CAP 1
INTRODUZIONE ALLE DECISIONI IN CONDIZIONE DI INCERTEZZA

Le **decisioni** sotto ***incertezza***, rendono insufficiente la previsione puntuale e richiedendo *modelli*.

Obiettivi

- distinguere **ottimizzazione robusta** e **stocastica**
- introdurre i principali **modelli decisionali**
- rappres *decisioni adattive* con **alberi decisionali**
- chiarire **multistadio** vs **multiperiodo**
- valutare **scenari**, **stabilità** *in-sample* e *out-of-sample*

COSTO INCERTEZZA–MODELLI DECISIONALI

Una **prev puntuale** *non è sufficien*: conta il *costo dell'errore* e il *criterio decisionale*.

Costo dell'errore di previsione. Il criterio di prev dipende dalla *f di perdita*.

- **errore quadratico medio (MSE)**: penalità simmetrica, previsione ottima pari al **valore atteso** $MSE(x) \doteq \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2x\,\mathbb{E}[X] + x^2$
- **deviazione assoluta**: penalità lineare, previsione ottima pari alla **mediana** o a un **quantile** $\mathbb{E}\left[|X-x|\right]$

Ottimizzazione sotto incertezza. L'obb non è prevedere, ma scegliere decisioni ottimali in presenza di fattori aleatori.

- **worst-case robust**: ottimizzazione sullo *scenario peggiore*, senza distribuzioni di probabilità $\min_{x\in S} \max_{\xi\in U} f(x,\xi)$
- **stocastica**: *minimizzazione del valore atteso*, con modellazione probabilistica esplicita $\min_{x\in S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x,\tilde{\xi})]$

ALBERI DECISIONALI

Rappresentazione temporale. Gli *alberi decisionali* descrivono in modo esplicito la ***sequenza di decisioni e realizzazioni aleatorie***, con *decisioni adattive* nel *tempo*.

Struttura dei nodi.

- ***nodi decisionali***: scelte tra *alternative esclusive*
- **nodi casuali**: esiti aleatori con *probabilità associate*

Procedura di soluzione. La valutazione avviene per *backward induction*: *un nodo è valutabile dopo i successori*.

EVPI & VSS

Valori ottimi. Descrivono diversi livelli di *informazione* e di *modellazione dell'incertezza*.

$$Q(x,\xi) = \min_y q(\xi)^T y \quad \text{s.t. } Wy = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0.$$

- **f***: ottimo stocastico *here-and-now*
- **fpi***: ottimo con info perfetta *wait-and-see*
- **fev***: ottimo deterministico a *valori medi*
- **feev**: costo atteso della soluzione EV

Misure del valore dell'info. Quantificano il *beneficio di modellare o osservare l'incertezza*.

- **EVPI**: beneficio *teorico della chiaroveggenza*
- **VSS**: *guadagno della soluzione stocastica*

$$f^* = \min_{x\in S} \mathbb{E}_P\left[f(x,\tilde{\xi})\right] \quad f_{EEV} = \mathbb{E}_P\left[f(\bar{x},\tilde{\xi})\right]$$

$$f^*_{PI} = \mathbb{E}_P\left[\min_{x\in S} f(x,\tilde{\xi})\right] \quad f^*_{EV} = \min_{x\in S} f\left(x, \mathbb{E}_P[\tilde{\xi}]\right)$$

$$VSS = f_{EEV} - f^* \quad EVPI = f^* - f^*_{PI}.$$

MODELLI A DUE STADI

Idea. Le decisioni sono separate in here-and-now e wait-and-see, adattandosi tramite il ricorso. $\mathbf{Q}(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Q(x,\tilde{\xi})\right]$

Fattibilità. Il *1 stadio* è *ammissibile solo se il 2 è fattibile per ogni scenario* (complete relatively complete recourse).

$$\min_x c^T x + \mathbf{Q}(x) \quad \text{s.t. } Ax = b,\ x \geq 0,$$

$$\min c^T x + \sum_{s\in S} \pi_s (q^s)^T y^s \quad \text{s.t. } Ax = b,\ W y_s + T_s x = h_s,\ s\in S,\ x,\ y_s \geq 0.$$

ATO

Ambiente produttivo. I prodotti finali sono assemblati da componenti comuni dopo l'osservazione della domanda.

Struttura decisionale.

1. **here-and-now**: *produzione*
2. **wait-and-see**: *assemblaggio*

Modello. Problema stocastico a due stadi con *valore di ricorso*

$$\max \quad -\sum_{i\in[n_i]} C_i x_i + \sum_{s\in[n_s]} \pi^s \left(\sum_{j\in[n_j]} P_j y_j^s\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in[n_i]} T_{im} x_i \leq L_m, \qquad m \in [n_m]$$

$$y_j^s \leq d_j^s, \qquad j\in[n_j],\ s\in[n_s]$$

$$\sum_{j\in[n_j]} G_{ij} y_j^s \leq x_i, \qquad i\in[n_i],\ s\in[n_s]$$

$$x_i, y_j^s \in \mathbb{Z}_+, \qquad i\in[n_i] j\in[n_j],\ s\in[n_s].$$

PLANT LOCATION MODEL

$$\min \quad \sum_{i\in\mathcal{P}} f_i y_i + \sum_{s\in S} \pi^s \left(\sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{j\in\mathcal{D}} c_{ij} x_{ij}^s + \sum_{j\in\mathcal{D}} \beta_j z_j^s\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in\mathcal{P}} x_{ij}^s + z_j^s = d_j^s \quad \forall j\in\mathcal{D},\ \forall s\in S$$

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} x_{ij}^s \leq R_i y_i \quad \forall i\in\mathcal{P},\ \forall s\in S$$

$$x_{ij}^s \geq 0,\ z_j^s \geq 0,\ y_i \in \{0,1\}.$$

Idea. La scelta di apertura degli impianti è presa sotto incertezza, mentre i flussi di trasporto sono adattati dopo l'osservazione della domanda.

NEWSVENDOR

Idea. Le **quantità produttive** sono decise **progressivamente sotto incertezza** e gli esiti finali generano costi di overage e underage.

$$\min \quad \sum_{n\in\mathcal{N}_2} \pi^n \sum_{i\in\mathcal{I}} (c_i^o o_i^n + c_i^u u_i^n)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i^0 \leq K_1$$

$$m_i \delta_i^0 \leq x_i^0 \leq K_1 \delta_i^0 \quad \forall i\in\mathcal{I}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i^n \leq K_2 \quad \forall n\in\mathcal{N}_1$$

$$m_i \delta_i^n \leq x_i^n \leq K_2 \delta_i^n \quad \forall i\in\mathcal{I},\ \forall n\in\mathcal{N}_1$$

$$x_i^0 + x_i^{a(n)} = d_i^n + o_i^n - u_i^n \quad \forall i\in\mathcal{I},\ \forall n\in\mathcal{N}_2$$

$$x_i^n \in \mathbb{Z}_+,\ \delta_i^n \in \{0,1\} \quad \forall i\in\mathcal{I},\ \forall n\in\{0\}\cup\mathcal{N}_1$$

$$u_i^n,\ o_i^n \geq 0 \quad \forall i\in\mathcal{I},\ \forall n\in\mathcal{N}_2.$$

UNIT COMMTMENT

Modello multiperiodale.

- decisioni di **attivazione** *here-and-now*
- **produzione** adattata alla *domanda*

$$\min \quad \sum_{i\in[I],t\in[T]} (E_i u_{it} + F_i s_{it}) + \sum_{\omega\in\Omega} \pi^\omega \sum_{i\in[I],t\in[T]} C_i\,(q_{it}^\omega - m_i u_{it})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in[I]} q_{it}^\omega \geq d_t(\omega) \quad \forall t\in[T],\ \forall\omega\in\Omega$$

$$m_i u_{it} \leq q_{it}^\omega \leq M_i u_{it} \quad \forall i\in[I],\ \forall t\in[T],\ \forall\omega\in\Omega$$

$$s_{it} \geq u_{it} - u_{i,t-1} \quad \forall i\in[I],\ \forall t\in[T]$$

$$u_{it} \leq a_i \quad \forall i\in[I],\ \forall t\in[T]$$

$$u_{it} \in \mathbb{Z}_+,\ s_{it}\in\mathbb{Z}_+,\ q_{it}^\omega \geq 0 \quad \forall i\in[I],\ \forall t\in[T],\ \forall\omega\in\Omega.$$

CAP 2
ELEMENTI DI COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

Classificazione dei *prob di ottimizzazione* in base alla **difficoltà intrinseca del prob**, *indipendentemente* dall'**algo**.

Obiettivi principali
- distinguere **complessità** del *prob* vs *algo*
- introdurre **prob di decisione vs ottimizzazione**
- definire le classi **P**, **NP**, **NPH**, **NPC**

COMPLESSITÀ INTRINSECA: SCHEDULING

Problema di scheduling (min,max) su macchina singola. Sequenziamento di job su una macchina per controllare il max ritardo rispetto alle due date.

$$C_{\sigma(1)} = p_{\sigma(1)},$$
$$C_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k-1)} + p_{\sigma(k)}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

$L_{\max} \doteq \max_{j\in[n]} L_j \quad L_j \doteq C_j - d_j.$

Teorema (regola EDD – Earliest Due Date). Per il prob *1\\Lmax* esiste una *sol ottima* in cui i job sono ordinati per due date crescenti. $d_{\sigma(k)} \leq d_{\sigma(k+1)}$

➡ *algo polinomiale*

➡ *prob computazionalmente trattabile*

Realise Time. L'introduzione dei tempi di rilascio (*1\ri\Lmax*) vincola l'avvio dei job e rende non più ottima la regola EDD, aumentando la compl intrinseca del prob.

Non esistono algo di compl polinomiale che lo risolvono, solo **branch-and-bound**.

PROBLEMI DI DECISIONE VS OTTIMIZZAZIONE

- **prob di decisione (PD)**: risposta binaria *(sì / no)*
- **prob di ottimizzazione (PO)**: ricerca migliore sol rispetto a una f obiettivo $\min_{x\in S} f(x)$

Legame tra PO e PD. Dato un PO, si definisce un PD scegliendo un valore k e chiedendo se esiste x in S tc f(x)<k.

PD→PO. Se si ha a disposizione un algo efficiente per PO, è possibile risolvere in modo efficiente PD

➡ *se PD è difficile ⇒ PO non può essere facile*

➡ *per dimostrare che un prob di ottimizzazione è difficile, è sufficiente dimostrare che è difficile il corrispondente prob di decisione*

SCHEDULING CON RELEASE TIMES

La versione decisionale del prob di scheduling 1/rj/Lmax è **NP-completa**.
- *mostra che l'intrattabilità nasce con l'introduzione dei tempi di rilascio*
- *PO è NP-difficile*

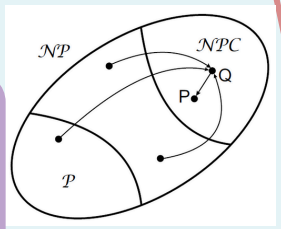
TEORIA DELLA NP-COMPLETEZZA

Esiste una vasta classe di *prob di ottimizzazione* per cui non sono noti algo polinomiali.

Idea centrale. La **teoria della NP-completezza** mostra che molti di questi prob sono equivalenti dal punto di vista *computazionale*.

➡ *se uno solo ammettesse un algo pol tutti i prob della classe lo ammetterebbero*

Conseguenza fondamentale. Decenni di ricerca senza successo suggeriscono che
- *tali algo probabilmente non esistono*
- *la difficoltà è intrinseca, non dovuta a modelli*



CLASSI NPH – NPC

Classe NPH. Prob P tc ogni prob in NP è riduc a P.

➡ *PO + PD*

Classe NPC. Prob P tc
- P è in NP **e** P è NPH

➡ *problemi più difficili in NP, tutti equivalenti*

➡ *per dimostrare che un PD P è NPC, occorre dimostrare che P è in NP e un prob NP-completo Q può essere ridotto in tempo polinomiale a P*

Teorema di Cook. Il prob della soddisfacibilità booleana è NP-completo.

$$(A \text{ or } B) \text{ and } (\text{not}(A) \text{ or } C)$$

CLASSI P – NP

Classe P. *Prob di decisione* per cui esiste un algo di compl polinomiale: *il numero di passi è limitato superiormente da una funzione polinomiale*. L'**algo**
- *trova una soluzione*
- *ne verifica la correttezza*

Classe NP. *Prob di decisione* le cui istanze che hanno risposta positiva sono verificabili in tempo polinomiale. Esiste un certificato polinomiale su un ***calcolatore non deterministico***.

RIDUZIONE POLINOMIALE

Un prob P è **riducibile** a Q se *ogni istanza di P può essere trasformata in tempo polinomiale in un'istanza di Q* con la stessa risposta.
- se P è difficile e **P<Q** ⇒ Q non può essere facile
- *la compl di P non è maggiore della compl di trasformare P in Q e poi risolvere Q*

$$\text{compl}(P) \leq \text{compl}(Q) + \text{compl}(P \to Q)$$

IMPATTO CODIFICA (KNAPSACK)

Idea chiave. La compl dipende dalla codifica dell'input, non solo dal prob.
- *B* è **codificato in binario** ⇒ input di dimensione logB
- *O(nB)* è **esponenziale** nella dimensione dell'input

Pseudo-Polinomiale. L'algo, rispetto alla codifica binaria, ha *compl esponenziale*. Se si utilizzasse un **computer con una codifica unaria**, l'algo avrebbe *compl polinomiale*.

CAP 4

SISTEMI MRP – ERP – APPROCCIO JIT

Classificazione dei *sis di pianif* e *controllo della produz multilivello e con variabilità.*

Obiettivi principali

- distinguere **logiche push e pull**
- chiarire il ruolo di **variabilità**, **WIP** e **lead time**
- pianificazione **MRP** a *capacità infinita*
- approccio **Just-In-Time** (*Toyota*)

Idea chiave. Le *prestazioni* del sis produttivo dipendono dalla **variabilità** (propagata o controllata).

LIMITI ED EVOLUZIONE DEI SISTEMI MRP

Limiti degli approcci classici. I modelli tradizionali risultano inadeguati

- in *ambienti non make-to-stock (make-to-order, assemble-to-order)*
- presenza di *vincoli di capacità produttiva*
- *distinte base multilivello*

Effetto di amplificazione della variabilità. La **propagazione dei fabbisogni** lungo la distinta base può generare una *forte amplificazione della variabilità*, anche con domanda finale regolare.

Evoluzione dei modelli MRP. I sis MRP (***Material Requirements Planning***) nascono come ***risposta operativa al prob del lot-sizing multilivello***

➡ assunzione di *capacità infinita*

➡ utilizzo di *lead time fissati a priori*

Evoluzione verso MRPII ed ERP.

- **MRPII** (***Manufacturing***): introduce la *verifica dei vincoli di capacità*
- **RCCP** (***Rough Cut Capacity***): *verifica* aggregata e approssimata della *capacità*
- **CRP** (***Capacity Requirement***): *verifica dettagliata capacità* sulle singole risorse
- **ERP** (***Enterprise Resource***): integrazione *pianific con f commerciali e finanziarie*

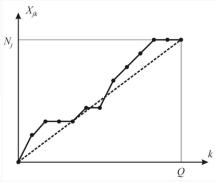
APPROCCIO JUST-IN-TIME

Definizione e obiettivo. Il *Just-In-Time (JIT)* mira a *ridurre la variabilità* alla fonte tramite *produzione livellata* (**production smoothing**), *lotti piccoli* e *frequenti* e ***riduzione dei tempi di setup***, con l'obiettivo di contenere WIP e lead time.

Logiche di controllo.

- **push**: *rilascio ordini da previsione*
- **pull**: produzione attivata *da domanda* reale
- **kanban**: *controllo pull locale a segnali*
- **CONWIP**: controllo *pull* con *WIP* globale

$$\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{kN_j}{Q}-X_{jk}\right)^2$$



Goal chasing. Il *Toyota Goal Chasing* seleziona la ***sequenza produttiva che rende regolare il consumo dei componenti***, minimizzando la distanza tra consumo ideale e consumo effettivo lungo il ciclo.

Rotazione ciclica dei prodotti. I prodotti si *alternano* su una linea con periodo di rotazione. $p_i T_i = d_i T_c \quad \Rightarrow \quad T_i = \frac{d_i}{p_i} T_c$

$$T_c \geq \sum_{i=1}^{N} s_i + \sum_{i=1}^{N} T_i$$

Il ***limite inferiore*** dipende dai *tempi di setup* e dal *rapporto tra tassi di domanda e produzione*, evidenziando un legame con i fenomeni di congestione.

$$T_c \geq \frac{\sum_{i=1}^{N} s_i}{1-\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{p_i}}$$

LOGICA MRP

Assunzione di capacità infinita. Il *vincolo di capacità* non è modellato ed è surrogato da *lead time fissati a priori*.

Lead time offsetting. Gli *ordini pianificati* sono anticipati nel tempo rispetto ai fabbisogni.

Record MRP. Per ogni codice e periodo

- *fabbisogni lordi*
- *magazzino* disponibile (*on-hand*)
- *ordini* emessi (*on-order*)
- *fabbisogni netti*
- *ordini pianificati*

➡ la domanda dei prodotti finiti è definita dal **MPS** (***Muster Production Schedule***)

➡ l'**MRP** procede ricorsivamente lungo la distinta base

Ordini pianificati. Non sono esecutivi; al rilascio diventano ordini operativi e allocano giacenze.

Lot-sizing. Regola base *lot-for-lot*: produci esattamente ciò di cui hai bisogno.

LEGGE DI LITTLE

Prestazioni di shop floor. La **Factory Physics** descrive le prestazioni tramite *throughput*, *flow time* e *WIP*.

Legge di Little. Esprime il *legame strutturale* tra queste grandezze. $\text{WIP} = \text{throughput} \times \text{flow time} \quad L = \lambda\,(W_q + t_s)$

Modello a singola macchina e variabilità. In una singola macchina, l'*attesa in coda cresce con l'utilizzazione* e con la *variabilità* dei tempi di interarrivo e servizio. $u = \lambda/\mu$

$$W_q \approx \left(\frac{C_a^2 + C_s^2}{2}\right)\left(\frac{u}{1-u}\right) t_s$$

Buffering law. In presenza di variabilità, il sistema deve introdurre *buffer sotto forma di WIP*, *capacità* o tempo o *lead time*.

NERVOSISMO

Nervosismo. *Piccole variazioni nel MPS producono grandi variazioni negli ordini pianificati dovute a*

- **lot-sizing** a *quantità variabile*
- **effetto di bordo**: instabilità da *rolling horizon*

Effetti. *Instabilità* del piano e *ordini urgenti.*

Mitigazione.

- **time fencing**: *congelamento* temporale MPS
- **firm planned orders**: ordini *non modificabili*

MPS e CRP

MPS. Il MPS è l'*input primario dell'MRP*, basato su *ordini cliente* e **forecasting**; può essere validato tramite **RCCP** e strutturato a due livelli in contesti ATO.

CRP. Il CRP *verifica a posteriori la capacità*; la correzione manuale è complessa e può generare lead time gonfiati e WIP, innescando un *circolo vizioso*.

CAP 5
SCHEDULAZIONE in PRODUZ-SERVIZI

Schedulazione di job su risorse nel tempo, con *vincoli tecnologici e di capacità*.

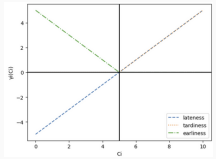
Obiettivi principali

- **misure di prestazione**: f sui tempi di completamento, aggregate min-sum o min-max
- **classificazione dei prob**: *notazione di Graham*
- **compl computaz**: distinzione tra casi polinomiali (EDD, WSPT, Johnson) e prob NPH
- **strategie di soluzione**: uso *euristiche* e *shifting bottleneck* per decomporre *sis complessi*

MISURE DI PRESTAZIONE

Funzioni di penalità.

- **tempo di completamento** (*Ci*): istante di *fine dell'ultima operazione del job*
- **flow time** (*Fi*): Ci – ri, *tempo totale* trascorso nel sistema
- **lateness** (*Li*): Ci – di, *anticipo o ritardo rispetto alla due date*
- **tardiness** (*Ti*): max(Ci – di, 0), penalizza solo i *ritardi*
- **earliness** (*Ei*): max(di – Ci, 0), penalizza solo gli *anticipi*
- **indicatore di ritardo** (*Ui*): vale 1 se Ci > di, 0 altrimenti



Misure aggregate. Flow time totale, flow time totale pesato, massima lateness, tardiness totale pesata, makespan (*massimo dei Ci*), numero di job in ritardo.

Soluzioni equivalenti. Una sol ottima rispetto a una misura è ottima anche per un'altra; **es** lateness totale e flow time totale differiscono solo per una costante.

Misure regolari. F non decrescenti dei tempi di completamento Ci.

Misure non regolari. F non monotone in Ci, con penalità di earliness e tardiness.

- **schedul semiattiva**: ogni op è eseguita il più presto possibile
- **schedul attiva**: non esiste op anticipabile senza ritardarne un'altra

Notazione di Graham (alpha | beta | gamma). Layout delle *macchine*, *vincoli* aggiuntivi, misura di *prestazione*.

ALGORITMI DI SOL NELLO SCHEDULING

Algoritmi polinomiali (casi speciali).

- **EDD**: ordinamento per *due date crescenti*; risolve 1\\Lmax
- **WSPT**: ordinamento per *wi/pi* decrescente; risolve 1\\wiCi
- **Johnson**: per F2\\Cmax; la sol ottima usa la *stessa sequenza sulle 2 macchine*

Regola ATC (Apparent Tardiness Cost). Assegna priorità combinando **peso del job**, durata dell'operazione e urgenza rispetto alla due date.

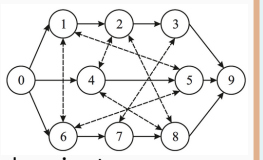
- se il ***job è in tempo*** la *priorità cresce* esponenzialmente
- se è in **ritardo** si riduce alla regola WSPT

$$\frac{w_i}{p_{ij}} \exp\left(-\left[\frac{d_i - t - p_{ij} - \sum_{q=j+1}^{m_i}(W_{iq} + p_{iq})}{k\bar{p}}\right]^+\right)$$

Lookahead + ricerca locale.

- *beam search*: riduce la **miopia** delle regole di priorità
- *criticità*: evitare *minimi locali* (tabu, genetici), esplorare *grandi vicinati* (LNS), *evitare cicli*

Grafi disgiuntivi.



- **nodi**: operazioni + dummy iniziale/finale
- **archi congiuntivi**: precedenze tecnologiche del job
- **archi disgiuntivi**: capacità macchina (clique per macchina), da orientare
- **cammino critico**: lunghezza massima start→end = *makespan*

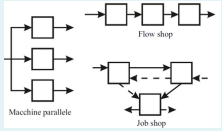
MACHINE SCHEDULING

Problemi di scheduling. Assegnazione di risorse a *job* nel *tempo*, rispettando ***vincoli*** *tecnologici*, di *capacità*, *precedenze*, ***tempi*** *di processo*, *due date*.

Soluzioni e diagrammi di Gantt. Una *sol* è definita dalle *sequenze di lavorazione sulle macchine* ed è visualizzata tramite *diagrammi di Gantt*, che *rappresentano graficamente l'allocazione temporale dei job*.

Tipi di flusso.

- **macchina singola**: una *sola* risorsa
- **macchine parallele**: identiche, correlate o scorrelate
- **flow shop**: *stesso ordine* di macchine
- **job shop**: cicli di lavorazione *diversi*
- **open shop**: *nessun ordine* prefissato



PROCEDURA SHIFTING BOTTLENECH

Idea. Affrontare il problema *J//Cmax* **decomponendolo** in una sequenza di *sottoproblemi su singola macchina*, sfruttando il grafo disgiuntivo.

Approssimazione del makespan. Ottenuta tramite *teste e code delle operazioni lungo il cammino critico*, che stimano i tempi di rilascio e le scadenze locali.

Riduzione. Ogni macchina induce un problema 1/ri/Lmax, risolto in modo efficiente.

Identificazione del collo di bottiglia. La macchina con Lmax peggiore; la sua sequenza viene fissata e il processo iterato sulle restanti macchine.

MODELLO MILP J//Cmax

Nel modello MILP per J//Cmax solo *perturbazioni degli archi disgiuntivi sul cammino critico sono utili, poiché evitano la creazione di cicli.*

$$\begin{aligned}
\min \quad & C_N \\
\text{s.t.} \quad & C_j \geq C_i + p_j, && \forall (i,j) \in P, \\
& C_j \geq C_i + p_j - M(1 - x_{ij}), && \forall (i,j) \in D, \\
& C_i \geq C_j + p_i - M x_{ij}, && \forall (i,j) \in D, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j) \in D, \\
& C_i \geq p_i, && \forall i \in N.
\end{aligned}$$