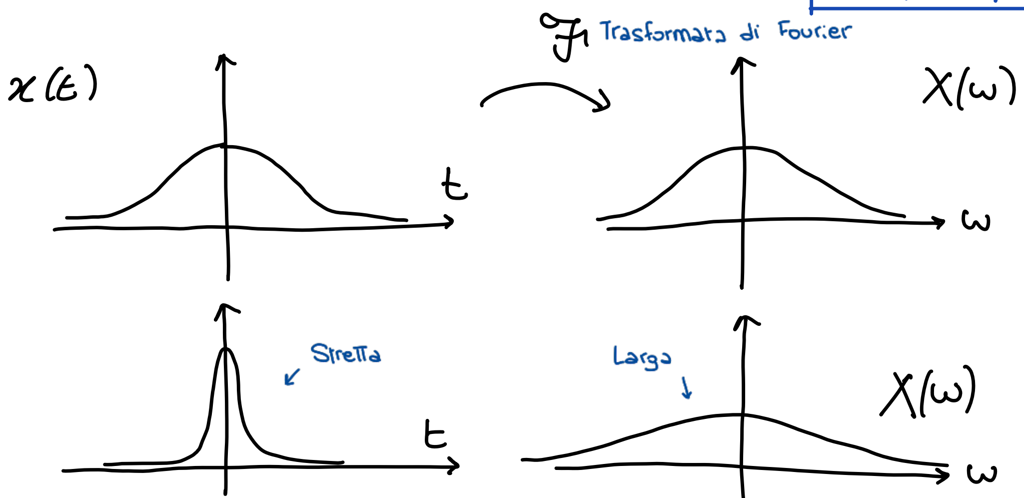
Problema di quantificare la localizzazione di un segnale nel tempo e nel dominio della frequenza
+ Principio di indeterminazione: anche se avessimo ~~strumenti privi di errori~~, un segnale non può essere concentrato sia nel dominio del tempo che della frequenza

LOCALIZZAZIONE E INDETERMINAZIONE

$\boxed{\text{FSP, Cap. 7}}$



Se un segnale è ben localizzato nel tempo, in frequenza il segnale sarà ben distribuito in un ampio intervallo e viceversa

Come si esprime, qualitativamente, la "localizzazione"?

Localizzazione nel tempo

è interpretabile come la densità di una v.a.

Dice dov'è il tempo in cui è maggiormente concentrato il segnale

$$\mu_t \overset{def}{=} \frac{1}{\|x\|_{L^2}^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|x(t)|^2\,dt \qquad \text{media/centro di } x(t)$$

è un simbolo per dire media e deviazione standard nel tempo

Questa invece è una variabile

Costante di normalizzazione

$$\Delta_t \overset{def}{=} \left(\frac{1}{\|x\|_{L^2}^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu_t)^2\,|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

costante

deviazione standard / spread / dispersione

Esprime l'ampiezza, cioè quanto il segnale si disperde rispetto alla media

media di una variabile aleatoria con densità $\frac{|x(t)|^2}{\|x\|_{L^2}^2} \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x(t)|^2}{\|x\|_{L^2}^2}\,dt = 1$$

Come traslazione, modulazione, dilatazione agiscono su μ e Δ.

Richiamo	$x(t)$	$X(\omega)$	
TRASLAZIONE	$(\Pi_{t_0}x)(t) = x(t-t_0)$	$e^{-jt_0\omega}X(\omega)$ (Modulazione in frequenza)	$t_0 \in \mathbb{R}$
MODULAZIONE	$(M_{\omega_0}x)(t) = e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$ (Traslazione in frequenza)	$\omega_0 \in \mathbb{R}$
DILATAZIONE	$(D_a x)(t) = \sqrt{a}\,x(at)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (Dilatazione $\frac{1}{a}$ in frequenza)	$a > 0$

"Duali" ↕

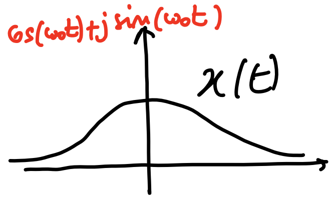
$\|D_a x\|_{L^2} = \|x\|_{L^2}$

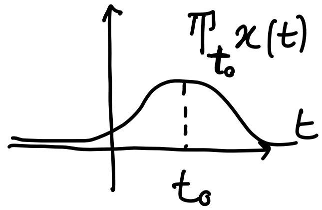
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega t}\,x(\underbrace{t-t_0}_{s})\,dt = e^{-jt_0\omega}\int_{\mathbb{R}} x(s)\,ds$$

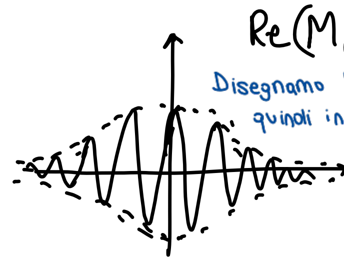
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega t}e^{j\omega_0 t}\,x(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,x(t)\,dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega t}\sqrt{a}\,x(\underbrace{at}_{s})\,dt = \frac{\sqrt{a}}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-j\frac{\omega}{a}s}\,x(s)\,ds \qquad dt = \frac{ds}{a}$$

$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$







Disegnamo la parte Re quindi introduciamo il coseno

$x(t)$	MEDIA μ_t	DEVIAZ. STANDARD Δ_t
$T_{t_0} x$	$\mu_t + t_0$	Δ_t
$M_{\omega_0} x$	μ_t	Δ_t
$D_a x$	$\frac{1}{a}\mu_t$	$\frac{1}{a}\Delta_t$

Centro di $T_{t_0} x(t)$:

$$\frac{1}{\|T_{t_0}x\|^2_{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\,|x(t-t_0)|^2\,dt$$

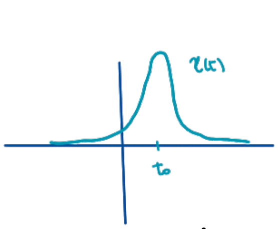
la traslazione e' un'isometria su L^2

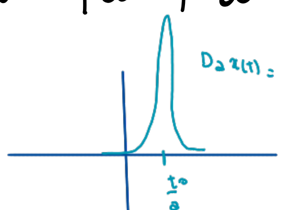
$$= \frac{1}{\|x\|^2_{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+t_0)\,|x(t)|^2\,dt$$

e' un numero

$$= \mu_t + \underbrace{\frac{1}{\|x\|^2_{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0\,|x(t)|^2\,dt}_{t_0}$$

$\to \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \|x\|^2_{L^2}$





$D_a x(t) = \sqrt{a}\,x(at)$

$a>1$

Localizzazione in frequenza

→ Come prima ma studiamo in frequenza

Queste formule guardano le trasformate del segnale

MEDIA

$$\mu_f = \frac{1}{2\pi \|x\|^2_{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\,|X(\omega)|^2\,d\omega$$

media di una variab. aleatoria con densità $\frac{1}{2\pi\|x\|_{L^2}} \cdot |X(\omega)|^2$

PARSEVAL $2\pi\|x\|^2_{L^2} = \|X\|^2_{L^2}$

DEVIAZIONE STANDARD

Spread in frequenza

$$\Delta_f = \left(\frac{1}{2\pi\|x\|^2_{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_f)^2\,|X(\omega)|^2\,d\omega \right)^{1/2}$$

$2\pi\|x\|^2_{L^2} = \|X\|^2_{L^2}$

COSTANTE

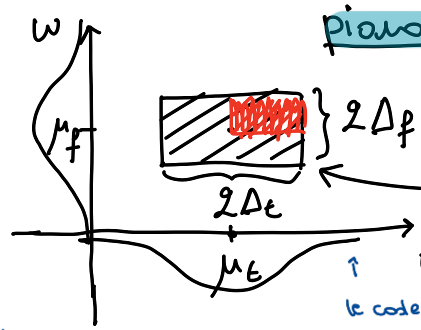
$x(t)$	μ_f	Δ_f
$T_{t_0} x$	μ_f	Δ_f
$M_{\omega_0} x$	$\mu_f + \omega_0$	Δ_f
$D_a x$	$a\mu_f$	$a\Delta_f$

Trasformazioni nel tempo

Tabella analoga a prima, ricordando le proprieta' "duali" delle prime

localizzazioni in frequenza

piano tempo-frequenza



Heisenberg box di $x(t)$

L'energia del segnale e' contenuta nel rettangolo

le code contengono la minor energia

Questo ci aiuta per scegliere bene le basi e ottenere rappresentazioni sparse

Principio di indeterminazione

(HEISENBERG ~1920)

Se $x \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{2}$.

Uguaglianza vale per segnali di gaussiane (traslate e modulate)

→ Un segnale non può essere concentrato sia nel dominio del tempo e nella frequenza

Non si può localizzare sia nel tempo che nella frequenza con arbitraria precisione

Dim Si dimostra che ci si può limitare $\underbrace{x \in S(\mathbb{R})}$ perché $S(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Sottospazio delle funz. C^∞ che decadono a zero per $|t| \to +\infty$ in maniera estremamente rapida.

Possiamo supporre $\mu_t = \mu_f = 0$, $\|x\|_{L^2} = 1$.

→ la normalizzazione non ha effetti sullo spread

→ altrimenti trasliamo o moduliamo senza cambiare lo spread

Definiamo gli operatori

$$P, Q : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$$

$$Px(t) = -j\, x'(t)$$

operatore formalmente autoaggiunto, operatore di derivazione

$$Qx(t) = t\, x(t)$$

operatore di moltiplicazione t

Risulta

1. $\langle Px, y\rangle_{L^2} = \langle x, Py\rangle_{L^2}$
2. $\langle Qx, y\rangle_{L^2} = \langle x, Qy\rangle_{L^2}$

$\forall x, y \in S(\mathbb{R})$ (P, Q sono detti **formalmente autoaggiunti**).

perche' in L^2 non riusciremmo a verificare le proprietà

Vediamo che la proprietà valga

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{-j x'(t)}_{Px(t)} \overline{y(t)}\, dt = -j \underbrace{\left[x(t) \overline{y(t)} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \overline{y'(t)}\, dt = \langle x, Py \rangle_{L^2} \right).$$

porto j sotto al coniugato quindi -j

3. • $QP - PQ = jI$ $\qquad$ $(QPx)(t) = -jtx'(t)$ $\quad Q(Px)$

$(QPx - PQx) = jx$ $\qquad$ $(PQx)(t) = -j\underbrace{(x(t) + tx'(t))}_{\frac{d}{dt}(tx(t))}$ $\quad P(Qx)$

$|\langle x, x\rangle| = |-j\langle x,x\rangle| = |\langle x, jx\rangle|$

Perciò

$$1 = \|x\|^2_{L^2} = \langle x, x\rangle \underset{\downarrow}{=} |\langle x, \underbrace{(QP-PQ)x}\rangle|$$

$\langle z,z\rangle = |\langle z,z\rangle|$ $\quad \langle x,z\rangle \in \mathbb{R}$

$\langle x, QPx - PQx\rangle = \langle x, QPx\rangle - \langle x, PQx\rangle$

$$= |\langle Qx, Px\rangle - \langle Px, Qx\rangle|$$

Disuguaglianza triangolare $\leq \underbrace{|\langle Qx, Px\rangle|}_{\leq \|Qx\|\cdot\|Px\|} + \underbrace{|\langle Px, Qx\rangle|}_{\leq \|Px\|\|Qx\|}$

Cauchy Schwarz

$$\leq 2\underbrace{\|Qx\|}_{\Delta_t}\underbrace{\|Px\|}_{\Delta_f}$$

$\to 1 \leq 2\Delta_t\Delta_f$ ✓

Ma manca da verificare

$$\|Qx\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2|x(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \Delta_t \quad (\text{perché } \mu_t = 0,\ \|x\|_{L^2} = 1).$$

$$\|Px\|_{L^2} = \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2 dt}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \omega^2|X(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} = \Delta_f$$

$\|x'\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\mathcal{F}x'\|_{L^2}$ PARSEVAL $\qquad (\text{perché } \mu_f = 0,\ \|x\|_{L^2} = 1).$

Quindi

$$1 \leq 2\,\Delta_t \cdot \Delta_f$$

$(\mathcal{F}x')(\omega) =$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega t} x'(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} -j\omega e^{-j\omega t}x(t)dt = j\omega X(\omega)$$

Il principio vale, più in generale, per coppie di operatori $P, Q : S \to S$ formalmente autoaggiunti e soddisfacenti $\underbrace{QP - PQ}_{=:[Q,P]} = jI$.

Valgono 1. & 2. $\qquad$ Vale 3.

$=:[Q,P]$ Commutatore di P, Q.

(Vedere: P. Dirac, Principles of Quantum Mechanics).

$\Delta_t \cdot \Delta_f = \frac{1}{2} \iff x(t)$ è una Gaussiana oppure più in generale una traslata, modulata o dilatata di una Gaussiana

↓

Sono detti stati coerenti e sono gli unici che soddisfano la disuguaglianza come uguaglianza

Sistemi strutturati di funzioni

→ Partendo da una funzione prototipo ψ (localizzata in frequenza e tempo vicino a zero) attraverso operazioni si ottengono questi sistemi

1) Sistemi di Gabor

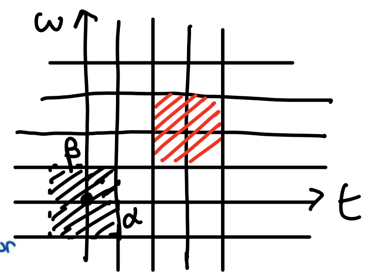
$$\{M_{\beta n} T_{\alpha m}\psi\}_{m,n\in\mathbb{Z}}, \quad \alpha,\beta>0$$

Passi per traslazione e modulazione

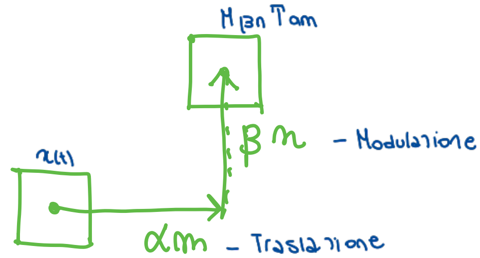
$$\psi_{m,n}(t) = M_{\beta n} T_{\alpha m}\psi(t) = e^{j\beta n t}\psi(t-\alpha m)$$

Al variare di m e n ricopriamo tutto il piano

ψ finestra, $\psi_{m,n}$ atomi di Gabor

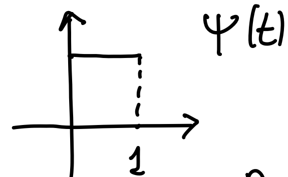


Esempio di sistema di Gabor



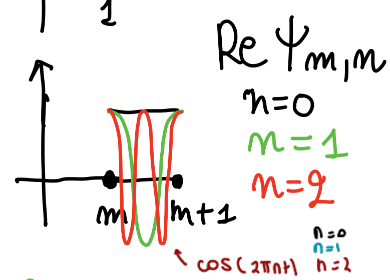
Grazie a questi parametri otteniamo la base ortonormale

ES $\alpha=1$, $\beta=2\pi$, $\psi = \mathbb{1}_{[0,1]}$ ($\mathcal{F}\psi = \mathrm{sinc}(f)$)



$$\psi_{m,n}(t) = e^{2\pi j n t}\,\mathbb{1}_{[m,m+1]}(t)$$

Sono una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.



$$x = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}\psi_{m,n} \quad \text{conv. in } L^2(\mathbb{R})$$

$$c_{m,n} = \langle x, \psi_{m,n}\rangle$$

è la sinc
Tende a zero per $|\omega|\to+\infty$ poco rapidamente

$\mathcal{F}\psi$ non è ben localizzata (ψ è discontinua).

↳ ci sono le code che idealmente le vorremmo più piccole

In generale non esistono sistemi di Gabor $\{\psi_{m,n}\}$ con ψ ben localizzata sia nel tempo sia in frequenza, che siano basi ortonormali di $L^2(\mathbb{R})$. ⟶ Teoria dei FRAMES.

↓ generalizzazione del concetto di base ortonormale

2) Ondine $\{T_{2^{-\ell}m} D_{2^{\ell}} \psi\}_{\ell, m \in \mathbb{Z}}$

PARAMETRO DI TRASLAZIONE

RISOLUZIONE

SCALA $= 2^{-\ell}$

def

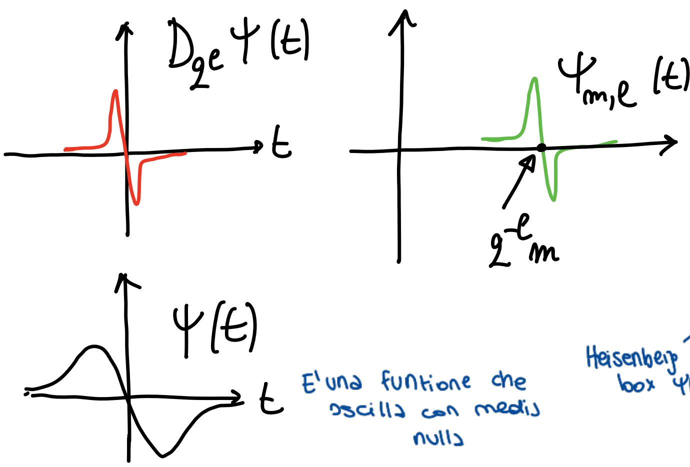
$D_a x(t) = \sqrt{a}\, x(at)$

$(a > 0)$

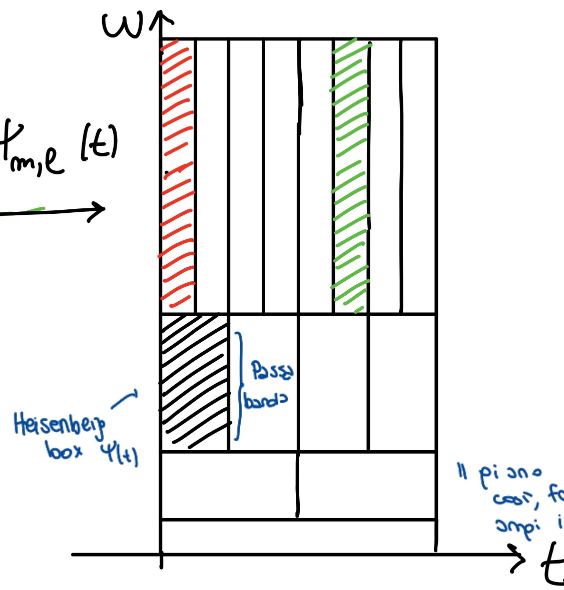
ψ è detta ondina madre

$$\psi_{m,\ell}(t) \overset{def}{=} T_{2^{-\ell}m} \boxed{D_{2^{\ell}} \psi}(t) = 2^{\ell/2}\, \psi(2^{\ell} t - m)$$

Ricordiamo $D_{2^e} \psi(t) = 2^{e/2} \psi(2^e t)$ $\quad t - 2^{-e} m$



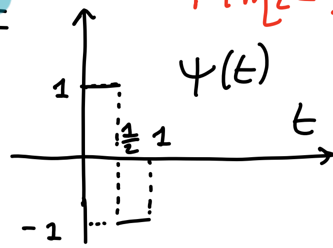
E' una funzione che oscilla con media nulla



Il piano verrà ricoperto così, frequenze basse rettangoli ampi in t, rettangoli alti con t brevi

Esempio: ondina di Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$\|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = \int_0^1 1\, dt = 1$

$$\psi_{\ell,m}(t) \overset{def}{=} 2^{\ell/2}\, \psi(2^{\ell} t - m)$$

$\ell, m \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ supporto $\quad 0 \le 2^{\ell} t - m < 1$

$2^{-\ell} m \le t < 2^{-\ell}(m+1)$

$\{\psi_{\ell,m}\}_{\ell,m\in\mathbb{Z}}$ base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

→ Vogliamo verificare che sia un sistema, la completezza è complicata

$\psi_{\ell,m} = T_{2^{-\ell}m} D_{2^{\ell}} \psi$

$\|T_{t_0}\psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$

$\|D_a \psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$

$D_a \psi(t) = \sqrt{a}\, \psi(at)$ uso

$$\|\psi_{\ell,m}\|_{L^2} = 1 \quad \forall \ell, m \in \mathbb{Z}$$

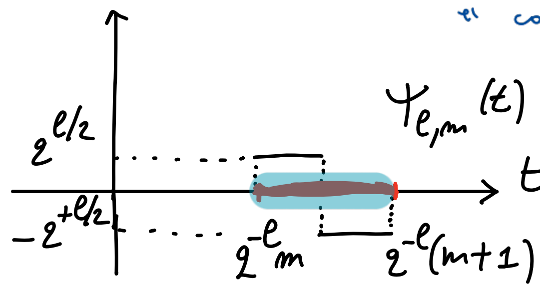


Grafico di una generica $\psi_{\ell,m}(t)$

$I_{\ell,m} = [2^{-\ell} m,\, 2^{-\ell}(m+1))$ ← intervalli diadici

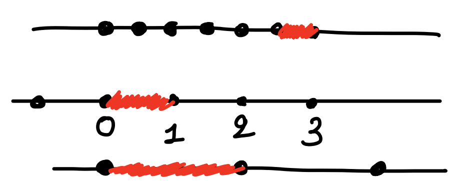
la lunghezza $2^{-\ell}$ SCALA

↓ Fisso ℓ, faccio variare m

$\ell = 1$

$\ell = 0$

$\ell = -1$



$\ell, m \in \mathbb{Z}$

Dati $\ell' < \ell$, $m, m' \in \mathbb{Z}$ risulta $I_{\ell,m} \cap I_{\ell',m'} = \emptyset$

oppure $I_{\ell,m} \subset$ "prima metà o seconda metà" di $I_{\ell',m'}$

Teorema $\{\psi_{\ell,m}\}_{\ell,m\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

Dim. • sistema ortonormale:

$\|\psi_{\ell,m}\| = 1 \quad \forall \ell, m \in \mathbb{Z}$ OK ($\|\psi\|_{L^2} = 1$, e D_a, Π_{t_0} sono isometrie di $L^2(\mathbb{R})$).

1) Se $I_{\ell,m} \cap I_{\ell',m'} = \phi \qquad \int_{\mathbb{R}} \psi_{\ell,m}(t)\,\overline{\psi_{\ell',m'}(t)}\,dt = 0$ → Quello che dobbiamo dimostrare

2) Se $I_{\ell,m} \subset I_{\ell',m'}$ e $\ell' < \ell$ allora $\psi_{\ell',m'}$ è costante su $I_{\ell,m}$ perciò

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{\ell,m}(t)\,\overline{\psi_{\ell',m'}(t)}\,dt = \int_{I_{\ell,m}} \psi_{\ell,m}(t)\,\overline{\psi_{\ell',m'}(t)}\,dt$$

La funzione sull'intervallo più grande è costante. Quindi si può portare fuori dall'integrale

$$= c \int_{I_{\ell,m}} \psi_{\ell,m}(t)\,dt = 0$$

Ha media nulla la funzione più piccola

- sistema completo: se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{\psi_{\ell,m}(t)}\,dt = 0$ $\forall \ell, m \in \mathbb{Z}$ allora $f = 0$.

(dim. su Hernandez - Weiss. A first course on wavelets)

Localizzazione nel tempo e in frequenza per le ondine di Haar

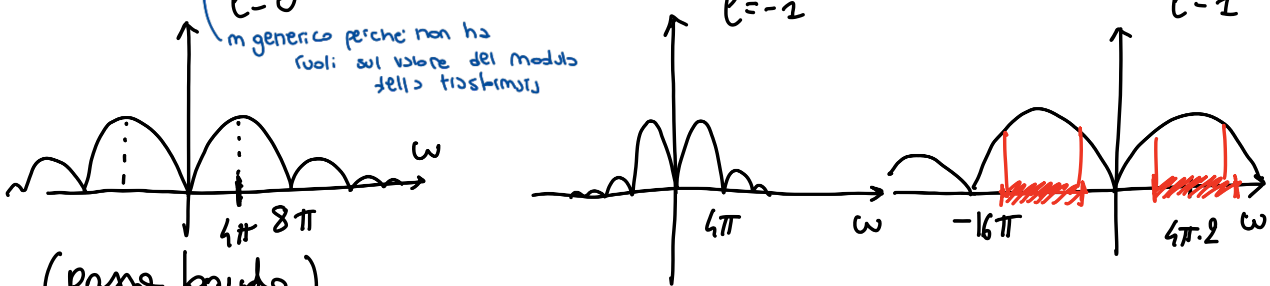
Partiamo dall'ondina di Haar

Punto di partenza della teoria delle ondine

$|\hat{\psi}_{0,m}(\omega)|$ $\ell = 0$ — m generico perché non ha ruoli sul valore del modulo della trasformata

$|\hat{\psi}_{-1,m}(\omega)|$ $\ell = -1$

$|\hat{\psi}_{1,m}(\omega)|$ $\ell = 1$



(passa banda)

$\psi_{\ell,m}(t)$ ben localizzata (su $[2^{-\ell}m, 2^{-\ell}(m+1)]$)

$\hat{\psi}_{\ell,m}(\omega)$ poco localizzata (dove $|\omega| \approx 2^{\ell}$; filtro passa banda)

Al crescere di e si raddoppia il centro della banda e l'ampiezza

(LIBRO S. MALLAT).

Esistono teorie che ci permettono di creare le basi di ondine

Idea da rappresentazione delle immagini su diverse scale → zoommando la foto non solo diventa + grande la foto, ma si vedono anche più dettagli che prima erano sfocati

Costruzione delle ondine

Analisi multirisoluzione. Si definisce

CENNO → generalizzazione dei sistemi di ondine

$$W_\ell = \overline{\text{span}\{\psi_{\ell,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}} \rightsquigarrow \text{frequenze } |\omega| \approx 2^\ell$$

→ Si ottengono funzioni localizzate in frequenza

ℓ è fissato e 2^ℓ è la risoluzione e $2^{-\ell}$ è la scala in cui guardiamo gli oggetti

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{+\infty} W_\ell \quad \text{(somma diretta ortogonale)}$$

→ famiglia di sottospazi a due a due ortogonali

cioè fissiamo una griglia

$L^2(\mathbb{R}) = \{x \in L^2 : x = \sum_\ell c_\ell \tilde{\varphi}_\ell, \ \varphi_\ell \in W_\ell\}$

$$\left(f = \sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}} c_{\ell,m} \psi_{\ell,m} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{\ell,m} \psi_{\ell,m}\right)}_{\in W_\ell} \right)$$

Altri sottospazi

$$V_J = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{J-1} W_\ell \quad (J\in\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \text{frequenze } |\omega| \lesssim 2^J$$

Questi non sono disgiunti e catturano i segnali a una certa risoluzione 2^J

Potrebbero oscillare poco ed essere anche molto sgranati

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus \bigoplus_{\ell=J}^{+\infty} W_\ell \quad \forall J\in\mathbb{Z}$$

↳ Al limite è possibile ricostruire il segnale

$\{V_J\}_{J\in\mathbb{Z}}$ sono una <u>analisi multirisoluzione</u> di $L^2(\mathbb{R})$ ossia

1) $\ldots \subset V_J \subset V_{J+1} \subset \ldots \subset L^2(\mathbb{R})$ sottospazi chiusi

2) $f \in V_J \iff f(2t) \in V_{J+1}$

3) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_J} = L^2(\mathbb{R})$

4) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_J = \{0\}$.

5) V_0 ha come base ortonormale $\{T_m \varphi\}_{m\in\mathbb{Z}}$ per una data $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$