

CAMPIONAMENTO E INTERPOLAZIONE

FSP Cap. 5

Breve richiamo di quanto visto all'inizio del corso

H sp. di Hilbert; $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k \in J} \subset H$, $\{\varphi_k\}_{k \in J} \subset H$ succ. di Bessel

$$\tilde{\Phi}^*: H \rightarrow \ell^2(J)$$

$$(\tilde{\Phi}^* x)_k = \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle$$

operatore di analisi
o campionamento

$$\Phi: \ell^2(J) \rightarrow H$$

$$\Phi \alpha = \sum_{k \in J} \alpha_k \varphi_k$$

operat. di sintesi o
interpolazione

Campionamento e interpolazione in dimensione finita

Consideriamo da
 $H = \mathbb{C}^H$

$$\tilde{\Phi}^*: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^N$$

$$\tilde{\Phi}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_N^T \end{bmatrix}$$

Lo applico al vettore
 $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$

$$y = \tilde{\Phi}^* x, \quad y_k = \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle$$

($\tilde{\varphi}_k$ vett. colonna, $\tilde{\varphi}_k^T$ vett. riga).

$$(N \leq M)$$

gradi di libertà
del segnale

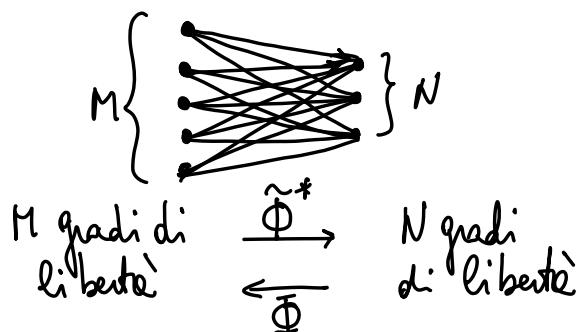
$$\Phi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \end{bmatrix}$$

Lo applico
al vettore
 $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$

$$x = \Phi \alpha = \sum \alpha_k \varphi_k$$

($\alpha \in \mathbb{C}^N, x \in \mathbb{C}^M$)



Non c'è detto che
 $\tilde{\Phi}^*$ e Φ siano l'uno l'inverso dell'altro
Se il segnale soddisfa alcune ip.
invece $\tilde{\Phi}^*$ e Φ sono l'uno l'inverso
di ell'altro

Vedremo un teorema > riguardo

Campionamento e interpolazione per successioni

Caso di filtri ortogonali

$$H = \ell^2(\mathbb{Z}) ; \quad \tilde{\varphi}_k = \varphi_k = T_{KN} g ; \quad g \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

(passo N fisso)

Successione si traslate di \downarrow
 \downarrow
 Successione fissata

Prendiamo la
stessa successione
(non entra in gioco Φ^*)

$$\Phi^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \quad | \quad \phi : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(\Phi^* x)_k = \langle x, T_{KN} g \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \quad | \quad \Phi x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k T_{KN} g$$

Supponiamo che $\{T_{KN} g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia un sistema ortonomale

\rightarrow A 2 a 2 ortogonali
e di norma 1

Allora

$$g = (\dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

$$\begin{array}{c} \Phi^* \Phi = I \\ \text{(interpolazione seguito da campionamento)} \end{array}$$

Detto nelle prime lezioni
 $\{T_{2k} g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sist. ort. di $\ell^2(\mathbb{Z})$
 $(\dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$ non una base

mentre

$$\Phi \Phi^* = P \text{ proiezione ortogonale su } \overline{\text{span } \{T_{KN} g\}_{k \in \mathbb{Z}}}$$

(Campionamento seguito da interpolazione)

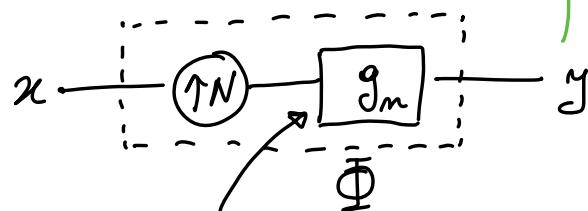
L'operatore di analisi e sintesi si possono implementare come sistemi multirate:

Implementazione come sistemi multirate

operatore di Interpolazione \rightarrow upsampling

$$Px = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, T_{KN} g \rangle T_{KN} g$$

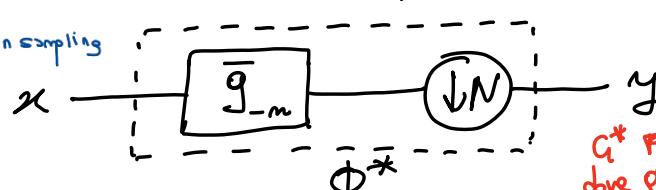
$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= G \cup_N \\ y &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k T_{KN} g \end{aligned}$$



filtro G con risposta impul. $g = \{g_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$

operatori di Campionamento: \rightarrow Downsampling

$$\begin{aligned} \Phi^* &= D_N G^* \\ y_m &= \langle x, T_{mN} g \rangle \\ \text{e' l'aggiornato di } \Phi^* & \quad \text{e' l'aggiornato di } \Phi^* \end{aligned}$$



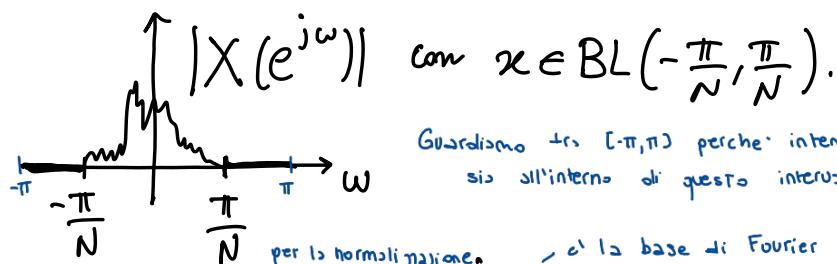
$$G^* \text{ FILTRO } G^* x = x * g^* \\ \text{dove } g^* \text{ det } \overline{g_{-m}}$$

Esempio prototipo pseudogranitico

ES (successioni e bande limitate).

$$BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right) := \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{Z}) : X(e^{j\omega}) = 0 \text{ per } 0 < |\omega| < \frac{\pi}{N} \right\}$$

DTFT di x



Osserviamo che $\left\{ \sqrt{N} e^{-jkN\omega} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right)$ con periodo $\frac{2\pi}{N}$

$$\text{Prodotto scalare in } L^2: \langle X, Y \rangle = \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} X(e^{j\omega}) \overline{Y(e^{j\omega})} \frac{d\omega}{2\pi}$$

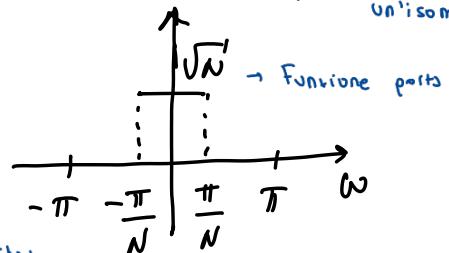
Questo è lo scambio rispetto a prima DTFT e grazie a questo $L^2 \rightarrow L^2$ è un'isometria

Consideriamo ora il filtro passa basso ideale

$$G(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sqrt{N} & |\omega| \leq \frac{\pi}{N} \\ 0 & \frac{\pi}{N} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Vogliamo costruire una base ortonormale per lo spazio delle successioni \rightarrow bands limitate

Allora



$\left\{ G(e^{j\omega}) e^{-jkN\omega} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per il sottospazio di successioni:

$$\left\{ X \in L^2(-\pi, \pi) : \text{supp } X \subset \left[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right] \right\}$$

Inversa della DTFT

↑ DTFT (isomorfismo isometrico)

$\left\{ T_{KN} g \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per $BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right)$

$$\text{Con } g_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)$$

$$\text{so che } g \xrightarrow{\text{DTFT}} G(e^{j\omega}), T_{KN} g \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (T_{KN} g)_m e^{-jm\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{m-kn} e^{-jn\omega} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-j(m+kn)\omega} = e^{-jkn\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-jm\omega}$$

Successione prototipo

Terme di campionamento (per segnali digitali)

1) Dato $x \in \ell^2$, la sua proiezione ortogonale su $BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right)$ è

$$P_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k T_{kN} g, \text{ dove } y_k = \langle x, T_{kN} g \rangle_{\ell^2}$$

Ricordiamo che
 $P_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, p_k \rangle p_k$
 $S = \text{span}\{p_k\}$
con $\{p_k\}$ base ortonormale di S

$$\begin{aligned} (P_X)_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \sin \left(\frac{\pi}{N} (m - kN) \right) \\ y_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m \sin \left(\frac{\pi}{N} (m - kN) \right) \end{aligned}$$

Punto interessante:

2) Se $x \in BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right)$ allora $\rightarrow P_x = x$ se $x \in BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right)$

$$x_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{kN} \underbrace{\sin \left(\frac{\pi}{N} (m - kN) \right)}_{\sqrt{N} (T_{kN} g)_m}.$$

→ formula di ricostruzione che permette di rigenerare interamente il segnale originale

Dimostrazione 8
Dim 1) Segue subito dal fatto che $\{T_{kN} g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$.

2) In questo caso x coincide con la sua proiezione ortogonale e quindi $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k T_{kN} g$, dove $y_k = \langle x, T_{kN} g \rangle_{\ell^2} = (\phi^* x)_k$

(ϕ^* essendo l'operatore di analisi associato al sist. ortonormale $\{T_{kN} g\}_{k \in \mathbb{Z}}$).

Ma

$$\phi^* x = D_N G^* x = \sqrt{N} D_N x$$

perciò $G^* x = g^* * x$ con $g^* = \overline{g} = g = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin \left(\frac{\pi}{N} m \right)$

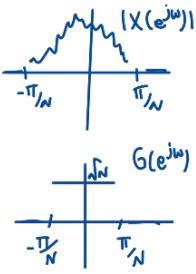
Abbiamo verificato quanto volevamo verificare

$$= G x$$

$$= \sqrt{N} x \text{ siccome } x \in BL\left(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right).$$

$$x_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{N} x_{kN} \frac{1}{\sqrt{N}} \sin \left(\frac{\pi}{N} (m - kN) \right)$$

i coefficienti si possono vedere come il risultato dell'operatore di sintesi



Pertanto $y_k = \sqrt{N} x_{kN}$.

Questo è l'obiettivo che vogliamo verificare

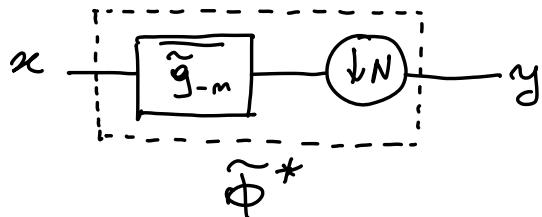
Generalizzazione di quanto già visto

Caso di filtri biorientativi (cenni)

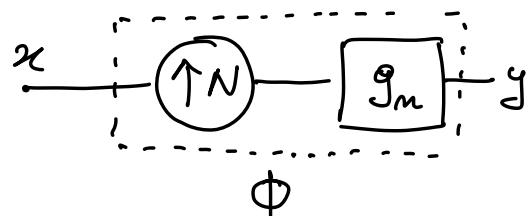
In generale si possono considerare filtri diversi per il campionamento e per l'interpolazione.

Se all'inizio possiamo considerare \tilde{g}^* e \tilde{g} non hanno niente in comune, ma poi vorremmo un collegamento.

$$(\tilde{\Phi}^* x)_k = \langle x, T_{kN} \tilde{g} \rangle$$



$$\Phi x = \sum x_k T_{kN} \tilde{g}$$



Se $\tilde{\Phi}^* \tilde{\Phi} = I$ campionamento e interpolazione si dicono consistenti
 $(\Leftrightarrow \langle T_{kN} \tilde{g}, T_{mN} \tilde{g} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=m \\ 0 & \text{se } k \neq m \end{cases})$

Questo è il caso che si ottiene di più al concetto di base o trasfimile
 Se in aggiunta si ha $\text{Span}\{T_{kN} \tilde{g}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Span}\{T_{mN} \tilde{g}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

allora campionamento e interpolazione si dicono ideally matched.

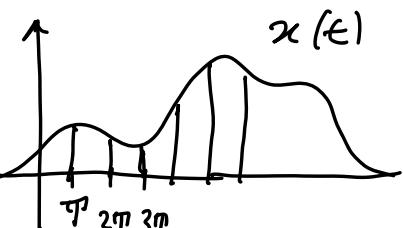
combinano perfettamente

- Campionamento e interpolazione per funzioni: Si fissa T e si solva il valore sto quando abbiamo un multiplo di T



$$y_m = x(mT), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad T > 0.$$

T passo o periodo di campionamento (sec.)



Aliasing: fenomeno già visto in precedenza

$$\begin{aligned}
 X(t) &= e^{j\omega t} \\
 &\xrightarrow{\text{Sampling}} e^{j\omega T n} = y_m \quad \begin{array}{l} \text{Frequenza digitale} \\ \text{Successione che oscilla} \end{array} \\
 e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T})t} &\xrightarrow{\text{Sampling}} e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T})nT} \\
 &= e^{j\omega T n} e^{j2\pi n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Frequenza digitale

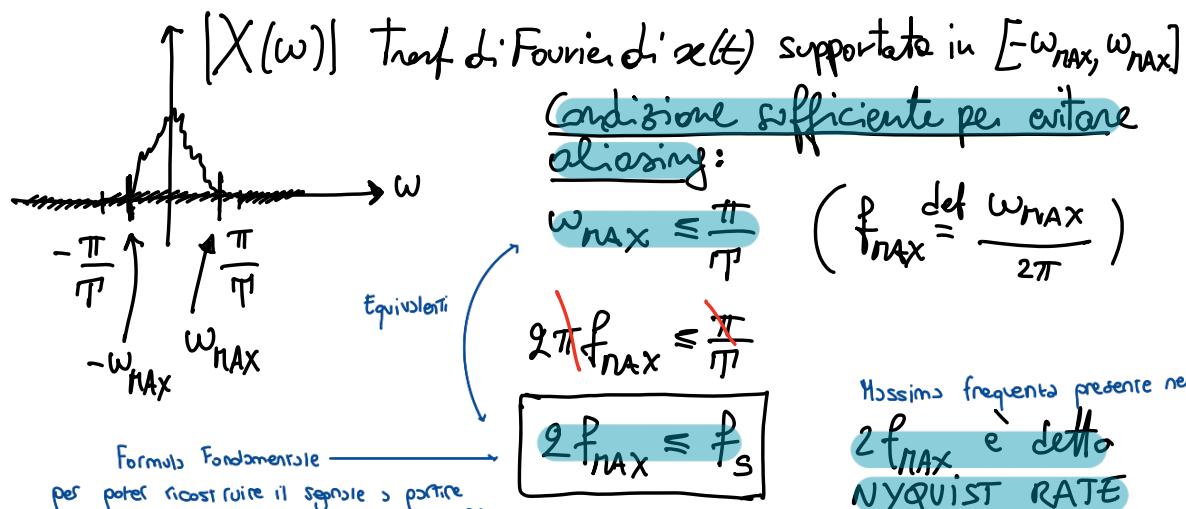
2 segnali differenti che campionati ottengono lo stesso risultato

Motivo: Se i segnali di portata contengono frequenze che differiscono di $\frac{2\pi}{T}$, quando andiamo a campionare i segnali con passo T , le frequenze dovranno essere risultato producendo il fenomeno dell'aliasing

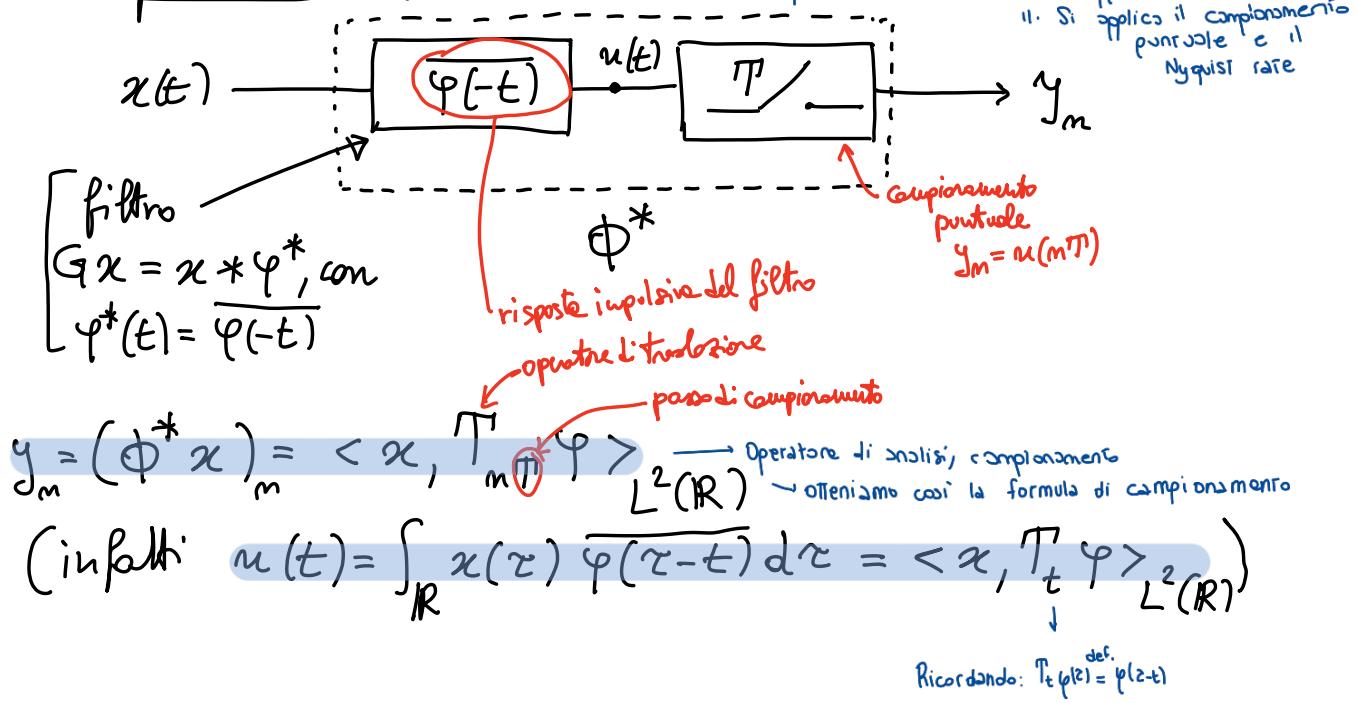
Parametri del sistema di campionamento e indipendenti dal segnale

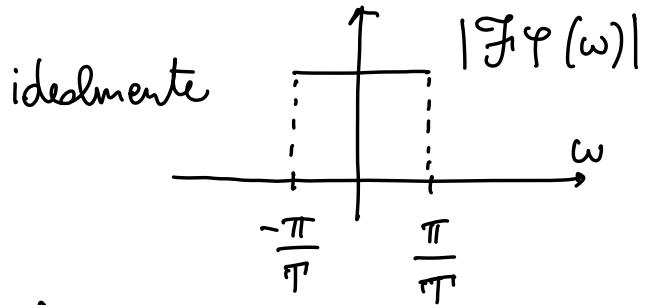
- i) $f_s = \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento (n° di campioni per unità di tempo; Hz = cicli/sec)
- ii) $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ frequenza digitale di campionamento (rad/sec)

DSC Se la freq. angolare del segnale in ingresso è ω , la freq. digitale (angolare) di quelli in uscita è $\omega^T = \omega/f_s$ Tipicamente $f_{MAX} < \omega$



Campionamento (per funzioni)





Es Tracce audio su CD: $f_s = 44 \text{ kHz}$
 max freq. udibile è $f_{MAX} = 20 \text{ kHz}$ e $f_s \geq 2 \cdot 20 \text{ kHz}$
 $= 40 \text{ kHz}$

Interpolazione (per funzioni)

CENNI

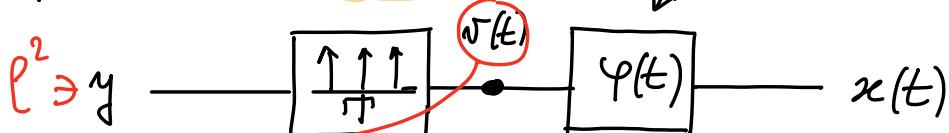
$\{\varphi_k\}$ socc. BESSEL in H

$$\begin{aligned} \Phi: \ell^2 &\rightarrow H && \text{Operatore di sintesi:} \\ x &\mapsto \Phi x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi_k \end{aligned}$$

$$y = \{y_k\} \longrightarrow x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k T_{k\pi} \varphi$$

($\pi > 0$ periodo di campionamento)

Implementazione (cenno):

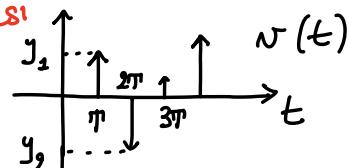


CENNO

$$N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \underbrace{\delta(t - k\pi)}_{\pi \delta(t)}$$

DISTRIBUZIONE
TEMPORENTA

TRENTO
DI IMPULSI



$$\begin{aligned} x = N * \varphi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k (\pi \delta) * \varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \delta * T_{k\pi} \varphi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k T_{k\pi} \varphi \end{aligned}$$

In conclusione (per funzioni) ($\pi > 0$)

SINTESI
interpolazione

$$\Phi: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$x = \Phi y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k T_{k\pi} \varphi$$

Somma
di misure

ANALISI:
campionamento

$$\Phi^*: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$y_m = (\Phi^* x)_m = \langle x, T_{m\pi} \varphi \rangle$$

Prodotto
scalar

frazione
prototipo

periodo di campionamento

Remind:

Se $\{T_{k\pi} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonomale in $L^2(\mathbb{R})$ allora

$$\Phi^* \Phi = I$$

$$\Phi \Phi^* = P \text{ proiez. ortogonale su } \overline{\text{span}\{T_{k\pi} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}}$$

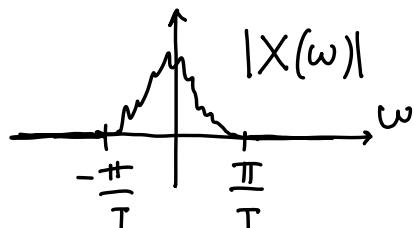
Andiamo nel mondo delle funzioni → SEGNALI ANALOGICI

ES (funzioni a bande limitate). ($T > 0$)

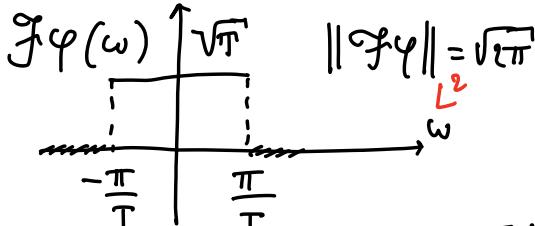
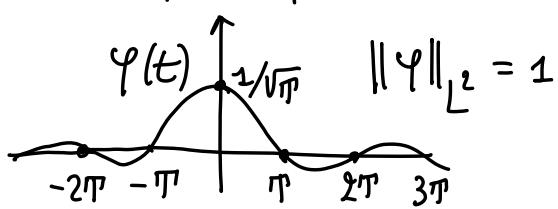
Spazio dei segnali analogici
↓
Funzioni non più successive

$$BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right) = \{x \in L^2(\mathbb{R}) : X(\omega) = 0 \text{ per q.o. } |\omega| > \frac{\pi}{T}\}$$

TRANS. FOURIER
di $\varphi(t)$



base ortonormale di $BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ è
 $\{\pi_{kT} \varphi\}$ dove $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T} t\right)$



Infatti $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \overline{F\varphi(\omega)} d\omega$ considerando questo 2π nell'integrale

definisce $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \overline{F\varphi(\omega)} d\omega$ def di $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$

isomorfismi isometrici $BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \{X \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp} X \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]\} \cong L^2\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ teniamo un'isometria

BASI $\{\pi_{kT} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{e^{-j\omega kT} \cdot F\varphi(\omega)\}_{k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{\sqrt{T} e^{-j\omega kT}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$F(\pi_{kT} \varphi)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \varphi(t-kT) dt = e^{-jk\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} x(s) ds$$

base di FOURIER

Teorema di campionamento per funzioni $X(\omega)$ (SHANNON, ...)

1) Se $x \in L^2(\mathbb{R})$, le sue proiez. ortogonale su $BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$

Nulla di nuovo
è $Px = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \pi_{kT} \varphi$ dove $y_k = \langle x, \pi_{kT} \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} P_x(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right) \\ y_k &= \langle x, \pi_{kT} \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right) dt \end{aligned}$$

Cose interessanti: 2) Se $x \in BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ allora

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)$$

→ Posso ricostruire il segnale originale senza perdere informazioni!

Con convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ e anche convergenza uniforme.

Dimostrazione Solo la parte nuova
Dim La parte in $L^2(\mathbb{R})$ è del tutto simile al caso dei segnali digitali. Dim della convergenza uniforme:

Se $x \in BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ (quindi $x \in L^2$, $X \in L^2 \cap L^1$)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t} X(\omega) d\omega \quad \begin{matrix} \text{per quasi ogni } t \in \mathbb{R} \\ \text{(formula inversione di Fourier)} \end{matrix}$$

ma l'integrale definisce una funzione C^∞ e quindi $x(t)$ fa un rappresentante in $L^2(\mathbb{R})$ di classe C^∞ . Inoltre

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \underbrace{|e^{j\omega t}|}_{=1} \|X(\omega)\| d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \|X(\omega)\| d\omega \leq C_1 \|X\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_2 \|x\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz
 $\int_a^b |x(w)| \cdot 1 dw \leq \sqrt{\int_a^b |x(w)|^2 dw} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2 dw}$

Perciò se $x^{(k)}, x \in BL\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ e $x^{(k)} \rightarrow x$ in L^2 allora

$$x^{(k)} \rightarrow x \text{ uniformemente } (\sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(k)}(t) - x(t)| \leq C \|x^{(k)} - x\|_{L^2} \rightarrow 0).$$

Perche' basta applicare la formula
sui differenti

Illustrazione del
Teorema di Shannon

