

TRASFORMATE TEMPO-FREQUENZA CONTINUE: CWT e STFT

[FWSP, Sec. 6.5, 5.2]

Ambito segnali analogici

Trasformata ondeina continua (CWT) [FWSP Sec. 6.5]

Se $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (ondeina), definiamo le CWT (continuous wavelet transform) di $x \in L^2(\mathbb{R})$ la funzione

Qui consideriamo segnali monodimensionali, ma il discorso è ampliabile a segnali bidimensionali (i.e. foto)

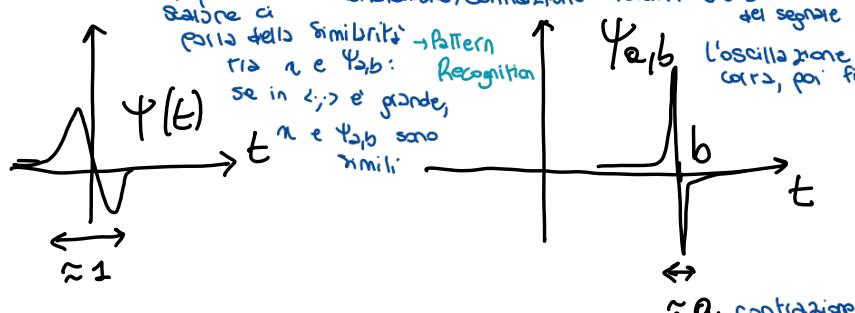
Definizione
trasformata
ondeina continua

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

abbiano due parametri che costituiscono una famiglia di funzioni $\psi_{a,b}$

$$= \langle x, \psi_{a,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \text{ dove } \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$\frac{|t-b|}{a} < c$
Intervallo che porta soluzioni (perché ψ è a supporto compatti)



$$= \prod_b D_a^{-1} \psi(t).$$

Operatore di traslazione
 $D_a f(t) = \tau_a f(t)$
($a > 0$)

$$\|D_a f\|_2 = \|f\|_2$$

$$\Rightarrow D_b f(t) = f(t-b)$$

Condizione di ammissibilità: per avere l'inversione e quindi la ricostruzione del segnale

$a > 0, b \in \mathbb{R}$

$$C_\psi \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{|\partial_\omega \psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\partial_\omega \psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

Integrale uguale e finito

Se vede la condizione di ammissibilità, posso definire la formula di inversione

Formula di inversione:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} X(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

Non è la misura di Lebesgue, perché aggiungo anche il peso a^2

[ANALOGIA: $x = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$] DEGRAD. BASE ORTON.

Spiegazione del perché devo aggiungere $\frac{1}{2}$ nell'integrale

Gruppo affine delle rette "ax+b"

$$G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, a > 0; b \in \mathbb{R}\}.$$

Gruppo non commutativo

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa', ab' + b)$$

Definisco un'operazione di composizione pensando alla retta $ax+b$

Compositione

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Penso alla funzione reale
 $x \mapsto ax + b' \mapsto a(ax + b') + b = aa'x + a'b' + b$

→ Composizione di tipo \circ

$$(1, 0) \text{ è l'unità}, \dots (1, 0) \circ (a, b) = (a, b)$$

Sul gruppo definiamo una misura

$$(a, b) \circ (1, 0) = (a, b)$$

ANALOGIA: Su $(\mathbb{R}, +)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy$$

$y dy = d(x+x_0) = dx$

Misure di Haar sinistra su G è $\frac{de'db'}{a^2}$: è una

misura naturale gode di questa

sul gruppo proprietà

infatti:

misura su G invariante per moltiplicaz. a sinistra in G ;

Simile al concetto di invarianza della misura di Lebesgue in $\mathbb{R} - \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f((aa', ab' + b)) \frac{de'db'}{a'^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(a', b') \frac{da' db'}{a'^2}$$

Significa che il risultato non dipende da (a, b)

Uso questa misura

Dim

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(aa', ab' + b) \frac{de'db'}{a'^2} = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f(\tilde{a}, \tilde{b}) \frac{\tilde{a}^2 d\tilde{a} d\tilde{b}}{\tilde{a}^2}$$

Facciamo cambi di variabili con a, b costanti fissate

$$\begin{cases} aa' = \tilde{a} \\ ab' + b = \tilde{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = \tilde{a}^{-1} \tilde{a} \\ b' = \tilde{a}^{-1} (\tilde{b} - b) \end{cases}$$

$$\frac{\partial (a', b')}{\partial (\tilde{a}, \tilde{b})} = \begin{pmatrix} \tilde{a}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{a}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(a', b') \mapsto (\tilde{a}, \tilde{b})$$

$$de'db' = \tilde{a}^{-2} d\tilde{a} d\tilde{b}$$



Questa dimostrazione è basata sull'equivalenza tra le due misure. La misura di Haar sinistra è definita come $\frac{de'db'}{a^2}$. Per dimostrarne l'invarianza, abbiamo sostituito a e b con le loro equivalenti in termini di \tilde{a} e \tilde{b} , e abbiamo calcolato il determinante della matrice Jacobiana delle trasformazioni. Il risultato è \tilde{a}^{-2} , che è esattamente lo stesso fattore che compare nel denominatore della misura di Haar sinistra. Questo dimostra che la misura di Haar sinistra è invariante per moltiplicazione a sinistra.

Per capire il collegamento tra il gruppo affine della retta e le trasformazioni continue

Rappresentazione di un gruppo. Automorfismi di V

Se V è uno spazio vettoriale, $\text{Aut}(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \text{ linear e biettive}\}.$

Una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio banale V è
una mappa ϕ che assegna a ogni elemento $g \in G$ una trasformazione

$$G \xrightarrow{\mu} \text{Aut}(V)$$

Lo vedo come gruppo di trasformazione

Tal de

$$\mu(\varrho_1 \circ \varrho_2) = \mu(\varrho_2) \circ \mu(\varrho_1) \rightarrow \begin{array}{l} \text{Deve essere presente} \\ \text{l'operazione di gruppo} \end{array}$$

prodotto
in G

composizione di applicaz. lineari

E5. $(\mathbb{R}, +)$, $V = L^2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(L^2(\mathbb{R}))$$

$$b \mapsto T_b \quad (T_b x)(t) = x(t-b)$$

$$b_1 + b_2 \mapsto T_{b_1 + b_2} = T_{b_1} \circ T_{b_2}$$

$$x(t) \xrightarrow{\Pi_{b_2}} x(t-b_2) \xrightarrow{\Pi_{b_2}} x(t-b_1-b_2)$$

(è una rappresentazione unitaria perché T_b sono operatori unitari su $L^2(\mathbb{R})$, ossia isometriche e suriettive).

$$\underline{\text{ES}} \quad (\mathbb{R}_+, \cdot), \quad V = L^2(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \|T_b x\|_{L^2} = \|x\|_{L^2} \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Aut}(L^2(\mathbb{R}))$$

$$a \mapsto D_{Q_i^{-1}}$$

$$(D_{e^{-t}} x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} x\left(\frac{t}{e}\right)$$

$$a_1 a_2 \mapsto D_{(a_1 a_2)^{-1}} = D_{a_2^{-1}} \circ D_{a_1^{-1}}$$

Es $G = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \circ)$ gruppo affine delle rette

$$V = L^2(\mathbb{R})$$

$$(a, b) \mapsto T_b \circ D_{a^{-1}} \quad (T_b D_{a^{-1}} x)(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} x\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$(a, b) \circ (a', b') \mapsto T_{ab'+b} D_{(aa')^{-1}} \stackrel{?}{=} T_b D_{a^{-1}} \circ T_{b'} D_{(a')^{-1}} \\ (aa', ab'+b) \quad [T_{b'} D_{(a')^{-1}} x](t) = \frac{1}{\sqrt{a'}} x\left(\frac{t-b'}{a'}\right)$$

$$(T_{ab'+b} D_{(aa')^{-1}} x)(t) = \frac{1}{\sqrt{a a'}} x\left(\frac{t-(ab'+b)}{a a'}\right)$$

$$(T_b D_{a^{-1}} T_{b'} D_{(a')^{-1}} x)(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a'}} x\left(\frac{\frac{t-b}{a}-b'}{a'}\right) = \rightarrow$$

Ulteriori sviluppi: shearlets, ...

INTERNEZZO

CENNI

Cenni all'analisi di Fourier su gruppi abeliani localmente

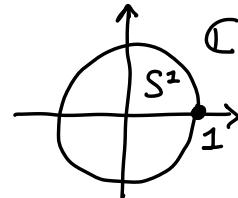
Compatti di Hausdorff.

Le 4 trasformate trovare
studiate (DTFT, DFT, Fourier, da f restituisce i coefficienti
che abbiamo
di possano vedere come trasformare sui gruppi

DFT inversa
di Fourier)

$$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +), S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\} \text{ con il}$$

prodotto



$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\} \text{ classi di resto modulo } N$$

Se G è un gruppo abeliano loc. comp. d' Hausdorff si puo' considerare

$$\widehat{G} = \{ \chi : G \rightarrow S^1 \text{ omomorfismo continuo} \}.$$

(χ è detto "carattere" di G). } significa

ES

$$G = (\mathbb{R}, +) \quad \chi_w(t) = e^{j\omega t} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

$\in \mathbb{C}$
di modulo 1

$$\chi(x+y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

↑ somme in G
operazione di gruppo
in G

prodotto di
numeri
complessi

\widehat{G} è detto gruppo duale di G (\widehat{G} è abeliano loc. comp. d' Hausdorff).

$$(\chi_1 \circ \chi_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$$

Si definisce via trasformata di Fourier: se $f \in L^1(G)$

$$\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx$$

↑ misura di Haar su G .

$$\widehat{f} \in L^\infty(\widehat{G})$$

Es $G = (\mathbb{R}, +)$ $\chi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$

$$\chi_\omega(t) = e^{j\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ param.}$$

$$\widehat{G} \simeq (\mathbb{R}, +)$$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Es $G = (\mathbb{Z}, +)$ $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ $\chi(k_1 + k_2) = \chi(k_1)\chi(k_2)$

$$\chi_\omega(k) = e^{jkw}, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ parmetro}$$

$$(\chi_\omega = \chi_{\omega+2\pi})$$

$\hat{G} = (S^1, \cdot)$

se $x \in L^1(\mathbb{Z}), \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) e^{-jkw}$ DFT di x

Es $G = (S^1, \cdot)$ $\chi: S^1 \rightarrow S^1$ $\chi_k(t) = e^{jkt}$

$\hat{G} = (\mathbb{Z}, +)$

se $x \in L^1(S^1), \quad X_k = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jkt} dt$

\uparrow coeff du Fourier de $x(t)$

Es $G = (\mathbb{Z}_N, +)$ $\chi_m(n) = e^{\frac{2\pi j m \cdot n}{N}}$ $n=0, \dots, N-1$
 $m=0, \dots, N-1$

$\hat{G} = (\mathbb{Z}_N, +)$

se $x: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}, \quad X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi j m \cdot n}{N}}$ DFT di x

FINE CENNI

Per capire dove la discontinuità se è presente, della funzione che trasformiamo
Condizionazione delle singolarità con CWT → Vale individuare se c'è
 presenza di discontinuità e tramite i parametri (b) capire no anche dove

1) Supponiamo $\psi \in C_c^0(\mathbb{R})$ reale

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

Delta di Dirac

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

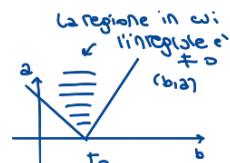
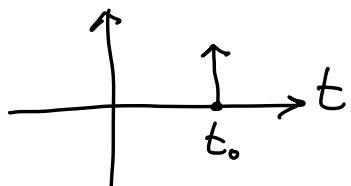
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t_0-b}{a}\right)$$

Misura, cioè distribuzione di ordine ϕ

$$|X(a, b)| \leq C \cdot a^{-1/2}$$

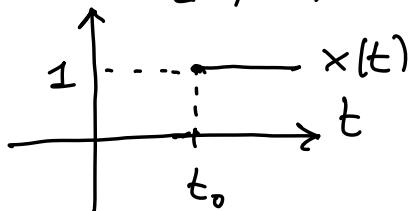
→ più questa tende a 0 più abbiamo qualcosa di liscio
 Qui infatti se $a > 0$ abbiamo una delta e infatti

$|a| \leq C$
 perché ψ è continua e app. compatta

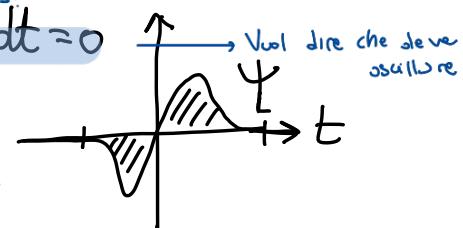


2) Supponiamo $\psi \in C_c^0(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$

$$\text{Sia } x(t) = \mathbb{1}_{[t_0, +\infty)}(t)$$



Imponiamo questo come condizione sull'onda
 ⇒ ha momento nullo



$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t_0}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$$= a^{-1/2+1} \left[\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right]_{t_0}^{+\infty}$$

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t \psi(s) ds$$

$$\psi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

è supports compatto.

da un certo t in poi l'integrale è nullo

$\psi(+\infty) \rightarrow 0$ perché $\psi \in C_c^1$ e siamo compatta

$$= -\alpha \varphi\left(\frac{t_0-b}{\alpha}\right)$$

$\frac{1}{2}$

$|X(a,b)| \leq C \alpha^{\frac{1}{2}}$ perciò $X(a,b) \rightarrow 0$ per $\alpha \rightarrow 0^+$ (A**b** fissato)

In alternativa:

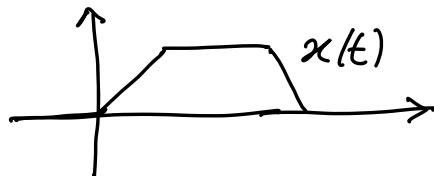
$$\begin{aligned} X(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[t_0, +\infty)}(t) \varphi\left(\frac{t-b}{\alpha}\right) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \varphi\left(\frac{t-b}{\alpha}\right) dt. \end{aligned}$$

3) Se $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t \varphi(t) dt = 0$

Chiediamo 2 momenti nulli

Se $x(t)$ è lineare e tratti

$|X(a,b)| \leq C \alpha^{\frac{1}{2}}$



→ Non ha discontinuità quindi ci aspettiamo che $(X(a,b))_1 \rightarrow 0$ più velocemente se $a \rightarrow 0$ rispetto al caso 2.

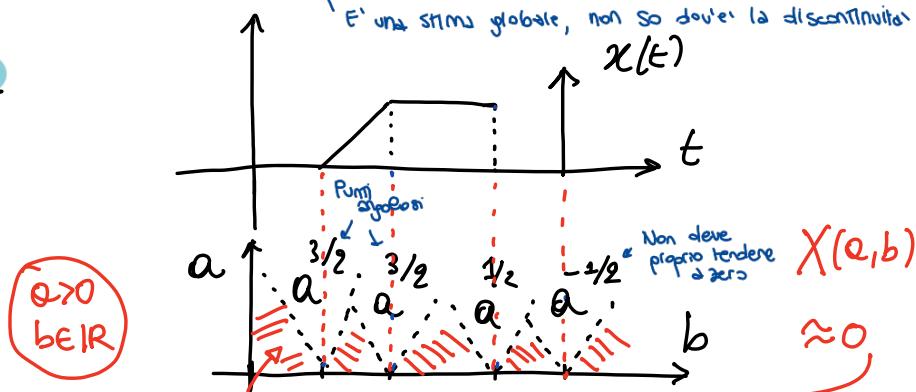
In generale, (basterebbe $x \in C^{N-1}$ con $x^{(N-1)}$ Lipschitz e limitata)

4) Se $x(t)$ è di classe C^N ($N \geq 1$) con $x^{(N)}$ limitata e $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ ha N momenti nulli: $(\int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t) dt = 0 \text{ per } k=0, \dots, N-1)$

allora $|X(a,b)| \leq C \alpha^{\frac{1}{2}+N}$.

Più la funzione è regolare, più $|X(a,b)|$ decade a zero rapidamente

ES



Ricorda immagini

slide lezione 2

Viene utilizzato nel rilevamento delle discontinuità delle funzioni \rightarrow curvi

Viene utilizzato per lo studio dei segnali audio + STFT

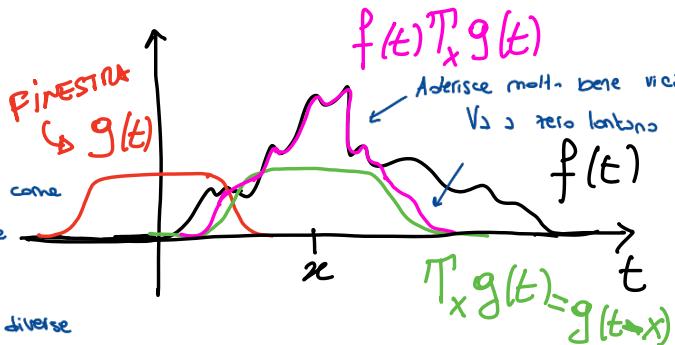
Cerca di capire "le note" e "i guanti" sono suonate

Short-time Fourier Transform (STFT) [Sezione 5.2 di FVSP]

Se $g \in L^2(\mathbb{R})$, finestra
 $f \in L^2(\mathbb{R})$, segnale

si definisce

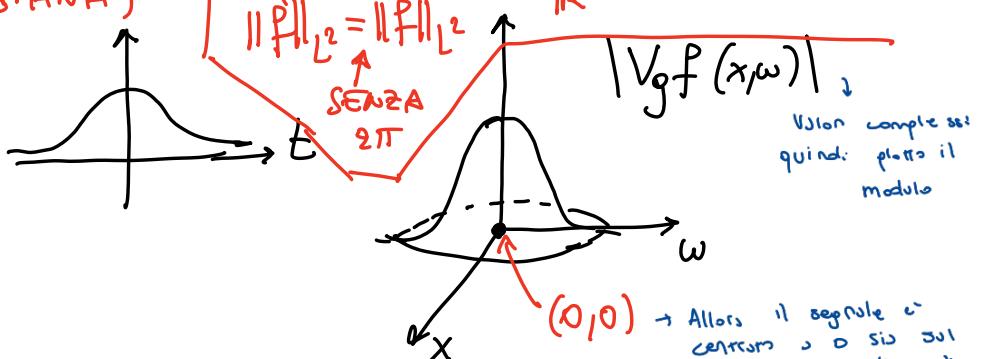
$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j \omega t} f(t) \overline{g(t-x)} dt \quad (\text{STFT di } f)$$



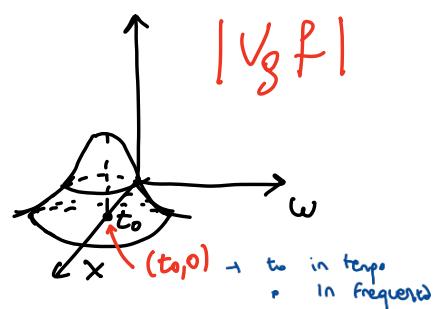
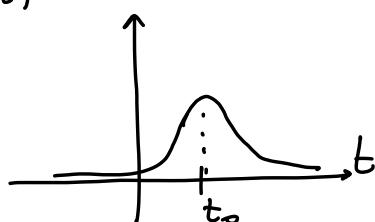
Fissato x ,
 $V_g f(x, \omega)$ assume i valori grandi in corrispondenza degli ω che sono le frequenze del segnale f che sono più espresse nell'intervallo temporale vicino a x

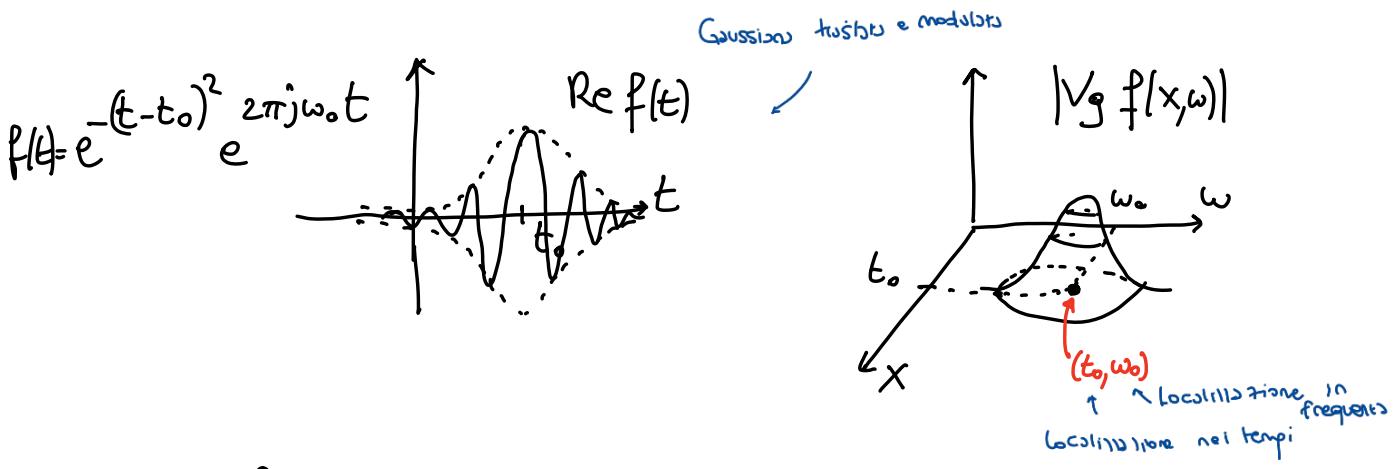
ES ($g = \text{GAUSSIANA}$)

$$f(t) = e^{-t^2}$$



$$f(t) = e^{-(t-t_0)^2}$$





Formule: Per ogni $f_1, f_2, g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle V_g f_1, V_\gamma f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle g, \gamma \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Dimm

$$\begin{aligned} \langle V_g f_1, V_\gamma f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f_1 \overline{T_x g})(\omega) \mathfrak{F}(\overline{f_2 T_x \gamma})(\omega) d\omega dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \overline{\overline{T_x g}(t)} \overline{f_2(t) \overline{T_x \gamma(t)}} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \overline{f_2(t)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \overline{g(t-x)} \gamma(t-x) dx}_{\stackrel{y}{=} dy} dt = \langle g, \gamma \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F} G_2)(\omega) \overline{(\mathfrak{F} G_2)(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}} G_2(t) \overline{G_2(t)} dt \quad \text{PARSEVAL}$$

Parseval:

$$\|V_g f\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

L'energia si vede come la norma L^2 sul piano dello STFT

(se $\|g\|_{L^2} = 1$ $V_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ è una isometria)

Dimm Pone $f_1 = f_2$ e $\gamma = g$ nelle formule precedenti.

$$\left[\begin{array}{l} \{\varphi_k\} \subset H \\ \Phi d = \sum_k \alpha_k \varphi_k \end{array} \right]$$

Formule di inversione: se $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$, $\langle \gamma, g \rangle \neq 0$

$$f(t) = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_g^* V_\gamma f(t) = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, \omega) M_\omega \pi_x^\gamma \gamma(t) dx d\omega$$

$$\begin{aligned} \langle A f_1, f_2 \rangle &= \langle f_1, f_2 \rangle \quad V_{f_1, f_2} \in L^2 \\ \langle A f_1 - f_2, f_2 \rangle &= 0 \quad V_{f_2} \Rightarrow A f_1 - f_2 = 0 \\ V_{f_1} &= f_1 \end{aligned}$$

Dim $\langle V_g f_2, V_g f_2 \rangle = \langle \gamma, g \rangle \langle f_2, f_2 \rangle \Rightarrow \langle \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_g^* V_\gamma f_2, f_2 \rangle = \langle f_2, f_2 \rangle$
de cui $\frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_g^* V_\gamma = I$

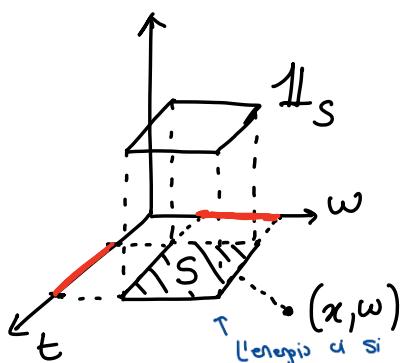
$$\left[\begin{array}{l} \langle F, V_g f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, \omega) dx d\omega = \dots \\ \langle F, V_g f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle V_g F, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{array} \right]$$

Filtri in Tempo-Frequenza (operatori di localizzazione)

Se $F(x, \omega)$ è una funzione nel piano tempo-frequenza definiamo

$$\begin{aligned} L_F(t) &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} (V_g^* F V_\gamma f)(t) & V_g F(x, \omega) \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, \omega) F(x, \omega) M_\omega \pi_x^\gamma \gamma(t) dx d\omega & F(x, \omega) \text{ ANALOGA ALLA RISPOSTA IN FREQUENZA NEI FILTRI CLASSICI} \end{aligned}$$

(Se $F(x, \omega) \equiv 1$ $L_F = I$)



Caso tipico $F = 11_S$ → Nel piano tempo-frequenza
con $S \subset \mathbb{R}^2$ sottinsieme

$$V_g (L_F f)(x, \omega) = 0 \quad \text{se } (x, \omega) \notin S$$

→ No, in generale, ma se g e γ sono Gaussiane, si dim che

$$|V_g (L_F f)(x, \omega)| \leq C_1 e^{-C_2 \text{dist}((x, \omega), S)^2}$$

... in generale c'è un residuo di energia

che un decadimento di tipo gaussiano puliti in realtà è bene perché va a zero molto velocemente!!

Principio di indeterminazione per lo STFT.

Premesse: $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\|g\|_{L^2} = 1$.

Sappiamo che $\|\nabla g f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$

$$\|\nabla g f(x, \omega)\|^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} |\nabla g f(x, \omega)|^2 dx d\omega$$

Sappiamo che vale l'identità
di Parseval, quindi

$|\nabla g f(x, \omega)|^2$ si interpreta come densità di energia
SPECTROGRAMMA di f .

Principio di indeterminazione: → Filosofia legata a quello già visto, matematicamente molto diverso

Se $\|f\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} = 1$ e sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$\iint_{\mathcal{S}} |\nabla g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \geq 1 - \varepsilon.$$

ES. $\varepsilon = 0.1$
 $1 - \varepsilon = 0.9$
 $= 90\%$

Non vale logico per le gaussiane

Allora $|\mathcal{S}| \geq 1 - \varepsilon$.

Dim misura di Lebesgue di \mathcal{S} .

Non è possibile per un segnale avere la misura concentrata su insiemi troppo piccoli

CAUCHY-SCHWARZ

$$|\nabla g f(x, \omega)| = |\langle f, M_{\omega} \nabla_x g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\nabla_{\omega} M_x^\top g\|_2$$

$$= \underbrace{\|f\|_{L^2}}_1 \cdot \underbrace{\|g\|_{L^2}}_1 = 1$$

ipotesi

$$1 - \varepsilon \leq \iint_{\mathcal{S}} |\nabla g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \leq |\mathcal{S}|$$

FINE DEL PROGRAMMA !! ≤ 1



Insiemi di massime time-frequency concentration

(NICOLA-TILLI : the Faber-Krahn
 inequality for the short-time Fourier Transform,
Inventiones Mathematicae)
 (AGGIUNTIVO)
 (GENNI)
 FINO ALLA
 FINE

Consideriamo la finestra gaussiana $g(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}$

$(\|g\|_{L^2} = 1)$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ misurabile.

$$\Phi_\Omega := \max_{f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega}{\|f\|_{L^2}^2} = \max_{f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g f, f}{\|f\|_{L^2}^2}$$

$\int_{\mathbb{R}^2} V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g f, f$
 $\int_{\mathbb{R}^2} V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g f, f$

rappresenta le massime frazioni di energia che può essere catturate dall'insieme Ω .

Si dimostra che se Ω ha misura finita,

$$V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

è compatto. Inoltre è autoaggiunto e non-negativo, quindi $\Phi_\Omega = \|V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g\| = \max$ autovalore di $V_g^* \mathbf{1}_\Omega V_g$, e il relativo max è in effetti raggiunto

(da una autofunzione relativa a tale autovalore). Tutto questo segue dalla Teoria spettrale per operatori compatti e autoaggiunti.

Tenere $\phi_{\Omega} \leq 1 - e^{-|\Omega|}$

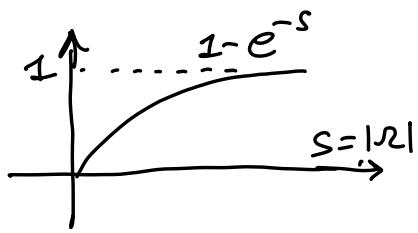
e l'ugualmente vale a e solo se Ω è una

palla. In tal caso le sole funzioni che
realizzano il massimo sono del tipo

$$f(t) = ce^{2\pi i w_0 t} e^{-\pi(t-t_0)^2}$$

$$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

dove (t_0, w_0) è il centro della palla.



Dim Punto sofisticato...

Si usano strumenti d' analisi reale (riamaggiamenti
decreasing) e complesse (trasformate di Baymann,
spazi di Fock)

Corollario (Principio di indeterminazione sharp per lo STFT).

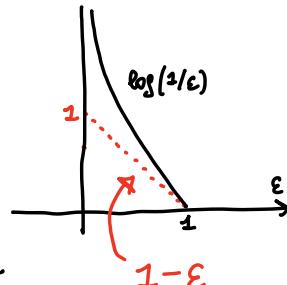
Se per qualche $0 < \varepsilon < 1$, $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ e qualche $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
misurabile

$$\int_{\Omega} |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \geq (1-\varepsilon) \|f\|_{L^2}^2$$

allora

$$|\Omega| \geq \log(1/\varepsilon)$$

con uguaglianza se e solo se Ω è
(e meno di insiemi di misura nulla) una palla



e

$$f(t) = ce^{2\pi i w_0 t} e^{-\pi(t-t_0)^2}$$

dove $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e (x_0, w_0) è il centro della palla.

DIM

$$1-\varepsilon \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega}{\|f\|_L^2} \stackrel{(*)}{\leq} 1 - e^{-|\Omega|}$$

da cui $|\Omega| \geq \log(1/\varepsilon)$. Se $|\Omega| = \log(1/\varepsilon)$, allora vale l'ipotesi anche in $(*)$, da cui la conclusione su f . \square

Analogie con Faber-Krahn Se Ω è un open limitato di \mathbb{R}^n

$$\lambda_{\Omega} := \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} \quad \begin{array}{l} \text{[funz. e valori medi]} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{(0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty)} \end{array}$$

è il minimo autovalore per $-\Delta u = \lambda u$, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Se indichiamo con $T_{\Omega}(u)$ l'unica soluzione in $H_0^1(\Omega)$ di

$-\Delta(T_{\Omega}u) = u$ allora, integrando per parti

$$\int_{\Omega} u^2 = - \int_{\Omega} u \Delta(T_{\Omega}u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(T_{\Omega}u)$$

$$= \langle T_{\Omega}(u), u \rangle_{H_0^1(\Omega)}$$

Perciò

$$\lambda_{\Omega}^{-1} = \max_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2} = \max_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle T_{\Omega}(u), u \rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}$$

Faber-Krahn (~ 1890) mostrano che tale quantità è massimizzata, tra gli insiemi Ω di data misura, dalle palle (ns shape optimization).

Cenni su ALTRI SVILUPPI (Gröchenig, Foundations of time-frequency analysis).

Analisi di Gabor

Versione discritta delle formule di inversione:

$$f(t) = \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle f, M_{\beta^m} T_{\alpha k} g \rangle}_{< f, M_{\beta^m} T_{\alpha k} g >} M_{\beta^m} T_{\alpha k} g$$

Vale per opportune finestre g, γ e possi $\alpha, \beta > 0$?
Si può prendere $g = \gamma$?

In generale $\{M_{\beta^m} T_{\alpha k} g\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ non è una base
ortonomale.

Ma sotto opportune ipotesi su $\alpha, \beta > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$\{M_{\beta^m} T_{\alpha k} g\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ costituisce un FRAME di $L^2(\mathbb{R})$:

$\exists A, B > 0 : \forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(*) A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{\beta^m} T_{\alpha k} g \rangle|^2 \stackrel{(1)}{\leq} B \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

① ci dice che $\{M_{\beta^m} T_{\alpha k} g\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ è una sistema
di Bessel; perciò abbiamo un operatore di analisi (o
dei coefficienti) continuo $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

$$C_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

$$C_g f = \left\{ \langle f, M_{\beta m} T_{\alpha k} g \rangle \right\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$$

(stabilità dell'analisi).

- ② ci dice C_g è iniezione (quindi la ricostruzione è possibile) ($C_g f = 0 \Rightarrow f = 0$) e la ricostruzione è stabile (i valori della C_g sono immagine chiusa)

Più preciso: se $\{M_{\beta m} T_{\alpha k} g\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ si dice Gabor FRAME se (*) è soddisfatto.

Teorema. Se valgono ①, ② allora $\exists \gamma \in L^2(\mathbb{R})$ (detta finestra dura di g):

$$f(t) = \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\beta m} T_{\alpha k} g \rangle M_{\beta m} T_{\alpha k} \gamma$$

$$= D_\gamma C_g f$$

$$\text{dove } D_\gamma \left(\{c_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}} \right) = \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} c_{k,m} M_{\beta m} T_{\alpha k} \gamma$$

è l'operatore di sintesi o ricostruzione ($D_\gamma : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$).

OSS γ risolve $\underbrace{C_g^* C_g}_S \gamma = g$
 $S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ operatore di frame è invertibile

sotto le ipotesi ① e ②.

Quando $\{M_{\beta n} T_{dk} g\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ è un Gabor frame? (o se ① e ② sono soddisfatte).

Condiz. sufficiente Se $g \in W(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta > 0$ sono suff. piccole allora $\{M_{\beta n} T_{dk} g\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ è un Gabor frame

$$\left[g \in W(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [m, m+1]} |f(t)| < +\infty \right]$$

Condizione necessaria

Se $\{M_{\beta n} T_{dk} g\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ è un Gabor frame allora $\alpha \cdot \beta \leq 1$.

[Se $\alpha \cdot \beta > 1$ la partizione lascia dei buchi e un segnale concentrato in uno dei buchi non è rappresentabile con trasl. e modul. di g].

Finestra Gaussiana

Se $g(t) = e^{-\frac{\pi}{2} t^2}$ allora $\{M_{\beta n} T_{dk} g\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ è un Gabor frame se e solo se $\alpha \cdot \beta < 1$.

Se $\alpha = \beta = 1$ (caso considerato da Gabor 1946) allora
 vale anche $f(t) = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} c_{k,n} e^{2\pi i n t} e^{-\frac{\pi}{2}(t-k)^2}$ in $S'(\mathbb{R})$
 ma non in $L^2(\mathbb{R})$.
 k, n in \mathbb{Z} \wedge opportuni coeff.

Ancora altri sviluppi

- Spazi di modulazione $M^p(\mathbb{R})$ $1 < p \leq \infty$.

$$f \in M^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall g f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \text{Hausini}$$

- Continuità degli operatori di localizzazione su M^p :

$$F \in M^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \Rightarrow L_F : M^p(\mathbb{R}) \rightarrow M^p(\mathbb{R}) \quad \forall 1 < p \leq \infty.$$

- operatori pseudodifferenziali:

$$Af(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F} f(\xi) \quad \text{filtro classico}$$

$$Af(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\sigma(x, \xi) \mathcal{F} f(\xi)] \quad \text{operatore pseudodifferenziale}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \underbrace{\sigma(x, \xi)}_{\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha} \hat{f}(\xi) d\xi$$

[Strichman "pseudodifferential operators in mobile communications"].

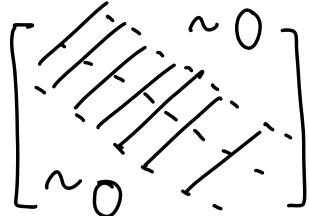
ANALISI MICROLOCALE

Sparcity : A pseudodiff del tipo precedente con $\sigma(x, \xi)$
 in opportuni spazi di funzioni, supponendo $g \in S(\mathbb{R})$

$$\lambda = (m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \quad \pi(\lambda) = M_m T_k$$

$$\pi(\lambda) g = M_m T_k g$$

$$|\langle A \pi(\mu) g, \pi(\lambda) g \rangle| \leq \frac{c_N}{(1 + |\mu - \lambda|)^N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$



- Altre quantizzazioni (Born-Jordan, Weyl).