ESAME BA 28/06/2023

Domanda 1

Consideriamo un problema di pricing ottimale per due prodotti (che sono in alternativa: un singolo consumatore compra solo uno dei due). Abbiamo una funzione di domanda congiunta che restituisce una previsione di domanda per entrambi i prodotti, dato il prezzo praticato per entrambi $[d_1; d_2] = f(p_1, p_2) + [\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ (i due termini di errore hanno una distribuzione di probabilità nota). Per ragioni commerciali, si considera un insieme discreto e finito di prezzi (per esempio, sono dati 3 valori possibili di prezzo per il prodotto 1, e 4 per il prodotto 2).

I prodotti sono realizzati internamente all'azienda, e la loro produzione richiede un certo ammontare di un set di risorse (macchine, energia, materie prime, etc.) disponibili in quantità limitata. Per ogni prodotto abbiamo il fabbisogno unitario di ciascuna risorsa. Supponiamo di avere un solo periodo di vendita, alla fine del quale eventuali giacenze invendute vengono svendute a prezzo di realizzo. L'obiettivo è massimizzare il profitto/ricavo (trascuriamo per semplicità i costi di produzione, quindi le due cose coincidono); non è necessario soddisfare tutta la domanda.

a) Costruire un modello deterministico di programmazione lineare (intera) per la scelta ottimale dei prezzi, assumendo di trascurare l'incertezza.
b) Proporre un'estensione stocastica nel caso in cui si voglia rappresentare l'incertezza mediante scenari (chiarire le eventuali assunzioni semplificative che fate nella costruzione del modello).

Soluzione

Per tenere conto delle interazioni tra i due prezzi, formiamo le $N_1 N_2$ coppie di prezzi, dove N_i è il numero di prezzi per il prodotto $i = 1,2$. Introduciamo anche variabili binarie δ_k, $k = 1, \dots, N_1 N_2$, che selezionano una coppia e sono associate a prezzi p_{ik} e domande d_{ik}. Introduciamo anche variabili intere non negative x_{ik} che indicano quanto produco e vendo (non abbiamo incertezza, quindi niente viene svenduto) al prezzo della coppia k.

Il modello MILP deterministico è:

$$\max \sum_k (p_{1k} x_{1k} + p_{2k} x_{2k})$$

$$\sum_k \delta_k = 1$$

$$x_{ik} \le d_{ik} \delta_k \qquad \forall i, k$$

$$\sum_k (r_{1m} x_{1k} + r_{2m} x_{2k}) \le R_m \qquad \forall m$$

oltre ai vincoli di dominio sulle variabili.

Errori comuni: non vedere le interazioni tra i prezzi, costruire un modello non lineare, identificare domanda e venduto. Nel business case RBC SCM abbiamo visto come la discretizzazione può semplificare un modello altrimenti complicato.

Nel caso stocastico, si pone il problema dell'incertezza che potrebbe dipendere dalle decisioni. Se assumiamo (vedi caso CBC) che l'incertezza sia esogena, per cui nel modello statistico di domanda i termini di errore sono indipendenti dalle decisioni di prezzo, la questione non si pone. Introduciamo:

- scenari indicizzati da s con probabilità π^s
- realizzazioni ε_i^s
- variabili decisionali intere non negative di vendita z_{ik}^s
- le variabili di produzione possono essere semplificate in x_i

Le variabili di produzione rimangono al primo stadio, altrimenti non ha senso parlare di svendita.
Nel modello, il vincolo di capacità e quello di selezione della coppia di prezzi non cambiano.
Introduciamo i vincoli:

$$z_{ik}^s \le x_i \qquad \forall i,k,s$$
$$z_{ik}^s \le (d_{ik} + \varepsilon_i^s)\delta_k \qquad \forall i,k,s$$
La funzione obiettivo è
$$\max \sum_k \sum_s \pi^s [p_{1k} z_{1k}^s + p_{2k} z_{2k}^s + p_1^O (x_1 - z_{1k}^s) + p_2^O (x_2 - z_{2k}^s)]$$
Dove p_i^O è il prezzo di svendita dell'overstock.

Domanda 2
Consideriamo un'azienda A che opera da monopolista in un contesto simile alla strada lineare di Hotelling (da 0 a L, con consumatori uniformemente distribuiti; A si trova in posizione $x = a$). Esiste un'autorità di regolamentazione del mercato che fissa un tetto massimo sul prezzo. Questo pone un limite sul prezzo che il monopolista A può praticare. Il monopolista vuole massimizzare il profitto, e supponiamo di trascurare il costo marginale di produzione.

Un potenziale concorrente B sta valutando se entrare sul mercato, cosa che comporta il pagamento di un costo fisso F (che A ha già sostenuto in precedenza), per la creazione dell'impianto (anche in questo caso, trascuriamo i costi marginali di produzione). La posizione di B, se entrare nel mercato risulta profittevole, è $x = L - b$.

Se l'azienda A vuole attuare una strategia di deterrenza, tale da impedire a B l'ingresso sul mercato, che prezzo dovrebbe scegliere?

NB: il problema potrebbe essere posto in un contesto multiperiodale, ma supponiamo per semplicità di considerare solo un periodo.

Soluzione
L'azienda A (incombente) sceglie il prezzo p_A conoscendo la best response function dell'azienda B (entrante), che risolve il problema

$$\max_{p_B} p_B \left(\frac{p_A - p_B}{2\tau} + \frac{L + b - a}{2} \right) - K = \frac{1}{2\tau} [p_B (p_A - p_B + \tau\beta) - 2K\tau]$$

dove $\beta = L + b - a$ e K e il costo fisso. L'azienda B entra se il profitto è positivo. Il prezzo limite p_A che rende nullo il profitto dell'entrante è tale che $p_B^* (p_A - p_B^* + \tau\beta) = 2K\tau$.
Il prezzo ottimo per B si trova imponendo la condizione di stazionarietà,
$$p_B^* = \frac{1}{2}(p_A + \tau\beta)$$
Sostituendo nell'equazione che fornisce il prezzo limite, troviamo
$$\frac{1}{2}(p_A + \tau\beta)\left(p_A - \frac{1}{2}(p_A + \tau\beta) + \tau\beta\right) = 2K\tau$$
$$\frac{1}{4}(p_A + \tau\beta)^2 = 2K\tau$$
$$p_A = -\tau\beta + \sqrt{8K\tau}$$
Ovviamente non ci interessa la radice negativa. Peraltro, questo prezzo limite è positivo se il costo fisso è sufficientemente grande da costituire una barriera all'ingresso. Eventuali patologie si potrebbero controllare sulla base di valori numerici. Inoltre, si possono verificare a posteriori le condizioni sul prezzo massimo (il cui ruolo è semplicemente dare senso al problema senza introdurre un modello di scelta più complesso: altrimenti, cosa impediva al monopolista di praticare un prezzo infinito?).

Domanda 3
Spiegare le differenze tra l'approccio Q-learning e l'approccio SARSA.
Soluzione
Vedere slide di teoria. Qualcuno scrive formule assurde in cui entrano valori attesi e probabilità (ma allora non è reinforcement learning).