SOLVED PROBLEM SET (versione 29/6/2021)
Business analytics 2020/21

Problema 1

Una grande catena di negozi sta considerando l'opportunità di distribuire 10,000 unità di un lettore di file audio digitali molto economico, prodotto da una ditta cinese relativamente sconosciuta. Se le vendite andranno bene, ci aspettiamo di guadagnare 100,000€; in caso contrario, perderemo 60,000€. Le vendite dipendono, tra le altre cose, dalla qualità del prodotto; il gestore degli acquisti potrebbe ottenere qualche campione per effettuare dei test di laboratorio in modo da valutare la qualità e l'affidabilità del prodotto. Questo test, complessivamente, costerebbe 10,000€.
Il risultato del test, in termini di qualità, potrebbe essere "eccellente", "abbastanza buono", o "junk". Se la qualità è eccellente, la probabilità di successo è stimata pari a 0.8 (NB: questo dipende anche dalla concorrenza); se la qualità è abbastanza buona, tale probabilità solo pari a 0.4; altrimenti, essa è pari a 0.2 (OK, il lettore è junk, ma costa molto poco....).
Il gestore degli acquisti, dopo un'indagine conoscitiva circa la reputazione del produttore, ritiene che la qualità sia buona con probabilità 0.3, e abbastanza buona con probabilità 0.5; solo il test può dare una risposta precisa, ma potremmo anche evitare di pagare il costo relativo, e possiamo comunque rifiutare l'offerta del produttore. Che linea di azione suggerireste? [assumiamo neutralità al rischio]

Soluzione

Supponiamo di non fare il test. Il profitto atteso è:

$$0.3\times(0.8\times100000-0.2\times60000)+0.5\times(0.4\times100000-0.6\times60000)$$
$$+0.2\times(0.2\times100000-0.8\times60000)$$
$$=0.3\times68000+0.5\times4000-0.2\times28000=16800$$

Se effettuiamo il test, nel terzo caso non procediamo con l'operazione (profitto atteso negativo). Quindi il profitto atteso, con il test, diventa:

$$-10000+0.3\times68000+0.5\times4000-0.2\times0=12400$$

Il valore dell'informazione acquisita con il test non lo giustifica. Assumendo neutralità al rischio è meglio andare direttamente sul mercato.

Problema 2

State per lanciare un prodotto sul mercato. Se sarete fortunati, otterrete un profitto di €20 milioni, altrimenti perderete €5 milioni. La probabilità di successo è solo il 60%, ma potete migliorarla investendo €3.5 milioni in un progetto di miglioramento del prodotto. Trascuriamo l'impatto che il progetto ha in termini di ritardo nel lancio del prodotto sul mercato. Per quale valore minimo di probabilità di successo (a valle dell'investimento) possiamo giustificare l'investimento aggiuntivo? [Assumiamo neutralità al rischio, per semplicità, e quindi ragioniamo solo sui valori attesi]

Soluzione

Il valore atteso del profitto, se non facciamo nulla, è (in milioni di €): $20\times0.6-5\times0.4=10$.
Questo valore va confrontato con $-3.5+20\times p-5\times(1-p)=25\times p-8.5$.
Uguagliando le due espressioni troviamo:

$$p=\frac{10+8.5}{25}=0.74$$

Problema 3

You are about to launch a new product to the market. If it is a success you will make \$35 million, otherwise you lose \$14 million. The probability of success is 60%. You could increase chances of success by improving the product, which will delay product launch by eight months and will cost €5.5 million. In order to account for the delay and the time value of money, we should discount cash flows at a rate of 5% (the rate refers to the eight months period and is applied to profit/loss). What is the minimal (improved) probability of success that makes the delay worthwhile?

Solution

We should find the limit probability *p* satisfying the equation

$$0.6 \times 35 - 0.4 \times 14 = 15.4 = -5.5 + \frac{p \times 35 - (1-p) \times 14}{1.05}$$

which yields $p = 0.7336$

Problema 4

State organizzando un evento all'aperto, soggetto a condizioni meteorologiche incerte. In caso di bel tempo incasserete €5000; in caso di tempo nuvoloso, però, l'incasso si ridurrebbe a €1000, e perdereste €2000 in caso di pioggia. È comunque possibile cancellare l'evento, limitando la perdita a €200. Inoltre, potete pagare per una previsione del tempo locale abbastanza affidabile. A priori, l'esito della previsione sarà pioggia con probabilità 0.1, nuvoloso con probabilità 0.3 e sole con probabilità 0.6.
La previsione non è comunque affidabile al 100%.

- Nel caso si preveda pioggia, si avrà davvero pioggia all'80%, ma solo nuvoloso al 20% (si esclude il sole).
- Nel caso si preveda nuvoloso, si avrà pioggia al 10% e sole al 40%.
- Nel caso si preveda sole, si avrà pioggia al 10% e nuvoloso al 20%.

Le scelte a disposizione sono se pagare o meno per la previsione e se cancellare o meno l'evento.
Quanto siete disposti a pagare per la previsione?

Soluzione

Come prima cosa calcoliamo, in modo coerente con i dati, le probabilità non condizionali delle diverse condizioni meteo (le previsioni, ovviamente, non possono cambiarle.... molti trovano che usare la previsione fa perdere profitto anche se ha costo zero, e la cosa non ha senso e dovrebbe inquietare...). Applicando il teorema delle probabilità totali:

$$PR(pioggia) = 0.1 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 + 0.6 \times 0.1 = 0.17$$

$$PR(nuvo) = 0.1 \times 0.2 + 0.3 \times 0.5 + 0.6 \times 0.2 = 0.29$$

$$PR(sole) = 0.1 \times 0.0 + 0.3 \times 0.4 + 0.6 \times 0.7 = 0.54$$

[Check: le probabilità sommano a 1]
Il valore atteso dell'incasso, non ricorrendo alla previsione, è:

$$0.17 \times (-2000) + 0.29 \times 1000 + 0.54 \times 5000 = 2650$$

Nel caso della previsione, distinguiamo i tre esiti:

- previsione pioggia: $0.8 \times (-2000) + 0.2 \times 1000 + 0.0 \times 5000 = -1400$
- previsione nuvoloso: $0.1 \times (-2000) + 0.5 \times 1000 + 0.4 \times 5000 = 2300$
- previsione sole: $0.1 \times (-2000) + 0.2 \times 1000 + 0.7 \times 5000 = 3500$

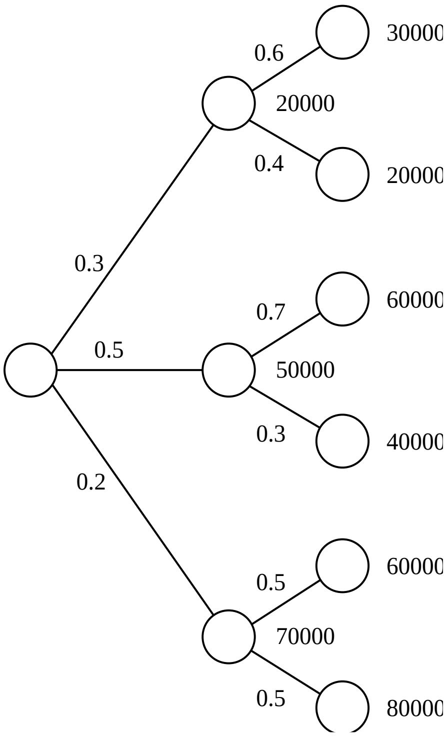
Evidentemente, nel primo caso, si preferisce cancellare l'evento. Quindi, se si procede con la previsione, il valore atteso dell'incasso è:

$$0.1 \times (-200) + 0.3 \times 2300 + 0.6 \times 3500 = 2770$$

Facendo la differenza dei valori attesi, si deduce che il valore della previsione è 120.

Problema 5

Il vostro compito è dimensionare la capacità produttiva per un impianto di produzione, in condizioni di incertezza sulla domanda futura nei prossimi due anni. Questa è modellata dal seguente albero di scenari:



Nella figura sono riportati, per il primo ed il secondo anno, i valori di domanda, con le rispettive probabilità (la radice dell'albero, ovvero il primo nodo, semplicemente rappresenta lo stato corrente, da cui partono tre scenari per l'anno 1 e poi due scenari per l'anno 2).

Nel dimensionare la capacità avete le seguenti opzioni:

1. Impianto piccolo, capacità di produzione annua pari a 40000 pezzi, costo €50000 (pagato all'inizio del primo anno, ora).
2. Impianto grande, capacità di produzione annua pari a 80000 pezzi, costo €80000 (pagato all'inizio del primo anno, ora).
3. E' anche possibile costruire l'impianto piccolo, con possibilità di espansione della capacità alla fine del primo anno; l'espansione di capacità permette un incremento di produzione di 40000 pezzi (nel secondo anno) a un costo aggiuntivo di €40000 (da pagare all'inizio del secondo anno).

Il prodotto non può essere immagazzinato da un anno all'altro, e per ogni pezzo venduto il margine di profitto (tenendo conto del prezzo di vendita e dei costi variabili di produzione, non del costo fisso della capacità produttiva) è pari a €2.

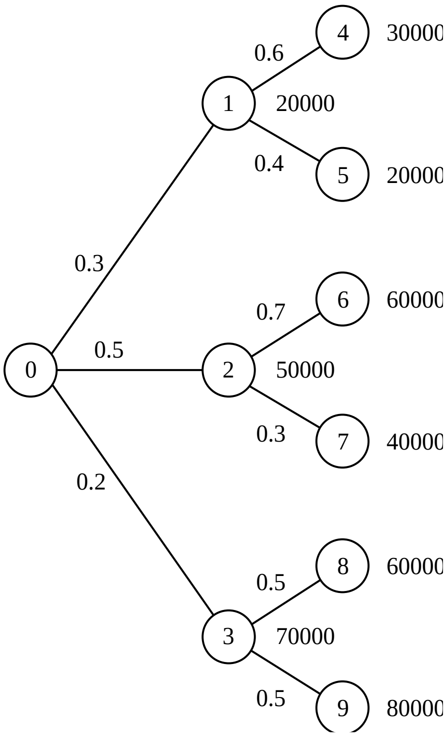
Nella scelta della capacità produttiva, all'inizio di ogni anno, avete incertezza sulla domanda futura, ma la decisione di produrre, anno per anno, viene presa in condizioni di informazione perfetta.

Per semplicità, assumiamo che non sia necessario scontare i flussi di cassa.

1. Assumendo neutralità al rischio, cosa fareste? Assumiamo che non ci sia penalità per la domanda non soddisfatta (semplicemente perdiamo il margine di profitto).
2. Cambia qualcosa se per ogni unità di domanda non soddisfatta si paga una penale di €1?

Soluzione

Per comodità, immaginiamo di numerare i nodi dell'albero come in figura:



La prima opzione è inclusa nella seconda, nel senso che la terza opzione certamente ha un valore atteso di profitto migliore. Infatti, la prima opzione è come la terza, con il vincolo aggiuntivo che non possiamo mai espandere: imponendo vincoli aggiuntivi, non possiamo di certo incrementare il profitto atteso (che rimane uguale, se espandere non conviene mai). Quindi possiamo eliminare dal ragionamento la prima possibilità.

L'opzione 2 è tale che abbiamo sempre capacità produttiva per soddisfare la domanda. Quindi è sufficiente calcolare il valore atteso della domanda nel primo e nel secondo periodo:

$$0.3\times 20000+0.5\times 50000+0.2\times 70000=45000$$

$$0.3\times(0.6\times 30000+0.4\times 20000)+0.5\times(0.7\times 60000+0.3\times 40000)$$
$$+0.2\times(0.5\times 60000+0.5\times 80000)=48800$$

Quindi il profitto atteso è, tenendo conto del flusso di cassa negativo iniziale al tempo 0,

$$-80000+2\times(45000+48800)=107600$$

Questo risultato non cambia considerando le penali, perché non c'è mai domanda non soddisfatta.

Nel terzo caso, abbiamo un flusso di cassa negativo pari a -50000 nel nodo 0.
Analizziamo poi cosa accade nei tre nodi al tempo 1:

- Nodo 1: Possiamo soddisfare tutta la domanda pari a 20000, e dobbiamo decidere se espandere o meno. Chiaramente, non conviene espandere, perché in ogni caso, nei nodi 4 e 5, abbiamo capacità sufficiente. Il valore (monetario atteso) del nodo 1 è quindi $2\times(20000+0.6\times 30000+0.4\times 20000)=92000$
- Nodo 2: Al tempo 1 non soddisfiamo completamente la domanda (40000 su 50000). Se non espandiamo, il profitto atteso al tempo 2 sarà limitato dal fatto che nel nodo 6 non soddisfiamo la domanda per 20000 pezzi. Il profitto atteso al tempo 2 se non espandiamo è $2\times 40000=80000$ (vendiamo 40000 pezzi in ognuno dei nodi 6, e 7). Se espandiamo, passiamo a $2\times(0.7\times 60000+0.3\times 40000)=108000$, ma l'incremento non giustifica l'espansione. Quindi il valore del nodo 2, sommando i 40000 pezzi venduti al tempo 1 e i 40000 venduti al tempo 2, è $2\times 40000+2\times 40000=160000$.
- Nodo 3: Se non espandiamo, vendiamo sempre 40000 pezzi per ogni periodo, quindi il contributo al profitto sarebbe ancora 160000, come nel nodo 2. Se espandiamo, abbiamo $-40000+2\times 40000+2\times(0.5\times 60000+0.5\times 80000)=180000$. In questo caso converrebbe espandere.

Sommando tutto, abbiamo un valore della strategia (espando solo nel nodo 3) pari a

$-50000+0.3\times 92000+0.5\times 160000+0.2\times 180000=93600$.

Se non ci sono penali, risulta quindi preferibile costruire subito l'impianto.
Se aggiungiamo penali, l'opzione 3 avrà comunque un profitto atteso non superiore a 93600, perché a parità di possibilità decisionali introduciamo un fattore che certamente non incrementa il profitto (casomai lo diminuisce, almeno potenzialmente). Poiché l'opzione 2 non viene influenzata dalle penali, essa rimane la scelta migliore.
NOTA: Gli errori più comuni sono non condizionare la scelta di espansione alla situazione contingente (viene fatta a priori, in ogni nodo), oppure ragionare sul valore atteso della domanda, senza valutare come le vendite vengano limitate nodo per nodo (in pratica si confonde il valore atteso della funzione con la funzione del profitto atteso). Qualcuno poi non tratta le probabilità dei nodi al tempo 2 come condizionali.

Problema 6

You own a large lot of land that you could develop to build a holiday resort. However, you are unsure about the perspectives of the tourism market because of uncertain economic conditions; according to your subjective assessment, the market could be good or bad, with probabilities 0.6 and 0.4 respectively.

If market is good, total net revenue will be 50,000 snaps, otherwise it will be 10,000 snaps (measured in some fictional currency, the *snap*). This net revenue does *not* include the cost of developing your land, but only the variable costs for running the holiday resort.

Developing the land means two things: first, building the necessary infrastructures (roads, aqueduct, etc.), and then the facilities (hotels, swimming pools, restaurants, etc.).

Your available options are:
1) Give up your idea and sell your property for 10,000 snaps.
2) Build everything (infrastructures and facilities) now, for a total cost of 20,000 snaps.
3) Build the infrastructure only (for a cost of 10,000 snaps), and then wait to have a clear idea about the market. Then, build the facilities if the market looks good, for an additional cost of 15,000 snaps (NOTE: here we have the advantage of a partial "wait and see", but the total cost is larger than with option 2, also because you would have to accelerate the building of facilities; on the contrary, you cannot delay the development of infrastructures).

Assuming risk neutrality, what should you do?

Solution

With option 2 we have a cash flow now of -20000, and the expected net revenue thereafter is $0.6\times 50000+0.4\times 10000=34000$. So, the expected profit is 14000, which is larger than the 10000 snaps you can make by selling your property.

If you delay the second part of the development, you may increase the overall cost, but you have the option to abandon the project if you realize that it will be a disaster. The exact answer depends on your assumption: Can I build the infrastructure, then abandon the project and sell my property anyway for 10000 or not? (This is not specified in the text, so both are fine to me).

Let us assume that you may still sell. If you build the infrastructure and see that the market is bad, you will not pay the next 15000 if revenue is going to be just 10000. So, we have the total expected profit

$-10000+0.4\times 10000+0.6\times(50000-15000)=15000.$

So, it is better to delay the second part of the project and see.
If you assume that you may not sell, and just abandon everything, expected profit is

$$-10000 + 0.4 \times 0 + 0.6 \times (50000 - 15000) = 11000$$

In this case, you are better off with option 2.
Note that we did not consider cash flow discounting, which could have an impact in real life.

Problema 7

La vostra azienda ha come cliente un grosso distributore, a cui siete legati da un contratto che prevede penali in caso di mancato soddisfacimento della domanda. L'incertezza della domanda è rappresentata da 5 scenari equiprobabili: 500, 1000, 1500, 2000, 2500 pezzi. Il vostro costo (variabile) di produzione è di 5€ al pezzo, il prezzo a cui vendete al vostro cliente è 10€ al pezzo; la penale per ogni pezzo ordinato dal cliente e non consegnato è 8 € al pezzo. Il distributore vi informa con adeguato anticipo della sua domanda, per cui in linea di principio sareste in grado di produrre esattamente quanto richiesto. Il vostro problema sta nella vostra capacità produttiva, che è limitata a un massimo di 1800 pezzi.
Un terzista vi offre un'opzione sulla sua capacità produttiva. In pratica, si offre di produrre qualsiasi quantità voi ordiniate, al costo di 7€ al pezzo. Però, per riservare capacità produttiva per voi, vi chiede in anticipo il pagamento di una somma, che rappresenta il prezzo di questa capacity option.
Assumendo neutralità al rischio, qual è il massimo che sareste disposti a pagare per la capacity option?

Soluzione

Se non uso l'opzione, nei diversi scenari il profitto sarà, nei 5 scenari, come da tabella seguente:

Domanda	Vendita	Profitto da vendita	Penale	Profitto totale
500	500	$500 \times (10-5) = 2500$	0	2500
1000	1000	$1000 \times (10-5) = 5000$	0	5000
1500	1500	$1500 \times (10-5) = 7500$	0	7500
2000	1800	$1800 \times (10-5) = 9000$	$200 \times 8 = 1600$	7400
2500	1800	$1800 \times (10-5) = 9000$	$700 \times 8 = 5600$	3400

Il profitto medio è 5160.

Se compro l'opzione, invece di avere una penale, nei due ultimi scenari ho un profitto aggiuntivo, legato ai pezzi che faccio produrre dal terzista, pari a $200 \times 3 = 600$ e $700 \times 3 = 2100$. Il profitto atteso diventa:

$$\frac{2500 + 5000 + 7500 + (9000 + 600) + (9000 + 2100)}{5} = 7140 .$$

Il massimo prezzo è 7140-5160=1980.

Problema 8

Due aziende competono sulla quantità prodotta, e hanno una funzione di costo identica, perché producono con la stessa tecnologia, caratterizzata da una diseconomia di scala e da un costo fisso pagato solo se si attiva la produzione (le aziende possono scegliere di non produrre):

$$C_i(q_i) = \begin{cases} F + q_i^2, & se\ q_i > 0 \\ 0, & se\ q_i = 0 \end{cases}$$

per $i = 1{,}2$. Il prezzo dipende dalla funzione di domanda inversa

$$p(Q) = 100 - Q$$

dove Q è la quantità aggregata prodotta dalle due aziende e introdotta sul mercato.
Per quali valori del costo fisso F si avrà produzione del bene?

Soluzione

Si tratta di trovare l'equilibrio in una competizione alla Cournot. Il profitto per l'azienda 1 è

$$q_1(100 - q_1 - q_2) - F - q_1^2 = 100q_1 - q_1q_2 - 2q_1^2 - F$$

a cui si associa la condizione di ottimalità (sufficiente, perché il profitto è concavo rispetto a q_1)

$$100 - q_2 - 4q_1 = 0$$

Data la simmetria del problema, $q_1^* = q_2^*$, e quindi si trova

$$100 - 5q_1^* = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_1^* = q_2^* = 20$$

Il profitto per ciascuna azienda è

$$100 \times 20 - 3 \times 20^2 - F = 800 - F$$

Si ha produzione quando il profitto è positivo, ovvero per $F < 800$.

Nota aggiuntiva. Come qualcuno di voi mi ha fatto giustamente notare, si dovrebbe considerare anche un equilibrio del tipo (25,0) o viceversa. Io ho considerato solo ottimi interni, ed evidentemente non ci possono essere equilibri in cui le quantità prodotte sono diverse ma entrambe strettamente positive. Se produce una sola delle due aziende, essa si comporta come monopolista, e in quel caso la quantità ottima sarebbe 25, che porta a un profitto positivo se il costo fisso non è maggiore di 1250. In pratica, tale situazione si verifica quando una delle due aziende già è presente sul mercato (l'incumbent) e un potenziale entrante è bloccato da una barriera all'ingresso sul, costituita in questo caso dal costo fisso. Si tratta di situazioni in cui si crea una sorta di ``monopolio naturale''. In questo caso si potrebbero fare riflessioni su cosa si intende davvero per gioco simultaneo, che in effetti è un concetto limitato e non permette di cogliere la dinamica delle cose (che in questo caso è sequenziale). In ogni caso, una soluzione del tipo (25,0) o (0,25) è tecnicamente un equilibrio.

Problema 9

Due aziende competono sulla quantità prodotta, e hanno due funzioni di costo diverse, perché producono con tecnologie diverse. Supponiamo che vi sia un semplice costo variabile (diverso per le due aziende), per cui il costo per l'azienda i ($i = 1,2$) è $c_i q_i$, mentre la funzione di domanda inversa è $p(Q) = a - bQ$, dove Q è la quantità aggregata prodotta dalle due aziende e introdotta sul mercato. Dopo avere ricavato le condizioni di equilibrio e avere valutato prezzo e profitti, discutere l'impatto sulle due aziende e sui consumatori di un miglioramento nella tecnologia di una delle due aziende (diciamo la 1), che per esempio porta alla riduzione del costo c_1.

Soluzione

Le condizioni di equilibrio si ricavano dalla massimizzazione dei due profitti:

$$\pi_1 = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - c_1 q_1$$
$$\pi_2 = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - c_2 q_2$$

Imponendo

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 - c_2 = 0$$

troviamo

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$$
$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$
$$p^* = a - b(q_1^* + q_2^*) = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

Da queste relazioni, come ci si poteva attendere, osserviamo che

$$\frac{\partial q_1^*}{\partial c_1} < 0, \quad \frac{\partial q_2^*}{\partial c_1} > 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial c_1} > 0$$

Questo implica che la diminuzione del costo variabile per l'azienda 1 aumenta la sua quantità prodotta, diminuisce la quantità prodotta dall'azienda 2, e riduce il prezzo di mercato (a beneficio dei consumatori). Per quello che riguarda il profitto, abbiamo per l'azienda 1

$$\pi_1^* = (p^* - c_1)q_1^* = \left(\frac{a + c_1 + c_2}{3} - c_1\right) q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} q_1^* = b(q_1^*)^2$$

che aumenta all'aumentare della quantità, ovvero al diminuire del costo marginale dell'azienda 1. Simmetricamente, si ha una riduzione del profitto per l'azienda 2.

Problema 10

Consideriamo un problema di tipo knapsack, con capacità disponibile 9 e tre oggetti di valore 12, 7, 6, rispettivamente, e peso 6, 4, 4. Trovare la soluzione ottimale usando la programmazione dinamica. NB: la soluzione è ovvia; quello che vi viene chiesto è di trovarla meccanicamente usando la programmazione dinamica.

Soluzione
Si tratta di tabulare la funzione valore, su tre colonne corrispondenti ai tre oggetti e righe di capacità residua (variabile di stato) da 0 a 9. Per qualsiasi stato da 0 a 3, chiaramente il valore è 0 (non possiamo inserire nessun oggetto), e l'ultima colonna ha valore 6 (valore oggetto 3) per capacità residua almeno 4:

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4		7	6
5		7	6
6		7	6
7		7	6
8			6
9			6

Per riempire il resto, dobbiamo applicare l'equazione ricorsiva. Per esempio, allo step 2, abbiamo

$$V_2(4) = \max\{7 + V_3(4-4), V_3(4)\} = 7$$

(tra i due oggetti di peso 4, meglio quello che vale di più). Per valori di capacità residua almeno pari a 8, si inseriscono entrambi gli oggetti. Quindi abbiamo

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4		7	6
5		7	6
6		7	6
7		7	6
8		13	6
9		13	6

Per il primo step, il primo oggetto si può inserire solo per capacità almeno 6, quindi

$$V_1(4) = V_2(4) = 7$$
$$V_1(5) = V_2(5) = 7$$

Poi abbiamo

$$V_1(6) = \max\{12 + V_2(6-6), V_2(6)\} = 12$$
$$V_1(7) = \max\{12 + V_2(7-6), V_2(7)\} = 12$$
$$V_1(8) = \max\{12 + V_2(8-6), V_2(8)\} = 13$$
$$V_1(9) = \max\{12 + V_2(9-6), V_2(9)\} = 13$$

Come ovvio, se la capacità permette di inserire solo l'oggetto 1, si mette quello. Altrimenti meglio mettere gli altri due, con valore ottimo pari a 13.

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

3	0	0	0
4	7	7	6
5	7	7	6
6	12	7	6
7	12	7	6
8	13	13	6
9	13	13	6

In termini di variabili decisionali 0/1, la tabella sarebbe (in giallo-verde le decisioni ottime in sequenza)

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	1	1
5	0	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	0	1	1
9	0	1	1

NB: In questa soluzione, parto da un problema con un solo item, il numero 3 (questo perché io penso sempre backward). Chi pensa forward ha risolto il problema in modo diverso, partendo dall'item 1, ottenendo quindi tabelle diverse (quelle sotto), che però portano alla stessa soluzione e **vanno altrettanto bene**.

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	7	7
5	0	7	7
6	12	12	12
7	12	12	12
8	12	12	13
9	12	12	13

	Step 1	Step 2	Step 3
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	1	0
5	0	1	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	1
9	1	0	1

Problema 11

Consideriamo un problema di dimensionamento di lotti (lot sizing) per un solo prodotto, acquistato da un fornitore (non ci sono limiti sulla dimensione dell'ordine).

Ogni pezzo viene venduto a un prezzo p dato, ed il suo costo di acquisto unitario è c. Inoltre, occorre tenere conto del costo di magazzino per periodo h e di un costo fisso di ordinazione (pagato per ogni ordine emesso) s. Si considera un orizzonte di tempo discretizzato in T periodi di lunghezza identica.

La domanda in ogni periodo è incerta, e supponiamo che sia modellata da una sequenza di variabili casuali indipendenti nel tempo (e con la medesima distribuzione, puramente esogena, assunta continua). All'inizio di ogni periodo osserviamo il magazzino, decidiamo quanto ordinare (assumiamo consegna istantanea per semplicità), e poi osserviamo la domanda (che quindi è incerta quando si prende la decisione). Assumiamo anche che ogni domanda non soddisfatta sia persa, ma che non ci siano penalità per la domanda persa. L'obiettivo è massimizzare il profitto atteso per il periodo di pianificazione (da ora a T).

Scrivere l'equazione ricorsiva per la programmazione dinamica, oltre alla funzione di transizione per le variabili di stato. Trascuriamo il problema del valore terminale delle variabili di stato.

Soluzione
La prima cosa da fare è chiarire in dettaglio le assunzioni circa la dinamica del sistema, e in realtà questo può essere fatto (entro certi limiti…) in modi diversi. Basta poi essere coerenti.

Immaginiamo T periodi di tempo $(t, t+1)$, con $t = 0,1,2, \dots, T-1$.

- All'inizio del periodo osservo il magazzino I_t, che è la variabile di stato.
- Decido la quantità acquistata x_t, il che comporta un costo immediato $cx_t + s \cdot \delta(x_t)$, dove la funzione $\delta(x)$ è pari a 1 per argomenti positivi, 0 altrimenti. Assumiamo che questa quantità sia immediatamente disponibile.
- Osservo la domanda d_{t+1}, e quindi avrò una vendita pari a $z_{t+1} = \min\{d_{t+1}, I_t + x_t\}$, con ricavo pz_{t+1} e aggiornamento della variabile di stato$I_{t+1} = I_t + x_t - z_{t+1}$. In alternativa possiamo anche scrivere $I_{t+1} = \max\{I_t + x_t - d_{t+1}, 0\}$, il che è forse preferibile come equazione di stato.

  NB: In questo caso, si vede che il ricavo associato al periodo dipende dal fattore di rischio, e quindi è stocastico.
- A questo punto dovrei introdurre il costo di magazzino. Volendo fare una scelta sensata, potremmo dire che il costo di magazzino dipende dal magazzino medio durante il periodo, e quindi dovrei calcolare una cosa tipo
$$h\frac{I_{t+1} + I_t}{2}$$
  Un'alternativa è associare il costo di magazzino alla giacenza all'inizio del periodo, e un'altra ancora è associarlo al livello di magazzino alla fine del periodo. Nel primo caso avremo un termine di costo immediato deterministico (nel senso che lo conosco quando prendo la decisione di acquisto), mentre nel secondo è stocastico.

Con queste scelte, l'equazione ricorsiva diventa
$$\begin{aligned} V_t(I_t) = \max_{x_t \geq 0} -cx_t - s \cdot \delta(x_t) + pE\left[\min\{d_{t+1}, I_t + x_t\}\right] - h\frac{E\left[\max\{I_t + x_t - d_{t+1}, 0\}\right] + I_t}{2} \\ + E\left[V_{t+1}\left(\max\{I_t + x_t - d_{t+1}, 0\}\right)\right] \end{aligned}$$
Sono possibili (e ammissibili) varianti sul tema.

Problema 12
Consideriamo un modello alla Hotelling (strada lineare di lunghezza unitaria, ovvero da 0 a 1, con clienti uniformemente distribuiti sulla strada). Esistono due benzinai sulla strada, uno in posizione $x_1 = 0.25$ e l'altro in posizione $x_2 = 1$. Il costo di trasporto per ogni cliente e pari a $2d$, dove d è la distanza percorsa. Supponiamo che ogni cliente debba comprare esattamente un litro di benzina (questo è irrilevante… il punto è che tutti hanno lo stesso fabbisogno, e scelgono il benzinaio che complessivamente costa di meno).

- Scrivere la funzione di domanda per ogni benzinaio, che fornisce la domanda (per ciascun benzinaio) in funzione dei prezzi praticati dai due benzinai.
- Trovare i due prezzi di equilibrio, supponendo che ogni benzinaio massimizzi il ricavo (trascuriamo il costo del prodotto, assumendo che sia zero). I due prezzi sono identici?

NB: Volendo fare davvero bene le cose, dovremmo tenere conto del fatto che (in linea di principio), potrebbero esistere dei prezzi per i quali uno dei due benzinai cattura il 100% dei clienti. Nel rispondere, non considerate questa potenziale difficoltà (se volete, potete verificare a posteriori se ciò è davvero un problema). Inoltre, è bene verificare che le vostre risposte abbiano senso… (esempio, se la domanda complessiva non supera il numero di clienti; il numero totale di clienti è irrilevante, dato che conta la frazione di domanda catturata, quindi se volete potete assumere che questo sia 1).

Soluzione

Il costo complessivo per un cliente in posizione *x*, se si rivolge a ciascuno dei due fornitori, è

$$c_1(x) = 2|x - 0.25| + p_1$$
$$c_2(x) = 2(1 - x) + p_2$$

Ci serve la posizione limite dei clienti che scelgono il primo benzinaio (quello a sinistra). Si servono dal primo benzinaio i clienti in posizione tale che

$$c_1(x) = 2|x - 0.25| + p_1 < 2(1 - x) + p_2$$

Possiamo trovare il cliente "limite" risolvendo

$$2(x - 0.25) + p_1 = 2(1 - x) + p_2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{5}{8} + \frac{p_2 - p_1}{4}$$

(dove si prende la posizione di un cliente a destra del primo benzinaio, supponendo che il cliente limite stia tra i due benzinai, cosa che possiamo verificare a posteriori; osserviamo che se questo sceglie il benzinaio 1, a maggior ragione lo farà un cliente a sinistra; inoltre, se prendiamo l'altro ramo del valore assoluto, la variabile *x* sparisce…).

Quindi la funzione di domanda per il primo benzinaio (che prende tutti i clienti con posizione tra 0 e quella limite) è

$$d_1(p_1, p_2) = \frac{5}{8} + \frac{p_2 - p_1}{4}$$

La funzione per l'altro benzinaio è il complemento a 1:

$$d_2(p_1, p_2) = 1 - d_1(p_1, p_2) = \frac{3}{8} - \frac{p_2 - p_1}{4}$$

I due ricavi sono

$$R_1 = p_1 d_1(p_1, p_2) = p_1 \frac{5}{8} + p_1 \frac{p_2 - p_1}{4}$$
$$R_2 = p_2 d_2(p_1, p_2) = p_2 \frac{3}{8} - p_2 \frac{p_2 - p_1}{4}$$

Imponendo l'equilibrio abbiamo il sistema di equazioni

$$\frac{\partial R_1}{\partial p_1} = \frac{1}{8}(5 + 2p_2 - 4p_1) = 0$$
$$\frac{\partial R_2}{\partial p_2} = \frac{1}{8}(3 - 4p_2 + 2p_1) = 0$$

da cui troviamo $p_1 = 13/6$ e $p_2 = 11/6$. In effetti il secondo benzinaio (che è sul bordo della strada) deve praticare un prezzo più basso, come logico. Con questi prezzi, il cliente indifferente sta in posizione

$$x = \frac{5}{8} + \frac{2}{4 \cdot 6} = \frac{17}{24}$$

compresa tra i due benzinai.

Problema 13

Considerate un mercato su cui operano due aziende. Il mercato è descritto dalla seguente funzione, che lega la produzione aggregata al prezzo di mercato: P = 2000 – 2Q

Le due aziende hanno la stessa funzione di costo, C = 80,000 + 560 q, che contiene un termine di costo fisso, oltre a uno variabile in modo lineare.

a) Trovate l'equilibrio di Cournot-Nash (produzione di ogni azienda, il prezzo, il profitto di ogni azienda).
b) Trovate la soluzione nel caso di un unico produttore (monopolista) con la stessa funzione di domanda inversa e di costo del caso precedente.
c) Ricavare e confrontare il surplus del consumatore nei due casi precedenti. Quale caso è preferito dal consumatore?
d) In economia, si calcola il "benessere sociale" sommando il profitto ed il surplus del consumatore. In quale dei due casi è maggiore il benessere sociale? Il risultato corrisponde alla vostra intuizione? Come lo si spiega? In quale situazione potreste trovare un risultato opposto?

Problema 14
Consideriamo due aziende che producono un bene omogeneo e competono sul prezzo (NON sulle quantità). Il costo unitario di produzione del bene è costante e pari a €0.75 per entrambe le aziende, che usano la stessa tecnologia. I consumatori scelgono il prodotto che costa meno, se vi è una differenza; se, al contrario, i prezzi sono uguali, il mercato si divide in parti uguali tra le due aziende.
La funzione di domanda è $d(p) = 100 - p$, dove il prezzo è quello più piccolo o quello comune alle due aziende. Inoltre, supponiamo che in quel mercato siano state bandite le monetine da 1 e 2 centesimi di euro, per cui la minima differenza tra due prezzi è €0.05 (un prezzo come €5.02 non è ammissibile, mentre lo sono €5.00 e €5.05).

1. Quali sono i punti (p_1, p_2) ragionevolmente candidati a essere equilibri di Nash?
2. Dimostrare che il punto $(0.80, 0.80)$ è un equilibrio di Nash.
3. Usando e generalizzando il ragionamento del punto 2, quali sono (se esistono) gli altri equilibri?

Soluzione
Possiamo facilmente escludere tutti i punti con prezzo diversi o inferiori a €0.75, perché una delle due aziende avrà sempre incentivo a deviare.
Nel punto $(0.80, 0.80)$ il profitto dell'azienda 1 (su cui ci focalizziamo data la simmetria del problema) è

$$0.5 \times (100 - 0.80) \times (0.80 - 0.75) = 2.478$$

Se l'azienda incrementa il prezzo, il profitto scende a zero. Se tenta di fare undercutting (il che implica ridurre il prezzo di €0.05), il profitto diventa

$$(100 - 0.75) \times (0.75 - 0.75) = 0$$

Per cui l'azienda non ha incentivo a deviare. Anche il punto (0.75,0.75) è un equilibrio, anche se meno conveniente per entrambe le aziende.
In generale, nel punto (p,p) il profitto è (azienda 1)

$$0.5 \times (100 - p) \times (p - 0.75)$$

che applicando undercutting diventa

$$(100 - p + 0.05) \times (p - 0.05 - 0.75)$$

Si ha un equilibrio se

$$0.5 \times (100 - p) \times (p - 0.75) > (100.05 - p) \times (p - 0.8)$$

ovvero se

$$p^2 - 100.95p + 85.08 > 0$$

Le radici dell'equazione di secondo grado sono 100.1001 e 0.8499. Non è conveniente fare undercutting per prezzi maggiori della prima radice, ma in quel caso la domanda è zero, o inferiori alla seconda, ovvero per prezzi pari a 0.8 e 0.75. Quindi i due punti di cui sopra sono gli unici equilibri.

Problema 15
Consideriamo un mercato in cui operano n aziende, il cui costo di produzione è zero. Il prezzo di mercato dipende dalla quantità totale prodotta, $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$, dove q_i è la quantità prodotta dall'azienda i, secondo la funzione $p = e^{-Q}$. Ogni azienda desidera massimizzare il proprio ricavo.

- Supponendo $n = 2$, disegnare la curva di reazione dell'azienda 1 e ricavare l'equilibrio di Cournot.
- Cosa accade, in termini di prezzo e quantità prodotta, per il limite $n \to \infty$?

NB: Attenzione a trattare correttamente i problemi di ottimizzazione verificando la sufficienza delle condizioni.

Soluzione
Il ricavo/profitto/payoff per l'azienda 1 è

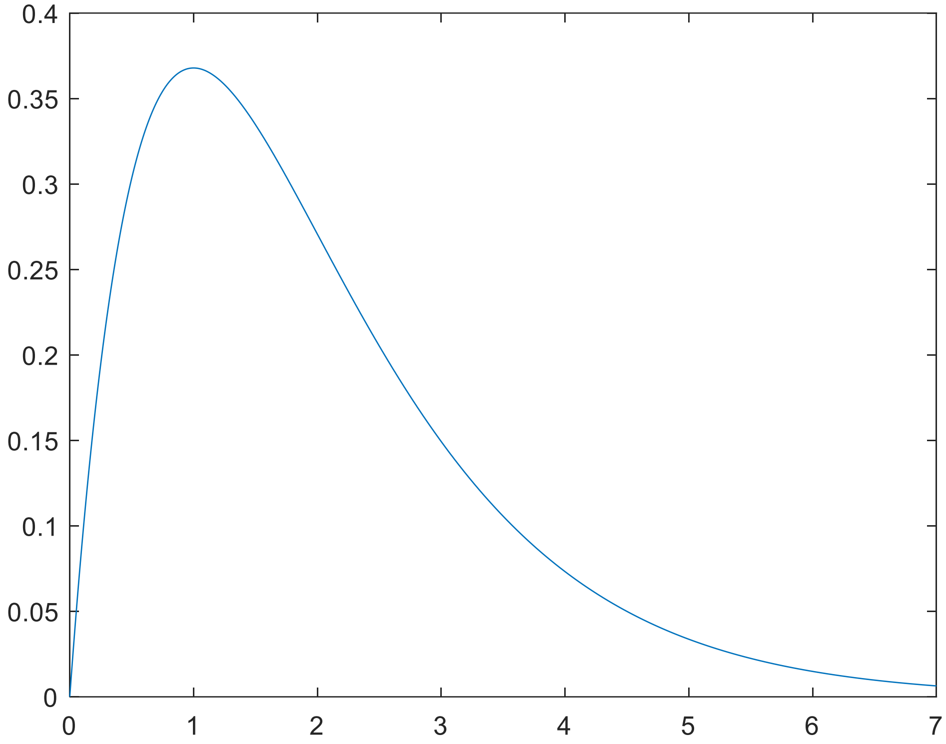
$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1 e^{-(q_1+q_2)}$$

La condizione del primo ordine è

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = e^{-(q_1+q_2)} - q_1 e^{-(q_1+q_2)} = 0$$

che implicherebbe $q_1 = 1$, indipendentemente dalla scelta dell'azione 2 (la curva di reazione sarebbe una retta costante che fornisce la risposta q_1 per ogni $q_2 \geq 0$).

Per trovare il massimo, non è detto che sia sufficiente imporre questa condizione. In effetti la funzione non è concava (ma quasi; infatti ha un solo massimo, essendo una funzione quasiconcava).



Possiamo considerare la derivata seconda nel caso generale di n aziende, analizzando la funzione:

$$\pi_1(q_1, \boldsymbol{q}_{-1}) = q_1 e^{-(q_1+A)}$$

Dove $\boldsymbol{q}_{-1}$ è il vettore delle quantità di tutte le aziende tranne la prima e A è la somma delle loro quantità. In pratica, per simmetria e dato che e^{-A} è una quantità comunque positiva, ci basta considerare xe^{-x}, la cui derivata seconda $(x-2)e^{-x}$ è negativa per $x < 2$, e quindi il punto candidato di cui sopra è un massimo locale. Se poi consideriamo il segno della derivata prima, per valori positivi dell'argomento delle funzione, vediamo che passa da positiva a negativa in corrispondenza del massimo, che quindi è globale sull'intervallo di interesse (infatti la funzione è unimodale).

Quindi, anche nel caso di n aziende, ognuna di esse produce una singola unità del bene, e quando n va a infinito la quantità prodotta totale va a infinito, mentre il prezzo va a zero.

Problema 16

In un mercato molto semplice operano due aziende, che producono un bene omogeneo, e due consumatori. I due consumatori comprano ciascuno una singola unità del prodotto, se il prezzo è non maggiore di 10. Se i due prezzi (P_1 e P_2) sono identici, entrambi i consumatori comprano dall'azienda 1, altrimenti da quella che offre il bene al prezzo minore. I costi fissi di produzione sono nulli, e le funzioni di costo per entrambe le aziende sono lineari. Il costo variabile di produzione è 4 per l'azienda 1, 6 per l'azienda 2. La sequenza precisa di eventi è: Le aziende comunicano i prezzi, i consumatori ordinano, i beni vengono prodotti.

e) Dimostrare che tutti i punti $4 \leq P_1 = P_2 \leq 6$ sono equilibri di Nash.
f) Considerare un paio di altri casi, dimostrare che non sono equilibri di Nash [**NON** è richiesto di dimostrare che *tutti* gli altri punti non sono equilibri di Nash; bastano un paio di esempi]

Soluzione

A) In questo caso, date le discontinuità delle funzioni che rappresentano il profitto delle due aziende, usare derivate e simili non porta a molto. Basta ricordare che un equilibrio di Nash è un punto in cui nessun giocatore ha un incentivo a deviare, se non lo fa l'altro (NB: qui abbiamo un gioco statico).
Per i punti del tipo $4 \leq P_1 = P_2 \leq 6$, il profitto dell'azienda 2 è zero, mentre quello dell'azienda 1 è $\pi_1 = 2(P_1 - 4) \geq 0$. In questa situazione:

- L'azienda 1 non ha incentivo a ridurre il prezzo, perché ridurrebbe il profitto, pur catturando la domanda; non ha neppure incentivo ad aumentarlo, perché perderebbe la domanda, e il profitto andrebbe a zero.
- L'azienda 2 non ha incentivo a ridurre il prezzo, perché catturerebbe la domanda, ma andrebbe in perdita; non ha neppure incentivo ad aumentarlo, perché il profitto rimane zero.

Quindi, i punti considerati sono di equilibrio.

B) Consideriamo, ad esempio, un punto $P_1 = P_2 > 6$. In questo caso, l'azienda 2 ha incentivo a ridurre il prezzo per fare undercutting e catturare la domanda, perché il suo profitto passa da zero a una quantità strettamente positiva.
Consideriamo, in alternativa, un punto all'interno del range tra 4 e 6, ma con $P_1 > P_2$. In questo caso, l'azienda 1 ha incentivo a ridurre il prezzo (al livello del concorrente), perché il suo profitto passa da zero a una quantità strettamente positiva.

Problema 17
Consideriate il (semplicissimo) problema

$$max \sum_{k=1}^{3} \log x_k$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_k \leq b; \quad x_k \geq 0$$

e risolvetelo mediante la programmazione dinamica.

Soluzione
Molto simile a quanto fatto nel testo per la radice quadrata.