

Def. Spazi di Banach

FSP Sec. 2.1, ..., 2.4
PARTE DI 2.5

1. • Spazio vettoriale $x+y, \alpha x (\alpha \in \mathbb{C})$ ← Operazioni di uno spazio vettoriale

2. • Norma $\|x\|$ → A ogni vettore si associa la sua distanza dall'origine e rappresenta la complessità del segnale

3. • Completo (ogni successione di Cauchy converge). ↴ La successione ammette limite se gli elementi si avvicinano

ES

Spazi di Funzione

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

Esempio di circuiti: legge di Ohm

Modulo

Proprietà di norma

$\begin{cases} \|x\| \geq 0 \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$

La successione ammette limite se gli elementi si avvicinano

Spatio delle funzioni integrabili

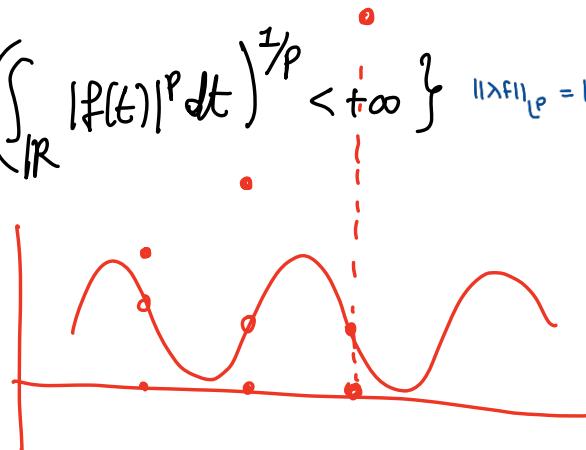
$$R=1\Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} f(t) \\ (i(t)=f(t)) \end{array} \right. \quad E = \int_{\mathbb{R}} i^2(t) dt = \|f\|_{L^2}^2 \text{ energia di } f.$$

Se $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\} \quad \|xf\|_{L^p} = |x| \|f\|_{L^p}$$

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess-sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$



Spazi di Successioni

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Parametro continuo

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \|x\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < +\infty \right\}$$

$$\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$$

→ più p è piccolo, più la definizione è stringente

Spazi di Successioni di elementi finiti
vettori → $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ si possono introdurre $\|\cdot\|_{\ell^p}$, $1 \leq p \leq \infty$ come sopra.

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\begin{cases} \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \text{ EQUIVALENTI:} \\ \|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \leq c' \|x\|_1 \\ \forall x \in X \text{ per opport. costanti, } c, c' > 0. \end{cases}$$

In spazi di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti

ES (motivazione del compressed sensing)

$$y = Ax$$

y risultato delle misure linear.

$$\begin{bmatrix} y \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ m \times m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix}$$

y risultato delle misure
A modellizza la misurazione
x segnale incognito.

Paradigma per l'aquisizione di misure e ricostruzione del segnale da un numero piccolo di misure

$m < n$

RICHIESTO m

$A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^m$

$\dim \ker A + \dim \text{Im } A = m$

$\dim \ker A = m - \underbrace{\dim \text{Im } A}_{\leq m} \geq m - m > 0$

Non possono ricavare x in maniera univoca, ma avendo a priori y che x è sparso ($=$ ha poche entrate non nulle)

Problema: ricavare x da y sapendo che x è **sparsa**.

Ad es. $m=1, n=2$ $A = [1 \ 2]$, $y = 1$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$:

$$1 = x_1 + 2x_2$$

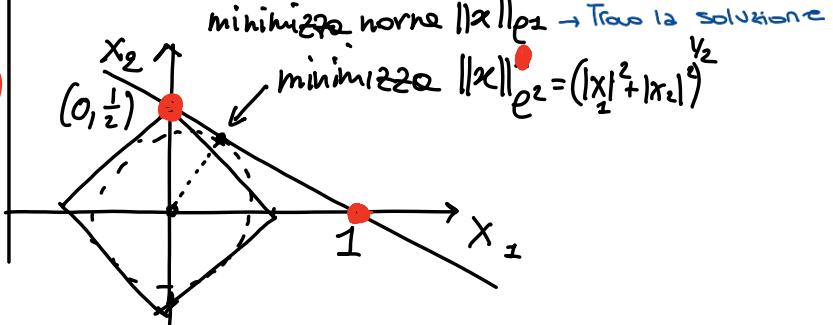
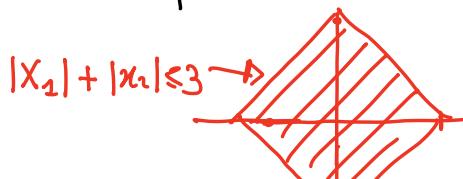
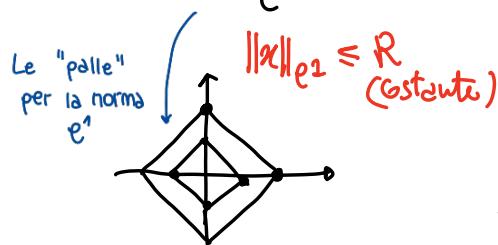
Poiché gli elementi non nulli sono 1, quindi x non è unica.

Tra tutte le sol. per soddisfare la sparsità, minimizzo la norma $\|x\|_{\ell^1}$ così che il problema sia convesso.

Ho un'equazione in 2 incognite \Rightarrow non trovo sol. univoca.

Ho rappresentando la retta, vediamo che solo 2 sol. hanno almeno un'entrata nulla \Rightarrow cioè riduco il numero di sol. possibili.

Palle per $\|x\|_{\ell^1} = |x_1| + |x_2|$



In generale

$$\min \{ \|x\|_{\ell^1} : Ax = y \} \quad \text{con } y \in \text{R}(A) \text{ fisso}$$

E' legato al problema LASSO di minimizzazione

e' ragionevole aspettarsi che la soluzione che otteniamo e' sparsa

Def. Spazi di Hilbert

. Spazio di Banach , $\langle x, y \rangle$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Prodotto Scalare
 ↗ lineare nella prima componente
 ↗ Antilineare nella seconda componente

$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ TRA x e y (cioè tra 2 segnali) (CORRELAZIONE).
 INOLTRE VALE $=$ (uguaglianza) disegnazione di Cauchy-Schwarz.
 Se e solo se x e y sono lin. dipendenti.

Nel caso di spazio reale, $-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$ → E' tanto più vicino a 1, quanto più $x \approx y$ si assomigliano

ES

$$L^2(\mathbb{R}) \quad \langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt \quad \langle x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t)} dt$$

$$L^2(0, \pi) \quad \langle x, y \rangle = \int_0^\pi x(t) \overline{y(t)} dt \quad \begin{array}{l} \text{Intervallo limitato} \\ = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \\ = \|x\|_2^2 \end{array}$$

Convergenza assoluta:
 $\sum_k |x_k \bar{y}_k|$ converge

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \bar{y}_k \quad \begin{array}{l} \text{Come conseguenza di C-S} \\ \text{(Conv. assolutamente se } x, y \in \ell^2) \end{array}$$

$$\mathbb{C}^N = \{(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) : x_k \in \mathbb{C}\}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{y}_k \quad \begin{array}{l} \text{Somma finita = no problemi} \\ \text{di convergenza} \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N |x_k|$$

SOMME PARTIALI

Immagini digitali di dim $M \times N$

$$\{x : \mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{Z}_N = \{0, \dots, N-1\}$$

Numero i pixel nelle 2 dimensioni
 Si forma una griglia
 richiamando il concetto di $\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \}_{\overset{M}{\sim}}$

$x(m, n)$ = intensità del pixel (m, n) , $m=0, \dots, M-1$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(m, n) \overline{y(m, n)}$$

coniugato \Rightarrow Prodotto scalare delle immagini

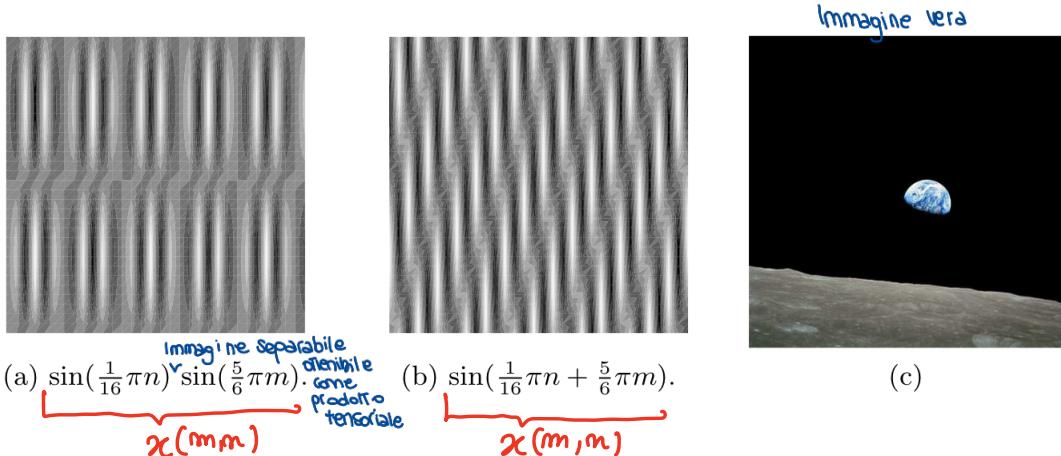


Figure 3.3 Two-dimensional sequences. (a) Separable sinusoidal sequence. (b) Nonseparable sinusoidal sequence. (c) Earth visible above the lunar surface, taken by Apollo 8 crew member Bill Anders on December 24, 1968.

Se H è uno spazio di Hilbert, una successione

$\{\varphi_k\}_{k \in J} \subset H$ (J insieme al più numerabile; ad es. $J = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0, \dots, N-1\} \dots$)

si dice **sistema ortonormale** se

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Def. Una base ortonormale di H è un sistema ortonormale $\{\varphi_k\}$

completo ossia $H = \overline{\text{span}\{\varphi_k\}_{k \in J}}$ chiusura

Posso approssimare
bene quanto voglio ogni
vettore in H con
combinazioni lineari finite
di φ_k .

$\text{span}\{\varphi_k\}_{k \in J} = \text{sp. ill.}$
generato da $\{\varphi_k\}$ quindi:
le combinazioni lineari finite di φ_k .

Teorie d'Riesz

Se $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ è una base ortonormale di H , l'applicazione

Operatore di analisi

$$H \xrightarrow{T^* \text{ e' l'aggiunto di } T} \ell^2(J)$$

$$x \mapsto \{\langle x, \varphi_k \rangle\}_{k \in J}$$

e' un **isomorfismo isometrico**. L'inverso e'

isometria = conserva le norme / distanze

l'energia del segnale e' invertibile

biettive

lineare

conserva le norme

quindi e' anche iniettiva

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

<+∞ e'
quadrato integrabile

NB Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia $T: H \rightarrow H$ un operatore lineare continuo. L'aggiunto di T , denotato T^* , e' l'operatore unico che soddisfa $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \forall x, y \in H$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e' il prodotto scalare nello spazio di Hilbert.

E' una generalizzazione della trasposizione coniugata delle matrici.

Proprietà importanti: 1. $(T^*)^* = T$ 2. $(T+S)^* = T^* + S^*$ 3. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ 4. $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$

Operatore di
sintesi e
di ricostruzione

E' l'inverso dell'isomorfismo

$$\ell^2(J) \xrightarrow{\Phi} H$$

$$\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in J} \mapsto \sum_{k \in J} \alpha_k \varphi_k = \Phi(\alpha)$$

I coefficienti $\langle x, \varphi_k \rangle = \alpha_k$

indipendentemente dall'ordine
dei termini della serie

Quindi: $x = \sum_{k \in J} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$

con conv. incondizionata in H.
convergenza

Decomposizione di un
vettore x wrt una base
ortonormale φ_k

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \quad (\text{identità di Parseval})$$

Verifico che Φ^* è l'aggiunto di Φ

$$\begin{aligned} \langle \Phi \alpha, x \rangle_H &= \left\langle \sum_k \alpha_k \varphi_k, x \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle \varphi_k, x \rangle \\ \alpha \in \ell^2(J), x \in H &\quad \Phi \alpha = \sum_k \alpha_k \varphi_k \\ &= \sum_k \alpha_k \overline{\langle x, \varphi_k \rangle} = \langle \alpha, \Phi^* x \rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

• linearità rispetto alla prima componente del $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ = somma finita

• il limite passa fuori: x è continuo = limite

Per il teorema di Riesz avremo che $\Phi^* = \Phi^{-1}$, quindi

$\Phi^{-1} = \Phi^*$ perciò Φ è unitario

In dim finita, $H = \mathbb{C}^N$, $\Phi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ base
ortonormale di \mathbb{C}^N

$$\Phi \alpha = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 & | & \dots & | & \varphi_N \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_N \varphi_N$$

Hai che agisce sul vettore normalmente

MATRICE AGGIUNTA
= TRASPOSTA CONIUGATA

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \varphi_1^* \\ \vdots \\ \varphi_N^* \end{bmatrix}$$

Coniugato perché sono numeri
complessi:

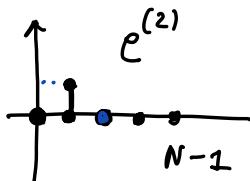
$$\varphi_i^* = \overline{\varphi_i}^T$$

(φ_i vettore colonna
 φ_i^* "riga").

ES $\mathbb{C}^N = \{(x_0, \dots, x_{N-1})\} \rightarrow$ Spazio dei vettori N dimensionali con $x_0, x_{N-1} \in \mathbb{C}$

• base standard $(e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(N)})$

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{(k)}$$

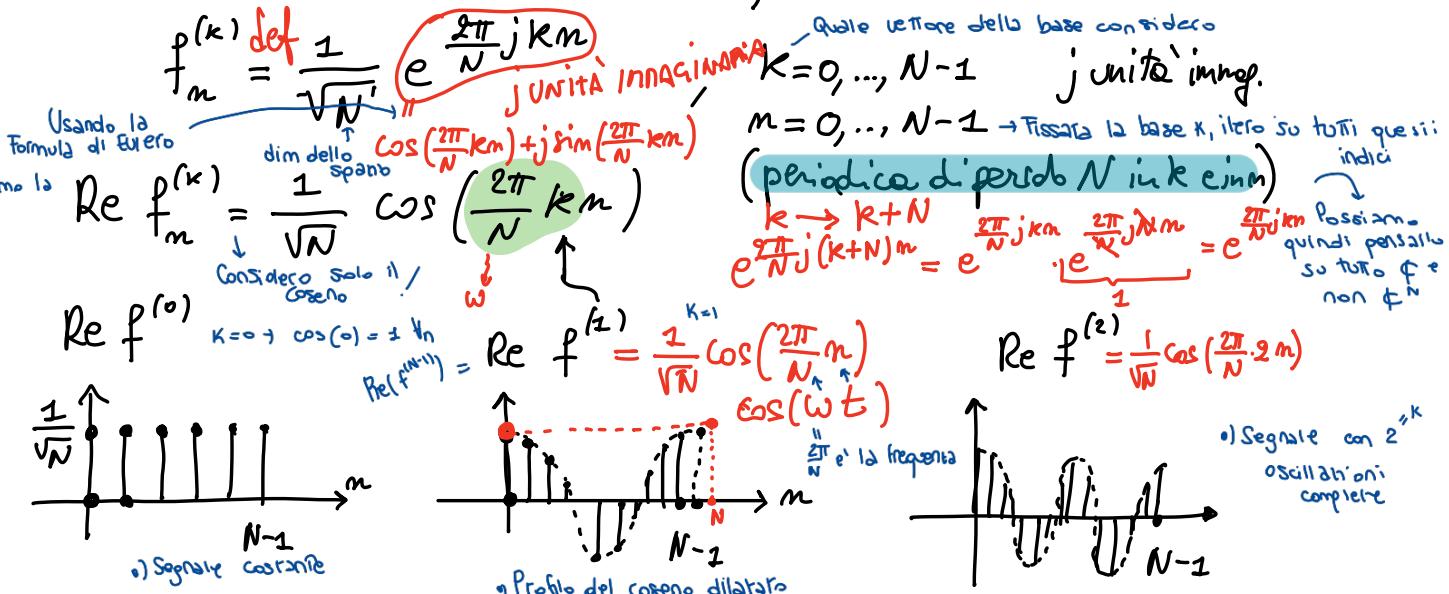


$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ etc...}$$

Si accende una posizione alla volta

Deve avere le \equiv dimensioni le varie basi $\rightarrow N$

- base di Fourier $(f^{(0)}, \dots, f^{(N-1)})$ base autonoma di \mathbb{C}^N



All crescere di k aumentano le oscillazioni fino a

$$\text{Re } f^{(N/2)} \quad k = N/2 \quad (N \text{ pari}) \quad \text{che e' la massima frequenza che sono ottenibili}$$

$$(N=6) \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} \cdot m\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos(\pi m)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N} \left(\frac{N}{2} \pm p\right) m\right) = \cos(\pi m) \cos\left(\frac{2\pi}{N} pm\right) - \sin(\pi m) \sin\left(\frac{2\pi}{N} pm\right) = (-1)^m$$

$f^{(k)}$ oscilla con frequenze analoge digitale $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$

0 oscillazioni $\xleftarrow[2]{+}$ 1 oscillazione $\xleftarrow[2]{+}$ stesso grafico

Considerando i grafici immaginali invece, non si ottiene lo \equiv grafico, ma l'opposto dello stesso grafico, cioè $-$ grafico

OSS 1) la frequenze analoge max con significato fisico è $\omega = \pi$ \rightarrow quello che oscilla il più possibile ($k=N/2$)

2) m e $m+N$ in $f^{(k)}$ danno lo stesso risultato.

ES

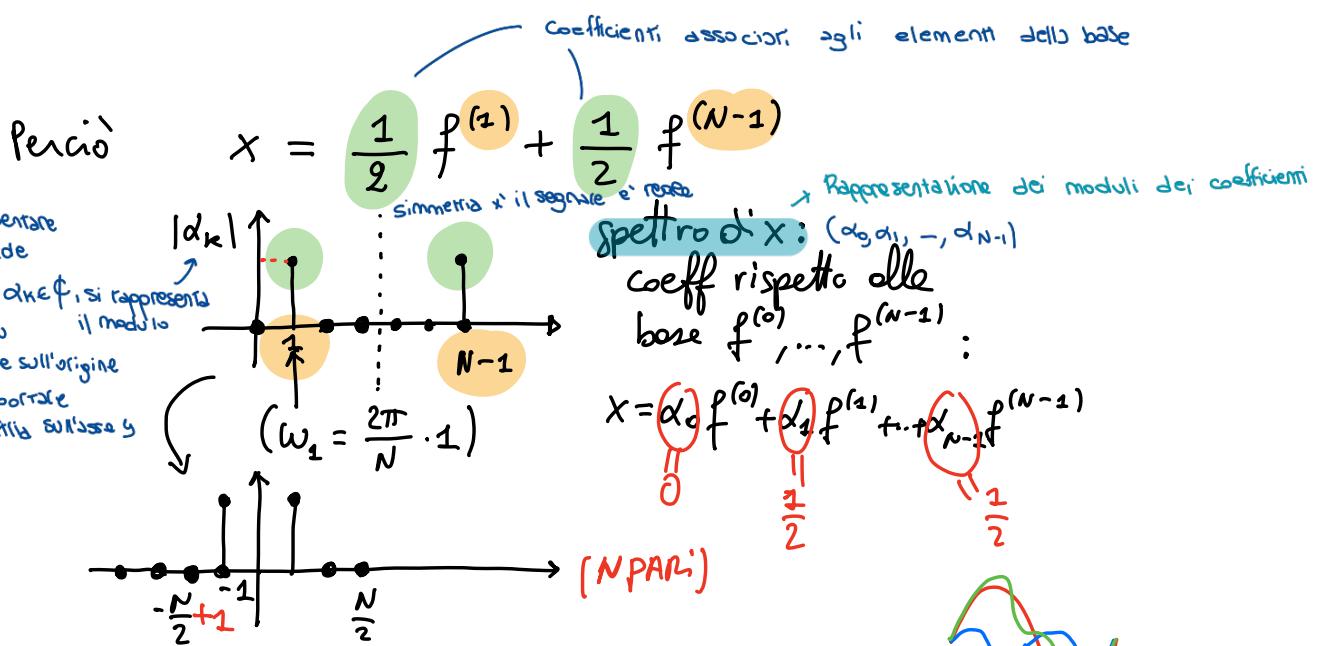
Se $X = \text{Re } f^{(1)}$: $x_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} m\right), \quad m=0, \dots, N-1$

Osserviamo che x è scrivibile con gli elementi della base di Fourier

$$x_m = \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j}{N} m} + \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi j}{N} m} = \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j}{N} m} + \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j}{N} (N-m)}$$

Formula di Euler: $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} - e^{-jt})$ $t \in \mathbb{R}$

S' ottiene lo stesso risultato come osservato prima



OSS. Se $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$ è reale allora $|d_{-k}| = |d_k|$

$$\left[d_k = \langle x, f^{(k)} \rangle \right]_{\mathbb{C}^N} \quad d_{-k} = \langle x, f^{(-k)} \rangle = \langle x, \overline{f^{(k)}} \rangle \xrightarrow{\text{il coniugato}} \overline{\langle x, f^{(k)} \rangle} = \overline{\langle x, f^{(k)} \rangle} = \overline{\langle x, f^{(k)} \rangle} = \overline{\langle x, f^{(k)} \rangle} \quad \begin{array}{l} \text{x se } x \text{ è reale} \\ \downarrow z = \bar{z} \end{array}$$

$$\langle x, f^{(k)} \rangle_{\mathbb{C}^N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{y}_k \quad |d_{-k}| = |\langle x, f^{(k)} \rangle| = |d_k|$$

OSS se x è reale $|d_k|$ è simmetrica anche rispetto a $N/2$ ($|d_k| = |d_{N-k}|$)

Verifichiamo

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{cioè ortogonalità}$$

✓ Verifica di $f^{(k)}$ base orthonormale $\forall k \in \mathbb{C}^N$:

$$\langle f^{(k)}, f^{(m)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi}{N} j km} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-\frac{2\pi}{N} j (k-m)m} \right]^N = \begin{cases} \frac{1 - e^{-2\pi j (k-m)N}}{1 - e^{-2\pi j (k-m)}} = 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases}$$

Usando Euler

perché è il coniugato che è previsto dal prodotto scalare;

DFT \Rightarrow Trasformata di Fourier Discreta

Abbiamo verificato che $f^{(k)}$ è una base orthonormale

$$x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \rightarrow (d_0, \dots, d_{N-1}) \quad (\text{discrete Fourier Transform})$$

Application che prende i vettori e restituisce i coefficienti degli elementi della base

FFT (Fast Fourier Transform):

algoritmo di complessità

$N \log N$ per il calcolo di DFT.

Es $\{x : \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}\}$ immagini $\mathbb{Z}_N = \{0, \dots, N-1\}$

$N \times M$ pixel dim $N \times H$

$x(m, n)$

• • •
• • •

• base ortonormale standard $\{E^{(k, e)}\}$

il vettore della base
 $E^{(k, e)}$ pixel

$$E^{(k, e)}(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m=k, n=e \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pixel tutti neri
+ frame (k, e)

• base di Fourier $\{f^{(k, e)}\}$, $k=0, \dots, M-1; e=0, \dots, N-1$ base ortonorm.

$$f^{(k, e)}(m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{\frac{2\pi}{M} j k m + \frac{2\pi}{N} j e n}, \quad m=0, \dots, M-1; n=0, \dots, N-1$$

$$x = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{k, e} f^{(k, e)} \quad \alpha_{k, e} = \langle x, f^{(k, e)} \rangle.$$

Prodotto scalare delle immagini

Es • In $\ell^2(\mathbb{Z})$ base standard $\{e^{(k)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$e_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

• In $L^2(0, \pi)$ base ortonormale $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2\pi}{\pi} j k t}$, $k \in \mathbb{Z}$

All'aumentare di k ho oscillazioni sempre più frequenti
Base di Fourier

Segnali analogici • In $L^2(\mathbb{R})$, sia $g(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Consideriamo le traslate di g

$$g_{m, n}(t) = g(t - m) e^{2\pi j n t} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \notin [m, m+1] \\ e^{2\pi j n t} & \text{se } t \in [m, m+1] \end{cases}$$

Moltiplicando per questo diciamo che moduliamo g

$\operatorname{Re} g_{m, 1}$

Si chiama finestra

Intervallo unitario su cui trasto la funzione g

$\{g_{m, n}\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

Per verificare che $\{g_{m, n}\}$ è ortonormale:

1. sistema ortonormale

2. completo :

$$\langle g_{(m, n)}, g_{(m', n')} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=m', n=n' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{(m, n)}(t) \overline{g_{(m', n')}(t)} dt$$

Se il sistema è ortonormale, per verificare che è completo basta verificare che vale l'identità di Parseval

Identità di Parseval

$$\|x\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} |x(t)|^2 dt = \sum_m \left| \int_m^{m+1} x(t) e^{-2\pi i j t} dt \right|^2$$

su $L^2(m, m+1)$
 considerate
 base 2° Fourier
 $\{e^{2\pi i j t}\}_{j \in \mathbb{Z}}$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, g_{m,n} \rangle|^2$$

perciò vale l'identità di Parseval \square

Più in generale se $\{\varphi_k\}$ è un sistema ortonormale di H , si possono definire gli operatori di analisi Φ^* e di sintesi/riconstruzione Φ

associati a $\{\varphi_k\}_{k \in J}$, come

$$H \xrightarrow{\Phi^*} L^2(J) \quad \xleftarrow[\text{Non sono più l'uno l'inverso dell'altro}]{\Phi} L^2(J) \xrightarrow{\Phi} H$$

$$x \mapsto \{\langle x, \varphi_k \rangle\} \quad d = \{d_k\} \mapsto x = \sum_k d_k \varphi_k$$

In questo caso $\{\varphi_k\}$ è una base per il sottospazio $S = \overline{\text{span}\{\varphi_k\}}$ e vale

$$\Phi^* \Phi = I \quad \text{su } L^2 \quad \left[\begin{array}{l} \Phi \alpha = \sum_k d_k \varphi_k \in H \\ (\Phi^* \Phi \alpha)_j = \langle \sum_k d_k \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ = \sum_k d_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \xrightarrow{\text{Sistema ortonormale}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases} \\ = \alpha_j \end{array} \right]$$

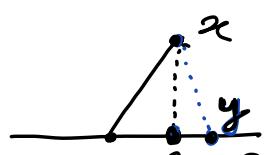
$\Phi^* \Phi \alpha = \alpha \Rightarrow \Phi^* \Phi = I$

$\Phi \Phi^* = P$ è la proiez. ortog. su S

$$[\Phi \Phi^* x = \sum_k \underbrace{\langle x, \varphi_k \rangle}_{P_x} \varphi_k, x \in H].$$

$$\|Px - x\| \leq \|y - x\| \quad \forall y \in S.$$

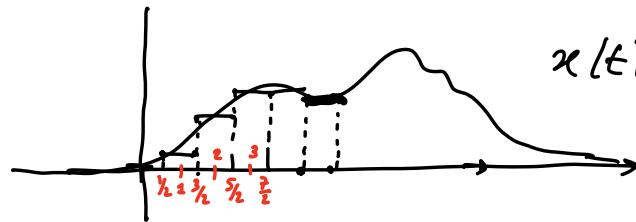
→ Formula della proiezione



ES (approssimazione con funz. costanti e tratti).

$$g(t) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$$

$\frac{1}{1}$ e' la funzione caratteristica



$x(t)$ in $L^2(\mathbb{R})$

Spazio ambiente

$$S = \overline{\text{Span} \left\{ g(t-k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}} ; \psi_k(t) = g(t-k) \text{ base ortonormale di } S$$

Operatore di proiezione diagonale

$$P: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow S \subset L^2(\mathbb{R}) = H \rightarrow \text{Produce una funzione che ha un andamento costante su tutti gli intervalli: } [\frac{k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}]$$

$$P = \Phi \Phi^* \quad | \quad (\Phi^* x)_k = \langle x, \psi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x(t) dt$$

Def. Φ^*

Il termine k -esimo della successione Φ^*

$$\Phi x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \psi_k$$

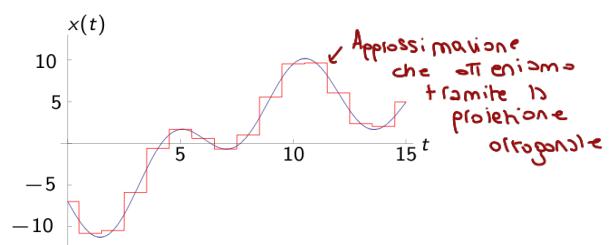
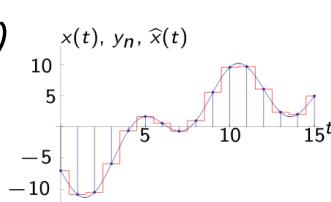
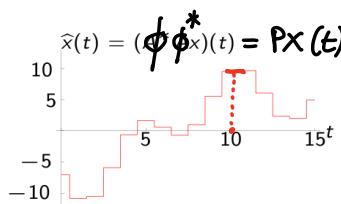
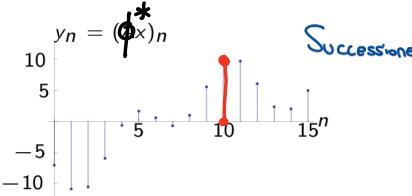
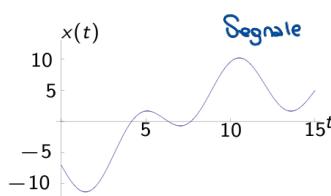
$$P_x = \Phi \Phi^* x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x(t) dt$$

α_k mondo digitale

$\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t-k)$

Media integrale della funzione sull'intervalle unitario

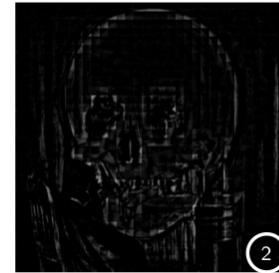
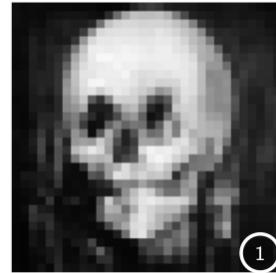
Combination lineare con i coefficienti calcolati prima



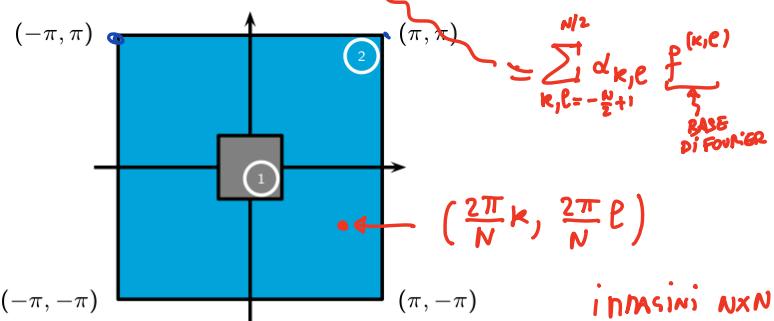
All is vanity - Haar

(ALLAN GILBERT~1882)

Abbiamo mantenuto solo le basse frequenze trascurando



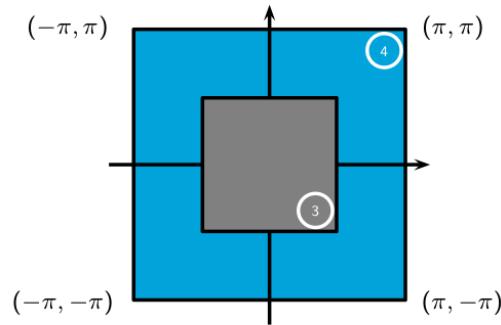
le alte frequenze
(che rappresentano i
bordi dell'immagine)



Funzioni costanti > tratti, ma con passo più piccolo



Immagine residuo
quasi nulla



All is vanity - sinc

Funzioni interpolanti come translate di: funzione sinc bidimensionale

Il grafico non appare sgianato, ma i contorni sono più smussati

