Segnale: sovrapposizione di bande di frequenze

Filtri: fanno passare solo alcune bande di frequenza del segnale → blocchi base per i filtri di convoluzione in ML & AL

Sono operatori di convoluzione

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI (FILTRI)

FSP sezioni 3.3.3, 3.4, 3.6

Successioni indicizzate da un intero

Linear Shift Invariant

Sia $H: \ell^2 \to \ell^2$ $(\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}))$ LSI, limitato.

$(HT_k x = T_k H x \quad \forall k \in \mathbb{Z})$ → commuta come visto a fine lezione 4

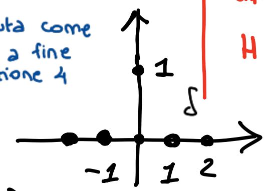
Ricorda che $(T_k x)_n \overset{def}{=} x_{n-k}$, $x \in \ell^2$

Richiamo $\ell^2 = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty\}$

$H: \ell^2 \to \ell^2$
- lineare
- limitato: $\exists C > 0$: $\|Hx\|_{\ell^2} \le C \|x\|_{\ell^2}$ $\forall x \in \ell^2$ } altro modo di dire che l'operatore e' continuo
- shift-invariant

Successione

$\delta \in \ell^2$, $\quad \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$



Sia $h \overset{def}{=} H\delta$ (risposta impulsiva). Se $x \in \ell^2$,

↳ Impulso unitario a $t=0$

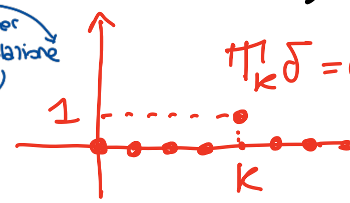
$\delta \to \boxed{H} \to h$

$x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k \delta$ conv in ℓ^2 $\quad (T_k\delta = e_k$ base canonica di $\ell^2)$.

$T_k\delta = e_k$

Si può scrivere come sovrapposizione di traslate della δ

$T_k\delta = e_k$ e' la base standard di ℓ^2



$Hx = H \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k \delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k H T_k \delta$ → e' invariante per traslazione

H lineare e limitato

$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k H\delta$ → riconosco la risposta impulsiva

Conoscendo h, conosco la reazione di H per ogni elemento di $x \in \ell^2$

Conoscendo h conosce l'azione dell'operatore su ogni successione x

$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \underbrace{T_k h}_{\in \ell^2 \ \forall k\in\mathbb{Z}}$

$(T_k h)_m = h_{m-k}$ per def di operatore di traslazione

$= \langle x, \overline{y^*} \rangle$ con $y_k \doteq h_{n-k}$

$(Hx)_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{m-k}$ ← ANALOGA $\int \to \sum$, $t \to n$, $s \to k$

$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds$ Formula di convoluzione

In generale si definisce la convoluzione di x, h:

$(x * h)_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{m-k} \overset{n-k=k',\ k=n-k' \in\mathbb{Z}}{=} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} h_{k'} x_{m-k'} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$

Ha senso se:
- $x, h \in \ell^1 \Rightarrow x * h \in \ell^1$
- $x, h \in \ell^2 \Rightarrow x * h \in \ell^\infty$
- x, h causali $\Rightarrow x * h$ causale

↓ Condizioni per capire che la convoluzione abbia senso

$\sum_m \sum_k |h_k x_{m-k}| = \sum_k \sum_m |h_k||x_{m-k}|$

$= \sum_k \left[|h_k| \underbrace{\sum_m |x_{m-k}|}_{\|x\|_{\ell^1}}\right] = \|x\|_{\ell^1} \underbrace{\sum_k |h_k|}_{\|h\|_{\ell^1}}$

$= \|x\|_{\ell^1} \|h\|_{\ell^1}$

$\sum_k |h_k x_{m-k}| \overset{\text{CAUCHY SCHWARZ}}{\le} \left(\sum_k |h_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_k |x_{m-k}|^2\right)^{1/2}$

$= \|h\|_{\ell^2} \|x\|_{\ell^2}$

(x è causale se $x_m = 0$ se $m < 0$).

$\dots, 0, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots$ → Prima di x_0 ho solo elementi nulli

Posso limitarmi a studiare $0 \le k \le n$ e tutte le altre entrate saranno nulle

$H\varphi_k = \sum x_k \varphi_k = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

E' un operatore di sintesi, di ricostruzione

$$Hx = x * h \quad \text{operatore di convoluzione}$$

$\{\varphi_k\}$ in H
- $\Phi\alpha = \sum_k \alpha_k \varphi_k$ SINTESI
- $\Phi^* x = \{\langle x, \varphi_k \rangle\}_k$ ANALISI

RUOLO DI φ_k

$$Hx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \underbrace{T_k h}_{\text{colonna } k\text{-esima}} \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

OPERAT. DI SINTESI

Possiamo rappresentare H tramite matrice infinita

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0 & h_{-1} & \vdots & \vdots \\ h_1 & \boxed{h_0} & h_{-1} & \vdots \\ \vdots & h_1 & h_0 & \vdots \\ \vdots & h_2 & h_1 & \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$T_0 h = h$, $T_1 h$

$\uparrow$ $k=0$, $h = T_0 h$ $\quad$ $\uparrow$ $k=1$, $h = T_1 h$ — Traslato di 1 verso il basso

e' la risposta impulsiva che e' la colonna

Matrice di TOEPLITZ (costante sulle diagonali)

L'operatore di convoluzione deve avere la matrice con questa struttura

Ma si puo' vedere anche come operatore di analisi

$$(Hx)_m = \langle x, T_m h^* \rangle_{\ell^2}$$

m-esima riga coniugata

OPERAT. DI ANALISI

$$\text{dove} \quad h^*_k := \overline{h_{-k}}$$

$$\langle x, T_m h^* \rangle_{\ell^2} = \sum_k x_k \overline{\overline{h_{m-k}}} = \sum_k x_k h_{m-k} = (x*h)_m$$

$$(T_m h^*)_k = \overline{h}_{-(k-m)} = \overline{h}_{m-k}$$

↑ operazione di traslazione

In ogni caso H e' univocamente determinato dalla risposta impulsiva

FILTRO = OPERATORE DI CONVOLUZIONE = SISTEMA LSI

Un filtro si dice
- causale se $h_n = 0$ per $n < 0$

$$(Hx)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{m-k} = \sum_{k \le m} x_k h_{m-k} \qquad m-k \ge 0$$

→ interpretazione: guardiamo solo i valori passati dell'input

- anticausale se $h_n = 0$ per $n > 0$ (h e' sempre la risposta impulsiva)
- stabile se $h \in \ell^1$ ($\Rightarrow H : \ell^\infty \to \ell^\infty$ limitato) cioe' BIBO — questo garantisce

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < \infty$

$\|x * h\|_{\ell^\infty} \le \sup_m \sum_k |h_k x_{m-k}| = \sup_m \sum_k |h_k| |x_{m-k}| \le \|h\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell^\infty}$ (con $|x_{m-k}| \le \|x\|_{\ell^\infty}$)

- FIR (finite impulse response) se $h_n \neq 0$ per un n° finito di indici n

Numero di componenti non nulle e' al piu' finito

$h = (0, \ldots, 0, \boxed{1}, 3, 5, 0, \ldots, 0)$

- IIR (infinite ...) se $h_n \neq 0$ per un n° infinito di indici n. → $h = (0, \ldots, 0, \boxed{1}, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$

Analisi dei segnali a tempo discreto.

Si operano delle trasformate:

Motivazioni per operare le trasformate

- per rilevare degli aspetti del segnale (feature extraction, pattern recognition) — es. capire se c'e' un andamento periodico
- per ridurre la complessita' del segnale (rappresentaz. sparse).

significa fare un cambiamento di base

Introduciamo una trasformata ⇒ TRASFORMATA di FOURIER a TEMPO DISCRETO

$$Hx = h * x \qquad (h \in \ell^1)$$

$$x_n = e^{j\omega n} \qquad (\omega \in \mathbb{R} \text{ fissato})$$

↳ $\cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$

$$(Hx)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{n-k}$$ con ω fissato

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{j\omega(n-k)}$$

Proprieta' esponenziale

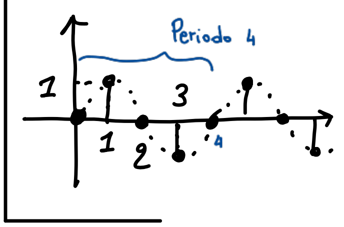
$$= \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} e^{j\omega n}$$

Es:

→ unita' immaginaria

$$\omega = \frac{2\pi}{4}, \quad x_n = e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$\Im m\, x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$



$H(e^{j\omega})$ risposta in frequenza o funzione di trasferimento.

La successione viene attenuata o amplificata: il filtro così seleziona certe bande

Perciò $\underbrace{Hx}_{} = \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\in\mathbb{C}}\, x.$

E' una successione di autovettori degli operatori di convoluzione

↑ Successione di partenza

(H è la DTFT della risposta impulsiva h)

* Ma NB che $\{x_n\} \notin \ell^2$ perche' $|x_n| = 1 \ \forall n$

Ma normalmente li possiamo interpretare così, come autovettori

La DTFT (discrete-time Fourier Transform) di $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è definita come

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-j\omega k}$$

funz. di $\omega \in \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π

$\omega \to \omega + 2\pi$ $\qquad e^{-j(\omega+2\pi)k} = e^{-j\omega k} \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{1}$

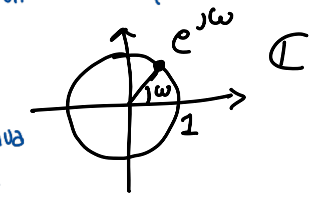
$$X(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k z^{-k}$$

↳ Funzione definita sulla circonferenza unitaria

$z = e^{j\omega \in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1.$

$j\omega \in \mathbb{R}$ e rappresenta l'angolo

↳ e' un numero complesso



ANALOGIA $\quad \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ ← Trasformata di Fourier continua nel caso di funzioni

Es (Filtro passa basso di Haar)

$$h = (\dots 0, \boxed{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}, 0, \dots)$$
$$ h_{-1} \quad h_0 \quad h_1 \quad h_2$$

$H : \ell^2 \to \ell^2$

$$Hx \overset{def}{=} x * h \qquad \text{Nel dominio del tempo}$$

$$y = x * h$$

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k} \qquad n-k=0 \text{ oppure } n-k=1$$

$$= x_n h_0 + x_{n-1} h_1$$

$$y_n = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} \quad \text{MEDIA MOBILE}$$

Stiamo andando a smussare i dati

$$H(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k} \quad \to \text{Sopravvivono solo } h_0 \text{ e } h_1$$

Risposta in frequenza DTFT

$$= h_0 e^{-j\omega \cdot 0} + h_1 e^{-j\omega \cdot 1}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} \left(\frac{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}{2} \right) = \cos\frac{\omega}{2}\, e^{-j\omega/2}$$

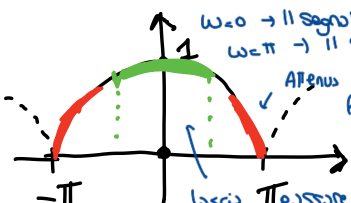
Rappresentiamo il modulo

$$|H(e^{j\omega})| = \cos\frac{\omega}{2} \quad (\text{se } |\omega| \le \pi) \qquad |e^{-j\frac{\omega}{2}}| = 1$$

$z = \rho e^{j\vartheta}$

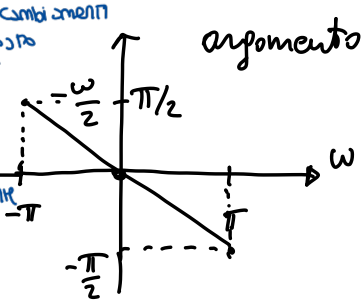
$\rho \ge 0$ modulo

ϑ è l'argomento



FILTRO PASSA BASSO

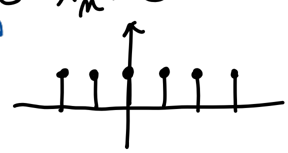
argomento o fase di $H(e^{j\omega})$

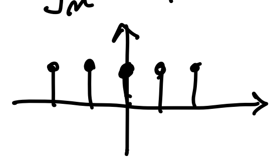


Interpretazione casi limite:

- se $\omega = 0$ e $x_n = e^{j\omega n} = 1 \ \forall n$, $\quad y_n = x_n$

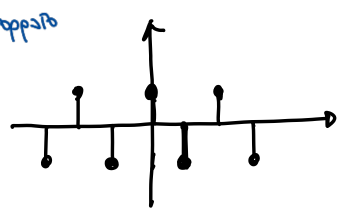
  Il segnale non oscilla affatto

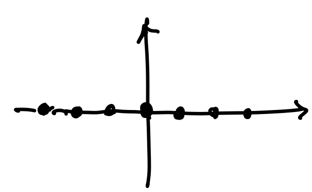




- se $\omega = \pi$ e $x_n = e^{j\omega n} = (-1)^n \ \forall n$, $\quad y_n = 0 \ \forall n$

  Il segnale viene stoppato





Filtro Passa Alto: lascia passare le alte frequenze e stoppa le basse frequenze

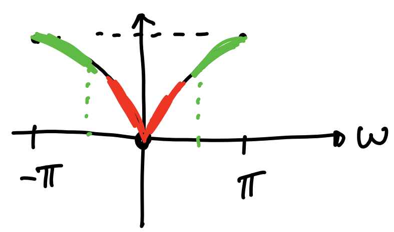
NOVITÀ RISPETTO ALL'ESEMPIO PRECEDENTE

ES $h = (\dots 0, \boxed{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{1}{2}, 0, \dots)$ con $\tfrac{1}{2} = h_0$ $\qquad y = Hx$

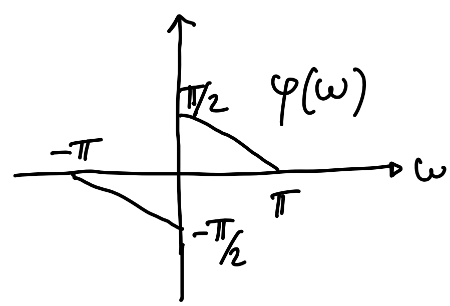
$$y_m = \frac{1}{2}x_m - \frac{1}{2}x_{m-1}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \underbrace{j}_{=e^{j\pi/2}}\, e^{-j\omega/2}\sin\frac{\omega}{2} = \left|\sin\frac{\omega}{2}\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\sin\frac{\omega}{2}\right| \qquad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega/2 + \pi/2, & 0<\omega<\pi \\ -\omega/2 - \pi/2, & -\pi<\omega<0 \end{cases}$$



FILTRO PASSA ALTO



Def/proprietà di DTFT e DTFT inversa. $x \xrightarrow{DTFT} X$

1) Se $x \in \ell^1$ la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-j\omega k}$ converge assolutamente e uniformemente su $\mathbb{R}$ e $\overset{DTFT}{X(e^{j\omega})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-j\omega k}$ è una funz. continua. [conv. "assoluta" in $C^0([0,2\pi])$ con la norma del sup, ossia $\sum_k \sup_{\omega\in[0,2\pi]} |x_k e^{-j\omega k}| = \sum_k |x_k| = \|x\|_{\ell^1}$ converge]

2) Se $x \in \ell^2$, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-j\omega k}$ converge in $L^2(-\pi,\pi)$: → Non c'è convergenza puntuale

Se $X_N(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x_k e^{-j\omega k}$ (Polinomio trigonometrico), $X(e^{j\omega}) = \lim_{N\to+\infty} X_N(e^{j\omega})$ in $L^2(-\pi,\pi)$

$\|X_N - X\|_{L^2} \to 0$ = le somme parziali convergono in L^2

Così $\ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{DTFT} L^2(-\pi,\pi)$ è un isomorfismo. Applicazione: · lineare · limitata · biettiva

con inversa $x_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega$ (DTFT inversa)

Somma della serie

Formula per i coefficienti di Fourier

Un generico segnale è quindi decomponibile in somma o altri tipi di operazioni di segnali di diverse frequenze

È rappresentabile come una sovrapposizione di segnali che oscillano con certe frequenze analoga a decomposizione di x rispetto a una base φ_n

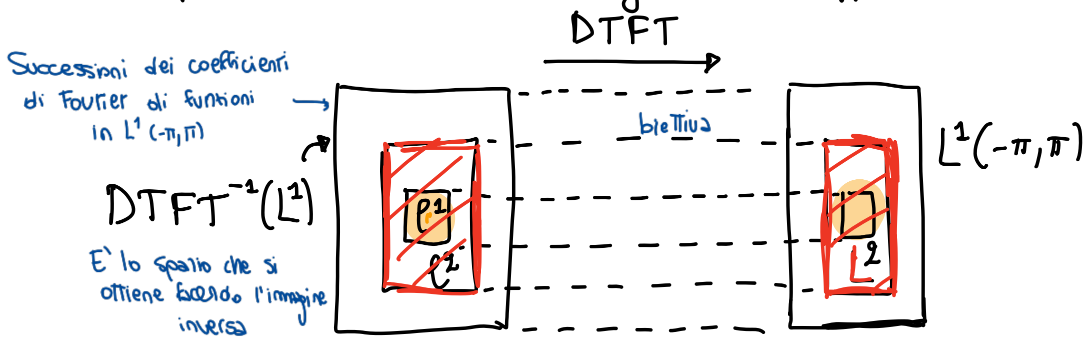
$x = \sum_k \alpha_k \varphi_k$

Vale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \cancel{2\pi}\, \|x\|^2_{\ell^2} \quad \text{(uguaglianza di Parseval).}$$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ BASE ORTONORMALE DI $L^2((-\pi,\pi))$

3) Se una successione x è data da $x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$ per qualche funzione $X(e^{j\omega})$ in $L^1(-\pi,\pi)$ diciamo che $X(e^{j\omega})$ è la DTFT di x (si usa il fatto che non esistono due diverse funzioni in $L^1(-\pi,\pi)$ con gli stessi coeff. di Fourier).

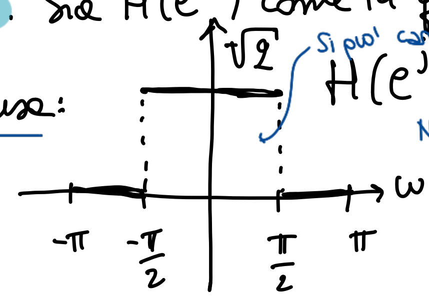


ES (Filtro passa basso ideale). Sia $H(e^{j\omega})$ come in figura.

Viene data la risposta in frequenza

$h = ?$ Applichiamo la DTFT inversa:

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$



$H(e^{j\omega}) \in L^2(-\pi,\pi)$

Noi conosciamo la risposta in frequenza H e cerchiamo la risposta impulsiva h

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\omega n}\, d\omega \underset{(n\neq 0)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\,\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{jn}$$

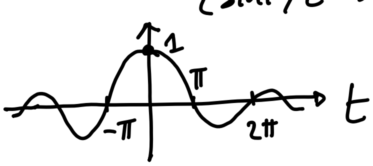
Formula di Eulero

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Per $n=0$ $h_0 = 1/\sqrt{2}$

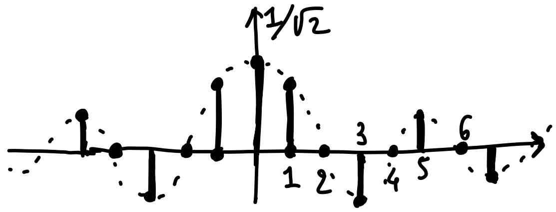
Seno di t smorzato

$$\mathrm{sinc}\, t = \begin{cases} 1 & \text{se } t=0 \\ \sin t/t & \text{se } t\neq 0 \end{cases}$$



In conclusione:

$$\boxed{h_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$$ ($h_n = 0$ se $n \neq 0$ è pari)

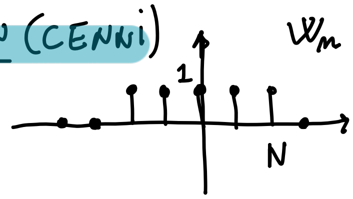


$h \notin \ell^1 \qquad \sum_k |h_k| = +\infty$

$h \in \ell^2 \qquad \sum_k |h_k|^2 < \infty$

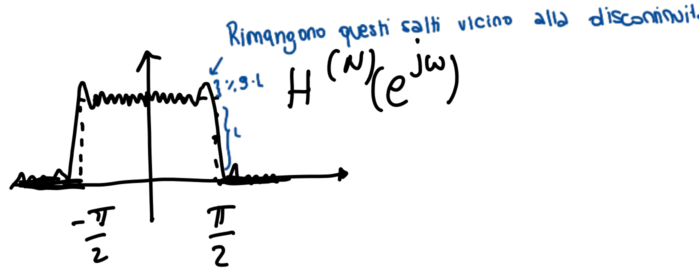
FILTER DESIGN (CENNI)

- windowing



$$h_n^{(N)} = h_n \cdot w_n$$

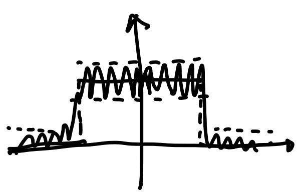
$h_n^{(N)}$ ↑ approssim. $\quad h_n$ ↑ ideale



Fenomeno di Gibbs.

(le approssimazioni sono via via migliori nella norma $L^2(-\pi,\pi)$ ma non in $L^\infty(-\pi,\pi)$).
Dovuto al fatto che $h \in \ell^2, h \notin \ell^1$.

- criterio MINMAX:



Teorema (Convoluzione – DTFT).

Segnali infiniti

1) Se $x, y \in \ell^2$ allora $x * y \in \ell^\infty$ e $x * y \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$

Convoluzione — Prodotto di due funzioni — DTFT di x

(DTFT intesa come al punto 3) delle def/proprietà precedente).

2) Se $h \in \ell^2$ l'operatore $Hx = x * h$ è limitato $\ell^2 \to \ell^2$ se e solo se $H(e^{j\omega}) \in L^\infty(-\pi,\pi)$.

RISPOSTA IMPULSIVA

DTFT di h | $\exists C > 0 : \|Hx\|_{\ell^2} \leq C \|x\|_{\ell^2} \ \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z})$

Dim (facoltativa)

1) Prima si dim che se $x, y \in \ell^1$, $x * y \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})\,Y(e^{j\omega})$

Nel caso $x, y \in \ell^2$, si considerano

$$x^{(n)}, y^{(n)} \in c_{00}, \quad \begin{cases} x^{(n)} \to x \\ y^{(n)} \to y \end{cases} \text{in } \ell^2$$

Se $z = x * y$, $z^{(n)} = x^{(n)} * y^{(n)}$, $z^{(n)} \to z$ in ℓ^∞

$$\begin{cases} X^{(n)} \to X \text{ in } L^2 \\ Y^{(n)} \to Y \text{ in } L^2 \end{cases}$$

$$z_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{X^{(n)}(e^{j\omega})\, Y^{(n)}(e^{j\omega})}_{\downarrow \text{ in } L^1} e^{j\omega k}\, d\omega$$

$$\downarrow \qquad (n \to +\infty)$$

$$z_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})\, e^{j\omega k}\, d\omega$$

2) L'operatore $x \mapsto x * h$ è limitato in ℓ^2 sse l'operatore $X(e^{j\omega}) \mapsto X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$ è limitato su $L^2(-\pi,\pi)$ che è vero sse $H(e^{j\omega})$ è in $L^\infty(-\pi,\pi)$. ■

$$\begin{tikzcd}
\ell^2 \arrow[r, "H"] \arrow[d, "DTFT"', "\text{isomorfismo}"] & \ell^2 \arrow[d, "DTFT"] \\
L^2((-\pi,\pi)) \arrow[r] & L^2((-\pi,\pi)) \\
X(e^{j\omega}) \arrow[r, mapsto] & H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})
\end{tikzcd}$$

$x \mapsto x * h$

→ Prodotto puntuale

DTFT di h

$$\|XH\|_{L^2} \le \|H\|_{L^\infty} \|X\|_{L^2}$$

H deve rendere il diagramma commutativo

SEGNALI FINITI / PERIODICI

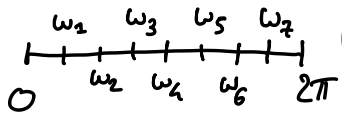
Possiamo aggiungere 0 per renderli infinito

$$(\dots, 0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, 0, \dots) \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

Tutti gli altri elementi sono nulli

Funzione continua

$$\omega_k := \frac{2\pi}{N} k, \quad k = 0, \dots, N-1$$



Numero di campioni $(N=8)$ Ma anche solo conoscendo N campioni è possibile risalire al segnale originale

E' un campionamento della DTFT

$$X_k \overset{def}{=} X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}$$

Campiono in frequenza la funzione X selezionando i ω_k

indici di riga/colonna

→ Stessa dimensione in ingresso e in uscita

$$\text{dove } W_N := e^{-j\frac{2\pi}{N}} \in \mathbb{C}$$

$$(W_N)^N = e^{-j2\pi/\cancel{N}\cdot\cancel{N}} = 1$$

$$\mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

Discrete Fourier Transform

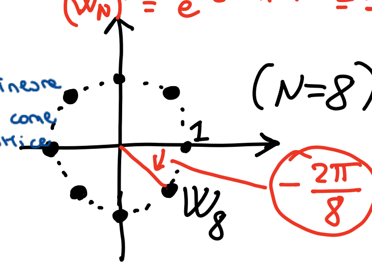
↓

Segnali Finiti

$$(x_0, \dots, x_{N-1}) \xrightarrow{DFT} (X_0, \dots, X_{N-1})$$

Rappresentabile tramite matrice F_N

Applicazione lineare rappresentabile come una matrice



$$F_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ \dots & & & & \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

E' una matrice simmetrica perché k e n hanno ruoli interscambiabili

$W_N^N = 1$ è una radice N-esima dell'unità

$W_8^8 = 1$

Matrice simmetrica (non Hermitiana). $(F_N)_{nk} = (F_N)_{kn}$

non c'è il complesso

Matrice inversa

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F_N}$$

$$(n \neq m) \quad \frac{1 - W_N^{(n-m)N}}{1 - W_N^{(n-m)}} = 0 \qquad W_N^{(n-m)N} = 1$$

$$\overline{W_N} = W_N^{-1}$$

$$\Big[\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{W_N^{kn}}_{\text{ENTRATE DI } F_N} \underbrace{W_N^{-km}}_{\text{ENTRATE DI } \overline{F_N}} = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ N & \text{se } n = m \end{cases}\Big]$$

→ Ottengo la matrice identità

Es

$N=2$ $\quad W_2 = -1$

↳ Segnale di lunghezza 2

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

↳ Matrice di Fourier per segnali di lunghezza 2

$N=4$ $\quad W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

↳ Matrice di Fourier per segnali di lunghezza finita

Ricordiamoci la base di Fourier $f_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$

→ Convoluzione, ma su segnali di lunghezza finita

CONVOLUZIONE CIRCOLARE $(h, x \in \mathbb{C}^N)$

$k, m \in \{0, \dots, N-1\}$

$(x_0, \dots, x_{N-1})$
$(h_0, \dots, h_{N-1})$

$$Cx = h * x \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x_k T_k h \quad (\text{indici modulo } N)$$

↳ vettore di lunghezza N

COLONNE DELLA MATRICE

$T_1(3,4,5) = (5,3,4)$

$$h * x = y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{n-k}$$

↑ convoluzione come definita per segnali di lunghezza infinita

$$(T_k h)_m := h_{m-k}$$

$-1 = N-1 \pmod N$
$-2 = N-2 \quad (\;"\;)$

$T_0 h = h \quad T_1 h$

Ho $n, k = 0, \dots, N-1$ ma così $n-k$ potrebbe non appartenere a $0, \dots, N-1$ quindi consideriamo le classi di resto: $n-k$ → resto della divisione di $n-k$ per N

$0 \equiv N \equiv 2N \quad 1 \equiv N+1 \equiv 2N+1$
$-1 \equiv N-1$

Matrice:

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & & \vdots \\ \vdots & h_1 & & \\ & \vdots & & \\ h_{N-1} & h_{N-2} & & \end{bmatrix} \\
\text{1° colonna} \quad \text{2° colonna}
\end{array}$$

eseguito uno shift in giù

matrice circolante

matrice in cui su tutte le diagonali ho sempre lo stesso valore

↳ Applichiamo questa matrice a x per ottenere y

$h, x \in \mathbb{C}^N$

La matrice si scarica sul vettore

$$[F_N(\underbrace{h * x}_{\in \mathbb{C}^N})]_m = \Big[F_N\Big(\sum_{k=0}^{N-1} x_k \overbrace{T_k h}^{\in \mathbb{C}^N}\Big)\Big]_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k [F_N(T_k h)]_m$$

DFT ↳ Trasformata di Fourier Discreta

TRASLAZIONE

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{km} (F_N h)_m$$

non dipende più da k

MOLTIPLICAZIONE PER W_N^{km} è DETTA MODULAZIONE

} che è un numero complesso di modulo 1 $\quad W_N \overset{def}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Trasformata di Fourier di x

$$= (F_N x)_m \cdot (F_N h)_m$$

moltiplicazione di numeri complessi

Perciò

Equivalentemente

$$y := h * x = F_N^{-1} F_N(h * x) = F_N^{-1}[F_N h \cdot F_N x]$$

prodotto componente per componente } ottengo un vettore

Usando FFT servono $O(N \log N)$ operazioni, invece di N^2 usando questa formulazione della convoluzione

Detto ancora in un'altra maniera riscrivendolo, otteniamo

Se $X = F_N x$, $Y = F_N y$, $H = F_N h$

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

↳ Matrice Diagonale

Si dice quindi che la trasformata di Fourier diagonalizza l'operatore di convoluzione

$$Y_m = H_m X_m \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}$$ In forma matriciale

Riscoperto negli anni '70 che poi ha dato un grosso impulso per lo studio della teoria dei segnali.

Algoritmo FFT (fast Fourier transform) per il calcolo della DFT

$x = (x_0, \dots, x_{N-1})$ $\quad y = F_N x$ (y è la DFT di x).

$$y_k = (F_N x)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{km} \qquad \text{con } W_N = e^{-\frac{2\pi}{N} j}$$

$k = 0, \dots, N-1$ — Matrice con queste entrate — numero fissato

Con un calcolo diretto, N^2 moltiplicazioni: $\underset{N \times N}{[\quad]}\ \underset{N}{[\ ]}$

Invece l'idea è: Supponiamo N pari.

$$y_k = (F_N x)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_m W_N^{km} = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell} W_N^{2\ell k} + \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2\ell+1} W_N^{(2\ell+1)k}$$

Separiamo indici pari e dispari

$$\left(W_N^2 = W_{N/2} \text{ perché } W_N^2 = e^{-\frac{2\pi}{N} j \cdot 2} = e^{-\frac{2\pi j}{N/2}} \right)$$

- Quindi posso fare i conti solo per $0, \dots, \frac{N}{2}-1$ e i restanti sono uguali:

$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell} W_{N/2}^{\ell k}}_{F_{N/2} x'} + W_N^k \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell+1} W_{N/2}^{\ell k}}_{F_{N/2} x''}$$

- La successione è periodica di periodo $N/2$

Sottosuccessione di posto pari — $\boxed{k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1 \ \text{periodo } \frac{N}{2}}$ — Sottosuccessione di posto dispari

$\frac{N}{2}$ moltiplicazioni

Ad ogni passo, otteniamo segnali di lunghezza dimezzata fino a raggiungere $[W_{N/2}^{N/2} = 1]$ lunghezza unitaria

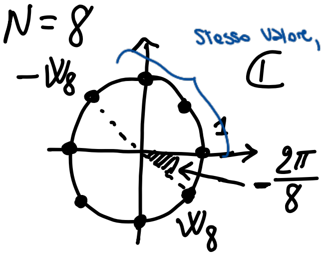
→ Ho dimezzato la lunghezza della successione iniziale

con $x' = (x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-2})$ lunghezza $N/2$.

$x'' = (x_1, x_3, \dots, x_{N-1})$

Alla fine $F_1 = [w_1^0] = [1]$

$N = 8$



Stesso valore, ma cambia il segno

Itero, supponendo $N = 2^L$ (L passi)

Ad ogni passo faccio $\frac{N}{2}$ moltiplicazioni

Conclusione: n° di moltiplicazioni $= \frac{N}{2} \cdot L = \frac{1}{2} N \log_2 N$.

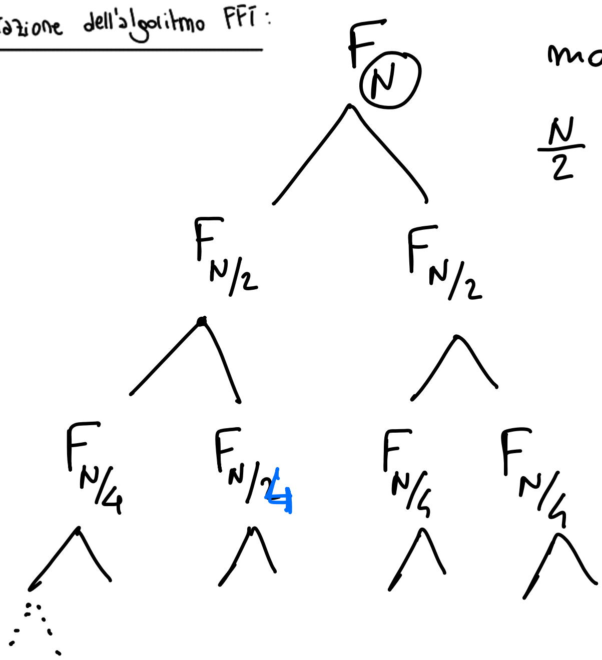
$(L = \log_2 N)$

Si applica per il calcolo veloce della convoluzione circolare C:

$$C = F_N^{-1} \begin{bmatrix} H_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{N-1} \end{bmatrix} F_N, \quad \text{con } \begin{bmatrix} H_0 \\ \vdots \\ H_{N-1} \end{bmatrix} = F_N h, \quad h = \text{prima colonna di } C.$$

Matrice circolante — Antitrasformata — Trasformata

Illustrazione dell'algoritmo FFT:



moltiplic.

$\frac{N}{2}$

$\frac{N}{4} + \frac{N}{4} = \frac{N}{2}$

F_1 MATRICE 1×1 $[1]$

$y = Cx = h * x$

$Y = H \cdot X$

RIASSUNTO

x, h successioni

$y = Hx = x * h$ ← NEL TEMPO

$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ ← IN FREQUENZA

E' il prodotto puntuale

Trasformate di Fourier

X DTFT di x

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-j\omega n}$$

Rappresentabile come una densità di energia

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \|x\|_{\ell^2}^2 \quad \text{PARSEVAL}$$

$$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{INVERSIONE}$$

DFT di x rappresenta il peso del segnale sinusoidale per ogni ω

$x, h \in \mathbb{C}^N$ $\quad X$ DFT di x, etc... $\quad X = F_N x$

$y = Cx = x * h \rightsquigarrow Y_m = H_m X_m \quad \forall m = 0, \dots, N-1$ → Teorema della convoluzione

PARSEVAL

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X_m|^2 \qquad (X = F_N x)$$

Energia del segnale

$$\left[\langle F_N x, F_N x \rangle_{\mathbb{C}^N} = \langle F_N^* F_N x, x \rangle = N \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}^N} = N \|x\|^2_{\mathbb{C}^N} \right]$$

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N} = \frac{1}{N} F_N^*$$

INVERSIONE

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi}{N} j k n}$$

$$e^{\frac{2\pi}{N} j k n} = \overline{W}_N^{kn}$$

→ Coniugata