

# COSTO INCERTEZZA-MODELLI DECISIONALI

ATO

Una prev puntuale non è sufficiente: conta il costo dell'errore e il criterio decisionale.

**Costo dell'errore di previsione.** Il criterio di prev dipende dalla f di perdita.

- **errore quadratico medio (MSE):** penalità simmetrica, previsione ottima pari al valore atteso  $MSE(x) \doteq \mathbb{E}[(X - \bar{x})^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\bar{x}\mathbb{E}[X] + \bar{x}^2$
- **deviazione assoluta:** penalità lineare, previsione ottima pari alla **mediana** o a un quantile  $\mathbb{E}[|X - x|]$

**Ottimizzazione sotto incertezza.** L'obb non è prevedere, ma scegliere decisioni ottimali in presenza di fattori aleatori.

- **worst-case robust:** ottimizzazione sullo scenario peggiore, senza distribuzioni di probabilità
- **stocastica:** minimizzazione del valore atteso, con modellazione probabilistica esplicita

$$\min_{x \in S} \max_{\xi \in U} f(x, \xi)$$

$$\min_{x \in S} \mathbb{E}_{\xi} [f(x, \xi)]$$

## ALBERI DECISIONALI

**Rappresentazione temporale.** Gli alberi decisionali descrivono in modo esplicito la **sequenza di decisioni e realizzazioni aleatorie**, con decisioni adattive nel tempo.

**Struttura dei nodi.**

- **nodi decisionali:** scelte tra alternative esclusive
- **nodi casuali:** esiti aleatori con probabilità associate

**Procedura di soluzione.** La valutazione avviene per backward induction: un nodo è valutabile dopo i successori.

## EVPI & VSS

**Valori ottimi.** Descrivono diversi livelli di informazione e di modellazione dell'incertezza.

- **f\***: ottimo stocastico here-and-now
- **fpi\***: ottimo con info perfetta wait-and-see
- **fev\***: ottimo deterministico a valori medi
- **feev**: costo atteso della soluzione EV

**Misure del valore dell'info.** Quantificano il beneficio di modellare o osservare l'incertezza.

- **EVPI**: beneficio teorico della chiaroveggenza
- **VSS**: guadagno della soluzione stocastica

$$f^* = \min_{x \in S} \mathbb{E}_{\xi} [f(x, \xi)] \quad f_{EEV} = \mathbb{E}_P [f(\bar{x}, \xi)]$$

$$f_{PI}^* = \mathbb{E}_P \left[ \min_{x \in S} f(x, \xi) \right] \quad f_{EV}^* = \min_{x \in S} f(x, \mathbb{E}_P[\xi])$$

$$VSS = f_{EEV} - f^* \quad EVPI = f^* - f_{PI}^*$$

## MODELLO A DUE STADI

**Idea.** Le decisioni sono separate in here-and-now e wait-and-see, adattandosi tramite il ricorso.  $Q(x) = \mathbb{E}_{\xi} [Q(x, \xi)]$

**Fattibilità.** Il 1 stadio è ammissibile solo se il 2 è fattibile per ogni scenario (complete relatively complete recourse).

**Ambiente produttivo.** I prodotti finali sono assemblati da componenti comuni dopo l'osservazione della domanda.

**Struttura decisionale.**

1. **here-and-now:** produzione
2. **wait-and-see:** assemblaggio

**Modello.** Problema stocastico a due stadi con valore di ricorso

$$\begin{aligned} \max & - \sum_{i \in [n_i]} C_i x_i + \sum_{s \in [n_s]} \pi^s \left( \sum_{j \in [n_j]} P_j y_j^s \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in [n_i]} T_{is} x_i \leq L_m, & m \in [n_m] \\ & y_j^s \leq d_j^s, & j \in [n_j], s \in [n_s] \\ & \sum_{j \in [n_j]} G_{ij} y_j^s \leq x_i, & i \in [n_i], s \in [n_s] \\ & x_i, y_j^s \in \mathbb{Z}_+, & i \in [n_i], j \in [n_j], s \in [n_s]. \end{aligned}$$

## PLANT LOCATION MODEL

**Idea.** La scelta di apertura degli impianti è presa sotto incertezza, mentre i flussi di trasporto sono adattati dopo l'osservazione della domanda.

## CAP 1

### INTRODUZIONE ALLE DECISIONI IN CONDIZIONE DI INCERTEZZA

Le **decisioni** sotto incertezza, rendono insufficiente la previsione puntuale e richiedendo modelli.

#### Obiettivi

- distinguere **ottimizzazione robusta e stocastica**
- introdurre i principali **modelli decisionali**
- rappres decisioni adattive con **alberi decisionali**
- chiarire **multistadio vs multiperiodo**
- valutare **scenari, stabilità** in-sample e out-of-sample

## NEWSVENDOR

**Idea.** Le quantità produttive sono decise progressivamente sotto incertezza e gli esiti finali generano costi di overage e underage.

$$\begin{aligned} \min & \sum_{n \in \mathcal{N}_2} \pi^n \sum_{i \in \mathcal{I}} (c_i^o o_i^n + c_i^u u_i^n) \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i^0 \leq K_1 \\ & m_i \delta_i^0 \leq x_i^0 \leq K_1 \delta_i^0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i^n \leq K_2 \quad \forall n \in \mathcal{N}_1 \\ & m_i \delta_i^n \leq x_i^n \leq K_2 \delta_i^n \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathcal{N}_1 \\ & x_i^0 + x_i^{n(n)} = d_i^m + o_i^n - u_i^n \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathcal{N}_2 \\ & x_i^n \in \mathbb{Z}_+, \delta_i^n \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall n \in \{0\} \cup \mathcal{N}_1 \\ & u_i^n, o_i^n \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathcal{N}_2. \end{aligned}$$

## UNIT COMMITMENT

**Modello multiperiodale.**

- decisioni di attivazione here-and-now
- produzione adattata alla domanda

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i \in [I], t \in [T]} (E_i u_{it} + F_i s_{it}) + \sum_{\omega \in \Omega} \pi^{\omega} \sum_{i \in [I], t \in [T]} C_i (q_{it}^{\omega} - m_i u_{it}) \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in [I]} q_{it}^{\omega} \geq d_t(\omega) \quad \forall t \in [T], \forall \omega \in \Omega \\ & m_i u_{it} \leq q_{it}^{\omega} \leq M_i u_{it} \quad \forall i \in [I], \forall t \in [T], \forall \omega \in \Omega \\ & s_{it} \geq u_{it} - u_{i,t-1} \quad \forall i \in [I], \forall t \in [T] \\ & u_{it} \leq a_i \quad \forall i \in [I], \forall t \in [T] \\ & u_{it} \in \mathbb{Z}_+, s_{it} \in \mathbb{Z}_+, q_{it}^{\omega} \geq 0 \quad \forall i \in [I], \forall t \in [T], \forall \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

# COMPLESSITÀ INTRINSECA: SCHEDULING

**Problema di scheduling (min,max) su macchina singola.** Sequenziamento di job su una macchina per controllare il max ritardo rispetto alle due date.

$$C_{\sigma(1)} = p_{\sigma(1)}, \\ C_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k-1)} + p_{\sigma(k)}, \quad k = 2, \dots, n. \quad L_{\max} = \max_{j \in [n]} L_j \quad L_j = C_j - d_j.$$

**Teorema (regola EDD – Earliest Due Date).** Per il prob  $1/rj/L_{\max}$  esiste una sol ottima in cui i job sono ordinati per due date crescenti.

$$d_{\sigma(k)} \leq d_{\sigma(k+1)}$$

- ▶ algo polinomiale
- ▶ prob computazionalmente trattabile

**Realise Time.** L'introduzione dei tempi di rilascio ( $1/rj/L_{\max}$ ) vincola l'avvio dei job e rende non più ottima la regola EDD, aumentando la compl intrinseca del prob.

**Non esistono** algo di compl polinomiale che lo risolvono, solo **branch-and-bound**.

## TEORIA DELLA NP-COMPLETEZZA

Esiste una vasta classe di prob di ottimizzazione per cui non sono noti algo polinomiali.

**Idea centrale.** La **teoria della NP-completezza** mostra che molti di questi prob sono equivalenti dal punto di vista computazionale.

- ▶ se uno solo ammettesse un algo pol tutti i prob della classe lo ammetterebbero

**Conseguenza fondamentale.** Decenni di ricerca senza successo suggeriscono che

- tali algo probabilmente non esistono
- la difficoltà è intrinseca, non dovuta a modelli

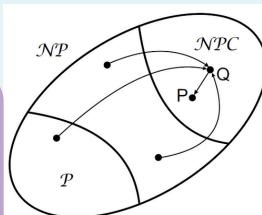
## CLASSI P – NP

**Classe P.** Prob di decisione per cui esiste un algo di compl polinomiale: il numero di passi è limitato superiormente da una funzione polinomiale.

L'algo

- trova una soluzione
- ne verifica la correttezza

**Classe NP.** Prob di decisione le cui istanze che hanno risposta positiva sono verificabili in tempo polinomiale. Esiste un certificato polinomiale su un **calcolatore non deterministico**.



## CAP 2 ELEMENTI DI COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

**Classificazione** dei prob di ottimizzazione in base alla **difficoltà intrinseca del prob**, indipendentemente dall'algo.

### Obiettivi principali

- distinguere **complessità** del prob vs algo
- introdurre **prob di decisione vs ottimizzazione**
- definire le classi **P, NP, NPH, NPC**

## RIDUZIONE POLINOMIALE

Un prob  $P$  è **riducibile** a  $Q$  se ogni istanza di  $P$  può essere trasformata in tempo polinomiale in un'istanza di  $Q$  con la stessa risposta.

- se  $P$  è difficile e  $P \leq Q$  ⇒  $Q$  non può essere facile
- la compl di  $P$  non è maggiore della compl di trasformare  $P$  in  $Q$  e poi risolvere  $Q$

$$\text{compl}(P) \leq \text{compl}(Q) + \text{compl}(P \rightarrow Q)$$

# PROBLEMI DI DECISIONE VS OTTIMIZZAZIONE

- **prob di decisione (PD):** risposta binaria (si / no)
- **prob di ottimizzazione (PO):** ricerca migliore sol rispetto a una f obiettivo  $\min_{x \in S} f(x)$

**Legame tra PO e PD.** Dato un PO, si definisce un PD scegliendo un valore  $k$  e chiedendo se esiste  $x$  in  $S$  tc  $f(x) < k$ .

**PD → PO.** Se si ha a disposizione un algo efficiente per PO, è possibile risolvere in modo efficiente PD

- ▶ se PD è difficile ⇒ PO non può essere facile
- ▶ per dimostrare che un prob di ottimizzazione è difficile, è sufficiente dimostrare che è difficile il corrispondente prob di decisione

## SCHEDULING CON RELEASE TIMES

La versione decisionale del prob di scheduling  $1/rj/L_{\max}$  è **NP-completa**.

- mostra che l'intrattabilità nasce con l'introduzione dei tempi di rilascio
- PO è NP-difficile

## CLASSI NPH – NPC

**Classe NPH.** Prob  $P$  tc ogni prob in NP è riduc a  $P$ .

▶  $PO + PD$

**Classe NPC.** Prob  $P$  tc

- $P$  è in NP      e       $P$  è NPH

▶ problemi più difficili in NP, tutti equivalenti

▶ per dimostrare che un PD  $P$  è NPC, occorre dimostrare che  $P$  è in NP e un prob NP-completo  $Q$  può essere ridotto in tempo polinomiale a  $P$

**Teorema di Cook.** Il prob della soddisfacibilità booleana è NP-completo.

$$(A \text{ or } B) \text{ and } (\text{not}(A) \text{ or } C)$$

## IMPATTO CODIFICA (KNAPSACK)

**Idea chiave.** La compl dipende dalla codifica dell'input, non solo dal prob.

- $B$  è **codificato in binario** ⇒ input di dimensione  $\log B$
- $O(nB)$  è **esponenziale** nella dimensione dell'input

**Pseudo-Polinomiale.** L'algo, rispetto alla codifica binaria, ha compl esponenziale. Se si utilizzasse un **computer con una codifica unaria**, l'algo avrebbe compl polinomiale.

# LIMITI ED EVOLUZIONE DEI SISTEMI MRP

**Limiti degli approcci classici.** I modelli tradizionali risultano inadeguati

- in ambienti non make-to-stock (make-to-order, assemble-to-order)
- presenza di vincoli di capacità produttiva
- distinte base multilivello

**Effetto di amplificazione della variabilità.** La propagazione dei fabbisogni lungo la distinta base può generare una forte amplificazione della variabilità, anche con domanda finale regolare.

**Evoluzione dei modelli MRP.** I sis MRP (Material Requirements Planning) nascono come risposta operativa al prob del lot-sizing multilivello

- ➡ assunzione di capacità infinita
- ➡ utilizzo di lead time fissati a priori

**Evoluzione verso MRPII ed ERP.**

- **MRPII (Manufacturing):** introduce la verifica dei vincoli di capacità
- **RCCP (Rough Cut Capacity):** verifica aggregata e approssimata della capacità
- **CRP (Capacity Requirement):** verifica dettagliata capacità sulle singole risorse
- **ERP (Enterprise Resource):** integrazione pianific con f commerciali e finanziarie

## LOGICA MRP

**Assunzione di capacità infinita.** Il vincolo di capacità non è modellato ed è surrogato da lead time fissati a priori.

**Lead time offsetting.** Gli ordini pianificati sono anticipati nel tempo rispetto ai fabbisogni.

**Record MRP.** Per ogni codice e periodo

- fabbisogni lordi
- magazzino disponibile (on-hand)
- ordini emessi (on-order)
- fabbisogni netti
- ordini pianificati

➡ la domanda dei prodotti finiti è definita dal

**MPS (Master Production Schedule)**

➡ l'MRP procede ricorsivamente lungo la distinta base

**Ordini pianificati.** Non sono esecutivi; al rilascio diventano ordini operativi e allocano giacenze.

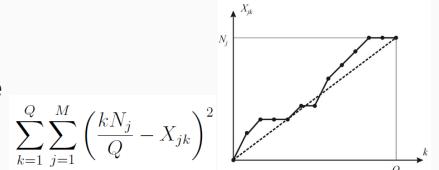
**Lot-sizing.** Regola base lot-for-lot: produci esattamente ciò di cui hai bisogno.

## APPROCCIO JUST-IN-TIME

**Definizione e obiettivo.** Il Just-In-Time (JIT) mira a ridurre la variabilità alla fonte tramite produzione livellata (**production smoothing**), lotti piccoli e frequenti e **riduzione dei tempi di setup**, con l'obiettivo di contenere WIP e lead time.

**Logiche di controllo.**

- **push:** rilascio ordini da previsione
- **pull:** produzione attivata da domanda reale
- **kanban:** controllo pull locale a segnali
- **CONWIP:** controllo pull con WIP globale



**Goal chasing.** Il Toyota Goal Chasing seleziona la sequenza produttiva che rende regolare il consumo dei componenti, minimizzando la distanza tra consumo ideale e consumo effettivo lungo il ciclo.

**Rotazione ciclica dei prodotti.** I prodotti si alternano su una linea con periodo di rotazione.

$$p_i T_i = d_i T_c \Rightarrow T_i = \frac{d_i}{p_i} T_c$$

Il limite inferiore dipende dai tempi di setup e dal rapporto tra tassi di domanda e produzione, evidenziando un legame con i fenomeni di congestione.

$$T_c \geq \sum_{i=1}^N s_i + \sum_{i=1}^N T_i$$

$$T_c \geq \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{1 - \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{p_i}}$$

## CAP 4

### SISTEMI MRP – ERP – APPROCCIO JIT

**Classificazione** dei sis di pianif e controllo della produz multilivello e con variabilità.

**Obiettivi principali**

- distinguere logiche push e pull
- chiarire il ruolo di variabilità, WIP e lead time
- pianificazione MRP a capacità infinita
- approccio Just-In-Time (Toyota)

**Idea chiave.** Le prestazioni del sis produttivo dipendono dalla **variabilità** (propagata o controllata).

## NERVOSISMO

**Nervosismo.** Piccole variazioni nel MPS producono grandi variazioni negli ordini pianificati dovute a

- **lot-sizing** a quantità variabile
- **effetto di bordo:** instabilità da rolling horizon

**Effetti.** Instabilità del piano e ordini urgenti.

**Mitigazione.**

- **time fencing:** congelamento temporale MPS
- **firm planned orders:** ordini non modificabili

## MPS e CRP

**MPS.** Il MPS è l'input primario dell'MRP, basato su ordini cliente e **forecasting**; può essere validato tramite RCCP e strutturato a due livelli in contesti ATO.

**CRP.** Il CRP verifica a posteriori la capacità; la correzione manuale è complessa e può generare lead time gonfiati e WIP, innescando un circolo vizioso.

## LEGGE DI LITTLE

**Prestazioni di shop floor.** La **Factory Physics** descrive le prestazioni tramite throughput, flow time e WIP.

**Legge di Little.** Esprime il legame strutturale tra queste grandezze.  $WIP = \text{throughput} \times \text{flow time}$   $L = \lambda(W_q + t_s)$

**Modello a singola macchina e variabilità.** In una singola macchina, l'attesa in coda cresce con l'utilizzazione e con la variabilità dei tempi di interarrivo e servizio.  $u = \lambda/\mu$

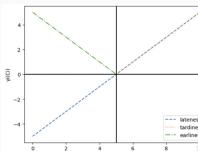
$$W_q \approx \left( \frac{C_a^2 + C_s^2}{2} \right) \left( \frac{u}{1-u} \right) t_s$$

**Buffering law.** In presenza di variabilità, il sistema deve introdurre buffer sotto forma di WIP, capacità o tempo o lead time.

# MISURE DI PRESTAZIONE

**Funzioni di penalità.**

- **tempo di completamento** ( $C_i$ ): istante di fine dell'ultima operazione del job
- **flow time** ( $F_i$ ):  $C_i - r_i$ , tempo totale trascorso nel sistema
- **lateness** ( $L_i$ ):  $C_i - d_i$ , anticipo o ritardo rispetto alla due date
- **tardiness** ( $T_i$ ):  $\max(C_i - d_i, 0)$ , penalizza solo i ritardi
- **earliness** ( $E_i$ ):  $\max(d_i - C_i, 0)$ , penalizza solo gli anticipi
- **indicatore di ritardo** ( $U_i$ ): vale 1 se  $C_i > d_i$ , 0 altrimenti



**Misure aggregate.** Flow time totale, flow time totale pesato, massima lateness, tardiness totale pesata, makespan (massimo dei  $C_i$ ), numero di job in ritardo.

**Soluzioni equivalenti.** Una sol ottima rispetto a una misura è ottima anche per un'altra; es lateness totale e flow time totale differiscono solo per una costante.

**Misure regolari.**  $F$  non decrescenti dei tempi di completamento  $C_i$ .

**Misure non regolari.**  $F$  non monotone in  $C_i$ , con penalità di earliness e tardiness.

- **schedul semiattiva:** ogni op è eseguita il più presto possibile
- **schedul attiva:** non esiste op anticipabile senza ritardarne un'altra

**Notazione di Graham (alpha | beta | gamma).** Layout delle macchine, vincoli aggiuntivi, misura di prestazione.

# ALGORITMI DI SOL NELLO SCHEDULING

**Algoritmi polinomiali (casi speciali).**

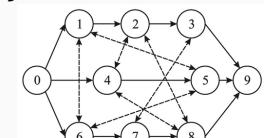
- **EDD:** ordinamento per due date crescenti; risolve  $1\backslash\backslash L_{\max}$
- **WSPT:** ordinamento per  $w_i/p_i$  decrescente; risolve  $1\backslash\backslash w_i C_i$
- **Johnson:** per  $F_2 \backslash C_{\max}$ ; la sol ottima usa la stessa sequenza sulle 2 macchine

**Regola ATC (Apparent Tardiness Cost).** Assegna priorità combinando **peso del job**, durata dell'operazione e urgenza rispetto alla due date.

- se il **job è in tempo** la priorità cresce esponenzialmente
- se è in **ritardo** si riduce alla regola WSPT  $\frac{w_i}{p_{ij}} \exp\left(-\left[\frac{d_i - t - p_{ij} - \sum_{q=j+1}^{m_i} (W_{iq} + p_{iq})}{k\bar{p}}\right]^+\right)$

**Lookahead + ricerca locale.**

- **beam search:** riduce la **miopia** delle regole di priorità
- **criticità:** evitare minimi locali (tabu, genetici), esplorare grandi vicini (LNS), evitare cicli



**Grafi disgiuntivi.**

- **nodi:** operazioni + dummy iniziale/finale
- **archi congiuntivi:** precedenze tecnologiche del job
- **archi disgiuntivi:** capacità macchina (clique per macchina), da orientare
- **cammino critico:** lunghezza massima start→end = makespan

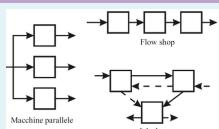
## MACHINE SCHEDULING

**Problemi di scheduling.** Assegnazione di risorse a job nel tempo, rispettando **vincoli** tecnologici, di capacità, precedenze, **tempi** di processo, due date.

**Soluzioni e diagrammi di Gantt.** Una sol è definita dalle sequenze di lavorazione sulle macchine ed è visualizzata tramite diagrammi di Gantt, che rappresentano graficamente l'allocazione temporale dei job.

**Tipi di flusso.**

- **macchina singola:** una sola risorsa
- **macchine parallele:** identiche, correlate o scorrelate
- **flow shop:** stesso ordine di macchine
- **job shop:** cicli di lavorazione diversi
- **open shop:** nessun ordine prefissato



## CAP 5 SCHEDULAZIONE IN PRODUZ-SERVIZI

**Schedulazione di job** su risorse nel tempo, con vincoli tecnologici e di capacità.

**Obiettivi principali**

- **misure di prestazione:** f sui tempi di completamento, aggregate min-sum o min-max
- **classificazione dei prob:** notazione di Graham
- **compl computaz:** distinzione tra casi polinomiali (EDD, WSPT, Johnson) e prob NPH
- **strategie di soluzione:** uso euristiche e shifting bottleneck per decomporre sis complessi

## MODELLO MILP J//Cmax

Nel modello MILP per  $J//C_{\max}$  solo perturbazioni degli archi disgiuntivi sul cammino critico sono utili, poiché evitano la creazione di cicli.

$$\begin{aligned} \min \quad & C_N \\ \text{s.t.} \quad & C_j \geq C_i + p_j, & \forall (i, j) \in P, \\ & C_j \geq C_i + p_j - M(1 - x_{ij}), & \forall (i, j) \in D, \\ & C_i \geq C_j + p_i - Mx_{ij}, & \forall (i, j) \in D, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall (i, j) \in D, \\ & C_i \geq p_i, & \forall i \in N. \end{aligned}$$

## PROCEDURA SHIFTING BOTTLENECK

**Idea.** Affrontare il problema  $J//C_{\max}$  **decomponendolo** in una sequenza di sottoproblemi su singola macchina, sfruttando il grafo disgiuntivo.

**Approssimazione del makespan.** Ottenuta tramite teste e code delle operazioni lungo il cammino critico, che stimano i tempi di rilascio e le scadenze locali.

**Riduzione.** Ogni macchina induce un problema  $1/r_i/L_{\max}$ , risolto in modo efficiente.

**Identificazione del collo di bottiglia.** La macchina con  $L_{\max}$  peggiore; la sua sequenza viene fissata e il processo iterato sulle restanti macchine.

## PROBLEMI A ORIZZONTE INFINITO

**Problema DP scontato.** Il problema è formulato come ottimizzazione del valore atteso della somma infinita dei contributi, pesati da un fattore di sconto oppure, in alternativa, tramite il **contributo medio per stadio**.

$$\text{opt}_{\mu \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t f_t(s_t, \mu_t(s_t)) + \gamma^T F_T(s_T) \right] \quad \text{opt} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0 \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f(s_t, x_t) \right]$$

**Politica decisionale.** Una politica chiusa e non anticipativa associa a ogni stato una decisione ammissibile → sequenza di funzioni nel tempo.  $x_t = \mu_t(s_t) \in X(s_t)$

- **politiche stazionarie** nei problemi a orizzonte infinito
- **politiche randomizzate** per vincoli probabilistici  $\mathbb{P}\{s_t \in G\} \geq 1 - \alpha$

**Modelli alternativi.** Con domanda incerta si distinguono

- **vendite perse:** domanda non soddisfatta eliminata, penalità per unità persa
- **backlog:** domanda accumulata, con inventario **B** e arretrati **B** penalizzati

$$O_{t+1} = \max\{0, O_t - B_t + x_t - d_{t+1}\}, \quad B_{t+1} = \max\{0, -O_t + B_t - x_t + d_{t+1}\}$$

## PRINCIPIO DP

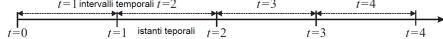
**Dinamica del sistema.** L'evoluzione del sis è descritta da una legge di transizione di stato che lega stato corrente, decisione e fattori esogeni.  $s_{t+1} = g_{t+1}(s_t, x_t, \xi_{t+1})$

**Variabili di stato.**

- **fisiche:** influenzate dalle decisioni
- **informative:** non influenzate dalle decisioni
- **di credenza:** non oggettive

**Politica non anticipativa.** Decisioni dipendono dall'info disponibile fino all'istante corrente.

**Scopo.** Ottimizzare una f obiettivo additiva nel tempo.



## ORIZZONTE FINITO SCONTATO

**Funzione obiettivo.** È il valore atteso della somma dei contributi nel tempo.

$$\text{opt} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t f_t(s_t, x_t) + \gamma^T F_T(s_T) \right]$$

- **contributo immediato:** costo o ricavo associato alla decisione nello stato corrente, eventualmente stocastico  $f_t(s_t, x_t) = \mathbb{E}_t [h_t(s_t, x_t, \xi_{t+1})]$
- **contributo terminale:** valore assegnato allo stato finale

**Fattore di sconto.** Il parametro  $\gamma \in (0,1)$  pesa i contributi futuri e riflette la preferenza temporale, pur non essendo essenziale in orizzonte finito.

## PROBLEMA DEL CAMMINO MINIMO

**Rete diretta aciclica.** Il prob è formulato su una rete diretta senza cicli, in cui ogni **nodo** rappresenta uno **stato** del sistema e ogni **arco** una possibile transizione con costo associato.

**Approccio greedy.** Una scelta locale basata sul **costo minimo immediato** non è in generale ottimale

► per migliorare la decisione: misura della qualità dello stato successivo

**Cammino minimo.** Il cammino ottimo gode di una proprietà di annidamento: ogni sottocammino di un cammino minimo è a sua volta ottimo.

**Ricorsione di Bellman.** Il valore di ciascun nodo è definito come **minimo del costo dell'arco più il valore del nodo successore**.

- risoluzione tramite ordinamento topologico
- definizione della **value function** su tutti gli stati

$$\min_{j \in S_i} (c_{ij} + V_j)$$

$$V_i = \min_{j \in S_i} (c_{ij} + V_j)$$

## EQUAZIONE DI BELLMAN

**Regola miopica.** Una decisione rapida consiste nel risolvere, nello stato corrente, un problema a singolo stadio che ottimizza solo il contributo immediato, trascurando gli effetti futuri.

**Idea centrale.** La DP introduce una value function che consente di bilanciare obiettivi di breve e lungo periodo e di ottenere la prestazione ottima.

**Equazione di Bellman.** Il valore dello stato è definito come ottimo del contributo immediato più il valore atteso dello stato successivo, parametrizzando il problema sullo stato.

$$V_t(s_t) = \text{opt}_{x_t \in X(s_t)} \left\{ f_t(s_t, x_t) + \gamma \mathbb{E}[V_{t+1}(g_{t+1}(s_t, x_t, \xi_{t+1})) \mid s_t, x_t] \right\}$$

**Teorema di ottimalità.** Ogni sottoproblema generato lungo una traiettoria ottima ammette come soluzione la restrizione della politica ottima originale.

## DP STOCASTICA PER ORIZZONTI FINITI

**Risoluzione all'indietro.** L'equazione di Bellman definisce un problema statico ma non miopico, risolto procedendo backward dalla condizione terminale e costruendo ricorsivamente la value function per ogni istante.

**Uso delle funzioni valore.** La conoscenza di  $V_t()$  guida le decisioni ottime.

- **caso deterministico:** sequenza di decisioni ottime e aggiornamento dello stato
- **caso stocastico:** simulazione Monte Carlo delle traiettorie

**Orizzonte infinito.** La DP scontata conduce a un'equazione funzionale in cui la value function è definita come **punto fisso** di un operatore.  $V(s) = \text{opt}_{x \in X(s)} \left\{ f(s, x) + \gamma \mathbb{E}[V(g(s, x, \xi))] \right\}$

$$V_{T-1}(s_{T-1}) = \text{opt}_{x_{T-1} \in X(s_{T-1})} \left\{ f_{T-1}(s_{T-1}, x_{T-1}) + \gamma \mathbb{E}[V_T(g_T(s_{T-1}, x_{T-1}, \xi_T)) \mid s_{T-1}, x_{T-1}] \right\}$$

## ALLOCAZIONE DISCRETA DI RISORSE

**Knapsack.** Selezione di un sottoinsieme di oggetti che massimizza il valore totale rispettando un vincolo di budget discreto, con decisioni binarie **tutto-o-niente**.

**Riformulazione DP.** Non è dinamico  $\Rightarrow$  allocazione sequenziale introducendo uno stadio fittizio **k** e usando il budget residuo come stato.

- **value function** tabulata su stati e stadi
- ricorsione di Bellman semplice e diretta
- algo a **compl pseudo-polinomiale**  $O(nB)$

$$V_k(s) = \begin{cases} V_{k+1}(s) & 0 \leq s < w_k, \\ \max\{V_{k+1}(s), V_{k+1}(s - w_k) + v_k\} & w_k \leq s \leq B. \end{cases}$$

$$s_{k+1} = s_k - w_k x_k, \quad s_1 = B.$$

$$\begin{aligned} \max & \sum_{k=1}^n v_k x_k \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^n w_k x_k \leq B, \\ & x_k \in \{0, 1\} \quad \forall k. \end{aligned}$$

## LOT-SIZING DETERMINISTICO

**Memorizzazione tramite tabella della  $V_k(s)$ .** L'approccio DP diretto è corretto ma diventa inefficiente se lo spazio degli stati è grande o continuo  $\Rightarrow$  **impraticabile la tabulazione**.

**Struttura e riformulazione.** Nel lot-sizing deterministico con soli costi fissi di ordine e costi lineari di giacenza, esiste una **forte proprietà strutturale** che consente di ridurre drasticamente il problema.

$$x_t \in \left\{ 0, d_{t+1}, (d_{t+1} + d_{t+2}), (d_{t+1} + d_{t+2} + d_{t+3}), \dots, \sum_{\tau=t+1}^T d_\tau \right\}$$

- **teo Wagner-Whitin:**  $\exists$  una sol ottima in cui non si ordina mai quando l'inventario è positivo  $I_t x_t = 0$
- **conseguenza:** ogni ordine copre esattamente uno o più periodi futuri consecutivi, oppure non viene effettuato

**Bilancio globale dei flussi.** Riformulazione come problema di cammino minimo su rete compatta

**algo ha compl pol**

$$\sum_{t=0}^{T-1} x_t = \sum_{t=1}^T d_t.$$

$$V_t(I_t) = \min_{x_t \geq d_{t+1} - I_t} \{ \phi \delta(x_t) + h(I_t + x_t - d_{t+1}) + V_{t+1}(I_{t+1}) \}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

## POLITICHE S E (s, S)

**Struttura stocastica del lot-sizing.** La Wagner-Whitin non vale, ma sotto hp di convessità emergono risultati strutturali. Con backlog ammesso e penalità convessa  $\Rightarrow$   $V_t(I_t) = \min_{x_t \geq 0} \{ c x_t + H(I_t + x_t) + \mathbb{E}[V_{t+1}(I_t + x_t - d_{t+1})] \}$

**Minimizzatori e politiche ottime.** Il prob può essere analizzato tramite minimizzatori vincolati e non vincolati della f costo attesa, distinguendo tra livelli ob accessibili e soluzioni di bordo.

- **politica base-stock:** si ordina fino al livello obiettivo S quando l'inventario è sotto S
- **politica (s, S):** si ordina solo se  $I_t < s$ , riportando l'inventario a S  $\Rightarrow$  ottim in stazionario
- **limiti della DP:** dimensionalità dello stato, ottimizzazione, aspettative, modellazione

## ALLOCAZIONE CONTINUA DI BUDGET

**Formulazione iniziale.** Il problema considera l'allocazione di un budget continuo tra attività, con contributi al profitto descritti da funzioni  $f_k()$  crescenti e concave.

**f obb è concava**

**hp sol interne: Lagrangiana** dà condizioni di ottimalità necessarie e sufficienti

**Riformulazione DP.** Il problema non è dinamico  $\Rightarrow$  viene riformulato come allocazione sequenziale introducendo uno stadio fittizio **k** e usando il budget residuo come stato. La  **$V_k(s)$  è infinito-dimensionale** e richiede approssimazione.

- $V_k(s)$  definita su **stato continuo**
- necessità di **discretizzazione e interpolazione**
- uso di **spline cubiche** per stimare valori fuori griglia
- **risoluzione numerica tramite DP backward**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} + \lambda \left( \sum_{k=1}^n x_k - B \right) & V_k(s_k) &= \max_{0 \leq x_k \leq s_k} \{ f_k(x_k) + V_{k+1}(s_k - x_k) \} \\ V_k(s_k) &= \max_{0 \leq x_k \leq s_k} \{ f_k(x_k) + V_{k+1}(s_k - x_k) \}, & V_n(s_n) &= \max_{0 \leq x_n \leq s_n} f_n(x_n) = f_n(s_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max & \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^n x_k \leq B, \\ & x_k \geq 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

## CAP 8

### IMPLEMENTAZIONE DP

La **DP** è uno strumento per risolvere problemi di allocazione discreti, continui e stocastici, usando la **V()** come oggetto computaz e evidenziando il ruolo della variabile di stato e delle decisioni di controllo.

#### Obiettivi

- da problemi statici a **processi sequenziali**
- costruire e approssimare la **value function**
- implementare **ricorsioni di Bellman** numeriche
- gestire stati discreti, continui e stocastici
- comprendere limiti computazionali della DP

## SCORTE STOCASTICHE

**Variazione stocastica del problema di lot-sizing.**

Domanda aleatoria discreta e assunzione di vendite perse. La  **$V_k(s)$  è tabulata** e lo stato evolve secondo una **dinamica con troncamento a zero dell'inventario fisico**.  $I_{t+1} = \max\{0, I_t + x_t - d_{t+1}\}$

**Spazio degli stati e costi.** Lo stato è l'inventario **It**, le azioni sono gli **ordini ammissibili**. Il costo immediato include costo lineare d'ordine e penalità sull'inventario contabile, potenzialmente non simmetrica.

- **inventario fisico  $\geq 0$**
- **inventario contabile anche  $< 0$**
- **costo immediato** in f dalla domanda futura
- **ricorsione DP** con termine di costo stocastico in aspettativa

$$V_t(I_t) = \min_{x_t \in \mathcal{X}(I_t)} [c x_t + \beta (I_t + x_t - d_{t+1})^2 + V_{t+1}(\max\{0, I_t + x_t - d_{t+1}\})]$$

$$\mu_t^*(I_t) = \begin{cases} S_t - I_t, & \text{se } I_t < s_t, \\ 0, & \text{se } I_t \geq s_t, \end{cases}$$

$$x_t^* = \mu_t^*(I_t) = \begin{cases} S_t - I_t, & \text{se } I_t < S_t, \\ 0, & \text{se } I_t \geq S_t. \end{cases}$$

$$H(y_t) := \mathbb{E}[q(y_t - d_{t+1})] = h \mathbb{E}[\max\{0, y_t - d_{t+1}\}] + b \mathbb{E}[\max\{0, d_{t+1} - y_t\}]$$

$$G_t(y_t) = c y_t + H(y_t) + \mathbb{E}[V_{t+1}(y_t - d_{t+1})]$$

$$S_t = \arg \min_{y_t \in \mathbb{R}} G_t(y_t)$$

**MANCA**

MANCA

**MCNA**

- MANCA

**MANCA**

MANCA

**MANCA**

MANCA

**MANCA -**

## CAP 11 IMPLEMENTAZIONE DP

MANCA

**MANCA**

MANCA

**MANCA**

MANCA

**MANCA**

MANCA