

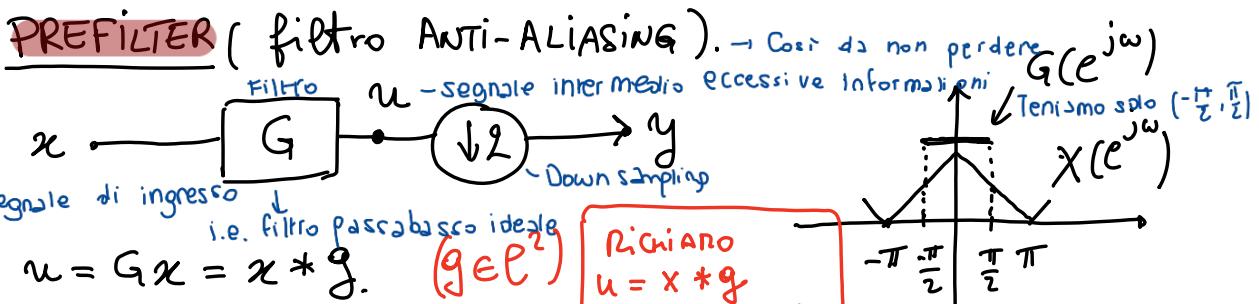
Obb
Guardare slide con immagini per aver chiaro il concetto

SISTEMI MULTIRATE (CONTINUAZIONE)

FSP sez. 3.7.4
Cap. 4

ESISTENZE A TEMPO CONTINUO

Combinazioni di filtri, downsampling e upsampling:



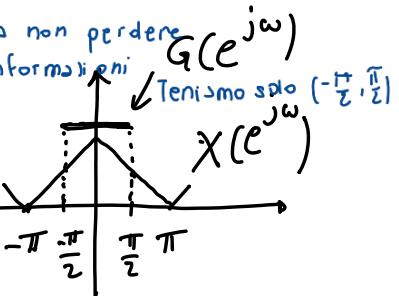
Calcoliamo la relazione tra x e y nel dominio del tempo e della frequenza. $y = D_2 u = D_2 Gx$ ($U = G \cdot X(e^j\omega)$)

legame x, y nel dominio del tempo

$y_m = u_{2m} \stackrel{\leftarrow}{=} \langle x, T_{2m} g^* \rangle$, con $g_m^* := \overline{g}_{-m}$

Definizione downsampling

Ricordano
 $u = x * g$
 $u_m = \langle x, T_m g^* \rangle$
 $g_m^* = \overline{g}_{-m}$



Modo x esprimere l'operatore di convolution come operatore di analisi

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [U(e^{j\frac{\omega}{2}}) + U(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}})] \rightarrow$$

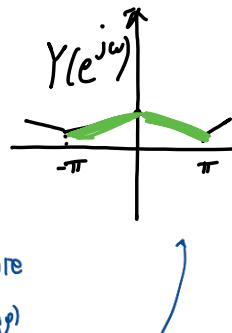
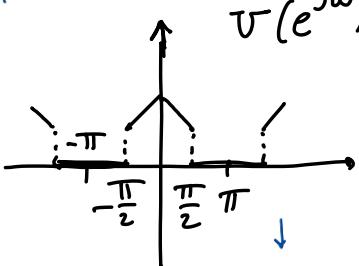
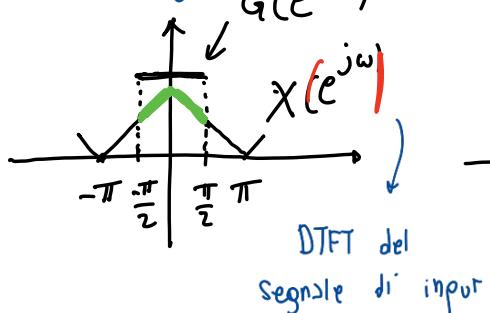
Visto in precedenza parlando di aliasing

$$U(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

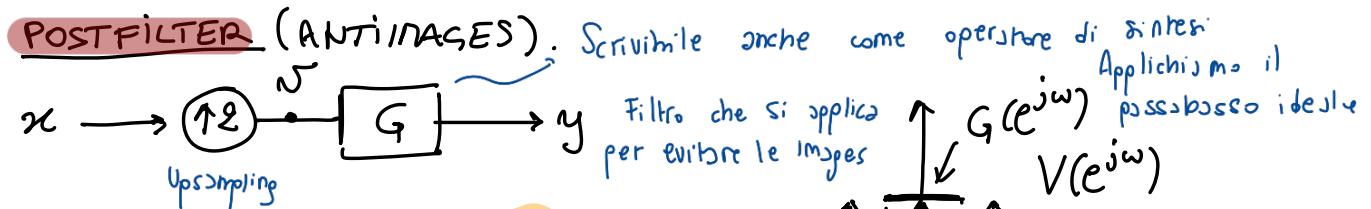
legame x, y nel dominio della frequenza

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [G(e^{j\frac{\omega}{2}}) X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + G(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}) X(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}})]$$

Dai punto di vista grafico: $G(e^{j\omega})$ ← Applicatione del filtro



le basse frequenze vengono riprodotte in maniera fedele



$$y = Gx = N * g = \sum_k N_k T_k g$$

$$N_k = \begin{cases} x_{k/2} & \text{x k pari} \\ 0 & \text{x k dispari} \end{cases}$$

Cerchiamo la relazione tra x e y nel dominio del tempo e frequenza

$$y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k/2} T_k g$$

$$y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k T_{2k} g$$

Per avere tutti i k e non più solo quelli pari

Trasformazioni di passo 2 \Rightarrow novità

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 \end{bmatrix} =$$

$$X(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) \quad x \rightarrow \sum_k x_k \vec{v}_k$$

$$\text{vettori } \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Esempio $Gx = g * x \quad g = (\dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$

Matrice che rappresenta l'operatore lineare G

$$G \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & & & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ \vdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

le colonne $\{T_{2k}g\}$ sono un sistema ortonomale

Sono 3 2x2 ortogonali.

ma non una base ortonomale di ℓ^2

Ad esempio, se $x = (\dots, 0, 1, -1, 0, \dots) \in \ell^2$,

$\langle x, T_{2k}g \rangle = 0 \quad \forall k$

Il sistema non è completo

$g = T_0 g$

$T_1 g$

$T_2 g$

$T_3 g$

Permettono di scambiare, traslare, la linea di un up/down sampling e di un filtro

Multirate (Nobel) identities

$$1) \quad G(z) D_M = D_M G(z^M)$$

$$2) \quad U_M G(z) = G(z^M) U_M$$

FILTRI CON RISPOSTA IN FREQUENZA $G(e^{j\omega})$
 $(z=e^{j\omega})$

FILTRI CON RISPOSTA IN FREQUENZA $G(e^{jM\omega})$

Dim 1) con $M=2$: $y = G(z) D_2 x$, $y' = D_2 G(z^2) x$

FACTITIVA

$$Y(z) = G(z) \cdot \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})] \leftarrow =$$

$$Y'(z) = \frac{1}{2} [G(z) X(z^{1/2}) + G(z) X(-z^{1/2})] \leftarrow =$$

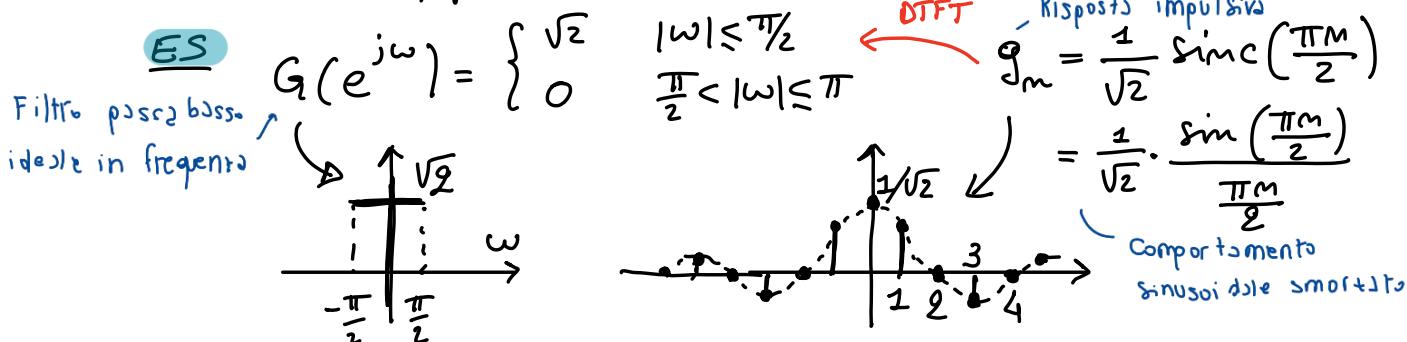
$$2) \quad y = U_M G(z) x, \quad y' = G(z^n) U_n x$$

$$Y(z) = G(z^n) X(z^n); \quad Y'(z) = G(z^n) \cdot X(z^n).$$

Applicazione (basi di traslate): Per quali filtri, g è un sistema ortonormale?

Dato $g \in \ell^2$, quando $\{T_{2k} g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$?

ES



$\{T_{2k} g\}$ è un sistema ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$. Infatti:

$$T_m g \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-m} e^{-jk\omega} = e^{-jm\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-jk\omega}$$

(T_ng)_k

$$= e^{-jm\omega} G(e^{j\omega})$$

$K - N = M$
 \uparrow
 $m = k$ indice muto

è la modulazione come abbiamo visto in precedenza

Verifichiamo l'ortogonalità nel dominio della frequente (posso farlo perché DTFT è isometrico)

$$\langle T_{2m}g, T_{2m}g \rangle = \frac{1}{\ell^2(\mathbb{Z})} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2jm\omega} G(e^{j\omega}) e^{2jm\omega} \overline{G(e^{j\omega})} d\omega$$

Ricordiamo
 $\ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{DTFT}} L^2(-\pi, \pi)$
isometr. isometrico
 $\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2j(m-m)\omega} d\omega$$

Primitiva se $m \neq m$
 $\left[\frac{e^{-2j(m-m)\omega}}{-2j(m-m)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } m=m \\ 0 & \text{se } m \neq m \end{cases}$$

Teorema. Se $g \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\{T_{2k}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale

di $\ell^2(\mathbb{Z})$ sse

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2 \quad \text{per quasi ogni } \omega \in \mathbb{R}.$$

(se soddisfa queste condizioni
conjugate minor filter)

$(G(e^{j\omega}))$ è la DTFT di g)

Dim

$(a_k = \langle g, T_k g \rangle)$ autocorrel. di g).

Dimostrazione
?

Verifichiamo i prodotti scalari per valutare quando otteniamo un sistema ortonormale
 \downarrow Molti simboli in gioco
le traslazioni

$$\langle T_{2k}g, T_{2m}g \rangle = \langle g, T_{-2k}T_{2m}g \rangle$$

$T_{2k}^* = T_{-2k}$

$$= \langle g, T_{2(m-k)}g \rangle = a_{2(m-k)}$$

auto-correlazione

$$\stackrel{?}{=} \delta_{m-k}$$

$$\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

leggiamo in frequenza
 $a_{2k} = \delta_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

la domanda obiettiva questo per capire
l'ortogonalità
 $D_g a = \delta$

Formulas trovata → $\frac{1}{2} \left[A(e^{j\frac{\omega}{2}}) + A(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}) \right] = 1$ per quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

quando abbiamo studiato
l'allasing ossia

$(A(e^{j\omega}))$ è la DTFT di g)

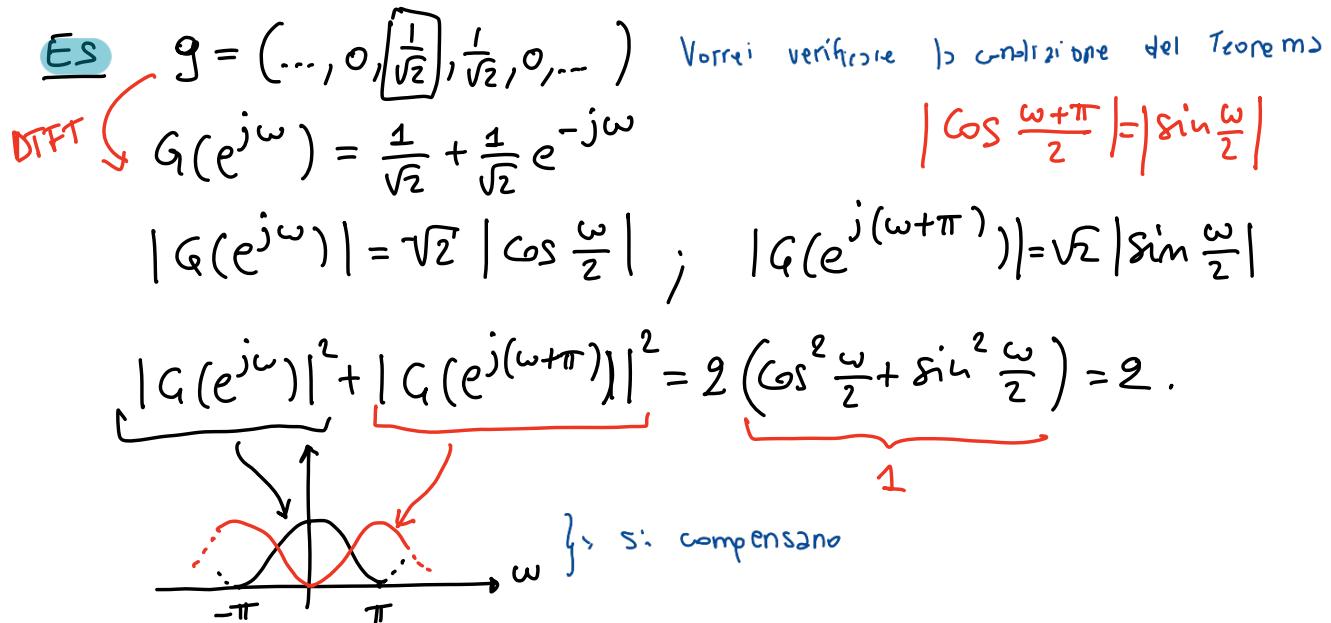
$$\frac{1}{2} \left[\underbrace{A(e^{j\omega})}_{||G(e^{j\omega})||^2} + A(e^{j(\omega+2\pi)}) \right] = 1 \quad \Leftrightarrow$$

Richiamo: $\{T_k g\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale ($\Rightarrow |G(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$)

Per^{ciò}

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2 \quad =$$

\hookrightarrow la condizione finale è nel dominio della frequenza



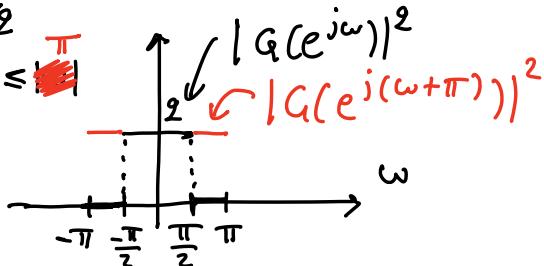
Es filtro passabasso ideale

$$G(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sqrt{2} & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Si vede che

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2$$

Somma delle piste
nella linea rossa del grafico è sempre 2



SISTEMI E SEGNALI A TEMPO CONTINUO (FSP, Cap. 4) \rightarrow Analogia:

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $(x(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R})$

Ragioniamo su funzioni
oggetti unidimensionali

$(\mathcal{F}x)(\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt\omega} x(t) dt$

potremmo considerare il tempo

Trasformata di Fourier

ω frequenza angolare; $X(\omega)$ ampiezza delle frequenze ω .

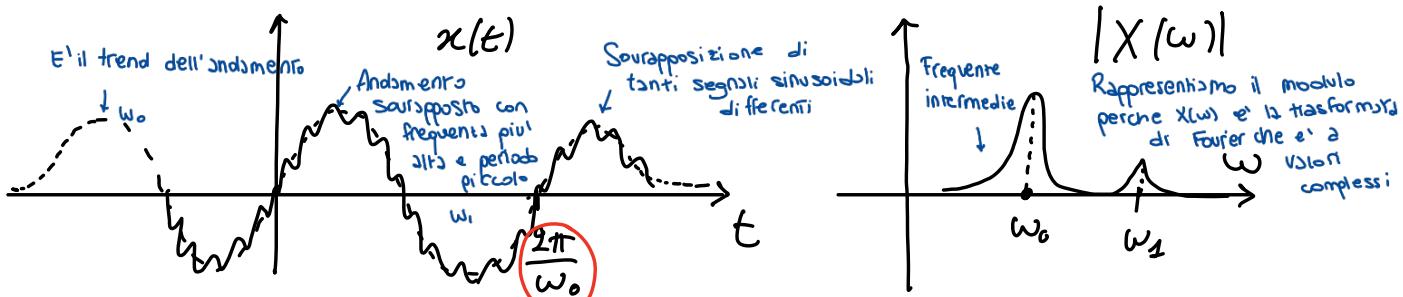
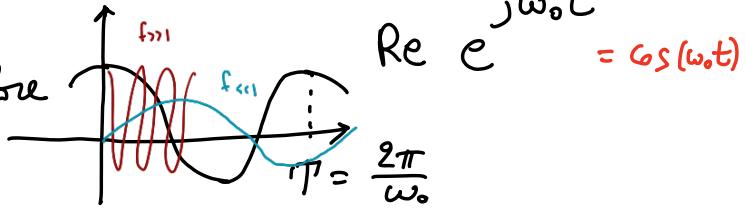
Gli esponenziali complessi (uno per ogni ω) sono i «mattoni» per ottenere il grafico con le oscillazioni.

Motivazione

ω_0 frequenza angolare

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ frequenza}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ periodi} \rightarrow \text{otteniamo una funzione periodica di periodo } T$$



Perché abbiamo picchi su ω_0 e ω_1 ?

$$\text{Se } x(t) \approx e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t} e^{j\omega_0 t} = e^{-j(\omega-\omega_0)t} \approx 1$$

Quando $\omega \approx \omega_0$ allora l'integrale viene grande

$\rightarrow \omega - \omega_0 \gg 0$ allora l'integrale viene prossimo a zero

\downarrow perché non molte oscillazioni che andranno ad elidersi rendendo l'integrale quasi nullo

Questo spiega perché applicando la trasformata di Fourier a un segnale queste sono le frequenze (in corrispondenza) delle frequenze che sono principalmente espresse nel segnale

In meccanica quantistica se $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ rappresenta la funzione

d'onda di una particella che si muove su una retta ($\|f\|_2 = 1$). il numero reale che rappresenta lo spazio (un globo di liberi, si muove su una retta)

Noi
tempo → spazio
meccanica quantistica

tempo → spazio
frequenza → momento

- $|f(x)|^2$ è la densità di probabilità per la posizione x

($\int_I |f(x)|^2 dx$ è la prob. che le particelle si trovino in $I \subset \mathbb{R}$).

- $\frac{1}{2\pi} \int_I |f(p)|^2 dp$ è la densità di prob. per il momento p e' la quantità di moto: massa . velocità

($\frac{1}{2\pi} \int_I |f(p)|^2 dp$ è la prob. del momento delle particelle sia in $I \subset \mathbb{R}$).

↳ Ritroveremo più avanti parlando del principio di indeterminazione

Trasformata limitata uniformemente continua, che a $\omega \rightarrow \infty$ tende a zero

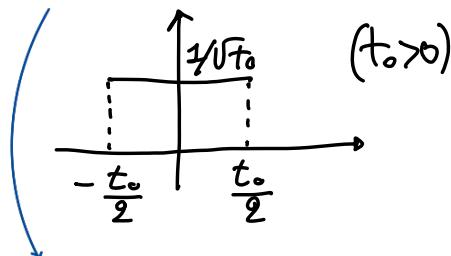
Proprietà 1) \mathcal{F} è ben definita come operatore $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$:

$$\|\mathcal{F}x\|_{L^\infty} \leq \|x\|_{L^1} \quad \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-jtw} x(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-jtw} x(t)| dt = \|x\|_1$$

2) Se $x \in L^1$ allora $X(\omega)$ è uniform. continua e $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} X(\omega) = 0$.

Ese (box function) \rightarrow Funzione porta

a) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \mathbf{1}_{[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]}$



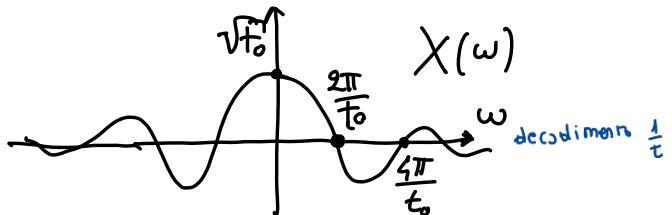
$$\|x\|_{L^2} = 1.$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-jtw} dt$$

$$= \sqrt{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{t_0 \omega}{2}\right)$$

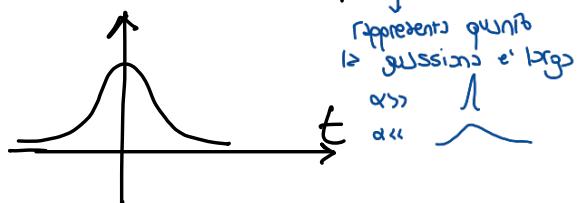
$$(\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases})$$

Prolunga con continuità in ϕ



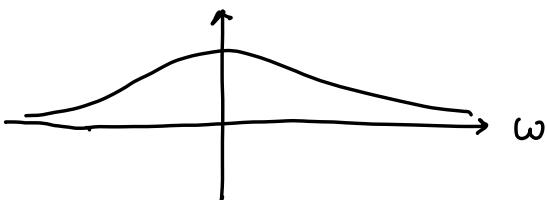
b) (funzione Gaussiana)

$$x(t) = e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$$



$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}$$

Ottieniamo una altra gaussiana



Più $\alpha(t)$ è stretta, più $X(\omega)$ è larga e viceversa \rightarrow anticipazione del principio di indeterminazione:

Se concentri bene x non avrai X concentrato
dominio del tempo \uparrow \downarrow
dominio della frequenza

Cenni di dim:

$$X(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(t + j\frac{\omega}{2\alpha})^2} dt$$

Faccio cambio di variabile
 $dt = du$
 $u = (t + j\frac{\omega}{2\alpha})$
 $\Rightarrow du = dt$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Considero il rettangolo
che giustifica rigorosamente il
cambio di variabili $t+u$

Trasformata di Fourier im $L^2(\mathbb{R})$

Se $x, y \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

CENNO $\langle X, Y \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \langle x, y \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ \hookrightarrow trasformata di Fourier è un'isometria

$$\|X\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|x\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \xrightarrow{x=y} \quad \text{Conservazione delle norme a meno di una costante}$$

Perciò $\text{op}: L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{def}} L^2(\mathbb{R})$ si estende ad un operatore

limitato $f: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ soddisfacente $\xrightarrow{y} f$ ammette un'estensione per continuità su L^2

$$\langle f x, f y \rangle = 2\pi \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\|f x\|_2 = \sqrt{2\pi} \|x\|_2 \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}).$$

Se $x \in L^2(\mathbb{R})$ si prende $\{x_k\} \subset L^1 \cap L^2$, $x_k \rightarrow x$ in L^2 e

si def $(f_x)(\omega) = X(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f x_k)(\omega)$ in $L^2(\mathbb{R})$. Il teorema di estensione degli operatori limitati ci assicura che il limite esiste

Ad esempio, si può prendere $x_k(t) = x(t) \cdot \mathbf{1}_{[-k, k]}(t)$. Allora

$$X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{-j\omega t} x(t) dt \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

↑
esiste in L^2

Risulta che $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ è un isomorfismo. → lineare, biellivo, limitato e con inverso limitato

Formule di inversione

Se $x \in L^2 + L^2$ e $X \in L^1$ allora

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{jtw} X(w) dw \quad | \text{ per quasi ogni } t \in \mathbb{R}$$

Diversità rispetto alla trasformata di Fourier

FATTORE $\frac{1}{2\pi}$

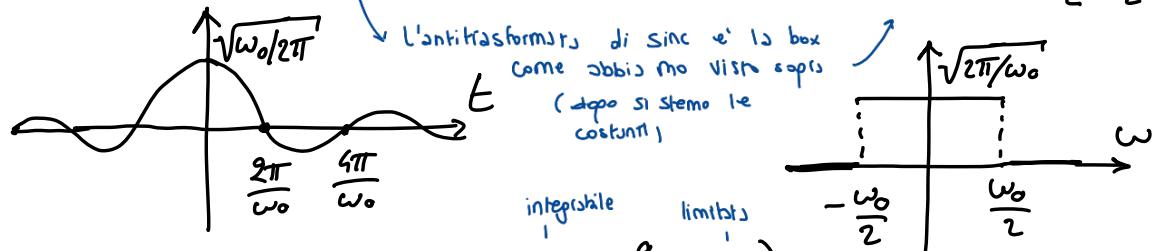
Se x è inoltre continua la formula vale $\forall t \in \mathbb{R}$.

ES $x(t) \in L^2$ e $x(t) \notin L^1$ che motivi le complicazioni precedenti

TRASF. FOURIER

Conoscendo l'antitrasformata di Fourier posso ricavare la trasformata

$$x(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \quad \rightarrow \quad X(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}} \mathbb{1}_{[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}]}$$

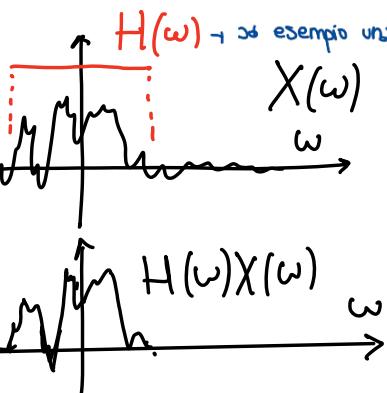


$(x \in L^2, x \notin L^1, X \in L^1 \cap L^2 \cap L^\infty)$.

Filtri (sistemi lineari tempo-invarianti). Per sistemi \rightarrow tempo continuo

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \xrightarrow{\text{e il ruolo di } G} H(\omega)X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f^{-1}(Hx)$$

Richiamo in tempo discreto:
FILTRO: se $x \in \ell^2$
 $y = Gx = x * g$ ($g \in \ell^2$)
 $Y(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$
(TRA LE DTFT)
DTFT $\xrightarrow{\text{moltiplicazione}}$ $\xrightarrow{\text{FFT}}$ $\xrightarrow{\text{IFFT}}$
Filtro G



$$\begin{aligned} & g^{-1}(H) * g^{-1}(X) \\ & g^{-1}(H) * x \end{aligned}$$

→ In frequenza vuol dire che ho tenuto solo alcune frequenze, in questa ω_0 è un filtro passa basso

$$x \rightarrow x * h$$

$$x \mapsto x \cdot H$$

Operatore della moltiplicazione di Fourier

$$(Ax)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{jtw} H(\omega) (\mathcal{F}x)(\omega) d\omega \quad (\text{filtro/moltiplicatore di Fourier})$$

E' scrivibile come convoluzione

$H(\omega)$ è detto risposta in frequenza o funzione di trasferimento

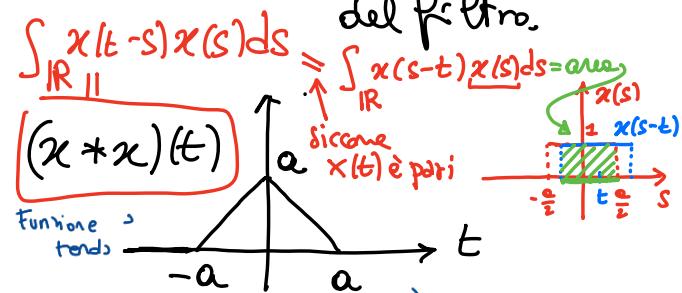
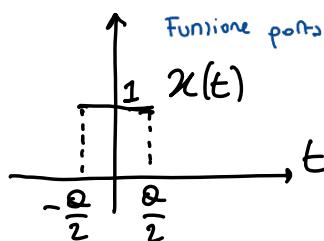
Il filtro A è scrivibile come operatore di convoluzione

$$Ax = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(H)}_{h \leftarrow H \in \text{sono funzioni}} * x = h * x = \int_{\mathbb{R}} x(t-s) h(s) ds$$

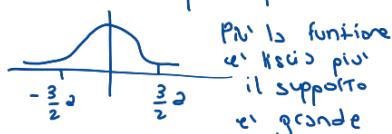
$h \leftarrow H$ sono funzioni risposte impulsive

$$\mathcal{F}^{-1}(H) = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{jtw} H(\omega) d\omega \quad \text{risposta impulsiva del filtro}$$

ES



In generale si definiscono le spline $x * x * x$ e la spline quadratica



Più la funzione è liscia più il supporto è grande

Altro esempio di interpretazione del principio di indeterminazione

Più in generale, la convoluzione

$$x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s) y(s) ds$$

Ha senso, ad es., se

- $x, y \in L^2 \Rightarrow x * y \in L^2$ (conseguenza del teorema di Fubini)
- $x, y \in L^2 \Rightarrow x * y \in L^\infty \cap C^\infty$

$$x \in S^1, y \in S \Rightarrow x * y \in S^1 \cap C^\infty$$

Proprietà

1) Se $x, y \in L^1$ oppure $x \in S^1, y \in S$

SPAZIO DELLE DISTRIBUZIONI TEMPERATE.
ES: $\delta(t), \delta'(t), \dots, \sum_k f_{k-1} \delta(t-k)$ = traino di impulsi

$$\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}x \cdot \mathcal{F}y$$

SPAZIO DI SCHWARTZ: spazio delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ e che decadono in maniera estrema mentre $t \rightarrow \pm\infty$

ES: $f(t) = e^{-t^2}$

$\mathcal{F}f(t) = e^{-|t|}$

NON DI SCHWARTZ (NON È C^∞)

- Remind :
- $L^1 \subset L^2 \subset \dots \subset L^\infty$ vale su misure finite
 - $L^\infty \subset \dots \subset L^2 \subset L^1$
 - Su misure infinite (\mathbb{R}) non sono incapsulabili.

2) Se $h \in S'$, $\mathcal{F}h \in L^\infty$ l'operatore

$$Ax = h * x$$

è continuo $S \subset L^2 \rightarrow L^2$ e quindi si estende ad un operatore limitato $L^2 \rightarrow L^2$ e vole le formule

$$(*) \quad \mathcal{F}[Ax] = \mathcal{F}h \cdot \mathcal{F}x$$

Per quali $h(t)$, l'operatore $x \mapsto x * h$ è limitato in $L^2 \rightarrow L^2$? ($\Rightarrow \mathcal{F}h = H \in L^\infty(\mathbb{R})$)

Dimostrazione (caso) **FAGLIAVIA**

$$\text{Se } x \in S, \quad \mathcal{F}[Ax] = \mathcal{F}[h * x] = \mathcal{F}h \cdot \mathcal{F}x \text{ per (*)}$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}Ax\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}h \cdot \mathcal{F}x\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}h\|_{L^\infty} \|\mathcal{F}x\|_{L^2} \\ &= \|\mathcal{F}h\|_{L^\infty} \|x\|_{L^2} \end{aligned}$$

Ora dim (*): Se $x \in L^2$, $\{x_n\} \subset S$, $x_n \rightarrow x$ in L^2

$$\begin{aligned} \mathcal{F}Ax_n &= \mathcal{F}h \mathcal{F}x_n \\ &\downarrow \quad \downarrow \text{in } L^2 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty \\ \mathcal{F}Ax &= \mathcal{F}h \mathcal{F}x \end{aligned}$$



In conclusione, i filtri $Ax = h * x$ con $h \in S'$, $\mathcal{F}h = H \in L^\infty$ sono limitati su $L^2(\mathbb{R})$.

RISPOSTA
IN PULSATA

RISPOSTA
IN FREQUENZA

- Il filtro si dice stabile se $h \in L^1$ ($\Rightarrow A: L^\infty \rightarrow L^\infty$; BIBO bounded input, bounded output)
- \Leftrightarrow causale se $h(t) = 0$ per $t < 0$:

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) h(s) ds$$

Ma =0 per $s < 0$

Il risultato dipende solo dai valori dell'input precedenti

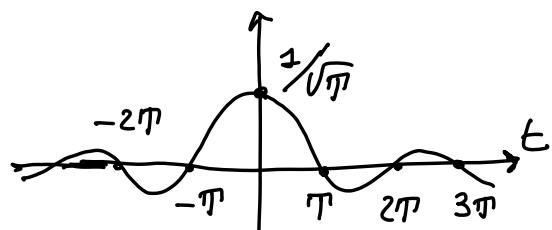
Filtro passa basso ideale

$$Ax = g * x$$

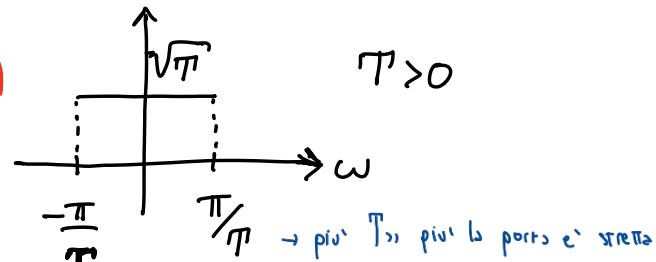
$$\mathcal{F}_g = G(\omega) = \sqrt{\pi} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\omega) = \mathcal{F}g(\omega)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T} t\right)$$

Antitrasformata della porta



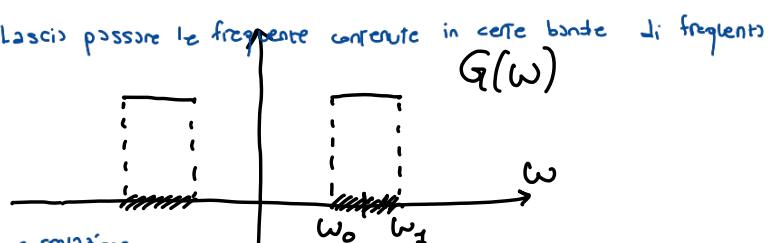
$$g \in L^2(\mathbb{R}), g \notin L^1(\mathbb{R}), \|g\|_{L^2} = 1.$$



$$\int_{\mathbb{R}} |G(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

Uguagliando al Porsi sul per Fourier: $\|g\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|G\|_{L^2}$

Filtro passa bande ideale



Convoluzione come correlazione

= MISURA DELLA SOMIGLIANZA TRA UNA FUNZ. E LE TRASLATE "ELL' ALTRA"

$$(h * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s) x(s) ds = \langle x, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro fissato} \\ \text{utilizzabile}}}{\underset{\mathbb{R}}{\mathcal{T}_t(h)}} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Discorsi analoghi per vedere la relazione tra $h \in h^*$

$$(h^* * x)(t) = \langle x, \underset{\mathbb{R}}{\mathcal{T}_t h} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Con $h^*(s) \stackrel{\text{def}}{=} h(-s)$

$$\langle x, y \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Parametro di traslazione

$$(T_{t_0}x)(t) = x(t - t_0)$$

$$(T_t h)(s) = \underline{h(s-t)}$$

$$\begin{aligned}\langle x, T_t h^* \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} x(s) \overline{(T_t h^*)(s)} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(s) \overline{\underline{h^*(s-t)}} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(s) \overline{\underline{\overline{h(t-s)}}} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(s) h(t-s) ds.\end{aligned}$$