ESAME BA 15/09/2023 CLOSED BOOK – 90min

Domanda 1

Si vuole pianificare la ristrutturazione di una rete logistica in condizioni di incertezza sulla domanda e sui costi di trasporto (a causa delle fluttuazioni del prezzo del petrolio). Il problema si pone su tre stadi e l'incertezza viene rappresentata mediante un albero di scenari.

La rete consiste di due tipi di nodi: sorgenti (stabilimenti di produzione) e destinazioni (centri di distribuzione associati ai vari mercati). In ogni nodo dell'albero occorre decidere quanto produrre di ogni prodotto nei diversi nodi sorgente e quanto trasportare da essi ai nodi destinazione.
Non si considerano magazzini, ma si hanno vincoli di capacità sui nodi di produzione, legati a una singola risorsa (per ogni prodotto conosciamo il costo di produzione, che dipende dallo stabilimento a causa dei diversi costi di manodopera, il consumo della risorsa).

La domanda per ogni prodotto ed il costo unitario di trasporto (per ogni prodotto, e per ogni coppia sorgente-destinazione) sono noti al tempo $t = 0$ (primo stadio), ma sono incerti per i due stadi successivi ($t = 1$ e $t = 2$). È anche data una penalità (dipendente dal prodotto e dal mercato) per la domanda non soddisfatta.

È possibile (nei primi due stadi) adattare la rete logistica aprendo nuovi nodi sorgente, chiudendone altri, o espandendo la capacità produttiva. Per ognuna di queste opzioni sono dati i costi (di apertura ed espansione) e i risparmi (per la chiusura). Nel caso di espansione, possono essere presenti diversi livelli di espansione, con i relativi costi e livelli aggiuntivi di capacità (per esempio, +20% o +40%), in alternativa tra di loro.

Costruire un modello di programmazione stocastica lineare mista-intera per la minimizzazione del costo atteso.

Soluzione

Introduciamo gli insiemi:

- S e D dei nodi sorgente (inclusi quelli potenziali) e destinazione, rispettivamente, della rete logistica. Usiamo il pedice *i* per le sorgenti e *j* per le destinazioni.
- Relativamente all'albero di scenari, indichiamo con 0 il nodo radice (al tempo 0), e con N_1 e N_2 i set di nodi al tempo 1 e 2 rispettivamente. Usiamo la notazione $a(n)$ per indicare l'antecedente del nodo *n*.
- Con il pedice *k* ci riferiamo ai prodotti e con il pedice *h* alle opzioni di capacità.

Questo modello può essere formulato in modi diversi (più o meno semplici). Un set di assunzioni sensato e non complicato da trattare è il seguente:

- Abbiamo un sottoinsieme *A* di nodi sorgente che sono attualmente attivi. Per questi possiamo prendere decisioni di chiusura o espansione al tempo 0, che hanno effetto al tempo 1, oppure decisioni simili al tempo 1, che hanno effetto al tempo 2. Le diverse opzioni di espansione sono in mutua esclusione (supponiamo anche che se si espande, lo si fa una volta sola durante l'orizzonte). Ovviamente, non si può espandere un nodo sorgente chiuso (e chiudere un nodo appena espanso).
- Per gli altri nodi sorgente possiamo aprire al tempo 0 oppure 1, con effetto al tempo 1 oppure 2, rispettivamente. Questi nodi possono essere espansi solo al tempo 1, se aperti al tempo 0.

Si potrebbe anche costruire un modello più complicato, in cui la capacità è una variabile di stato, e le decisioni hanno vincoli logici.

Come variabili decisionali, indichiamo con $y_{ijk}^n \geq 0$ quanto viene prodotto di *k* nella sorgente *i* e trasportato verso la destinazione *j* nel nodo *n*. Queste variabili si adattano alla domanda, mentre per quello che riguarda le variazioni di capacità, occorre introdurre un ritardo tra la decisione e il suo effetto (non possiamo osservare la domanda e cambiare la capacità). Possiamo introdurre una variabile binaria γ_i^n legata alla chiusura della sorgente *i* (tale variabile è bloccata a 0 per stabilimenti che non si vogliono chiudere, o che non sono ancora aperti). In modo simile introduciamo variabili δ_{ih}^n per espansione a livello di capacità *h* e σ_i^n per l'apertura.

Il vincolo di capacità nella radice dell'albero è (per le sole sorgenti già attive):

$$\sum_k r_k \left(\sum_j y_{ijk}^0 \right) \leq C_i \qquad \forall i \in A$$

dove r_k e C_i sono il fabbisogno del prodotto *k* e la capacità corrente in *i*. Per le altre sorgenti possiamo porre la capacità corrente a 0, cosa che pone a zero le variabili di spedizione, oppure bloccare queste a zero direttamente.

Nei nodi successivi dell'albero abbiamo, per i nodi attivi:

$$\sum_k r_k \left(\sum_j y_{ijk}^n \right) \leq C_i \left(1 - \gamma_i^{a(n)} \right) + \sum_h E_{ih} \delta_{ih}^{a(n)} \qquad \forall i \in A, n \in N_1 \cup N_2$$

Ovviamente, o si espande o si chiude (una volta sola lungo l'orizzonte di tempo):

$$\sum_{n \in N_1 \cup \{0\}} \left(\gamma_i^n + \sum_h \delta_{ih}^n \right) \leq 1 \qquad \forall i \in A$$

Invece per i nodi non ancora attivi possiamo eventualmente decidere di espandere al tempo 0, quindi avremo al tempo 1:

$$\sum_k r_k \left(\sum_j y_{ijk}^n \right) \leq C_i \sigma_i^0 \qquad \forall i \notin A, n \in N_1$$

Al tempo 2 avremo:

$$\sum_k r_k \left(\sum_j y_{ijk}^n \right) \leq C_i \left(\sigma_i^0 + \sigma_i^{a(n)} \right) + \sum_h E_{ih} \gamma_{ih}^{a(n)} \qquad \forall i \notin A, n \in N_2$$

Le opzioni di espansione sono in mutua esclusione, e comunque possiamo decidere di espandere al tempo 1 solo se abbiamo aperto al tempo 0:

$$\sum_h \gamma_{ih}^n \leq \sigma_i^0 \qquad \forall i \notin A, n \in N_1$$

Possiamo aprire una volta sola:

$$\sigma_i^0 + \sigma_i^n \leq 1 \quad \forall i \notin A, n \in N_1$$

Dobbiamo soddisfare la domanda d_{jk}^n, per le destinazioni e i prodotti in ogni nodo, a meno di pagare la penalità:

$$\sum_i y_{ijk}^n = d_{jk}^n - z_{jk}^n \qquad \forall k, j, n$$

dove $z_{jk}^n \geq 0$ è la domanda non soddisfatta

La funzione obiettivo è:

$$\min \sum_{n} \pi^{n} \left(\sum_{i,j,k} c_{ijk}^{n} y_{ijk}^{n} \right) + \sum_{n} \pi^{n} \left(\sum_{j,k} q_{jk} z_{jk}^{n} \right) + \sum_{i \in A} \left[\sum_{n \in N_1 \cup \{0\}} \pi^{n} \left(-s_i \gamma_i^{n} + \sum_{h} e_{ih} \delta_{ih}^{n} \right) \right] + \sum_{i \notin A} \left[f_i \sigma_i^{0} + \sum_{n \in N_1} \pi^{n} \left(f_i \sigma_i^{n} + \sum_{h} e_{ih} \delta_{ih}^{n} \right) \right]$$

dove π^n è la probabilità di ogni nodo (1 per la radice). I costi e risparmi sono autoesplicativi.

Domanda 2 (DA NON CONSIDERARE – PROGRAMMA VECCHIO!!!!!!)

Consideriamo il problema di regressione lineare multipla

$$\min_{x} \|Ax - b\|_2$$

in condizioni di incertezza non stocastica sulla matrice dei dati A (per semplicità, escludiamo l'incertezza sul vettore b). Supponiamo che l'uncertainty set sia descritto facendo ricorso alla norma spettrale: la matrice è quindi soggetta a una perturbazione limitata dalla condizione $\|\Delta\|_2 \leq \rho$.

Formulare il problema robusto worst-case e dimostrare che esso è equivalente a un problema di regressione regolarizzata.

Domanda 3

Consideriamo il modello di scelta MNL (multinomial logistic).

- Giustificare formalmente il modello. NB: si chiede un'impostazione matematicamente precisa del ragionamento che porta al modello, ma non è necessario svolgere tutti i calcoli in dettaglio.
- Cosa si intende per IIA (Independence of Irrelevant Alternatives) nel modello MNL? Come si lega alla struttura del modello?