

## ESAME BA 15/07/2022

### Domanda 1

Consideriamo un problema newsvendor a più prodotti, che interagiscono per la presenza di un vincolo di spazio di magazzino.

Per ogni prodotto sono dati:

- Il limite inferiore e superiore della distribuzione marginale di domanda (supposta uniforme nel continuo).
- Il prezzo a cui si compra, il prezzo a cui si vende nella stagione di vendita, il prezzo a cui si svende dopo la stagione di vendita, lo spazio occupato a magazzino.

Inoltre, è dato il volume complessivamente disponibile a magazzino (o spazio a scaffale).

- Come possiamo risolvere il problema in generale?
- Trovare la soluzione numerica nel caso di 3 prodotti, caratterizzati dai dati seguenti e supponendo che lo spazio disponibile (in una qualche unità di misura) sia pari a 1200:

Prodotto	1	2	3max
Prezzo vendita	25	50	25
Prezzo svendita	10	20	10
Prezzo acquisto	15	30	15
Spazio occupato	1	2	1
Limiti distribuzione	(100,400)	(200,700)	(50,150)

Per il secondo punto (come per il primo), va bene una soluzione non necessariamente a numeri interi (supponendo che anche le quantità vendute, come la domanda, siano nel continuo).

*Suggerimento:* quale pattern nei dati specifici dell'esempio numerico possono semplificare la soluzione?

### Soluzione

Il problema è

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n E[\pi_i(q_i, D_i)] \\ & \sum_{i=1}^n r_i q_i \leq R; \quad q_i \geq 0 \end{aligned}$$

Assumendo soluzione interna, formiamo la Lagrangiana

$$\sum_{i=1}^n E[\pi_i(q_i, D_i)] - \mu \left[ \sum_{i=1}^n r_i q_i - R \right],$$

e applichiamo le condizioni di stazionarietà, che si decompongono in condizioni del tipo

$$m_i [1 - F_i(q_i)] - c_{ui} F_i(q_i) - \mu r_i = 0,$$

dove introduciamo la CDF della domanda, il margine di profitto, il costo dell'invenduto e lo spazio occupato da ogni pezzo. Si ottengono condizioni di ottimalità per ogni prodotto, dato valore il moltiplicatore:

$$F_i(q_i) = \frac{m_i - \mu r_i}{m_i + c_{ui}} = z_i.$$

I rapporti  $z_i$  indicano un livello di probabilità, e nel caso di una distribuzione uniforme abbiamo

$$q_i = l_i + z_i(u_i - l_i),$$

in cui usiamo il limite inferiore e superiore della distribuzione. Se la soluzione per moltiplicatore nullo non soddisfa il vincolo di capacità, occorre trovarne un valore tale da saturare il vincolo, senza avere ordini negativi.

Nel caso numerico si vede che tutti i dati sono proporzionali, e quindi il rapporto  $z_i$  non dipende dal prodotto. Basta quindi risolvere l'equazione:

$$\sum_{i=1}^3 r_i l_i + z \sum_{i=1}^3 r_i (u_i - l_i) = 1200,$$

da cui si ottiene  $z = 0.4643$  (si verifica che il livello di servizio è più basso di quello senza capacità finita), e quindi la soluzione è  $(239.29, 432.14, 96.43)$ .

### Domanda 2

Spiegare in dettaglio in cosa consiste il problema della doppia marginalizzazione.

### Soluzione

Basta vedere le slide di teoria.

### Domanda 3

Consideriamo la funzione  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x$ , limitatamente all'intervallo  $I = [0,6]$ . Ricavare una funzione minorante convessa (sull'intervallo  $I$ ) applicando l'approccio  $\alpha$ -BB.

### Soluzione

In questo caso si tratta di aggiungere una funzione del tipo  $q(x) = \alpha x(x-6)$ , convessa, negativa sull'intervallo e nulla agli estremi, con un coefficiente  $\alpha$  tale da rendere la somma delle due funzioni convessa, ovvero che la derivata seconda sia non negativa sull'intervallo:

$$l(x) = x^3 - 8x^2 + 17x + \alpha x(x-6)$$

$$l'(x) = 3x^2 - 16x + 17 + 2\alpha x - 6\alpha$$

$$l''(x) = 9x - 16 + 2\alpha$$

La derivata seconda è una funzione affine, crescente, quindi occorre fare in modo da avere

$$l''(0) = -16 + 2\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 8$$