

### Domanda 1

Consideriamo una variante sul modello di Hotelling, in cui:

- La “strada” ha lunghezza unitaria e coincide con l’intervallo  $[0,1]$ .
- Il produttore A si colloca in  $x=0$ , e il produttore B in  $x=1$ . Entrambi hanno un costo di produzione linearmente variabile pari a  $c=1$ .
- I consumatori sono uniformemente distribuiti sulla strada ed il costo di trasporto è quadratico ( $tx^2$  per chi compra da A,  $t(1-x)^2$  per chi compra da B). L’utilità del consumatore dipende dal prezzo e dal costo di trasporto.

Trovare le risposte ottimali per i due produttori e i prezzi di equilibrio.

Cosa accade se  $t=0$ ?

### Soluzione

Il consumatore indifferente tra i due produttori si trova in un punto  $\bar{x}$  tale che

$$p_A + t\bar{x}^2 = p_B + t(1 - \bar{x})^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{p_B + t - p_A}{2t}$$

Quindi la domanda per i due produttori è

$$d_A = \bar{x} = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{1}{2} \quad d_B = 1 - \bar{x} = \frac{p_A - p_B}{2t} + \frac{1}{2}$$

Il profitto per il produttore A è

$$\pi_A(p_A, p_B) = (p_A - c) \left( \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{1}{2} \right)$$

Massimizzando tale profitto otteniamo la risposta ottimale

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{1}{2} + \frac{-2p_A + p_B + c}{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2p_A = p_B + t + c \quad \Rightarrow \quad R_A(p_B) = \frac{p_B + t + c}{2}$$

Per simmetria abbiamo

$$p_A^* = p_B^* = t + c$$

Se  $t=0$  si torna al caso di Bertrand,  $p_A^* = p_B^* = c$ , con profitto nullo per entrambe le aziende.

### Domanda 2

Consideriamo un problema di assegnamento generalizzato con 5 job e 2 macchine, caratterizzato dai dati seguenti:

1. tempi di lavorazione dei job sulle macchine:

mac/job	1	2	3	4	5
1	5	7	10	3	4
2	6	9	8	2	5

2. Costi di lavorazione dei job sulle macchine:

mac/job	1	2	3	4	5
1	7	6	5	1	2
2	5	4	3	2	3

La capacità delle due macchine è pari a 15 e 16 unità di tempo, rispettivamente.

Dualizzare i vincoli capacità con moltiplicatori  $\mu_1 = 1$  e  $\mu_2 = 2$  e risolvere il problema rilassato.

Trovare un subgradiente della funzione duale per tali moltiplicatori.

### Soluzione

Il modello è

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^2 c_{im} x_{im} \\ & \sum_{i=1}^5 p_{im} x_{im} \leq R_m \quad \forall m \\ & \sum_{m=1}^2 x_{im} = 1 \quad \forall i \\ & x_{im} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

La Lagrangiana è

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^2 c_{im} x_{im} + \sum_{m=1}^2 \mu_m \left( \sum_{i=1}^5 p_{im} x_{im} - R_m \right)$$

Con la dualizzazione proposta, il problema rilassato si riduce a un assegnamento banale dei job alle macchine (rimane il vincolo di assegnamento), in cui si minimizza rispetto a variabili binarie la somma di una costante e di

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^2 (c_{im} + \mu_m p_{im}) x_{im}$$

In pratica si tratta di calcolare dei costi modificati:

mac/job	1	2	3	4	5
1	12	13	15	4	6
2	17	22	19	6	13

per cui tutti job vengono assegnati alla macchina 1.

I vincoli di capacità assumono i valori

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 5 + 7 + 10 + 3 + 4 - 15 = 14 \\ \gamma_2 &= 0 - 16 = -16 \end{aligned}$$

Il vettore di componenti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  è un subgradiente della funzione duale (come ragionevole, si deve aumentare il prezzo per la macchina troppo carica e ridurre l'altro).

### Domanda 3

Descrivere per sommi capi l'applicazione della programmazione dinamica approssimata, con regressione lineare, al pricing di opzioni con esercizio anticipato.

Cosa differenzia questo caso da quello più generale?