

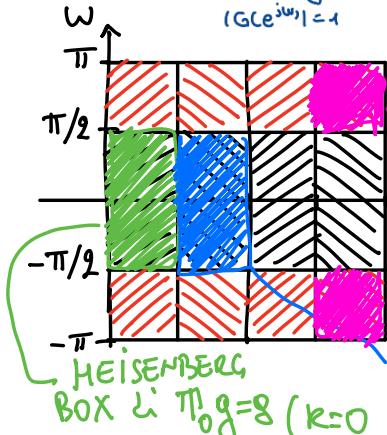
e' una base ortonormale

↑

BANCHI DI FILTRI ORTOGONALI (A DUE CANALI) → Parliamo di segnali digitali

Avevamo trovato che $\{\mathbb{T}_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale

$$(G e^{j\omega t})_k = 1$$



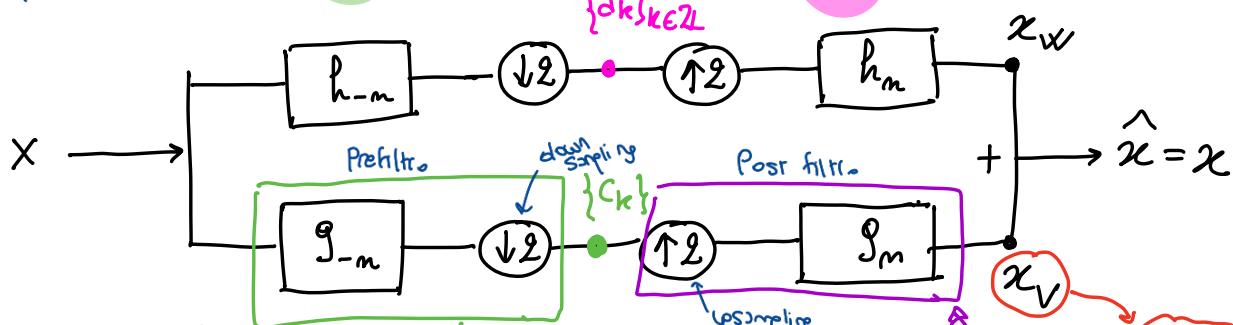
FWSP: Fourier and wavelet signal processing
Sec. 1.1, 1.2.1 – 1.2.3, 1.3.2; 1.4 (continua)

Si scelgono $g, h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ a valori reali
tali che $\{\mathbb{T}_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\mathbb{T}_{2k}h\}_{k \in \mathbb{Z}}$
siano una base ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle x, \mathbb{T}_{2k}g \rangle}_{\text{decomposizione rispetto alla base}} \mathbb{T}_{2k}g + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle x, \mathbb{T}_{2k}h \rangle}_{d_k} \mathbb{T}_{2k}h$$

H sp. HILBERT.
2^k g BASE ORTON.
 $x = \sum_k \langle x, g_k \rangle g_k$

costruito dalle due traslate di uno passo verso l'alto basso



Come si implementa questa decomposizione?

$$x = x_v + x_w$$

↪ Data che $\ell^2(\mathbb{R})$ è $\ell^2(\mathbb{R}) \oplus V$

$$x_v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, \mathbb{T}_{2k}g \rangle \mathbb{T}_{2k}g$$

proiez. ortogonale su

$$V = \overline{\text{span} \{ \mathbb{T}_{2k}g \}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$x_w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, \mathbb{T}_{2k}h \rangle \mathbb{T}_{2k}h$$

proiez. ortogonale su

$$W = \overline{\text{span} \{ \mathbb{T}_{2k}h \}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$$

ES

Filtro passa basso di Haar

$$g = (\dots, 0, \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

$$h = (\dots, 0, \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

$\left\{ T_{2k} g \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ T_{2k} h \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$. → Norme 1 e a 2x2 orthonormali

$$(x_v)_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_m + x_{m+2}) & m \text{ pari} \\ \frac{1}{2}(x_{m-2} + x_m) & m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$(x_w)_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_m - x_{m+1}) & m \text{ pari} \\ \frac{1}{2}(x_{m-1} + x_m) & m \text{ dispari} \end{cases}$$

E' un sistema, ma e' anche una base!!

$x = x_v + x_w$ perciò $\left\{ T_{2k} g \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ T_{2k} h \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$.

$$\left\{ T_{2k} g, T_{2k} h : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

IN ALTERNATIVA PER VERIFICARE CHE E' UNA BASE OTHON:

CITERIO VERIFICO CHE SE $y \in \ell^2$, $\left\{ \langle y, T_{2k} g \rangle = 0 \forall k, \langle y, T_{2k} h \rangle = 0 \forall k \right\} \Rightarrow y = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2k} + y_{2k+1}) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2k} - y_{2k+1}) = 0 \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$$

OSS In generale, CENNO

$$X_v(z) = G(z) \left\{ \frac{1}{2} [X(z)G(z^{-1}) + X(-z)G(-z^{-1})] \right\}$$

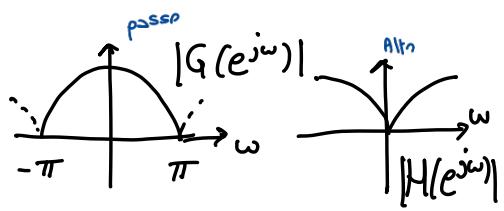
$$X_w(z) = H(z) \left\{ \frac{1}{2} [X(z)H(z^{-1}) + X(-z)H(-z^{-1})] \right\}$$

$$X(z) = X_v(z) + X_w(z) \quad (\text{ricostruzione perfetta})$$

$$\begin{aligned} X_v(z) + X_w(z) &= \frac{1}{2} [G(z)G(z^{-1}) + H(z)H(z^{-1})] X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} [G(z)G(-z^{-1}) + H(z)H(-z^{-1})] X(-z) \\ &= X(z) \quad \forall x \in \ell^2 \text{ se} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad G(z)G(z^{-1}) + H(z)H(z^{-1}) &= 2 \\ \textcircled{2} \quad G(z)G(-z^{-1}) + H(z)H(-z^{-1}) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{condizioni per ricostruzione} \\ \text{perfetta: } \hat{x} = x \end{array} \right\}$$

Anche se non sono orthonormali, quando si puo' avere una ricostruzione perfetta?



Filtri di lunghezza finita con L elementi e L pari.

Teorema Se $g = (\dots, 0, \boxed{g_0}, g_1, \dots, g_{L-1}, 0, \dots)$ di lunghezza

L pari tale che $\{\mathcal{T}_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia un sistema ortonomale.

Sia

$$h = (\dots, 0, \boxed{g_{L-1}}, \underbrace{-g_{L-2}}_{h_0}, \underbrace{g_{L-3}}_{h_1}, \dots, -g_0, 0, \dots)$$

Condizione sufficiente per scegliere h

INVERTO l'ORDINE
E ALTERNO i SEgni

Allora $\{\mathcal{T}_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\mathcal{T}_{2k}h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonomale di $\ell^2(\mathbb{Z})$.

ES $g = (\dots, 0, \boxed{a}, b, c, d, 0, \dots)$ Lettura di g devono formare un sistema ortonomale

$$h = (\dots, 0, d, -c, b, -a, 0, \dots)$$

$$\mathcal{T}_2 h = (\dots, 0, 0, 0, d, -c, b, 0, 0, \dots)$$

$$\langle g, h \rangle = ad - bc + cb - da = 0$$

$$\langle g, \mathcal{T}_2 h \rangle = cd - dc = 0, \text{ etc.}$$

ES $g = (\dots, 0, \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$ basso

$$h = (\dots, 0, \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

→ I filtri di Haar illustrano il teorema ↑

Pertanto per costruire basi di filtri ortogonali siamo ricondotti a

Trovare $g \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tali che $\{\mathcal{T}_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia un sistema ortonomale:

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2 \quad \text{per prorrigi well}$$

$$\begin{bmatrix} z = e^{j\omega} \\ e^{j(\omega+\pi)} = -z \\ e^{j\pi} = -1 \end{bmatrix} \quad G(z) \overline{G(z)} + G(-z) \overline{G(-z)} = 2$$

Formula vista in precedenza

Se g è reale,
possiamo fare questo passaggio

$$\underbrace{G(z) G(z^{-1})}_{A(z)} + \underbrace{G(-z) G(-z^{-1})}_{A(z)} = 2$$

(perché g è reale)

Dobbiamo
costruire gli
operatori G !

$$\text{def DFT} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{\text{IR}} \bar{z}^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k = G(z^{-1}) \quad \text{DFT in } z^{-1}$$

$$g = (\dots, 0, g_0, \dots, g_{L-1}, 0, \dots)$$

$$G(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{L-1} z^{-L+1} \quad \begin{matrix} \text{e' un polinomio in } z^{-1} \\ \text{polinomio in } z^{-1} \end{matrix} \quad \rightarrow k=0, \dots, L-1$$

Se $A(z) = G(z)G(z^{-1})$ le condiz. è $\boxed{A(z) + A(-z) = 2}$

Notiamo che $A(z) = \sum_{k=-L+1}^{L-1} q_k z^{-k}$ è un polinomio di Laurent
 ↓
 e soddisfa
 Parentesi positive e negative di z
 Serie di Laurent, Ma! con finiti termini

Condizione necessaria e sufficiente
 che il banco di filtri dia luogo a
 base orthonormale

① $A(z) = A(z^{-1}) \quad (\Leftrightarrow q_k = q_{-k}) \rightarrow$ Vale la simmetria dei coefficienti

② $A(z)$ assume valori reali ≥ 0 per $|z|=1$

$$(A(z) = G(z)G(z^{-1}) = G(z)\overline{G(z)} = |G(z)|^2 \geq 0)$$

↑
 se $|z|=1$ e g è reale → e' la stessa assunzione fatta prima

Terrene di fattorizzazione spettrale Si basa sul teo fondamentale dell'algebra
 e' il "viceversa"

per lo spettro degli operatori

$(q_k \in \mathbb{R})$

Coefficienti con simmetria

Sia $A(z)$ un polinomio d'Laurent e coeff reali soddisfacenti ①, ②. $-A(z) \geq 0$

Allora \exists un polinomio $G(z)$ in z^{-1} e coeff reali tale che

$$A(z) = G(z)G(z^{-1}).$$

$(g_k \in \mathbb{R})$

ES $A(z) = \frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$

Verificiamo le condizioni

- ① OK
- ② $A(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

Trovati guardando le radici

$$= \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} \right)}_{G(z)} \right) \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}z \right)}_{G(z^{-1})} \right)$$

(oss: $G(z)G(z^{-1}) + G(-z)G(-z^{-1}) = 2$ e infatti)

$\{\pi_{2k}^T g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sist. orto. di $\ell^2(\mathbb{Z})$ ($g = (\dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$)

Così trovo i coefficienti del filtro che abbiamo ricavato

ES (filtro di Daubechies di lunghezza $L=4$;
in MATLAB db2)

Vogliamo dei filtri che soddisfino le nostre condizioni

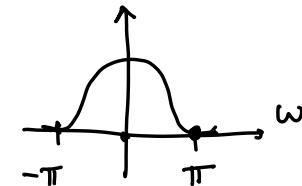
deve tagliare in maniera netta in frequenza

Cerchiamo $G(z)$ con 2 zeri in $z = -1$: $e^{j\omega} = z$

$$G(z) = (1 + z^{-1})^2 R(z)$$

Primo
caso in
 z^{-2}

de determinarsi



$G(e^{j\omega})$ ha 2 zeri
in $\omega = \pm \pi$ → è fattorizzabile in potenza 2

$$A(z) = G(z)G(z^{-1}) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 Q(z)$$

vogliamo de

Cerchiamo $Q(z)$ come polinomio di lunghezza che soddisfi queste condizioni

$$A(z) + A(-z) = 2$$

$$P(w) = a_0 + a_1 w + \dots + a_n w^n$$

$$P(w) = a_m (w - w_1)^2 (w - w_2)^3 \dots (w - w_k)^2$$

Si cerca $Q(z) = az + b + cz^{-1}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare

si trova $a = -1/16, b = 1/4$. $A(z)$ soddisfa le ipotesi ① e ② nel teorema di fattorizzazione spettrale e $A(z) = G(z) \cdot Q(z)$

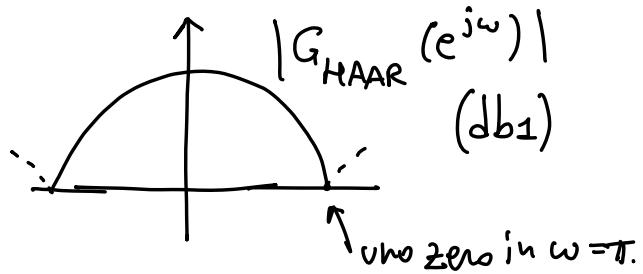
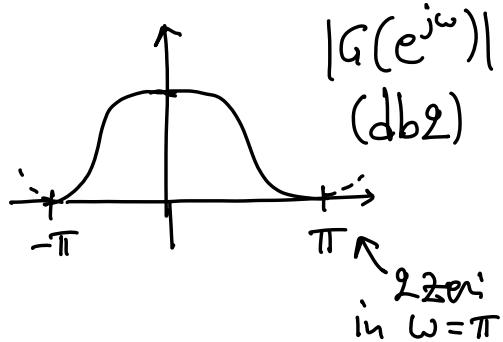
con

$$G(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}} ((1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})z^{-1} + (3-\sqrt{3})z^{-2} + (1-\sqrt{3})z^{-3}).$$

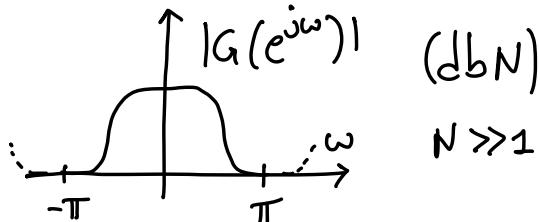
Viene fuori dalla fattorizzazione

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\dots, 0, \boxed{1+\sqrt{3}}, 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 0, \dots) \\ h = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\dots, 0, 1-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}, +3+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}, 0, \dots) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\dots, 0, \boxed{1+\sqrt{3}}, 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 0, \dots) \\ h = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\dots, 0, 1-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}, +3+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}, 0, \dots) \end{array} \right.$$



Per ogni $N \geq 1$ dbN filtro passe basso di lunghezza $2N$
con N zeri in $\omega = \pi$ ($\sigma z = -1$).
Produce un banco di filtri ortogonali.

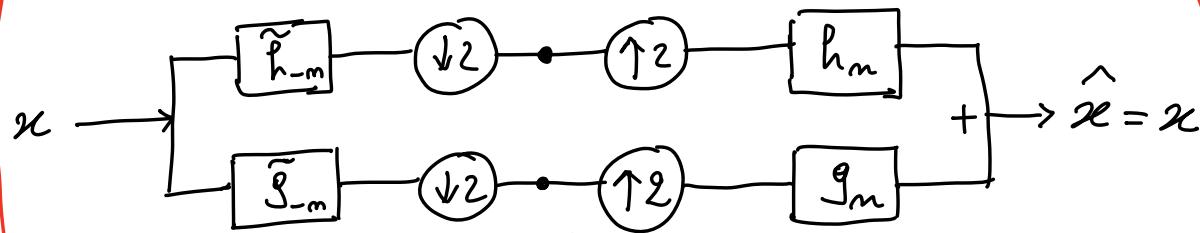


Si avvicina sempre di più al passe basso ideale

Banchi di filtri bi-ortogonali (cenni)

CENN

Operatori di sintesi
e di analisi
diversi



Condizioni su $g, h, \tilde{g}, \tilde{h}$ per avere ricostruzione perfetta $\hat{x} = x$

$(\{T_{2k} h\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{T_{2k} g\}_{k \in \mathbb{Z}})$ è una base di Riesz

bintangolare e $(\{T_{2k} \tilde{h}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{T_{2k} \tilde{g}\}_{k \in \mathbb{Z}})$.

$$A(z) = G(z) \cdot \tilde{G}(z^{-1}), \text{ etc...}$$

Don't be afraid of \tilde{g} di lunghezza 7
 \tilde{g} di lunghezza 9 (simmetrici)

In MATLAB bior4.4

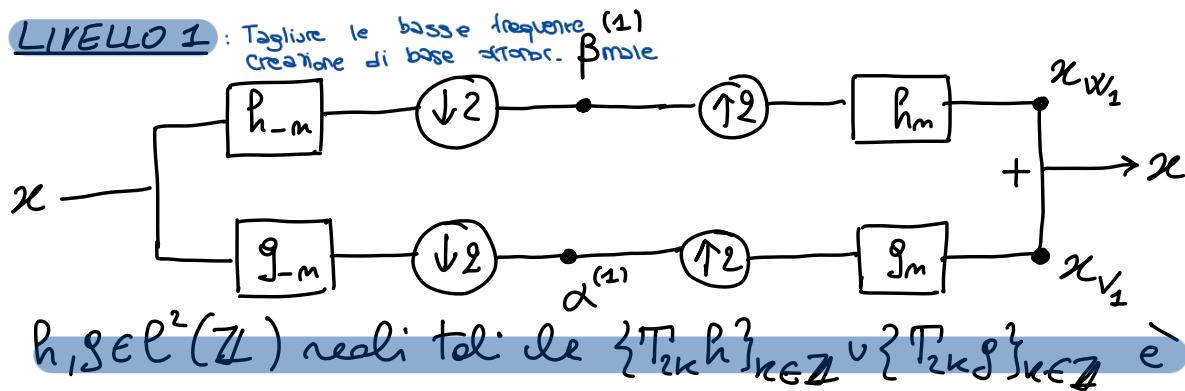
Utilizzati JPEG 2000. → Così si ottengono filtri con solo simmetrici

Si rinuncia
all'ortogonalità per
avere filtri
simmetrici utili
in termini di
gestione fano

TRASFORMATA ONDINA DISCRETA (DWTF)

FWSP: Sec.
3.1, 3.2, 3.3

Banchi di filtri stratificati ad albero. → gradi di tipo albero



una base ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Definiamo gli spazi che generano gli elementi della base

$$x = x_{v_1} + x_{w_1}$$

Proiezione ortogonale di x su v_1

done

$$x_{V_2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle x_1, \pi_{2k} g \rangle}_{\alpha_k^{(2)}} \pi_{2k} g \quad \rightarrow \text{Upsampling}$$

$$x_{w_2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle x_1 |}_{\beta_k^{(z)}} \underbrace{p_{2k} h}_{p_{2k}^h}$$

DWT TRASFORMATA ONDINA DISCRETA
 $x \mapsto (\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$\alpha_k^{(1)} = \langle x, \pi_{2k} g \rangle$$

$$\beta_k^{(1)} = \langle x, \pi_{2k} h \rangle$$

inverso

IDWT
 $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}) \mapsto x$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^{(1)} \pi_{2k} g + \beta_k^{(1)} \pi_{2k} h$$

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \|\alpha^{(1)}\|_{\ell^2}^2 + \|\beta^{(1)}\|_{\ell^2}^2$$

LIVELLO 1 → Stiamo considerando il livello base

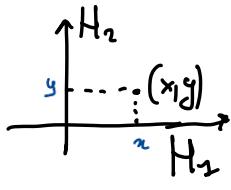
RICHIAMO

Se H_1, H_2 sp. di Hilbert

$$H_1 \oplus H_2 \stackrel{\text{def}}{=} H_1 \times H_2 = \{(x, y) : x \in H_1, y \in H_2\}$$

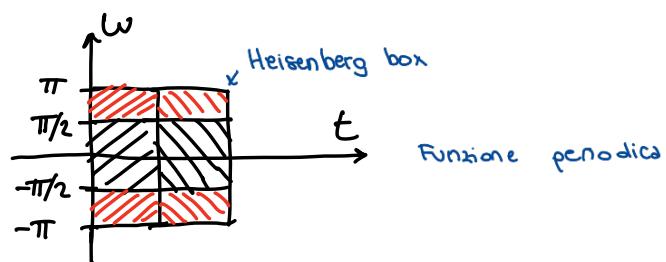
sull'insieme c'è uno spazio di Hilbert

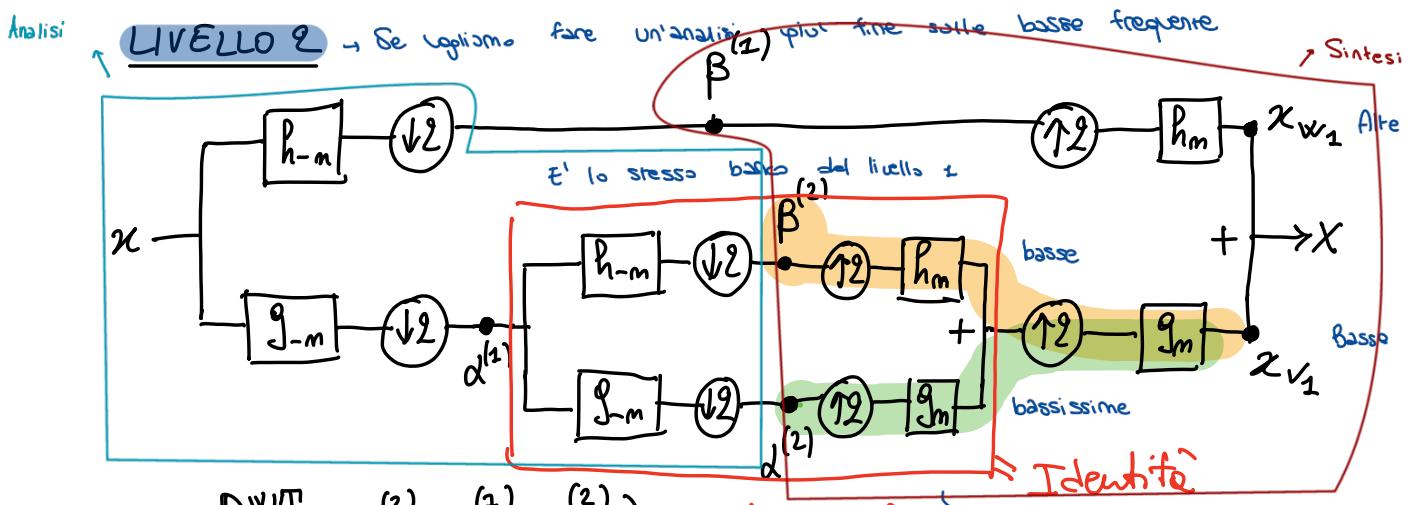
con $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|_{H_1}^2 + \|y\|_{H_2}^2}.$$


DWT è una trasformazione unitaria,
cioè isometrica lineare biettiva

→ Vale la formula di Parseval
che ce lo assicura l'essere una base
ortonormale





$x \xrightarrow{\text{DWT}} (\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \beta^{(2)})$ (LIVELLO 2)

$(\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \beta^{(2)}) \xrightarrow{\text{IDWT}} x$

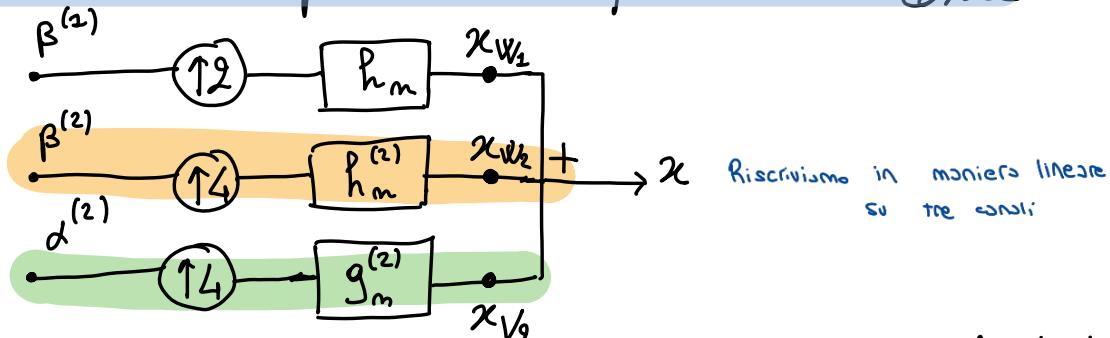
$\alpha^{(2)} \text{ e } \beta^{(2)}$ contengono le info di $\alpha^{(1)}$

In $\alpha^{(2)}$ potremo mettere altri filtri $\alpha^{(3)}$ & $\beta^{(3)}$ così → dividere ancora di più le info

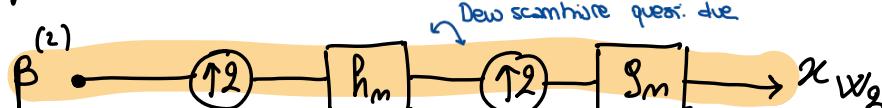
Ricorda che $D_2 \rightarrow \mathcal{J}$

Come scriviamo le formule dirette per DWT e IDWT?

Il blocco di sintesi si può riscrivere equivalentemente come



per opportuni filtri $h^{(2)}, g^{(2)}$. Infatti, definisco x_{W2} come l'output di



$$x_{W2} = G U_2 H U_2 \beta^{(2)} = G(z) H(z^2) U_2 U_2 \beta^{(2)}$$

Notab. identity

$$= G(z) H(z^2) U_4 \beta^{(2)}$$

FILTO CON RISPOSTA IN FREQUENZA $H(e^{j\omega})$ ($z = e^{j\omega}$)

Possiamo definire $H^{(2)}(z) := G(z) H(z^2)$ e sia $\{h_m^{(2)}\}$ le sue riposte /

Definiamo un nuovo filtro

Analogamente si definisce

$$\text{risposta in FREQUENZA} \\ G(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$x_{V_2} = G U_2 G U_2 \alpha^{(2)} = G(z) G(z^2) U_h \beta^{(2)}$$

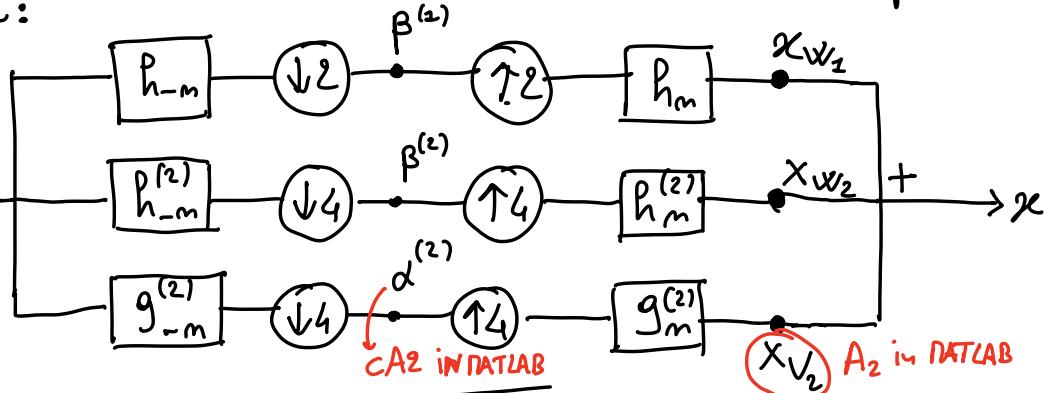
Definiamo $G^{(2)}(z) = G(z) G(z^2)$ e sia $\{g_m^{(2)}\}$ la sua risposta

impulsiva

In conclusione, siccome $x_{V_2} = x_{V_2} + x_{W_2}$, abbiamo il banco di filtri equivalente:

Scriviamo quindi il banco, ma equivalente,

Così da dividere in 3 spazi



Definiamo

$$W_2 = \overline{\text{Span}} \left\{ T_{4k} h^{(2)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$V_2 = \overline{\text{Span}} \left\{ T_{4k} g^{(2)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$V_1 = \overline{\text{Span}} \left\{ T_{2k} g \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$x_{W_2} = H^{(2)} U_4 \beta^{(2)} \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^{(2)} T_{4k} h^{(2)}$$

→ come prime e bassissime

Proposizione $V_1 = V_2 \oplus W_2$ e $\{T_{4k} h^{(2)}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{T_{4k} g^{(2)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

è una base autoomodale di V_1 . FA GLTATIVA

Dim Impatti $H^{(2)} U_4 \beta^{(2)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^{(2)} T_{4k} h^{(2)}$

da cui

$$T_{4k} h^{(2)} = H^{(2)} U_4 T_k \delta = G U_2 H U_2 T_k \delta \\ = G U_2 T_{2k} h$$

Pot essere un fissato qualunque
→ $H^{(2)} U_4 = G U_2 H U_2$ dimostrato prima

e analogamente $T_{4k} g^{(2)} = G U_2 T_{2k} g$

$\{T_{2k}h\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{T_{2k}g\}$ è una base di $\ell^2(\mathbb{Z})$ e GU_2 è un isomorfismo isometrico $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow V_2$ ($GU_2 \alpha = \sum \alpha_k T_{2k}g$) da cui segue la conclusione.



Riassumendo: $\ell^2(\mathbb{Z}) = V_1 \oplus W_1$ (livello 1)

$$= V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 \quad (\text{livello 2})$$

↑ ↑ ↑
Trend dettagli dettagli fini
APPROXIMAZ.

$$\begin{cases} \alpha_k^{(2)} = \langle x, T_{4k}g^{(2)} \rangle \\ \beta_k^{(1)} = \langle x, T_{2k}h \rangle \\ \beta_k^{(2)} = \langle x, T_{4k}h^{(2)} \rangle \end{cases}$$

perché sono quelle introdotte al livello 2

$$\ell^2 \xrightarrow{\text{DWT}} \ell^2 \oplus \ell^2 \oplus \ell^2$$

$$x \mapsto (\alpha^{(2)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)})$$

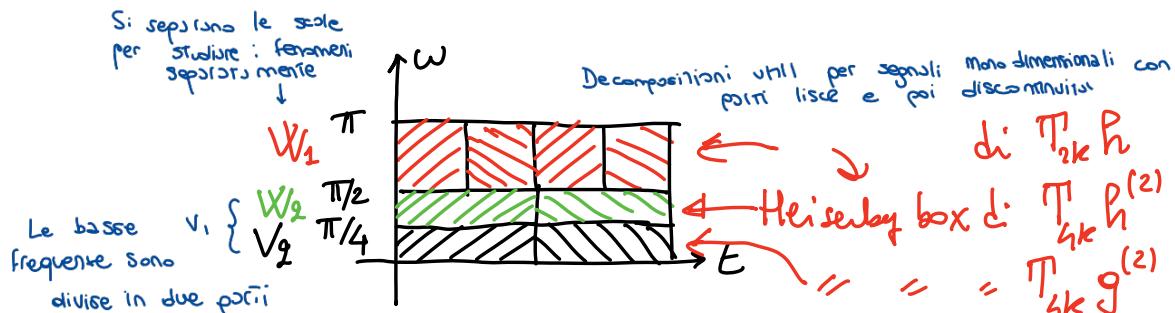
$$\ell^2 \xrightarrow{\text{IDWT}} \ell^2 \oplus \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(\alpha^{(2)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}) \mapsto x$$

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^{(2)} T_{4k}g^{(2)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^{(1)} T_{2k}h + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^{(2)} T_{4k}h^{(2)}$$

e vale Parseval:

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \|\alpha^{(2)}\|_{\ell^2}^2 + \|\beta^{(1)}\|_{\ell^2}^2 + \|\beta^{(2)}\|_{\ell^2}^2$$



Esempio $G(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} (1+z^{-1})$ $H(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} (1-z^{-1})$

$$(z = e^{j\omega}) \quad g = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \parallel \\ g_0 \end{array}, \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \parallel \\ g_1 \end{array} \right)$$

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-jk\omega}$$

$$h = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \parallel \\ h_0 \end{array}, \begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \parallel \\ h_1 \end{array} \right)$$

Usiamo analisi di livello 1

$$H^{(2)}(z) = G(z)H(z^2) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}) \quad (z = e^{j\omega})$$

DFT inversa \downarrow

$$h^{(2)} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \parallel \\ h_0^{(2)} \end{array}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \rightarrow \text{Risposta impulsiva}$$

$$G^{(2)}(z) = G(z)G(z^2) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$$

$$g^{(2)} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \parallel \\ g_0^{(2)} \end{array}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Base di $\ell^2(\mathbb{Z})$: $\left\{ T_{2k} h \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ T_{4k} h^{(2)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ T_{4k} g^{(2)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ Costruiscono base di ℓ^2

(come vettori colonne)

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ y\sqrt{2} 0 & 1/2 0 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} 0 & 1/2 0 & 1/2 \\ 0 \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/2 0 & 1/2 \\ \vdots -1/\sqrt{2} & \text{etc...} & \text{etc...} \\ 0 & 1/2 & 0 \\ \vdots & 0 & 1/2 \\ & \vdots & \vdots \\ & -1/2 & 1/2 \\ & -1/2 & 0 \end{matrix}$$

Gefficente Approssimazione
Dettaglio (D_2 più fine)

In MATLAB
Toolbox Wavelets
digitare: wavemenu

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha^{(2)} & CA_1 & \beta^{(2)} & CD_1 & X_{W_1} \\ \alpha^{(2)} & CA_2 & \beta^{(2)} & CD_2 & X_{W_2} \\ \alpha^{(3)} & CA_3 & \beta^{(3)} & CD_3 & X_{W_3} \\ \downarrow \text{Non hanno tutti la stessa lunghezza} & & & & X_{V_3} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} D_1 & \\ D_2 & \\ D_3 & \\ A_3 & \end{array}$$

In PYTHON: import pywt (pacchetto Pywavelets)