Come determiniamo la base duale senza invertire l'operatore in uno spazio a dim infinita?

BASI DI RIESZ E OPERATORI

FSP sezioni 2.5.3, 2.5.5, 3.1, 3.2, 3.3.1

Esistenza e unicità della base duale. Come trovarla.

$\{\varphi_k\}_{k\in J}$ base di Riesz per uno sp. di Hilbert H.

Imponiamo la condizione di base duale

$$(*) \quad \tilde{\varphi}_k = \sum_{\ell\in J} a_{\ell,k}\varphi_\ell$$

con $a_{\ell,k}$ coeff. opportuni

$$\langle \varphi_j, \tilde{\varphi}_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j\neq k\end{cases}$$

$$\langle \varphi_j, \sum_{\ell\in J} a_{\ell,k}\varphi_\ell\rangle = \sum_{\ell\in J}\overline{a}_{\ell,k}\underbrace{\langle\varphi_j,\varphi_\ell\rangle}_{G_{\ell j}}$$

Il prodotto scalare è antilineare rispetto alla seconda componente

$G_{\ell j}$ matrice di Gram $(G=\Phi^*\Phi: \ell^2(J)\to\ell^2(J))$

$$=\sum_{\ell\in J}\overline{a}_{\ell,k}G_{\ell,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j\neq k\end{cases}$$

Se deve valere l'uguaglianza a sx dell'uguale deve esserci un numero $\mathbb{R}$

$$\overline{G_{\ell j}} = G_{j\ell}$$

$$\langle\varphi_j,\varphi_\ell\rangle = \langle\varphi_\ell,\varphi_j\rangle$$

→ I coefficienti devono soddisfare questa proprietà

$$G_{j,\ell}\,a_{\ell,k}$$

$$\sum_{\ell\in J} a_{\ell,k}G_{j,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j\neq k\end{cases}$$

$$A=(a_{\ell,k}) = G^{-1}$$

→ Perchè il prodotto deve G_{je} deve essere l'identità

In conclusione se $A=(a_{\ell,k}) = G^{-1} = (\Phi^*\Phi)^{-1}$ allora $\{\tilde{\varphi}_k\}$ definita in $(*)$ è una base di Riesz duale di $\{\varphi_k\}$.

OSS $(*)$ si può riscrivere come $\tilde{\Phi} = \Phi A$ (uguaglianza di operatori $\ell^2(J)\to H$).

In termine di operatori

Operatori di analisi

$$\tilde{\Phi} = \Phi(\Phi^*\Phi)^{-1}$$

Per verificare l'osservazione,

Basta controllare l'uguaglianza sulla base canonica $\{e_k\}$ di $\ell^2(J)$:

$\tilde{\Phi}\alpha \overset{def}{=} \sum_j \alpha_j \tilde{\varphi}_j$

$e_k = \{\alpha_{k,j}\}$ con $\alpha_{k,j} = \begin{cases} 1 & se\ j=k \\ 0 & se\ j \neq k \end{cases}$

$e_k \in \ell^2 \quad e_{k,j} = \begin{cases} 1 & se\ j=k \\ 0 & se\ j \neq k \end{cases}$

(•) $\tilde{\Phi} e_k = \tilde{\varphi}_k$

$A e_k = \{a_{\ell,k}\}_{\ell \in J}$ (colonna k-esima)

(•) $\Phi A e_k = \sum_{\ell \in J} a_{\ell,k} \varphi_\ell \to$ Sono uguali se vale (*)

k e' fissato e fissa la colonna

(•) Verifichiamo che $\tilde{\Phi}$ e ΦA assumano gli stessi valori sugli elementi della base perche' per unicita' e continuita' l'uguaglianza si estende a tutti gli elementi della base

RICHIAMO

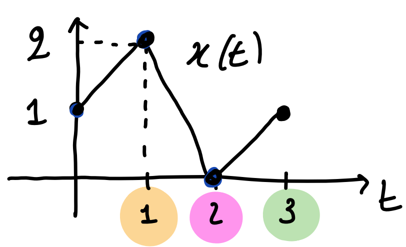
$\Phi\alpha = \sum_\ell \alpha_\ell \varphi_\ell$

$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \varphi_k$ posto k

Es $H = \{x : [0,3] \to \mathbb{C}$, continue e affini su $[0,1], [1,2], [2,3]$; $x(0) = x(3)\}$ con $\|\cdot\|_{L^2}$.

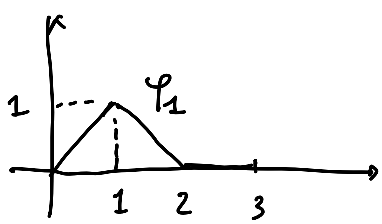
Consideriamo spline affini e periodiche

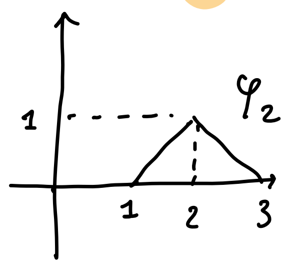
(spline periodiche).

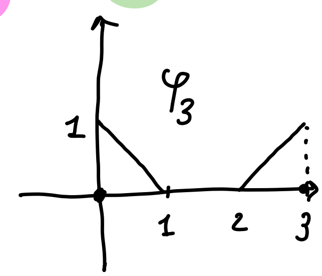


$H = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$x = 2\cdot\varphi_1 + 0\cdot\varphi_2 + 1\cdot\varphi_3$







Definiamo la matrice di Gram

Matrice Hermitiana, che in $\mathbb{R}$ e' simmetrica

$G = \Phi^*\Phi = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$

$(G^* = G$, OK$)$

$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^3 \varphi_1(t)^2 \, dt = \frac{2}{3}$

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^3 \varphi_1(t)\varphi_2(t)\, dt = \frac{1}{6}$

$\vdots$

$G_{\ell,j} = \langle \varphi_j, \varphi_\ell \rangle$

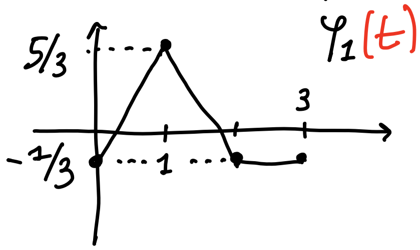
Calcoliamo l'inversa

$A = G^{-1} = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$

$\tilde{\Phi} = \Phi G^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\varphi}_3 \end{bmatrix}$

$\tilde{\Phi}\alpha \overset{def}{=} \alpha_1\tilde{\varphi}_1 + \alpha_2\tilde{\varphi}_2 + \alpha_3\tilde{\varphi}_3$

$\tilde\varphi_1 = \frac{5}{3}\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2 - \frac{1}{3}\varphi_3$, $\tilde\varphi_2 = \dots$ è la seconda colonna



$$\begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \,|\, v_2 \,|\, \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi v_1 \,|\, \phi v_2 \,|\, \dots \end{bmatrix}$$

Basi di Riesz di Sottospazi

→ generalizzazione del concetto introdotto prima per gli spazi di Hilbert H

Mettiamo in relazione il sottospazio con lo spazio ambiente

Sia $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ una base di Riesz per il sottospazio (chiuso)

$S = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k\in J}} \subset H$ (S è ancora uno sp. di Hilbert)

$\phi : \ell^2(J) \longrightarrow H$

$\phi\alpha = \sum_{k\in J} \alpha_k \varphi_k$

ϕ isomorf. $\ell^2(J) \to S$

($\phi : \ell^2(J) \to H$ in generale non è suriettivo ma $R(\phi) = S$) (I)

RANGE = IMMAGINE

Novità rispetto a quanto detto fino ad ora

$\phi^* : H \to \ell^2(J)$

$\phi^* x = \{\langle x, \varphi_k\rangle\}_{k\in J}$

In generale ϕ^* non è iniettivo: → Sto perdendo informazioni perchè non c'è più l'iniettività

$N(\phi^*) = R(\phi)^\perp = S^\perp$ (II)

NUCLEO = KER

ortogonale

Sia $\tilde\phi$ l'operatore di sintesi associato alla base duale. Pertanto

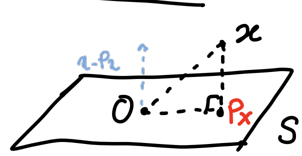
$\tilde\phi\alpha = \sum_k \alpha_k \tilde\varphi_k$ con $\tilde\varphi_k \in S$ e $\langle \varphi_k, \tilde\varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases}$

o equivalentemente $\tilde\phi^*\phi = I$ su H Equivalente

" $\ell^2(J)$

Ora $P := \phi\tilde\phi^*$ è la proiezione ortogonale su S: (III)

$Px = \phi\tilde\phi^* x = \sum_k \langle x, \tilde\varphi_k\rangle \varphi_k$



$\boxed{\text{Dimostrazione 3}}$

Infatti, $Px \in S$ e $x - Px \in S^{\perp}$: $\langle x - Px, \tilde{\varphi}_k \rangle = 0 \ \forall k$

perché

Per linearità, riscriviamolo in maniera esplicita

$$\underbrace{\tilde{\Phi}^*(x - Px)}_{\{\langle x-Px, \tilde{\varphi}_k\rangle\}_{k \in J}} = \tilde{\Phi}^* x - \underbrace{\tilde{\Phi}^* \Phi}_{I} \tilde{\Phi}^* x = 0 .$$

→ Quello che dovevo controllare

→ Formula che avevamo ottenuto prima

Osserviamo che $\tilde{\Phi} = \Phi G^{-1} = \Phi (\Phi^* \Phi)^{-1}$ perciò

$$P = \Phi \tilde{\Phi}^* = \Phi \left(\Phi (\Phi^* \Phi)^{-1} \right)^* = \Phi (\Phi^* \Phi)^{-1} \Phi^*$$

Così non compare più la base duale

Solo proprietà $*$ e -1

(se $\{\varphi_k\}$ è una base ortonormale di S allora $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\Phi^* \Phi = I$ e $P = \Phi \Phi^*$ ossia $Px = \sum \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$).

Es (regressione lineare multipla)

Modello: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon$ ($X_1, \dots, X_p$ predictors, Y output, a valori reali)

$(x_{k,j}, y_k)$, $j = 1, \dots, p$ osservazione k-esima

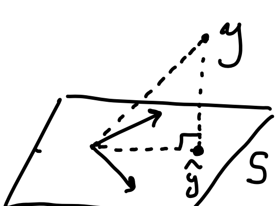
$$\hat{y}_k := \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{k,1} + \dots + \hat{\beta}_p x_{k,p} = (\Phi \hat{\beta})_k$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ \vdots & & \\ 1 & & \end{bmatrix}}^{\Phi \ \text{p+1 colonne}} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow k=1 \\ \leftarrow k=2 \\ \vdots \\ \\ \end{array}$$

osserv. di X_1 — osservaz. di X_2

con $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_p]^T$ da determinarsi in modo da minimizzare

$$\min_{\hat{\beta}} \| y - \underbrace{\Phi \hat{\beta}}_{\hat{y} = P_y} \|^2 \qquad e^2$$



S = sp. delle colonne di Φ suppon. lin. indipendenti ($\dim S = p+1$)

$$P_y = \hat{y} = \Phi \underbrace{\tilde{\Phi}^* y}_{\hat{\beta}}$$

$$\hat{\beta} = \tilde{\Phi}^* y = (\Phi^* \Phi)^{-1} \Phi^* y .$$

(si assume $\Phi^* \Phi$ invertibile).

$\Updownarrow$

Φ è iniettiva, cioè le colonne sono linearmente indipendenti

Rappresentazione di operatori

2 spazi di Hilbert

H base di Riesz $\{\varphi_k\}_k$ ($\{\tilde{\varphi}_k\}$ base duale) $\quad x = \sum_k \alpha_k \varphi_k$, $\alpha_k = \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle$ $\forall x \in H$

K " " $\{\psi_k\}_k$ ($\{\tilde{\psi}_k\}$ ").

Vogliamo determinare l'operatore B in modo che il diagramma sia commutativo — 1. & 2. portano lo stesso risultato

operatore A

$\sum_k \alpha_k \varphi_k = x \in H \xrightarrow{A} K \ni Ax$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{A} & K \\ \Phi \uparrow & & \downarrow \tilde{\Psi}^* \\ \ell^2(J) & \xrightarrow{B} & \ell^2(J) \end{array}$$

$\alpha \in \ell^2(J)$, $\quad \ni B\alpha = \beta$, $\quad \beta_j = \langle Ax, \tilde{\psi}_j \rangle$

$\Phi\alpha = \sum_k \alpha_k \varphi_k$

$\tilde{\Psi}^* = \Psi^{-1}$

$\tilde{\Psi}^* y = \{\langle y, \tilde{\psi}_k \rangle\}_{k \in J}$

A lin. limitato → limitato ≡ continuo, cioè $\|Ax\|_K \leq c\|x\|_H$ $\forall x \in H$

Se x è perturbato di poco, anche Ax lo è

diagramma commutativo

→ Vogliamo che sia la successione dei coefficienti nello spazio K

$$B \overset{def}{=} \tilde{\Psi}^* A \Phi : \ell^2(J) \to \ell^2(J)$$

Cerchiamo una forma esplicita dell'operatore B con i dati che abbiamo

$$B\alpha = ? \qquad \Phi\alpha \overset{def}{=} \sum_{k \in J} \alpha_k \varphi_k \ , \quad A\Phi\alpha = \sum_{k \in J} \alpha_k A\varphi_k$$

$A(\sum \alpha_k \varphi_k)$, ma A è lineare e continuo, quindi possiamo scrivere

$\beta = B\alpha$

$$\beta \overset{def}{=} \underbrace{\tilde{\Psi}^* A \Phi}_{B} \alpha = \{ \underbrace{\langle \sum_k \alpha_k A\varphi_k, \tilde{\psi}_\ell \rangle}_{\beta_\ell} \}_{\ell \in J}$$

$$\beta_\ell = \sum_{k \in J} \underbrace{\langle A\varphi_k, \tilde{\psi}_\ell \rangle}_{B_{\ell,k} \, = \text{ Matrice}} \underset{\text{vettore}}{\alpha_k}$$

Linearità e continuità del prodotto scalare

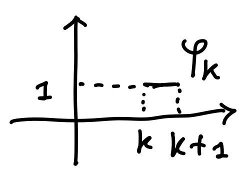
↘ Riconosco un prodotto tra matrice e vettore (anche se ∞)

$$B = (B_{\ell,k}) \ , \quad B_{\ell,k} = \langle A\varphi_k, \tilde{\psi}_\ell \rangle$$

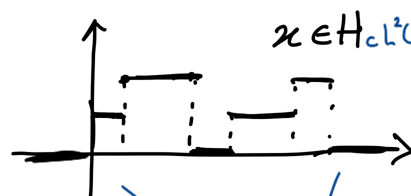
ES. $H = \mathrm{Span}\{\chi_{[k,k+1]}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ $\quad (\chi \equiv \mathbb{1})$

Operatore che produce la diminuzione della risoluzione di un segnale

$\varphi_k = \chi_{[k,k+1]}$



$x \in H \subset L^2(\mathbb{R})$



La funzione si annulla, quindi $\in L^2(\mathbb{R})$

$\{\varphi_k\}$ base orton. per H $(\Rightarrow \tilde{\varphi}_k = \varphi_k)$

↓ norma unitaria

$\perp$ x' vivono su intervalli disgiunti

Sia $A : H \to H$ definito, $\forall \ell \in \mathbb{Z}$,

Suddividiamo $\mathbb{R}$ in questo modo

$-2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \qquad \mathbb{R}$

$$(A\underset{\text{input}}{x})(t) = \frac{1}{2}\int_{2\ell}^{2(\ell+1)} x(s)\,ds, \quad \text{per } t \in [2\ell, 2(\ell+1))$$

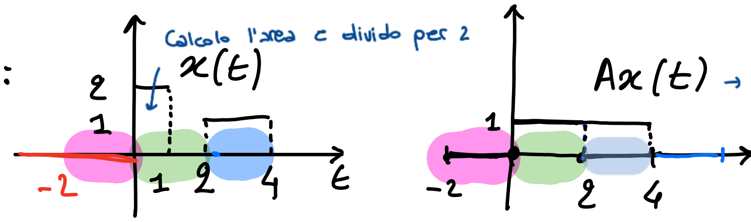
output

Calcoliamo la media integrale per ogni intervallo

Ad es:

(-2,0) $Ax = 0$

(0,2) $Ax = 1$



→ Sono costanti su intervalli di lunghezza 2, abbiamo immagini più sgranate in questo spazio

$B = (B_{\ell,k})$ $\qquad B_{\ell,k} = \langle A\varphi_k, \varphi_\ell \rangle$

indice di riga

INDICE DI COLONNA

Si cercano basi così che B abbia una rappresentazione sparsa

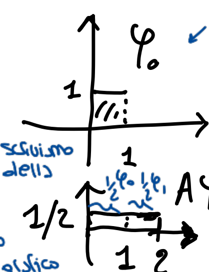
$A\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1$

$A\varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1 \quad \to k=1$

$A\varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_3 \quad \to k=2$

$k=0$ $A\varphi_0$, dopo averlo calcolato, lo scriviamo come elementi della base

$A\varphi_1$ ... $A\varphi_1$ ottengo lo stesso grafico di $A\varphi_0$



φ_0

$A\varphi_0$

Come fatto prima

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & 0 & 0 & \vdots & \vdots & & \\ & 1 & 1 & 0 & \vdots & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \ddots & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

$k=-1 \quad k=0 \quad k=1$

($\square$ posizione 0,0)

matrice sparsa diagonale a blocchi

(in ogni riga e in ogni colonna ci sono pochi elementi numericamente non trascurabili)

Queste basi sono utili x' su certi spazi producono rappresentazioni sparse

- basi di wavelets : $\quad U(t) : L^2(\mathbb{R}^4) \to L^2(\mathbb{R}^4)$ propagatori di evoluzione per equaz. iperboliche

  ↳ $L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R}^2)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$

"basi" ridondanti con vettori linearmente dipendenti

- frames di Gabor : $\quad$ " $\quad$ per operatori di tipo Schrödinger.

- Ricerca di basi ottimali per avere rappresentazioni sparse.

  ↳ Ogni classe di operatori ha la sua base "ideale" per rendere "B" quasi diagonale

RIASSUNTO (FSP, Capitolo 2).

- Il prodotto scalare in un spazio di Hilbert è lo strumento per quantificare la somiglianza di due segnali.
Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,
$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ con uguaglianza sse x e y sono lin. dipendenti.

Pertanto, $\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|}$ è ≤ 1 ed è tanto più vicino a 1 quanto più x e y sono "vicini" ad essere linearmente dipendenti, i.e. uguali a meno di un riscalamento (= moltiplicazione per uno scalare).

- Data una successione di Bessel $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ in uno spazio di Hilbert H, abbiamo definito una corrispondente trasformata o operatore di analisi

$$\phi^* \to \text{Lineare e continuo}$$
$$H \xrightarrow{\phi^*} \ell^2(J)$$
$$x \longmapsto \{\langle x,\varphi_k\rangle\}_{k\in J} \to \text{oggetto digitale}$$

$x \to$ oggetto analogico

e un operatore di sintesi/ricostruzione (aggiunto di ϕ^*)

$$\phi \text{ — Lineare e Continuo}$$
$$\ell^2(J) \xrightarrow{\phi} H$$
$$\{\alpha_k\}_{k\in J} \longmapsto \sum_{k\in J} \alpha_k\varphi_k \to \text{Vorremmo la convergenza}$$

che risultano continui (isometrie se $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ è un sist. ortonormale)

– In particolare abbiamo

$\{\varphi_k\}_{k\in J}$	
sistema ortonormale	$\Phi^*\Phi = I$, $\Phi\Phi^*$ = proiez. ortog. su $S \overset{\text{def}}{=} \overline{\text{span}\{\varphi_k\}}$
base ortonormale di H	$\Phi^*\Phi = I$, $\Phi\Phi^* = I$ $(\Rightarrow \Phi^{-1} = \Phi^*)$
base di Riesz di S (sottospazio chiuso)	$\tilde{\Phi}^*\Phi = I$, $\Phi\tilde{\Phi}^*$ = proiez. ortog. su $S \overset{\text{def}}{=} \overline{\text{span}\{\varphi_k\}}$ dove $\tilde{\Phi}$ è l'operatore di sintesi associato alla base duale.

– Esempio importante: base di Fourier $\{f^{(0)}, \dots, f^{(N-1)}\}$ di $\mathbb{C}^N$, definita come

$$f^{(k)}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi}{N} jkn} \quad , \quad k, n = 0, \dots, N-1.$$

(k ← elemento della base; n ← indice del vettore)

$f^{(k)}$ ha un andamento sinusoidale e oscilla con frequenza (= numero di oscillazioni per unità di tempo) $\frac{k}{N}$ e frequenza angolare $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$.

Se $0 \le k \le N/2$, $f^{(k)}$ compie k oscillazioni complete su $\{0, \dots, N-1\}$. La massima frequenza con significato fisico è infatti $\frac{1}{2}$ (ossia frequenza angolare $\omega = \pi$, ossia ω_k con $k = N/2$).

La suddetta definizione di $f^{(k)}_n$ ha senso in realtà per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (e $k \in \mathbb{Z}$): $\{f^{(k)}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è allora un segnale periodico di periodo N, ossia

$$f^{(k)}_{n+N} = f^{(k)}_n.$$

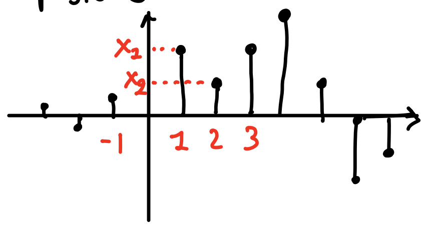
SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO (SEGNALI DIGITALI).

FSP CAP 3
Sezioni 3.1
3.2
3.3.1

- successioni di lunghezza infinita $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\dots, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots$$

↑ posto 0



Si riguarda x_0

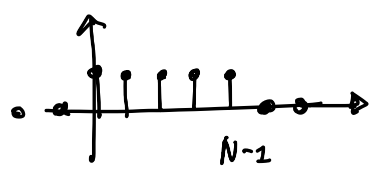
$$\dots, 0, 0, 1, \boxed{3}, -1, \tfrac{1}{2}, 4, 0, 0, \dots$$
$$x_{-1} = 1,\quad x_0 = 3,\quad x_1 = -1,\quad x_2 = \tfrac{1}{2}$$

- successioni di lunghezza finita $(x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$
  - estensione a zero: $\dots, 0, 0, \boxed{x_0}, x_1, \dots, x_{N-1}, 0, 0, \dots$
  - estensione periodica: $\dots, x_{N-1}, \underbrace{x_0, \dots, x_{N-1}}, \underbrace{x_0, x_1, \dots}$
- windowing: $\dots, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, \dots, \dots \mapsto \dots, 0, \boxed{x_0}, \dots, x_{N-1}, 0, \dots$

↳ Seleziono solo una porzione di un segnale ∞

Es

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

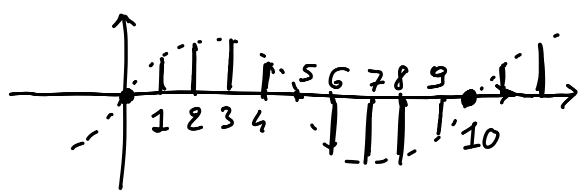


→ Questo serve per fare windowing ad esempio

Segnale discreto periodico

$$x_n = \sin\left(\frac{2\pi}{10} n\right)$$

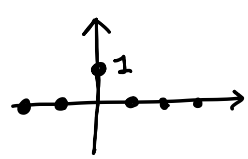
↖ PERIODO



SUCCESSIONE

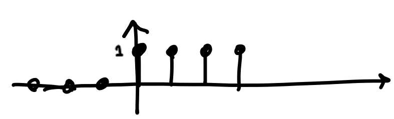
$$\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \ne 0 \end{cases}$$

↳ E' chiamato impulso unitario



Heaviside

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \ge 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$



$\sum |x_k|^2 < \infty$

Spazi $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$. In particolare $\ell^2(\mathbb{Z})$.

$u = (u_m) \in \ell^\infty$, $u \notin \ell^p$ per $1 \leq p < \infty$. $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_m|^p = \sum_{k \geq 0} 1 = +\infty \right)$

ℓ^∞ significa successione limitata

Un SISTEMA A TEMPO DISCRETO è un operatore che agisce tra spazi di successioni:

$$x \longmapsto \boxed{A} \longrightarrow y$$

(successione) (successione)

- A lineare $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ (principio di sovrapposiz.)
- A come matrice: $y = Ax$

$$y_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{mk} x_k \qquad \begin{bmatrix} & \cdots & & \\ \cdots & a_{-10} & & \\ & \boxed{a_{00}} & a_{01} & \\ & a_{10} & a_{11} & \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \boxed{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

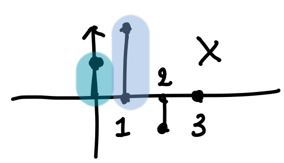
ES $y = Ax = T_k x$; $y_m = x_{m-k}$

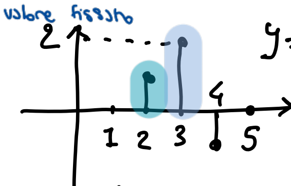
Trasla di K unità

Indice della successione → Trasla sugli elementi della successione

valore fissato

Fisso $k \in \mathbb{Z}$





$y = T_2 x$

$x_1 = y_3$ Traslazione verso sinistra, quindi è l'operatore di ritardo $K > 0$

(ritardo di k unità di tempo se $k > 0$: $y_3 = 2 = x_1 = x_{3-2}$)

E' l'analogo, nel mondo delle funzioni, di $x(t) \to x(t-k)$

- $k = 1$: matrice di T_1:

$y_n = x_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \boxed{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \boxed{x_{-1}} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ = y_0 \\ = y_1 \\ = y_2 \\ \end{matrix}$$

→ riga 0

Sotto diagonale

- $k = 0$: matrice identità

$y = T_0 x = x \Rightarrow T_0 = I$ → In uscita ottengo gli stessi risultati che in entrata

uno su questa diagonale

Il sistema A si dice

- senza memoria se A è diagonale $y_n = a_{nn} x_n$ il sistema non tiene conto dei valori precedenti o successivi
- shift-invariant (invariante per traslazione) se $A T_k x = T_k A x$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
- BIBO (Bounded input - bounded output) se $A: \ell^\infty \to \ell^\infty$.