiche sulla distribuzione di probabilità, non cambiano più nel tempo. Questo non significa che le configurazioni microscopiche si "congelino"; le particelle continuano a muoversi, ma la loro distribuzione di probabilità rimane costante.

Da questa distribuzione  $P_{eq}$  si possono ricavare tutte le proprietà macroscopiche di interesse. Una distribuzione di probabilità deve soddisfare due proprietà fondamentali:

1. Essere non-negativa:  $P_{eq}[q, p] \geq 0 \quad \forall q, p$ .
2. Essere normalizzata a uno:

$$\int [dq dp] P_{eq}[q, p] = 1 \quad (1.2)$$

dove la notazione  $[dq dp]$  indica l'integrazione su tutti i gradi di libertà dello spazio delle fasi. Il valore medio (o di aspettazione) di un'osservabile macroscopica  $O$  all'equilibrio si può calcolare come media temporale a partire da un tempo  $t_{eq}$  in cui il sistema ha raggiunto l'equilibrio:

$$\langle O \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=t_{eq}}^T \frac{1}{T - t_{eq}} O_t \quad (1.3)$$

### 1.1.2 La Distribuzione Canonica di Boltzmann

L'assunzione fondamentale della meccanica statistica è che la distribuzione di probabilità all'equilibrio per un sistema a contatto con un bagno termico a temperatura  $T$  abbia la forma di **Boltzmann**:

$$P_{eq}[q, p] = \frac{1}{Z} e^{-\beta H[q, p]} \quad (1.4)$$

Questa è nota come **distribuzione canonica**. Analizziamo i termini:

- $H[q, p]$  è l'Hamiltoniana del sistema.
- $\beta$  è un parametro legato alla temperatura inversa:  $\beta = 1/(k_B T)$ , dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann. Per semplicità, nel corso si userà la convenzione  $k_B \equiv 1$ .
- $Z$  è la **funzione di partizione**, un fattore di normalizzazione che garantisce che l'integrale della probabilità sia 1. È definita come:

$$Z = \int [dq dp] e^{-\beta H[q, p]} \quad (1.5)$$

Nonostante sia un fattore di normalizzazione, la funzione di partizione è un oggetto di importanza cruciale, poiché contiene in sé la maggior parte dell'informazione fisica del sistema.

### 1.1.3 Insieme Canonico vs. Microcanonico

Sorge una questione fondamentale: le equazioni del moto (es. di Hamilton) conservano l'energia, quindi un sistema isolato dovrebbe evolvere mantenendo l'energia costante. La distribuzione di Boltzmann, invece, assegna una probabilità non nulla a configurazioni con energie diverse. Come si conciliano queste due visioni?

La risposta risiede nel **limite termodinamico**, ovvero quando il volume del sistema  $V \rightarrow \infty$ . In questo limite, i valori di aspettazione calcolati con l'insieme **microcanonico** (energia fissata) e con l'insieme **canonico** (energia variabile) coincidono.

$$\langle \cdot \rangle_{\text{microcanonico}} = \langle \cdot \rangle_{\text{canonico}} \quad \text{per } V \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

La distribuzione di probabilità per l'insieme microcanonico si scrive formalmente come:

$$P_{eq}^{\mu can}[q, p] = \delta(H - E) \tilde{P}_{eq}^{\mu can}[q, p] \quad (1.7)$$

dove la funzione delta di Dirac  $\delta(H - E)$  forza l'energia del sistema a essere esattamente  $E$ , e il termine  $\tilde{P}$  è una costante su questa superficie a energia costante. L'equivalenza degli insiemi nel limite termodinamico rende l'uso dell'insieme canonico, matematicamente più trattabile, un "trucco" di calcolo potente e giustificato.

## 1.2 Entropia

L'**entropia** è una misura del **disordine** di una distribuzione di probabilità. Consideriamo il comportamento di un sistema a diverse temperature:

- A temperatura  $T = 0$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ), la distribuzione di Boltzmann favorisce enormemente gli stati a energia più bassa. Il sistema si "congela" in una singola (o poche) configurazione stabile, quella che minimizza l'energia  $U$ .
- A temperatura  $T > 0$ , il sistema può esplorare anche configurazioni a energia maggiore. Il principio guida non è più la minimizzazione della sola energia, ma della **energia libera**  $F = U - TS$ . L'entropia ( $S$ ) entra in gioco, favorendo le situazioni in cui ci sono molte configurazioni accessibili.

Per definire l'entropia in modo formale, generalizziamo il nostro formalismo. Sia  $\{c\}$  l'insieme di tutte le possibili configurazioni di un sistema. Per ogni configurazione, abbiamo:

- Una **misura a priori**  $d\mu[c]$ , che definisce lo "spazio" in cui vivono le variabili. Ad esempio, per il modello di Ising, questa misura stabilisce che ogni spin può essere a priori  $+1$  o  $-1$  con uguale probabilità.
- Una **Hamiltoniana**  $H[c]$ , che assegna un'energia a ogni configurazione.

La probabilità di Boltzmann per una configurazione  $c$  si scrive come:

$$dP_\beta[c] = d\mu[c] \frac{e^{-\beta H[c]}}{Z_\beta} = P_\beta[c] d\mu[c] \quad (1.8)$$

con la funzione di partizione:

$$Z_\beta = \int d\mu[c] e^{-\beta H[c]} \quad (1.9)$$

Il valore di aspettazione di un'osservabile  $A$  è:

$$\langle A \rangle_\beta = \int d\mu[c] A[c] P_\beta[c] \quad (1.10)$$

Data una generica distribuzione di probabilità  $P[c]$ , la sua **entropia** (di Gibbs-Shannon) è definita come:

$$S[P] = - \int d\mu[c] P[c] \log P[c] \quad (1.11)$$

Questa espressione può essere anche vista come il valore di aspettazione di  $-\log P[c]$ :

$$S[P] = -\langle \log P[c] \rangle \quad (1.12)$$

# Lezione 2

Data: 01/10/2025

## 2.1 Definizione di Entropia

Data una distribuzione di probabilità  $P[c]$  per un sistema, l'entropia  $S$  è definita come il valore di aspettazione del logaritmo negativo della probabilità.

$$S[P] = - \int dc P[c] \log(P[c]) = -\langle \log P[c] \rangle \quad (2.1)$$

Questa definizione si applica in generale, ma bisogna distinguere tra il caso di una variabile di probabilità continua e una discreta.

### 2.1.1 Caso Discreto

Consideriamo un sistema che può trovarsi in un numero finito  $M$  di configurazioni, indizzate da  $j = 1, \dots, M$ . La probabilità associata a ciascuna configurazione  $j$  è  $P_j$ . Per esempio, nel modello di Boltzmann, questa probabilità assume la forma:

$$P_j = \frac{e^{-\beta H_j}}{Z} \quad (2.2)$$

dove  $H_j$  è l'Hamiltoniana della configurazione  $j$ ,  $\beta$  è un parametro legato alla temperatura e  $Z$  è la funzione di partizione, definita come:

$$Z = \sum_{j=1}^M e^{-\beta H_j} \quad (2.3)$$

Il valore di aspettazione di un'osservabile  $A$  è dato da:

$$\langle A \rangle = \sum_{j=1}^M P_j A_j \quad (2.4)$$

In questo contesto, la definizione di entropia diventa una sommatoria:

$$S[P] = - \sum_{j=1}^M P_j \log P_j \quad (2.5)$$

**Una proprietà importante dell'entropia per una distribuzione di probabilità discreta è che essa è una quantità non-negativa ( $S \geq 0$ ).**

Il valore minimo,  $S = 0$ , si ottiene quando la probabilità è concentrata in un unico stato (una funzione delta), il che corrisponde a una conoscenza perfetta del sistema. In questo caso, per uno stato  $k$ , si ha  $P_k = 1$  e  $P_j = 0$  per  $j \neq k$ . Il termine  $1 \log 1$  è zero, e per gli altri termini si considera il limite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \epsilon = 0$ .

### 2.1.2 Caso Continuo

A differenza del caso discreto, **per una distribuzione di probabilità continua, l'entropia può assumere valori negativi**. Consideriamo come esempio una distribuzione Gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-x^2/2A} \quad (2.6)$$

Calcolando l'entropia per questa distribuzione, si ottiene:

$$S = -\frac{1}{2}(1 - \log(2\pi A)) \quad (2.7)$$

Si può notare che nel limite in cui  $A \rightarrow 0$ , la distribuzione Gaussiana tende a una funzione delta di Dirac, che rappresenta la massima conoscenza del sistema (la posizione è nota con certezza). In questo limite, l'entropia diverge a meno infinito:

$$\lim_{A \rightarrow 0} S = -\infty \quad (2.8)$$

Questa differenza fondamentale evidenzia come, nel caso discreto, l'entropia sia più strettamente legata al conteggio del numero di stati accessibili.

### 2.1.3 Caso di L Stati Equiprobabili

Analizziamo un caso specifico per chiarire l'interpretazione fisica dell'entropia. Si consideri un sistema con  $M$  configurazioni totali, ma di cui solo un sottinsieme di  $L$  stati ( $L \leq M$ ) sia accessibile, e che questi  $L$  stati siano equiprobabili. La distribuzione di probabilità è quindi:

$$P_j = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{se } j \leq L \\ 0 & \text{se } j > L \end{cases} \quad (2.9)$$

Per calcolare l'entropia, si deve gestire il termine  $\log(0)$  che non è definito. Si può regolarizzare il problema introducendo una probabilità molto piccola  $\epsilon$  per gli stati inaccessibili, e ricalibrando le probabilità degli stati accessibili in modo che la somma totale sia 1. Tuttavia, è più semplice notare che nel calcolo della sommatoria  $S = -\sum P_j \log P_j$ , i termini con  $P_j = 0$  non contribuiscono, poiché  $\lim_{p \rightarrow 0} p \log p = 0$ . Ci sono  $L$  termini identici nella sommatoria, ciascuno con  $P_j = 1/L$ . L'entropia risulta quindi:

$$S = -\sum_{j=1}^L \frac{1}{L} \log \left( \frac{1}{L} \right) = -L \left( \frac{1}{L} (-\log L) \right) = \log L \quad (2.10)$$

Esaminiamo i casi limite:

- **L = 1**: Un solo stato è accessibile. L'entropia è  $S = \log 1 = 0$ . Questo rappresenta il **massimo ordine**, poiché conosciamo con esattezza lo stato del sistema.

- **L = M:** Tutti gli stati sono accessibili ed equiprobabili. L'entropia raggiunge il suo valore massimo,  $S = \log M$ . Questo rappresenta il **massimo disordine**.

In questo caso particolare, si nota una relazione diretta:

$$e^{S[P]} = L \quad (2.11)$$

In generale,  $e^{S[P]}$  può essere interpretato come una stima del **numero effettivo di configurazioni in cui il sistema può trovarsi con probabilità non trascurabile**.

#### 2.1.4 Teorema di Shannon

L'entropia ha anche un'interpretazione profonda in termini di informazione. Consideriamo un sistema che può trovarsi in  $M = 2^k$  configurazioni. Per comunicare in quale di queste configurazioni si trova il sistema, è necessario trasmettere un messaggio composto da  $k$  bit. Se abbiamo  $N$  copie indipendenti di tale sistema, saranno necessari  $N \times k$  bit per specificarne lo stato completo.

Tuttavia, se conosciamo la distribuzione di probabilità  $P$  che governa gli stati del sistema, possiamo sfruttare questa conoscenza per comprimere l'informazione. Ad esempio, se la distribuzione è una funzione delta, sappiamo che il sistema sarà sempre in un unico stato, quindi l'informazione necessaria è minima. Se la distribuzione è uniforme, non è possibile alcuna compressione.

Il **Teorema di Shannon** formalizza questa idea. Afferma che, dato un sistema descritto dalla distribuzione di probabilità  $P$ , il numero minimo di bit  $B_N$  necessari per descrivere lo stato di  $N$  copie del sistema, tale che la probabilità di commettere un errore tenda a zero per  $N \rightarrow \infty$ , è dato da:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_N}{N} = \frac{S[P]}{\log 2} \quad (2.12)$$

Il  $\log 2$  al denominatore serve a convertire l'entropia, tipicamente calcolata con il logaritmo naturale, in unità di bit (logaritmo in base 2). Questo teorema stabilisce che l'entropia è la misura dell'informazione (o, in modo complementare, dell'incertezza) contenuta in una distribuzione di probabilità.

## 2.2 Derivazione della Distribuzione di Boltzmann

La distribuzione di Boltzmann può essere ottenuta da un principio di massimizzazione. L'idea è quella di trovare la distribuzione di probabilità che massimizza l'entropia, sotto determinati vincoli fisici. Questo approccio si basa sull'assunzione che, data una certa informazione parziale sul sistema, la distribuzione più ragionevole da assumere è quella più "disordinata" (con entropia massima) compatibile con tale informazione.

Assumiamo di avere un sistema con molti gradi di libertà e che l'unica informazione a nostra disposizione sia il valore medio dell'energia,  $U = \langle E \rangle$ . Cerchiamo quindi la distribuzione  $P_j$  che massimizza  $S[P] = -\sum_j P_j \log P_j$  soggetta a due vincoli:

1. **Valore medio dell'energia fissato:**  $\sum_j P_j E_j = U$
2. **Normalizzazione della probabilità:**  $\sum_j P_j = 1$

Questo è un problema di massimo vincolato, che può essere risolto con il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**. Definiamo una nuova funzione  $\varphi$  che include l'entropia e i vincoli, pesati dai moltiplicatori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\varphi[P] = S[P] + \lambda_1 \left( \sum_j P_j - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_j P_j E_j - U \right) \quad (2.13)$$

Sostituendo l'espressione per  $S$ :

$$\varphi[P] = -\sum_j P_j \log P_j + \lambda_1 \left( \sum_j P_j - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_j P_j E_j - U \right) \quad (2.14)$$

Per trovare il massimo, deriviamo  $\varphi$  rispetto a una generica probabilità  $P_k$  e poniamo la derivata uguale a zero:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_k} = -(\log P_k + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 E_k = 0 \quad (2.15)$$

Risolvendo per  $\log P_k$ , otteniamo:

$$\log P_k = \lambda_1 - 1 + \lambda_2 E_k \quad (2.16)$$

E quindi la probabilità  $P_k$  ha la forma:

$$P_k = e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_2 E_k} \quad (2.17)$$

I moltiplicatori di Lagrange vengono ora determinati imponendo i vincoli. Il moltiplicatore  $\lambda_1$  è fissato dal vincolo di normalizzazione. Sostituendo l'espressione per  $P_k$  in  $\sum_k P_k = 1$ :

$$e^{\lambda_1 - 1} \sum_k e^{\lambda_2 E_k} = 1 \implies e^{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\sum_k e^{\lambda_2 E_k}} \quad (2.18)$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per  $P_k$ , si ottiene:

$$P_k = \frac{e^{\lambda_2 E_k}}{\sum_j e^{\lambda_2 E_j}} \quad (2.19)$$

Il moltiplicatore  $\lambda_2$  è fissato dal vincolo sull'energia media  $U$ .  $\lambda_2$  deve essere tale che:

$$U = \frac{\sum_j E_j e^{\lambda_2 E_j}}{\sum_j e^{\lambda_2 E_j}} \quad (2.20)$$

Identificando questa forma con la distribuzione di Boltzmann, si pone  $\lambda_2 = -\beta$ . La funzione al denominatore è la funzione di partizione  $Z$ . Si ottiene così la **distribuzione di Boltzmann**:

$$P_k = \frac{e^{-\beta E_k}}{Z} \quad (2.21)$$

Questo dimostra che la distribuzione di Boltzmann è quella che massimizza l'incertezza (entropia) dato un valore medio fissato per l'energia.

Un approccio alternativo, ma del tutto equivalente, consiste nel minimizzare l'energia libera, invece di massimizzare l'entropia.

$$\Phi[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P] \quad (2.22)$$

dove  $E[P] = \sum_j P_j E_j$  è l'energia media e  $S[P] = -\sum_j P_j \log P_j$  è l'entropia.

## 2.3 Relazioni Termodinamiche Fondamentali

Si dimostrano ora alcune relazioni cruciali che legano le quantità statistiche (funzione di partizione, energia media) alle grandezze termodinamiche (energia libera, entropia).

### Energia Libera e Funzione di Partizione

L'energia libera di Helmholtz,  $F$ , è definita termodinamicamente come  $F = U - TS$ . In meccanica statistica, si può definire un analogo  $F = \langle E \rangle - \frac{1}{\beta} S$ . Si dimostra che questa quantità è direttamente legata al logaritmo della funzione di partizione.

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad (2.23)$$

*Dimostrazione:* Si parte dalla definizione  $F = \langle E \rangle - \frac{1}{\beta} S$  e si sostituiscono le espressioni per  $\langle E \rangle = \sum_j P_j E_j$  e  $S = -\sum_j P_j \log P_j$ .

$$F = \sum_j P_j E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j P_j \log P_j \quad (2.24)$$

Si utilizza l'espressione per la probabilità di Boltzmann,  $P_j = Z^{-1} e^{-\beta E_j}$ , e quindi  $\log P_j = -\beta E_j - \log Z$ .

$$\begin{aligned} F &= \sum_j \frac{e^{-\beta E_j}}{Z} E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j \frac{e^{-\beta E_j}}{Z} (-\beta E_j - \log Z) \\ &= \frac{1}{Z} \sum_j E_j e^{-\beta E_j} - \frac{1}{Z} \sum_j E_j e^{-\beta E_j} - \frac{\log Z}{\beta Z} \sum_j e^{-\beta E_j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

I primi due termini si cancellano. La somma  $\sum_j e^{-\beta E_j}$  è per definizione  $Z$ .

$$F = -\frac{\log Z}{\beta Z} \cdot Z = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad (2.26)$$

Questa relazione è fondamentale perché mostra come tutte le proprietà termodinamiche del sistema possano essere derivate dalla funzione di partizione, che a sua volta dipende solo dalle proprietà microscopiche (i livelli energetici  $E_j$ ).

### Entropia S

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (2.27)$$

*Dimostrazione:*

$$S[P_{eq}] = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \log Z \right) = \log Z - \beta \frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} S[P_{eq}] &= \log Z - \beta \frac{1}{Z} \left( - \int [dc] e^{-\beta H} H \right) \\ &= \log Z + \beta U \\ &= -\beta F + \beta U = \beta(U - F) \\ &= \beta TS = S \end{aligned} \quad (2.29)$$

### Energia Interna

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \quad (2.30)$$

*Dimostrazione:*

$$U = E[P_{eq}] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (2.31)$$

## 2.4 Corrispondenza tra Meccanica Statistica e Termodinamica

L'ultimo passo è stabilire una corrispondenza formale tra il parametro  $\beta$  della meccanica statistica e la temperatura termodinamica  $T$ , e tra l'entropia statistica e quella termodinamica. Dalla termodinamica, il secondo principio stabilisce che per una trasformazione reversibile:

$$dS_{\text{termo}} = \frac{\delta Q}{T} \quad (2.32)$$

Utilizzando il primo principio,  $\delta Q = dU - \delta L$ , si ha:

$$dS_{\text{termo}} = \frac{1}{T}(dU - \delta L) \quad (2.33)$$

Mostreremo ora che in meccanica statistica vale una relazione analoga:

$$dS_{\text{stat}} = \beta(dU - \delta L) \quad (2.34)$$

Se ciò è vero, si può identificare  $\beta = 1/T$  e  $S_{\text{stat}} = S_{\text{termo}}$ .

*Dimostrazione:*

Per introdurre il concetto di lavoro  $\delta L$ , si considera che l'Hamiltoniana del sistema dipenda da un parametro esterno  $\lambda$ ,  $H = H(\lambda)$ . Il lavoro infinitesimo fatto sul sistema quando il parametro cambia da  $\lambda$  a  $\lambda + d\lambda$  è:

$$\delta L = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda \quad (2.35)$$

Consideriamo ora una variazione infinitesima dei parametri del sistema,  $\beta \rightarrow \beta + d\beta$  e  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$ . Calcoliamo la variazione corrispondente dell'energia libera  $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$ .

$$d(\beta F) = d(-\log Z) \quad (2.36)$$

Usando la regola della catena:

$$d(-\log Z) = \frac{\partial(-\log Z)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial d(-\log Z)}{\partial \lambda} d\lambda \quad (2.37)$$

Dalle relazioni precedenti sappiamo che  $U = \frac{\partial(-\log Z)}{\partial \beta}$ .  
Calcoliamo la derivata rispetto a  $\lambda$ :

$$\frac{\partial d(-\log Z)}{\partial \lambda} = \frac{1}{Z} \int dc e^{-\beta H} \beta \frac{dH}{d\lambda} = \beta \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \quad (2.38)$$

Segue:

$$d(\beta F) = U d\beta + \beta \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda = U d\beta + \beta \delta L \quad (2.39)$$

Ora usiamo la relazione  $S = \beta(U - F)$  e ne calcoliamo il differenziale:

$$dS = d(\beta U - \beta F) = \beta dU + U d\beta - (U d\beta + \beta \delta L) = \beta(dU - \delta L) \quad (2.40)$$

github.com/elisabettagnello

# Lezione 3

Data: 06/10/2025

## 3.1 Introduzione ai Funzionali

In fisica, in particolare nello studio dei sistemi a molti gradi di libertà come quelli della meccanica statistica, ci troviamo spesso a fare con distribuzioni di probabilità che dipendono da un numero estremamente grande di variabili. Quando questo numero tende all'infinito, è utile trattare queste dipendenze come se fossero funzioni continue. L'analisi funzionale è il campo della matematica che fornisce gli strumenti per operare su queste "funzioni di funzioni".

Mentre una **funzione** è un'applicazione che associa un numero a un altro numero (o un punto in uno spazio a un punto in un altro), secondo la notazione:

$$f(\cdot) : x \rightarrow y \quad \text{tale che} \quad y = f(x) \quad (3.1)$$

un **funzionale** è un'applicazione che associa un numero a un'intera funzione. Useremo una notazione con parentesi quadre per distinguerli:

$$F[\cdot] : g(\cdot) \rightarrow \varphi \quad \text{tale che} \quad \varphi = F[g] \quad (3.2)$$

Un funzionale, quindi, "prende in input" una funzione  $g(x)$  e "restituisce in output" un singolo valore numerico  $\varphi$  che in qualche modo caratterizza la funzione stessa.

Alcuni esempi:

1. **Integrale definito:** Un esempio molto comune è l'integrale di una funzione  $g(x)$  su un intervallo  $[A, B]$ . L'integrale è un funzionale perché associa alla funzione  $g(x)$  un numero, ovvero l'area sottesa dalla curva.

$$F_{A,B}[g] = \int_A^B dx g(x) \quad (3.3)$$

2. **Valore della funzione in un punto:** Un funzionale può anche essere semplicemente il valore che la funzione assume in un punto specifico  $\bar{x}$ .

$$F_{\bar{x}}[g] \equiv g(\bar{x}) \quad (3.4)$$

3. **Valore massimo/minimo:** Un altro esempio è il funzionale che trova il valore massimo (o minimo) assunto dalla funzione  $g(x)$  in un dato intervallo  $[A, B]$ .

$$F_{A,B}^{\max}[g] = \max_{A \leq x \leq B} \{g(x)\} \quad (3.5)$$

**4. Entropia di Shannon:** Un funzionale di grande importanza in meccanica statistica è l'entropia. Data una funzione  $g(x)$ , il seguente funzionale è definito come:

$$S[g] \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \log(g(x)) \quad (3.6)$$

Questo funzionale assume il significato fisico di **entropia** a condizione che la funzione  $g(x)$  sia una distribuzione di probabilità, ovvero che sia normalizzata a 1 e non negativa.

### Funzioni "Well-Behaved":

È importante notare che i funzionali sono tipicamente definiti non per tutte le funzioni possibili, ma per una specifica classe di funzioni, dette "*well-behaved*" (ben-comportate). La definizione di "*well-behaved*" dipende dal contesto e dal funzionale che si sta considerando. Per esempio:

- Per l'integrale definito, potremmo richiedere che  $g(x)$  sia una funzione limitata e misurabile, e che decresca abbastanza velocemente all'infinito affinché l'integrale converga.
- Per il funzionale che calcola il massimo, è sufficiente che la funzione  $g(x)$  sia continua nell'intervallo considerato, garantendo così l'esistenza del massimo per il teorema di Weierstrass.

In fisica, spesso si assume implicitamente di lavorare con funzioni sufficientemente regolari da rendere ben definite tutte le operazioni, senza specificare ogni volta in dettaglio lo spazio funzionale di appartenenza.

#### 3.1.1 Derivata Funzionale

Così come per le funzioni ordinarie si definisce la derivata per quantificare la loro variazione, per i funzionali si introduce la **derivata funzionale**. Essa ci dice come cambia il valore di un funzionale  $F[g]$  quando la sua funzione argomento  $g(x)$  viene modificata di una piccola quantità infinitesima.

La definizione formale si basa su un'analogia con lo sviluppo di Taylor. Consideriamo una piccola perturbazione della funzione  $g(x)$ , data da  $\epsilon h(x)$ , dove  $\epsilon$  è un parametro piccolo e  $h(x)$  è un'altra funzione "*well-behaved*". Lo sviluppo di  $F[g + \epsilon h]$  al primo ordine in  $\epsilon$  è:

$$F[g(x) + \epsilon h(x)] = F[g(x)] + \epsilon \int dx \left( \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} \right) h(x) + O(\epsilon^2) \quad (3.7)$$

Questa equazione definisce implicitamente la derivata funzionale di  $F$  rispetto a  $g(x)$ , denotata con il simbolo  $\frac{\delta F}{\delta g(x)}$ . Essa è quella funzione che, integrata contro la perturbazione  $h(x)$ , dà la variazione lineare del funzionale.

Per renderla esplicita, possiamo riarrangiare i termini e prendere il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{F[g(x) + \epsilon h(x)] - F[g(x)]}{\epsilon} = \int dx \left( \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} \right) h(x) + O(\epsilon) \quad (3.8)$$

### Esempio di Calcolo

Calcoliamo la derivata funzionale del funzionale "integrale definito"  $F[g] = \int dx g(x)$ . Partendo dal membro di sinistra dell'equazione precedente e usando la linearità dell'integrale:

$$\frac{1}{\epsilon} \left( \int dx (g(x) + \epsilon h(x)) - \int dx g(x) \right) = \frac{1}{\epsilon} \int dx \epsilon h(x) = \int dx h(x) \quad (3.9)$$

Confrontando questo risultato con il membro di destra della definizione, si ottiene:

$$\int dx h(x) = \int dx \left( \frac{\delta F}{\delta g(x)} \right) h(x) \quad (3.10)$$

Dato che questa uguaglianza deve valere per ogni scelta della funzione di perturbazione  $h(x)$ , ne consegue che gli integrandi devono essere uguali. Otteniamo quindi il risultato:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \int dy g(y) \right) = 1 \quad (3.11)$$

### Regole di Derivazione Funzionale

Si possono dimostrare delle regole di derivazione analoghe a quelle per le derivate ordinarie. Due risultati utili sono i seguenti:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int dy f(g(y)) = f'(g(x)) \quad (3.12)$$

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int dy g^2(y) = 2g(x) \quad (3.13)$$

Questi strumenti matematici sono fondamentali per controllare la variazione dei funzionali, un concetto che si rivelerà cruciale nello studio dei sistemi fisici.

## 3.2 Sistemi Magnetici e Transizioni di Fase

Le transizioni di fase sono fenomeni drammatici in cui le proprietà macroscopiche di un sistema cambiano bruscamente al variare di un parametro di controllo, come la temperatura. Un esempio paradigmatico è la **transizione ferromagnetica**:

- Ad **alte temperature** ( $T > T_c$ ), un materiale magnetico si trova in una fase **paramagnetica**. I momenti magnetici microscopici (spin) sono orientati casualmente, e il materiale non presenta una magnetizzazione netta.
- A una specifica **temperatura critica** ( $T_c$ ), accade qualcosa di drastico.
- A **basse temperature** ( $T < T_c$ ), il sistema entra in una fase **ferromagnetica**. Gli spin tendono ad allinearsi spontaneamente, generando una magnetizzazione macroscopica non nulla, anche in assenza di un campo magnetico esterno.

Studieremo questo fenomeno per caratterizzare matematicamente e fisicamente cosa accade esattamente al punto critico.

### 3.2.1 Framework Generale

Per descrivere questi sistemi, adottiamo un formalismo molto generale.

- **Gradi di libertà (C)**: Sono le variabili microscopiche che descrivono lo stato del sistema. Possono essere variabili discrete definite su un reticolo,  $S_i$ , o un campo continuo  $\vec{S}(x)$  definito nello spazio.
- **Spazio Esterno e Interno**: Le variabili vivono in uno **spazio esterno** (embedding space), che è lo spazio fisico (es. un reticolo tridimensionale). I valori che ogni variabile può assumere appartengono a uno **spazio interno** (es.  $\{-1, +1\}$  per il modello di Ising, o  $\mathbb{R}^3$  per spin vettoriali).
- **Hamiltoniana ( $H[C]$ )**: È il funzionale che associa un'energia a ogni configurazione  $C$  dei gradi di libertà. In generale, la separiamo in due parti: una parte,  $H_0$ , che descrive le interazioni interne del sistema, e una parte che descrive l'accoppiamento con un campo magnetico esterno  $\vec{h}(x)$ , che può variare da punto a punto nello spazio.

$$H[C] = H_0[C] - \int_V d^P x \vec{h}(x) \cdot \vec{S}(x) \quad (3.14)$$

Il termine di interazione con il campo esterno tende ad allineare gli spin locali  $\vec{S}(x)$  con il campo  $\vec{h}(x)$ . Nel caso discreto del modello di Ising su un reticolo, l'Hamiltoniana assume la forma:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i \quad (3.15)$$

dove il primo termine (con  $J > 0$ ) favorisce l'allineamento di spin vicini (interazione ferromagnetica).

Questo formalismo, sebbene sviluppato per i magneti, è estremamente generale. Il concetto di **universalità** afferma che sistemi fisici microscopicamente molto diversi (superconduttori, magneti, etc.) possono esibire lo stesso comportamento critico vicino a una transizione di fase, descritto dalle stesse funzioni e dagli stessi esponenti critici.

### 3.2.2 Grandezze/Funzioni Fondamentali

- **Energia Libera ( $F[\vec{h}(x)]$ ):** È una delle grandezze termodinamiche centrali. È un funzionale del campo magnetico esterno ed è definita a partire dalla funzione di partizione  $Z$ :

$$F[\vec{h}(x)] = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad \text{con} \quad Z = \int [dC] e^{-\beta H[C]} \quad (3.16)$$

dove  $\int [dC]$  indica l'integrazione/somma su tutte le possibili configurazioni dei gradi di libertà. Se il campo magnetico è uniforme,  $h(x) = h$ , si definisce la densità di energia libera  $f(h) = F(h)/V$ .

- **Magnetizzazione Locale ( $m_\mu(x)$ ):** È il valore di aspettazione della componente  $\mu$ -esima dello spin nel punto  $x$ .

$$m_\mu(x) \equiv \langle S_\mu(x) \rangle \quad (3.17)$$

Può essere ottenuta come derivata funzionale dell'energia libera rispetto alla componente corrispondente del campo magnetico. Questa è una relazione fondamentale:

$$m_\mu(x) = -\frac{\delta F[\vec{h}(x)]}{\delta h_\mu(x)} \quad (3.18)$$

La dimostrazione segue direttamente dalla definizione di  $F$  e dalle regole di derivazione funzionale.

- **Suscettività Magnetica ( $\chi$ ):** Misura la risposta della magnetizzazione a una variazione del campo magnetico. È una quantità sperimentalmente accessibile. Se il campo è spazialmente dipendente, si definisce una suscettività a due punti:

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta m_\mu(x)}{\delta h_\nu(y)} = -\frac{\delta^2 F[\vec{h}]}{\delta h_\nu(y) \delta h_\mu(x)} \quad (3.19)$$

Questa grandezza ci dice come una perturbazione del campo nel punto  $y$  influenzi la magnetizzazione nel punto  $x$ . Per sistemi invarianti per traslazioni spaziali,  $\chi(x, y)$  dipende solo dalla differenza  $x - y$ . Se il campo è uniforme, la suscettività è semplicemente  $\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu}$ .

- **Funzione di Correlazione:** Data due osservabili  $A$  e  $B$ , la loro funzione di correlazione è il valore di aspettazione del loro prodotto,  $\langle AB \rangle$ .
- **Funzione di Correlazione Connessa:** Di particolare importanza è la correlazione connessa (o cumulante del secondo ordine), definita come:

$$\langle AB \rangle_c = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (3.20)$$

Questa grandezza misura la correlazione "genuina" tra le fluttuazioni di  $A$  e  $B$  attorno ai loro valori medi. Se non ci sono fluttuazioni nel sistema (cioè, la distribuzione di probabilità è una funzione delta di Dirac), allora  $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$  e la correlazione connessa è zero. La presenza di fluttuazioni termodinamiche, invece, può indurre correlazioni tra le osservabili, rendendo la funzione di correlazione connessa diversa da zero.

### Teorema di Fluttuazione-Dissipazione

Esiste una relazione profonda che collega la risposta di un sistema a una perturbazione esterna (una quantità "dissipativa" come la suscettività) alle correlazioni delle fluttuazioni interne del sistema all'equilibrio (una quantità "fluttuante"). Nel nostro caso, si può dimostrare che la suscettività magnetica è direttamente proporzionale alla funzione di correlazione connessa degli spin:

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_c \quad (3.21)$$

Questo è un esempio del **teorema di fluttuazione-dissipazione** ed è un risultato centrale della meccanica statistica. Ci dice che misurando le correlazioni spontanee degli spin in un sistema all'equilibrio, possiamo prevedere come esso risponderà linearmente a un campo magnetico esterno.

# Lezione 4

Data: 08/10/2025

## 4.1 Teorema di Fluttuazione-Dissipazione (FDT)

Il **Teorema di Fluttuazione-Dissipazione** (FDT) è alla base della **teoria della risposta lineare** ed è di fondamentale importanza perché mette in connessione due regimi fisici apparentemente molto diversi.

Da un lato, abbiamo le **osservabili statiche** di un sistema all'equilibrio. Queste sono quantità che possono essere misurate "scattando una fotografia" del sistema in un dato istante e calcolando, per esempio, le funzioni di correlazione tra le sue componenti. Il sistema è in quiete, non perturbato dall'esterno, e si analizza il suo comportamento intrinseco.

Dall'altro lato, abbiamo la **risposta dinamica** del sistema a una perturbazione esterna. In questo caso, agiamo attivamente sul sistema, ad esempio applicando un piccolo campo magnetico, e misuriamo come il sistema reagisce a tale sollecitazione. Questo è un processo dinamico che, seppur per una piccola perturbazione, porta il sistema fuori dal suo stato di equilibrio.

Il teorema FDT stabilisce una relazione di uguaglianza tra queste due grandezze. In sostanza, ci dice che la risposta lineare del sistema (cioè la risposta a piccole perturbazioni) è proporzionale alle sue fluttuazioni termodinamiche all'equilibrio.

### Dimostrazione:

Consideriamo un sistema la cui Hamiltoniana totale  $H$  sia composta da una parte imper turbata  $H_0$  e da una piccola perturbazione  $H_1$ , modulata da un parametro  $\lambda$ :

$$H = H_0 + \lambda H_1 \quad (4.1)$$

Definiamo il valore di aspettazione di un'osservabile generica  $A$  in presenza della perturbazione (indicato con l'apice  $(\lambda)$ ) come:

$$\langle A \rangle^{(\lambda)} = \frac{\int [dc] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A}{\int [dc] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}} \quad (4.2)$$

dove l'integrale è esteso a tutte le possibili configurazioni  $[dc]$  del sistema e la funzione di partizione è:  $Z(\lambda) = \int [dc] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}$

Ora vogliamo calcolare come questo valore di aspettazione varia al variare dell'intensità della perturbazione  $\lambda$ , ovvero calcoliamo la derivata  $\frac{d\langle A \rangle^{(\lambda)}}{d\lambda}$ .

Applicando la regola di derivazione di un quoziente, otteniamo due termini, uno proveniente dalla derivata del numeratore e uno dalla derivata del denominatore:

$$\frac{d\langle A \rangle^{(\lambda)}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{N(\lambda)}{Z(\lambda)} \right) = \frac{N'(\lambda)Z(\lambda) - N(\lambda)Z'(\lambda)}{Z(\lambda)^2} \quad (4.3)$$

Calcoliamo le derivate del numeratore  $N(\lambda)$  e del denominatore  $Z(\lambda)$  rispetto a  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} N'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \int [dc] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A = \int [dc] (-\beta H_1) e^{-\beta H} A \\ Z'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \int [dc] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} = \int [dc] (-\beta H_1) e^{-\beta H} \end{aligned}$$

Sostituendo e riorganizzando i termini:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle^{(\lambda)}}{d\lambda} &= \frac{1}{Z(\lambda)} \int [dc] (-\beta H_1) e^{-\beta H} A - \frac{\int [dc] e^{-\beta H} A \int [dc] (-\beta H_1) e^{-\beta H}}{Z(\lambda) Z(\lambda)} \\ &= -\beta \left( \frac{\int [dc] e^{-\beta H} A H_1}{Z(\lambda)} - \frac{\int [dc] e^{-\beta H} A \int [dc] e^{-\beta H} H_1}{Z(\lambda) Z(\lambda)} \right) \\ &= -\beta \left( \langle AH_1 \rangle^{(\lambda)} - \langle A \rangle^{(\lambda)} \langle H_1 \rangle^{(\lambda)} \right) \end{aligned}$$

L'espressione tra parentesi è, per definizione, la **funzione di correlazione connessa** tra l'osservabile  $A$  e la perturbazione  $H_1$ , che denotiamo con  $C_{A,H_1}^c$ . Riorganizzando l'equazione, otteniamo la forma finale del teorema:

$$-\frac{1}{\beta} \frac{d\langle A \rangle^{(\lambda)}}{d\lambda} = \langle AH_1 \rangle^{(\lambda)} - \langle A \rangle^{(\lambda)} \langle H_1 \rangle^{(\lambda)} = C_{A,H_1}^c(\lambda) \quad (4.4)$$

Questo risultato è notevole:

- Il termine a sinistra,  $\frac{d\langle A \rangle^{(\lambda)}}{d\lambda}$ , rappresenta la **risposta** del sistema. Misura quanto l'osservabile  $A$  cambia in risposta a una variazione infinitesima della perturbazione.
- Il termine a destra,  $C_{A,H_1}^c$ , è una **funzione di correlazione all'equilibrio**. Misura le fluttuazioni congiunte di  $A$  e  $H_1$  nel sistema imperturbato (se calcolata per  $\lambda \rightarrow 0$ ).

Il teorema FDT ci permette quindi di calcolare la suscettibilità di un sistema a una perturbazione esterna semplicemente studiando le sue correlazioni interne all'equilibrio.

## 4.2 Rottura Spontanea di Simmetria

Introduciamo ora il concetto di **rottura spontanea di simmetria** utilizzando come esempio un sistema ferromagnetico.

Un materiale ferromagnetico esibisce un comportamento che dipende fortemente dalla temperatura.

- Ad **alte temperature** ( $T > T_c$ ), il sistema si trova in una fase **paramagnetica**. L'agitazione termica è dominante e gli spin magnetici dei singoli atomi sono orientati in modo casuale. La magnetizzazione totale media del sistema, in assenza di un campo magnetico esterno ( $h = 0$ ), è nulla:  $\langle m \rangle = 0$ .
- A **basse temperature** ( $T < T_c$ ), al di sotto di una temperatura critica detta **Temperatura di Curie** ( $T_c$ ), il sistema subisce una transizione di fase. Anche in assenza di un campo magnetico esterno ( $h = 0$ ), gli spin tendono ad allinearsi spontaneamente, dando origine a una **magnetizzazione spontanea** non nulla:  $\langle m \rangle \neq 0$ .

Quando il sistema viene raffreddato al di sotto di  $T_c$ , la magnetizzazione può orientarsi in una direzione (es. "su", con  $m > 0$ ) o nella direzione opposta (es. "giù", con  $m < 0$ ). Entrambe le configurazioni, che chiameremo  $c$  e  $\tilde{c}$ , sono fisicamente stabili ed energeticamente equivalenti. In particolare, vale che  $E[c] = E[\tilde{c}]$  e  $m_c = -m_{\tilde{c}}$ .

Se il sistema si trova in uno stato con magnetizzazione positiva, è possibile invertirla applicando un piccolo campo magnetico esterno per un breve istante e poi rimuovendolo. Il sistema si assesterà nella nuova configurazione stabile con magnetizzazione negativa. Entrambi questi stati sono stabili nel tempo. Il sistema può trovarsi in (almeno) due stati stabili, caratterizzati unicamente dal segno della magnetizzazione ma per il resto identici nelle loro proprietà fisiche.

### 4.2.1 Il Paradosso della Simmetria

Consideriamo l'Hamiltoniana di Ising, che descrive un modello base di ferromagnetismo:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (4.5)$$

dove  $\sigma_i = \pm 1$  sono gli spin,  $J > 0$  è l'accoppiamento ferromagnetico, e  $h$  è il campo magnetico esterno.

In assenza di campo esterno ( $h = 0$ ), l'Hamiltoniana è:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (4.6)$$

Questa Hamiltoniana possiede una simmetria globale: è **invariante** rispetto alla trasformazione che inverte tutti gli spin simultaneamente,  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$  per ogni sito  $i$ . Infatti, il prodotto  $\sigma_i \sigma_j$  non cambia segno se entrambi gli spin vengono invertiti.

Qui sorge il paradosso. La teoria, descritta dall'Hamiltoniana, è perfettamente simmetrica. Tuttavia, l'osservazione sperimentale di un sistema fisico reale al di sotto di  $T_c$  ci mostra uno **stato fisico non simmetrico**: il sistema sceglie una direzione di magnetizzazione preferenziale (o positiva o negativa). In questo caso, si dice che la simmetria dell'Hamiltoniana è stata **rotta spontaneamente**.

Il problema teorico è il seguente: la probabilità di equilibrio di una configurazione  $c$  è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$P_{eq}[c] = \frac{1}{Z} e^{-\beta H[c]} \quad (4.7)$$

Se l'Hamiltoniana  $H[c]$  è invariante per inversione di spin, allora anche la distribuzione di probabilità  $P_{eq}[c]$  dovrebbe esserlo. Come può una distribuzione di probabilità simmetrica generare uno stato osservato che è paleamente asimmetrico?

La chiave per risolvere questa apparente contraddizione risiede nel considerare il volume del sistema.

- **Volume Finito ( $V < \infty$ )**: In un sistema di dimensioni finite, non esistono transizioni di fase "nette" (singolarità matematiche). Il sistema è sempre **ergodico**, il che significa che, dato abbastanza tempo, può esplorare tutte le sue configurazioni possibili. Se il sistema si trova nello stato con magnetizzazione positiva, esiste sempre una probabilità non nulla (sebbene molto piccola) che una fluttuazione termica lo porti a "saltare" nello stato a magnetizzazione negativa. In una simulazione Monte Carlo, si osserverebbe che la magnetizzazione fluttua attorno a  $+m$  per un lungo periodo, per poi passare a fluttuare attorno a  $-m$ , e così via. La distribuzione di probabilità complessiva rimane simmetrica. Tuttavia, il tempo caratteristico per questa transizione,  $\tau^*$ , cresce esponenzialmente con il volume del sistema:  $\tau^* \sim e^V$ .
- **Limite Termodinamico ( $V \rightarrow \infty$ )**: Quando consideriamo il limite di un sistema infinitamente grande, che è quello in cui le transizioni di fase sono definite rigorosamente, il tempo di transizione  $\tau^*$  diverge:  $\tau^* \rightarrow \infty$ . Questo significa che la probabilità di passare da uno stato di magnetizzazione all'altro diventa esattamente zero.

In questo limite, si verifica il fenomeno della **rottura dell'ergodicità**. Lo spazio delle fasi del sistema si decompone in componenti ergodiche disgiunte. Se il sistema parte da una configurazione casuale, finirà (con probabilità 50/50) in una delle due "valli" (quella con magnetizzazione positiva o quella negativa) e vi rimarrà intrappolato per sempre.

Quindi, sebbene l'Hamiltoniana rimanga simmetrica, nel limite termodinamico il sistema fisico reale si trova confinato in uno stato che non possiede tale simmetria, per cui si verifica una rottura spontanea della simmetria.

L'applicazione di un campo magnetico anche infinitesimale è sufficiente a selezionare uno dei due stati, rompendo la degenerazione energetica e determinando l'orientamento della magnetizzazione.

# Lezione 5

Data: 09/10/2025

## 5.1 Rottura di simmetria

Una singola **configurazione** è definita assegnando un valore a ciascuno spin del sistema. Ad esempio, in un sistema con  $10^{23}$  spin, una configurazione potrebbe essere:  $\sigma_1 = +1, \sigma_2 = +1, \sigma_3 = -1, \dots$ .

Uno **stato** è l'insieme delle configurazioni che si troverebbero tipicamente all'equilibrio per un dato valore dei parametri esterni, come l'energia o la magnetizzazione.

Per temperature inferiori alla temperatura critica ( $T < T_c$ ) e nel limite di volume infinito ( $V \rightarrow \infty$ ), il sistema presenta una magnetizzazione spontanea non nulla ( $m \neq 0$ ). In questa condizione, la simmetria è rotta. Se preparamo il sistema e lo osserviamo, troveremo una magnetizzazione definita. Per ogni configurazione  $C$  con magnetizzazione  $m(C)$ , esiste una configurazione  $\tilde{C}$  (ottenuta invertendo tutti gli spin) tale che la sua magnetizzazione  $m(\tilde{C})$  è uguale a  $-m(C)$ .

Quando preparamo un sistema, ad esempio partendo da una temperatura infinita (una configurazione disordinata) e lo raffreddiamo, la probabilità di finire in uno stato con magnetizzazione positiva è  $\frac{1}{2}$ , e la stessa probabilità c'è di finire in uno stato con magnetizzazione negativa. Questo accade perché nella configurazione iniziale ad altissima temperatura, ci sarà casualmente una leggera maggioranza di spin positivi o negativi che, durante il processo di raffreddamento, guiderà il sistema verso uno stato finale con magnetizzazione positiva o negativa.

La simmetria è rotta perché, osservando il sistema in un dato istante e in un dato campione, troveremo che una specifica magnetizzazione è selezionata: il sistema si troverà nello stato con magnetizzazione "più" o in quello con magnetizzazione "meno".

### 5.1.1 Stati puri e miscele statistiche

Definiamo **stato puro** uno stato che osserviamo all'equilibrio. A temperature elevate, sopra la temperatura critica, il sistema non presenta una magnetizzazione netta. Se invece andiamo al di sotto della temperatura critica ( $T < T_c$ ) e osserviamo il sistema in un dato momento, lo troveremo magnetizzato positivamente o negativamente. Gli stati puri sono quindi lo stato "+" e lo stato "-".

Lo stato con magnetizzazione totale nulla non è uno stato puro. Esso è in realtà una **miscela statistica** dei due stati puri.

$$|\psi\rangle_{T < T_c} = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle) \quad (5.1)$$

Questo stato con  $m = 0$  rappresenta una media su molte configurazioni del sistema, ma non è uno stato che si osserverà mai in un singolo esperimento nel limite di volume infinito. A  $T < T_c$ , gli stati puri sono  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ .

Questa rottura di simmetria è valida rigorosamente solo nel **limite di volume infinito** ( $V \rightarrow \infty$ ). Se il volume è finito, c'è sempre una probabilità, sebbene estremamente piccola e decrescente con il volume, che il sistema transisca da uno stato di magnetizzazione positiva a uno di magnetizzazione negativa. Il tempo necessario per una tale transizione diverge con il volume. Nel limite di volume infinito, una volta che il sistema si trova nello stato "+", non c'è modo di passare allo stato "-", poiché il costo energetico per attraversare configurazioni intermedie sarebbe infinito.

### 5.1.2 Singolarità e ordine dei limiti

La discrepanza tra un'Hamiltoniana simmetrica e stati non simmetrici può avvenire solo in presenza di una **singolarità**, che emerge nel limite di volume infinito.

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} m(\{\sigma\}) e^{-\beta H}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H}} \quad (5.2)$$

Questa espressione non è simmetrica, mentre  $H$  lo è. Questa rottura di simmetria può avvenire solo se c'è una singolarità legata al fatto che il volume è infinito. Quando si sommano infiniti termini, anche se ognuno è regolare, la somma può svilupparsi una singolarità.

A causa di queste singolarità, è fondamentale prestare attenzione all'ordine dei limiti.

- Se prima poniamo  $h = 0$  e poi mandiamo il volume a infinito ( $V \rightarrow \infty$ ), troveremo sempre una magnetizzazione media nulla,  $m = 0$ .
- Al contrario, per osservare la magnetizzazione spontanea, dobbiamo prima mandare il volume a infinito ( $V \rightarrow \infty$ ) per un  $h$  fissato (anche se piccolo), e solo successivamente prendere il limite di  $h \rightarrow 0$ .

Quindi, l'operazione corretta è:

$$m_s = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{V \rightarrow \infty} m(h, V) \quad (5.3)$$

### 5.1.3 Proprietà della funzione di energia libera

Consideriamo l'energia libera  $f(h)$ . Essa ha le seguenti proprietà:

1. È una funzione pari di  $h$ :  $f(h) = f(-h)$ .
2. La magnetizzazione è data dalla derivata dell'energia libera rispetto al campo magnetico:

$$m(h) = -\frac{\partial f(h)}{\partial h} \quad (5.4)$$

Essendo la derivata di una funzione pari,  $m(h)$  è una funzione dispari:

$$m(h) = -m(-h).$$



**Figura 5.1:** Andamento della magnetizzazione in funzione di  $h$  e della temperatura.

Il comportamento di  $f(h)$  cambia a seconda della temperatura:

- Per  $T > T_c$ ,  $f(h)$  è una funzione analitica e il suo sviluppo in serie di Taylor attorno a  $h = 0$  è:

$$f(h) = f(0) + ch^2 + O(h^4) \quad (5.5)$$

- Per  $T < T_c$ , la funzione presenta una singolarità (una cuspide) in  $h = 0$ . Il suo sviluppo è:

$$f(h) = f(0) - m_s|h| + O(h^2) \quad (5.6)$$

dove  $m_s$  è la magnetizzazione spontanea. La derivata prima in  $h = 0$  è discontinua.

#### 5.1.4 Transizioni di Fase e Criterio di Ehrenfest

Una transizione di fase si ha quando in corrispondenza di un valore preciso di un parametro del sistema, questo cambia drasticamente le sue proprietà (es. ghiaccio  $\rightarrow$  acqua).

Il **Criterio di Ehrenfest** definisce l'ordine di una transizione di fase. Una transizione di fase è di ordine  $k$  se l'energia libera  $f$  è differenziabile  $k - 1$  volte, ma non  $k$  volte.

- Transizione di fase del primo ordine ( $k = 1$ ): L'energia libera  $f$  è continua, ma la sua derivata prima (ad esempio, il volume o la magnetizzazione) è discontinua. Un esempio è la transizione acqua-ghiaccio.
- Transizione di fase del secondo ordine ( $k = 2$ ): La prima derivata dell'energia libera è continua, ma la seconda derivata è discontinua o singolare.

Nel modello di Ising, a  $T = T_c$  si ha una **transizione di fase del secondo ordine in  $T$** . In questo caso, la magnetizzazione  $m_{Ising}$  (derivata prima di  $f$  rispetto a  $h$ ) non subisce un salto.

Al di sotto di  $T_c$  ( $T < T_c$ ), si ha una **transizione di fase del primo ordine in  $h$**  (cambiando il campo magnetico). Questo perché l'energia libera  $f$  (o la sua derivata rispetto a  $h$ , che è  $m$ ) salta quando si passa da  $h = 0^-$  a  $h = 0^+$ .

### 5.1.5 Lunghezza di Correlazione e Universalità

Per  $T > T_c$ , all'aumentare della temperatura, la **lunghezza di correlazione**  $\xi$  (che governa il decadimento delle funzioni di correlazione come  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$ ) è molto piccola.

Quando la temperatura diminuisce e si avvicina a  $T_c$ , la lunghezza di correlazione  $\xi$  aumenta, e a  $T = T_c$ ,  $\xi$  diventa infinita. In questo punto, la funzione di correlazione non decade più esponenzialmente, ma con una legge di potenza. L'esponenziale è il segno di una fisica locale.

Quando  $\xi$  è infinita, una perturbazione locale può influenzare tutto il sistema (correlazione a raggio infinito). L'infinita lunghezza di correlazione a  $T_c$  implica che la fisica è dettata da grandi regioni dello spazio. Di conseguenza, i dettagli della struttura reticolare (lattice) diventano irrilevanti. Questo porta al concetto di **universalità**: sistemi molto diversi possono avere lo stesso comportamento critico.

### 5.1.6 Teorema di Lee-Yang e Singolarità

Per ottenere una singolarità nell'energia libera  $f$  (che segnala una transizione di fase), si deve considerare il limite di volume infinito,  $V \rightarrow \infty$ .

Secondo il **Teorema di Lee-Yang**, una singolarità in  $f(\beta)$  può svilupparsi solo se la funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\beta)$  ha uno zero nel piano complesso di  $\beta$  o  $h$ .

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta V} \log(\mathcal{Z}(\beta)) \quad \rightarrow \quad \text{singolarità per } \mathcal{Z} = 0 \quad (5.7)$$

La funzione di partizione  $\mathcal{Z}$  è una funzione analitica nel piano complesso di  $\beta$  o  $h$ .

Per valori reali di  $\beta$  (o temperatura  $T$ ), per il modello di Ising a volume finito,  $\mathcal{Z}$  non ha zeri. Infatti,  $\mathcal{Z}$  è una somma di termini positivi  $e^{-\beta E}$ .

La singolarità si verifica quando gli zeri della funzione di partizione nel piano complesso (di  $\beta$  o  $h$ ) si avvicinano all'asse reale nel limite  $V \rightarrow \infty$ . Se la distanza dello zero più vicino all'asse reale non cambia con l'aumento di  $V$ , non si avrà una singolarità al limite  $V \rightarrow \infty$ . Se invece lo zero si avvicina all'asse reale (di  $\beta$  o  $h$ ) quando  $V \rightarrow \infty$ , allora al limite si sviluppa una singolarità nell'energia libera  $f$ .

Una singolarità in  $f$  non significa necessariamente che  $f$  è discontinua o che ha una divergenza, ma che non tutte le sue derivate sono definite o regolari. Una singolarità nella prima derivata di  $f$  (che è una variabile di stato, come  $m$ ) significa un impatto fisico.

### 5.1.7 Ruolo delle condizioni al contorno

A volume finito, per specificare il sistema, è necessario dare le condizioni al contorno.

- B.C. positive (+ B.C.): tutti gli spin al contorno fissati a +1.

Per  $T < T_c$ , selezionano  $m = m_s$ .

- B.C. negative (- B.C.): tutti gli spin al contorno fissati a -1.

Per  $T < T_c$ , selezionano  $m = -m_s$ .

- B.C. periodiche (Periodic B.C.):  $m = 0$ . Queste condizioni minimizzano la differenza tra il sistema a volume finito e quello a volume infinito.

Quando c'è una transizione di fase del primo ordine, ci sono due o più stati stabili (ad esempio,  $+m_s$  e  $-m_s$  per il modello di Ising con  $T < T_c$  e  $h = 0$ ). Le condizioni al contorno possono selezionare quale stato stabile viene raggiunto.

Una condizione al contorno è equivalente a un campo magnetico infinitesimale ( $h$  infinitesimale) che rompe la simmetria. Infatti, anche se l'energia della superficie è infinitesima rispetto al volume, le B.C. positive selezionano lo stato positivo se  $T < T_c$ .

Nel limite  $V \rightarrow \infty$ , una volta che il sistema è nello stato  $+m_s$ , non c'è modo di passare allo stato  $-m_s$ , perché il costo energetico per creare un'interfaccia (un dominio) è infinito, e quindi il tempo di transizione è infinito.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 6

Data: 13/10/2025

## 6.1 Stato e Fase

L'idea di **stato** del sistema è legata a come il sistema si trova in un dato istante di tempo fisico all'equilibrio. È una definizione molto precisa.

Generalmente, si inizia preparando il sistema. Tipicamente, il sistema sarà fuori equilibrio, quindi lo si lascia evolvere per un certo periodo fino a quando non raggiunge l'equilibrio. In una simulazione Monte Carlo, ad esempio, si parte da un punto e si lascia evolvere. Da un certo momento in poi, il sistema sarà all'equilibrio. Questo significa che si avrà un insieme di configurazioni. Ad esempio, le molecole e l'aria in questa stanza: le molecole in equilibrio evolvono passando attraverso diverse configurazioni, ma in modo tale che le quantità misurabili rimangano costanti.

L'insieme delle configurazioni che appare tipicamente in un dato istante di tempo è lo stato del sistema.

### Distinzione tra Stato e Fase:

- **Stato:** In questo contesto, lo stato è utilizzato come **gruppo di configurazioni** che appaiono fisicamente in un momento. Ad esempio, la configurazione delle molecole cambia in un secondo, ma è "equivalente" a quella precedente.

Lo **stato è puro quando coincide con la realizzazione fisica del sistema**. Si identifica lo stato puro con il **comportamento a tempi lunghi di un singolo sistema**.

- **Fase:** Si usa il concetto di fase per **distinguere due regimi diversi caratterizzati da parametri differenti**. Ad esempio, per distinguere un sistema magnetizzato da uno non magnetizzato.

1. Per  $T$  grande ( $T \gg T_c$ ), lo stato puro è lo stato con magnetizzazione zero  $\langle \cdot \rangle_0$
2. Per  $T$  piccola ( $T < T_c$ ), lo stato simmetrico ( $m = 0$ ) non è puro, perché all'equilibrio non si osserva mai lo stato con magnetizzazione zero. Lo stato è una **miscela statistica** degli stati puri  $\langle \cdot \rangle_+$  e  $\langle \cdot \rangle_-$

## 6.2 Rottura Spontanea di Simmetria

Un gruppo di simmetria  $G$  è spontaneamente rotto se lo stato simmetrico (con  $m = 0$ ) non è puro e può essere scomposto come combinazione convessa di stati puri che si trasformano come una rappresentazione non-banale di  $G$ .

Nel caso semplice di magnetizzazione, una rappresentazione non-banale è quella che ha **magnetizzazione non-zero**.

Se si ha un campo magnetico ( $h \neq 0$ ), la simmetria è **rotta esplicitamente**.

## 6.3 Proprietà di Clustering

Consideriamo sistemi omogenei con un'Hamiltoniana  $H$ . Si aggiunge una perturbazione localizzata  $\delta H$  vicino al punto  $x$ :

$$\delta H = P(x) \quad (6.1)$$

Se si misura il valore di aspettazione di un'osservabile  $A(y)$  lontano dal punto  $x$ , ci si aspetta che non cambi significativamente:

$$\langle A(y) \rangle \text{ non cambia per } |x - y| \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

La **teoria della risposta lineare** (Linear Response Theory) stabilisce che questo accade se:

$$C^c[P(x), A(y)] = \langle P(x)A(y) \rangle - \langle P(x) \rangle \langle A(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 0 \quad \forall A, P \quad (6.3)$$

Questa proprietà è chiamata **proprietà di clustering**.

Se la proprietà di clustering è valida per un dato stato, **lo stato è chiamato "clustering"**.

Al di sotto della temperatura critica ( $T < T_c$ ), il sistema di Ising presenta una rottura spontanea di simmetria e ammette due tipi fondamentali di stati.

- **Stati Puri:**  $\langle \cdot \rangle_+$  e  $\langle \cdot \rangle_-$

Sono **stati clustering**. La funzione di correlazione connessa decade esponenzialmente a zero per grande distanza. L'influenza di uno spin è limitata a una lunghezza di correlazione finita ( $\xi < \infty$ ). Due spin molto distanti sono statisticamente indipendenti.

- **Stato Simmetrico:**  $\langle \cdot \rangle_0$

**Non è uno stato clustering**. La correlazione connessa non si annulla a grande distanza, ma tende al valore costante  $m^2 \neq 0$ . Questo implica che gli spin rimangono **correlati positivamente** su distanze infinite, riflettendo la natura non-locale dello stato.

## 6.4 Modello di Ising e Approssimazione di Campo Medio

Si considerano **sistemi magnetici**. Il comportamento del sistema al punto critico è determinato solo da pochi elementi cruciali della Hamiltoniana (principio di **universalità**). Questi elementi sono:

1. La **dimensionalità** del sistema ( $D$  e la dimensionalità interna)
2. Le **simmetrie** della Hamiltoniana
3. Il **tipo di variabili** utilizzate (scalari, vettoriali, binarie, continue, ecc.)

Nel **modello di Ising**, le variabili di spin sono binarie:

$$S_i = \pm 1 \quad (6.4)$$

Nel **modello di Heisenberg**, lo spin ha 3 componenti sulla sfera unitaria:

$$\sum_{\nu=1}^3 (S_i^\nu)^2 = 1 \quad \forall i$$

L'Hamiltoniana esplicita per il **modello di Ising** è:

$$H_I = -J \sum_{\langle i,k \rangle} S_i S_k - \sum_i h_i S_i \quad (6.5)$$

Dove  $\langle i, k \rangle$  indica la somma sui primi vicini.

- Se  $J > 0$  (**ferromagnete**): Gli spin tendono ad essere **paralleli**.
- Se  $J < 0$  (**antiferromagnete**): Gli spin tendono ad essere **antiparalleli**.

Se  $J < 0$  e il sistema è su un **reticolo triangolare**, il sistema è **frustrato**: non è possibile minimizzare l'energia simultaneamente per tutti i legami.

- La migliore energia che si può ottenere per un triangolo è  $-J$  (non  $-3J$ ), perché si soddisfano solo due legami su tre.
- La **frustrazione causa degenerazione** dello stato fondamentale. Ci sono più configurazioni che portano all'energia minima.

### Approssimazione di Campo Medio

In 3 dimensioni ( $D = 3$ ), il modello non è risolvibile. L'**Approssimazione di Campo Medio** cerca di trovare la distribuzione di probabilità che minimizza l'energia libera di Helmholtz  $F$ :

$$F[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P] \quad (6.6)$$

Dove  $E[P]$  è l'energia media e  $S[P]$  è l'entropia:

$$\begin{aligned} E[P] &= \langle H \rangle_P \\ S[P] &= - \int [ds] P[s] \log P[s] \end{aligned}$$

Si sa che la distribuzione di equilibrio è della forma  $P_{eq} \propto e^{-\beta H}$ .

#### Ipotesi dell'Approssimazione di Campo Medio:

La probabilità è fattorizzata sui siti del reticolo.

$$P[\sigma] = \prod_{i=1}^N P_i(\sigma_i) \quad (6.7)$$

Questa è un'approssimazione molto forte, in quanto implica che **ciò che accade su un sito non è realmente connesso a ciò che accade su un altro**.

La distribuzione di probabilità sul singolo sito  $i$  è parametrizzata:

$$P_i(\sigma_i) = \delta_{\sigma_i=+1} \frac{1+m_i}{2} + \delta_{\sigma_i=-1} \frac{1-m_i}{2} \quad (6.8)$$

I parametri  $\{m_i\}$  dipendono dal sito.

#### Proprietà della Distribuzione Fattorizzata:

- **Normalizzazione:**

$$\sum_{\sigma_i=\pm 1} P_i(\sigma_i) = \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} = 1 \quad (6.9)$$

$$\sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} P[\sigma] = \prod_i \sum_{\sigma_i} P_i(\sigma_i) = 1^N = 1 \quad (6.10)$$

- **Magnetizzazione Media sul Sito:** Il parametro  $m_i$  è il valore di aspettazione dello spin sul sito  $i$ :

$$\langle \sigma_i \rangle = \sum_{\sigma_i=\pm 1} P_i(\sigma_i) \sigma_i \quad (6.11)$$

$$= \frac{1+m_i}{2}(+1) + \frac{1-m_i}{2}(-1) \quad (6.12)$$

$$= \frac{1+m_i - (1-m_i)}{2} = \frac{2m_i}{2} = m_i \quad (6.13)$$

- **Valore di Aspettazione di una Funzione Generica  $g(\sigma_i)$ :**

$$\langle g(\sigma_i) \rangle = \underbrace{\left( \sum_{\sigma_j \neq i = \pm 1} P_j(\sigma_j) \right)}_{1^{N-1}} \sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) g(\sigma_i) \quad (6.14)$$

$$= \frac{1+m_i}{2} g(+1) + \frac{1-m_i}{2} g(-1) \quad (6.15)$$

### Calcolo dell'Energia Media :

L'energia media è:

$$U = \langle H \rangle_P = \left\langle -J \sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i \sigma_k \right\rangle_P - \left\langle \sum_i h_i \sigma_i \right\rangle_P \quad (6.16)$$

Grazie all'ipotesi di fattorizzazione della probabilità ( $P[\sigma] = \prod_i P_i(\sigma_i)$ ):

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle = m_i m_k \quad \text{per } i \neq k$$

Quindi l'energia media diventa:

$$U = -J \sum_{\langle i,k \rangle} m_i m_k - \sum_i h_i m_i \quad (6.17)$$

### Calcolo dell'Entropia:

L'entropia è data da:

$$S = - \sum_i \langle \log P_i(\sigma_i) \rangle = - \sum_i \sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) \log P_i(\sigma_i) \quad (6.18)$$

Sostituendo  $P_i(\pm 1) = \frac{1 \pm m_i}{2}$ :

$$S = - \sum_i \left\{ \frac{1+m_i}{2} \log \left( \frac{1+m_i}{2} \right) + \frac{1-m_i}{2} \log \left( \frac{1-m_i}{2} \right) \right\} \quad (6.19)$$

### Energia Libera e Condizione di Equilibrio:

L'energia libera è:

$$F = U - \frac{1}{\beta} S \quad (6.20)$$

I parametri  $\{m_i\}$  (che sono i valori di aspettazione  $\langle \sigma_i \rangle$ ) sono determinati minimizzando l'energia libera, che in questo caso è una funzione (non un funzionale) dei parametri  $m_i$ .

Cerchiamo i punti stazionari dell'energia libera:

$$\frac{\partial F}{\partial m_i} = 0 \quad \forall i \quad (6.21)$$

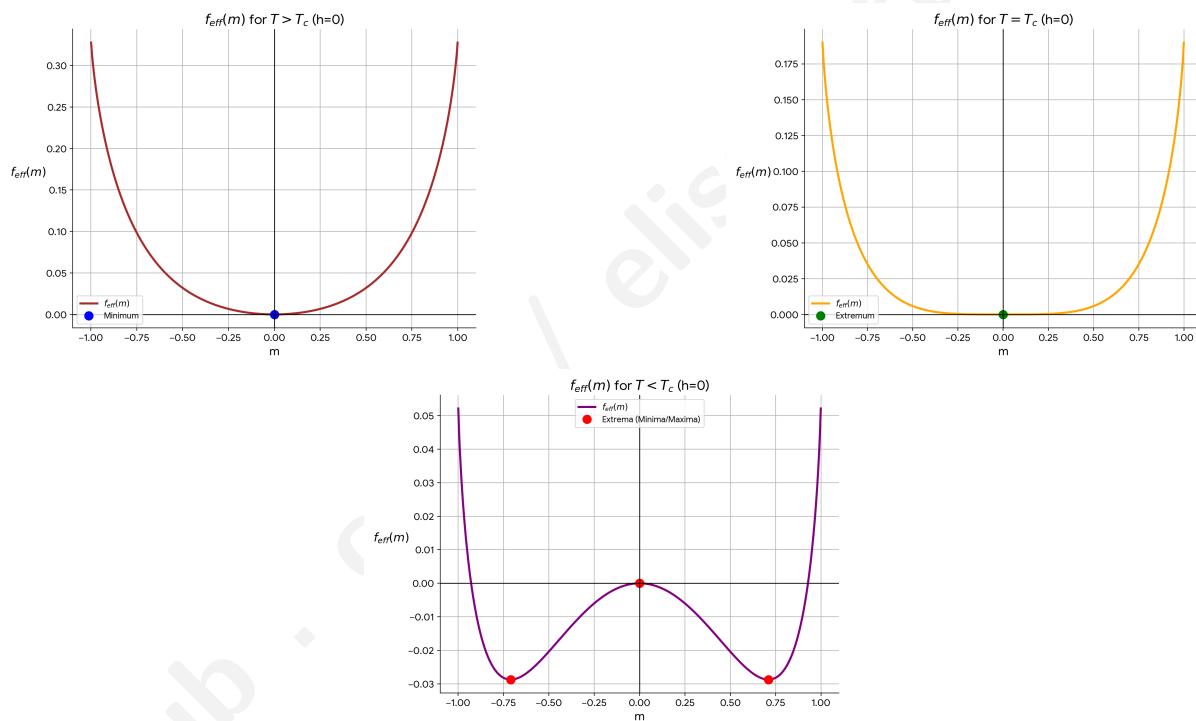
Per garantire un minimo di equilibrio, si deve controllare la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_i^2} > 0 \quad (6.22)$$

Questo sarà cruciale per determinare la **transizione di fase**.

L'analisi di  $F(m)$  permette di determinare la stabilità delle soluzioni:

- $T > T_c$ :  $F(m)$  ha un solo minimo in  $m = 0$
- $T = T_c$ : Il minimo in  $m = 0$  diventa molto piatto. Sia la derivata prima che la derivata seconda sono zero in  $m = 0$ .
- $T < T_c$ : La forma della funzione cambia in una "doppia buca" (double well). Ci sono due minimi simmetrici in  $m^\pm$ , che sono le soluzioni stabili. Il punto  $m = 0$  è ora un massimo locale, che corrisponde a una soluzione instabile.



**Figura 6.1:** Andamento di  $F(m)$  al variare della temperatura.

# Lezione 7

Data: 15/10/2025

## 7.1 Fenomeni Critici e Lunghezza di Correlazione

Quando la temperatura  $T$  si avvicina alla temperatura critica  $T_c$  da sopra o da sotto  $T \rightarrow T_c^\pm$ , la lunghezza di correlazione  $\xi$  diverge  $\xi \rightarrow +\infty$ .

La lunghezza di correlazione è definita tramite il decadimento esponenziale della funzione di correlazione connessa  $\langle \sigma_i \sigma_J \rangle$  per grandi distanze  $|x_i - x_J| \rightarrow +\infty$ :

$$\langle \sigma_i \sigma_J \rangle_c \sim e^{-\frac{|x_i - x_J|}{\xi}} \quad (7.1)$$

All'avvicinarsi della temperatura critica,  $\xi$  cresce come una potenza della differenza di temperatura:

$$\xi \sim \frac{1}{|T - T_c|^\nu} \quad \text{o} \quad \xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (7.2)$$

Esattamente alla temperatura critica  $T = T_c$ , il decadimento non è più esponenziale ma a legge di potenza:

$$\langle \sigma_i \sigma_J \rangle \approx \frac{1}{|x_i - x_J|^\eta} \quad (7.3)$$

L'esponente  $\nu$  è un **esponente critico**. È cruciale perché indica il tipo di singolarità fisica che si verifica al punto critico.

La fisica degli esponenti critici è universale. La temperatura critica invece non è universale,  $T_c$  dipende, ad esempio, dal tipo di reticolo (cubico semplice, cubico a facce centrate, esagonale, ecc.).

## 7.2 Equazioni del Campo Medio

Le equazioni del campo medio possono essere derivate minimizzando l'energia libera di un sistema. L'energia libera  $F$  ha un termine di energia interna e un termine di entropia.

L'entropia per una distribuzione di probabilità fattorizzata è data da:

$$S = - \sum_i \left\{ \frac{1+m_i}{2} \log \left( \frac{1+m_i}{2} \right) + \frac{1-m_i}{2} \log \left( \frac{1-m_i}{2} \right) \right\} \quad (7.4)$$

La condizione per un punto stazionario è  $\frac{dF}{dm_i} = 0$ , che è equivalente a:

$$-J \sum_{\langle k,i \rangle} m_k - h_i - \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial m_i} = 0 \quad \text{o} \quad - \sum_k J_{ik} m_k - h_i - \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial m_i} = 0 \quad (7.5)$$

dove  $J_{ik}$  è l'accoppiamento tra spin  $i$  e  $k$ , che è  $J$  solo se  $i$  e  $k$  sono primi vicini, e 0 altrimenti:

$$J_{ik} = \begin{cases} J & \text{se } |i-k| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.6)$$

Calcoliamo la derivata parziale dell'entropia rispetto a  $m_i$  (considerando solo il contributo del sito  $i$ ):

$$-\frac{\partial S}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial m_i} \left[ \frac{1+m_i}{2} \log \left( \frac{1+m_i}{2} \right) + \frac{1-m_i}{2} \log \left( \frac{1-m_i}{2} \right) \right] \quad (7.7)$$

Usando la regola di derivazione del prodotto :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial m_i} &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+m_i}{2} \right) + \frac{1+m_i}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1+m_i}{2}} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-m_i}{2} \right) + \frac{1-m_i}{2} \cdot \frac{1}{(-2) \cdot \frac{1-m_i}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log \left( \frac{1+m_i}{2} \right) - \log \left( \frac{1-m_i}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+m_i}{1-m_i} \quad (7.9)$$

$$= \operatorname{arctanh}(m_i) \quad (7.10)$$

Quindi, l'equazione per  $m_i$  diventa:

$$-\sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh}(m_i) = 0 \quad (7.11)$$

Risolvendo per  $m_i$ , otteniamo le **equazioni del campo medio**:

$$m_i = \tanh \left[ \beta \left( \sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right] \quad (7.12)$$

In campo medio, lo spin  $\sigma_i$  sente un campo magnetico efficace dato da:

$$h_{\text{eff},i} = h_i + \sum_k J_{ik} m_k \quad (7.13)$$

Questo campo effettivo dipende dalla magnetizzazione media dei vicini, non dagli spin stessi.

### 7.2.1 Dimostrazione dell'equivalenza con $\operatorname{arctanh}()$

L'equivalenza con la funzione arcotangente iperbolica  $\operatorname{arctanh}(m_i)$  si basa sulla definizione di  $\tanh(x)$  e sulla sua inversione. Sia  $y = \tanh(x)$ :

$$y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ponendo  $z \equiv e^x$ , l'espressione diventa:

$$y = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $z$  si ottiene:

$$y = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \implies y(z^2 + 1) = z^2 - 1$$

Risolvendo per  $z^2$ :

$$z^2y + y = z^2 - 1 \implies z^2(1 - y) = 1 + y \implies z^2 = \frac{1 + y}{1 - y}$$

Ricordando che  $z = e^x$ , si ha  $z^2 = e^{2x}$ .

$$e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i lati:

$$2x = \log\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \implies x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

Poiché  $x = \operatorname{arctanh}(y)$ , ponendo  $y = m_i$ , si ha:

$$-\frac{\partial S}{\partial m_i} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + m_i}{1 - m_i} = \operatorname{arctanh}(m_i) \quad (7.14)$$

### 7.3 Relazioni Esatte di Dobrushin, Lanford e Ruelle (DLR)

Il metodo DLR (Dobrushin, Lanford, Ruelle) è un metodo noto in fisica matematica, utile per dimostrare che sistemi statistici esistono nel limite termodinamico (infinito) e per controllare le interazioni su regioni sempre più ampie. Consente di collegare i valori di aspettazione di osservabili in una piccola regione con i valori di aspettazione in una regione più grande.

Si parte dal valore di aspettazione dello spin  $\sigma_i$ :

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} e^{-\beta H[\sigma]} \sigma_i \quad (7.15)$$

Si divide l'Hamiltoniana  $H[\sigma]$  in due parti:

$$H[\sigma] = H^-[σ^-] + \tilde{H}(\sigma_i + \text{vicini di } \sigma_i \equiv \tilde{\sigma}) \quad (7.16)$$

- $H^-[σ^-]$ : Contiene tutti i contributi che **non contengono**  $\sigma_i$ .  $σ^-$  indica l'insieme di tutti gli spin tranne  $\sigma_i$
- $\tilde{H}$ : Contiene tutti i contributi che **contengono**  $\sigma_i$ .

L'Hamiltoniana è  $H = -\sum_{i,k} J_{ik} \sigma_i \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$ . Il termine  $\tilde{H}$  sarà della forma:

$$\tilde{H} = -\sigma_i \left( \sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \quad (7.17)$$

dove la somma su  $k$  è ristretta ai vicini di  $i$ .

Sostituendo nell'espressione del valore di aspettazione e separando la somma su  $\sigma_i = \pm 1$ :

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma^-=\pm 1\}} e^{-\beta H^-[σ^-]} \left[ \sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i e^{-\beta \tilde{H}(\tilde{\sigma})} \right] \quad (7.18)$$

Concentrandosi sul termine  $\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i e^{-\beta \tilde{H}(\tilde{\sigma}, \dots)}$ :

$$\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i \exp \left( \beta \sigma_i \left( \sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right) \quad (7.19)$$

Posto  $X = \beta(\sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i)$ , la somma in 7.19 diventa:

$$(1)e^X + (-1)e^{-X} = 2 \sinh(X) \quad (7.20)$$

Similmente, la somma sui  $\sigma_i$  nel denominatore  $Z$  è:

$$\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{-\beta \tilde{H}(\tilde{\sigma})} = e^X + e^{-X} = 2 \cosh(X) \quad (7.21)$$

Il rapporto  $\frac{\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i e^{-\beta \tilde{H}}}{\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{-\beta \tilde{H}}}$  è:

$$\frac{2 \sinh(X)}{2 \cosh(X)} = \tanh(X) \quad (7.22)$$

Quindi, l'espressione per  $\langle \sigma_i \rangle$  diventa:

$$\langle \sigma_i \rangle = \left\langle \tanh \left( \beta \left( \sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right) \right\rangle \quad (7.23)$$

Questa è una **relazione esatta**. Mette in relazione il valore di aspettazione dello spin  $\sigma_i$  con una funzione del valore di aspettazione degli spin  $\sigma_k$ .

## 7.4 Approssimazione di Campo Medio

L'approssimazione di campo medio consiste nel sostituire gli spin  $\sigma_k$  con i loro valori di aspettazione, ovvero le magnetizzazioni  $m_k = \langle \sigma_k \rangle$ :

$$\sigma_k \rightarrow \langle \sigma_k \rangle = m_k$$

Questo è equivalente a fattorizzare la probabilità ( $P[\sigma] \approx \prod_i P[\sigma_i]$ ). In questa approssimazione, la funzione  $\tanh(\dots)$  dipende ora solo da valori medi (numeri) e non da variabili stocastiche, quindi il valore di aspettazione  $\langle \dots \rangle$  non è più necessario.

Sostituendo  $\sigma_k \rightarrow m_k$ :

$$\langle \sigma_i \rangle = m_i = \tanh \left( \beta \left( \sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right) \quad (7.24)$$

Si ottengono di nuovo le equazioni del campo medio.

### 7.4.1 Caso omogeneo e con campo magnetico costante

Nel caso omogeneo e isotropo, con campo magnetico costante ( $h_i = h$ ) e accoppiamento solo con i primi vicini ( $J_{ik} = 1$  per  $k$  vicino a  $i$  e 0 altrimenti), la magnetizzazione media è uniforme:

$$\langle \sigma_i \rangle = m_i = m \quad (7.25)$$

Sia  $D$  la dimensionalità del reticolo. Per un reticolo cubico semplice, ogni sito ha  $2D$  primi vicini.

L'energia interna media per sito è:

$$\frac{\langle H \rangle}{N} = u = -Dm^2 - hm \quad (7.26)$$

L'energia libera per unità di volume è:

$$f = -Dm^2 - hm + \frac{1}{\beta} \left( \frac{1+m}{2} \log \left( \frac{1+m}{2} \right) + \frac{1-m}{2} \log \left( \frac{1-m}{2} \right) \right) \quad (7.27)$$

L'equazione del campo medio diventa:

$$m = \tanh (\beta(2Dm + h)) \quad (7.28)$$

### 7.4.2 Caso con campo magnetico nullo

Nel caso di campo magnetico esterno nullo ( $h = 0$ ):

$$m = \tanh(2\beta D m) \quad (7.29)$$

Una soluzione è sempre  $m = 0$ . La stabilità di  $m = 0$  dipende dalla temperatura.

### 7.4.3 Risoluzione grafica

Si intersecano le due curve  $y = m$  e  $y = \tanh(2\beta D m)$

- **Alta Temperatura** ( $T > T_c$ ,  $\beta$  piccolo):

La pendenza  $2\beta D < 1$ . L'unica intersezione è in  $m = 0$ .

- **Temperatura Critica** ( $T = T_c$ ,  $\beta_c$ ):

La pendenza  $2\beta_c D = 1$ . Questo definisce  $\beta_c$  e quindi  $T_c$ :

$$\beta_c = \frac{1}{2D} \implies T_c = 2D \quad (7.30)$$

- **Bassa Temperatura** ( $T < T_c$ ,  $\beta$  grande):

La pendenza  $2\beta D > 1$ . Ci sono **tre intersezioni**:  $m = 0$  e due soluzioni non banali  $m = m^+$  e  $m = m^-$ .



**Figura 7.1:** Soluzioni per  $m$  al variare della temperatura.

#### 7.4.4 Stabilità dell'Energia Libera

La stabilità delle soluzioni è determinata dal segno della derivata seconda dell'energia libera  $f$ . La soluzione stabile (minimo) richiede  $f'' > 0$ . La derivata prima è:

$$f' = \frac{df}{dm} = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log \frac{1+m}{1-m}$$

La derivata seconda ( $f''$ ) è:

$$f'' = -2D + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1-m^2} \quad (7.31)$$

Valutando in  $m = 0$  (che è sempre una soluzione):

$$f''(m=0) = -2D + \frac{1}{\beta} \quad (7.32)$$

- Per  $T > T_c$  ( $\beta < \beta_c$ ,  $\frac{1}{\beta} > 2D$ ):  $f''(0) > 0$   
 $m = 0$  è un minimo (soluzione stabile)
- Per  $T < T_c$  ( $\beta > \beta_c$ ,  $\frac{1}{\beta} < 2D$ ):  $f''(0) < 0$   
 $m = 0$  diventa un massimo (soluzione instabile)  
Le due nuove soluzioni  $m^+$  e  $m^-$  sono i minimi.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 8

Data: 20/10/2025

## 8.1 Soluzioni in MFA con Campo Magnetico Nullo

L'obiettivo è comprendere il comportamento della magnetizzazione  $m$ , in funzione di parametri come la temperatura  $T$  (o  $\beta$ ) e il campo magnetico  $h$ . L'approccio adottato è quello della **Teoria di Campo Medio** (MFA). Questa approssimazione si basa sull'assunzione che gli spin siano **scorrelati**.

Iniziamo analizzando la situazione in campo magnetico nullo,  $h = 0$ .

L'equazione per la magnetizzazione si deriva da:

$$f'(m) = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log \frac{1+m}{1-m} = 0 \quad (8.1)$$

dove  $D$  è una costante che dipende dalla geometria del reticolo.

Questa è la stessa equazione trovata in precedenza, che ha soluzioni non banali solo per valori bassi della pendenza (ovvero solo per basse temperature). Ricordiamo che la soluzione  $m = 0$  è sempre una soluzione.

Per determinare la stabilità delle soluzioni, si deve analizzare la derivata seconda  $f''(m)$ . Una soluzione è un minimo di  $f(m)$  se  $f''(m) > 0$ .

La **temperatura critica** è:  $T_c = 2D$  ( $\beta_c = \frac{1}{2D}$ )

### Caso $T > T_c$ (Alta Temperatura)

Quando la temperatura è maggiore della temperatura critica ( $T > T_c$ ), ovvero  $\beta < \beta_c$ , si ha la condizione  $2D\beta < 1$ . In questo regime:

- La derivata seconda è maggiore di zero ( $f''(m) > 0$ ) per tutti i valori di  $m$  nell'intervallo fisicamente rilevante  $(-1, 1)$
- C'è **un solo minimo** globale in  $m = 0$
- L'energia libera  $f(m)$  ha un comportamento di tipo parabolico (armonico) attorno a  $m = 0$
- C'è solo una soluzione all'equazione del campo medio.

### Caso $T < T_c$ (Bassa Temperatura)

Quando la temperatura è minore della temperatura critica ( $T < T_c$ ), ovvero  $2D\beta > 1$ , si è nel regime di **fase fredda** o **fase a simmetria rotta** (cold / broken phase).

- La derivata seconda calcolata in  $m = 0$  è negativa:  $f''(m = 0) < 0$   
La soluzione  $m = 0$  non è più un minimo, ma un **massimo**.
- Esistono **due minimi locali** in  $m = +\tilde{m} = m^+$  e  $m = -\tilde{m} = m^-$   
Questi due minimi devono essere opposti per ragioni di simmetria.

### Caso $T = T_c$ (Punto Critico)

Al punto critico  $T = T_c$  ( $\beta = \beta_c$ ), si ha  $2D\beta = 1$ .

- La curva  $f(m)$  si **appiattisce** in  $m = 0$
- Si ha  $f''(m = 0) = 0$



**Figura 8.1:** Andamento di  $f(m)$  al variare della temperatura.

Se il sistema venisse preparato in uno stato random ( $m \approx 0$ ) a  $T < T_c$ , esso evolverebbe spontaneamente (cadrebbe) verso uno dei due minimi stabili,  $m^+$  o  $m^-$ , acquisendo una magnetizzazione spontanea.

### 8.1.1 Espansione vicino al Punto Critico

Vicinissimo al punto critico, per  $T \rightarrow T_c^-$ , si ha  $m \rightarrow 0$

La magnetizzazione spontanea è piccola e si procede espandendo l'equazione del campo medio in potenze di  $m$ . L'equazione di partenza è:

$$f'(m) = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log \frac{1+m}{1-m} = 0 \quad (8.2)$$

Si utilizza l'**espansione in serie di Taylor** per  $\log(\frac{1+m}{1-m})$  intorno a  $m = 0$ . Per ricavarla, si parte dalle espansioni di  $(1-m)^{-1}$  e  $\log(1+x)$ .

- Espansione di  $(1-m)^{-1}$ :

$$(1-m)^{-1} \approx 1 + m + m^2 + m^3 + O(m^4)$$

- Espansione di  $\frac{1+m}{1-m}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1+m}{1-m} &\approx (1+m)(1+m+m^2+m^3) + O(m^4) \\ &= 1 + 2m + 2m^2 + 2m^3 + O(m^4) \end{aligned}$$

- Sostituendo nel logaritmo:

$$\log \frac{1+m}{1-m} \approx \log(1 + 2(m + m^2 + m^3))$$

- Espansione di  $\log(1+x)$ :

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

- Ponendo  $x = 2m + 2m^2 + 2m^3$ :

$$\log \frac{1+m}{1-m} \approx 2(m + m^2 + m^3) - \frac{4}{2}(m + m^2)^2 + \frac{8}{3}m^3 + O(m^5)$$

Raccogliendo i termini dello stesso ordine in  $m$ , l'espansione è:

$$\log \frac{1+m}{1-m} \approx 2m + \frac{2}{3}m^3 + O(m^4) \quad (8.3)$$

Sostituendo nell'equazione del campo medio:

$$f'(m) = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \left( 2m + \frac{2}{3}m^3 \right) \quad \text{per } T \rightarrow T_c^-, m \rightarrow 0 \quad (8.4)$$

Questa equazione ha la soluzione banale  $m = 0$ . Cerchiamo le soluzioni non nulle ( $m \neq 0$ ) che esistono per  $T < T_c$ :

$$-2D + \frac{1}{\beta} + \frac{m^2}{3\beta} = 0 \quad (8.5)$$

Risolviamo per  $m^2$ :

$$\frac{m^2}{3\beta} = 2D - \frac{1}{\beta} = \frac{2D\beta - 1}{\beta} \quad (8.6)$$

$$m^2 = 3\beta \left( \frac{2D\beta - 1}{\beta} \right) = 3(2D\beta - 1) \quad (8.7)$$

Quindi la magnetizzazione spontanea  $m$  è:

$$m = \pm \sqrt{3}(2D\beta - 1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } T \rightarrow T_c^-, m \rightarrow 0 \quad (8.8)$$

Questo risultato definisce il primo **esponente critico** che incontriamo, chiamato  $\beta$  (da non confondere con  $1/k_B T$ ).

La magnetizzazione  $m$  vicino alla temperatura critica  $T_c$  (dal basso) segue la legge:

$$m \propto (\beta - \beta_c)^{1/2} \propto (T_c - T)^{1/2} \quad (8.9)$$

Quindi, l'**esponente critico della magnetizzazione** è:

$$\beta_{MF} = \frac{1}{2} \quad (8.10)$$

Questo risultato è fondamentale: mostra che, partendo da funzioni analitiche, il sistema sviluppa una singolarità (derivata infinita in  $T_c$ ) nel punto critico.

### 8.1.2 Dipendenza dalla Dimensionalità

È cruciale discutere la validità di questo risultato:

- I **pre-fattori** (come  $\sqrt{3}$  o  $2D$ ) non sono universali; cambieranno a seconda della specifica geometria del reticolo o dei dettagli dell'Hamiltoniana.
- L'**esponente critico** ( $\beta_{MF} = 1/2$ ) è **universale** per una classe di sistemi, ma il valore MFA è corretto solo in alta dimensionalità.
- Per dimensioni  $D \geq 4$  questo risultato MFA è esatto.  $D = 4$  è la "dimensione critica superiore" per questo modello.
- Per dimensioni  $D = 2, 3$  lo scenario qualitativo (l'esistenza di una transizione di fase con rottura di simmetria) è corretto, ma l'esponente critico  $\beta$  avrà un valore diverso da  $1/2$ . Questi esponenti corretti possono essere calcolati usando tecniche più avanzate come il Gruppo di Rinormalizzazione.

L'approssimazione di campo medio funziona bene in alta dimensione perché si basa sull'assunzione che gli spin siano incorrelati. In  $D \geq 4$ , ogni spin ha così tanti vicini che l'effetto medio (il "campo medio") che sente è molto più forte della "reazione" che esso induce sui vicini. Le correlazioni diventano trascurabili.

Esiste un'analogia matematica profonda con i Random Walks: in  $D = 2$  e  $D = 3$ , due random walks si incrociano con probabilità 1; in  $D = 4$  (o superiore), due random walks non si incontrano mai e il sistema è essenzialmente "libero" (non correlato), come assunto dalla MFA.

### 8.1.3 Il Caso $D = 1$

In dimensione  $D = 1$ , **non c'è mai una transizione di fase** a  $T > 0$ . Questo può essere compreso usando un argomento basato sui "droplets" (gocce o domini) di spin allineati.

Supponiamo di essere a  $T$  molto bassa e di avere una lunga catena ordinata:

$$\cdots + + + + + + + + + + + + + + + + \dots$$

Se si forma un "droplet" di spin opposti all'interno

$$\cdots + + + + + - - - + + + + + + \dots$$

gli unici spin che "pagano" un prezzo energetico (a causa dell'interazione  $J\sigma_i\sigma_j$ ) sono quelli ai due bordi (le interfacce  $+/-$  e  $-/+$ ). In  $D = 1$ , il bordo di un droplet è sempre costituito da 2 spin, indipendentemente dalla dimensione  $L$  del droplet. Il costo energetico  $\Delta E$  per creare il droplet è quindi *costante* (non dipende da  $L$ ). Basta che un singolo spin nel mezzo di una lunga catena ordinata inverta il suo segno (flippi) per rompere l'ordine a lungo raggio, creando due domini separati. A  $T > 0$ , c'è sempre una probabilità finita  $\sim e^{-\Delta E/k_B T}$  che questo accada. Poiché il costo  $\Delta E$  è finito e costante, e ci sono  $L$  posti in cui il droplet può formarsi (guadagno entropico  $\sim k_B \log L$ ), il sistema preferirà sempre rompere l'ordine a lungo raggio per guadagnare entropia. Per questo motivo, in  $D = 1$  non può esistere una fase ordinata (magnetizzata) a  $T > 0$ .

### 8.1.4 Espansione a Bassa Temperatura

Studiamo ora il limite opposto,  $T \rightarrow 0$  (cioè  $\beta \rightarrow \infty$ ). In questo limite, ci aspettiamo che la magnetizzazione saturi a  $m \rightarrow 1$  (o  $-1$ ). Analizziamo l'equazione di campo medio ( $h = 0$ ) espandendo attorno a  $m = 1$ .

$$-4D\beta m + \log(1+m) - \log(1-m) = 0 \quad (8.11)$$

Sostituendo  $m \approx 1$  nei termini regolari (quelli che non divergono):

$$-4D\beta(1) + \log(1+1) - \log(1-m) \approx 0 \quad (8.12)$$

$$-4D\beta + \log(2) - \log(1-m) = 0 \quad (8.13)$$

Risolviamo per  $(1-m)$ :

$$\log(1-m) = \log(2) - 4D\beta \quad (8.14)$$

Prendendo l'esponenziale di entrambi i membri:

$$1-m = e^{\log(2)-4D\beta} = e^{\log 2} e^{-4D\beta} \quad (8.15)$$

$$1-m \approx 2e^{-4D\beta} \quad (8.16)$$

Quindi, la magnetizzazione  $m$  per  $T \rightarrow 0$  è:

$$m \approx 1 - 2e^{-4D\beta} \quad \text{per } T \rightarrow 0 \quad (8.17)$$

Questo mostra che  $m \rightarrow 1$  esponenzialmente quando  $T \rightarrow 0$  (poiché  $\beta \rightarrow \infty$ ).

Il termine  $1-m$  rappresenta la piccola deviazione dalla saturazione perfetta. Può essere interpretato come proporzionale alla probabilità che uno spin "flippi" (passi da  $+1$  a  $-1$ ) a causa della temperatura finita. Quando  $\beta$  è grande ma finito, c'è una piccola probabilità che uno spin flippi. Per farlo, deve pagare un prezzo energetico, che è connesso al numero di vicini (D) e a  $\beta$ , legato al costo energetico del flip.

## 8.2 Analisi con Campo Esterno Non Nullo

Consideriamo ora il caso con un campo magnetico esterno  $h \neq 0$ , assumiamo  $h > 0$ .

La presenza di un campo  $h \neq 0$  rompe esplicitamente la simmetria  $m \rightarrow -m$  dell'Hamiltoniana (aggiunge un termine  $-h \sum \sigma_i$ ). Di conseguenza:

- Non ci sono più due stati degeneri (minimi equivalenti).
- **Non esiste più una transizione di fase netta (con rottura spontanea di simmetria).**
- L'energia libera  $f(m, h)$  e la magnetizzazione  $m(T, h)$  sono funzioni analitiche (lisce) per ogni  $T > 0$ . Non ci sono più singolarità.

### 8.2.1 Forma dell'Energia Libera e Metastabilità

Vediamo come cambia l'energia libera (per  $T < T_c$ ) quando applichiamo un campo  $h > 0$ :

1.  $h = 0$ : Abbiamo la "doppia buca" simmetrica (minimi in  $m^-$  e  $m^+$ ).
2.  $|h|$  piccolo: Il campo  $h$  "inclina" il potenziale  $f(m)$ .
  - Lo stato con  $m > 0$  (allineato al campo) diventa il minimo globale: è lo **stato stabile**.
  - Lo stato con  $m < 0$  (anti-allineato) diventa un minimo locale, non più globalmente stabile: è uno **stato metastabile**.
3. Aumentando  $h$ : All'aumentare di  $h$ , la buca metastabile diventa sempre meno profonda.
4.  $h$  grande: Esiste un valore del campo (chiamato campo di spinodale) oltre il quale il minimo locale (la buca metastabile) scompare completamente. Rimane un solo minimo globale (lo stato stabile).

### 8.2.2 Isteresi

Questo comportamento dà origine al fenomeno dell'**isteresi**, visibile plottando  $m$  in funzione di  $h$  (a  $T < T_c$ ).

Se partiamo da  $h \rightarrow -\infty$  (tutti spin giù,  $m \approx -1$ ) e aumentiamo lentamente  $h$ :

- Il sistema rimane nello stato  $m < 0$  (ramo inferiore della curva di isteresi).
- Quando  $h$  diventa positivo, questo stato  $m < 0$  diventa metastabile.
- Il sistema può rimanere "intrappolato" in questo stato metastabile per un tempo molto lungo, perché per passare allo stato stabile ( $m > 0$ ) deve superare una barriera di energia libera (il massimo di  $f$  che si trova tra i due minimi).
- Il passaggio (decadimento dello stato metastabile) avviene tramite fluttuazioni termiche che, dopo un tempo sufficiente, permettono al sistema di superare la barriera.

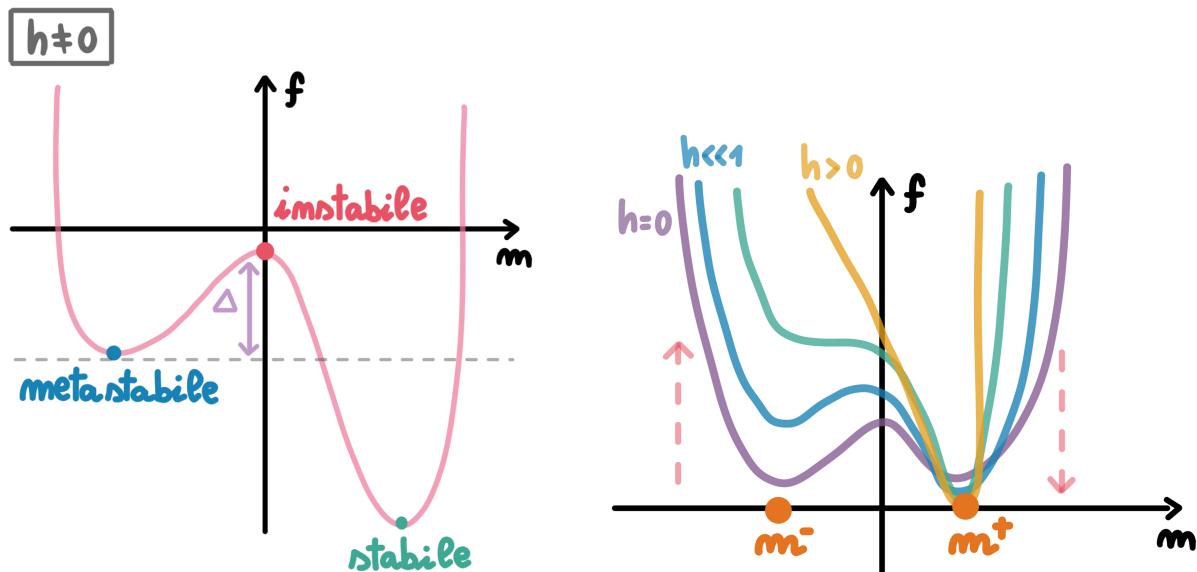


Figura 8.2: Andamento di  $f(m)$  in presenza di campo magnetico.

- A un certo valore critico  $h_c > 0$  (il campo di spinodale), la barriera scompare. Lo stato metastabile cessa di esistere e il sistema deve "saltare" bruscamente al minimo globale  $m > 0$ .

Lo stesso accade invertendo il campo (partendo da  $h \rightarrow +\infty$  e diminuendolo). Il risultato è il tipico ciclo di isteresi.

Il grafico  $m(h)$  a  $T < T_c$  mostra quindi 3 rami per  $|h| < h_c$ :

1. Due rami esterni: **stabili** o **metastabili**.
2. Un ramo centrale (spesso non disegnato): **instabile**, che corrisponde a "sedersi" sul massimo dell'energia libera  $f(m)$ .

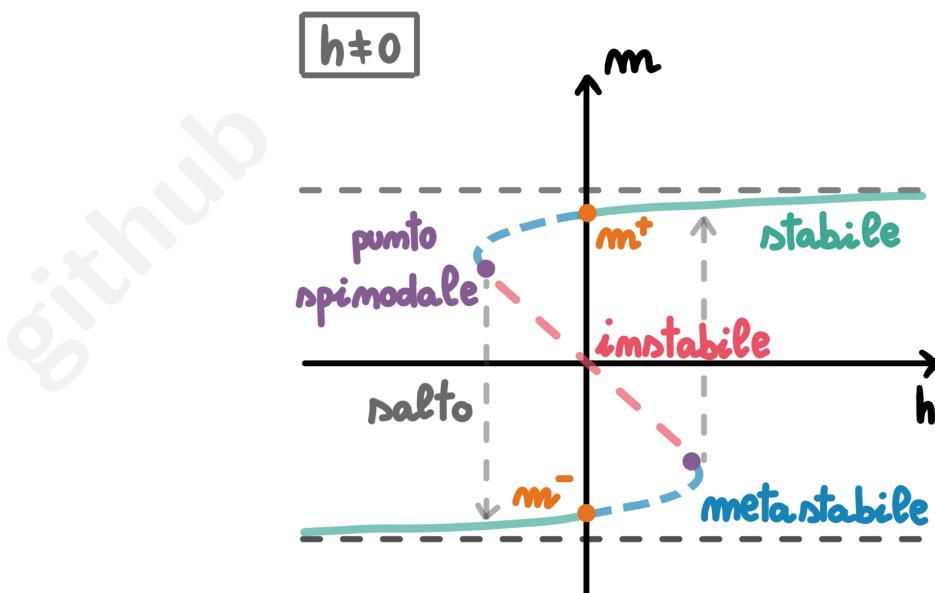


Figura 8.3: Andamento di  $m$  in funzione del campo magnetico.

### 8.3 Riassunto degli Esponenti Critici (MFA)

Riassumiamo i risultati critici (gli esponenti) trovati in MFA (per  $h = 0$ ):

- Per  $T > T_c$ :  $m = 0$ . La densità media di energia  $u \approx \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$  è zero.
- Magnetizzazione Spontanea ( $T \rightarrow T_c^-$ ):

$$m \sim (T_c - T)^\beta \quad \text{con} \quad \beta_{MF} = 1/2 \quad (8.18)$$

- Energia ( $T \rightarrow T_c^-$ ): L'energia  $u \approx -m^2$  segue:

$$u \sim (T_c - T)^{2\beta} \sim (T_c - T)^1 \quad (8.19)$$

- Suscettività  $\chi = \partial m / \partial h$  ( $T \rightarrow T_c$ ):

$$\chi \sim |T_c - T|^{-\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma_{MF} = 1 \quad (8.20)$$

- Isoterma Critica ( $T = T_c$ ,  $h \rightarrow 0$ ):

$$m \sim h^{1/\delta} \quad \text{con} \quad \delta_{MF} = 3 \quad (8.21)$$

- Calore Specifico  $C_v \sim \partial u / \partial T$ :

$$C_v \sim \frac{\partial}{\partial T} (T_c - T)^1 \sim \text{costante} \quad (\text{per } T < T_c) \quad (8.22)$$

Si trova che il calore specifico è nullo per  $T > T_c$  (in questo modello semplice) e costante per  $T < T_c$ . Ha quindi una **discontinuità** (un salto finito) a  $T_c$ .

Poiché l'energia  $u$  (derivata prima dell'energia libera  $f$  rispetto a  $T$ ) è continua a  $T_c$  (vale 0 da entrambe le parti), ma il calore specifico  $C_v$  (derivata seconda di  $f$ ) è discontinuo, questa è una **transizione di fase del secondo ordine** (secondo la classificazione di Ehrenfest).

# Lezione 9

Data: 22/10/2025

## 9.1 Risoluzione Esatta di un Modello con Forze Deboli a Lungo Raggio

In questa sezione, risolveremo esattamente un modello in cui tutte le interazioni sono a lungo raggio, ma molto deboli. Dimostreremo che la soluzione esatta di questo modello coincide con le equazioni di campo medio (Mean Field, MF).

Definiamo l'Hamiltoniana del modello a lungo raggio (Long Range, LR) come:

$$H_{LR}[\sigma] = -\frac{1}{2N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k - h \sum_i \sigma_i \quad (9.1)$$

Dove:

- La somma  $\sum_{i,k}$  è estesa a tutte le coppie di spin  $i, k$ , con  $i, k = 1, \dots, N$ .
- $N$  è il numero totale di spin nel sistema, che coincide con il volume.
- $h$  è il campo magnetico esterno.

La prima somma include anche i termini con  $i = k$ . Il termine  $\sigma_i \sigma_i = \sigma_i^2 = 1$  (poiché  $\sigma_i = \pm 1$ ). La somma dei termini  $i = k$  è quindi  $\sum_i \sigma_i^2 = N$ . Questo contribuisce all'energia totale con un termine  $-\frac{1}{2N} \cdot N = -1/2$ , che è una costante. Essendo una costante, è irrilevante per la fisica del sistema e possiamo trascurarla o includerla senza che cambi i risultati.

Il fattore  $1/2$  nella formula serve a contare correttamente le coppie. La somma su  $i, k$  conta due volte ogni coppia. Dividendo per  $2$ , contiamo ogni coppia una sola volta.

### La necessità di un accoppiamento debole

L'aspetto cruciale di questo modello è l'accoppiamento  $J = 1/N$ . Questa è un'interazione molto debole.

Consideriamo cosa succederebbe se  $J$  fosse di ordine  $1$ ,  $J = \mathcal{O}(1)$ , nel limite termodinamico  $N \rightarrow +\infty$ . L'energia è data dalla somma  $\sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k$ , questa somma contiene  $N^2$  termini. La densità di energia (energia per spin) si ottiene normalizzando per  $N$ :

$$\frac{E}{N} \propto \frac{1}{N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k \propto \frac{N^2}{N} \propto N$$

Se  $J = \mathcal{O}(1)$ , la densità di energia divergerebbe linearmente con  $N$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Il modello non sarebbe ben definito termodinamicamente, poiché la densità di energia non sarebbe una quantità intensiva (cioè di ordine 1).

Per avere un modello ben definito nel limite termodinamico, abbiamo bisogno che la densità di energia sia intensiva. Per ottenere ciò, l'accoppiamento  $J$  deve scalare come  $1/N$ . In questo modo, la densità di energia diventa:

$$\frac{E}{N} \propto \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k \right) \propto \frac{1}{N^2} \cdot N^2 \propto 1$$

Con  $J = 1/N$ , la densità di energia è di ordine 1 e il modello è ben definito. Questo descrive un sistema in cui ogni spin interagisce con tutti gli altri, ma con un'interazione che diventa infinitamente debole al crescere del sistema.

### 9.1.1 Trasformazione di Hubbard-Stratonovich

Per risolvere il modello, useremo un'identità integrale nota (una versione della trasformazione di Hubbard-Stratonovich), basata sull'integrale Gaussiano:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}} \quad (9.2)$$

Riscriviamo questa identità per isolare il termine esponenziale:

$$e^{\frac{B^2}{4A}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2 + Bx}$$

Applichiamo questo "trucco" al fattore di Boltzmann  $e^{-\beta H}$ . L'Hamiltoniana è

$$H = -\frac{1}{2N} \left( \sum_i \sigma_i \right)^2 - h \sum_i \sigma_i \quad (9.3)$$

dove abbiamo usato l'identità  $(\sum_i \sigma_i)^2 = \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k$ .

Il fattore di Boltzmann contiene il termine  $e^{\frac{\beta}{2N}(\sum_i \sigma_i)^2}$ . Vogliamo usare l'identità per linearizzare questo termine quadratico. Identifichiamo i termini:

- $\frac{B^2}{4A} = \frac{\beta}{2N} (\sum_i \sigma_i)^2$
- $B = \beta \sum_i \sigma_i$
- $A = \frac{N\beta}{2}$

Sostituendo questi valori nell'identità, otteniamo:

$$e^{\frac{\beta}{2N}(\sum_i \sigma_i)^2} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + \beta\lambda \sum_i \sigma_i}$$

Ora sostituiamo questa espressione nel fattore di Boltzmann completo  $e^{-\beta H}$ :

$$e^{-\beta H} = e^{\frac{\beta}{2N}(\sum_i \sigma_i)^2 + \beta h \sum_i \sigma_i} = e^{\frac{\beta}{2N}(\sum_i \sigma_i)^2} \cdot e^{\beta h \sum_i \sigma_i}$$

$$e^{-\beta H} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + \beta\lambda \sum_i \sigma_i} \cdot e^{\beta h \sum_i \sigma_i} \quad (9.4)$$

Combinando i termini nell'esponenziale dentro l'integrale:

$$e^{-\beta H} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + \beta(\lambda+h) \sum_i \sigma_i} \quad (9.5)$$

Questa espressione sembra molto più complicata di quella da cui siamo partiti. Tuttavia, ha un vantaggio cruciale: l'esponente è ora **lineare** nelle variabili di spin  $\sigma_i$ . Il termine quadratico  $(\sum_i \sigma_i)^2$  è sparito, a costo di introdurre una nuova variabile di integrazione  $\lambda$ .

Il termine  $\sum_i \beta(\lambda+h)\sigma_i$  è **fattorizzato**: può essere scritto come un prodotto di termini che dipendono da un singolo spin,  $\prod_i e^{\beta(\lambda+h)\sigma_i}$ . Questo ci permetterà di calcolare la somma sugli stati degli spin.

### 9.1.2 Calcolo della Funzione di Partizione Z

La funzione di partizione è data dalla somma su tutte le configurazioni di spin  $\{\sigma_i = \pm 1\}$ :

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta H[\sigma]} \quad (9.6)$$

Sostituiamo l'espressione integrale per  $e^{-\beta H}$ :

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \left[ \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \cdot e^{\beta(\lambda+h) \sum_i \sigma_i} \right] \quad (9.7)$$

Poiché l'integrale in  $d\lambda$  non dipende dalle  $\sigma_i$  (e viceversa), possiamo scambiare l'ordine di somma e integrazione:

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \left[ \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{\beta(\lambda+h) \sum_i \sigma_i} \right] \quad (9.8)$$

Concentriamoci sulla somma tra parentesi quadre. Grazie alla fattorizzazione, possiamo scriverla come:

$$\sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{i=1}^N e^{\beta(\lambda+h)\sigma_i} = \prod_{i=1}^N \left[ \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta(\lambda+h)\sigma_i} \right]$$

Calcoliamo la somma per un singolo spin  $i$ :

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta(\lambda+h)\sigma_i} = e^{\beta(\lambda+h)(+1)} + e^{\beta(\lambda+h)(-1)} = 2 \cosh(\beta(\lambda+h))$$

Questo risultato è identico per tutti gli  $N$  spin. Il prodotto totale è quindi:

$$\left[ \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta(\lambda+h)\sigma_i} \right]^N = [2 \cosh(\beta(\lambda+h))]^N \quad (9.9)$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione per  $Z$ :

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \cdot [2 \cosh(\beta(\lambda+h))]^N \quad (9.10)$$

Raggruppiamo tutti i termini che dipendono da  $N$  nell'esponenziale:

$$(2 \cosh(\beta(\lambda + h)))^N = e^{N \log(2 \cosh(\beta(\lambda + h)))}$$

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + N \log(2 \cosh(\beta(\lambda + h)))} \quad (9.11)$$

Mettiamo in evidenza  $-N\beta$  nell'esponente:

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-N\beta \left[ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta(\lambda + h))) \right]} \quad (9.12)$$

### 9.1.3 Metodo del Punto di Sella

Abbiamo ridotto la funzione di partizione a un integrale della forma:

$$\int d\lambda e^{-N\beta A(\lambda)}$$

dove abbiamo definito una "azione efficace"  $A(\lambda)$ :

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta(\lambda + h))) \quad (9.13)$$

Siamo interessati al limite termodinamico  $N \rightarrow \infty$ . Il fattore  $N$  che moltiplica l'esponente è molto grande. Questo ci permette di usare il **metodo del punto di sella**.

L'idea è che, per  $N$  molto grande, l'integrale sarà completamente dominato dal valore  $\lambda^*$  che **minimizza** la funzione  $A(\lambda)$ . Qualsiasi valore  $\lambda \neq \lambda^*$  darà  $A(\lambda) > A(\lambda^*)$ , e il suo contributo all'integrale sarà  $e^{-N\beta A(\lambda)}$ , che è esponenzialmente soppresso (tende a zero molto rapidamente) rispetto al contributo del minimo  $e^{-N\beta A(\lambda^*)}$ .

L'energia libera di Helmholtz per spin,  $f$ , è data da  $f = -\frac{1}{\beta N} \log Z$ .

Nel limite  $N \rightarrow \infty$ , possiamo approssimare  $Z$  con il valore dell'integrando calcolato al punto di sella (minimo di  $A(\lambda)$ ), trascurando il pre-fattore  $\sqrt{N}$  e i contributi delle fluttuazioni quadratiche (che danno termini di ordine  $\mathcal{O}(\log N)/N$  o  $\mathcal{O}(1/N)$ ):

$$f = \min_{\lambda} A(\lambda) + \mathcal{O}(1/N) \quad (9.14)$$

Per trovare il minimo di  $A(\lambda)$ , dobbiamo calcolare la derivata prima e porla uguale a zero:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta(\lambda + h))) \right] = 0 \quad (9.15)$$

$$\lambda - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{2 \cosh(\beta(\lambda + h))} \cdot (2 \sinh(\beta(\lambda + h))) \cdot \beta = 0 \quad (9.16)$$

$$\lambda - \frac{\sinh(\beta(\lambda + h))}{\cosh(\beta(\lambda + h))} = 0 \quad (9.17)$$

Otteniamo quindi l'equazione:

$$\lambda = \tanh(\beta(\lambda + h)) \quad (9.18)$$

Questa è esattamente l'equazione di campo medio (M.F.E.) che abbiamo derivato in precedenza, a condizione di identificare la variabile di integrazione  $\lambda$  con la magnetizzazione  $m$ :

$$\lambda = m \quad (9.19)$$

**Conclusione:** Abbiamo dimostrato che l'approssimazione di campo medio (M.F.A.) non è solo un'approssimazione, ma è la soluzione **esatta** per il modello con interazioni a raggio infinito ( $J \propto 1/N$ ).

La ragione fisica profonda di questo risultato è che, in questo modello, le correlazioni spin-spin connesse sono soppresse. Si può dimostrare che:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{1}{N} \right) \quad (9.20)$$

Poiché le interazioni sono deboli e "diluite" su tutto il sistema, ogni spin sente solo l'effetto medio (il campo medio) di tutti gli altri, e le correlazioni (fluttuazioni) tra coppie di spin diventano trascurabili nel limite termodinamico. Questo è lo stesso motivo per cui la M.F.A. diventa esatta in modelli a corto raggio nel limite di dimensionalità  $D \rightarrow \infty$ .

## 9.2 Validità della M.F.A. e Funzioni di Correlazione

Ora vogliamo capire quando la M.F.A. è un'approssimazione "sensata" per modelli più realistici (ad esempio, a corto raggio). Per farlo, studieremo le **funzioni di correlazione**.

### Il paradosso della stima delle correlazioni

Sorge un problema concettuale: l'approssimazione di campo medio si basa sull'assunzione che gli spin non siano correlati, cioè che  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^c = 0$  per  $i \neq j$ . Come possiamo allora usare un'approssimazione che per definizione impone correlazioni nulle per *stimare* le correlazioni del modello originale?

La risposta è sottile. Dobbiamo distinguere tra due quantità:

1. La funzione di correlazione calcolata *all'interno* dell'approssimazione MF:  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{MF}$ . Questa è zero per definizione.
2. Una stima della funzione di correlazione del modello *originale*, ottenuta usando la soluzione MF.

### Fluctuation-Dissipation Theorem (FDT)

Nel modello esatto (teoria "True"), esiste una relazione fondamentale (il Teorema di Fluttuazione-Dissipazione, FDT) che lega le correlazioni alla risposta del sistema a una perturbazione (risposta lineare).

La funzione di correlazione connessa è la derivata seconda dell'energia libera:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^{(True)} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_k} \left( \frac{\partial F}{\partial h_i} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial h_k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \quad (9.21)$$

Questa identità **non è vera all'interno dell'approssimazione di campo medio**.

In M.F.A. si ha:  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^{MF} = 0$  (lato sinistro),  $\left. \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{MF} \neq 0$  (lato destro)

## Strategia di Stima

La nostra strategia sarà quella di usare il termine di risposta lineare calcolato in M.F.A. come nostra **stima** della vera funzione di correlazione:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^{(True)} \approx \left. \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{MF} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (9.22)$$

Questa è una stima migliore (e non banale) rispetto a  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^{MF} = 0$ .

## Giustificazione Variazionale

Perché questa è una stima migliore? Consideriamo un argomento variazionale.

Sia  $P_{eq}^T$  la vera distribuzione di probabilità di equilibrio e  $P_{eq}^A$  la distribuzione approssimata (es. quella fattorizzata di campo medio). Definiamo la "distanza" tra le due  $\delta P = |P_{eq}^T - P_{eq}^A|$ . Assumiamo che l'approssimazione sia buona, quindi  $\delta P = \mathcal{O}(\epsilon)$  con  $\epsilon$  piccolo.

1. Stima di  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c$ : Questa è un'aspettativa lineare sulla distribuzione  $P$ .

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^T = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^A + \mathcal{O}(\epsilon)$$

L'errore sulla correlazione calcolata direttamente è  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

Nel nostro caso  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^A = 0$ , quindi  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^T = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

2. Stima dell'Energia Libera  $F$ : La vera distribuzione  $P_{eq}^T$  è il minimo di  $F[P]$ :

$$\left. \frac{\delta F[P]}{\delta P} \right|_{P=P_{eq}^T} = 0 \quad (9.23)$$

A causa di questa proprietà variazionale, quando calcoliamo  $F$  usando la distribuzione approssimata  $P_{eq}^A$  (che è "vicina" a  $P_{eq}^T$ ), l'errore che commettiamo non è  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , ma  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ :

$$F[P_{eq}^T] = F[P_{eq}^A] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (9.24)$$

I termini lineari in  $\epsilon$  si cancellano proprio perché siamo in un punto stazionario.

La quantità fisica che ci interessa stimare è la funzione di correlazione del sistema reale  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^{(True)}$ . Questa, nella teoria esatta, è legata alla derivata seconda dell'energia libera reale  $F[P_{eq}^T]$ . La nostra stima (la risposta lineare calcolata in campo medio  $\left. \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{MF}$ ) è invece legata alla derivata seconda dell'energia libera approssimata  $F[P_{eq}^A]$ .

Il punto cruciale è che, grazie al principio variazionale,  $F[P_{eq}^A]$  è una stima molto più accurata di  $F[P_{eq}^T]$  (con un errore  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ) rispetto a quanto lo sia la stima diretta della correlazione  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c^A$  (che ha un errore  $\mathcal{O}(\epsilon)$ ).

Poiché  $F[P_{eq}^A]$  è una stima così precisa dell'energia libera reale, ci aspettiamo che anche le sue derivate seconde (ovvero la nostra stima  $\left. \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{MF}$ ) siano una stima della correlazione reale *molto migliore* rispetto alla stima diretta (che è 0 e ha un errore maggiore).

Per questa ragione, procederemo calcolando  $\left. \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{MF}$  e analizzeremo il suo comportamento per testare i limiti di validità dell'approssimazione di campo medio.

# Lezione 10

Data: 27/10/2025

## 10.1 Matrice di Risposta

In questa sezione, analizzeremo il sistema in assenza di campo magnetico esterno,  $h = 0$ , e a temperature superiori alla temperatura critica,  $T > T_c$ . In questo regime, la magnetizzazione spontanea è nulla,  $m_s = 0$ .

L'obiettivo è calcolare la funzione di correlazione. Nella semplice teoria di campo medio, la funzione di correlazione  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$  è nulla. Tuttavia, siamo interessati a calcolare la **risposta** del sistema a una piccola perturbazione. Introdurremo un campo magnetico infinitesimo  $h$  e studieremo la risposta lineare della magnetizzazione  $m$ , che sarà anch'essa piccola.

Partiamo dall'equazione di campo medio per la magnetizzazione locale  $m_i$ :

$$m_i = \tanh \left[ \beta \left( \sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right] \quad (10.1)$$

Poiché  $m$  e  $h$  sono piccoli, possiamo linearizzare l'equazione. Utilizziamo l'espansione di Taylor per  $\tanh(x) \approx x$  per  $x \rightarrow 0$ , trascurando i termini di ordine  $O(m^3)$  e  $O(h^3)$ , e termini misti. L'equazione diventa:

$$m_i \approx \beta \left( \sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \quad (10.2)$$

Vogliamo ora invertire questa relazione per esprimere il campo  $h$  in funzione della magnetizzazione  $m$ . Riorganizziamo l'equazione lineare:

$$\frac{m_i}{\beta} - \sum_k J_{ik} m_k = h_i \quad (10.3)$$

Possiamo riscrivere il lato sinistro introducendo la delta di Kronecker,  $\delta_{ik}$ , per raccogliere i termini sotto un'unica sommatoria:

$$h_i = \sum_k \left[ \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \right] m_k \quad (10.4)$$

Questa è un'equazione matriciale. Definiamo la matrice  $B$ :

$$B_{ik} \equiv \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \quad (10.5)$$

L'equazione che lega campo e magnetizzazione è quindi  $h = Bm$ . Per trovare la risposta della magnetizzazione al campo, dobbiamo calcolare la matrice inversa  $A = B^{-1}$ :

$$m_i = \sum_k (B^{-1})_{ik} h_k = \sum_k A_{ik} h_k \quad (10.6)$$

La matrice  $A_{ik}$  è la **matrice di risposta** (o suscettività) che stiamo cercando.

$$A_{ik} = (B^{-1})_{ik} = \left( \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \right)^{-1} \quad (10.7)$$

### 10.1.1 Soluzione in Spazio di Fourier

Calcolare l'inversa di  $B$ , una matrice di dimensioni  $N \times N$  (dove  $N$  è il volume del sistema), è proibitivo nello spazio reale. Sfruttiamo la simmetria traslazionale del sistema per passare allo spazio di Fourier .

- **Spazio Reale (x-Space):** Consideriamo un reticolo ipercubico in  $D$  dimensioni .
- **Spazio di Fourier (p-Space):** Lo spazio reciproco è la prima Zona di Brillouin (BZ), definita da  $-\pi \leq p_a \leq \pi$  per ogni componente del momento  $a = 1, \dots, D$  .

Assumiamo che le interazioni  $J_{ik}$  dipendano solo dalla differenza  $i - k$  (invarianza traslazionale). Consideriamo solo interazioni tra **primi vicini**:

$$J_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - k| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10.8)$$

Data l'invarianza traslazionale,  $B_{ik} = B(i - k)$ . La sua trasformata di Fourier  $\tilde{B}(p)$  è:

$$\tilde{B}(p) = \sum_l B(l) e^{-ip \cdot l} = \sum_l \left( \frac{\delta_{l,0}}{\beta} - J(l) \right) e^{-ip \cdot l} \quad (10.9)$$

Calcoliamo i due termini separatamente:

1. **Termine diagonale ( $l = 0$ ):** Il termine  $\frac{\delta_{l,0}}{\beta}$  contribuisce solo quando  $l = 0$ .

$$\sum_l \frac{\delta_{l,0}}{\beta} e^{-ip \cdot l} = \frac{1}{\beta}$$

2. **Termine di interazione ( $l \neq 0$ ):** Il termine  $-J(l)$  contribuisce solo quando  $l$  connette primi vicini. Per un dato sito, ci sono  $2D$  primi vicini (uno in direzione positiva e uno in negativa per ciascuna delle  $D$  dimensioni).

$$-\sum_l J(l) e^{-ip \cdot l} = -\sum_{a=1}^D \left( e^{-ip_a} + e^{ip_a} \right)$$

Ricordando la formula di Eulero  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ , questo diventa:

$$-2 \sum_{a=1}^D \cos(p_a)$$

Combinando i due termini, otteniamo la trasformata di Fourier di  $B$ :

$$\tilde{B}(p) = \frac{1}{\beta} - 2 \sum_{a=1}^D \cos(p_a) = \frac{1}{\beta} \left( 1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a) \right) \quad (10.10)$$

### 10.1.2 Funzione di Green e Funzione di Correlazione

Nello spazio di Fourier, l'inversione di una matrice diventa una semplice divisione. La trasformata della matrice di risposta  $\tilde{A}(p)$  è:

$$\tilde{A}(p) = (\tilde{B}(p))^{-1} = \frac{\beta}{1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a)} \quad (10.11)$$

Definiamo la **Funzione di Green** (libera)  $\tilde{G}_0(p)$  come la parte del propagatore indipendente da  $\beta$ :

$$\tilde{G}_0(p) = \left( 1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a) \right)^{-1} \quad (10.12)$$

Quindi  $\tilde{A}(p) = \beta \tilde{G}_0(p)$ . L'antitrasformata  $A(l) = A(i - k)$  è data da :

$$A(l) = \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot l} \tilde{A}(p) = \beta \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot l} \tilde{G}_0(p) \quad (10.13)$$

Questa matrice  $A_{ik}$  è direttamente collegata alla funzione di correlazione spin-spin. Dalla teoria della risposta lineare (e dal Teorema Fluttuazione-Dissipazione), la suscettività  $\chi_{ik} = \frac{\partial m_i}{\partial h_k}$  è proporzionale alla correlazione:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_{h=0} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \Big|_{h=0} = \frac{A_{ik}}{\beta} \quad (10.14)$$

Sostituendo l'espressione per  $A_{ik}$  trovata sopra, i fattori  $\beta$  si cancellano:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot (i-k)} \tilde{G}_0(p) \quad (10.15)$$

Questa è la nostra stima per la funzione di correlazione nella regione  $T > T_c$ .

## 10.2 Energia Interna e Calore Specifico

### 10.2.1 Energia Interna

L'energia interna (per sito)  $u$  è definita come :

$$u = -\frac{1}{2} \sum_k \langle \sigma_l \sigma_k \rangle J_{lk} \quad (10.16)$$

Assumendo l'energia per sito, la somma è sui vicini  $k$  di un sito  $l$  arbitrario.

Sostituendo  $\langle \sigma_l \sigma_k \rangle = A_{lk}/\beta$ :

$$u = -\frac{1}{2\beta} \sum_k A_{lk} J_{lk} \quad (10.17)$$

Possiamo calcolare questa somma nello spazio di Fourier usando il teorema di Parseval. La somma  $\sum_k A(l - k) J(l - k)$  (dove  $l$  è fissato) è l'antitrasformata del prodotto delle trasformate, valutata in  $l = 0$ :

$$u = -\frac{1}{2\beta} \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{A}(p) \tilde{J}(-p) \quad (10.18)$$

Sapendo che  $\tilde{A}(p) = \beta \tilde{G}_0(p)$  e  $\tilde{J}(p) = 2 \sum_a \cos(p_a)$  ed è una funzione pari,  $\tilde{J}(-p) = \tilde{J}(p)$ :

$$u = -\frac{1}{2\beta} \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (\beta \tilde{G}_0(p)) \left( 2 \sum_{a=1}^D \cos(p_a) \right) \quad (10.19)$$

Semplificando i fattori 2 e  $\beta$ , otteniamo l'espressione per l'energia interna per sito:

$$u = - \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{a=1}^D \cos(p_a)}{1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a)} \quad (10.20)$$

### 10.2.2 Calore Specifico ( $C_v$ )

Il calore specifico è la derivata dell'energia rispetto alla temperatura:

$$C_v = \frac{du}{dT} = \frac{du}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} \quad (10.21)$$

Poiché  $\beta = 1/T$  (usando  $k_B = 1$ ),  $\frac{d\beta}{dT} = -1/T^2 = -\beta^2$ . Quindi:

$$C_v = -\beta^2 \frac{du}{d\beta} \quad (10.22)$$

Dobbiamo ora derivare  $u$  rispetto a  $\beta$ .

$$C_v = \frac{2\beta^2}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \frac{\left(\sum_{a=1}^D \cos p_a\right)^2}{\left(1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos p_a\right)^2} \quad (10.23)$$

### 10.2.3 Comportamento Critico (Vicino a $T_c$ )

Analizziamo ora il comportamento di queste quantità quando ci si avvicina alla temperatura critica  $T_c$  dall'alto ( $T \rightarrow T_c^+$ ). La temperatura critica in campo medio è  $\beta_c = \frac{1}{2D}$

Avvicinandosi alla criticità, le lunghezze di correlazione  $\xi$  diventano molto grandi . Nello spazio di Fourier, questo corrisponde a studiare il comportamento del sistema per **piccoli momenti**  $p \rightarrow 0$  .

Analizziamo il denominatore  $\text{Den}(p) = 1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a)$ , che appare in  $\tilde{G}_0(p)$  e in tutti gli integrali . Espandiamo il coseno per piccoli  $p_a$ :

$$\cos(p_a) \approx 1 - \frac{p_a^2}{2} + O(p_a^4) \quad (10.24)$$

Sostituendo nell'espressione del denominatore :

$$\text{Den}(p) \approx 1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \left( 1 - \frac{p_a^2}{2} \right) = 1 - 2\beta D + 2\beta \sum_{a=1}^D \frac{p_a^2}{2} \quad (10.25)$$

Definendo  $p^2 = \sum_{a=1}^D p_a^2$ , otteniamo:

$$\text{Den}(p) \approx \beta p^2 + (1 - 2D\beta) \quad (10.26)$$

La funzione di Green  $\tilde{G}_0(p)$  per piccoli momenti assume quindi la forma di un propagatore massivo (forma di Ornstein-Zernike) :

$$\tilde{G}_0(p) \approx \frac{1}{\beta p^2 + m^2} \quad (10.27)$$

dove abbiamo introdotto un termine di "massa" (o gap)  $m^2$ :

$$m^2 = (1 - 2D\beta) \quad (10.28)$$

La massa  $m$  è legata all'inverso della lunghezza di correlazione,  $m \sim \xi^{-1}$ . Analizziamo il comportamento di  $m^2$  vicino a  $T_c$ :

$$m^2 = 1 - 2D\beta = 2D(\beta_c - \beta) = 2D\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T}\right) \approx \left(\frac{2D}{T_c^2}\right)(T - T_c) \quad (10.29)$$

Quindi  $m^2 \propto (T - T_c)$ .

#### 10.2.4 Decadimento della Correlazione

Possiamo ora distinguere due regimi fisici:

- **Per  $T > T_c$  (Fase disordinata)** : Abbiamo  $m^2 > 0$ . Il propagatore ha una massa. L'antitrasformata di Fourier di  $\frac{1}{p^2+m^2}$  nello spazio reale porta a una funzione di correlazione  $\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle$  che decade **esponenzialmente** con la distanza  $r = |i - k|$ .

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle \sim e^{-r/\xi}$$

- **A  $T = T_c$  (Punto critico)** : Abbiamo  $m^2 = 0$ . Il gap di massa si chiude e la lunghezza di correlazione  $\xi$  **diverge** ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Il propagatore diventa:

$$\tilde{G}_0(p) \sim \frac{1}{p^2}$$

L'antitrasformata di questa forma (un potenziale Coulombiano in D dimensioni) non è più un esponenziale, ma una **legge di potenza** (power law).

Un'analisi dimensionale mostra:

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle \sim \int d^D p e^{ip \cdot r} \frac{1}{p^2} \sim \frac{1}{r^{D-2}}$$

Alla criticità, le correlazioni decadono lentamente e a lungo raggio.

#### 10.2.5 Analisi Dimensionale del Calore Specifico

Analizziamo ora la convergenza dell'integrale del calore specifico  $C_v$  vicino a  $T_c$ . Usando l'approssimazione per piccoli  $p$ :

$$C_v \sim \int_{BZ} d^D p \frac{(\sum_a \cos p_a)^2}{(\beta p^2 + m^2)^2} \quad (10.30)$$

Per  $p \rightarrow 0$ , il numeratore  $(\sum_a \cos p_a)^2 \approx (\sum_a 1)^2 = D^2$ , che è una costante. Nello spazio  $D$ -dimensionale, l'elemento di volume è  $d^D p \sim p^{D-1} dp$ . Ci focalizziamo sulla regione dei piccoli momenti (vicino all'origine) dove l'integrale può divergere:

$$C_v \sim \int_0^\Lambda dp \frac{p^{D-1}}{(p^2 + m^2)^2} \quad (10.31)$$

Per determinare la convergenza, analizziamo il comportamento a  $T = T_c$  (cioè  $m = 0$ ):

$$C_v(T_c) \sim \int_0^\Lambda dp \frac{p^{D-1}}{p^4} = \int_0^\Lambda dp p^{D-5} \quad (10.32)$$

- **Caso  $D > 4$  (Alta dimensione):** l'integrale **converge** e il calore specifico  $C_v$  è **finito** e costante alla transizione.
- **Caso  $D < 4$  (Bassa dimensione):** l'integrale **diverge** a  $p = 0$ . Questo significa che  $C_v$  diverge a  $T_c$ .

$$C_v \approx (1 - 2D\beta)^{D/2-2} \quad (10.33)$$

- **Caso  $D = 4$  (Dimensione critica):** il calore specifico ha una **divergenza logaritmica**

$$C_v \approx \log(1 - 2D\beta) \quad (10.34)$$

# Lezione 11

Data: 29/10/2025

## 11.1 Analisi del Calore Specifico

Riprendiamo l'analisi del calore specifico  $C_v$  vicino alla temperatura critica  $T_c$ , studiando la convergenza dell'integrale che abbiamo trovato:

$$C_v \sim \int_{BZ} d^D p \frac{(\sum \cos p_a)^2}{(1 - 2\beta \sum \cos p_a)^2} \quad (11.1)$$

Ci siamo concentrati sulla regione dei piccoli momenti ( $p \rightarrow 0$ ), che corrisponde a grandi lunghezze di correlazione, rilevanti vicino al punto di transizione di fase.

A  $T = T_c$  (cioè  $m = 0$ ), il comportamento asintotico dell'integrale è:

$$\int d^D p p^{-4} \quad (11.2)$$

L'analisi dimensionale mostra tre regimi distinti per la divergenza:

- Per  $D > 4$  (**Alta dimensione**): L'integrale converge. In questo regime, il calore specifico  $C_v$  è **finito** e costante alla transizione. I termini che potrebbero divergere sono compensati e il risultato è regolare.
- Per  $D < 4$  (**Bassa dimensione**): L'integrale diverge per  $p \rightarrow 0$ . L'analisi di scala (studiando la dipendenza dalla distanza dal punto critico  $m^2 \sim 1 - 2D\beta$ ) mostra che la divergenza segue una legge di potenza:

$$C_v \sim (1 - 2D\beta)^{\frac{D-4}{2}} \quad (11.3)$$

Poiché  $D < 4$ , l'esponente è negativo e  $C_v$  diverge quando  $\beta \rightarrow \beta_c$ .

- Per  $D = 4$  (**Dimensione critica**): Questa è la "dimensione marginale". L'integrale produce una **divergenza logaritmica**:

$$C_v \sim \log(1 - 2D\beta) \quad (11.4)$$

## 11.2 Lunghezza di Correlazione $\xi$ e Esponente $\nu$

La teoria di campo medio (MFA) non cattura solo le divergenze, ma anche l'emergere di una scala di lunghezza fondamentale.

### 11.2.1 Decadimento Esponenziale e Divergenza di $\xi$

Lontano dalla criticità (per  $T > T_c$ ), la funzione di correlazione  $\langle \sigma_l \sigma_k \rangle$  (o  $A_{lk}$ ) decade **esponenzialmente** con la distanza  $l = |l - k|$ :

$$\langle \sigma_l \sigma_k \rangle \propto e^{-l/\xi} \quad \text{per } l \rightarrow \infty \quad (11.5)$$

dove  $\xi$  è la **lunghezza di correlazione**. Questo è coerente con il propagatore che abbiamo trovato,  $\tilde{G}_0(p) \sim \frac{1}{(p^2 + m^2)}$ , dove  $m^2$  agisce come una massa (o gap).

Il calcolo mostra che  $\xi$  stessa dipende dalla distanza dalla temperatura critica:

$$\xi \sim (1 - 2D\beta)^{-1/2} = \left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right)^{-1/2} \quad (11.6)$$

Questo risultato è fondamentale:

- La lunghezza di correlazione  $\xi$  **diverge** quando  $\beta \rightarrow \beta_c$  (cioè  $T \rightarrow T_c$ ).
- La divergenza segue una **legge di potenza**.

Definiamo l'esponente critico  $\nu$  tramite la relazione  $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$ . Confrontando, troviamo che in teoria di campo medio:

$$\nu_{MF} = \frac{1}{2} \quad (11.7)$$

Il meccanismo della transizione di fase è quindi legato alla divergenza di  $\xi$ . Avvicinandosi a  $T_c$ ,  $\xi$  cresce. Esattamente a  $T_c$ ,  $\xi = \infty$ ; il decadimento esponenziale  $e^{-l/\xi}$  scompare e lascia posto a un decadimento più lento, secondo una legge di potenza, che governa il punto critico.

### 11.2.2 Dimensione Critica Superiore e Universalità

L'analisi del calore specifico ci ha mostrato che  $D = 4$  è una dimensione speciale.

- **Dimensione Critica Superiore ( $D_c^u = 4$ )**
  - Per  $D > 4$ , la teoria di campo medio è *esatta*. Gli esponenti critici coincidono con quelli reali.
  - Per  $D \leq 4$ , la MFA non è più esatta e gli esponenti reali differiscono (ad esempio in  $D = 2, 3$ ).
- **Universalità**: Il concetto di **universalità** stabilisce che gli esponenti critici non dipendono dai dettagli microscopici del sistema (es. la forma esatta del reticolo o il valore di  $J$ ), ma solo da tre proprietà fondamentali:

1. La **dimensionalità**  $D$  del sistema.
2. Le **simmetrie** dell'Hamiltoniana (per il modello di Ising, è la simmetria  $Z_2$  globale  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ ).
3. La **natura della variabile elementare**. Ad esempio, il numero di componenti  $n$  della variabile di spin (Ising  $n = 1$ , XY  $n = 2$ , Heisenberg  $n = 3$ ).

## 11.3 Limite $D \rightarrow \infty$ e Funzioni di Bessel

**Nota:** Il seguente calcolo non è parte del curriculum standard richiesto per l'esame, ma è riservato a chi aspira alla lode.

Vogliamo ora dimostrare che la teoria di campo medio (MFA) è esatta nel limite  $D \rightarrow \infty$ . Questo limite è simile al modello "infinite-range" (dove tutti gli spin interagiscono con tutti).

**Obiettivo:** Calcolare la funzione di correlazione  $\langle \sigma_l \sigma_k \rangle$  a distanza  $n = |l - k|$  fissa, nel limite  $D \rightarrow \infty$ .

Dimostreremo che  $\langle \sigma_l \sigma_k \rangle \rightarrow 0$  per  $n \geq 1$ , implicando che gli spin diventano completamente scorrelati, che è l'assunzione di base della MFA.

### 11.3.1 Impostazione del Calcolo

Prendiamo il limite  $D \rightarrow \infty$  mantenendo fissa la quantità  $\tilde{\beta} = 2\beta D$ .

Per semplicità, scegliamo una separazione  $n$  puramente lungo una direzione (ad es. l'asse  $x$ ):

$$l - k = (n, 0, \dots, 0) \implies l_x - k_x = n, \quad l_\alpha - k_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \neq x \quad (11.8)$$

La funzione di correlazione  $G_0(n) = \langle \sigma_l \sigma_k \rangle$  è l'antitrasformata di Fourier del propagatore  $\tilde{G}_0(p)$ :

$$G_0(n) = \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(p) e^{ip \cdot (l-k)} = \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{inp_x}}{1 - 2\beta \sum_{a=1}^D \cos(p_a)} \quad (11.9)$$

Per calcolare l'integrale della funzione di Green  $G_0(n)$ , utilizziamo un'identità che trasforma il denominatore in un'esponenziale. Partiamo dalla definizione della funzione Gamma  $\Gamma(\gamma)$ :

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty dy \, y^{\gamma-1} e^{-y} \quad (11.10)$$

Consideriamo l'identità:

$$A^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty dz \, z^{\gamma-1} e^{-Az} \quad (11.11)$$

Possiamo verificarla con la sostituzione  $y = zA$ :

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \left( \frac{dy}{A} \right) \left( \frac{y}{A} \right)^{\gamma-1} e^{-y} = \frac{A^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty dy \, y^{\gamma-1} e^{-y} = \frac{A^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \cdot \Gamma(\gamma) = A^{-\gamma}$$

A noi serve il caso  $\gamma = 1$ . Poiché  $\Gamma(1) = 0! = 1$ , l'identità si semplifica notevolmente:

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty d\mu e^{-A\mu} \quad (11.12)$$

Applichiamo l'identità integrale 11.12 a  $G_0(n)$ :

$$G_0(n) = \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{inp_x} \left[ \int_0^\infty d\mu e^{-\mu(1-2\beta \sum_a \cos p_a)} \right] \quad (11.13)$$

Sostituiamo  $2\beta = \tilde{\beta}/D$  e invertiamo l'ordine di integrazione. L'esponenziale viene riorganizzato:

$$G_0(n) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \int_{BZ} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{\frac{\mu\tilde{\beta}}{D} \sum_a \cos(p_a) + inp_x} \quad (11.14)$$

L'integrale sullo spazio dei momenti  $d^D p$  ora si fattorizza in  $D$  integrali indipendenti, uno per ogni componente  $p_a$ .

### 11.3.2 Funzioni di Bessel Modificate

Questi integrali sono definizioni standard delle **funzioni di Bessel modificate** di ordine intero  $I_n(z)$ :

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) \quad (11.15)$$

Utilizzando la simmetria e  $e^{in\theta}$ , una forma equivalente è:

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\theta e^{z \cos \theta + in\theta} \quad (11.16)$$

Applichiamo questa definizione ai nostri  $D$  integrali (ponendo  $z = \mu\tilde{\beta}/D$ ):

- Per le  $D - 1$  direzioni  $\alpha \neq x$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi dp_\alpha e^{z \cos(p_\alpha)} = I_0(z) \quad (11.17)$$

- Per la direzione  $x$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi dp_x e^{z \cos(p_x) + inp_x} = I_n(z) \quad (11.18)$$

$G_0(n)$  diventa:

$$G_0(n) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \left[ I_0 \left( \frac{\mu\tilde{\beta}}{D} \right) \right]^{D-1} I_n \left( \frac{\mu\tilde{\beta}}{D} \right) \quad (11.19)$$

### 11.3.3 Espansione per $D \rightarrow \infty$

Per analizzare il limite  $D \rightarrow \infty$ , usiamo le espansioni in serie di Taylor delle funzioni di Bessel per argomento piccolo  $z \rightarrow 0$  (poiché  $z = \mu\tilde{\beta}/D \rightarrow 0$ ):

- $I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \mathcal{O}(z^4) \approx 1$
- $I_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^n + \mathcal{O}(z^{n+2})$

Sostituiamo queste approssimazioni nell'integrale:

$$G_0(n) \sim \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} 1^{D-1} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\mu\tilde{\beta}}{2D}\right)^n \quad (11.20)$$

Portiamo fuori i termini costanti:

$$G_0(n) \sim \left(\frac{\tilde{\beta}}{2D}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \mu^n \quad (11.21)$$

L'integrale rimanente è la definizione della funzione Gamma,  $\int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \mu^n = \Gamma(n+1)$ .

$$G_0(n) \sim \left(\frac{\tilde{\beta}}{2D}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \Gamma(n+1) \quad (11.22)$$

$$G_0(n) \sim \left(\frac{\tilde{\beta}}{2D}\right)^n \quad \text{per } D \rightarrow \infty \quad (11.23)$$

Questo risultato mostra che la funzione di correlazione a distanza  $n$  fissata decade come  $(1/D)^n$ . Per  $n \geq 1$  e  $D \rightarrow \infty$ ,  $G_0(n) \rightarrow 0$ . Gli spin sono correlati solo con se stessi ( $n = 0$ ) e diventano completamente scorrelati a qualsiasi distanza  $n \geq 1$ , confermando che la MFA è esatta in questo limite.

## 11.4 Decadimento Esponenziale lontano da $T_c$

Vogliamo ora dimostrare rigorosamente quanto affermato in precedenza: se non siamo al punto critico ( $\beta \neq \beta_c$ ), le funzioni di correlazione decadono esponenzialmente con la distanza.

### 11.4.1 Teorema sulla Trasformata di Fourier

Utilizziamo un teorema fondamentale dell'analisi complessa sul comportamento asintotico delle trasformate di Fourier.

Data una funzione analitica  $f(p)$ , il comportamento asintotico (per  $n \rightarrow \infty$ ) della sua antitrasformata  $F(n) = \int dp f(p) e^{inp}$  è dominato dalla **singolarità** di  $f(p)$  più vicina all'asse reale.

Se la singolarità più vicina si trova in  $p = ip_s$  (nel piano complesso):

$$F(n) = \int_{-\pi}^{\pi} dp f(p) e^{inp} \approx e^{-nps} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (11.24)$$

Confrontando con il decadimento fisico  $e^{-n/\xi}$ , identifichiamo:

$$\xi = \frac{1}{p_s} \quad (11.25)$$

### 11.4.2 Applicazione a $G_0(n)$

Dobbiamo trovare la singolarità di  $\tilde{G}_0(p)$  più vicina all'asse reale. Riscriviamo  $G_0(n)$  (con separazione  $n$  solo lungo  $x$ ):

$$G_0(n) = (2\pi)^{-D} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x e^{inp_x} \left[ \int \left( \prod_{\mu=2}^D \frac{dp_\mu}{2\pi} \right) \frac{1}{1 - 2\beta(\cos p_x + \sum_{\mu=2}^D \cos p_\mu)} \right] \quad (11.26)$$

Chiamiamo  $p_x \equiv p$  e  $g(p)$  la funzione tra parentesi quadre. Dobbiamo trovare la singolarità  $p = ip_s$  di  $g(p)$ . Una singolarità in  $g(p)$  si verifica quando il denominatore dell'integrandi,  $1 - 2\beta(\cos p + \sum \cos p_\mu)$ , diventa zero.

Intuitivamente, la singolarità più vicina all'asse reale ( $p \in \mathcal{R}$ ) si avrà quando anche le altre variabili  $p_\mu$  sono alle loro singolarità, cioè  $p_\mu \rightarrow 0$ .

#### Calcolo della Singolarità

Poniamo  $p_\mu = 0$  per  $\mu = 2, \dots, D$  e cerchiamo  $p = ip_s$ :

$$1 - 2\beta \left( \cos(ip_s) + \sum_{\mu=2}^D \cos(0) \right) = 0 \quad (11.27)$$

$$1 - 2\beta \cos(ip_s) - 2\beta(D-1) = 0 \quad (11.28)$$

Risolviamo per  $\cos(ip_s)$ :

$$\cos(ip_s) = \frac{1}{2\beta} - D + 1 = 1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} \quad (11.29)$$

Poiché  $\frac{1-2\beta D}{2\beta}$  è piccolo vicino a  $T_c$ , possiamo sfruttare la relazione  $\arccos(1+x) \approx i\sqrt{2x}$  per  $x \rightarrow 0$ :

$$ip_s = \arccos \left( 1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} \right) \approx i\sqrt{\frac{1 - 2\beta D}{\beta}} \quad (11.30)$$

$$p_s = \left( \frac{1 - 2\beta D}{\beta} \right)^{1/2} = \xi^{-1} \quad \beta \rightarrow \beta_c \quad (11.31)$$

#### Verifica della Singolarità

Dobbiamo verificare che la scelta  $p_\mu = 0$  per  $\mu \geq 2$  identifichi davvero la singolarità più vicina all'asse reale. Ipotizziamo che i momenti nelle direzioni trasversali non siano nulli, ma piccoli, dell'ordine di  $\epsilon$ :

$$p_\mu = \mathcal{O}(\epsilon) \neq 0 \quad \text{per } \mu = 2, \dots, D \quad (11.32)$$

L'equazione che definisce la singolarità diventa:

$$1 - 2\beta \left( \cos(i\tilde{p}_s) + \sum_{\mu=2}^D \cos p_\mu \right) = 0 \quad (11.33)$$

Espandiamo i coseni per piccoli argomenti, usando  $\cos(\epsilon) \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2}$

L'equazione si riscrive come:

$$1 - 2\beta \cos(i\tilde{p}_s) - 2\beta(D-1) + 2\beta \sum_{\mu=2}^D \frac{\epsilon^2}{2} = 0 \quad (11.34)$$

Poiché ci sono  $D-1$  termini nella somma, l'ultimo termine diventa  $\beta(D-1)\epsilon^2$ .

Riorganizzando i termini per isolare la parte dipendente da  $\tilde{p}_s$ :

$$2\beta \cos(i\tilde{p}_s) = 1 - 2\beta(D-1) + \beta\epsilon^2(D-1) \quad (11.35)$$

Risolvendo per  $i\tilde{p}_s$  e utilizzando l'espansione dell'arcocoseno per argomenti vicini a 1, otteniamo l'espressione per la nuova singolarità  $\tilde{p}_s$ :

$$i\tilde{p}_s \sim i\sqrt{\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right) + \epsilon^2(D-1)} \quad (11.36)$$

Osserviamo il termine sotto radice. Il primo termine,  $\frac{1}{\beta}(1 - \frac{\beta}{\beta_c})$ , corrisponde alla singolarità originale  $p_s^2$  (con  $p_\mu = 0$ ). Il secondo termine  $\epsilon^2(D-1)$  è **positivo** per  $D > 1$ .

Questo implica che  $|\tilde{p}_s| > |p_s|$ . L'introduzione di un momento trasversale  $\epsilon \neq 0$  sposta la singolarità *più lontano* dall'asse reale rispetto al caso  $p_\mu = 0$ . Concludiamo quindi che la singolarità dominante (quella più vicina all'asse reale che determina il decadimento esponenziale) è proprio quella con tutti i momenti trasversali nulli, confermando il risultato precedente.

### Conclusioni e Esponente $\nu$

Abbiamo determinato che la lunghezza di correlazione è data dall'inverso della singolarità dominante:

$$\xi = \frac{1}{p_s} = \left(\frac{1-2D\beta}{\beta}\right)^{-1/2} \quad (11.37)$$

Analizziamo il comportamento vicino alla temperatura critica  $T_c$ . Poiché  $1-2D\beta$  si annulla a  $\beta_c$ , questo termine è proporzionale alla distanza dalla temperatura critica:

$$1-2D\beta \propto (T-T_c) \quad (11.38)$$

Di conseguenza, la lunghezza di correlazione diverge a  $T_c$  come:

$$\xi \sim (T-T_c)^{-1/2} \quad (11.39)$$

Confrontando questo risultato con la definizione dell'esponente critico  $\nu$ , data dalla relazione  $\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$ , otteniamo il valore per la teoria di campo medio:

$$\nu_{MF} = \frac{1}{2} \quad (11.40)$$

Questo calcolo mostra esplicitamente il meccanismo della transizione: avvicinandosi a  $T_c$ , la lunghezza di correlazione  $\xi$  aumenta, i domini di spin correlati diventano sempre più grandi fino a divergere al punto critico, dove il decadimento esponenziale viene sostituito da un decadimento a legge di potenza.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 12

Data: 03/11/2025

## 12.1 Validità di MFA e Fenomenologia delle Fluttuazioni

Abbiamo completato il lavoro di stima e calcolo degli esponenti critici nell'ambito della Teoria di Campo Medio (Mean Field Theory - MFA). È fondamentale ora discutere l'ambito di validità di questi risultati e come essi si confrontino con la realtà fisica in diverse dimensioni. Gli esponenti calcolati in MFA risultano essere *esatti* quando la dimensione del sistema  $D$  è maggiore di una certa dimensione critica superiore, che per il modello di Ising è  $D_c = 4$ . In dimensioni inferiori ( $D < 4$ , e in particolare per le dimensioni fisiche  $D = 3$  e  $D = 2$ ), la struttura qualitativa della transizione di fase rimane la stessa, ma i valori numerici degli esponenti cambiano a causa delle fluttuazioni che la teoria di campo medio trascura.

Un parametro centrale in questa analisi è l'esponente  $\nu$ , che governa la divergenza della lunghezza di correlazione  $\xi$ . In approssimazione di campo medio, questo vale:  $\nu_{MF} = \frac{1}{2}$

La lunghezza di correlazione media diverge vicino alla temperatura critica  $T_c$  secondo la legge:

$$\xi \sim |T - T_c|^\nu \quad \text{per } T \rightarrow T_c^+ \tag{12.1}$$

### 12.1.1 Comportamento delle Funzioni di Correlazione

Lontano dal punto critico, o in fase disordinata, la funzione di correlazione  $C(x)$  decade esponenzialmente con la distanza:

$$C(x) \sim e^{-x/\xi} \tag{12.2}$$

Tuttavia, esattamente alla temperatura critica  $T = T_c$ , la lunghezza di correlazione  $\xi$  diverge all'infinito. In questo regime, l'isotropia viene ripristinata ( $T \sim T_0$ ) e le fluttuazioni implicano un decadimento più lento, di tipo a legge di potenza (power-law). La funzione di correlazione al punto critico si comporta come:

$$C(X)_{T=T_c} \sim \frac{1}{X^A} \tag{12.3}$$

Dove l'esponente  $A$  è legato alla dimensione dello spazio e alla cosiddetta **dimensione anomala**  $\eta$ . In termini più precisi, come vedremo,  $A = D - 2 + \eta$ .

### 12.1.2 Natura della Transizione di Fase

Analizziamo la natura della transizione nel diagramma di fase  $(T, m)$ .



**Figura 12.1:** Diagramma di fase  $(T, m)$ .

- Per  $T < T_c$  e  $h = 0$ , il sistema presenta una magnetizzazione spontanea  $m \neq 0$ . Passando attraverso  $h = 0$  (invertendo il campo), si ha una discontinuità nella magnetizzazione  $m$ . Questo identifica una **transizione di fase del primo ordine** in  $m$ .
- A  $T = T_c$ , la magnetizzazione spontanea svanisce con continuità.

Possiamo affermare che la **transizione di fase del secondo ordine** (che avviene a  $T_c$ ) rappresenta il punto terminale di una linea di transizioni di fase del primo ordine.

Vicino alla temperatura critica, il parametro d'ordine (la magnetizzazione) diventa molto piccolo. Definiamo il salto di magnetizzazione attraverso la transizione del primo ordine come:

$$\delta_m = m_+ - m_- = 2m_s \xrightarrow{T \rightarrow T_c^-} 0 \quad (12.4)$$

Contemporaneamente, la lunghezza di correlazione diverge:

$$\xi \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty \quad (12.5)$$

Questi due fenomeni sono intrinsecamente collegati: la scomparsa della barriera energetica tra gli stati (che porta a  $\delta_m \rightarrow 0$ ) è associata all'aumento della scala su cui le fluttuazioni sono correlate.

### 12.1.3 Argomento della "Bolla" e Energia delle Fluttuazioni

Consideriamo il sistema a bassa temperatura. Immaginiamo di essere in una fase magnetizzata (ad esempio spin tutti up) e di creare una fluttuazione macroscopica, una "bolla" di raggio lineare  $R$  con spin opposti (down).

La differenza di energia libera associata alla creazione di questa bolla rispetto al sistema omogeneo è data da:

$$\Delta F = F_{bubble} - F_{homog} \quad (12.6)$$

Questa differenza energetica è dominata dall'interfaccia tra la bolla e il resto del sistema. Gli spin all'interno della bolla sono "felici" (allineati tra loro), così come quelli fuori. **Il costo energetico si paga sul bordo, dove gli spin sono disallineati.** In una sfera  $D$ -dimensionale, la superficie scala come  $R^{D-1}$ . Il costo energetico è proporzionale alla superficie e alla magnetizzazione:

$$\Delta F \sim E_{bubble} - E_{nobubble} \propto R^{D-1} m_s^\alpha \quad (12.7)$$

con  $\alpha > 0$ .

Definiamo una dimensione tipica  $R_c$  per le bolle a una data temperatura  $T$ . Possiamo legare la dimensione critica della bolla alla magnetizzazione spontanea. Affinché le fluttuazioni siano rilevanti, il costo energetico deve essere comparabile all'energia termica. Dalla relazione precedente si evince una legge di scala:

$$R_c^{D-1} m_s^\alpha = \text{cost.} \quad (12.8)$$

$$R_c^{D-1}(m_s) \sim \tilde{m}^{-\frac{\alpha}{(D-1)}} \quad (12.9)$$

Questo ci dice che quando ci avviciniamo al punto critico, dove la magnetizzazione spontanea tende a zero ( $m_s \rightarrow 0$ ), la dimensione caratteristica delle fluttuazioni (la dimensione delle bolle o lunghezza di correlazione) deve divergere:

$$m_s \rightarrow 0 \implies R_c \sim \xi \rightarrow \infty \quad (12.10)$$

#### 12.1.4 Potenziale Efficace e Suscettività

Ritornando al potenziale termodinamico (energia libera di Gibbs o potenziale efficace)  $\varphi(m, T)$ , le condizioni di equilibrio e stabilità sono date dalle derivate:

$$\varphi'(m, T) = h \quad (12.11)$$

Nel limite  $m \rightarrow 0$  (vicino a  $T_c$ ), la curvatura del potenziale si annulla:

$$\varphi''(m, T) = 0 \quad (12.12)$$

La suscettività magnetica  $\chi$  è inversamente proporzionale alla curvatura del potenziale. Di conseguenza, al punto critico:

$$\chi \propto (\varphi'')^{-1} \rightarrow \infty \quad (12.13)$$

Questo implica che ci sono correlazioni collegate su scale di lunghezza sempre maggiori quando ci si avvicina a  $T_c$ . A  $T = T_c$ , avendo  $R_c = \infty$ , le fluttuazioni non decadono più esponenzialmente ma seguono una legge di potenza.

## 12.2 Riepilogo degli Esponenti Critici (MFA)

Ricapitoliamo i valori degli esponenti critici derivati nell'approssimazione di campo medio validi per  $D \geq D_c = 4$ :

1. Lunghezza di correlazione ( $T \rightarrow T_c$ ):

$$\xi(T)_{h=0} \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \rightarrow \quad \nu_{MF} = \frac{1}{2} \quad (12.14)$$

2. Funzione di correlazione al punto critico ( $T = T_c$ ):

$$G_0(n)_{T=T_c, h=0} \simeq n^{-(D-2+\eta)} \quad \rightarrow \quad \eta_{MF} = 0 \quad (12.15)$$

$\eta$  è detta **dimensione anomala**.

3. Magnetizzazione spontanea ( $T \rightarrow T_c^-$ ):

$$m(T)_{h=0} \sim |T - T_c|^\beta \quad \rightarrow \quad \beta_{MF} = 1/2 \quad (12.16)$$

4. Suscettività ( $T \rightarrow T_c$ ):

$$\chi(T) \simeq |T - T_c|^{-\gamma} \quad \rightarrow \quad \gamma_{MF} = 1 \quad (12.17)$$

5. Calore specifico ( $T \rightarrow T_c$ ):

$$C_v(T)_{h=0} \simeq |T - T_c|^{-\alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha_{MF} = 4 - D \quad (12.18)$$

6. Isoterma critica ( $T = T_c$ ):

$$m(h)_{T=T_c} \simeq |h|^{1/\delta} \quad \rightarrow \quad \delta_{MF} = 3 \quad (12.19)$$

## 12.3 Integrali Gaussiani

Per procedere oltre la teoria di campo medio e sviluppare la teoria delle perturbazioni, gli integrali gaussiani costituiranno la base fondamentale dei nostri calcoli. È essenziale padroneggiare la loro risoluzione sia in una che in  $N$  dimensioni.

### 12.3.1 Integrale Gaussiano 1D

Consideriamo l'integrale gaussiano standard:

$$G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \quad (12.20)$$

Per calcolarlo, si utilizza il trucco di calcolare il suo quadrato, passando alle coordinate polari  $(r, \theta)$  nel piano, dove  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$G^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} \quad (12.21)$$

Cambiando variabili in coordinate polari ( $dxdy = rdrd\theta$ ):

$$= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \quad (12.22)$$

Notiamo che la derivata dell'esponente è  $\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$ , quindi l'integrale in  $dr$  è immediato:

$$2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = 2\pi \left( 0 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \pi \quad (12.23)$$

Quindi:

$$G^2 = \pi \implies G = \sqrt{\pi} \quad (12.24)$$

Generalizzando a un integrale con coefficienti  $a$  e  $b$ :

$$\tilde{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} \quad (12.25)$$

github.com/elisabettagnello

# Lezione 13

Data: 05/11/2025

## 13.1 Integrale Gaussiano

Iniziamo questa lezione completando la derivazione dell'integrale gaussiano  $N$ -dimensionale, argomento introdotto al termine della lezione precedente. Questo strumento matematico sarà fondamentale per la teoria delle perturbazioni che affronteremo in seguito.

### Integrale Gaussiano 1D

Ricordiamo brevemente il risultato per l'integrale gaussiano in una dimensione. La forma base è:

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (13.1)$$

Consideriamo la forma più generale, che include un fattore di scala  $a > 0$  e un termine lineare  $b$ :

$$\tilde{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx \quad (13.2)$$

Per risolvere questo integrale, utilizziamo il metodo del *completamento del quadrato* all'esponente:

$$-ax^2 + bx = -a \left( x^2 - \frac{b}{a}x \right) = -a \left( x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} \quad (13.3)$$

Sostituendo nell'integrale (13.2), il termine costante  $e^{b^2/4a}$  può essere portato fuori:

$$\tilde{G} = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right] dx \quad (13.4)$$

Effettuando il cambio di variabile  $u = \sqrt{a}(x - b/2a)$ , si ottiene il risultato noto:

#### Integrale Gaussiano 1D

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \quad (13.5)$$

### 13.1.1 Integrale N-Dimensionale

Vogliamo ora risolvere l'estensione a  $N$  dimensioni:

$$I[\vec{J}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dX_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dX_N \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{X}^T A \vec{X} + \vec{J}^T \vec{X}\right) \quad (13.6)$$

dove:

- $\vec{X}$  è un vettore colonna di  $N$  coordinate  $(X_1, \dots, X_N)$ .
- $\vec{J}$  è un vettore colonna di  $N$  termini "sorgente"  $(J_1, \dots, J_N)$ .
- $A$  è una matrice  $N \times N$  reale e simmetrica.

Poiché la matrice  $A$  è reale e simmetrica, essa può essere diagonalizzata tramite una matrice ortogonale  $\mathcal{O}$ :

$$A = \mathcal{O}^T D \mathcal{O} \quad (13.7)$$

dove  $D$  è la matrice diagonale contenente gli autovalori  $D_{ii}$  e  $\mathcal{O}$  è una matrice ortogonale di rotazione tale che  $\mathcal{O}^T \mathcal{O} = I$  e  $\det(\mathcal{O}) = 1$ .

Procediamo con un cambio di variabili, ruotando il sistema di coordinate per allinearla agli autovettori di  $A$ :

$$\vec{Y} = \mathcal{O} \vec{X} \implies \vec{X} = \mathcal{O}^T \vec{Y} \quad (13.8)$$

Analizziamo come si trasformano i termini all'esponente:

#### 1. Termine Quadratico:

$$\vec{X}^T A \vec{X} = (\vec{Y}^T \mathcal{O})(\mathcal{O}^T D \mathcal{O})(\mathcal{O}^T \vec{Y}) = \vec{Y}^T (\mathcal{O} \mathcal{O}^T) D (\mathcal{O} \mathcal{O}^T) \vec{Y} = \sum_{i=1}^N D_{ii} Y_i^2 \quad (13.9)$$

#### 2. Termine Lineare:

$$\vec{J}^T \vec{X} = \vec{J}^T (\mathcal{O}^T \vec{Y}) = (\mathcal{O} \vec{J})^T \vec{Y} \quad (13.10)$$

Definiamo il vettore sorgente ruotato come  $\vec{J}' = \mathcal{O} \vec{J}$ . Il termine lineare diventa quindi  $\sum_{i=1}^N J'_i Y_i$ .

Poiché la trasformazione è una rotazione rigida ( $\det \mathcal{O} = 1$ ), l'elemento di volume rimane invariato:  $d^N X = d^N Y$ .

Sostituendo le nuove variabili nell'integrale originale, questo si **fattorizza** nel prodotto di  $N$  integrali gaussiani indipendenti:

$$I[\vec{J}] = \prod_{i=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dY_i \exp\left(-\frac{1}{2}D_{ii}Y_i^2 + J'_i Y_i\right) \right] \quad (13.11)$$

Utilizzando il risultato 1D (eq. 13.5) con  $a = D_{ii}/2$  e  $b = J'_i$ , otteniamo per ogni termine:

$$\sqrt{\frac{\pi}{D_{ii}/2}} \exp\left(\frac{(J'_i)^2}{4(D_{ii}/2)}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{D_{ii}}} \exp\left(\frac{(J'_i)^2}{2D_{ii}}\right) \quad (13.12)$$

Il prodotto totale è quindi:

$$I[\vec{J}] = \left( \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{D_{ii}}} \right) \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{(J'_i)^2}{2D_{ii}}\right) \quad (13.13)$$

Ora dobbiamo riscrivere questo risultato in termini delle matrici originali  $A$  e  $\vec{J}$ .

- **Prefattore:** Il prodotto degli autovalori è il determinante:

$$\prod D_{ii} = \det(D) = \det(A) \quad (13.14)$$

Quindi il prefattore diventa  $\sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det A}}$ .

- **Esponente:** La somma può essere scritta in forma matriciale come  $\frac{1}{2}\vec{J}'^T D^{-1} \vec{J}'$ . Sostituendo  $\vec{J}' = \mathcal{O}\vec{J}$ , otteniamo:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{O}\vec{J})^T D^{-1}(\mathcal{O}\vec{J}) = \frac{1}{2}\vec{J}'^T (\mathcal{O}^T D^{-1} \mathcal{O}) \vec{J}' \quad (13.15)$$

Riconosciamo che  $\mathcal{O}^T D^{-1} \mathcal{O} = A^{-1}$  (l'inverso della matrice originale).

Otteniamo così la formula fondamentale per l'integrazione funzionale gaussiana:

### Integrale Gaussiano N-Dimensionale

$$\int d^N X \exp \left( -\frac{1}{2} \vec{X}^T A \vec{X} + \vec{J}'^T \vec{X} \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(A)}} \exp \left( \frac{1}{2} \vec{J}'^T A^{-1} \vec{J}' \right) \quad (13.16)$$

## 13.2 Espansione a Bassa Temperatura del Modello di Ising

Abbandoniamo momentaneamente gli integrali per introdurre un nuovo metodo di analisi: l'**espansione a bassa temperatura**. L'idea è studiare il comportamento del sistema vicino allo stato fondamentale ( $T = 0$ ), dove regna l'ordine perfetto, trattando la temperatura finita come una piccola perturbazione.

### Setup del Modello

Consideriamo il modello di Ising definito su un **Reticolo Cubico Semplice** in  $D$  dimensioni, composto da  $N = L^D$  siti. Assumiamo Condizioni al Bordo Periodiche (PBC). Lo stato fondamentale è quello in cui tutti gli spin sono allineati. Senza perdere di generalità, assumiamo  $\sigma_i = +1$  ovunque.

L'energia dello stato fondamentale (con  $K = 0$  spin flippati) è:

$$E_0 = -J \times (\text{Numero totale di link}) = -DNJ \quad (13.17)$$

Per semplicità, nel seguito porremo  $J = 1$ , quindi  $E_0 = -DN$ .

### 13.2.1 Calcolo delle Eccitazioni (K=0, 1, 2)

Un'espansione a bassa temperatura è un'espansione in termini di "eccitazioni" sopra lo stato fondamentale. Un'eccitazione corrisponde a un certo numero  $K$  di spin invertiti.

#### K = 0 (Stato Fondamentale)

- **Configurazioni:** 1 (tutti spin +1).
- **Energia:**  $E_0 = -DN$ .

#### K = 1 (Uno spin invertito)

- **Configurazioni:** Ci sono  $N$  modi possibili di scegliere quale spin invertire.
- **Energia:** Invertendo uno spin  $\sigma_i$  da +1 a -1, modifichiamo l'interazione con i suoi  $2D$  primi vicini.
  - Ogni link collegato a  $\sigma_i$  passa da un'energia -1 (allineati) a +1 (disallineati). Il costo energetico per link è  $\Delta E_{\text{link}} = 2$ .
  - La variazione totale di energia è  $\Delta E_1 = (2D \text{ link}) \times 2 = 4D$ .
  - Energia totale:  $E_1 = E_0 + 4D$ .

## K = 2 (Due spin invertiti)

Il numero totale di modi per scegliere due spin è dato dal coefficiente binomiale  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ . Dobbiamo distinguere due casi topologicamente diversi:

### Caso 1: Spin non adiacenti (Non Primi Vicini)

Se i due spin invertiti sono lontani tra loro, non interagiscono direttamente.

- **Configurazioni:**  $\binom{N}{2} - (\text{coppie adiacenti}) = \frac{N(N-1)}{2} - DN$ .
- **Energia:** Poiché sono isolati, il costo energetico è semplicemente la somma di due eccitazioni singole.
  - $\Delta E_{2,\text{non-adj}} = 4D + 4D = 8D$ .
  - Energia totale:  $E_{2,\text{non-adj}} = E_0 + 8D$ .

### Caso 2: Spin adiacenti (Primi Vicini)

I due spin invertiti si trovano uno accanto all'altro.

- **Configurazioni:** Il numero di coppie di primi vicini corrisponde al numero totale di link nel reticolo, ovvero  $DN$ .
- **Energia:** Se trattassimo gli spin come isolati, il costo sarebbe  $8D$ . Tuttavia, il link che connette i due spin invertiti ora collega due spin  $-1$  e  $-1$ . Questo link è *soddisfatto* (energia  $-1$ ), non rotto. Rispetto al calcolo "isolato" (dove avremmo pagato per rompere quel link sia dal punto di vista del primo spin che del secondo), "risparmiamo" energia.
  - Il costo energetico effettivo è:  $\Delta E_{2,\text{adj}} = 8D - 4$ .
  - Energia totale:  $E_{2,\text{adj}} = E_0 + 8D - 4$ .

### 13.2.2 Espansione della Funzione di Partizione

La funzione di partizione è  $Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H(\sigma)}$ . Raggruppiamo la somma in base al numero  $K$  di spin invertiti:

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \quad (13.18)$$

Sostituendo i termini calcolati:

$$Z_0 = 1 \cdot e^{-\beta E_0} \quad (13.19)$$

$$Z_1 = N \cdot e^{-\beta(E_0+4D)} = Ne^{-\beta E_0} e^{-4\beta D} \quad (13.20)$$

$$Z_2 = \underbrace{DN e^{-\beta(E_0+8D-4)}}_{\text{Adiacenti}} + \underbrace{\left( \frac{N^2 - N - 2DN}{2} \right) e^{-\beta(E_0+8D)}}_{\text{Non Adiacenti}} \quad (13.21)$$

Raccogliamo  $e^{-\beta E_0}$ :

$$Z = e^{-\beta E_0} \left[ 1 + Ne^{-4\beta D} + DN e^{-8\beta D} e^{4\beta} + \left( \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - DN \right) e^{-8\beta D} + \dots \right] \quad (13.22)$$

Introduciamo il parametro di espansione piccolo per basse temperature:

$$t \equiv e^{-4\beta} \quad (13.23)$$

Possiamo riscrivere i termini esponenziali usando  $t$ :

- $e^{-4\beta D} = t^D$
- $e^{-8\beta D} = t^{2D}$
- $e^{-8\beta D}e^{4\beta} = t^{2D}t^{-1} = t^{2D-1}$

L'espansione di  $Z$  diventa:

$$Z = e^{-\beta E_0} \left[ 1 + \underbrace{Nt^D}_{C_1} + \underbrace{DNt^{2D-1} + \left( \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - DN \right) t^{2D}}_{C_2} + \dots \right] \quad (13.24)$$

### 13.2.3 Densità di Energia Libera

La densità di energia libera è definita come  $f = -\frac{1}{\beta N} \log Z$ .

$$f = -\frac{1}{\beta N} [\log(e^{-\beta E_0}) + \log(1 + C_1 + C_2 + \dots)] \quad (13.25)$$

$$= -\frac{1}{\beta N} [-\beta E_0 + \log(1 + C_1 + C_2 + \dots)] \quad (13.26)$$

$$= -D - \frac{1}{\beta N} \log(1 + C_1 + C_2 + \dots) \quad (13.27)$$

(Ricordando che  $E_0 = -DN$ ).

Per calcolare il logaritmo, utilizziamo l'espansione di Taylor  $\log(1+x) \approx x - x^2/2$ , dove  $x = C_1 + C_2$ . Dobbiamo mantenere i termini fino all'ordine  $t^{2D}$ . Notiamo che  $C_1 \sim O(t^D)$ , quindi  $C_1^2 \sim O(t^{2D})$ .

$$\log(1 + C_1 + C_2) \approx C_1 + C_2 - \frac{1}{2}C_1^2 \quad (13.28)$$

Sostituiamo le espressioni di  $C_1$  e  $C_2$ :

- $C_1 = Nt^D$
- $C_2 = DNt^{2D-1} + \frac{N^2}{2}t^{2D} - \frac{N}{2}t^{2D} - DNt^{2D}$
- $-\frac{1}{2}C_1^2 = -\frac{1}{2}(Nt^D)^2 = -\frac{N^2}{2}t^{2D}$

Calcoliamo la somma all'interno del logaritmo:

$$\text{Somma} = Nt^D + DNt^{2D-1} + \frac{N^2}{2}t^{2D} - \frac{N}{2}t^{2D} - DNt^{2D} - \frac{N^2}{2}t^{2D} \quad (13.29)$$

#### Cancellazione dei Termini Non Estensivi

È cruciale notare che i termini proporzionali a  $N^2$  (termini non estensivi) si cancellano esattamente:

$$\frac{N^2}{2}t^{2D} - \frac{N^2}{2}t^{2D} = 0$$

Questa cancellazione garantisce che l'energia libera sia una quantità estensiva (o che la densità  $f$  sia intensiva e non dipenda da  $N$ ). Questo risultato è una manifestazione del *Linked Cluster Theorem*.

Rimangono solo i termini proporzionali a  $N$ :

$$\text{Somma} = N \left( t^D + Dt^{2D-1} - \frac{1}{2}t^{2D} - Dt^{2D} \right) \quad (13.30)$$

Sostituendo nella formula di  $f$  e dividendo per  $N$ , otteniamo il risultato finale per la densità di energia libera all'ordine  $K = 2$ :

**Energia Libera a Bassa Temperatura (K=2)**

$$f_{K=2} = -D - \frac{1}{\beta} \left[ t^D - \frac{1}{2}t^{2D} + D(t^{2D-1} - t^{2D}) \right] \quad (13.31)$$

dove  $t = e^{-4\beta}$ .

github.com/elisabettagnello

# Lezione 14

Data: 10/11/2025

## 14.1 Teorema dei Cluster Connessi

Riprendiamo il discorso iniziato nella lezione precedente riguardo l'espansione a bassa temperatura. In linea di principio, quando sviluppiamo la funzione di partizione, appaiono termini che scalano con potenze di  $N$  diverse da 1 (come  $N^2$ , ecc.). Tuttavia, la densità di energia libera deve essere una quantità intensiva e ben definita nel limite termodinamico.

La risoluzione di questo apparente paradosso risiede nel fatto che **tutti i termini che non scalano linearmente con  $N$  (ad esempio  $N^2$ ,  $N^3$ ) si cancellano esattamente** nell'espressione finale. Questo garantisce che  $f$  sia intensiva a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni.

### 14.1.1 Definizione e Contributo dei Cluster

Definiamo un **cluster** come un insieme di spin "flippati" connessi tra loro. Per "connessi" intendiamo che ogni spin del cluster è raggiungibile dagli altri attraverso passi tra primi vicini. Consideriamo il contributo di questi cluster allo sviluppo:

- Un singolo cluster connesso fornisce un contributo di ordine  $A \cdot N$ , dove  $A$  è una costante che racchiude tutta la parte non banale (dipendente dalla simmetria, dimensionalità, ecc.) e  $N$  rappresenta il volume del sistema (ovvero il numero di modi in cui possiamo posizionare il cluster traslando il punto di partenza).
- Consideriamo ora il caso di **copie separate (disconnesse)** dello stesso cluster. Se abbiamo  $n$  copie separate, in quanti modi possiamo posizionarle? In generale, per  $n$  copie, il fattore combinatorio sarà:

$$\frac{N^n}{n!} A^n \quad (14.1)$$

Il fattore  $n!$  deriva dall'indistinguibilità delle copie identiche.

### 14.1.2 Cancellazione dei Diagrammi Disconnessi

La funzione di partizione  $Z$  può essere vista come la somma su tutte le possibili configurazioni di questi cluster. L'espansione a bassa temperatura di  $Z$  (o meglio, della parte

rilevante per  $f$ ) assumerà la forma di una somma su  $n$  (numero di copie) di questi termini:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AN)^n}{n!} \longrightarrow e^{AN} \quad (14.2)$$

Riconosciamo qui la serie di Taylor dell'esponenziale. Quando calcoliamo l'energia libera per sito  $f_N$ , prendiamo il logaritmo di  $Z$ :

$$f_N \sim -\frac{1}{\beta N} \log(Z) \sim -\frac{1}{\beta N} \log \left( \sum_n \frac{(AN)^n}{n!} \right) \quad (14.3)$$

Grazie all'esponenziazione dei diagrammi disconnessi, otteniamo:

$$f_N \sim -\frac{1}{\beta N} \log(e^{AN}) = -\frac{1}{\beta N}(AN) = -\frac{A}{\beta} \quad (14.4)$$

Il termine  $N$  si semplifica. Questo risultato è noto come **Linked Cluster Theorem**.

### Linked Cluster Theorem

Solo i diagrammi connessi contribuiscono all'energia libera. I contributi dei diagrammi disconnessi si sommano in modo tale da ricostruire l'esponenziale dei diagrammi connessi, cancellandosi poi con il logaritmo. Se così non fosse, la teoria non sarebbe ben definita termodinamicamente.

## 14.2 Il Modello Gaussiano

Abbandoniamo il modello di Ising per introdurre un modello differente, ma cruciale per i nostri scopi futuri: il **Modello Gaussiano**. Questo modello ci servirà come "palestra" perché ci permetterà di fare calcoli esatti che nel modello di Ising sono impossibili, e scopriremo una connessione profonda con l'approssimazione di Campo Medio.

### Definizione del Modello

Nel modello Gaussiano, le variabili di spin non sono più discrete ( $\pm 1$ ) ma **reali continue**:

$$\sigma_i \in (-\infty, +\infty) \quad (14.5)$$

La differenza principale rispetto a un semplice rilassamento delle variabili di Ising sta nella distribuzione di probabilità a priori del singolo spin  $\rho(\sigma)$ .

- **Ising:** La distribuzione è la somma di due delta:  $\rho(\sigma) = \frac{1}{2}\delta(\sigma - 1) + \frac{1}{2}\delta(\sigma + 1)$ .
- **Gaussiano:** La distribuzione a priori è una gaussiana:

$$\rho(\sigma)d\sigma = \frac{e^{-\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\sigma \quad (14.6)$$

Scegliamo la normalizzazione in modo che il momento secondo sia unitario, per assumere a Ising:

$$\langle \sigma^2 \rangle = 1, \quad \langle \sigma^4 \rangle = 3, \quad \dots, \quad \langle \sigma^k \rangle = (k-1) \quad (\text{per } k \text{ pari}) \quad (14.7)$$

## Hamiltoniana e Funzione di Partizione

L'Hamiltoniana del sistema, in presenza di un campo esterno  $h_i$ , è:

$$H[\sigma] = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i \quad (14.8)$$

dove  $J_{ik}$  è la matrice di adiacenza (1 se  $|i - k| = 1$ , 0 altrimenti).

La funzione di partizione  $Z$  si ottiene integrando su tutte le configurazioni, includendo il peso gaussiano a priori  $e^{-\sigma_i^2/2}$ :

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \left( \prod_i d\sigma_i \right) \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{ik} \sigma_i J_{ik} \sigma_k + \beta \sum_i h_i \sigma_i - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 \right\} \equiv \int d\mu \quad (14.9)$$

Notiamo che il termine  $-\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2$  serve a garantire la convergenza dell'integrale (termine di massa).

Identifichiamo con  $\int d\mu$  la misura su cui integrare.

### 14.2.1 L'Integrale Gaussiano Multidimensionale

Per trattare questo problema in generale, introduciamo una notazione matriciale più compatta. Consideriamo l'integrale su variabili  $x_i$  (che corrispondono ai nostri  $\sigma_i$ ) governato da una matrice  $A$  simmetrica e definita positiva:

$$I = \int \left( \prod_i dx_i \right) \exp \left\{ - \left[ \frac{1}{2} \sum_{ik} x_i A_{ik} x_k + \sum_i b_i x_i \right] \right\} \quad (14.10)$$

Attenzione ai segni: nel nostro caso fisico, la matrice  $A$  corrisponderà a  $(\mathbb{I} - \beta J)$ . Affinché l'integrale converga,  $A$  deve essere definita positiva (o almeno avere autovalori positivi). Il risultato noto di questo integrale è:

$$I = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} b_i A_{ik}^{-1} b_k \right\} \quad (14.11)$$

dove  $A^{-1}$  è la matrice inversa tale che  $\sum_k A_{ik}^{-1} A_{kj} = \delta_{ij}$ .

Richiamo due identità matematiche che useremo:

1. Relazione tra determinante e traccia:

$$\det(A) = \exp\{\text{Tr}(\log A)\} \quad (14.12)$$

Dimostrazione rapida:  $\det A = \prod \lambda_i$ , quindi  $\log \det A = \sum \log \lambda_i = \text{Tr}(\log A)$ .

2. Derivata del logaritmo del determinante rispetto a un parametro reale  $z$ :

$$\frac{d}{dz} \log(A + z\mathbb{I}) = \frac{1}{A + z\mathbb{I}} \quad (14.13)$$

Questa sarà utile quando tratteremo la funzione di Green.

### 14.2.2 Calcolo delle Funzioni di Correlazione con il Metodo dei Campi Sorgente

Vogliamo calcolare la funzione di correlazione a due punti  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$  nel modello Gaussiano e dimostrare una proprietà cruciale. Definiamo la media:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle \equiv \frac{\int d\mu \sigma_i \sigma_k}{\int d\mu} \quad (14.14)$$

Utilizziamo il metodo del funzionale generatore. Definiamo dei "campi" fintizi  $f_i = -\beta h_i$ . La funzione di partizione in presenza di questi campi  $f$  è:

$$Z[f] = C \int [d\sigma] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_i A_{ik} \sigma_k - \sum_i f_i \sigma_i \right\} \quad (14.15)$$

Usando la formula dell'integrale gaussiano (con il completamento del quadrato), sappiamo che la soluzione esatta è:

$$Z[f] = Z[f=0] \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} f_i A_{ik}^{-1} f_k \right\} \quad (14.16)$$

Ora, per calcolare specificamente  $\langle \sigma_l \sigma_m \rangle$  tra due siti  $l$  e  $m$ , "accendiamo" il campo magnetico (sorgente) solo su questi due siti. Poniamo:

- $f_l = x$
- $f_m = y$
- $f_k = 0$  per tutti gli altri  $k$ .

Assumiamo che  $x$  e  $y$  siano parametri piccoli.

#### Sviluppo del lato LHS (Definizione)

Sviluppiamo l'integrale originale per  $x, y$  piccoli:

$$Z(x, y) = C \int [d\sigma] e^{-\frac{\sigma A \sigma}{2}} e^{-x\sigma_l - y\sigma_m} \quad (14.17)$$

$$\sim C \int [d\sigma] e^{-\frac{\sigma A \sigma}{2}} \left( 1 - x\sigma_l + \frac{x^2 \sigma_l^2}{2} \dots \right) \left( 1 - y\sigma_m + \frac{y^2 \sigma_m^2}{2} \dots \right) \quad (14.18)$$

Il termine che ci interessa è quello misto  $xy$ . Moltiplicando le parentesi:

$$\dots + xy\sigma_l \sigma_m + \dots \quad (14.19)$$

Integrando, questo termine diventa proporzionale a  $xy \langle \sigma_l \sigma_m \rangle$ . Quindi:

$$Z(x, y) \sim Z(0) [1 + xy \langle \sigma_l \sigma_m \rangle + \dots] \quad (14.20)$$

#### Sviluppo del lato RHS (Soluzione Esatta)

Sostituiamo  $f_l = x, f_m = y$  nella soluzione esatta esponenziale:

$$\text{RHS} = Z(0) \exp \left\{ \frac{1}{2} (x^2 A_{ll}^{-1} + y^2 A_{mm}^{-1} + 2xy A_{lm}^{-1}) \right\} \quad (14.21)$$

Abbiamo usato il fatto che  $A_{lm}^{-1} = A_{ml}^{-1}$  (simmetria). Sviluppando l'esponenziale in serie di Taylor ( $e^k \approx 1 + k$ ):

$$\text{RHS} \sim Z(0) \left[ 1 + \frac{1}{2} x^2 A_{ll}^{-1} + \frac{1}{2} y^2 A_{mm}^{-1} + xy A_{lm}^{-1} + \dots \right] \quad (14.22)$$

## Confronto e Risultato

Confrontando i coefficienti del termine  $xy$  nei due sviluppi, otteniamo immediatamente:

### Funzione di Correlazione

$$\langle \sigma_l \sigma_m \rangle = A_{lm}^{-1} \quad (14.23)$$

Questo risultato è fondamentale: la funzione di correlazione del Modello Gaussiano coincide esattamente con quella calcolata nell'approssimazione di Campo Medio (Mean Field) per il modello di Ising (linearizzando la teoria). Possiamo dire che **la teoria di Campo Medio è la soluzione esatta del Modello Gaussiano**.

### 14.2.3 Funzioni di Correlazione di Ordine Superiore

Possiamo estendere questo metodo per calcolare funzioni a più punti, ad esempio la funzione a 4 punti:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle \quad (14.24)$$

Usando lo stesso metodo (o il Teorema di Wick), si trova che questa si decomponne nella somma dei prodotti delle funzioni a due punti (contrazioni):

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle = A_{ik}^{-1} A_{lm}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{km}^{-1} + A_{im}^{-1} A_{kl}^{-1} \quad (14.25)$$

Ovvero:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle = \langle \sigma_i \sigma_k \rangle \langle \sigma_l \sigma_m \rangle + \text{permutazioni} \quad (14.26)$$

Questa funzione non contiene nuova fisica, è interamente determinata dalla funzione a due punti. Se si conosce il propagatore (la funzione a 2 punti), si conosce tutto. Questo è tipico delle teorie Gaussiane. Non c'è una vera interazione che modifichi la struttura delle correlazioni in modo non banale.

Il modello Gaussiano, pur essendo risolubile ed educativo, ha questo limite: essendo una teoria di campo medio, in 3 dimensioni prevede esponenti critici che non corrispondono alla realtà sperimentale (che è dominata dalle fluttuazioni non gaussiane). Tuttavia, sarà il punto di partenza per la teoria perturbativa che svilupperemo.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 15

Data: 12/11/2025

## 15.1 Funzioni di Correlazione nel Modello Gaussiano

Abbiamo visto che nel Modello Gaussiano la correlazione a due punti è data dall'inverso della matrice di interazione:

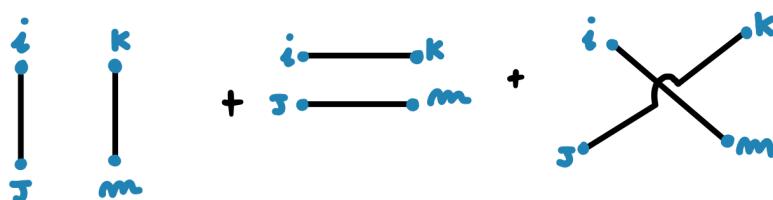
$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = A_{ik}^{-1} \quad (15.1)$$

Tuttavia, se si conoscono le correlazioni a due corpi, in questo modello si conosce tutto. Infatti, una funzione di correlazione a  $2n$  punti può essere espressa come somma di prodotti delle funzioni a due punti (Teorema di Wick). Ad esempio, per la funzione a 4 punti:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_m \rangle = A_{ij}^{-1} A_{km}^{-1} + A_{ik}^{-1} A_{jm}^{-1} + A_{im}^{-1} A_{jk}^{-1} \quad (15.2)$$

### Rappresentazione Diagrammatica

Possiamo visualizzare questi termini usando dei diagrammi (precursori dei diagrammi di Feynman). Se rappresentiamo  $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$  con una linea che unisce  $i$  e  $k$ , il termine a 4 punti è rappresentato da coppie di linee disgiunte (es. una linea  $i - j$  e una linea  $k - m$ ). È fondamentale notare che le linee non si toccano, non c'è interazione o vertice dove si incrociano; sono semplicemente prodotti di propagatori indipendenti.



**Figura 15.1:** Rappresentazione Diagrammatica.

In questo modello, l'unico diagramma "connesso" è il propagatore stesso (la funzione a due punti). Tutte le funzioni di ordine superiore sono date da diagrammi "disconnessi".

## 15.2 Funzioni di Correlazione Connesse

Per trattare teorie interagenti (non gaussiane), è necessario definire le **funzioni di correlazione connesse** in modo ricorsivo, sottraendo le parti che si fattorizzano. Definiamo:

$$\langle \sigma_i \rangle \equiv \langle \sigma_i \rangle^c \quad (15.3)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^c + \langle \sigma_i \rangle^c \langle \sigma_j \rangle^c \quad (15.4)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle^c + \langle \sigma_i \rangle^c \langle \sigma_j \sigma_k \rangle^c + 2 \text{ perm} + \langle \sigma_i \rangle^c \langle \sigma_j \rangle^c \langle \sigma_k \rangle^c \quad (15.5)$$

Da cui possiamo invertire per trovare la parte connessa a due punti:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle^c \langle \sigma_j \rangle^c \quad (15.6)$$

### Importanza delle Funzioni Connese

Le funzioni connesse sono cruciali per tre motivi:

1. **Proprietà di Clustering:** Soddisfano la proprietà di decadimento a grandi distanze. Ad esempio, nella fase ordinata dove  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \rightarrow m^2$  per distanze grandi, la parte connessa  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^c \rightarrow 0$ .
2. **Diagrammi Connensi:** Negli approcci perturbativi, corrispondono esattamente alla somma dei soli diagrammi topologicamente connessi.
3. **Densità di Energia Libera:** Sono legate alle derivate dell'energia libera rispetto al campo esterno.

$$\left\langle \prod_{a=1}^N \sigma_{i_a} \right\rangle^c = \beta^{-N} \prod_{a=1}^N \frac{\partial}{\partial h_{i_a}} \log Z[h] = -\beta^{-(N-1)} \prod_a \frac{\partial}{\partial h_{i_a}} F[h] \quad (15.7)$$

### Riepilogo: Modello Gaussiano

- È semplice, risolubile e possiede esponenti di campo medio.
- È esattamente risolubile per alte temperature,  $\beta < \beta_c$ .
- Ha una transizione a  $\beta_c = 1/(2D)$ .
- Il modello è mal definito per  $\beta > \beta_c$  (bassa T), poiché la matrice di interazione A non è più definita positiva.
- **Obiettivo:** Il GM è il nostro punto di partenza per sviluppare una teoria delle perturbazioni (come il modello di Landau-Ginzburg) per teorie più realistiche e *interagenti*. Useremo il Gruppo di Rinormalizzazione (RG) per calcolare gli esponenti critici per queste teorie interagenti.

## 15.3 Espansione ad Alta Temperatura del GM

**Nota:** Il seguente calcolo non è parte del curriculum standard richiesto per l'esame, ma è riservato a chi aspira alla lode.

Analizziamo ora l'espansione ad alta temperatura, un argomento utile per comprendere la genesi delle correlazioni e introdurre concetti diagrammatici. A temperatura infinita ( $\beta = 0$ ), il sistema è disordinato e non ci sono correlazioni: gli integrali si fattorizzano completamente.

Consideriamo la funzione di correlazione a due punti:

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \frac{\int (\prod d\sigma_i) e^{-\sum \sigma_i^2/2} e^{\beta \sum J_{ik} \sigma_i \sigma_k} \sigma_a \sigma_b}{\int (\prod d\sigma_i) e^{-\sum \sigma_i^2/2} e^{\beta \sum J_{ik} \sigma_i \sigma_k}} \quad (15.8)$$

Per  $\beta$  piccolo, espandiamo l'esponenziale dell'interazione (Termine di Hopping) in serie di potenze:

$$e^{\beta \sum J_{ik} \sigma_i \sigma_k} = 1 + \frac{\beta}{2} \sum_{ik} J_{ik} \sigma_i \sigma_k + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{1}{2} \sum_{ik} J_{ik} \sigma_i \sigma_k \right)^2 + \dots \quad (15.9)$$

Integriamo questa espansione termine per termine rispetto alla misura Gaussiana

$$d\mu = \left( \prod_i e^{-\sigma_i^2/2} d\sigma_i \right) \quad (15.10)$$

Vale la regola fondamentale:

### Regola di Integrazione

L'integrale su  $d\mu$  di qualsiasi termine contenente una potenza *dispari* di qualsiasi  $\sigma_i$  è zero. Un contributo non nullo si verifica solo quando tutte le variabili  $\sigma$  nell'integrando sono "accoppiate" in potenze **pari**.

### 15.3.1 Analisi dei Termini

#### Il Denominatore (Funzione di Partizione $Z$ )

$$\begin{aligned} Z &= \int d\mu \left[ 1 + \beta \sum_{\langle ik \rangle} J_{ik} \sigma_i \sigma_k + \frac{\beta^2}{2!} \sum_{\langle ik \rangle} \sum_{\langle i'k' \rangle} J_{ik} J_{i'k'} \sigma_i \sigma_k \sigma_{i'} \sigma_{k'} + \dots \right] \\ Z &= Z_0 \left[ 1 + 0 + \frac{\beta^2}{2!} \sum_{\langle ik \rangle} \sum_{\langle i'k' \rangle} J_{ik} J_{i'k'} \langle \sigma_i \sigma_k \sigma_{i'} \sigma_{k'} \rangle_0 + \dots \right] \end{aligned}$$

dove  $\langle \dots \rangle_0$  è l'integrale con la misura  $H_0$  (cioè, il teorema di Wick).

1. Il termine  $O(\beta)$  è zero (potenze dispari).
2. Il termine  $O(\beta^2)$  è non nullo solo se le quattro variabili  $\sigma$  sono accoppiate. Questo accade quando i due legami (link)  $\{i, k\}$  e  $\{i', k'\}$  sono gli stessi. Questo fornisce due possibilità:

-  $i = i'$  e  $k = k'$

-  $i = k'$  e  $k = i'$

Questi due termini cancellano il fattore  $1/2!$ . Questo genera un diagramma a "doppia linea".

3. A  $O(\beta^4)$ , appare un nuovo tipo di diagramma non nullo: un **loop** o **Plaquette**, dove quattro legami diversi formano un percorso chiuso (es.  $J_{ij}J_{jk}J_{kl}J_{li}$ ).

Quindi, il denominatore è  $Z = Z_0(1 + O(\beta^2))$ .

## Il Numeratore

Vogliamo trovare il contributo non nullo di ordine più basso per  $\langle \sigma_a \sigma_b \rangle$ .

$$\begin{aligned}\text{Num.} &= \int d\mu \sigma_a \sigma_b \left[ 1 + \beta \sum_{\langle ik \rangle} J_{ik} \sigma_i \sigma_k + \dots \right] \\ &= \int d\mu \sigma_a \sigma_b + \beta \sum_{\langle ik \rangle} J_{ik} \int d\mu \sigma_a \sigma_b \sigma_i \sigma_k + \dots\end{aligned}$$

1. Il termine  $O(\beta^0) \int d\mu \sigma_a \sigma_b = \langle \sigma_a \sigma_b \rangle_0 = \delta_{ab}$ . Questo è zero se  $a \neq b$ .
2. Il termine  $O(\beta^1)$  coinvolge  $\langle \sigma_a \sigma_b \sigma_i \sigma_k \rangle_0$ . Questo è non nullo se gli indici sono accoppiati. Gli accoppiamenti non nulli sono:

-  $a = i, b = k \implies \langle \sigma_i^2 \sigma_k^2 \rangle_0 = 1$

-  $a = k, b = i \implies \langle \sigma_k^2 \sigma_i^2 \rangle_0 = 1$

L'integrale forza la somma  $\sum_{\langle ik \rangle}$  a selezionare solo i termini dove  $\{i, k\} = \{a, b\}$ .

$$\text{Num.} = \beta(J_{ab} \cdot \langle \sigma_a^2 \sigma_b^2 \rangle_0 + J_{ba} \cdot \langle \sigma_a^2 \sigma_b^2 \rangle_0) = \beta(J_{ab} + J_{ba}) \quad (15.11)$$

Se  $a, b$  sono vicini (quindi  $J_{ab} \neq 0$ ), questo termine è  $\approx \beta J_{ab}$ .

Il termine non nullo di ordine più basso per  $\langle \sigma_a \sigma_b \rangle$  con  $a \neq b$  è  $O(\beta^1)$ , corrispondente a un singolo legame  $J_{ab}$ . Per un percorso di 3 legami (es.  $a \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow b$ ), il contributo di ordine più basso sarebbe  $O(\beta^3)$ .

## 15.4 Espansione ad Alta T nel Modello di Ising

Passiamo ora al Modello di Ising, dove  $\sigma_i = \pm 1$ . Qui la matematica cambia a causa dell'**Algebra Booleana**:

$$\sigma_i^2 = 1, \quad \sigma_i^3 = \sigma_i, \quad \dots \quad (15.12)$$

Segue che qualsiasi polinomio in  $\sigma$  è al massimo di grado 1 (lineare):

$$f(\sigma) = C_0 + C_1 \sigma \quad (15.13)$$

### 15.4.1 Character Expansion

Sfruttando il fatto che  $\sigma_i\sigma_j$  vale solo  $\pm 1$ , possiamo riscrivere l'esponenziale di Boltzmann in forma esatta (non è un'approssimazione per piccoli  $\beta$ , ma un'identità algebrica). Il trucco centrale è riscrivere il fattore di Boltzmann per un singolo legame:  $e^{\beta J\sigma_i\sigma_j}$  deve essere anch'esso un polinomio lineare della forma  $A + B(\sigma_i\sigma_j)$ . Possiamo risolvere per  $A$  e  $B$  controllando i due possibili valori di  $\sigma_i\sigma_j$ :

- **Caso 1:**  $\sigma_i\sigma_j = +1 \implies A + B = e^{\beta J}$
- **Caso 2:**  $\sigma_i\sigma_j = -1 \implies A - B = e^{-\beta J}$

Risolvendo il sistema otteniamo:  $A = \frac{e^{\beta J} + e^{-\beta J}}{2} = \cosh(\beta J)$   $B = \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{2} = \sinh(\beta J)$

Questo fornisce l'identità esatta:

$$e^{\beta J\sigma_i\sigma_j} = \cosh(\beta J) + \sinh(\beta J)\sigma_i\sigma_j \quad (15.14)$$

Questa relazione è comunemente espressa come:

$$e^{\beta\sigma_i\sigma_j} = c(1 + t\sigma_i\sigma_j) \quad (15.15)$$

dove definiamo i parametri fondamentali:

$$\begin{aligned} c &= \cosh(\beta) \\ s &= \sinh(\beta) \\ t &= \tanh(\beta) \end{aligned}$$

La 15.15 è un'**espansione dei caratteri**. Stiamo espandendo in  $t = \tanh(\beta)$ , che è piccolo ad alta T (piccolo  $\beta$ ).

### 15.4.2 Funzione di Partizione e Loop

Ora scriviamo  $Z$  usando questa identità per tutti i legami  $\langle ij \rangle$  sul reticolo:

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta J\sigma_i\sigma_j} \quad (15.16)$$

$$= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} [c(1 + t\sigma_i\sigma_j)] \quad (15.17)$$

$$= c^{N_L} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + t\sigma_i\sigma_j) \quad (15.18)$$

dove  $N_L$  è il numero totale di legami sul reticolo.

Espandendo il prodotto nell'Eq. 15.18, otteniamo una somma di termini con potenze crescenti di  $t$ :

$$\prod_{\langle ij \rangle} (1 + t\sigma_i\sigma_j) = 1 + \sum_{\langle ij \rangle} t(\sigma_i\sigma_j) + \sum_{\langle ij \rangle \neq \langle kl \rangle} t^2(\sigma_i\sigma_j)(\sigma_k\sigma_l) + \dots \quad (15.19)$$

### Le Regole della Somma $\sum_{\{\sigma\}}$

Per valutare quali termini sopravvivono, usiamo le proprietà della traccia sugli spin  $\sigma_k \in \{-1, +1\}$ :

- $\sum_{\sigma_k} 1 = 2$ ;
- $\sum_{\sigma_k} \sigma_k = 0$  (poiché  $1 + (-1) = 0$ );
- $\sum_{\sigma_k} \sigma_k^n = 0$  se  $n$  è dispari, mentre vale 2 se  $n$  è pari.

**Criterio di Sopravvivenza:** Un termine nell'espansione sopravvive alla somma su  $\{\sigma\}$  solo se *tutti* gli spin coinvolti in quel termine appaiono con una potenza pari (es.  $\sigma_k^2, \sigma_k^4$ ). Se anche un solo spin appare con potenza dispari, la somma su quello spin azzera l'intero termine.

Analizziamo i contributi in base all'ordine di  $t$  (numero di legami):

**Ordine  $O(t^0)$ :** Il termine costante

Corrisponde al grafico vuoto (nessun legame). Nessuno spin è presente ( $\sigma^0$ ). La somma su tutti gli  $N$  spin fornisce semplicemente il fattore  $2^N$ .

**Ordine  $O(t^1)$ :** Un singolo legame

Il termine è  $t\sigma_i\sigma_j$ . Sia  $\sigma_i$  che  $\sigma_j$  appaiono una volta (potenza dispari). La somma è 0.

**Ordine  $O(t^2)$ :** Due legami distinti

Consideriamo  $t^2(\sigma_i\sigma_j)(\sigma_k\sigma_l)$ . Tutti e quattro gli spin appaiono alla prima potenza.

La somma è 0.

**Ordine  $O(t^3)$ :** Cammino aperto

Consideriamo una catena di 3 legami:  $t^3(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_3)(\sigma_3\sigma_4)$ . Gli spin interni sono al quadrato ( $\sigma_2^2, \sigma_3^2$ ), ma gli estremi  $\sigma_1$  e  $\sigma_4$  sono dispari. Il termine svanisce.

**Ordine  $O(t^4)$ :** Il primo contributo non banale Qui dobbiamo distinguere due casi geometrici:

- Cammini aperti: Svaniscono tutti perché hanno estremi dispari.
- **Loop Chiuso (Placchetta):** Un quadrato formato dai siti 1, 2, 3, 4. Il termine è:

$$t^4(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_3)(\sigma_3\sigma_4)(\sigma_4\sigma_1)$$

Raggruppando gli spin, otteniamo:

$$t^4(\sigma_1^2)(\sigma_2^2)(\sigma_3^2)(\sigma_4^2) = t^4(1)(1)(1)(1) = t^4$$

Poiché non ci sono spin "spaiati", questo termine sopravvive. Sommando su tutte le configurazioni di spin otteniamo  $t^4 \cdot 2^N$ .

In conclusione, la funzione di partizione è una somma su tutte le possibili configurazioni a **loop chiusi** (poligoni) sul reticolo:

$$Z_{\text{Ising}} = c^{N_L} 2^N \left( 1 + N_{\text{sq}} t^4 + N_{\text{rect}} t^6 + \dots \right) \quad (15.20)$$

dove  $N_{\text{sq}}$  è il numero di quadrati elementari (placchette) e  $N_{\text{rect}}$  è il numero di rettangoli  $2 \times 1$ .

# Lezione 16

Data: 17/11/2025

## 16.1 Espansione ad Alta T e Variabili di Link

Riprendiamo l'analisi del modello di Ising nell'espansione ad alta temperatura. Abbiamo visto che la funzione di partizione può essere scritta esattamente utilizzando la variabile duale  $t = \tanh(\beta)$ :

$$Z_{Ising} = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} e^{\beta \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j} \quad (16.1)$$

Utilizzando l'identità  $e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta)(1 + t \sigma_i \sigma_j)$ , possiamo fattorizzare il termine  $\cosh(\beta)$  per ogni legame ( $N_L$  è il numero totale di legami):

$$Z_{Ising} = (\cosh(\beta))^{N_L} \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + t \sigma_i \sigma_j) \quad (16.2)$$

Quando espandiamo il prodotto, otteniamo una somma di termini. Poiché dobbiamo sommare sulle configurazioni di spin  $\sigma = \pm 1$ , sopravvivono solo i termini in cui ogni variabile di spin appare con una potenza pari. I termini con potenze dispari si annullano nella somma. Questo ci porta a una rappresentazione grafica in termini di cammini chiusi.

Possiamo formalizzare questo concetto introducendo delle variabili di occupazione dei link,  $n_{ik} \in \{0, 1\}$ , per ogni coppia di vicini  $\langle i, k \rangle$ :

- $n_{ik} = 1$ : il link è presente nel grafico (contributo  $t$ ).
- $n_{ik} = 0$ : il link è assente (contributo 1).

La funzione di partizione diventa una somma su queste variabili di link:

$$Z_{Ising} = (\cosh(\beta))^{N_L} \sum_{\{n_{ik}=0,1\}} t^{\sum_{\langle i,k \rangle} n_{ik}} \delta_{\text{constraint}} \quad (16.3)$$

Il vincolo ( $\delta_{\text{constraint}}$ ) impone che in ogni sito  $i$ , la somma delle variabili di link incidenti  $n_i$  sia un numero pari:

$$n_i = \sum_k n_{ik} \quad \text{deve essere pari} \quad (16.4)$$

Questo assicura che i grafici contribuenti siano formati da linee chiuse (loop).

### 16.1.1 Contributi all'Energia Libera

Il primo contributo non banale (diverso da 1) proviene dal loop chiuso più piccolo possibile. Su un reticolo ipercubico, non è possibile formare triangoli ( $t^3$ ), quindi il primo termine<sup>1</sup> è il quadrato (plaquette) di ordine  $t^4$ :

$$t^4(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_3)(\sigma_3\sigma_4)(\sigma_4\sigma_1) \rightarrow t^4\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2 = t^4 \quad (16.5)$$

Calcoliamo l'energia libera per sito  $f(\beta)$ . Ricordiamo che  $f = -\frac{1}{\beta N} \log Z$ . Separando il contributo del termine  $(\cosh(\beta))^{N_L}$  (dove  $N_L = DN$ ) e il contributo dei loop:

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \log Z = -\frac{D}{\beta} \log(\cosh(\beta)) + \tilde{f}(\beta) \quad (16.6)$$

Per valutare  $\tilde{f}(\beta)$  all'ordine più basso, contiamo i modi per formare una placchetta quadrata di 4 passi ( $t^4$ ) partendo da un sito dato e tornando all'origine:

1. Scelta della prima direzione: abbiamo  $D$  direzioni possibili.
2. Scelta della seconda direzione: abbiamo  $D-1$  direzioni (non possiamo tornare subito indietro).
3. **Fattore di simmetria:** Dobbiamo dividere per 2. Questo fattore 1/2 tiene conto del fatto che il cammino può essere percorso in due sensi (orario e antiorario), che rappresentano lo stesso oggetto geometrico nella somma sulla funzione di partizione.

Il fattore combinatorio corretto risulta quindi  $\frac{D(D-1)}{2}$ . L'energia libera corretta all'ordine  $t^4$  risulta:

$$f(\beta) \approx -\frac{1}{\beta} \left( D \log(\cosh(\beta)) + \frac{D(D-1)}{2} t^4 \right) \quad (16.7)$$

Questo calcolo mostra come le fluttuazioni (i loop) modifichino l'energia libera rispetto alla semplice approssimazione di campo medio.

Per studiare il comportamento critico con precisione, si espande la funzione in serie di potenze di  $t^2$  ad ordini molto elevati:

$$f(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^2 \quad (16.8)$$

Assumiamo che la singolarità più vicina all'origine nel piano complesso  $t^2$  sia la temperatura critica  $t_c^2$ , e che la funzione abbia una singolarità del tipo:

$$(t^2 - t_c^2)^{\omega} \quad (16.9)$$

Utilizzando teoremi standard sulle serie di potenze, possiamo determinare la posizione della singolarità  $t_c$  dal rapporto dei coefficienti:

$$t_c^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} \quad (16.10)$$

<sup>1</sup>Nel caso monodimensionale ( $D = 1$ ), sebbene non esistano loop locali, se si assumono condizioni al contorno periodiche (spazio non piatto), esiste un unico cammino chiuso che avvolge l'intero volume  $V$ . Questo genera un contributo di ordine  $t^V$ , che tuttavia diventa trascurabile nel limite termodinamico.

Inoltre, possiamo stimare l'esponente critico  $\omega$  analizzando la curvatura dei rapporti:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -n^2 \left( \frac{f_n}{f_{n+1}} - \frac{f_{n-1}}{f_n} \right) \right) t_c^{-2} - 1 \quad (16.11)$$

Questa tecnica richiede il calcolo di un numero finito ma elevato di termini. Per esempio, come citato nel libro di Parisi ("Statistical Field Theory"), per il reticolo cubico semplice ( $D = 3$ ) si sono calcolati termini fino al 18° ordine ( $t^{18}$ ).

## 16.2 Dal Reticolo alla Teoria di Campo (Continuo)

Esaminiamo ora il passaggio dal reticolo discreto alla teoria di campo continuo. Questo passaggio è fisicamente giustificato solo vicino al punto critico, dove la lunghezza di correlazione  $\xi$  diverge ( $\xi \gg a$ , con  $a$  passo del reticolo).

Possiamo visualizzare questo limite immaginando la struttura del sistema in termini di domini di spin. Immaginiamo di avere delle "gocce" (droplets) di spin positivi in un mare di spin negativi, e viceversa.

- Se la lunghezza di correlazione è piccola (ordine 1), avremo piccole gocce isolate.
- Avvicinandoci al punto critico, la dimensione tipica di queste gocce cresce.
- Nel limite del continuo, stiamo essenzialmente "sfocando" (smoothing) la visione microscopica: non guardiamo più il singolo spin che scatta su e giù, ma la magnetizzazione media locale su scale di lunghezza comparabili a  $\xi$ .

In questo limite, **Le variabili di spin discrete  $\sigma_i$  possono essere sostituite da un campo continuo  $\varphi(x)$  che varia lentamente nello spazio ("smooth")**:

$$\sigma_i \rightarrow \varphi(x) \quad (16.12)$$

Analizziamo il propagatore (funzione di correlazione a due punti) nello spazio dei momenti (trasformata di Fourier):

$$\langle \sigma_j \sigma_l \rangle \sim \int d^D k \frac{e^{-i(j-l) \cdot k}}{1 - 2\beta J \sum_\mu \cos k_\mu} \quad (16.13)$$

Espandiamo il denominatore per piccoli momenti  $k$  (che corrispondono a grandi distanze): Ricordando che  $\cos k_\mu \approx 1 - \frac{k_\mu^2}{2}$ , il denominatore diventa:

$$1 - 2\beta J D + \beta J k^2 + O(k^4) \quad (16.14)$$

dove  $k^2 = \sum k_\mu^2$ .

Questa espressione ha la struttura tipica di un **propagatore massivo**:

**Propagatore**

$$\sim \frac{1}{m^2 + k^2} \quad (16.15)$$

Qui identifichiamo un **termine di "massa"**  $m^2$ :

$$m^2 \propto \frac{1 - 2D\beta J}{\beta J} \propto (T - T_c) \quad (16.16)$$

Si vede chiaramente che la massa si annulla alla temperatura critica di campo medio:  $2D\beta_c J = 1$

Esattamente a  $T = T_c$ , il propagatore si comporta come:

$$\frac{1}{k^2} \quad (16.17)$$

### 16.2.1 Derivazione dell'Azione nel Continuo

Costruiamo l'azione (o Hamiltoniana efficace) nel continuo espandendo i termini reticolari. Il termine di somma sugli spin diventa un integrale spaziale:

$$\sum_i \varphi_i^2 \rightarrow \int d^D x \varphi^2(x) \quad (16.18)$$

Il termine di interazione tra primi vicini  $\sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i J_{ik} \sigma_k$  richiede un'attenzione particolare. Vogliamo capire come questo termine generi le derivate spaziali nel continuo.

Raggruppiamo i termini dei vicini di un sito in posizione  $\vec{0}$  sottraendo il campo centrale  $\varphi_{0,0}$ :

$$(\varphi_{0,1} - \varphi_{0,0}) + (\varphi_{0,-1} - \varphi_{0,0}) + (\varphi_{1,0} - \varphi_{0,0}) + (\varphi_{-1,0} - \varphi_{0,0}) \quad (16.19)$$

Eseguiamo l'espansione di Taylor per i vicini lungo l'asse  $y$  (siti 0, 1 e 0, -1):

$$\varphi_{0,1} = \varphi_{0,0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots \quad (16.20)$$

$$\varphi_{0,-1} = \varphi_{0,0} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots \quad (16.21)$$

Sommando questi contributi, i termini di derivata prima si cancellano e rimangono le derivate seconde:

$$(\varphi_{0,1} - \varphi_{0,0}) + (\varphi_{0,-1} - \varphi_{0,0}) \approx 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (16.22)$$

Sommando su tutte le  $D$  direzioni spaziali, ricostruiamo l'operatore Laplaciano  $\nabla^2$ .

Sostituendo questo risultato nell'espressione della funzione di partizione, l'integrale funzionale assume la forma esatta:

L'azione gaussiana nel continuo assume quindi la forma:

$$S_{Gauss}[\varphi] = \int d^D x \left( -(1 - 2D\beta) \frac{\varphi(x)^2}{2} + \frac{\beta}{2} \varphi(x) \nabla^2 \varphi(x) \right) \quad (16.23)$$

dove il termine  $\varphi \nabla^2 \varphi$  rappresenta il termine cinetico che, integrando per parti, corrisponde al classico  $-(\nabla \varphi)^2$

### 16.3 Il Modello $\varphi^4$ (Ginzburg-Landau)

Il modello gaussiano derivato sopra è un'approssimazione valida solo se le fluttuazioni sono puramente quadratiche (**teoria libera**). Questa teoria è "particolarmente noiosa" dal punto di vista della fisica critica. Essendo un'approssimazione quadratica, essa riproduce esattamente gli esponenti critici della teoria di Campo Medio, che sappiamo essere errati per dimensioni  $D < 4$ . Sappiamo, infatti, che il modello di Ising ha una transizione di fase non banale che il modello gaussiano non cattura completamente in bassa dimensione ( $D < 4$ ). Per descrivere una teoria fisica realistica, dobbiamo modificare l'azione aggiungendo un termine di interazione che rispetti la simmetria  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Aggiungiamo un termine quartico. L'azione completa diventa:

$$S[\varphi] = \int d^D x \left( \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + g\varphi^4 \right) \quad (16.24)$$

Questo è il **modello di Ginzburg-Landau**.

Il problema principale è che non sappiamo risolvere esattamente questa teoria interagente. La nostra strategia sarà quella di trattare  $g$  come un parametro piccolo ed eseguire un'**espansione perturbativa** in  $g$ .

- Se  $g = 0$ , torniamo alla teoria gaussiana risolubile.
- Espandendo per piccoli  $g$ , calcoliamo le correzioni agli esponenti di campo medio.

Questo approccio perturbativo sarà la base per l'applicazione del Gruppo di Rinormalizzazione.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 17

Data: 19/11/2025

## 17.1 Teoria di Landau-Ginzburg

Nelle lezioni precedenti abbiamo discusso il modello Gaussiano, che corrisponde essenzialmente alla teoria di Campo Medio. Tuttavia, sappiamo che il Campo Medio fallisce nel descrivere correttamente gli esponenti critici per dimensioni inferiori alla dimensione critica superiore ( $D < 4$ ). Siamo interessati a capire le transizioni di fase nel mondo reale (tipicamente in  $D = 3$ ). Dobbiamo quindi formulare una teoria matematica che vada oltre il modello Gaussiano, modificando l'argomento della funzione di partizione.

L'idea è modificare l'azione aggiungendo un termine di interazione. La scelta del termine da aggiungere non è arbitraria, ma dettata da principi di simmetria e rilevanza. Potremmo chiederci: perché aggiungiamo un termine  $\varphi^4$  e non, ad esempio,  $\varphi^3$ ?

- **Simmetria:** Il modello di Ising possiede una simmetria globale di inversione di spin ( $Z_2$ ), ovvero l'Hamiltoniana è invariante per  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ . Nella teoria di campo, questo corrisponde a  $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$ . Un termine cubico  $\varphi^3$  non è invariante sotto questa trasformazione (è dispari), quindi romperebbe esplicitamente la simmetria, cambiando la classe di universalità della teoria. Dobbiamo mantenere la simmetria originale del problema.
- **Rilevanza:** Potremmo aggiungere potenze superiori come  $\varphi^6$ ,  $\varphi^8$ , ecc. Tuttavia, come vedremo nel contesto del Gruppo di Rinormalizzazione, questi termini di ordine superiore risultano essere *irrilevanti* vicino al punto critico in dimensione  $D = 4$  o inferiore. Non modificano cioè gli esponenti critici.

Il primo termine non banale che rispetta la simmetria e che possiamo aggiungere è quindi il termine quartico  $\varphi^4$ .

Introduciamo l'**Hamiltoniana Effettiva** (o Azione) di Landau-Ginzburg:

### Azione di Landau-Ginzburg

$$\beta H_{eff}[\varphi] \equiv \int d^D x \left\{ \frac{\mu \cdot \varphi^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^D (\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{g \cdot \varphi^4}{4!} + h(x) \varphi(x) + \frac{(\Delta \varphi)^2}{2\Lambda^2} \right\} \quad (17.1)$$

Analizziamo nel dettaglio i termini:

- **Funzionale Integrale:** La notazione implica che stiamo integrando su tutto lo spazio  $d^Dx$ . Il campo  $\varphi(x)$  è una variabile che dipende dalla posizione.
- **Termine di Massa ( $\frac{\mu}{2}\varphi^2$ ):** Il parametro  $\mu$  gioca il ruolo di una "massa quadrata" ( $m^2$ ). Rappresenta la distanza dalla temperatura critica. Nelle lezioni precedenti, avevamo visto che il termine di massa era legato a  $1 - 2D\beta J$ . Quindi  $\mu \sim (T - T_c)$ .
- **Termine Cinetico ( $\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$ ):** Questo termine coinvolge le derivate spaziali ( $\nabla\varphi$ ). Deriva dall'interazione tra primi vicini sul reticolo ( $\varphi_i - \varphi_j$ ) e penalizza le configurazioni in cui il campo varia rapidamente nello spazio. È il termine che genera le correlazioni spaziali (propagatore).
- **Termine di Interazione ( $\frac{g}{4!}\varphi^4$ ):** È il termine che rende la teoria non Gaussiana.  $g$  è la costante di accoppiamento. Affinché la teoria sia ben definita, deve essere  $g > 0$ . Se fosse  $g < 0$ , il potenziale andrebbe a  $-\infty$  per grandi  $\varphi$  e l'integrale funzionale divergerebbe, rendendo la teoria instabile. Consideriamo questo termine come una perturbazione: se  $g$  è piccolo, speriamo di poter usare la teoria delle perturbazioni.
- **Termine di Campo Esterno ( $h(x)\varphi(x)$ ):** Accoppiamento con una **sorgente esterna**  $h(x)$ , usata per polarizzare il sistema.
- **Termine di Regolarizzazione (Cutoff):** Questo termine agisce come un cutoff ultravioletto  $\Lambda$ . Serve a "proibire" le funzioni che oscillano troppo velocemente a corte distanze. Senza di esso, certe quantità (come l'energia interna in  $D \geq 2$ ) divergerebbero.

La funzione di partizione è l'integrale funzionale su tutte le configurazioni del campo:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta H_{eff}[\varphi]} \quad (17.2)$$

### 17.1.1 Analisi dei Minimi e Rottura di Simmetria

Possiamo analizzare il potenziale classico  $V(\varphi) = \frac{\mu}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4$  per capire lo stato fondamentale del sistema (trascurando momentaneamente le fluttuazioni):

- **Fase Simmetrica:** Se  $\mu > 0$  (e  $g > 0$ ), il potenziale ha un unico minimo globale in  $\varphi = 0$ . Il valore di aspettazione del campo è nullo  $\langle\varphi\rangle = 0$ . Questa corrisponde alla fase disordinata ad alta temperatura ( $T > T_c$ ).
- **Fase a Simmetria Rotta:** Se  $\mu < 0$ , l'origine  $\varphi = 0$  diventa un massimo locale (instabile). Il potenziale assume la forma a "doppia buca" (double well) e si formano due nuovi minimi globali degeneri in:

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} \quad (17.3)$$

Il sistema sceglierà spontaneamente uno di questi due minimi, acquisendo un valore di aspettazione non nullo  $\langle\varphi\rangle \neq 0$  (magnetizzazione spontanea). Questa è la fase ordinata a bassa temperatura ( $T < T_c$ ).

### 17.1.2 Relazione con il Modello di Ising

Il modello di Landau-Ginzburg può essere visto come una generalizzazione del modello di Ising. Consideriamo un potenziale della forma  $g(\varphi^2 - 1)^2$ . A meno di costanti, questo corrisponde a termini  $\varphi^4$  e  $-\varphi^2$ . Se prendiamo il limite  $g \rightarrow \infty$ , costringiamo il campo a stare esattamente sul minimo del potenziale, ovvero  $\varphi^2 = 1 \implies \varphi = \pm 1$ . In questo limite, recuperiamo le variabili discrete di Ising. Con  $g$  finito, permettiamo al modulo dello spin di fluttuare attorno al valore di equilibrio ("spin morbidi").

### 17.1.3 Formulazione su Reticolo e Analisi Dimensionale

È fondamentale capire la relazione tra la teoria di campo continuo e il reticolo sottostante, specialmente per quanto riguarda le dimensioni fisiche dei parametri e le divergenze. Sul reticolo, esiste una lunghezza minima  $a$  (passo del reticolo). **Non possiamo sondare distanze minori di  $a$ . Questo fornisce una regolarizzazione naturale: il reticolo agisce come un cutoff ultravioletto.** Possiamo identificare:

$$a \sim \frac{1}{\Lambda} \quad (17.4)$$

dove  $\Lambda$  è il cutoff in momento. Mandare  $a \rightarrow 0$  equivale a mandare  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

#### Divergenze dell'Energia

Se calcoliamo l'energia interna  $U$  nel modello Gaussiano ( $g = 0$ ) con un cutoff  $\Lambda$ , troviamo:

- In  $D = 2$ :  $U \sim \log \Lambda$
- In  $D = 3$ :  $U \sim \Lambda$  (divergenza lineare)

Queste divergenze non sono problematiche per la fisica critica finché  $g = 0$ , poiché rappresentano solo uno shift costante dell'energia. Tuttavia, quando accendiamo l'interazione  $g$ , la gestione di queste divergenze diventa più sottile.

#### Riscalamento dei Campi

Scriviamo l'Hamiltoniana effettiva discretizzata sul reticolo. Tenendo conto della dipendenza esplicita dal passo reticolare  $a$ , l'espressione è:

$$H_{eff,lattice}[\varphi_i] = a^D \left[ \frac{1}{2a^2} \sum_{ik} J_{ik} (\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_i \left( \frac{\mu}{2} \varphi_i^2 + \frac{g}{4!} \varphi_i^4 + h_i \varphi_i \right) \right] \quad (17.5)$$

Per semplificare l'espressione e cancellare il fattore  $a^{D-2}$  che emerge dal termine cinetico (combinando  $a^D$  e  $1/a^2$ ), ridefiniamo i campi:

$$\Psi_i \equiv a^{\frac{D-2}{2}} \varphi_i \quad (17.6)$$

Se poniamo  $h = 0$  per semplicità, sostituendo la nuova variabile  $\Psi_i$  nell'Hamiltoniana, otteniamo una forma in cui i coefficienti sono riscalati:

$$H_{eff,lat}[\{\Psi_i\}] = \frac{1}{2} \sum_{ik} J_{ik} (\Psi_i - \Psi_k)^2 + \sum_i \left( \frac{M}{2} \Psi_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \Psi_i^4 \right) \quad (17.7)$$

Dove abbiamo definito i nuovi parametri adimensionali del reticolo:

$$M = \mu a^2 \quad \text{e} \quad \lambda = g a^{4-D} \quad (17.8)$$

Eseguiamo ora l'analisi dimensionale. Partiamo dal principio che l'Hamiltoniana Effettiva deve essere adimensionale e definiamo la dimensione della lunghezza come  $[L] = -1$  (o equivalentemente la dimensione dell'impulso come  $[p] = 1$ ):

- La massa quadrata ha dimensione  $[\mu] = 2$ .
- Il passo del reticolo ha dimensione  $[a] = [L] = -1 = [\Lambda^{-1}]$ .
- Il cutoff ha dimensione  $[\Lambda] = [p] = 1$ .
- I parametri riscalati sono adimensionali:  $[M] = [\lambda] = 0$ .
- La dimensione del campo  $\Psi$  risulta  $[\Psi] = 0$ , mentre  $[\varphi] = \frac{D-2}{2}$ .
- Dalla relazione per  $\lambda$ , ricaviamo  $[g] = 4 - D$

#### 17.1.4 Il Problema del Parametro Adimensionale

Per fare teoria delle perturbazioni, abbiamo bisogno di un parametro di espansione *adimensionale*. La costante  $g$  ha dimensione fisica  $4 - D$ . Dobbiamo renderla adimensionale dividendola per una scala di massa appropriata elevata alla potenza giusta. Vicino al punto critico, l'unica scala di massa fisica del sistema è la "massa rinormalizzata" o la distanza dal punto critico  $(\mu - \mu_c)$ . Costruiamo il parametro adimensionale  $u$ :

$$u \propto \frac{g}{(\mu - \mu_c)^{\frac{4-D}{2}}} \quad (17.9)$$

Analizziamo il comportamento di questo parametro  $u$  quando ci avviciniamo alla transizione di fase ( $\mu \rightarrow \mu_c$ ):

- **Caso  $D > 4$ :** L'esponente  $\frac{4-D}{2}$  è negativo. Quando  $\mu \rightarrow \mu_c$ ,  $u \rightarrow 0$ . Il parametro di accoppiamento effettivo svanisce. La teoria delle perturbazioni funziona benissimo vicino al punto critico e la teoria diventa essenzialmente Gaussiana (Campo Medio è esatto).
- **Caso  $D < 4$ :** L'esponente  $\frac{4-D}{2}$  è positivo. Quando  $\mu \rightarrow \mu_c$ ,  $u \rightarrow \infty$ . **Il parametro di accoppiamento effettivo diverge.**

Questa è una conclusione drammatica: per quanto piccola possa essere la costante di accoppiamento  $g$  che inseriamo nella teoria, l'accoppiamento *effettivo* che controlla le fluttuazioni a grandi distanze esplode vicino al punto critico in dimensione  $D < 4$ . Questo significa che la teoria delle perturbazioni naive fallirà inevitabilmente proprio nella regione fisica che ci interessa. Questa osservazione è la motivazione principale per l'introduzione del **Gruppo di Rinormalizzazione** (RG), che ci permetterà di "risommare" queste divergenze e definire una teoria efficace sensata.

## 17.2 Teoria delle Perturbazioni

Abbiamo visto dall'analisi dimensionale che la costante di accoppiamento efficace diverge vicino al punto critico per  $D < 4$ , rendendo problematica l'applicazione diretta della teoria delle perturbazioni. Tuttavia, il punto di partenza obbligato per qualsiasi analisi è l'espansione perturbativa per piccoli valori di  $g$ . Espandiamo la teoria assumendo che  $g$  sia piccolo e verifichiamo cosa succede.

L'idea centrale è quella di considerare il termine quartico nell'azione come una piccola perturbazione rispetto alla teoria libera (Gaussiana). Vogliamo calcolare la funzione di correlazione a due punti completa  $G(x)$ :

$$G(x) = \langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle \quad (17.10)$$

Nella teoria di Landau-Ginzburg, il valore di aspettazione di un generico funzionale dei campi è dato dal rapporto di due integrali funzionali. Possiamo scrivere esplicitamente questo rapporto separando la parte Gaussiana dell'azione ( $S_0$ ) dalla parte di interazione ( $S_{int} = \int d^D z \frac{g}{4!} \varphi^4$ ):

$$\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{-H[\varphi]} \varphi(0)\varphi(x)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-H[\varphi]}} \quad (17.11)$$

Procediamo espandendo in serie di Taylor il fattore esponenziale contenente il termine di interazione  $g$ :

$$e^{-\int d^D z \frac{g}{4!} \varphi^4(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( -\frac{g}{4!} \int d^D z \varphi^4(z) \right)^m \quad (17.12)$$

In questo modo, stiamo "portando giù" il termine di interazione dall'esponente, trasformandolo in un prodotto di campi all'interno dell'integrale. Sostituendo questa espansione sia al numeratore che al denominatore, l'espressione completa per la funzione di correlazione diventa:

$$G(x) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-g/4!)^m}{m!} \left\langle \left[ \int d^D z \varphi^4(z) \right]^m \varphi(x)\varphi(0) \right\rangle_0}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-g/4!)^m}{m!} \left\langle \left[ \int d^D z \varphi^4(z) \right]^m \right\rangle_0} \quad (17.13)$$

È fondamentale chiarire la notazione introdotta: il simbolo  $\langle \dots \rangle_0$  indica il **valore di aspettazione calcolato nella teoria Gaussiana** (ovvero con  $g = 0$ ). Questo passaggio è cruciale perché riduce il problema del calcolo di un integrale funzionale con un'azione complessa (quartica) al calcolo di una serie infinita di integrali che sono puramente Gaussiani. I termini all'interno delle parentesi  $\langle \dots \rangle_0$  sono ora semplicemente prodotti di campi (momenti) di ordine sempre più alto.

In pratica, abbiamo riscritto la teoria interagente come una somma infinita di termini calcolabili usando le proprietà della teoria libera. Tutti questi integrali sono ora fattibili perché sappiamo calcolare esattamente i momenti di una distribuzione Gaussiana (usando il Teorema di Wick). Il nostro lavoro nelle prossime lezioni sarà proprio quello di calcolare questi termini, ordine per ordine in  $g$ , e analizzare il loro comportamento.

github.com/elisabettagnello

# Lezione 18

Data: 24/11/2025

## 18.1 Teoria delle Perturbazioni nel Modello di Landau-Ginzburg

In questa lezione svilupperemo la teoria delle perturbazioni per il modello di Landau-Ginzburg. L'obiettivo è calcolare la funzione di correlazione a due punti  $G(x)$  espandendo il termine di interazione in potenze della costante di accoppiamento  $g$ . Vedremo come i diagrammi di Feynman emergano naturalmente da questa espansione.

### L'Hamiltoniana di Landau-Ginzburg

Consideriamo l'Hamiltoniana efficace di Landau-Ginzburg. La separiamo in una parte libera (Gaussian),  $\mathcal{H}_0$ , e una parte di interazione,  $\mathcal{H}_{int}$ :

$$\beta\mathcal{H}[\varphi] = \beta\mathcal{H}_0[\varphi] + \beta\mathcal{H}_{int}[\varphi] \quad (18.1)$$

dove i termini sono definiti come:

$$\beta\mathcal{H}_0[\varphi] = \int d^Dx \left[ \frac{1}{2}(\nabla\varphi(x))^2 + \frac{1}{2}\mu\varphi^2(x) \right] \quad (18.2)$$

$$\beta\mathcal{H}_{int}[\varphi] = \frac{g}{4!} \int d^Dx \varphi^4(x) \quad (18.3)$$

In questa formulazione,  $g$  agisce come parametro perturbativo. Assumiamo che  $g$  sia sufficientemente piccolo da permettere un'espansione in serie di Taylor.

### 18.1.1 La Funzione di Correlazione a Due Punti

Siamo interessati alla funzione di correlazione a due punti (o funzione di Green):

$$G(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\varphi] \varphi(x)\varphi(0) e^{-\beta\mathcal{H}[\varphi]}}{\int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\beta\mathcal{H}[\varphi]}} \quad (18.4)$$

Indichiamo la funzione di partizione con  $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\beta\mathcal{H}}$ . Espandiamo l'esponenziale del termine di interazione:

$$e^{-\beta\mathcal{H}} = e^{-\beta\mathcal{H}_0} e^{-\frac{g}{4!} \int \varphi^4} = e^{-\beta\mathcal{H}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{g}{4!} \int d^Dy \varphi^4(y) \right)^n \quad (18.5)$$

Sostituendo questa espansione nell'equazione (18.4), sia il numeratore che il denominatore diventano serie di potenze in  $g$ . Si ottiene la seguente formula generale di espansione:

### Formula di Espansione

$$G(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^n \int d^D y_1 \dots d^D y_n \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y_1) \dots \varphi^4(y_n) \rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^n \int d^D y_1 \dots d^D y_n \langle \varphi^4(y_1) \dots \varphi^4(y_n) \rangle_0} \quad (18.6)$$

Qui,  $\langle \dots \rangle_0$  indica la media calcolata rispetto alla misura Gaussiana libera:

$$\langle A \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}[\varphi] A[\varphi] e^{-\beta \mathcal{H}_0}}{\int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\beta \mathcal{H}_0}} \quad (18.7)$$

Ricordiamo che per la teoria Gaussiana ( $g = 0$ ), la funzione a due punti è il propagatore libero:

$$G_0(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + \mu^2} \quad (18.8)$$

Nello spazio dei momenti questo propagatore si comporta come  $1/k^2$ . Nello spazio reale, ciò implica che i segnali viaggiano a lungo raggio. Avvicinandoci al punto critico, la massa  $\mu \rightarrow 0$  (o  $m \rightarrow 0$ ), il che implica che la lunghezza di correlazione diverge ( $\xi \rightarrow \infty$ ).

### Teorema di Wick

Per valutare termini della forma  $\langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle_0$ , utilizziamo il **Teorema di Wick**. Esso afferma che la media di un prodotto di campi in una teoria Gaussiana è uguale alla somma su tutti i modi possibili e distinti di contrarre i campi a coppie (propagatori).

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \rangle_0 = \sum_{\text{pairings}} \prod_{\text{pairs } (i,j)} G_0(x_i - x_j) \quad (18.9)$$

Se il numero di campi è dispari, la media è zero.

## 18.2 Correzione al Primo Ordine ( $n = 1$ )

Calcoliamo  $G(x)$  al primo ordine in  $g$ . L'espressione formale è:

$$G_1(x) = \frac{\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_0 - \frac{g}{4!} \int d^D y \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle_0}{1 - \frac{g}{4!} \int d^D y \langle \varphi^4(y) \rangle_0} + O(g^2) \quad (18.10)$$

### 18.2.1 Il Numeratore

Il termine di ordine zero è semplicemente  $G_0(x)$ . Il termine del primo ordine coinvolge la contrazione di 6 campi:  $\varphi(x), \varphi(0)$  e quattro campi nel punto  $y$ :  $\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y)$ .

$$\langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y) \rangle_0 \quad (18.11)$$

Esistono due modi topologicamente distinti per contrarre questi campi:

- 1. Contributo Disconnesso:** Contrarre  $\varphi(x)$  con  $\varphi(0)$ , lasciando  $\varphi^4(y)$  a contrarsi con se stesso.

$$\underbrace{\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle_0}_{G_0(x)} \underbrace{\langle \varphi^4(y) \rangle_0}_{3G_0^2(0)} = 3G_0(x)G_0^2(0) \quad (18.12)$$

Il fattore 3 deriva dal numero di modi per contrarre  $\varphi^4(y)$ .

- 2. Contributo Connesso (tadpole graph):** Contrarre  $\varphi(x)$  con uno dei  $\varphi(y)$ , e  $\varphi(0)$  con un altro  $\varphi(y)$ . I restanti due  $\varphi(y)$  si contraggono tra loro.

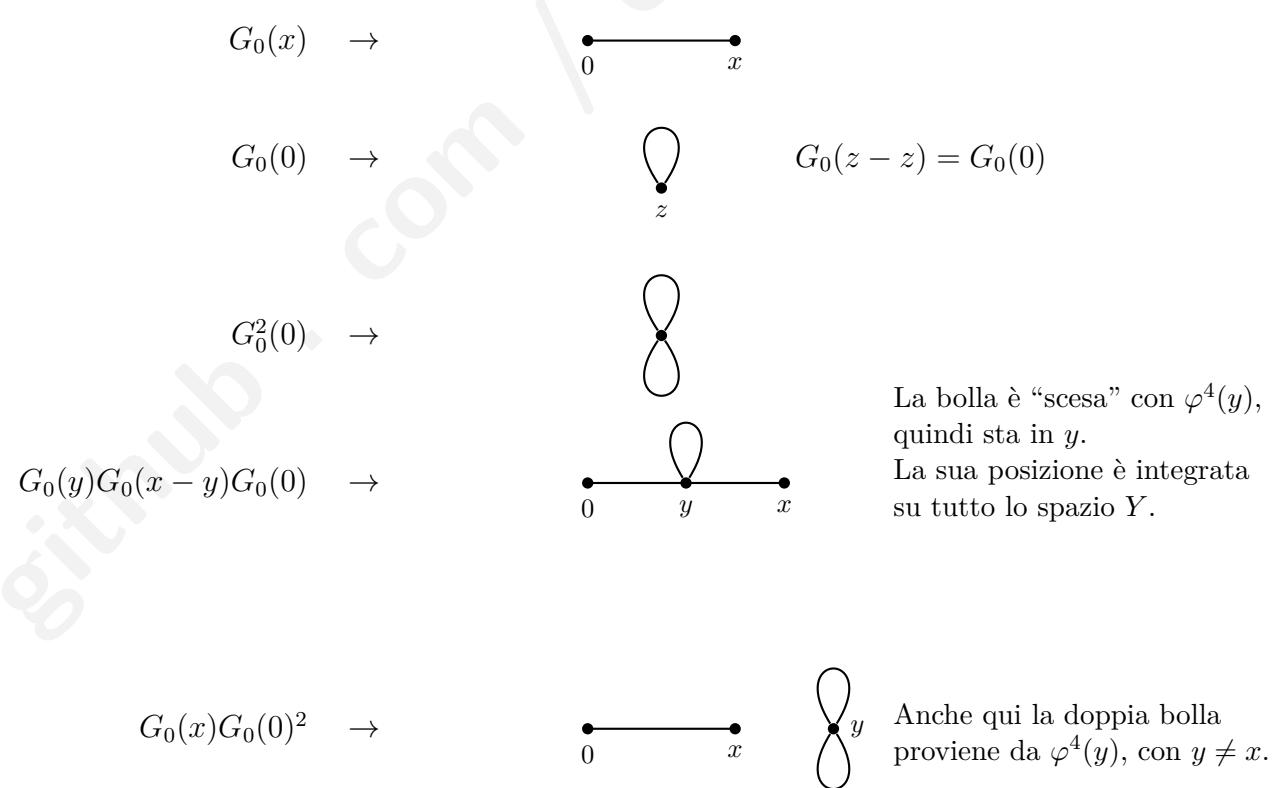
- Modi per scegliere  $\varphi(y)$  da accoppiare a  $\varphi(x)$ : 4
- Modi per scegliere dai restanti 3  $\varphi(y)$  per  $\varphi(0)$ : 3
- I restanti 2 campi si contraggono in 1 modo.
- Peso totale:  $4 \times 3 = 12$ .

$$12 G_0(x-y)G_0(y-0)G_0(0) \quad (18.13)$$

Quindi, il numeratore è:

$$N_1 = G_0(x) - \frac{g}{4!} \int d^D y [3G_0(x)G_0^2(0) + 12G_0(x-y)G_0(y)G_0(0)] \quad (18.14)$$

Ecco la rappresentazione diagrammatica dei contributi al primo ordine.



**Figura 18.1:** Rappresentazione diagrammatica dei termini al primo ordine. Si evidenzia come i loop (bolle) nascano dalle auto-contrazioni del termine di interazione  $\varphi^4(y)$ .

### 18.2.2 Il Denominatore

Il denominatore è l'espansione della funzione di partizione  $\mathcal{Z}$ . All'ordine  $g$ , abbiamo bisogno di  $\langle \varphi^4(y) \rangle_0$ . Usando il teorema di Wick (contraendo 4 campi nello stesso punto):

$$\langle \varphi^4(y) \rangle_0 = 3G_0(y - y)^2 = 3G_0^2(0) \quad (18.15)$$

Così il denominatore è:

$$D_1 = 1 - \frac{g}{4!} \int d^D y 3G_0^2(0) \quad (18.16)$$

### 18.2.3 Cancellazione dei Diagrammi Disconnessi

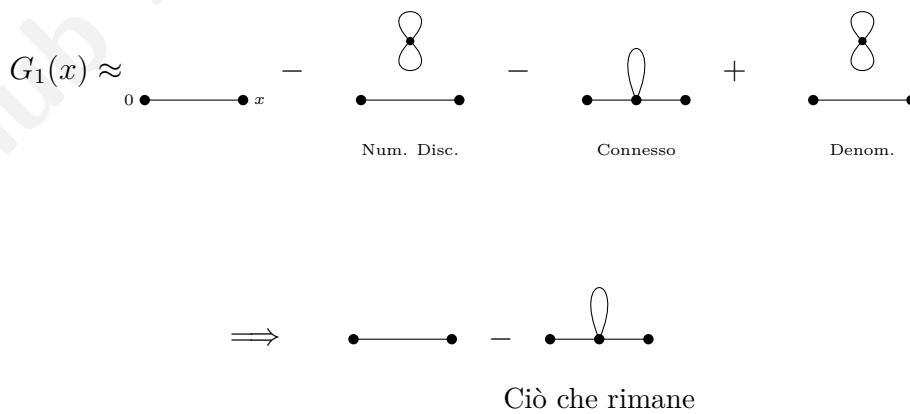
Combiniamo ora numeratore e denominatore. Usiamo l'espansione  $(1 - \epsilon)^{-1} \approx 1 + \epsilon$ .

$$\begin{aligned} G_1(x) &\approx \left( G_0(x) - \frac{g}{4!} \int dy [3G_0(x)G_0^2(0) + 12G_0(x-y)G_0(y)G_0(0)] \right) \\ &\times \left( 1 + \frac{g}{4!} \int dy 3G_0^2(0) \right) \end{aligned} \quad (18.17)$$

Espandendo il prodotto e mantenendo i termini fino all'ordine  $g$ :

$$G_1(x) \approx G_0(x) - \underbrace{\frac{g}{4!} \int dy 3G_0(x)G_0^2(0)}_{\text{Parte Disconnessa}} - \underbrace{\frac{g}{4!} \int dy 12G_0(x-y)G_0(y)G_0(0)}_{\text{Dal Denominatore}} + G_0(x) \underbrace{\frac{g}{4!} \int dy 3G_0^2(0)}_{(18.18)}$$

Il termine disconnesso del numeratore cancella esattamente il termine che sorge dall'espansione del denominatore. Questa è una caratteristica generale della teoria (nota come Teorema dei Cluster Connessi o **Linked Cluster Theorem**). In un sistema ben definito nel limite termodinamico ( $V \rightarrow \infty$ ), il ruolo del denominatore è precisamente quello di cancellare i diagrammi disconnessi che appaiono al numeratore.



#### Correzione al Primo Ordine

$$G_1(x) = G_0(x) - \frac{g}{2} \int d^D y G_0(x-y)G_0(y)G_0(0) \quad (18.19)$$

### 18.3 Correzione al Secondo Ordine ( $n = 2$ )

Al secondo ordine ( $g^2$ ), consideriamo le contrazioni di 10 campi:  $\varphi(x)\varphi(0)$  e due vertici  $\varphi^4(y_1)\varphi^4(y_2)$ . Il numero totale di contrazioni è  $(10 - 1)! = 9! = 945$  termini. Tuttavia, calcolarli tutti è tedioso e non necessario: ci servono solo quelli **connessi**.

Ci sono tre diagrammi connessi topologicamente distinti a questo ordine (ignorando le gambe esterne  $G_0(x - y_1)$  e  $G_0(y_2 - 0)$  ad essi attaccate):

1. Il "Double Scoop" (Tadpole su Tadpole): Si parte da  $x$ , si va a  $y_1$ , si crea un loop su  $y_1$ , si va a  $y_2$ , si crea un loop su  $y_2$ , si va a 0.

- Questo diagramma è riducibile: tagliando la linea tra  $y_1$  e  $y_2$  il grafico si separa.
- Fattore combinatorio: 144.
- Valore proporzionale a:  $G_0(x - y_1)G_0(0)G_0(y_1 - y_2)G_0(0)G_0(y_2)$ .



2. Il "Setting Sun" (o "Hamburger"): Partiamo da  $x$  a  $y_1$ , e da  $y_1$  a  $y_2$  abbiamo 3 linee distinte, poi da  $y_2$  a 0.

- Contrarre  $\varphi(x)$  con  $y_1$ ,  $\varphi(0)$  con  $y_2$ . Connettere  $y_1$  e  $y_2$  con 3 propagatori.
- Fattore combinatorio: 96.
- Valore proporzionale a:  $G_0(x - y_1)G_0(y_1 - y_2)^3 G_0(y_2)$ .



3. La "Figura a Otto": Due tadpoles connessi da una linea, in una variazione simmetrica.

- Fattore combinatorio: 144.
- Valore proporzionale a:  $G_0(x - y_1)G_0(y_2)G_0(y_1 - y_2)G_0^2(0)$ .



### 18.3.1 Riepilogo della Procedura

Per calcolare la funzione di correlazione a qualsiasi ordine:

1. Disegnare tutti i diagrammi di Feynman **connessi** topologicamente distinti con 2 punti esterni ( $x$  e  $0$ ) e  $n$  vertici.
2. I vertici hanno valenza 4 (4 linee che si incontrano).
3. Assegnare un fattore  $G_0(z_i - z_j)$  a ciascuna linea.
4. Assegnare un fattore  $(-g)$  a ciascun vertice (e i fattoriali appropriati dall'espansione).
5. Moltiplicare per il **fattore combinatorio** (molteplicità) del diagramma. Questo conta il numero di modi per contrarre i campi per formare quella specifica topologia.
6. Integrare sulle posizioni di tutti i vertici interni  $y_1, \dots, y_n$ .

La cancellazione dei diagrammi disconnessi (vacuum bubbles) assicura che la densità di energia libera e le funzioni di correlazione rimangano ben definite.

# Lezione 19

Data: 26/11/2025

Continuiamo la nostra analisi della teoria di campo scalare con interazione quartica  $\varphi^4$ . L'obiettivo è calcolare le funzioni di correlazione in modo perturbativo rispetto alla costante di accoppiamento  $g$ .

## Recap del Primo Ordine

Al primo ordine (ordine  $g$ ), abbiamo incontrato il diagramma "Tadpole". L'espansione coinvolge il calcolo del valore di aspettazione Gaussiano dei campi. Per la funzione di correlazione a due punti  $\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle$ , questo ordine coinvolge un singolo vertice interno di interazione.

Ora ci muoviamo verso l'espansione al **secondo ordine** (ordine  $g^2$ ). Calcoleremo il numeratore dell'espansione perturbativa, limitandoci ai **diagrammi connessi**, poiché i diagrammi disconnessi si cancellano con il denominatore (la funzione di partizione  $\mathcal{Z}$ ), come visto nel Teorema dei Cluster Connessi.

## 19.1 Il Contributo al Secondo Ordine

Al secondo ordine, abbiamo due vertici di interazione. Denotiamo i punti esterni come  $x$  e  $0$ , e le variabili di integrazione interne (i vertici) come  $y_1$  e  $y_2$ . Il termine che dobbiamo valutare è proporzionale a:

$$\frac{1}{2!}(-g)^2 \int dy_1 dy_2 \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y_1)\varphi^4(y_2) \rangle_0 \quad (19.1)$$

dove  $\langle \dots \rangle_0$  denota il valore di aspettazione Gaussiano (nella teoria libera).

Abbiamo un totale di 10 campi da contrarre:

- 2 campi esterni:  $\varphi(x), \varphi(0)$ ;
- 8 campi interni: 4 al vertice  $y_1$  e 4 al vertice  $y_2$ .

Il numero totale di modi per contrarre questi campi in coppie è dato dal Teorema di Wick come il doppio fattoriale  $(10 - 1)!! = 945$ . Tuttavia, siamo interessati solo alle topologie distinte **connesse**.

**Fattore di Simmetria:**

Consideriamo la contrazione del campo esterno  $\varphi(x)$  con un campo interno. Possiamo connettere  $\varphi(x)$  a un campo nel vertice  $y_1$  (4 modi) oppure a un campo nel vertice  $y_2$  (4 modi). A causa della simmetria tra le variabili di integrazione  $y_1$  e  $y_2$ , queste due scelte sono equivalenti. Fissando la connessione a  $y_1$ , moltiplichiamo per un fattore 2, il quale cancella esattamente il fattore  $1/2!$  proveniente dall'espansione di Taylor.

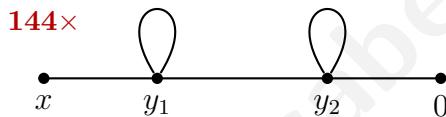
Pertanto, assumiamo che  $x$  si connetta a  $y_1$  e non dividiamo più per  $2!$ .

Esistono due topologie connesse distinte per la funzione a due punti all'ordine  $g^2$ : il diagramma "Cactus" e il diagramma "Hamburger".

**Il Diagramma Cactus (Double Tadpole)**

Questo diagramma è "riducibile a una particella" (one-particle reducible), ovvero può essere separato in due parti disconnesse tagliando una singola linea interna.

- **Struttura:**



- **Calcolo della Molteplicità:**

1. Connettere  $\varphi(x)$  a  $y_1$ : 4 modi.
2. Connettere  $\varphi(0)$  a  $y_2$ : 4 modi.
3. Formare un loop su  $y_1$  (contrarre 2 dei restanti 3 campi): 3 modi.
4. Formare un loop su  $y_2$  (contrarre 2 dei restanti 3 campi): 3 modi.
5. Connettere il campo rimanente in  $y_1$  al campo rimanente in  $y_2$ : 1 modo.

- **Molteplicità Totale:**  $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 1 = 144$ .

**Il Diagramma Hamburger (Setting Sun)**

Questo diagramma connette  $y_1$  e  $y_2$  tramite tre linee interne. Non può essere separato tagliando una singola linea (è irriducibile).

- **Struttura:**



- **Calcolo della Molteplicità:**

1. Connettere  $\varphi(x)$  a  $y_1$ : 4 modi.
2. Connettere  $\varphi(0)$  a  $y_2$ : 4 modi.
3. Connettere i restanti 3 campi in  $y_1$  ai 3 campi in  $y_2$ : ci sono  $3! = 6$  modi.

- **Molteplicità Totale:**  $4 \times 4 \times 6 = 96$ .

## 19.2 Regole di Feynman Generali per la Molteplicità

Invece di contare le contrazioni manualmente caso per caso, possiamo utilizzare i fattori di simmetria.

### Regola della Molteplicità

Per un diagramma con  $N$  vertici nella teoria  $\varphi^4$ :

$$\text{Molteplicità} = \frac{(24)^N}{S} \quad (19.2)$$

Dove:

- $24 = 4!$  deriva dalla costante di accoppiamento del vertice  $\frac{g}{4!}$ .
- $S$  è il **Fattore di Simmetria** del diagramma (il numero di permutazioni delle linee interne o dei vertici che lasciano il diagramma invariato).

### Applicazione della Regola

- **Diagramma Cactus:**

- Fattore base:  $24^2$  (due vertici).
- Fattore di simmetria  $S$ : Ogni loop tadpole ha una simmetria di 2 (possiamo scambiare i due estremi della linea che forma il loop). Avendo due tadpole,  $S = 2 \times 2 = 4$ .
- Risultato:  $\frac{24 \times 24}{4} = 144$ . Coincide con il conteggio delle contrazioni.

- **Diagramma Hamburger:**

- Fattore base:  $24^2$ .
- Fattore di simmetria  $S$ : Ci sono 3 linee parallele tra  $y_1$  e  $y_2$ . Possiamo permutare queste linee in  $3! = 6$  modi senza cambiare la topologia.
- Risultato:  $\frac{24 \times 24}{6} = 96$ . Coincide con il conteggio delle contrazioni.

## 19.3 Il Controllo Zero-Dimensionale

Un metodo potente per verificare se abbiamo individuato tutti i diagrammi e se le molteplicità sono corrette è utilizzare la **Teoria di Campo Zero-Dimensionale**. In 0-D, l'integrale funzionale si riduce a un integrale standard su una variabile  $z$ :

$$\mathcal{Z} = \int dz e^{-S(z)}, \quad S(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{g}{4!} z^4 \quad (19.3)$$

La somma di tutte le molteplicità a un dato ordine  $k$  deve egualare il coefficiente di  $g^k$  nell'espansione perturbativa del valore di aspettazione  $\langle z^2 \rangle$ .

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\int dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{24} z^4}}{\int dz e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{24} z^4}} \quad (19.4)$$

Espandendo l'esponenziale e calcolando i momenti usando l'integrazione Gaussiana ( $\langle z^{2n} \rangle_0 = (2n - 1)!!$ ), possiamo verificare che la somma dei pesi dei diagrammi ( $144 + 96 + \dots$ ) corrisponda esattamente ai coefficienti dell'espansione esatta.

# Lezione 20

Data: 01/12/2025

## 20.1 Calcolo degli Integrali nei Diagrammi di Feynman

Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto l'espansione perturbativa della funzione di correlazione a due punti  $\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle$  in termini della costante di accoppiamento  $g$ . Abbiamo identificato i diagrammi di Feynman rilevanti all'ordine  $g^2$ . L'obiettivo di questa lezione è calcolare esplicitamente il valore di questi diagrammi.

Nello spazio delle posizioni, questi calcoli coinvolgono integrali di prodotti di propagatori  $G_0(x - y)$  che possono diventare estremamente lunghi e complessi da risolvere ("It's too long"). La strategia risolutiva standard consiste nel passare allo Spazio di Fourier (spazio dei momenti), dove le operazioni di convoluzione si trasformano in semplici prodotti.

Ricordiamo che il propagatore libero in spazio di Fourier è dato da:

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{1}{\mu + p^2} \quad (20.1)$$

dove  $\mu$  rappresenta la massa quadra e  $p^2$  è il modulo quadro del momento. Le relazioni di trasformata sono:

$$G_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \tilde{G}_0(p) \quad (20.2)$$

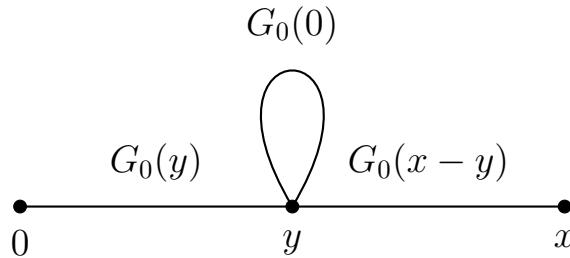
$$\tilde{G}_0(p) = \int_V d^D x e^{-ip \cdot x} G_0(x) \quad (20.3)$$

Inoltre, utilizzeremo l'identità della delta di Dirac in spazio  $D$ -dimensionale:

$$\delta^{(D)}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \quad (20.4)$$

### 20.1.1 Il Diagramma ad una Bolla

Consideriamo il diagramma connesso con una bolla:



Nello spazio delle posizioni, il contributo  $D_1$  associato a questo diagramma è un integrale sul vertice interno  $y$ :

$$D_1(x) = \int d^D y G_0(x-y) G_0(y) G_0(0) \quad (20.5)$$

Per semplicità, analizziamo la struttura base della convoluzione di due propagatori con un loop locale (che è costante nello spazio). Il termine cruciale è la convoluzione:

$$(G_0 * G_0)(x) = \int d^D y G_0(x-y) G_0(y) \quad (20.6)$$

Sfruttiamo il **Teorema della Convoluzione**: la trasformata di Fourier di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier.

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \cdot \mathcal{F}\{g(x)\} \quad (20.7)$$

Dimostriamolo esplicitamente inserendo le trasformate di Fourier nell'integrale spaziale:

$$\int d^D y G_0(x-y) G_0(y) = \int d^D y \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{G}_0(p) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iqy} \tilde{G}_0(q) \quad (20.8)$$

Raggruppiamo i termini dipendenti da  $y$ :

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{ipx} \tilde{G}_0(p) \tilde{G}_0(q) \left[ \int d^D y e^{i(q-p) \cdot y} \right] \quad (20.9)$$

L'integrale in  $dy$  genera una delta di Dirac:

$$\int d^D y e^{i(q-p) \cdot y} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(q-p) \quad (20.10)$$

Sostituendo la delta nell'espressione e integrando in  $dq$ :

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \tilde{G}_0(p) \tilde{G}_0(p) e^{ipx} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ipx} [\tilde{G}_0(p)]^2 = \mathcal{F}^{-1} [\tilde{G}_0(p)]^2 \quad (20.11)$$

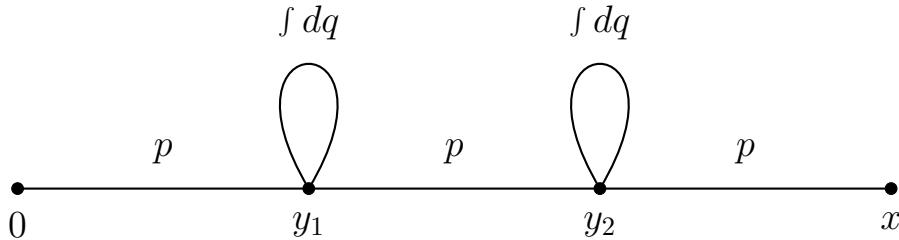
Quindi, nello spazio dei momenti, la convoluzione diventa:

#### Diagramma ad una bolla

$$\tilde{D}_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^D} [\tilde{G}_0(p)]^2 \cdot \int d^D q \tilde{G}_0(q) \quad (20.12)$$

### 20.1.2 Il Diagramma a Doppia Bolla

Consideriamo il diagramma connesso di ordine  $g^2$  costituito da due "tadpoles" (bolle) disgiunti posti sulla linea del propagatore.



Questo diagramma coinvolge due vertici interni  $y_1$  e  $y_2$ . La struttura nello spazio reale è una catena di convoluzioni moltiplicata per i loop locali:

$$D_2(x) = \underbrace{\int d^D y_1 \int d^D y_2 G_0(x - y_2) G_0(y_2 - y_1) G_0(y_1)}_{\text{Linea Principale}} \times \underbrace{[G_0(0)]^2}_{\text{Loops}} \quad (20.13)$$

Possiamo separare la parte relativa ai loop locali, che non dipende dalle coordinate di integrazione, portandola fuori dall'integrale. Ricordando che  $G_0(0)$  in spazio dei momenti è un integrale su  $q$ :

$$= \left( \frac{1}{(2\pi)^D} \int \tilde{G}_0(q) d^D q \right)^2 \int d^D y_2 \int d^D y_1 (G_0(x - y_2) G_0(y_2 - y_1)) G_0(y_1) \quad (20.14)$$

Per risolvere l'integrale spaziale rimanente, riconosciamo la struttura di una convoluzione nidificata:

$$\int d^D y_2 G_0(x - y_2) \underbrace{\left[ \int d^D y_1 G_0(y_2 - y_1) G_0(y_1) \right]}_{\text{Convoluzione interna}} \quad (20.15)$$

Utilizziamo la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  e la sua inversa  $\mathcal{F}^{-1}$ . L'integrale interno in  $d^D y_1$  è una convoluzione tra la funzione  $G_0(y_2 - y_1)$  e  $G_0(y_1)$ . Possiamo quindi riscrivere l'integrale come:

$$\int d^D y_2 \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}(G_0(x - y_2) G_0(y_2 - y_1)) \cdot \mathcal{F}(G_0(y_1)) \} \quad (20.16)$$

Procedendo con l'integrale esterno su  $y_2$ , riconosciamo che anche questo è una convoluzione, la seconda. Applicando nuovamente il teorema della convoluzione, otteniamo il prodotto delle trasformate di Fourier di tre propagatori:

$$= \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[G_0]^3] \quad (20.17)$$

Quindi, il risultato finale nello spazio dei momenti è dato dal prodotto del cubo del propagatore (dalla linea principale) per il quadrato dell'integrale di loop:

#### Diagramma a Doppia Bolla

$$\tilde{D}_2(p)^{00} = \frac{1}{(2\pi)^D} [\tilde{G}_0(p)]^3 \left( \int d^D q \tilde{G}_0(q) \right)^2 \quad (20.18)$$

### 20.1.3 Il Diagramma a Cactus

Consideriamo ora il diagramma a "Cactus". In questo diagramma, abbiamo un vertice interno  $y_1$  sulla linea principale, e un secondo vertice  $y_2$  che si trova "sopra" il primo, formando un loop sopra un loop.



Nello spazio delle posizioni, la struttura è diversa dal caso precedente. Abbiamo sempre una linea principale che passa per  $y_1$ , ma ora  $y_2$  non è sulla linea principale; è connesso solo a  $y_1$  tramite un loop. L'espressione associata a questo diagramma è:

$$\int d^D y_1 \int d^D y_2 G_0(x - y_2) G_0(y_2) G_0(y_1 - y_2)^2 G_0(0) \quad (20.19)$$

Possiamo portare fuori dall'integrale spaziale il termine  $G_0(0)$  relativo al loop superiore, che è costante. Esprimendolo in trasformata di Fourier come  $\int \tilde{G}_0(q) d^D q$ , l'espressione diventa:

$$= (2\pi)^{-D} \int_B \tilde{G}_0(q) d^D q \int d^D y_1 \int d^D y_2 G_{x2} G_2 G_{21}^2 \quad (20.20)$$

abbiamo usato la notazione sintetica:  $G_{x2} = G_0(x - y_2)$ ,  $G_2 = G_0(y_2)$ ,  $G_{21} = G_0(y_1 - y_2)$ . Per calcolare l'integrale rimanente, passiamo allo spazio dei momenti sostituendo ogni propagatore con la sua rappresentazione integrale di Fourier. Introduciamo i momenti  $p_1, p_2, p_3, p_4$ :

$$= \int_V d^D y_1 \int_V d^D y_2 \int_B d^D p_1 \int_B d^D p_2 \int_B d^D p_3 \int_B d^D p_4 e^{ip_1(x-y_2)} \tilde{G}_0(p_1) e^{ip_2 y_2} \tilde{G}_0(p_2) \\ \cdot e^{ip_3(y_1-y_2)} \tilde{G}_0(p_3) e^{ip_4(y_1-y_2)} \tilde{G}_0(p_4)$$

Ora integriamo sulle variabili spaziali  $y_1$  e  $y_2$  per ottenere le funzioni Delta di conservazione del momento. L'integrale su  $y_1$  isola i termini dipendenti da  $y_1$  ( $p_3$  e  $p_4$ ):

$$\frac{\int d^D y_1}{(2\pi)^D} \longrightarrow \delta^{(D)}(p_4 - p_3) \quad (20.21)$$

L'integrale su  $y_2$  raccoglie tutti i momenti che entrano/escono da  $y_2$ :

$$\frac{\int d^D y_2}{(2\pi)^D} \longrightarrow \delta^{(D)}(-p_1 + p_2 + p_3 - p_4) \quad (20.22)$$

Utilizzando le Delta per integrare sui momenti ridondanti, otteniamo il risultato finale. Si noti che i momenti del loop inferiore ( $p_3, p_4$ ) sono disaccoppiati dal momento esterno  $p_1$

(che attraversa la linea principale come  $p$ ). L'espressione finale nello spazio dei momenti è data dal prodotto del propagatore esterno, del tadpole, e di un integrale di loop:

$$D_2^8 = \mathcal{F}^{-1} \left\{ (2\pi)^{-D} \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(k)^2 \right\} \quad (20.23)$$

#### Diagramma a Cactus

$$\tilde{D}_2^8(p) = \frac{1}{(2\pi)^D} [\tilde{G}_0(p)]^2 \cdot \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(k)^2 \quad (20.24)$$

#### 20.1.4 Il Diagramma Tramonto

Consideriamo infine il diagramma irreducibile a due vertici  $y_1, y_2$  connessi da tre linee interne.



Nello spazio delle posizioni:

$$D_{sun}(x) = \int d^D y_1 \int d^D y_2 G_0(x - y_1) [G_0(y_1 - y_2)]^3 G_0(y_2) \quad (20.25)$$

Nello spazio dei momenti, la conservazione del quadrimpulso implica che la somma dei momenti sulle tre linee interne deve essere uguale al momento esterno  $p$ . Se chiamiamo  $q_1$  e  $q_2$  due momenti di loop indipendenti, il terzo momento è fissato a  $p - q_1 - q_2$ .

L'espressione finale è:

#### Diagramma a Cactus

$$\tilde{D}_{sun}(p) = \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q_1) \tilde{G}_0(q_2) \tilde{G}_0(p - q_1 - q_2) \quad (20.26)$$

Questo diagramma è l'unico al secondo ordine che introduce una dipendenza non banale dal momento esterno  $p$ .

## 20.2 Regole Generali di Feynman

Per calcolare sistematicamente i contributi perturbativi alla funzione di correlazione (in particolare la funzione a 2 punti  $\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle$  o il propagatore completo  $\tilde{G}(p)$ ), si applicano le seguenti regole generali, valide all'ordine  $n$ -esimo dello sviluppo perturbativo ( $\mathcal{O}(g^n)$ ).

- Linee Esterne:** Ad ogni linea esterna del diagramma è associato un momento  $p$ . Per la funzione di correlazione a 2 punti, questo contribuisce con un fattore pari al quadrato del propagatore libero:

$$\text{Fattore: } \tilde{G}_0(p)^2 \quad (20.27)$$

Questo fattore rappresenta i due "gambi" del diagramma che connettono la parte interna ai punti esterni 0 e  $x$ .

- Linee Interne:** Ad ogni linea interna è associato un momento variabile  $q_i$  che scorre in una data direzione.

$$\text{Fattore: } \tilde{G}_0(q_i) \quad (20.28)$$

- Vertici:** Ad ogni vertice di interazione (dove si incontrano 4 linee nella teoria  $\varphi^4$ ) deve essere conservato il momento totale. Questo è imposto da una funzione Delta di Dirac:

$$(2\pi)^D \delta^{(D)} \left( \sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}} \right) \quad (20.29)$$

Ad ogni vertice è associato anche il fattore di accoppiamento  $-12g$ .

- Integrazione sui Loop:** All'ordine  $\mathcal{O}(g^n)$ , ci sono  $n$  vertici e un certo numero di momenti interni liberi. Si deve integrare su tutti i momenti interni indipendenti (momenti di loop)  $q_k$ :

$$\int \frac{d^D q_k}{(2\pi)^D} \quad (20.30)$$

## 20.3 Irriducibilità a una Particella (1PI)

Un concetto fondamentale per organizzare la serie perturbativa è quello di **Irriducibilità a una Particella** (One-Particle Irreducible, 1PI).

### Definizione 1PI

Un diagramma si dice **1PI** se **non può** essere diviso in due diagrammi disconnessi tagliando una singola linea interna.

Analizziamo alcuni esempi grafici per chiarire la distinzione:

- **Diagramma 1PI (Setting Sun, singola bolla connessa, Cactus):**



1PI

- **Diagramma Riducibile (NON 1PI):**



### 20.3.1 Sviluppo in Serie della Funzione di Correlazione

Possiamo ora scrivere esplicitamente lo sviluppo perturbativo della funzione di correlazione a due punti completa  $\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle$  (o equivalentemente del propagatore  $\tilde{G}(p)$ ) sommando i contributi di tutti i diagrammi topologicamente distinti, pesati dai rispettivi fattori di simmetria e dalle costanti di accoppiamento. La serie fino all'ordine  $g^2$  è data da:

$$\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle = 1 + (-12g)D_1 + (144g^2)D_2^{00} + (144g^2)D_2^8 + (96g^2)D_2^{sun} + O(g^3) \quad (20.31)$$

- **Ordine 0:** Il propagatore libero (linea semplice).
- **Ordine  $g$ :** Il diagramma Tadpole (una bolla).
- **Ordine  $g^2$ :** Compaiono tre contributi distinti:
  1. Double Scoop.
  2. Cactus.
  3. Setting Sun.

Ecco la rappresentazione diagrammatica corrispondente all'Equazione (20.31):



### 20.3.2 Risommazione della Serie e Autoenergia

Osservando la serie sopra, notiamo che alcuni diagrammi (come il Double Scoop e il Cactus) sono semplici ripetizioni o combinazioni di diagrammi di ordine inferiore. Per organizzare meglio la serie, introduciamo il concetto di **diagramma amputato**. Definiamo  $\Sigma_1$  come il diagramma a una bolla "amputato", ovvero privato delle gambe esterne e dei fattori di accoppiamento esterni:

$$\Sigma_1^{...0...} \equiv \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) \quad (20.32)$$

L'integrale  $\Sigma_1$  è una costante (non dipende dal momento esterno  $p$ ). Possiamo ora riscrivere il propagatore completo  $\tilde{G}_\Omega(p)$  sommando su tutte le possibili occorrenze di queste bolle lungo la linea di propagazione:

$$\tilde{G}_\Omega(p) = \tilde{G}_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_0(p) \left( -12g\tilde{G}_0(p)\Sigma_1 \right)^k + \dots \quad (20.33)$$

Questa è una serie geometrica della forma  $\sum x^k$  con ragione  $x = -12g\tilde{G}_0(p)\Sigma_1$ . Sommando la serie otteniamo:

$$\tilde{G}_\Omega(p) = \tilde{G}_0(p) \left( \frac{1}{1 + 12g\tilde{G}_0(p)\Sigma_1} \right) \quad (20.34)$$

Semplificando l'espressione:

$$\tilde{G}_\Omega(p) = \frac{1}{\tilde{G}_0(p)^{-1} + 12g\Sigma_1} \quad (20.35)$$

Ricordando che l'inverso del propagatore libero è  $\tilde{G}_0(p)^{-1} = p^2 + \mu$ , arriviamo all'espressione finale risommata (al primo ordine di autoenergia):

### Propagatore Completo

$$\tilde{G}_\Omega(p) = \frac{1}{p^2 + \mu + 12g\Sigma_1} \quad (20.36)$$

Questa equazione mostra che l'effetto delle fluttuazioni quantistiche/termiche a questo ordine è semplicemente quello di spostare la massa (o la temperatura critica) del sistema:

$$\mu_{eff} = \mu + 12g\Sigma_1 \quad (20.37)$$

## 20.4 Funzione di Correlazione a 4 Punti

Consideriamo infine la funzione di correlazione a 4 punti  $\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle_0$ . Nello sviluppo perturbativo, i diagrammi che contribuiscono a questa funzione possono essere raggruppati in 3 classi fondamentali:

### 1. Diagrammi Completamente Disconnessi

Questi diagrammi contengono parti (come le bolle di vuoto) che non sono connesse a nessuna delle linee esterne. Questi diagrammi vengono cancellati automaticamente dal denominatore della funzione di correlazione ( $\mathcal{Z}$ ).

### 2. Diagrammi Parzialmente Connessi (Riducibili)

In questi diagrammi, tutte le parti sono connesse a qualche linea esterna, ma il diagramma complessivo è diviso in due o più componenti separate. Questi termini corrispondono al prodotto di funzioni a due punti (es.  $\langle \varphi_1\varphi_2 \rangle \langle \varphi_3\varphi_4 \rangle$ ) e vengono rimossi prendendo la **parte connessa** della funzione di correlazione.

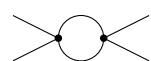
### 3. Diagrammi Completamente Connessi

Questa è la classe che contiene la vera informazione sull'interazione. Tutti e 4 i punti esterni sono connessi tra loro.

- **Ordine 1:** Il diagramma a "X" (un singolo vertice).



- **Ordine 2:** Diagrammi a loop che connettono i 4 punti.



github.com/elisabetagnello

# Lezione 22

Data: 15/12/2025

## 21.1 Gruppo di Rinormalizzazione

L'obiettivo principale di questa trattazione è dare un senso alla teoria perturbativa vicino al punto critico. Sappiamo che l'approccio perturbativo standard crolla in prossimità della transizione di fase. In particolare, consideriamo la costante di accoppiamento adimensionale  $\tilde{g}$ . In  $D$  dimensioni, la costante di accoppiamento  $g$  ha dimensione di massa  $[g] = m^{4-D}$ . Definiamo quindi la costante adimensionale come:

### Costante Adimensionale

$$\tilde{g} = \frac{g}{m^{4-D}} = g \xi^{4-D} \quad (21.1)$$

dove abbiamo usato la relazione di scaling  $\xi \sim m^{-1}$ .

È noto che, nel modello Gaussiano ( $g = 0$ ), avvicinandosi al punto critico, la massa tende a zero ( $m \rightarrow 0$ ) e, di conseguenza, la lunghezza di correlazione diverge ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Questo implica un comportamento patologico per la nostra costante di accoppiamento adimensionale:

$$\tilde{g} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \infty \quad (21.2)$$

Questo risultato segnala che l'approccio perturbativo standard crolla in prossimità del punto critico. Il parametro di espansione  $\tilde{g}$  diventa infinitamente grande. Questo rende l'approccio perturbativo standard inutilizzabile proprio nella regione di maggiore interesse fisico, dove si manifestano i fenomeni critici. Tuttavia, il punto critico esiste ed è ben definito fisicamente; ci sono proprietà misurabili a cui corrispondono valori finiti.

### 21.1.1 Modello Gaussiano e Rinormalizzazione

Consideriamo il Modello Gaussiano, definito da  $g = 0$ . In questo contesto, la funzione di Green è data da:

$$G(p) = \frac{Z_1}{p^2 + m^2 + O(p^4)} \quad (21.3)$$

Per il modello libero ( $g = 0$ ), la costante di rinormalizzazione della funzione d'onda è  $Z_1 = 1$ , che implica un esponente critico  $\eta = 0$ . Tuttavia, quando  $g \neq 0$ , è necessario

introdurre una rinormalizzazione dei campi per assorbire le divergenze. Definiamo il campo rinormalizzato  $\varphi_R$  come:

### Campo Rinormalizzato

$$\varphi_R(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{\sqrt{Z_1}} \quad (21.4)$$

La funzione di Green rinormalizzata  $G_R(p)$  assume quindi la forma:

$$G_R(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + O(p^4)} \quad (21.5)$$

Questa procedura è essenziale per gestire le correzioni quantistiche e le divergenze che emergono nelle teorie interagenti.

### La Dimensione Critica

La dimensione critica superiore, al di sopra della quale la teoria Gaussiana è valida, è  $D_c^u = 4$ . Per studiare il comportamento critico per  $D < 4$ , abbiamo due strategie principali:

- Espansione in  $\epsilon$**  : Ci allontaniamo perturbativamente dalla dimensione critica superiore ponendo:

$$D = D_c^u - \epsilon = 4 - \epsilon \quad (21.6)$$

L'idea è che per  $\epsilon$  piccolo le divergenze siano controllabili.

- Dimensione Fissa (Parisi)**: Siamo interessati fisicamente al caso:

$$D = 3 \implies \tilde{g} = \frac{g}{m} \quad (21.7)$$

Parisi trovò un modo per calcolare gli esponenti critici direttamente a dimensione fissa ( $D = 3$ ), senza ricorrere all'espansione dimensionale, riorganizzando la serie perturbativa.

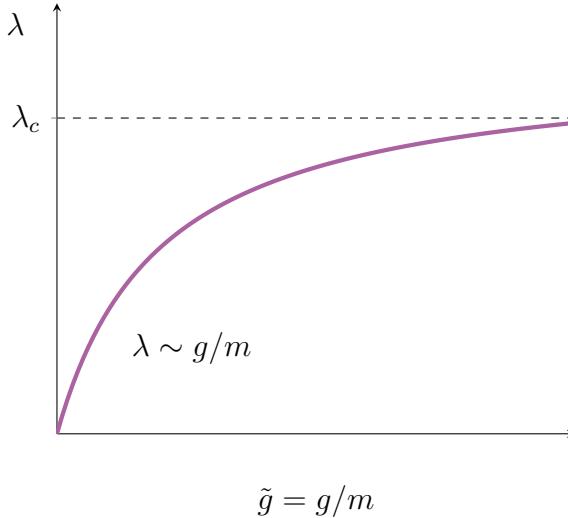
L'approccio che seguiremo ora (Gruppo di Rinormalizzazione nello Spazio dei Parametri) ci permetterà di lavorare con una costante di accoppiamento rinormalizzata che rimane finita anche quando  $\tilde{g}$  diverge nel limite  $D = 3$ .

### 21.1.2 La Nuova Costante di Accoppiamento

Poiché  $\tilde{g}$  diverge al punto critico, non può essere utilizzata come parametro di espansione affidabile in quel regime. Tuttavia, la teoria fisica sottostante continua ad avere senso; la fisica non diverge, è solo la nostra parametrizzazione che fallisce. Introduciamo quindi una nuova costante di accoppiamento  $\lambda$ , che deve rimanere finita e ben definita anche nel limite critico.

Ci aspettiamo che  $\lambda$  si comporti come  $\tilde{g}$  per piccoli valori di accoppiamento, ma che saturi a un valore finito  $\lambda_c$  quando  $\tilde{g} \rightarrow \infty$ .

L'idea centrale è trasformare l'espansione perturbativa in potenze di  $\tilde{g}$  (che diverge) in un'espansione perturbativa in potenze di  $\lambda$  (che rimane finita).



**Figura 21.1:** Comportamento di saturazione di  $\lambda$  in funzione di  $\tilde{g}$ .

Analizziamo il comportamento della massa in prossimità della criticità. Dalla teoria dello scaling sappiamo che:

$$m^2 \simeq (\mu - \mu_c)^{2\nu} \implies (m^2)^{\frac{1}{2\nu}} \sim \mu - \mu_c \quad (21.8)$$

Derivando rispetto a  $m^2$ :

$$\frac{d\mu}{dm^2} \sim \frac{1}{2\nu} (m^2)^{\frac{1}{2\nu}-1} \quad (21.9)$$

Segue:

$$\log\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \approx \left(\frac{1}{2\nu} - 1\right) \log m^2 + \text{cost.} \quad (21.10)$$

Derivando nuovamente si trova:

$$m^2 \frac{d}{dm^2} \log\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\nu} - 1 \quad (21.11)$$

Definiamo la funzione  $A(\tilde{g})$  proprio come questa quantità:

$$A(\tilde{g}) = A(g/m) = \sum_k A_k \tilde{g}^k \equiv m^2 \frac{d}{dm^2} \log\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \quad (21.12)$$

I coefficienti  $\{A_k\}$  dell'espansione in  $\tilde{g}$  non sono direttamente utili per studiare il limite asintotico  $\tilde{g} \rightarrow \infty$ . Tuttavia, sappiamo che la funzione limite deve tendere a una costante legata all'esponente  $\nu$ :

$$A(\tilde{g} \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\nu} - 1 \quad (21.13)$$

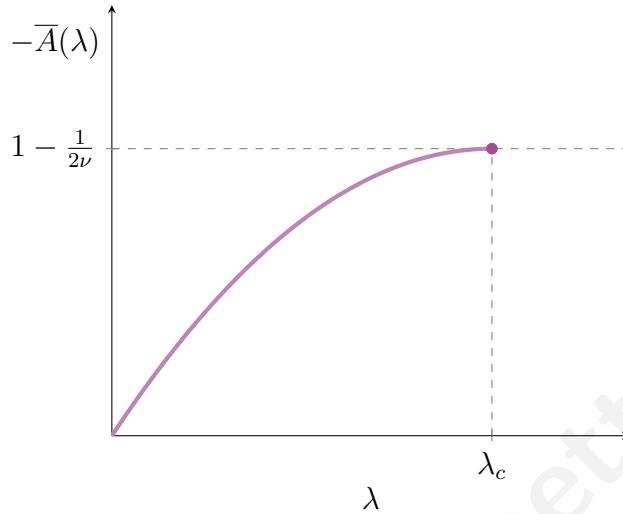
Definiamo ora la funzione rinormalizzata  $\bar{A}(\lambda)$  attraverso il cambio di variabile:

$$A(\tilde{g}(\lambda)) \equiv \bar{A}(\lambda) \quad (21.14)$$

Nel punto critico  $\lambda_c$  (che corrisponde a  $\tilde{g} = \infty$ ), avremo:

$$\bar{A}(\lambda_c) = \frac{1}{2\nu} - 1 \quad (21.15)$$

Di seguito è riportato il grafico qualitativo di  $-\bar{A}$  in funzione di  $\lambda$ .



**Figura 21.2:** Andamento qualitativo della funzione  $-\bar{A}(\lambda)$ .

### 21.1.3 Inversione della Serie

Per utilizzare praticamente questo formalismo, dobbiamo invertire la relazione funzionale tra  $\lambda$  e  $\tilde{g}$ . Assumiamo un'espansione perturbativa per  $\lambda$  in termini di  $\tilde{g}$ :

$$\lambda = \tilde{g} + B_2 \tilde{g}^2 + o(\tilde{g}^3) \quad (21.16)$$

Per piccoli  $\tilde{g}$ , possiamo approssimare la serie (riconoscendo la struttura di una serie geometrica o simile) come:

$$\lambda \sim \tilde{g}(1 + B_2 \tilde{g}) \sim \frac{\tilde{g}}{1 - B_2 \tilde{g}} \quad (21.17)$$

Invertendo questa relazione per esprimere  $\tilde{g}$  in funzione di  $\lambda$ :

$$\tilde{g} \sim \lambda(1 - B_2 \lambda) \quad (21.18)$$

Formalmente, l'inversione della serie ci fornisce:

$$\tilde{g} = \lambda - B_2 \lambda^2 + o(\lambda^3) \quad (21.19)$$

Sostituendo ora questa espressione nell'espansione originale di  $A(\tilde{g}) = A_1 \tilde{g} + A_2 \tilde{g}^2 + \dots$ :

$$\bar{A}(\lambda) = A_1(\lambda - B_2 \lambda^2) + A_2(\lambda - B_2 \lambda^2)^2 + o(\lambda^3) \quad (21.20)$$

Sviluppando e raccogliendo i termini dello stesso ordine:

$$\bar{A}(\lambda) = A_1 \lambda + (-A_1 B_2 + A_2) \lambda^2 + o(\lambda^3) \quad (21.21)$$

Per trovare il valore critico  $\lambda_c$ , utilizziamo la funzione beta  $\bar{\beta}(\lambda)$ , definita come:

$$\bar{\beta}(\lambda) = \beta(\tilde{g}(\lambda)) \quad \text{dove} \quad \beta(\tilde{g}) \equiv \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda(\tilde{g}) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} 0 \quad (21.22)$$

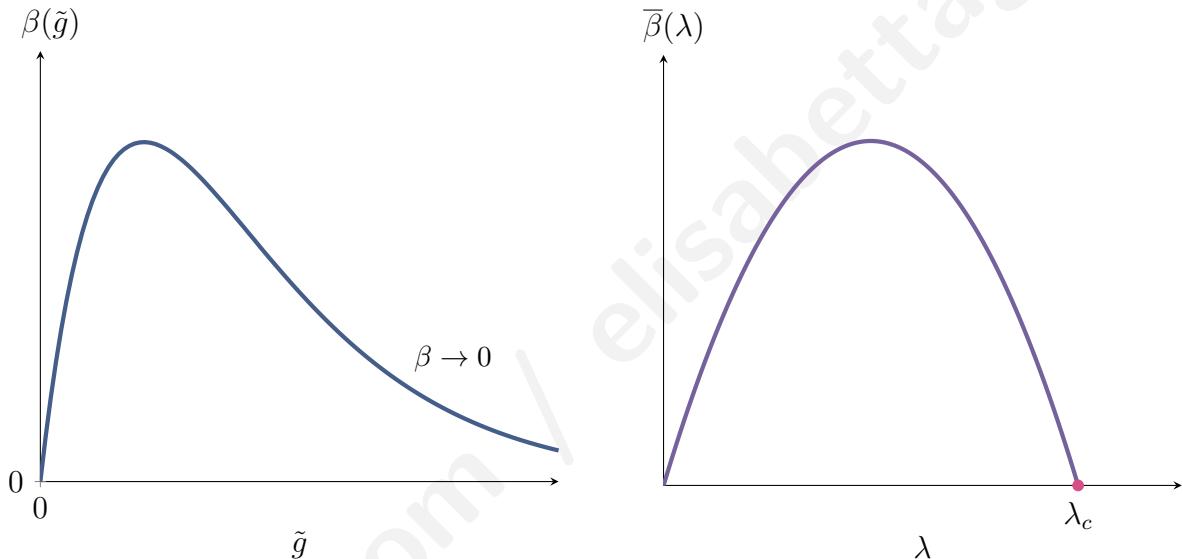
### Condizione di Criticità

La condizione di criticità è determinata dallo zero della funzione beta:

$$\bar{\beta}(\lambda_c) = 0 \quad (21.23)$$

Una volta determinato  $\lambda_c$ , possiamo calcolare l'esponente critico  $\nu$  usando la relazione derivata in precedenza:

$$\bar{A}(\lambda_c) = \frac{1}{2\nu} - 1 \quad (21.24)$$



**Figura 21.3:** Confronto tra le funzioni  $\beta(\tilde{g})$  e  $\bar{\beta}(\lambda)$

#### 21.1.4 Definizione Operativa e Calcolo Perturbativo

Per studiare il comportamento critico, è necessario definire una costante di accoppiamento rinormalizzata  $\lambda$  basata su osservabili fisiche che rimangano finite e ben definite. Selezioniamo a tale scopo la funzione di correlazione a 4 punti, connessa, amputata e rinormalizzata, calcolata a momento esterno nullo:

$$\lambda = m^{D-4} \Gamma_4^R(0, 0, 0, 0) \quad (21.25)$$

Questa grandezza può essere riscritta in termini dei campi nudi e di  $Z_1$ . All'ordine più basso (tree-level),  $Z_1 \approx 1$ , per cui la relazione con la funzione di vertice nuda  $\Gamma_4$  è:

$$\lambda = m^{D-4} Z_1^2 \Gamma_4 \approx m^{D-4} \Gamma_4^R \quad (21.26)$$

Inoltre, per la costante di accoppiamento adimensionale  $\tilde{g} = gm^{D-4}$ , vale la relazione asintotica:

$$\lambda = \tilde{g} + O(\tilde{g}^2) \quad \text{per } \tilde{g} \rightarrow 0 \quad (21.27)$$

### Calcolo dei Diagrammi a 1-Loop

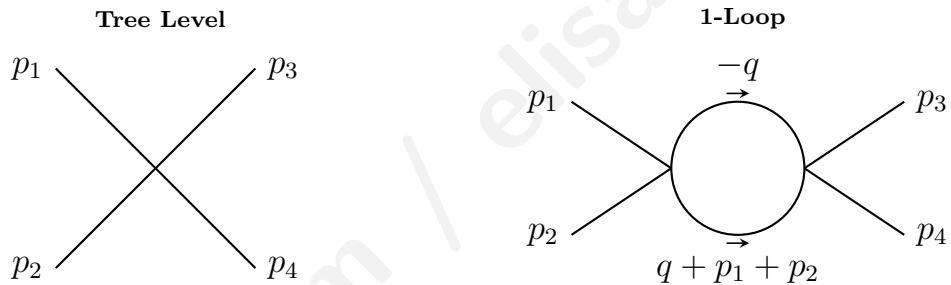
Facciamo il calcolo esatto fino a 1 loop. Di seguito i diagrammi rispettivamente per le funzioni a 2 e a 4 punti:



**Figura 21.4:** Diagrammi 1-loop per le funzioni a 2 punti (sx) e 4 punti (dx).

Cominciamo dalla funzione a 4 punti. I diagrammi di Feynman rilevanti per la funzione di vertice a 4 punti sono mostrati in Figura 21.5:

1. Il termine di ordine zero (Tree Level), proporzionale a  $g$ .
2. Le correzioni radiative a 1-loop, rappresentate topologicamente da una "bolla" inserita nel vertice, proporzionali a  $g^2$ .



**Figura 21.5:** Diagrammi di Feynman per la funzione a 4 punti.

Per costruire l'ampiezza corretta, è fondamentale analizzare la combinatoria e la topologia dei diagrammi:

- Il diagramma ad albero contribuisce semplicemente con un fattore  $g$ .
- **Canali di scattering:** Esistono 3 modi topologicamente distinti di connettere le linee esterne a 1-loop,. Matematicamente, questi corrispondono a combinare i momenti in ingresso come  $(p_1 + p_2)$ ,  $(p_1 + p_3)$  e  $(p_1 + p_4)$ .
- **Limite di momento nullo:** Poiché calcoliamo  $\Gamma_4$  a  $p_i = 0$ , i tre canali diventano cinematicamente indistinguibili. Ognuno fornisce lo stesso contributo integrale. Pertanto, sommiamo 3 volte lo stesso diagramma.
- **Fattore di simmetria:** Per ogni diagramma a bolla, esiste un fattore di simmetria  $S = 2$  dovuto allo scambio delle due linee interne equivalenti. Il peso combinatorico è quindi  $1/2$ .

Combinando questi elementi, il fattore moltiplicativo totale per l'integrale a loop è:  $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ . L'espressione formale per la funzione di vertice è:

$$\Gamma_4(0, 0, 0, 0) = g - \frac{3}{2}g^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \quad (21.28)$$

L'integrale divergente che appare nella (21.28) può essere calcolato utilizzando la regolarizzazione dimensionale (o i parametri di Feynman), ottenendo il noto risultato standard:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} (m)^{D-4} \quad (21.29)$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per  $\Gamma_4$ , otteniamo:

$$\Gamma_4(0) = g - \frac{3}{2}g^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} m^{D-4} \quad (21.30)$$

Per esprimere il risultato in termini della costante di accoppiamento adimensionale  $\tilde{g}$ , utilizziamo l'identità  $g = \tilde{g}m^{4-D}$ . Sostituendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(0) &= \tilde{g}m^{4-D} - \frac{3}{2}(\tilde{g}^2 m^{8-2D}) \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} m^{D-4} \\ &= \tilde{g}m^{4-D} - \frac{3}{2}\tilde{g}^2 m^{4-D} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \end{aligned} \quad (21.31)$$

Raccogliendo a fattor comune  $\tilde{g}m^{4-D}$ , otteniamo l'espressione finale per la funzione a 4 punti:

$$\Gamma_4(0, 0, 0, 0) = \tilde{g} m^{4-D} \left[ 1 - \frac{3}{2} \tilde{g} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \right] \quad (21.32)$$

Questo risultato conferma che le correzioni introducono una dipendenza non banale dalla dimensione  $D$  e dalla scala di massa  $m$ .

### Prossimi Passaggi dell'Algoritmo

Avendo completato il calcolo perturbativo di  $\Gamma_4$ , l'algoritmo di rinormalizzazione procede attraverso i seguenti step logici:

1. Determinare la funzione  $A$  come espansione in serie di potenze di  $\tilde{g}$ .
2. Esprimere  $A$  in funzione di  $\lambda$  (invece che di  $\tilde{g}$ ) per ottenere  $\bar{A}(\lambda)$ , eliminando la dipendenza esplicita dai parametri nudi.
3. Calcolare lo zero della funzione beta rinormalizzata,  $\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$ , per trovare il valore critico dell'accoppiamento.
4. Valutare  $\bar{A}(\lambda_c)$  per estrarre l'esponente critico  $\nu$ .