ESAME BA 19/07/2024 CLOSED BOOK – 90min

Domanda 1

La programmazione dinamica stocastica può essere utilizzata per il pricing di un'opzione di stile americano, assumendo una dinamica markoviana. Supponiamo di avere a che fare con fattori di rischio che presentano un tipo complicato di path dependency, il che preclude l'uso della programmazione dinamica. Costruire un modello di programmazione stocastica multistadio per stimare il valore dell'opzione, supponendo che l'incertezza sia modellata mediante un albero di scenari, che per ogni nodo riporta il payoff dell'opzione, se esercitata in quel nodo. Il tasso di interesse risk-free è assunto costante per semplicità.

Soluzione

La strada più semplice è costruire un modello split-variable (ma si può benissimo usare la strada del modello compatto).

Nell'albero degli scenari abbiamo il payoff scontatoP_t^s, che si ottiene se si esercita l'opzione al tempo *t* nello scenario *s*. Indichiamo con π^s la probabilità dello scenario *s*.
La variabile decisionale èδ_t^s, variabile binaria posta a 1 se si esercita l'opzione al tempo *t* nello scenario *s*, 0 altrimenti. Si può esercitare l'opzione al più una volta lungo lo scenario (cosa che definisce lo stopping time), avendo cura di rendere le variabili non anticipativa (per i raffinati, lo stopping time deve essere misurabile rispetto alla filtrazione).

La funzione obiettivo è

$$\sum_s \pi^s \sum_t (P_t^s \delta_t^s)$$

con il vincolo

$$\sum_t \delta_t^s \leq 1 \qquad \forall s$$

Si aggiungono i vincoli di non anticipatività, in cui indichiamo con $\{s\}_t$ il set di scenari non distinguibili da *s* al tempo *t*:

$$\delta_t^s = \delta_t^{\tilde{s}} \qquad \forall t, s, \tilde{s} \in \{s\}_t$$

Si può anche utilizzare una formulazione compatta, ma occorre essere molto chiari nell'esprimere il vincolo che si può esercitare al più una volta su ogni scenario.
Il modello è molto banale, ma è la base di modelli per opzioni che possono essere esercitate più di una volta (energy derivatives), oltre che per coprire il rischio di chi scrive l'opzione e non solo.

Domanda 2

Spiegare come si ottengono i tagli di ammissibilità (feasibility cuts) nella decomposizione di Benders (L shaped) applicata a un problema di programmazione lineare stocastica, con ricorso, a due stadi.

Domanda 3

Si vuole valutare l'impatto dell'errore di modello in un problema di revenue management per una compagnia aerea. Il volo ha un numero dato di posti (identici), venduti a due tariffe diverse per un mercato perfettamente segmentato. Si chiudono le vendite in un istante di tempo futuro dato, e le richieste di biglietti arrivano secondo due processi di Poisson, con rate costanti e diversi per le due classi tariffarie. I due processi di arrivo delle due classi sono indipendenti.

Sulla base di una stima (affetta di errore) dei rate di arrivo, è semplice determinare un livello di protezione per la classe tariffaria più alta (posti riservati) se si assume che arrivino prima tutte le richieste della classe inferiore. Così non è, e si vuole simulare un processo di arrivo più realistico, con richieste mescolate nel tempo, in modo da valutare il ricavo ottenuto sulla base del livello di protezione determinato applicando il modello statico come euristica (regola di Littlewood, basata sul modello newsvendor). Il simulatore deve anche permettere di valutare l'impatto di errori di stima dei rate di Poisson (nel qual caso si prende la decisione sulla base di rate affetti da errore di stima, ma si simulano quelli veri).

Scrivere un programma MATLAB (script o funzione) che valuti il profitto su una singola replicazione, ovvero un solo sample path dei processi stocastici (ovvio che in pratica occorre una procedura statisticamente giustificata).
NB: MATLAB offre una ricca libreria di funzioni statistiche che permettono di campionare variabili casuali e di valutare PDF/PMF/CDF per ogni distribuzione. Potete assumere di avere le funzioni che vi servono, a cui potete assegnare il nome che preferite.

Soluzione
Vedere codice MATLAB sul portale.