FILTRI INVERTIBILI E APPLICAZIONI A BASI DI TRASLATE

FSP, sec. 3.4, 3.5

Teorema — risposta impulsiva

Sia $h \in \ell^2$. L'operatore di convoluzione $Hx = x * h$ (← è la convoluzione) è limitato invertibile su ℓ^2 (ossia $H: \ell^2 \to \ell^2$ è limitato e biettivo) sse

DTFT di h (risposta in frequenza)

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 : \quad C_1 \underset{(1)}{\overset{\text{invertibile}}{\leq}} |H(e^{j\omega})| \underset{(2)}{\overset{\text{limitato}}{\leq}} C_2 \quad \text{per quasi ogni } \omega \in \mathbb{R}.$$

I filtri invertibili sono quelli che hanno H limitati dall'alto e dal basso

Dim Abbiamo già visto che $H: \ell^2 \to \ell^2$ è limitato sse $H(e^{j\omega})$ è in $L^\infty(-\pi,\pi)$ ossia (2). → Visto nella lezione precedente

Siccome DTFT è un isomorfismo $\ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(-\pi,\pi)$ basta studiare quando è invertibile l'operatore

$$L^2(-\pi,\pi) \to L^2(-\pi,\pi)$$
$$X(e^{j\omega}) \mapsto H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}).$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2 & \xrightarrow{H} & \ell^2 \\ \downarrow \text{DTFT (è un isomorfismo)} & & \downarrow \\ L^2((-\pi,\pi)) & \longrightarrow & L^2((-\pi,\pi)) \\ X & \longmapsto & HX \\ \underset{\text{DTFT di } x}{X(e^{j\omega})} & \longmapsto & \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{DTFT di } h} X(e^{j\omega}) \end{array}$$

$y = Hx = x * h$

$Y = HX$

È invertibile sse vale (1) e l'inverso è

$$Y(e^{j\omega}) \mapsto \frac{1}{H(e^{j\omega})} Y(e^{j\omega})$$

$$\left((1) \Leftrightarrow \frac{1}{H} \in L^\infty \right).$$

↳ Deve essere limitato $\left|\frac{1}{H(e^{j\omega})}\right| \leq c$

$\blacksquare$

OSS Se $H(e^{j\omega})$ è continua, (2) è soddisfatta ($H(e^{j\omega})$ è periodica di periodo 2π su $[-\pi,\pi]$ è limitata per Weierstrass $|H(e^{j\omega})| \leq c \quad \forall \omega \in [-\pi,\pi]$) e (1) $\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) \neq 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Questo accade ad es. se h è FIR (risposta impulsiva finita):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k}$$ è un polinomio trigonometrico. → Una somma finita

↖ somma finita

Esempio (filtro passa basso di Haar)

$$y = Hx = x * h, \quad \text{con} \quad h = (\dots, 0, \boxed{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}, 0, \dots)$$

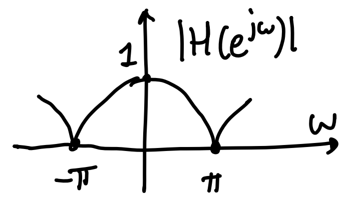
$$\boxed{\tfrac{1}{2}} = h_0, \quad \tfrac{1}{2} = h_1$$

$$y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$$

$H(e^{j\omega}) = \cos\frac{\omega}{2}\, e^{-j\omega/2}$ funz. cont. di ω

DFT

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\cos\frac{\omega}{2}\right| = 0 \text{ per } \omega = \pi$$



Perciò H non è invertibile. → Si annulla, per essere invertibile non si deve annullare!

Si può verificare che $H: \ell^2 \to \ell^2$ è iniettivo e ha immagine densa. MA NON È SURIETTIVO → e quindi non è invertibile

Perciò $\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è completo in ℓ^2 (perché $Hx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k h$ ha immag. densa)

ma non è vero che $\forall\, x \in \ell^2\ \exists\, \alpha \in \ell^2$:

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k T_k h,$$ perché H non è suriettivo.

Es $h = (\dots, 0, \boxed{1}, -\frac{1}{2}, 0, \dots)$; $\boxed{1} = h_0$

$$y = Hx = x * h$$

$$y_n = x_n - \frac{1}{2} x_{n-1}$$ Espressione nel dominio del tempo del filtro

Il filtro è limitato? Sì
è continuo? Sì (*)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k}$$

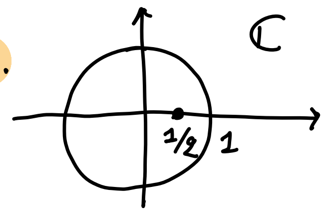
$$= h_0 e^{-j0\cdot\omega} + h_1 e^{-j\cdot 1\cdot\omega} = 1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega} \overset{(*)}{\neq} 0 \quad \forall \omega.$$

Infatti, posto $z = e^{j\omega}$

$H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1} = 0$ per $z = 1/2$, che non ha modulo 1.

non e' sulla circonferenza unitaria

Perciò H è invertibile.



$H^{-1} y = y * z$

dove $z_m = \int_0^{2\pi} e^{jmw} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}} \frac{dw}{2\pi}$

INVERSIONE DELLA DTFT

Caratterizzazione di basi di traslate

$(\Pi_k h)_m \stackrel{\text{def}}{=} h_{m-k}$

Sia $h \in \ell^2$. Quando $\{\Pi_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è

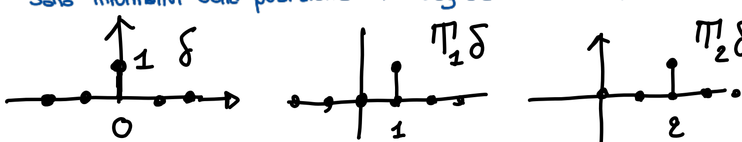
Successione prototipo

- una success. di Bessel di $\ell^2(\mathbb{Z})$? $\iff H(e^{jw}) \in L^\infty(-\pi, \pi)$
- una base ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$? $\iff |H(e^{jw})| = 1$
- una base di Riesz di $\ell^2(\mathbb{Z})$? $\iff c_1 \leq |H(e^{jw})| \leq c_2$

Consideriamo $x = \sum_k \alpha_k \varphi_k$ in ℓ^2 con $\varphi_k = \Pi_k h$ cioe' come traslate di k unita' della successione h

Sono informativi della posizione del segnale i.e. se $|\alpha_l| \gg 1$ allora la successione avrai un picco su l cioe' posso dire gli intervalli di tempo il segnale vive maggiormente

Es $h = \delta$



Ma vorremmo avere dai coefficienti anche informazioni del segnale in frequenza

$\{\Pi_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è la base standard di $\ell^2(\mathbb{Z})$.

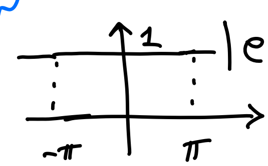
$x = (\dots, \boxed{x_0}, x_1, \dots)$ $\qquad x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \Pi_k \delta$

Ottima localizz. nel tempo

Nessuna localizz. in frequenza: $\Pi_k \delta \xrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{e^{-jwk}}_{\text{ha modulo 1}}$

$x \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m e^{-jwm}$

$\Pi_k \delta \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{(\Pi_k \delta)_m}_{\delta_{m-k}} e^{-jwm} = e^{-jwk}$



$|e^{-jwk}| = 1$

Questo ci dice che non e' una buona base perche' non riesco a dire nulla sul comportamento in frequenza del segnale $\Rightarrow$ non e' localizzato in frequenza

Quando $T_k h$ sono una successione di Bessel?

1° domanda

Teorema Sia $h \in \ell^2$. $\{T_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una success. di Bessel in $\ell^2(\mathbb{Z})$ sse

DFTT di h

$$H(e^{j\omega}) \in L^\infty(-\pi,\pi).$$

DTFT di h $H(e^{j\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-j\omega n}$ è una funzione periodica di periodo 2π

è una condizione più forte di L^2, $L^\infty(-\pi,\pi) \subset L^2(-\pi,\pi)$

Dimostrazione 5

Dim Per definizione, $\{T_k h\}$ è una success. di Bessel se $\exists C > 0$:

Def di successione di Bessel

$$\Big\| \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k T_k h}_{\alpha * h} \Big\|_{\ell^2} \leq C \|\alpha\|_{\ell^2} \quad \forall \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

con al più un numero finito di componenti non nulle

Ma $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k T_k h = \alpha * h$, quindi questa condizione

Def convoluzione di successione

equivale a dire che l'operatore $H\alpha = \alpha * h$ si estende ad un operatore limitato su ℓ^2. Questo accade, come abbiamo visto, sse $H(e^{j\omega}) \in L^\infty$.

Risposta in frequenza

∎

Perciò se $h \in \ell^2$ e $H(e^{j\omega}) \in L^\infty(-\pi,\pi)$, $\{T_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una succ. di Bessel e posso considerare il corrispondente

operatore di sintesi

$$\ell^2 \xrightarrow{H} \ell^2$$

$$\alpha \longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k T_k h$$

$$H\alpha = \alpha * h$$

è l'operatore di convoluzione

operatore di analisi

$$\ell^2 \xrightarrow{H^*} \ell^2$$

$$x \mapsto \{\langle x, T_k h \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$\sum_n x_n \overline{h_{n-k}}$

$$H^* x = x * h^*$$

dove $h^*_m \overset{def}{=} \overline{h_{-m}}$.

Anche questo è scrivibile con un operatore di convoluzione se usiamo h^*

Misura la somiglianza

Introduciamo la nozione di autocorrelazione (deterministica).

$\left(\sum_k x_k \overline{x_{m-k}} = (x * x)_m\right)$

Shift di n

Sia $x \in \ell^2$. $\quad a_m := \langle x, T_m x \rangle_{\ell^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \overline{x_{k-m}}$ $\quad (T_n x)_k \overset{def}{=} x_{k-n}$

Questa successione è l'autocorrelazione

$a = \{a_m\}$; $\quad a = x * x^*$ dove $x^*_m = \overline{x_{-m}}$

a è detta autocorrelazione di x.

Trasformata di Fourier di a

$$a \overset{DTFT}{\longmapsto} A(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\overline{X(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|^2$$

DTFT di x^*

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x^*_k e^{-j\omega k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_{-k}} e^{-j\omega k} \underset{(-k=m)}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{x_m} e^{j\omega m} = \overline{\sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m e^{-j\omega m}} = \overline{X(e^{j\omega})}$

è la DTFT di x^*

Proprietà $\quad \bullet \; a_{-m} = \overline{a_m}$ $\quad$ (a_m è reale se x è reale)

$\left(a_{-m} \overset{def}{=} \langle x, T_{-m} x \rangle \underset{(*)}{=} \langle T_m x, x \rangle = \overline{\langle x, T_m x \rangle} = \overline{a_m}\right)$

di convoluzione

$T^*_{-m} = T_m$ AGGIUNTO

verifica di (*): $\langle x, T_m y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \overline{y_{k-m}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k+m} \overline{y_k} = \langle T_{-m} x, y \rangle$)

$T_0 x = x$

$a_0 = \langle x, T_0 x \rangle = \|x\|^2$

$a_n = \langle x, T_n x \rangle$

$|a_n| \le \|x\| \|T_0 x\| = \|x\| \|x\| = \|x\|^2$

è l'energia del segnale

$\bullet \; |a_m| \le \|x\|^2_{\ell^2} = a_0$ (segue da Cauchy-Schwarz).

2° domanda

Teorema Sia $h \in \ell^2$. Allora $\{T_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $\ell^2(\mathbb{Z})$ sse $|H(e^{j\omega})| = 1$ per quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

DTFT di h

Ci interessa sapere quando la base è ortonormale = guardiamo i prodotti scalari

Dimostrazione 6

Dim $\langle T_k h, T_\ell h \rangle_{\ell^2} = \langle h, T_{-k} T_\ell h \rangle = \langle h, T_{\ell-k} h \rangle = a_{\ell-k}$

Le traslazioni accumulano il loro contenuto

Il prodotto scalare è rileggibile con l'autocorrelazione

dove a è l'autocorrelazione deterministica di h.

Perciò:

$\{T_k h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sist. ortonormale $\iff a_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ $\quad (a = \delta)$

$\Updownarrow$ DTFT $\quad$ Ho un solo coefficiente di a = 1 tutti gli altri 0

DTFT di δ: $\sum_k \delta_k e^{-j\omega k} = e^{-j\omega 0} = 1$

$|H(e^{j\omega})|^2 = A(e^{j\omega}) = 1 \iff |H(e^{j\omega})| = 1$ per quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

le traslate di H se sono un sistema ortonormale allora formano una base

Se $\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un sist. ortonorm., quindi $|H(e^{j\omega})|=1$, il filtro

$$Hx = x * h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k h$$

è invertibile, quindi suriettivo e $\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è perciò un sistema completo in $\ell^2(\mathbb{Z})$.

$\mathrm{span}\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e' un insieme denso

ossia $\forall y \in \ell^2 \; \exists x \in \ell^2 : y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T_k h$ ■

Es di successioni che generano basi ortonormali

Es $H(z) = z^{-\ell} = e^{-j\omega\ell}$ $\quad z = e^{j\omega}$, $\quad |H(z)|=1$ se $|z|=1$.

DTFT risposta in frequenza del filtro

$(\ell\in\mathbb{Z})$ risposta impulsiva del filtro (= operatore di convoluzione)

$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\ell}$

$$h = (\dots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{posto } \ell}}{1}, 0, \dots) = T_\ell \delta$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum h_k e^{-j\omega k}$$
$$H(z) = \sum h_k z^{-k}$$

Es $$H(z) = \frac{z-\alpha}{z^{-1}-\bar{\alpha}} \qquad \alpha\in\mathbb{C}, \; |\alpha|\neq 1.$$

→ il denominatore non si annulla mai

$h_m = \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega m} \frac{d\omega}{2\pi}$ $\quad (m\in\mathbb{Z})$

$h = (h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$

$\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ BASE ORTON. DI ℓ^2

$z = e^{j\omega}$

$$|H(z)| = \frac{|z-\alpha|}{|z^{-1}-\bar{\alpha}|} = 1 \quad \forall z, \; |z|=1.$$

perché se $|z|=1$ risulta $\bar{z} = z^{-1}$ $(z\cdot\bar{z} = |z|^2 = 1)$ e quindi

$$z^{-1} - \bar{\alpha} = \bar{z} - \bar{\alpha} = \overline{z-\alpha}.$$

OSS Se $\{T_k h\}$ sono una base ortonormale allora H non ha alcuna selettività in frequenza. → Come invece i filtri passa alto o i filtri passa alto

operatore $x \mapsto x * h$

3° risposta

Teorema Sia $h\in\ell^2$, $\{T_k h\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è una base di Riesz per $\ell^2(\mathbb{Z})$ sse

DTFT di h

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 : \quad C_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq C_2 \quad \text{per quasi ogni } \omega\in\mathbb{R}.$$

FACOLTATIVA

Dim Cenno: si usa il Teorema che caratterizza le basi di Riesz in termini della matrice di Gram G, che è l'operatore di convoluzione per a. ■

Es Sia

$$H(e^{j\omega}) = 2+\cos\omega \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Funzione periodica e continua $\Rightarrow$ Per Weierstrass e' limitata dall'alto, in più e' limitata dal basso e sempre $\neq 0$ $\Rightarrow$ e' una base di Riesz per il Teo precedente

Riconosco la serie

$$2+\cos\omega = 2 + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k}} = H(e^{j\omega})$$

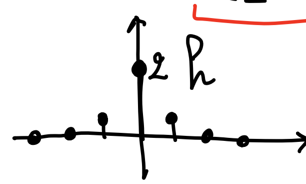
DTFT di

Da H a h possiamo applicare la IDTFT

$$h_n = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j n \omega} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$h = (\dots, 0, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{h_{-1}}, \underbrace{\boxed{2}}_{h_0}, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{h_1}, 0, \dots)$$

$$\left(0, \dots, 0, \tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}, 0, \dots\right)$$



$$h_k = \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi}$$

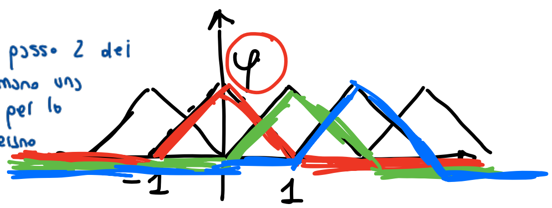
(DTFT inversa)

Applicazione alle basi di splines.

Verifichiamo che e' una base di Riesz per lo spazio che genera

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Le traslate con passo 2 dei profili tenda formano una base di Riesz per lo spazio che generano



$\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è una base di Riesz per $S = \overline{\operatorname{span}\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ con $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

$$T_k\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \varphi(t-k)$$

Verifichiamo se il corrispondente operatore di Gram $G: \ell^2 \to \ell^2$ è invertibile

Si rappresenta come una matrice infinita

Condizione del Teo in precedenza

$$G = (G_{\ell,k})$$

Parliamo ora di funzioni

$$T_k\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} \varphi(t-k)$$

$$G_{\ell,k} = \langle T_k\varphi, T_\ell\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \langle \varphi, T_{-k}T_\ell\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \langle \varphi, T_{\ell-k}\varphi \rangle =: a_{\ell-k}$$

(ossia def $a_k = \langle \varphi, T_k\varphi \rangle$).

Voglio sapere se questa matrice infinita è invertibile oppure no

Riconosco un prodotto di convoluzione

$$(Gx)_\ell = \sum_k G_{\ell,k}\, x_k = \sum_k a_{\ell-k}\, x_k \Rightarrow Gx = x * a$$

G è invertibile come operatore $\ell^2 \to \ell^2 \iff \exists\, C_1, C_2 > 0$:

DTFT di a

$$C_1 \le |A(e^{j\omega})| \le C_2$$

per quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

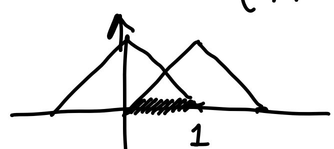
(A è la DTFT di a).

$$\int_{-1}^{1} (1-|t|)^2\, dt$$

$$a_0 = \langle \varphi, \varphi \rangle = 2/3$$

$$a_1 = \langle \varphi, T_1 \varphi \rangle = 1/6$$

$$a_{-1} = \langle \varphi, T_{-1} \varphi \rangle = 1/6$$



$a_n = 0$ per $|n| \geq 2$

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-j\omega k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} e^{-j\omega} + \frac{1}{6} e^{+j\omega}$$

Riscrivibile con la formula di Eulero

$$= \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\omega}_{} \neq 0 \quad \forall \omega. \text{ OK.}$$

$$\underset{C_1}{\frac{1}{3}} \le \left| \quad \right| \le \underset{C_2}{1} \quad \forall \omega \quad \text{OK}$$