ESAME BA 09/09/2022

Domanda 1
Consideriamo il problema di allocazione di budget nel continuo:

$$\max \sqrt{x_1} + \log(x_2) + \log(2x_3)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Risolverlo mediante programmazione dinamica.
NB: Se volete, potete verificare il risultato risolvendo il problema in altro modo, ma va risolto applicando la programmazione dinamica, ricavando le funzioni valore.
Soluzione
Dato lo stato s (budget residuo) abbiamo

$$V_3(s) = \log(2s)$$

Allo stadio precedente

$$V_2(s) = \max_{x\in[0,10]} \log(x) + V_3(s-x) = \max_{x\in[0,10]} \log(x) + \log(s-x) + \log(2)$$

Assumendo un ottimo interno (condizione verificata a posteriori), imponiamo la condizione di stazionarietà

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{s-x} \quad \Rightarrow \quad x = s - x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad V_2(s) = 2\log\left(\frac{s}{2}\right) + \log(2)$$

Quindi al primo stadio

$$V_1(10) = \max_{x\in[0,10]} \sqrt{x} + 2\log\left(\frac{10-x}{2}\right) + \log(2)$$

Assumendo ancora un ottimo interno, la condizione di stazionarietà è

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{10-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - x = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 36x + 100 = 0$$

le cui radici sono 32.9666 (oltre il budget 10) e 3.0334 (ottimo interno). Quindi avremo

$$x_1^* = 3.0334, \ \ x_2^* = x_3^* = 3.4833$$

Come verifica, volendo, possiamo osservare che il fattore 2 in $\log(2x_3)$ è ininfluente, e quindi per i due ultimi stadi l'allocazione deve essere uniforme. Usando i moltiplicatori di Lagrange, oppure un ragionamento al margine di tipo economico, si vede che all'ottimo dobbiamo avere che le derivate di $\sqrt{x_1}$ e $2\log(z)$, dove $z = (10 - x_1)/2$ è l'allocazione a ciascuna delle attività 2 e 3, devono essere uguali (infatti è la condizione che definisce V_1).

Domanda 2
Illustrare la funzione di domanda logit (consideriamo il caso semplice in cui essa è solo funzione del prezzo).
Ricavare la corrispondente funzione che descrive la willingness-to-pay.
Soluzione
Vedere slide 38-40, parte di pricing.

Domanda 3
Consideriamo il problema di ottimizzazione globale in una sola variabile, $\min f(x)$ dove la funzione f è continua nel senso di Lipschitz e x deve appartenere all'intervallo $[a, b]$. Supponendo di avere valutato la funzione negli estremi dell'intervallo e di avere una stima della costante di Lipschitz, trovare un lower bound per il valore della funzione sull'intervallo.
Soluzione
Vedere slide 48, parte di ottimizzazione globale.