

EIGENFACES E BASI DI RIESZ.

FSP .

sezioni

6.4.2

2.5.1, 2.5.2, 2.5.3

Stessa idea del
calcolo dell'ellisside
di inerzia di
un sistema
(in meccanica razionale)

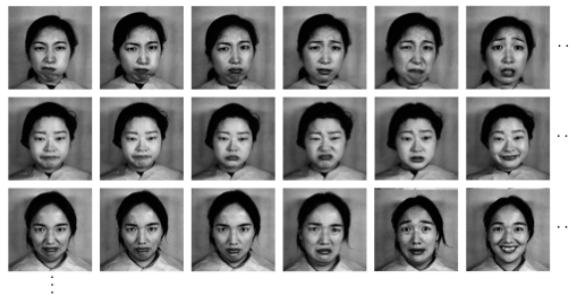
← BASE DI KARHUNEN-LOÈVE (Principal component analysis).

Eigenfaces (face storage, detection, recognition)

[SPARSITY]

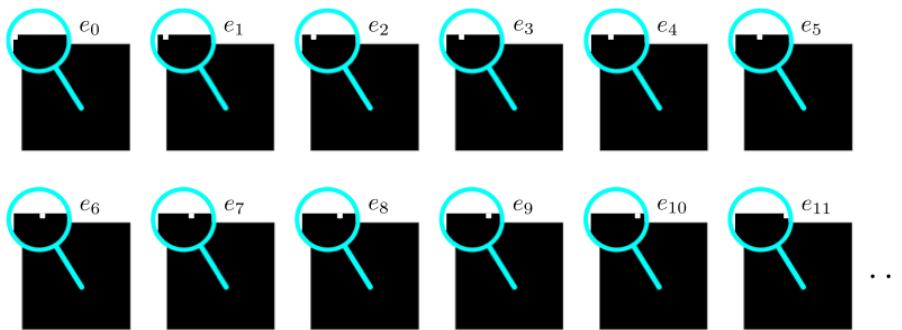
↳ Processo che serve per detection e recognition

- Images of ten women with about 20 facial expressions (213 images in total)*
- Images of size 256×256 : dimensionality *too high* (65536)
- Goal: represent images in *few dimensions*



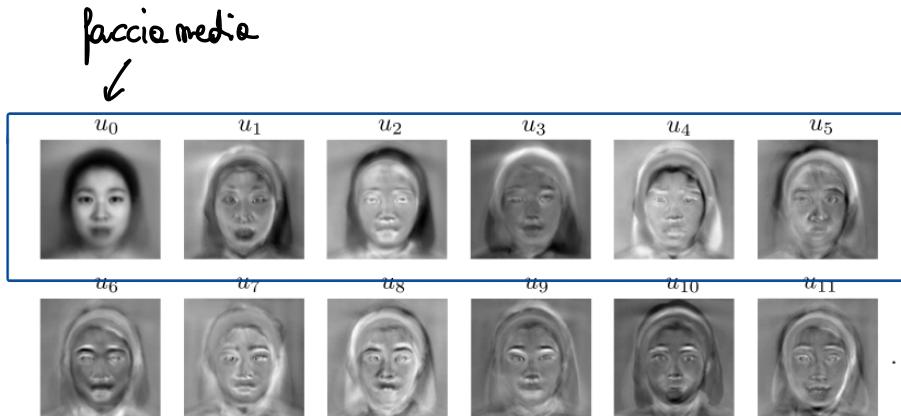
*Michael J. Lyons, Miyuki Kamachi, Jiro Gyoba. Japanese Female Facial Expressions (JAFFE), Database of digital images (1997).
<http://www.kasrl.org/jaffe.html>

Base standard → Non va bene - ovviamente



Eigenfaces

Nuova base

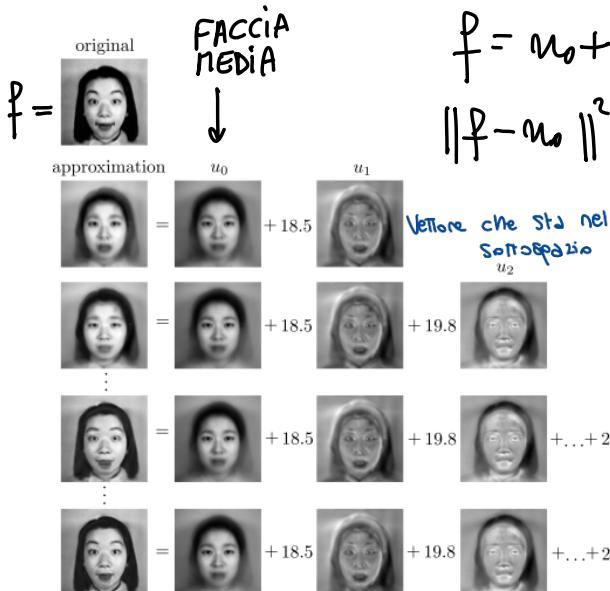


Rappresentazione per ridurre la dimensionalità

Per ogni $k \geq 1$, cerchiamo il sottosp. affine di dim k che meglio approssima i dati

Iterativamente

- i. Primo sottospazio app
dim 1
- ii. Sottospazio di dim 2
che meglio approssima i dati



$$f = u_0 + \sum_{m \geq 1} \alpha_m u_m$$

$$\|f - u_0\|^2 = \sum_{m \geq 1} |\alpha_m|^2$$

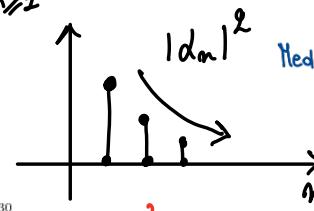
Ogni dato è una faccia del DB
e la faccia media

Sottospazio di dimensione k piccola per sostituire alle facce la proiezione ortogonale della faccia

Base ortonormale u_m $m \geq 1$

Come scegliamo
la base u_1, u_2, \dots ?

Vogliamo che la rappresentazione sia il più sparsa possibile
Mediammo l'energia associata a u_i , sia la più grande possibile



$$|\alpha_1|^2 = |\langle f - h_0, u_1 \rangle|^2$$

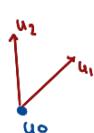
Segnale senta la faccia media

ottengo approssimazione via via migliora

Costruiamo le basi u_1, u_2, \dots , in modo che la rappresentazione sia medianente la più sparsa possibile.

- dataset di training faces $\{f_1, \dots, f_L\}$ (infatti di dim $M \times N$) pensati come vettori colonne in \mathbb{R}^{NM} ($L \approx 200$, $NM \approx 65000$).

- Consideriamo le facce media $u_0 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L f_k$ e definiamo

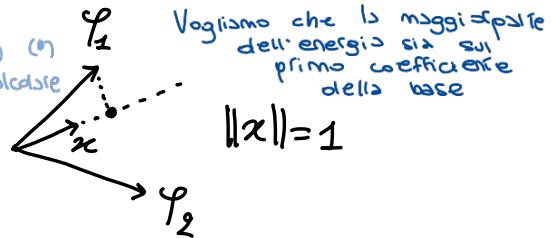


$$\varphi_k = f_k - u_0$$

media
pixel per pixel

$$\max_{\|x\|=1} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |\langle \varphi_k, x \rangle|^2$$

E' la media sulle facce del dataset, perché facciamo la media campionaria che il $\mathbb{E}(\cdot)$ non lo possiamo calcolare



$$= \max_{\|x\|=1} \frac{1}{L} \|\Phi^* x\|_{\ell^2}^2 = \langle \Phi^* x, \Phi^* x \rangle_{\ell^2}$$

e' la norma in ℓ^2

$$= \max_{\|x\|=1} \left\langle \frac{1}{L} \Phi \Phi^* x, x \right\rangle = \lambda_1$$

Per def

Se A matrice reale simmetrica oltre max $\langle Ax, x \rangle = \max_{\|x\|=1}$
di A

matrice di covarienza simmetrica (quindi
di $\varphi_1, \dots, \varphi_L$ SENIDEFINITA diagonabilmente positiva)

DEFINIAMO

$$\Phi^* x = \begin{bmatrix} \langle x, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, \varphi_L \rangle \end{bmatrix}$$

come matrice:

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_L^T \end{bmatrix}_L$$

λ_1 è il più grande autovalore di $\frac{1}{L} \Phi \Phi^*$ e corrisponde al max (a) $M \cdot N \gg L$

e gli $x \neq 0$ che realizzano il max sono corrispondenti autovettori.

Sia u_1 un autovettore corrisp. a λ_1 ($\|u_1\|=1$) $\lambda_1 = E[\lambda_1^2]$ MEDIA CAMPIONARIA

La base è ortonormale, quindi cerco gli altri elementi come il max. ma ortonormali

$$\max_{\|x\|=1} \left\langle \frac{1}{L} \Phi \Phi^* x, x \right\rangle = \lambda_2, \quad u_2 \text{ un autovettore unitario}$$

$$x \perp u_1$$

etc...

E' il meglio per dim = 1

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq 0; \underbrace{u_1, u_2, \dots}_{\downarrow} \text{base ortonormale di } \mathbb{R}^{NM}$$

di tutto lo spazio ambizioso

Formano il miglior sottospazio di dim=2 per spiegare i dati

Base costruita a partire dai dati

la procedura prese il nome d' Principal component analysis (PCA)
in unsupervised machine learning.

OSS: Rango $\Phi \Phi^*$ = L perciò ho al più L autovetori $\lambda_k \neq 0$.
 $\Phi = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \psi_1 & \psi_2 & \dots \\ | & | & | \end{bmatrix}$ } N.M righe L colonne

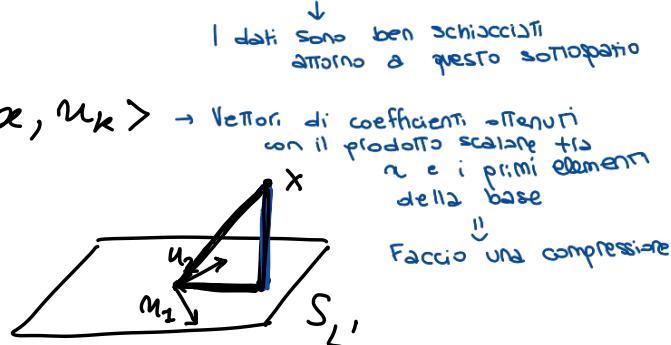
Se si sceglie adn. $L' \leq L$: $\frac{\sum_{k=1}^{L'} \lambda_k}{\sum_{k=1}^L \lambda_k} \geq 0.99$, $S_{L'} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_{L'}\}$
 (in pratica $L' \ll L \ll N \cdot M$). Varianza totale che misura la variabilità totale attorno alla faccia media

(Sottospazio di trazione
il 99% delle varianze)

• Si definisce $A: \mathbb{R}^{N \cdot M} \rightarrow \mathbb{R}^{L'}$

$$A x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{L'} \end{bmatrix} \quad \alpha_k = \langle x, u_k \rangle$$

($\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{L'} u_{L'}$ è la proiez. ortog.
di x su $S_{L'}$)



Quindi le facce $x \in \mathbb{R}^{N \cdot M}$ si possono rappresentare (e quindi archiviare, confrontare, etc.) in maniera approssimata attraverso i coefficienti $A x \in \mathbb{R}^{L'}$.

Ad esempio dati $x, y \in \mathbb{R}^{N \cdot M}$ si confronta

$$\|Ax - Ay\|^2 = \sum_{k=1}^{L'} |\alpha_k - \beta_k|^2. \rightarrow \text{Si confrontano quindi solo i coefficienti.}$$

OSS $\Phi \Phi^*$ è una matrice di taglie $NM \times NM \rightarrow$ Non è facile diagonalizzazione matrici così grande
 $\Phi^* \Phi = I_{L \times L} (\ll NM \times NM)$

Ma $\Phi \Phi^*$ e $\Phi^* \Phi$ hanno gli stessi autovetori non nulli!

Infatti se $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

$$\ker(\phi\phi^* - \lambda I) \rightarrow \ker(\phi^*\phi - \lambda I)$$

Infatti se $x \in \ker(\phi\phi^* - \lambda I)$

allora $\phi\phi^*x = \lambda x$.

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \phi^* x$$

è un isomorfismo con inverso

$$\ker(\phi^*\phi - \lambda I) \rightarrow \ker(\phi\phi^* - \lambda I)$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \phi x$$

$$\begin{aligned} &\text{Per} \\ &(\phi^*\phi - \lambda I)(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \phi^* x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\phi^*\phi \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \phi^* x - \lambda \phi^* x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\lambda \phi^* x - \lambda \phi^* x) = 0 \end{aligned}$$

Oss La stessa osservazione è alla base delle formule dell'indice di Atiyah-Singer

$$\text{ind } A = \text{tr } e^{-tA^*A} - \text{tr } e^{-tAA^*}, t > 0$$

$$(\text{ind } A = \dim \ker A - \dim \ker A^* \in \mathbb{Z})$$

• Atiyah-Singer : indice d'operatori ellittici su varietà compatte;

vedere ad es. Nakahara, Geometry, topology and Physics 2003)

• indice di Witten : teorie quantistiche dei campi supersimmetrici.

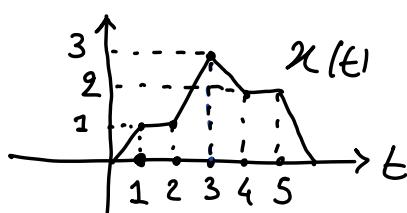
Basi di Riesz

Problema della proiezione di un vettore su di un sottospazio

Pensiamo approssimazioni con funzioni affini a tratti \Rightarrow segmenti di retta

Esempio Approssimare una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ con funzioni affini

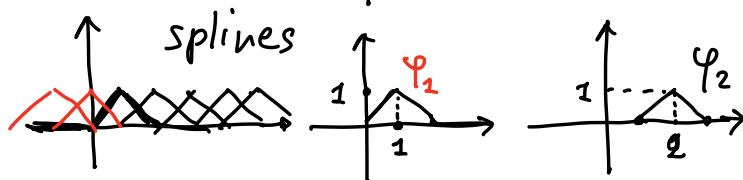
e tratti



$$x = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 + \alpha_5 \varphi_5$$

$$\alpha_1 = x(1) = 1, \alpha_2 = x(2) = 1, \text{ etc.} \dots$$

$$\hookrightarrow x(1) = \alpha_1 \varphi_1(1) + \alpha_2 \varphi_2(1) + \alpha_3 \varphi_3(1) + \dots = \alpha_1 \varphi_1(1) = \alpha_1, (\varphi_2, \dots, \varphi_5)(1) = 0$$



etc... NON ortogonali:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)} dt \neq 0 \right)$$

- Ha questo può distruggere
il template della base
- Da una famiglia di vettori
i.i. si genera una base di
vettori ortogonali
- traslazione e dilatazioni
- OSS Le procedure di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt
- può distruggere le strutture di un base (ad es. basi di traslate)
 - talvolta cercano delle basi con proprietà incompatibili con l'essere ortogonali (fatti con base lineare nelle immagini) ↗ proprietà desiderabile da avere
 - spesso non produce una base con proprietà di sparsità (ad es. nelle PCA non abbiamo usato Gram-Schmidt)

Tutto questo ci porta a fare discorsi su basi che non sono ortogonali

Sia $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ una famiglia al più numerabile in uno sp. di Hilbert H .

↗ e non di base ortogonale

Def $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ è una base di uno spazio di Hilbert H se $\forall x \in H$

$$\exists! d = \{d_k\}_{k \in J} : x = \sum_{k \in J} d_k \varphi_k \text{ in } H.$$

(Se J non è finito, è sottointesa una corrispondenza univoca $J \leftrightarrow \mathbb{N}$, ossia un ordinamento della serie)

Problema Non è detto che $\{\alpha_k\}_{k \in J} \in \ell^2$ o che $\|x\|^2$ sia equivalente a $\sum_{k \in J} |\alpha_k|^2$. ↗ Perché la somma della serie potrebbe cambiare il risultato finale

Vorremmo quindi che sia soddisfatta $c_1 \sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_H^2 \leq c_2 \sum_k |\alpha_k|^2$

Non è detto che la serie converga

Se la base è arbitraria vale l'identità di Parseval, ma in questo caso il livello teorico non lo suppongo

Def. Un sistema di vettori $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ si dice successione di Bessel se

$$(1) \left\| \sum_{k \in J} \alpha_k \varphi_k \right\|_H \leq C \|\alpha\|_{\ell^2} \quad \forall \alpha = \{\alpha_k\}_{k \in J} \in \ell^2(J)$$

con un numero finito di componenti non nulle. ↗ generalizza la nozione di sistemi ortogonali di vettori

NOTIZIA: non richiede indipendenza

o equivalentemente ↗ semplicemente per essere sicuri

$$(2) \sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq C \|x\|_H^2 \quad \forall x \in H.$$

Es: se $\{\varphi_k\}$ è un sistema ortogonale di vettori di dimensione finita allora $\|\sum_k \alpha_k \varphi_k\|_H = \|\alpha\|_{\ell^2}$ $\forall \alpha \in \ell^2$ ↗ per essere sicuri

Le successioni di Bessel viene fuori dalla formula di Bessel per le serie di Fourier

Base di Fourier

Se e_k è un sistema ortogonale in H , $x \in H$, posto $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle \Rightarrow \sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_H^2$ Formula di Bessel

Perciò ogni sistema ortogonale è una successione di Bessel

Cioè si richiede (1) o (2)

Se $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ è una successione di Bessel la serie $\sum_{k \in J} d_k \varphi_k$
 converge incondizionatamente in H $\forall \alpha = \{d_k\}_{k \in J} \in \ell^2(J)$.
 [O. Christensen, Bases, frames, ...].

Si può allora definire:

l'operatore di sintesi

$$\begin{aligned} \ell^2(J) &\xrightarrow{\Phi} H \\ \alpha = \{d_k\} &\longrightarrow \Phi \alpha = \sum_k d_k \varphi_k \\ (\|\Phi \alpha\| \leq C \|\alpha\|) & \quad (1) \end{aligned}$$

l'operatore di analisi

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\Phi^*} \ell^2(J) \\ x &\longmapsto \Phi^* x = \left\{ \langle x, \varphi_k \rangle \right\}_{k \in J} \\ (\|\Phi^* x\| \leq C \|x\|) & \quad (2) \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le condizioni sopra così:

Esempio In dim finita, se $H = \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}^N &\rightarrow \mathbb{C}^N \\ \Phi \alpha &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_N \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{C}^N &\rightarrow \mathbb{C}^N \\ \Phi^* x &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^* \\ \dots \\ \varphi_N^* \end{bmatrix}}_{\Phi^*} x \\ (\varphi_k^* &= \overline{\varphi_k}^T) \end{aligned}$$

Def $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ è una base di Riesz per H se

1) è una base ($\forall x \in H \exists! \alpha = \{d_k\}$: $x = \sum_{k \in J} d_k \varphi_k$) come definito sopra

2) $\exists \lambda_{\min}, \lambda_{\max} > 0$:

$$(*) \quad \lambda_{\min} \frac{\|x\|_H^2}{\|\alpha\|_{\ell^2}^2} \leq \frac{\|\alpha\|_{\ell^2}^2}{\|x\|_H^2} \leq \lambda_{\max} \frac{\|x\|_H^2}{\|\alpha\|_{\ell^2}^2} \quad \forall x \in H$$

$$\text{con } x = \sum_k d_k \varphi_k = \Phi \alpha$$

$\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$

Per avere un controllo della norma del segnale in termine dei coefficienti e viceversa

Successione di Bessel

OSS Deve essere $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \approx 1$ per avere stabilità numerica

Scegliere $\{\varphi_k\}$ è una base di Riesz allora è anche una success. di Bessel e quindi può essere considerato Φ, Φ^* (oper. limitati)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{a)} \quad \lambda_{\min} \|\Phi \alpha\|^2 \leq \|\alpha\|^2 \leq \lambda_{\max} \|\Phi \alpha\|^2 \\ & \text{b)} \quad \frac{1}{\lambda_{\max}} \|\alpha\|^2 \leq \|\Phi \alpha\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\alpha\|^2 \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere la formula in termini di operatori

Perciò $\Phi: \ell^2 \rightarrow H$ è un isomorfismo e così pure $\Phi^*: H \rightarrow \ell^2$

$\Rightarrow \Phi \in \ell^2$ sono stabili

E' una matrice infinita

lineare e biettivo (iniettivo, suriettivo) e continuo

Base di Riesz

$\|\Phi \alpha\|_{\ell^2}^2 = \langle \Phi \alpha, \Phi \alpha \rangle_{\ell^2} = \langle \Phi^* \Phi \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2}$

\downarrow vettori piccoli \Rightarrow valori piccoli

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_{\max}} \|\alpha\|^2 \leq \langle \underbrace{\Phi^* \Phi}_{G} \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\alpha\|^2 \quad \alpha \in \ell^2$$

Matrice di Gram:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_{\max}} \|\alpha\|^2 \leq \langle \underbrace{\Phi^* \Phi}_{G} \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\alpha\|^2$$

$G = \Phi^* \Phi : \ell^2(J) \rightarrow \ell^2(J)$ è detta matrice di Gram di $\{\varphi_k\}_{k \in J}$

e' un operatore

Base di Riesz

$$\alpha \xrightarrow{\Phi} \sum_k \alpha_k \varphi_k \xrightarrow{\Phi^*} \left\{ \left\langle \sum_k \alpha_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle_H \right\}_{j \in J} = \left\{ \sum_k \alpha_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right\}_{j \in J}$$

$$\alpha \xrightarrow{G=\Phi^* \Phi} \beta: \beta_j = \sum_{k \in J} G_{jk} \alpha_k \quad \text{con } G_{jk} = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle$$

leggibile come prodotto matrice \times vettore

indice di colonna

indice di riga

$$G = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & & & \\ \vdots & & G_{0,0} & G_{0,1} & \dots \\ \vdots & & \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \dots \\ \vdots & & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle & \dots \end{bmatrix}$$

e' giusto così invertito!

($J = \mathbb{Z}$)

\hookrightarrow matrice sarà infinita

[Es] In dimensione finita, ogni base è una base di Riesz

• Base di splines $\{\varphi_k\} = \varphi_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$, $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ base di Riesz per $S = \text{span}\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ il sotto spazio di $L^2(\mathbb{R})$ (esempio sopra)

Terme Sia $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ un sistema di vettori in H .

- $\{\varphi_k\}$ è un sist. ortonormale sse $G = I$ Matrice di Gram

- $\{\varphi_k\}$ è una success. di Bessel sse G è limitato $L^2 \rightarrow L^2$

- $\{\varphi_k\}$ è una base di Riesz per $S = \overline{\text{span}\{\varphi_k\}_{k \in J}}$ sse G è invertibile. in $L^2 \rightarrow L^2$ (lineare) limitato e biettivo. (allora l'inverso è automaticamente limitato).

Motivazione:

Sappiamo che $\gamma = \sum d_k \varphi_k$, ma come determina gli d_k ? \Rightarrow Se la base è ortonormale limitata. $\rightarrow d_k = \langle \gamma, \varphi_k \rangle$ \Rightarrow Se ho una base di Riesz? Utilizziamo una base duale

Def Due basi di Riesz $\{\varphi_k\}_{k \in J}$, $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k \in J}$ di H si dicono

biortogonali (o duali) se

$$(*) \quad \langle \varphi_k, \tilde{\varphi}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

con la base duale

$\{\varphi_k\}$ sistema ortonormale
 $\Rightarrow \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$

OSS Siano ϕ e $\tilde{\phi}$ gli operatori di sintesi associati alle basi di Riesz $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ e $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k \in J}$ rispettivamente. Allora sappiamo che ϕ e $\tilde{\phi}$ sono invertibili e

$$(*) \Leftrightarrow \tilde{\phi}^* \phi = I \text{ su } L^2(J)$$

Perciò $\tilde{\phi}^* = \phi^{-1}$, ossia $\tilde{\phi} = (\phi^{-1})^* = (\phi^*)^{-1}$. L'aggiunto è l'inverso si possono scambiare

ES

Es in \mathbb{R}^3 , cioè in dim finita

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

base di \mathbb{C}^3 IN DIMENSIONE FINITA
BASE DI RIESZ = BASE NEL SENSO
DELL'ALGEBRA LINEARE

$$\tilde{\Phi} = (\Phi^{-1})^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\varphi}_1 \quad \tilde{\varphi}_2 \quad \tilde{\varphi}_3$

base duale

Teorème Se $\{\varphi_k\}$ $\{\tilde{\varphi}_k\}$ sono basi biortogonali di H

allora

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{k \in J} \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k$$

SE $\{\varphi_k\}$ BASE ORTHONORMALE
X $\in H$,

$$X = \sum_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

SE $\{\varphi_k\}$ È UNA BASE ORTHONORMALE
ALLORA LA BASE DUALE
È LEI STESSA: $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k$

Dimostrazione 1

Dim. Sappiamo che $\hat{\phi}^* \hat{\phi} = I$. Allora (siccome $\phi: l^2 \rightarrow H$ isomorf.) e $\hat{\phi}: H \rightarrow l^2$ isomorf.), $\phi \hat{\phi}^* = I$ su H :

$$x = \phi \hat{\phi}^* x = \sum_{k \in J} \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k. \rightarrow \text{Generalizzazione della formula per basi orthonormali}$$

SE $\{\varphi_k\}$ È UNA BASE ORTHONORMALE

Allora $\forall x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \quad \begin{matrix} \text{Formula di} \\ \text{Parseval} \end{matrix}$$

Formule di Parseval Nelle stesse ipotesi

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in J} \langle x, \varphi_k \rangle \overline{\langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle}$$

Dimostrazione 2

Dim. Sappiamo che $\hat{\phi}^* \hat{\phi} = I$. Perciò

$$\begin{aligned} \|x\|^2_H &= \langle x, x \rangle_H = \langle \hat{\phi}^* \hat{\phi} x, x \rangle_H = \langle \hat{\phi}^* x, \hat{\phi} x \rangle_{l^2} \\ &= \sum_{k \in J} \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle \overline{\langle x, \varphi_k \rangle} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{perché è il prodotto} \\ \text{scalare in } l^2 \text{ che} \\ \text{prevede il coniugato} \end{matrix} \\ &\quad \downarrow \quad \begin{matrix} \text{è un'espressione reale} \end{matrix} \\ &= \sum_{k \in J} \langle x, \varphi_k \rangle \overline{\langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle} \end{aligned}$$

φ e $\tilde{\varphi}$ giocano un ruolo interscambiabile