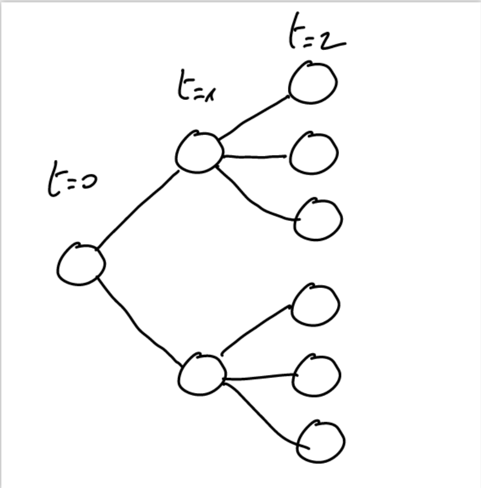
ESAME BA 25/01/2024 **CLOSED BOOK – 90min**
SOLVED

Domanda 1



Un'azienda deve pianificare la produzione di un insieme di prodotti, con vincoli di capacità produttiva e incertezza sulla domanda (su due periodi di tempo: si ricevono ordini da parte dei clienti sui due periodi di tempo, e poi si spedisce la merce alla fine del secondo, dopo avere effettuato due lotti di produzione). Per ogni prodotto abbiamo il costo unitario di produzione ed il prezzo di vendita; inoltre, abbiamo il numero di ore di lavorazione (in termini di manodopera) necessarie per ogni pezzo. Se lo si ritiene utile, è possibile acquisire ore di manodopera da un terzista, tramite la sottoscrizione di una capacity option (che va stipulata in anticipo rispetto alla produzione effettiva): nel contratto si stabiliscono un costo fisso, da pagare in anticipo, per potere usufruire di un dato numero di ore di manodopera nel periodo successivo, ed il costo unitario di produzione (in pratica, c'è un fisso da pagare subito, e un variabile che si paga a consuntivo, dato il volume effettivo di produzione esterna programmata nel periodo successivo). L'incertezza della domanda è rappresentata da un albero di scenari (non necessariamente vi è indipendenza nel tempo).

- Al tempo t=0 si sceglie se acquisire o meno una capacity option per il periodo t=1.
- Al tempo t=1 si osserva il primo periodo di domanda (early orders), e si decide quanto produrre di ciascun prodotto (è possibile produrre anche più della domanda osservata, per costituire scorte; trascuriamo i costi di giacenza in magazzino; ci sono due lotti di produzione e si spedisce la merce alla fine del secondo periodo). Se si è acquisita la capacity option per il periodo 1, si può anche produrre esternamente, con vincolo di capacità esterna (ore disponibili di manodopera esterna) e costo variabile di produzione esterna. Inoltre, al tempo 1 si decide se acquisire la capacity option per il periodo 2.
- Al tempo t=2 si osserva un secondo insieme di ordini e si ripete il meccanismo. Alla fine, si spediscono la quantità richieste, nei limiti di disponibilità di pezzo prodotti, incassando il ricavo relativo.

Costruire un modello di programmazione lineare stocastica per la massimizzazione del profitto atteso.

Soluzione
Possiamo indicare con n_0 il nodo radice, con $n_1 \in N_1$ i nodi al tempo 1, e con $n_2 \in N_2$ i nodi al tempo 2 (foglie). Indichiamo anche con $a(n_2) \in N_1$ il nodo antecedente di una foglia.

Variabili decisionali:
- $x_i^{n_1}, z_i^{n_1}$, rispettivamente, le quantità prodotte internamente ed esternamente del prodotto i nel nodo $n_1 \in N_1$ (non-negative, eventualmente intere).

- $x_i^{n_2}, z_i^{n_2}$, rispettivamente, le quantità prodotte internamente ed esternamente del prodotto i nel nodo $n_2 \in N_2$ (non-negative, eventualmente intere).
- $\delta^{n_0}, \delta^{n_1}$, rispettivamente, la decisione di acquistare l'opzione nella radice o nel nodo $n_1 \in N_1$ (binarie).
- $y_i^{n_2}$quantità venduta per ogni prodotto in un nodo foglia.

Vincoli di capacità interna ed esterna al tempo 1:

$$\sum_i r_i x_i^{n_1} \leq R \qquad n_1 \in N_1$$
$$\sum_i r_i z_i^{n_1} \leq E\delta^{n_0} \quad n_1 \in N_1$$

(r_i consumo capacità per ogni prodotto, R capacità interna, E capacità esterna se acquisto opzione).

Vincoli di capacità interna ed esterna al tempo 2:

$$\sum_i r_i x_i^{n_2} \leq R \qquad n_2 \in N_2$$
$$\sum_i r_i z_i^{n_2} \leq E\delta^{a(n_2)} \quad n_2 \in N_2$$

Vincoli su vendite (d_i^n totali ordini per prodotto in un nodo a tempo 1 o 2):

$$y_i^{n_2} \leq d_i^{a(n_2)} + d_i^{n_2} \qquad n_2 \in N_2$$
$$y_i^{n_2} \leq x_i^{a(n_2)} + x_i^{n_2} + z_i^{a(n_2)} + z_i^{n_2} \qquad n_2 \in N_2$$

Massimizzazione profitto atteso

$$\max \sum_{n_2 \in N_2} \pi^{n_2} \left(\sum_i p_i y_i^{n_2} \right) - C\delta^{n_0} - C \sum_{n_1 \in N_1} \pi^{n_1} \delta^{n_1} - \sum_{n_1 \in N_1} \pi^{n_1} \left(\sum_i \left(c_i x_i^{n_1} + e_i z_i^{n_1} \right) \right)$$
$$- \sum_{n_2 \in N_2} \pi^{n_2} \left(\sum_i \left(c_i x_i^{n_2} + e_i z_i^{n_2} \right) \right)$$

(C costo opzione, π^n probabilità di un nodo, p_i prezzo vendita, c_i costo produzione interna, e_i costo produzione esterna)

Domanda 2

- Spiegare, con riferimento al caso facile di una funzione di una singola variabile, non convessa, continua nel senso di Lipschitz, come si può sfruttare la conoscenza della costante di Lipchitz per costruire una funzione minorante da utilizzare in un algoritmo di ottimizzazione globale.
- Come si può estendere l'idea al caso di una funzione di più variabili? (È sufficiente un'idea di principio, senza troppi dettagli formali.)

Domanda 3

- Consideriamo il problema di consumption-saving visto a lezione (due asset, uno rischioso l'altro privo di rischio, incertezza sul reddito da lavoro). Definire le variabili di stato e formalizzare l'equazione ricorsiva della programmazione dinamica.
- Come si può stendere l'idea al caso in cui si vuole considerare un meccanismo di *habit formation*? In questo caso, quando l'agente consuma una certa quantità in un periodo, non gradisce una riduzione del consumo nel periodo successivo, che va opportunamente penalizzata.

La cosa fondamentale, per il secondo punto, è che non basta introdurre nella funzione obiettivo complessiva un termine di penalizzazione per un termine del tipo $q\max\{0, C_{t-1} - C_t\}$. Il consumo al periodo precedente deve entrare nelle variabili di stato, per potere applicare la programmazione dinamica.