Le serie di Laurent sono un'estensione delle serie di potenze: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ dove possono comparire potenze negative di $(z-z_0)$. Questo le rende adatte a rappresentare funzioni olomorfe su anelli, cioè in domini del tipo $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$.

Remind

Le serie di Laurent si separano in due parti: $f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{parte singolare}}$

TRASFORMATA Z E SISTEMI MULTIRATE

FSP sez. 3.5
3.7.1, 3.7.2, 3.7.3

, è l'analoga nel caso discreto della trasformata di Laplace

TRASFORMATA ZETA

Variante della DTFT

Se $x = (x_n)$, la sua trasformata Z è

$$X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^{-k} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\sum_{k<0} x_k z^{-k}}_{} + \underbrace{\sum_{k \geq 0} x_k z^{-k}}_{}$$

$-k > 0$, $(z^{-1})^k$

così da ottenere potenze positive

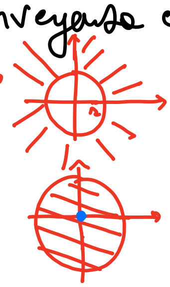
SERIE DI LAURENT

→ Intervengono potenze positive e negative nel piano complesso

Converge assol. per $|z| < R$ all'interno del cerchio di convergenza

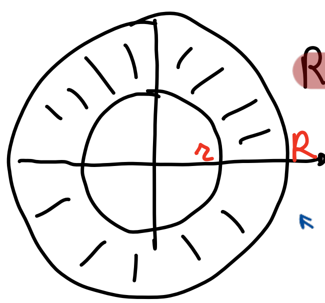
Conv. assolut. per $|z| > r$ all'esterno

Convergenza assoluta: $0 \leq r < |z| < R \leq +\infty$



$R = +\infty$

$r = 0$



La serie converge in una corona circolare

RICHIAMO

$x = \{x_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$

↓ DTFT

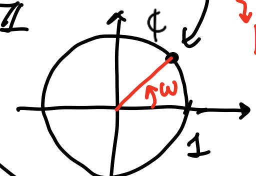
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{-j\omega k}$$

è la "serie di Fourier" che ha come coefficienti la successione di input

$\omega \in \mathbb{R}$

$$X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^{-k}, \quad z = e^{j\omega}$$

z varia sulla circonferenza unitaria $|z| = 1$ del piano complesso



Consideriamo z non sulla circonferenza unitaria

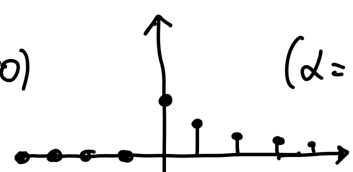
se $z = \rho e^{j\omega} \to \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \rho^{-k} e^{-j\omega k}$

ROC (region of convergence)

Se $r < 1 < R$ (ROC contiene $|z| = 1$) e $z = e^{j\omega}$ nella Trasformata Z ritroviamo la DTFT di x.

Caso tipico a cui si applica la trasformata Z ⇒ successioni con comportamento esponenziale ("decadimento")

ES $x_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \alpha^n & n \geq 0 \end{cases}$ causale $(\alpha \neq 0)$ $(\alpha = \frac{1}{2})$



Morale: fai attenzione al dominio per capire qual è la vera trasformata Z della successione!

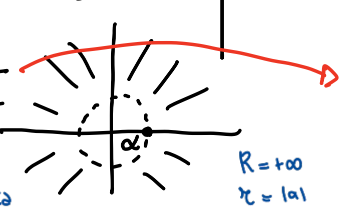
Trasf. zeta

$$X(z) = \sum_{k \geq 0} \alpha^k z^{-k} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \to \frac{z}{z - \alpha}$$

$(\alpha z^{-1})^k$

è una serie geometrica

polo in $z = \alpha$



$R = +\infty$, $r = |\alpha|$

Converge per $|z| > |\alpha|$

↓ Ha 2 sviluppi di Laurent *

RAGIONE αz^{-1}: conv per $|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$ Dominio della funzione $\frac{z}{z-\alpha}$

* Converge fuori dal cerchio
Converge dentro al cerchio centrato in 0 ⇒ Sviluppo di Taylor

Consideriamo $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$; qual è il suo sviluppo di Laurent (Taylor) convergente per $|z|<|\alpha|$?

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = -\frac{1}{\alpha z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1}} \sum_{k \geq 0} (\alpha^{-1} z)^k$$

Converge per $|z|<|\alpha|$

$$= \sum_{k \geq 0} -\alpha^{-k-1} z^{k+1} \qquad (k+1=-m)$$

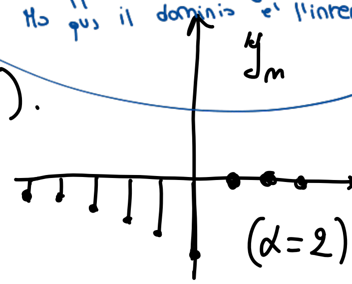
$$= \sum_{m<0} -\alpha^{m} z^{-m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_m z^{-m} \;??$$

Sviluppo che converge dentro al cerchio
Ho qui il dominio e' l'interno del cerchio

la funzione $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z|<|\alpha|$, è la trasformata zeta di

$$y_m = \begin{cases} -\alpha^m & \text{se } m<0 \\ 0 & \text{se } m \geq 0 \end{cases}$$

(anticausale).

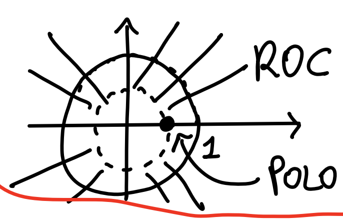


$$x * y \xrightarrow{\text{Trasf. Z}} X(z)\,Y(z) \text{ sull'intersez. dei rispettivi ROC.}$$

CENNO

Nelle applicazioni: la risposta in frequenza $H(z)$ del filtro è una funzione razionale di z (rapporto di polinomi).
In quel caso, per un filtro H causale le seguenti affermaz. sono equivalenti:

1) H è stabile $(h \in \ell^1)$
2) ROC contiene la circonferenza $|z|=1$
3) i poli di $H(z)$ cadono tutti nel cerchio $|z|<1$



Mettiamo a confronto due filtri passa basso trovando le risposte impulsive h

MEDIA MOBILE

ES Moving average filter vs leaky integrator. (2 FILTRI PASSA BASSO)

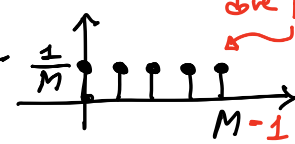
↳ Smussa la sequenza

Moving average di lunghezza M: $y_n = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x_{n-k} = (x*h)_n$ dove h

M: Fissato

y_n è la MEDIA DI $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-M+1}$

risposta impulsiva



Risposta impulsiva

Con M=2 otteniamo il filtro passa basso di Haar

leaky integrator: $y_n = \lambda y_{n-1} + (1-\lambda)x_n$, $0<\lambda<1$

Condizioni "iniziali": $x_n = 0$ e $y_n = 0$ se $n<0$ (quindi causali).

Risolviamo per ottenere una forma esplicita / Prendiamo filtri causali

Siano $X(z)$ e $Y(z)$ le trasformate Z di x e y:

$y_n = 0$ per $n<0$ per ipot.
$y_0 = \lambda y_{-1} + (1-\lambda)x_0 = (1-\lambda)x_0$
$y_1 = \lambda y_0 + (1-\lambda)x_1$
$y_2 = \dots$

$$Y(z) = \lambda \underbrace{z^{-1}Y(z)}_{} + (1-\lambda)X(z)$$

→ Espressione algebrica facile da risolvere

$z \mapsto y = x*h$
$X \mapsto Y = X\cdot H$

TRASFORMATA Z di $\{y_{n-1}\}$:

Facendo il cambio di indice

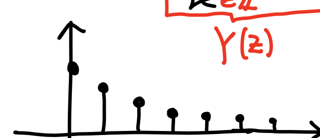
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_{k-1} z^{-k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m z^{-1-m} \quad (k-1=m)$$
$$= z^{-1}\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k z^{-k}}_{Y(z)}$$

$$Y(z) = \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}\right) X(z) = H(z)X(z)$$

Scrivendo lo sviluppo di Laurent

$$H(z) \rightsquigarrow h_n = \begin{cases}(1-\lambda)\lambda^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

Abbiamo trovato la risposta impulsiva



è una media di tutti i termini precedenti

$y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}h_k = \sum_{k\geq 0} x_{n-k}(1-\lambda)\lambda^k$

↑ ha con sempre meno valore quelli più lontani

Morale: i filtri durati in modo ricorsivo, sono più facili computazionalmente mentre da calcolare

Sul concetto di potenza (cenni)

Per segnali x con energia infinita $\left(\sum_n |x_n|^2 = +\infty\right)$ torna utile il concetto di potenza, che può essere finita anche se).

energia per unità di tempo

In generale data una successione $\{x_n\}$ consideriamo la DTFT del segnale troncato nel tempo: $(\dots,0,0,\underbrace{x_{-M},x_{-M+1},\dots,x_0,x_1,\dots,x_M}_{2M+1 \text{ componenti}},0,\dots)$

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^{M} x_k e^{-j\omega k}$$

Riserva $\displaystyle\int_0^{2\pi} |X_M(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \sum_{k=-M}^{M} |x_k|^2.$

Si definisce la potenza (media) di x

$$P = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} |x_k|^2$$

(se il limite esiste)

e la power spectral density

$$P(e^{j\omega}) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} |X_M(e^{j\omega})|^2$$

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

RICHIAMO

[la energy spectral density sarebbe $|X(e^{j\omega})|^2$]

Per segnali di lunghezza finita $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ con DFT $X = (X_0, \dots, X_{N-1})$ si definisce analogamente la

potenza $= \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |x_m|^2$

energy spectral density $|X_m|^2$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X_m|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |x_m|^2$

power spectral density $\frac{1}{N} |X_m|^2$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} |X_m|^2 = \text{potenza}$

questo fattore sarebbe assente se avessimo definito la DFT come $X_m = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{km}{N}}$

invece che $X_m = \sum \dots$

Si considerano dei riscalamenti: spaziali o temporali

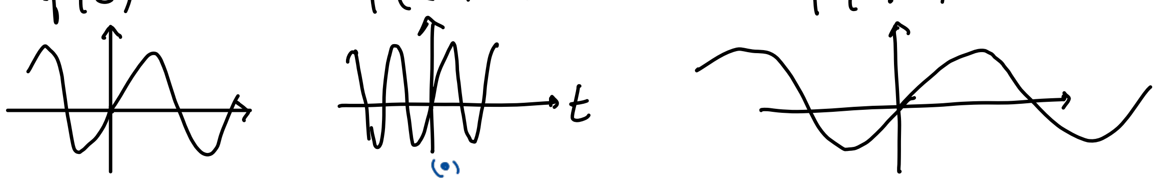
SISTEMI MULTIRATE

Stiamo parlando di sistemi a tempo discreto : successione → [ ] → successione

Sono una combinazione di filtri, downsampling, upsampling.

OSS: Nel caso continuo, la dilatazione è semplice da trattare:

$f(t)$ $\quad$ $f(2t)$ Contrazione $\quad$ $f(t/2)$ Dilatazione



Nel caso discreto, la generalizzazione non è immediata

E' più problematico nel dominio della frequenza

Downsampling by 2 : $D_2 : \ell^2 \to \ell^2$

$y = D_2 x$, $\boxed{y_n = x_{2n}}$

D_2 NON È INIETTIVO

~ E' analogo di (0)

"Dimezzamento" della lunghezza del segnale

$$(\dots, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{D_2} (\dots, x_{-2}, \boxed{x_0}, x_2, x_4, x_6,) = y$$

$x_0 = y_0$, $x_2 = y_1$, $x_4 = y_2$

Come matrice :

Matrice di rappresentazione dell'operatore di downsampling

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 & & \\ & 1\,0\,0 & \\ \dots & 0\,\boxed{1}\,0 & \dots \\ & 0\,0\,0\,1\,0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \boxed{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ \boxed{x_0} \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

riga 0

colonna 0

Si eliminano le linee dispari della matrice identità

ES su $x_n = e^{j\omega n}$ $(\omega \in \mathbb{R}$ fissato$)$; $y = D_2 x$

L'operatore di Downsampling non è iniettivo. Questo che influenza ha su segnali sinusoidali?

↓

Stesso output con diverso input

- $\omega = 0$, $x_n = 1 \ \forall n \Rightarrow y_n = x_n = 1 \ \forall n$
- $\omega = \pi$, $x_n = (-1)^n \Rightarrow y_n = 1 \ \forall n$

Partendo da due segnali completamente diversi, ottengo lo stesso risultato dopo aver applicato il downsampling

Problema

$\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = \pi$ sono degli ALIAS $(e^{j\omega_1 n}, e^{j\omega_2 n}$ hanno la stessa immagine)

Sottocampionati segnali ≠ diventano =

output

Più in generale ω_0, $\omega_0 + \pi$ sono ALIAS :

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{D_2} e^{2j\omega_0 n}$$

→ Frequenza che oscilla con $2\omega_0$

$$e^{j(\omega_0+\pi)n} \xrightarrow{D_2} e^{2j(\omega_0+\pi)n} = e^{2j\omega_0 n} \cdot e^{2j\pi n}$$

$e^{2j\pi n} = 1$

ω_0 e $\omega_0+\pi$ sono quindi alias

e ogni $x \in \ell^2$ è una sovrapposizione di $e^{j\omega n}$ con $\omega \in [-\pi, \pi]$:

Perche' e' (FORMULA DI INVERSIONE PER LA DTFT.)

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{EC} e^{j\omega n} \, d\omega$$

La successione in partenza e' una sovrapposizione dei segnali sinusoidali

Ragioniamo nel dominio della frequenza: vediamo il legame di DTFT di y e di x

DTFT di $y = D_2 x$:
$$Y(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} y_m e^{-j\omega m}$$
tramite l'operatore di Down sampling $y_n = x_{2n}$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{2m} e^{-j\omega m}$$
$(2n = k)$
$$= \sum_{k \text{ pari}} x_k e^{-j\frac{\omega}{2}k}$$
Vogliamo tutti i K, anche i dispari
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{\cancel{1} + (-1)^k}{2}}_{= \begin{cases} 0 & K \text{ dispari} \\ 1 & K \text{ pari} \end{cases}} x_k e^{-j\frac{\omega}{2}k}$$
$$= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j\frac{\omega + 2\pi}{2}}) \right] \qquad \frac{\omega+2\pi}{2} = \frac{\omega}{2} + \pi$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_k x_k e^{-j\frac{\omega}{2}k} + \sum_k x_k e^{-j(\frac{\omega}{2}+\pi)k} \right)$$

$y = D_2 x$
$$Y(e^{j\omega}) \overset{?}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$
$x \xrightarrow{D_2} y$, $X \xrightarrow{?} Y$ DTFT

Y e' la DTFT di $y = D_2 x$
X e' la DTFT di x

Ci interessa la formula tra le trasformate

$$\frac{1 + (-1)^k}{2} = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ disp.} \end{cases}$$
$$(-1)^k = e^{-j\pi k} = \cos\pi k \; \cancel{- j \sin\pi k} = (-1)^k$$
$$(-1)^k e^{-j\frac{\omega}{2}k} = e^{-j(\frac{\omega}{2}+\pi)k}$$

$\boxed{\text{OSS}}$ **NEL CASO DI UN FILTRO** $x \mapsto y = x * h$
$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

Perciò
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}) \right]$$
Formula che lega input e output nel dominio della frequenza

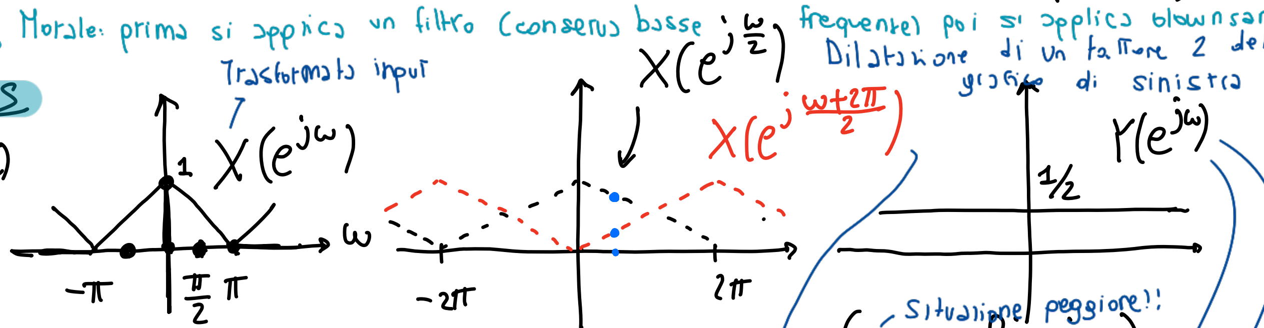
se $z = e^{j\omega}$, $-\pi < \omega \le \pi$, $z^{1/2} = e^{j\omega/2}$ — Cambio di variabile
$$Y(z) = \frac{1}{2}\left[X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right]$$
(valida per la trasf. zeta).

Morale: prima si applica un filtro (conserva basse frequenze) poi si applica downsampling

Es

Vediamo 3 esempi grafici nel dominio della frequenza

(a)



$a + b = c$

Traslazione verso sinistra di 2π

(Situazione peggiore!! puro aliasing). Perdo molte info!

Trasformata dell'output

NB Avendo Y alla fine non sappiamo quali sono le frequenze di partenza perche' abbiamo solo la somma

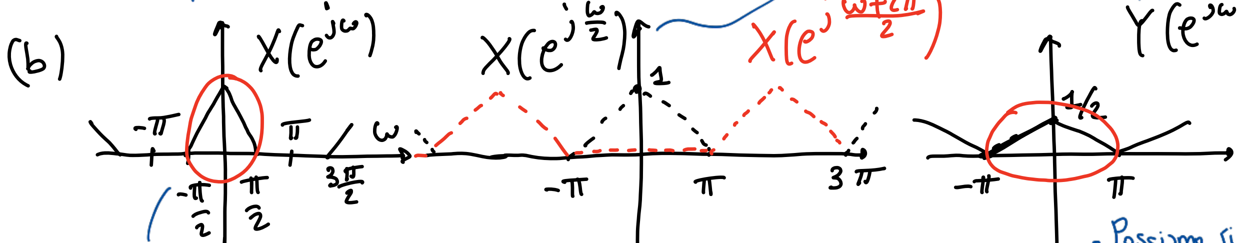
La DTFT dell'output e' costante $\Big\{$ La ottengo come la media dei valori neri e rossi del grafico prima

Stesso discorso di prima

Situazione più favorevole: non si verifica aliasing

Semisomma dei grafici affianco

(b)

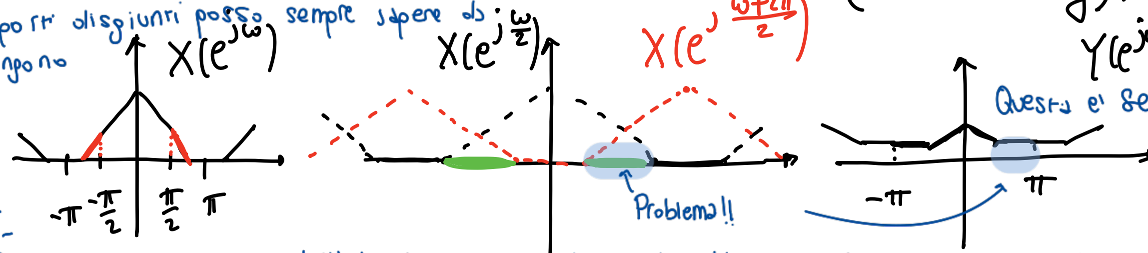


Segnale concentrato maggiormente sulle basse frequenze

(no aliasing). Possiamo risalire al grafico originale

Se $h = f+g$ con supporti disgiunti posso sempre sapere da h se le info provengono da f o da g

(c)



Questa è sempre la semisomma

Situazione intermedia tra il caso migliore e il caso peggiore

↳ Il problema dell'aliasing qui si vede ⟹ il problema è dove c'è sovrapposizione!!

$y = D_2 x$ presenta un effetto di aliasing se x contiene frequenze

$\omega_0, \omega_0+\pi$ $\left(X(e^{j\omega_0}) \neq 0,\ X(e^{j(\omega_0+\pi)}) \neq 0 \right)$.

↳ (Ricordati gli esempi sopra!)

(non si presenta se $X(e^{j\omega}) = 0$ per $\frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi$ (caso b))

Condizione sufficiente affinché non si produca l'effetto di aliasing = così da poter tornare ai segnali di partenza

Generalizzazione **Downsampling by N**: $y = D_N x$

$y_n = x_{Nn}$ } Selezioniamo le componenti con indice multiplo di N

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{\omega+2k\pi}{N}}\right)$$

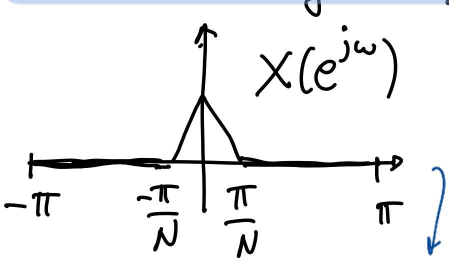
→ Abbiamo anche qui una media

→ N termini con traslazioni di 2π ogni volta

Si ha effetto di aliasing se x contiene frequenze ω_1, ω_2 che differiscono per un multiplo di $\frac{2\pi}{N}$.

NON c'è aliasing se $X(e^{j\omega}) = 0$ per $\frac{\pi}{N} < |\omega| \leq \pi$: Condizione sufficiente

↓ diventa sempre più stringente



NOTAZIONE

$x \to (\downarrow 2) \to y$ $\quad y = D_2 x$

$x \to (\downarrow N) \to y$ $\quad y = D_N x$

Vogliamo segnali a banda limitata e senza fluttuazioni troppo frequenti altrimenti perdiamo troppe delle informazioni principali

Guardiamo ora l'operatore duale, cioè quello di upsampling

Espressione complicata nel dominio del tempo

Upsampling by 2: $U_2 : \ell^2 \to \ell^2$

Si vamo ad inserire degli zeri tra un elemento e il successivo

↓

L'operatore raddoppia la lunghezza

$$y = U_2 x$$

$$y_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$(\dots x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{U_2} (\dots, x_{-1}, 0, \boxed{x_0}, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$$

dell'operatore upsampling

↑

Come matrice:

Matrice identità in cui si mettono righe nulle

$$\begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-1} \\ \boxed{x_0} \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{-1} \\ 0 \\ \boxed{x_0} \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Non è iniettivo

$$U_2 = D_2^* \ (\text{aggiunto}), \quad U_2^* = D_2 \quad \to \langle D_2 x, y\rangle_{\ell^2} = \langle x, U_2 y\rangle_{\ell^2} \quad \forall x, y \in \ell^2$$

non è suriettivo, ma è iniettivo

$$\boxed{y = U_2 x}$$

$$Y(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n e^{-j\omega n} = \sum_{n \text{ pari}} x_{n/2} e^{-j\omega n} \qquad \left(\frac{n}{2} = k\right)$$

→ Manteniamo gli indici pari

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-2j\omega k}$$

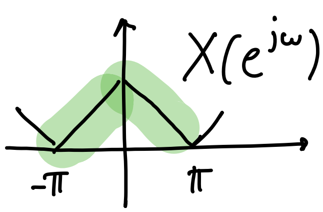
→ Cambio di variabile

$$= X(e^{j2\omega})$$

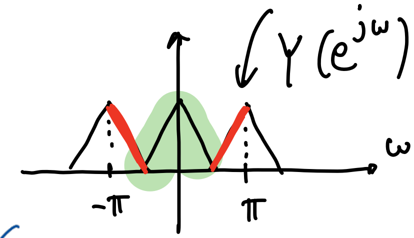
Vogliamo di nuovo trovare la relazione tra le DTFT di y e x

Perciò $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$

$$Y(z) = X(z^2)$$



images = repliche



Siamo nel dominio della frequenza, per tornare a x guardo su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e lo dilato di 2

Si fa una contrazione del grafico iniziale

Da questo si può ritornare al grafico di partenza = no perdita di info

Poi applico D_2

Prima applico U_2

In generale, $D_2 U_2 = I$ → Siamo in dim $=\infty$, quindi D_2 e U_2 non sono l'uno l'inverso dell'altro, per di più non sono neanche invertibili

$U_2 D_2 =$ Proiez. ortogonale sul sottospazio $\{(x_m) : x_m = 0$ per m dispari$\}$.

Upsampling by N: $U_N : \ell^2 \to \ell^2$

$y = U_N x$

Aggiungo $N-1$ zeri tra un'entrata e l'altra

$$y_m = \begin{cases} x_{m/N} & \text{se } \underbrace{m \equiv 0 \bmod N}_{m \text{ è divisibile per } N} \\ 0 & \text{se } m \not\equiv 0 \bmod N \end{cases}$$

$$x = (\dots, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{U_N} (\dots, \underset{y_0}{\boxed{x_0}}, \underbrace{0,\dots,0}_{N-1}, \underset{y_N}{x_1}, \underbrace{0,\dots,0}_{N-1}, x_2, \dots)$$

Proprietà

$D_M U_N = U_N D_M$ (Commutano) ~~se~~ se e solo se M, N sono primi tra loro

NB $U_N U_M = U_M U_N$, $D_M D_N = D_N D_M$ $\forall M, N \in \mathbb{N}$

ES. Calcolare $D_3 U_2 x$, $U_2 D_3 x$

$$D_3 U_2 x \overset{?}{=}$$

$$U_2 x = (\dots, \boxed{x_0}, 0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, x_5, \dots)$$

$$D_3 U_2 x = (\dots, \boxed{x_0}, 0, x_3, 0, \dots)$$

$$D_3 x = (\dots, \boxed{x_0}, x_3, x_6, \dots)$$

$$U_2 D_3 x = (\dots, \boxed{x_0}, 0, x_3, 0, x_6, \dots)$$

$=$

$$(D_M x)_m \overset{def}{=} x_{Mm}$$

$$(U_N x)_m \overset{def}{=} \begin{cases} x_{m/N} & \text{se } m \equiv 0 \bmod N \\ 0 & \text{se } m \not\equiv 0 \bmod N \end{cases}$$

$$(U_N \underline{D_M x})_m = \begin{cases} x_{Mm/N} & \text{se } m \equiv 0 \bmod N \\ 0 & \text{se } m \not\equiv 0 \bmod N \end{cases}$$

$= ?$

$$(D_M U_N x)_n = \begin{cases} x_{nM/N} & \text{se } nM = 0 \mod N \\ 0 & \text{se } nM \neq 0 \mod N \end{cases}$$

$$n = 0 \mod N \iff nM = 0 \mod N$$

siccome N e M solo primi tra loro