

## ESAME BA 09/09/2022

### Domanda 1

Consideriamo il problema di allocazione di budget nel continuo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sqrt{x_1} + \log(x_2) + \log(2x_3) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Risolverlo mediante programmazione dinamica.

**NB:** Se volete, potete verificare il risultato risolvendo il problema in altro modo, ma va risolto applicando la programmazione dinamica, ricavando le funzioni valore.

### Soluzione

Dato lo stato  $s$  (budget residuo) abbiamo

$$V_3(s) = \log(2s)$$

Allo stadio precedente

$$V_2(s) = \max_{x \in [0,10]} \log(x) + V_3(s-x) = \max_{x \in [0,10]} \log(x) + \log(s-x) + \log(2)$$

Assumendo un ottimo interno (condizione verificata a posteriori), imponiamo la condizione di stazionarietà

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{s-x} \Rightarrow x = s-x \Rightarrow x = \frac{s}{2} \Rightarrow V_2(s) = 2 \log\left(\frac{s}{2}\right) + \log(2)$$

Quindi al primo stadio

$$V_1(10) = \max_{x \in [0,10]} \sqrt{x} + 2 \log\left(\frac{10-x}{2}\right) + \log(2)$$

Assumendo ancora un ottimo interno, la condizione di stazionarietà è

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{10-x} = 0 \Rightarrow 10-x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 36x + 100 = 0$$

le cui radici sono 32.9666 (oltre il budget 10) e 3.0334 (ottimo interno). Quindi avremo

$$x_1^* = 3.0334, \quad x_2^* = x_3^* = 3.4833$$

Come verifica, volendo, possiamo osservare che il fattore 2 in  $\log(2x_3)$  è ininfluente, e quindi per i due ultimi stadi l'allocazione deve essere uniforme. Usando i moltiplicatori di Lagrange, oppure un ragionamento al margine di tipo economico, si vede che all'ottimo dobbiamo avere che le derivate di  $\sqrt{x_1}$  e  $2 \log(z)$ , dove  $z = (10 - x_1)/2$  è l'allocazione a ciascuna delle attività 2 e 3, devono essere uguali (infatti è la condizione che definisce  $V_1$ ).

### Domanda 2

Illustrare la funzione di domanda logit (consideriamo il caso semplice in cui essa è solo funzione del prezzo).

Ricavare la corrispondente funzione che descrive la willingness-to-pay.

### Soluzione

Vedere slide 38-40, parte di pricing.

### Domanda 3

Consideriamo il problema di ottimizzazione globale in una sola variabile,  $\min f(x)$  dove la funzione  $f$  è continua nel senso di Lipschitz e  $x$  deve appartenere all'intervallo  $[a, b]$ . Supponendo di avere valutato la funzione negli estremi dell'intervallo e di avere una stima della costante di Lipschitz, trovare un lower bound per il valore della funzione sull'intervallo.

### Soluzione

Vedere slide 48, parte di ottimizzazione globale.