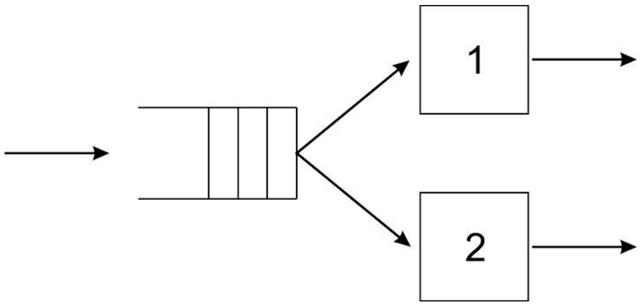
ESAME BA 11/07/2025 **CLOSED BOOK – 90min**

Domanda 1



La figura schematizza un sistema di produzione con due macchine (identiche) in parallelo. I pezzi arrivano al sistema secondo un processo di Poisson con rate dato, e la coda è gestita FIFO. Quando una macchina completa un pezzo, le viene assegnato il primo pezzo in coda (se la coda non è vuota). I tempi di lavorazione sulle due macchine seguono due distribuzioni uniformi, con limiti noti.
Le macchine sono soggette a un deterioramento delle prestazioni, per cui dopo avere superato una data soglia in termini di tempo di lavorazione accumulato, devono essere soggette a una operazione di manutenzione preventiva. Questo implica che la macchina non è disponibile per una durata che assumiamo deterministica. Al termine della manutenzione, la macchina è come nuova e può riprendere a lavorare. Supponiamo di iniziare la simulazione con macchine "nuove" (contachilometri a zero).
Scrivere un simulatore MATLAB (o Python) che permetta di valutare il tempo medio di attesa in coda.

Soluzione

Può essere utile definire dei codici per descrivere lo stato delle macchine (idle = 0; busy = 1; maintenance = 2).
Lo stato delle macchine viene rappresentato con un array (2 posizioni).
Vedere pseudocodice allegato.

Domanda 2
Spiegare in maniera sintetica, ma chiara, il funzionamento dell'algoritmo di decomposizione progressive hedging per la programmazione stocastica multistadio. Abbiamo la garanzia di convergenza alla soluzione ottima? Per quali classi di problemi tale strategia sembra maggiormente indicata?

Soluzione
La teoria di base sta sulle slide (NB: qualcuno confonde questo algoritmo con quello L-shaped).
Punti importanti che andavano sottolineati:

- La convergenza, in teoria, è assicurata nel caso convesso (per essere precisi, deve valere Slater per assicurare dualità forte). Per esempio, non si applica al caso intero.
- In pratica, la convergenza può essere lenta, e la si può velocizzare utilizzando una lagrangiana aumentata. Questo introduce un termine quadratico (si perde linearità nel caso LP), e richiede di utilizzare il valore atteso delle azioni dal passo precedente per non perdere la decomposizione per scenari.
- Di regola il metodo non è competitivo nel caso LP continuo, ma può essere applicato come euristica nel caso misto-intero (per esempio, dopo avere raggiunto convergenza su variabili binarie, si risolve rispetto al continuo). Può anche essere utile nel caso non lineare.

Domanda 3

Consideriamo una estensione del classico problema newsvendor in cui sono presenti diversi prodotti, la cui domanda (su una singola finestra temporale di vendita) è modellata mediante scenari. Per ogni prodotto abbiamo il costo di produzione e il ricavo (prezzo di vendita) nella normale finestra di vendita. Passata la finestra di vendita, i pezzi rimanenti devono essere venduti ad un prezzo scontato.

Nel caso di eventuali rimanenze, non è detto che si riesca a vendere tutto allo stesso prezzo scontato, specialmente se i pezzi residui sono numerosi. Supponiamo che per ogni prodotto siano definite della quantità di soglia, al di sotto della quale si svende a un certo prezzo scontato. Se ci sono pezzi in eccesso rispetto a tale soglia, per questi si deve praticare uno sconto superiore (per esempio, se la soglia è 5 pezzi e rimangono 8 invenduti, 5 li possiamo vendere col 30% di sconto, ma 3 li dobbiamo vendere al 50% di sconto).

I pezzi non sono acquistati, ma prodotti con un vincolo di capacità legato alla manodopera disponibile, espressa come totale di ore lavoro a disposizione. Inoltre, c'è un limite allo spazio disponibile per immagazzinare i pezzi prima della finestra di vendita. Per ogni tipo di prodotto abbiamo lo spazio occupato in magazzino, il tempo di lavorazione per ogni pezzo, e il tempo necessario per avviare la produzione (si tratta di un tempo per istruire la manodopera, e funziona come un tempo di setup).

Scrivere un modello di programmazione lineare stocastica per la massimizzazione del profitto atteso.

Soluzione

Indichiamo con x_i la quantità prodotta di i al costo unitario c_i, e cony_i^s, z_i^s, w_i^s, le quantità vendute, rispettivamente, a prezzo pieno p_i, prezzo scontato p_i^1 (prime rimanenze), e prezzo ulteriormente scontato p_i^2 (ulteriori rimanenze). Ovviamente vale $p_i > p_i^1 > p_i^2$ (tale condizione garantisce l'attivazione corretta delle variabili decisionali). Le variabili decisionali prima indicate sono non negative (e magari intere). Indichiamo con d_i^s la domanda in ogni scenario e con ϑ_i la soglia sui saldi per ogni prodotto; questi dati limitano, rispettivamente, y_i^s e z_i^s.

Indichiamo con v_i il volume, t_i il tempo unitario di lavorazione e A_i il tempo di avviamento produzione per prodotto. Il tempo e lo spazio totale a disposizione sono T e V.

Ci occorre anche una variabile binaria δ_i legata all'avviamento produzione (legata con grande M a x_i; la grande M può essere quantificata usando i vincoli di capacità o la domanda).

Abbiamo vincoli di capacità su spazio e tempo:

$$\sum_i v_i x_i \leq V$$

$$\sum_i (t_i x_i + A_i \delta_i) \leq T$$

$$x_i \leq M\delta_i \qquad \forall i$$

Quanto prodotto viene venduto a uno dei tre prezzi, quindi:

$$x_i = y_i^s + z_i^s + w_i^s \qquad \forall i, s$$

e

$$y_i^s \leq d_i^s; \qquad z_i^s \leq \vartheta_i \quad \forall i, s$$

La massimizzazione del profitto atteso è espressa come

$$\max\left\{-\sum_i c_i x_i + \sum_s \pi^s \sum_i \left(p_i y_i^s + p_i^1 z_i^s + p_i^2 w_i^s\right)\right\}$$

dove π^s è la probabilità dello scenario.

NB: Si tratta di un modello molto semplice, e il punto fondamentale è che si chiedeva un modello lineare. Quindi non sono ammissibili cose come min(a,b) o max(a,b) nella funzione obiettivo. Questi termini vanno espressi in modo lineare.