ESAME BA 14/07/2023 CLOSED BOOK – 90min

Domanda 1

Consideriamo un problema del tipo newsvendor, per un prodotto la cui domanda ha una distribuzione di probabilità dipendente dal successo o meno del design. Supponiamo che, in caso di successo, la distribuzione di domanda sia uniforme (nel continuo) sull'intervallo $[4000,5000]$; nel caso opposto ("insuccesso"), la domanda è uniformemente distribuita (sempre nel continuo) sull'intervallo $[2000,3000]$. La probabilità di successo è 0.5.

Il costo unitario di produzione del prodotto è €5. Esso viene venduto a €10 e, in caso di rimanenze, queste vengono svendute a €3.

Supponiamo che sia disponibile uno strumento di marketing analytics in grado di prevedere con certezza il successo o insuccesso del prodotto. Qual è il valore dell'informazione (parziale) ottenuta tramite lo strumento?

Soluzione

Possiamo scrivere il profitto atteso nella forma seguente:

$$\mathrm{E}\big(\pi(q,D)\big) = -5q + 10\int_a^b \min\{q,x\}\, f_D(x)dx + 3\int_a^b \max\{0, q-x\}\, f_D(x)dx$$

La forma esatta dipende da quale delle tre distribuzioni applichiamo.

Il livello di servizio ottimale è, in tutti i casi, pari a

$$\frac{10-5}{(10-5)+(5-3)} = \frac{5}{7}$$

Se sapessimo che il prodotto ha successo, ordineremmo il quantile della corrispondente uniforme:

$$\frac{q-4000}{5000-4000} = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad q = 4000 + \frac{5}{7}\times 1000 \approx 4714 \qquad \text{pezzi}$$

Il profitto atteso sarebbe

$$-5\times 4714 + \frac{10}{1000}\int_{4000}^{4714} x dx + \frac{10}{1000}\int_{4714}^{5000} 4714\, dx + \frac{3}{1000}\int_{4000}^{4714}(4714-x)dx =$$

$$-5\times 4714 + \frac{1}{200}(4714^2 - 4000^2) + \frac{4714}{100}(5000-4714) + \frac{3}{2000}(4714-4000)^2 = 21785.71$$

In modo analogo, se sapessimo che il prodotto non ha successo, ordineremmo

$$2000 + \frac{5}{7}(3000-2000) \approx 2714 \qquad \text{pezzi}$$

Il profitto atteso sarebbe

$$-5\times 2714 + \frac{10}{1000}\int_{2000}^{2714} x dx + \frac{10}{1000}\int_{2714}^{3000} 2714\, dx + \frac{3}{1000}\int_{2000}^{2714}(2714-x)dx =$$

$$-5\times 2714 + \frac{1}{200}(2714^2 - 2000^2) + \frac{2714}{100}(3000-2714) + \frac{3}{2000}(2714-2000)^2 = 11785.71$$

In realtà, la differenza di 10000 tra i due profitti attesi si lega al fatto che il profitto atteso nel secondo caso scende del margine di profitto (5) per lo shift nella domanda attesa (2000).

Non avendo tali informazioni, prendiamo il quantile su una distribuzione la cui densità è data da due uniformi disgiunte di pari massa (il livello di servizio è maggiore del 50%, quindi finiamo nel supporto della seconda):

$$0.5 + 0.5\times\frac{q-4000}{5000-4000} = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad q = 4000 + \frac{3}{7}\times 1000 \approx 4429 \qquad \text{pezzi}$$

Il profitto atteso sarebbe:

$$-5 \times 4429 + \frac{10}{2000}\left[\int_{2000}^{3000} x dx + \int_{4000}^{4429} x dx + 4429 \int_{4429}^{5000} dx\right] + \frac{3}{2000}\left[\int_{2000}^{3000} (4429 - x) dx + \int_{4000}^{4429} (4429 - x) dx\right] =$$

$$-5 \times 4429 + \frac{10}{2000}[0.5 \times (3000^2 - 2000^2) + 0.5 \times (4429^2 - 4000^2) + 4429 \times (5000 - 4429)] + \frac{3}{2000}[0.5 \times ((4429 - 2000)^2 - (4429 - 3000)^2) + 0.5 \times (4429 - 4000)^2] = 15071.43$$

Il valore dell'informazione è quindi

$$0.5 \times 21785.71 + 0.5 \times 11785.71 - 15071.43 = 1714.28$$

NB: come da profezia fatta durante la discussione del caso CBC, gran parte degli errori comuni sono essenzialmente dovuti alla valutazione errata del valore atteso di una funzione come funzione del valore atteso. In un problema come questo, dato lo stress dell'esame, è facile sbagliare i conti. L'importante è la correttezza concettuale dell'impostazione.

Domanda 2

- Cosa si intende per problema NP-hard?
- Come si può dimostrare che un problema di ottimizzazione è NP-hard?

NB: si richiedono risposte molto chiare e puntuali.

Domanda 3

Spiegare come si ottiene un taglio di ottimalità nell'algoritmo L-shaped, ovvero una decomposizione di Benders per un problema di programmazione lineare stocastica a due stadi.
NB: si richiedono risposte molto chiare e puntuali.