Business Analyitcs

Introduzione alle decisioni in condizioni di incertezza

Prof. Paolo Brandimarte
Dip. di Scienze Matematiche – Politecnico di Torino
e-mail: `paolo.brandimarte@polito.it`
URL: `staff.polito.it/paolo.brandimarte`

Questa versione: 7 marzo 2023

Le slide seguenti sono tratte dal capitolo 3 di: P. Brandimarte, *Ottimizzazione per la Ricerca Operativa*, CLUT 2022.

Business Analytics

1. **Descrittiva**. Esempio di overbooking ⟹ Descrive cos'è successo in passato

Revenue Management

Ipotizziamo un aereo con 50 posti ⟹ vendo 52 biglietti. Il 95% dei passeggeri davvero prendono l'aereo e supponiamo che ogni passeggero in overbooking costi 200€ ⟶ 5% no show: persone che non vanno

Check. X è il n° di passeggeri che si presentano ⟹ $\mathbb{E}(X) = 52 \cdot 0.95 = 49.4$ che è al di sotto della capacità

$\boxed{\mathbb{E}(C(X)) \neq C(\mathbb{E}(X))}$

X è discreta!

Calcoliamo la probabilità di overbooking ⟹ $P(\text{Overb.}) = P(X > 50) = P(X = 51) + P(X = 52) = 0.2595$

1 volta su 4 hai un problema!

↳ Ci serve una distribuzione ⟹ $X \sim Bin(n, p)$ n: esperimenti e p: successo

Matlab P51 = binopdf(51, 52, 0.95) e P52 = binopdf(52, 52, 0.95) → Il valore atteso NON fa visualizzare il rischio

Da cui abbiamo ottenuto che $\mathbb{E}(\text{costo}) = 200 \cdot P51 + 400 \cdot P52 = 65.78$ € ⟹ Il cliente non è soddisfatto

Ma! Assumiamo i passeggeri indipendenti ⟹ Non va bene! Bisogna almeno considerare le coppie!

Serie temporale: prevedo una cosa su cui non ho controllo (forecasting)
Prediction: ho controllo sulla variabile

2. **Predittiva** => cerca di prevedere cosa potrebbe accadere in futuro

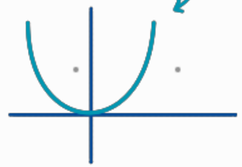
→ Regressione: variabili esplicative
→ Modello serie temporale: guardo il passato

Consideriamo una v.a. Y con una densità $f_Y(y)$ e voglio prevedere Y

Potremmo usare il valore atteso $\mathbb{E}(Y)$, ma al di sotto c'è un problema di minimizzazione

Quindi il problema è $\min_{\alpha} \mathbb{E}((Y-\alpha)^2) \Rightarrow \alpha^* = \mathbb{E}(Y)$ che è l'α ottimo

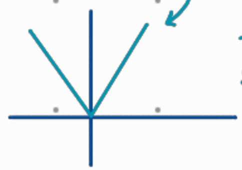
$$\mathbb{E}(Y^2 - 2\alpha Y + \alpha^2) = \mathbb{E}(Y^2) - 2\alpha\, \mathbb{E}(Y) + \alpha^2$$



Loss quadratica
1. Differenziabile
2. Simmetrica
3. Sensibile (molto) agli outliers

Ma così abbiamo una loss quadratica => potremmo usare il valore assoluto $|Y-\alpha|$ e la predizione sarebbe la mediana

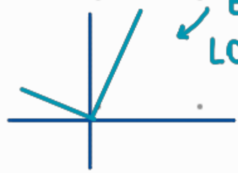
Tende a pesare di più per errori grossi



Loss valore assoluto
1. Non differenziabile
2. Simmetrica
3. Meno sensibile agli outliers

Queste due loss sono simmetriche, ma non è detto che in generale sia così

Si noti che in alcuni casi è differente avere un eccesso o un difetto, per cui la loss da utilizzare non deve essere simmetrica



Esempio di loss non simmetrica

3. **Prescrittiva** => si concentra sulla previsione di azioni future, suggerendo quale azione dovrebbe essere intrapresa

Livelli gerarchici:
1. Strategico => la differenza sta nel tempo in cui prendo la decisione
2. Tattico
3. Operativo

Problemi → I. Operations Managment: i.e. capacity planning, controllo produzione, pianificazione produzione

II. Supply Chain Managment: struttura a rete composta da più aziende

i.e. network design, veicle routing, progetto rotte degli aerei

III. Marketing: i.e. pricing, progetto prototipo/servizio, pricing dinamico

IV. Progetto e Controllo: i.e. progettare ala dell'aereo (ottimizzazione del profilo), energia

Simulazione di un sistema → File Simulazione MM1.m

Immaginiamo di voler simulare una coda M/M/1: Markoviano con processo di Poisson λ l'arrivo

Markoviano con processo Esponenziale μ tempo di esecuzione

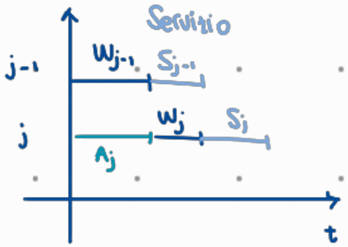
1 serviente alla volta

↓

Simuliamo i tempi di attesa in coda: exprnd(μ, m, n) → variabili casuali esponenziali

(μ: media; m: righe output; n: colonne output)

W_j := tempo di attesa in coda cliente j = $\max(0, W_{j-1} + S_{j-1} - A_j)$ Formula di Lindley



In questo caso $W_{j-1} + S_{j-1} = A_j + W_j \Rightarrow W_j = W_{j-1} + S_{j-1} - A_j$

interarrivo tra $j-1$ e j Ma A_j può essere grande e j non deve aspettare perchè $j-1$ è già andato via: max

Sequenza di decisioni in condizioni di incertezza prendendo in mezzo delle informazioni

Problema su decisioni in condizione di incertezza → Opzioni reali, non finanziarie

Il valore del tempo e dell'informazione

Siete i manager di una casa discografica che ha appena firmato un contratto con un nuovo gruppo heavy metal. Secondo il contratto, potete produrre zero, uno o due CD del gruppo nei prossimi due anni (uno all'anno).

↓ Sindrome del costo affondato
Se va male NON spendere altri soldi

Dovete anche scegliere tra due possibili piani di marketing.

Con il piano si produce 1 CD, se ne voglio fare 2 lo pago due volte

A

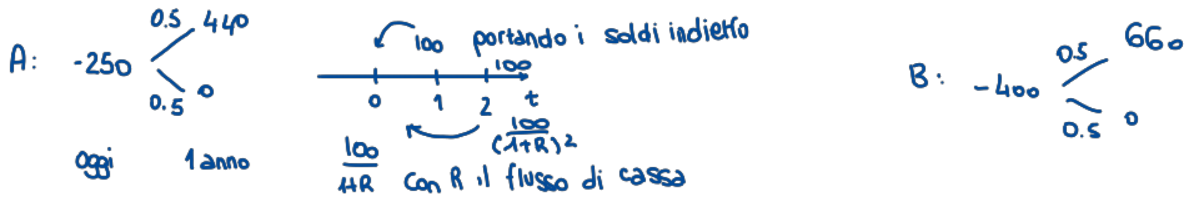
Il piano A costa 250 (per esempio, milioni di yen); se il CD è un successo, il profitto dalle vendite (al netto dei costi di produzione e distribuzione), sarà 440; se è un flop, il profitto è zero; la probabilità di successo è il 50%; supponiamo inoltre di scontare i flussi di cassa con un tasso del 10%. → In questo caso conta il tempo ($440€$ tra un anno sono $\frac{440}{1+0.1}$ €)

↳ Riflette il livello di rischio dell'investimento

B

Il piano B è più costoso (400), ma aumenta il profitto del 50%, senza alterare le probabilità (un modello più realistico contiene più scenari e cambiano anche queste probabilità).

Che fare? Sequenza in condizione di incertezza



Valore attuale netto (VAN), in inglese **Net Present Value** (NPV), è un indicatore finanziario che valuta la redditività di un investimento considerando il flusso di cassa generato nel tempo e attualizzandolo al tasso di sconto scelto. In altre parole, il NPV rappresenta il valore odierno di tutti i flussi di cassa futuri di un progetto, tenendo conto del costo del capitale.

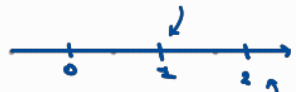
Valori assumibili

- NPV > 0: il progetto crea valore e l'investimento è redditizio.
- NPV = 0: il progetto non crea né distrugge valore e il rendimento è uguale al tasso di sconto.
- NPV < 0: il progetto distrugge valore e che l'investimento non è redditizio.

Il valore del tempo e dell'informazione

Posso prendere decisioni in più istanti di tempo ⇒

Decido se fare un CD o no



Decido se fare il secondo CD o no

Quali sono le scelte possibili?

CD → 0 → Non cadere nella sindrome del costo affondato

CD → 1, 2 } Quale opzione → A, B

- C_i := valore atteso R_i := esprime la varianza della variabile aleatoria di cui C è IE

Come valutiamo un investimento? Net present value (valore attuale netto) ⇔ bisogna valutare i flussi di cassa

attuale (dal futuro lo riporti a ora)

→ Si portano i flussi di cassa al tempo t=0 : "attuale"

⇒ La domanda è se guadagno o no dopo l'investimento

$$\boxed{NPV(R) = C_0 + \frac{C_1}{1+R} + \frac{C_2}{(1+R)^2} \begin{cases} >0 & \text{investimento buono} \\ <0 & \text{investimento da non fare} \end{cases}}$$

C_t := flussi al tempo t

In questa formula R è il fattore di sconto (1.1 nell'esempio). C0 rappresenta l'investimento iniziale. C1 è il profitto delle vendite moltiplicato per la probabilità di successo. C2 è il profitto delle vendite moltiplicate per la probabilità nel caso di basso profitto (insuccesso)

Ma i flussi di cassa sono stocastici

-250 → 0.5: 440 ; 0.5: 0

Valutiamo gli investimenti (opzione a e b) tramite il NPV

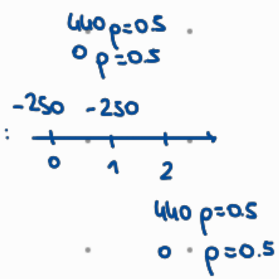
$$\Rightarrow a)\ NPV = -250 + \frac{0.5 \cdot 440 + 0.5 \cdot 0}{1.1} = -50 < 0$$ ⇒ Non va molto bene perché la probabilità di successo è troppo bassa

Piano A

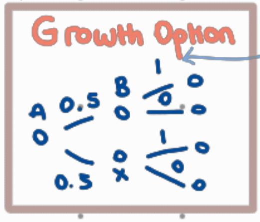
$$b)\ NPV = -400 + \frac{0.5 \cdot 660 + 0.5 \cdot 0}{1.1} = -100 < 0$$

Piano B

Ma possiamo considerare anche 2 CD e varie combinazioni di piano AA, AB, BA, BB → Seguendo AA :



Ma assumiamo che gli eventi siano ⊥⊥ ? No, bisogna condizionare sul lancio del disco successivo



probabilità condizionata al primo CD: come variano i risultati al variare dei dati

Ad esempio consideriamo il caso estremo in cui il sistema ha memoria perfetta. Nel prendere una sequenza

c'è acquisizione di informazioni alla fine del primo disco

→ È un sistema dinamico : $S_{t+1} = g(S_t, x_t, \xi_{t+1})$ qui CONTROLLIAMO il sistema

di decisioni, prima di prendere quella successiva, guardo il risultato

$$\Rightarrow NPV = \overset{>0!}{-250} + \frac{0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot (440-400)}{1.1} + \frac{660 \cdot 0.5 \cdot 1}{(1.1)^2} = 40.9$$

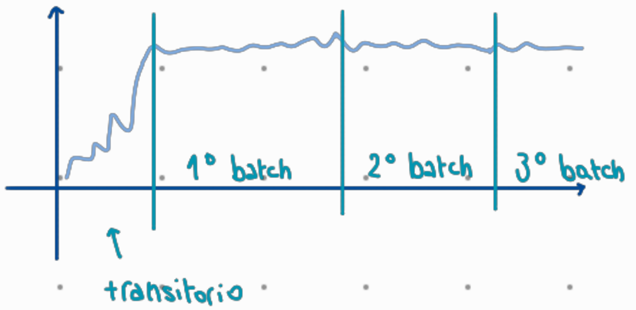
↳ Definiamo e seguiamo una politica

Dal sistema dinamico $S_{t+1} = g(S_t, x_t, \xi_{t+1})$ possiamo definire diverse variabili di stato

We should also distinguish different kinds of state variables:

- **Physical** state variables are used to describe the state of literally physical, but also financial resources. They are directly influenced by our decisions. → Se agisco in modo diretto su queste variabili
  ↳ «quanti soldi hai?»
- **Informational** state variables are somewhat different. For instance, the price of a stock share is a relevant piece of information, but in liquid markets this is not influenced by the activity of a single investor. → Su queste variabili non agisco io direttamente
  ↳ E' influenzata dai fattori di rischio
  «Ciò che io credo» Non e' oggettivo
- **Belief** state variables are relevant in problems affected by uncertainty about uncertainty. In such a case, planning experiments to learn the parameters of the model is essential, and the model parameters themselves (or the parameters of a probability distribution), along with our uncertainty about them, become state variables.

Metodo del bach: simuli una sola volta il transitorio, poi consideri batch abbastanza grandi da intenderli indipendenti



Output Analysis

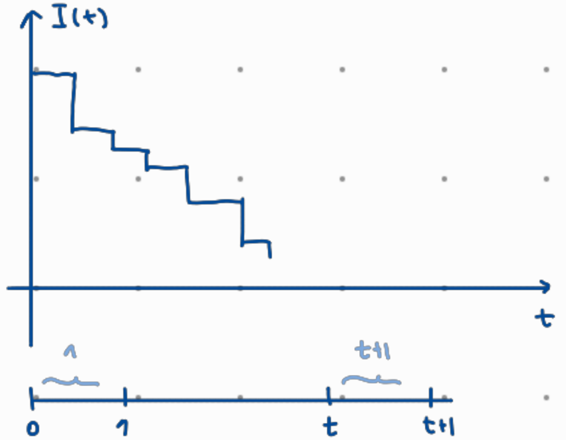
Ci sono metodi che aiutano a campionare in maniera più efficiente

Tipologie di simulazioni

1. A tempo continuo → risolvere edp
2. A eventi → a priori non sai dove accadono le cose
3. A tempo discreto: le decisioni le prendi ogni tot tempi

Simulazione del livello di magazzino

- Come si estende con backlog?
- Come si adatta aggiungendo il lead time?



$$I_{t+1} = I_t + x_t - d_{t+1}$$

↓ domanda in intervallo di tempo

intervallo di tempo — istante di tempo

Il livello di magazzino è la variabile di stato. Posso scegliere diverse politiche:

es. Fisso S che è il livello di magazzino a cui riordino e fisso s che è il minimo di riordino → ordini solo se ne vale la pena

Stato: On hand / on order

Eventi: • ricevo • servo • ordino

Come simulare?

I. Definizione degli obiettivi → cosa deve entrare nel modello? da dove vengono dati?

II. Input Analysis

III. Coding → programma di ottimizzazione

IV. Output Analysis → creazione degli intervalli di confidenza

V. Verifica → supponiamo che il modello matematico sia giusto, il programma è corretto? (= no bug)

VI. Validazione → controlla che il modello matematico sia giusto, riguarda il modello non il software

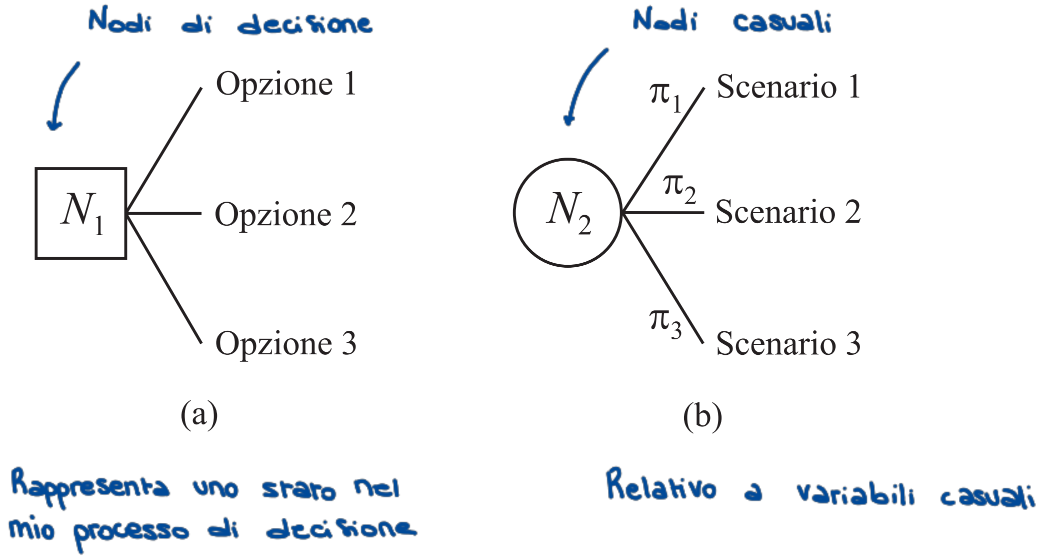
Fatto sul capitolo del libro

Gli alberi di decisione

Si prestano a trattare problemi in cui occorre prendere un piccolo numero di decisioni sequenziali in condizioni di incertezza.

Tre tipi essenziali di nodi.

- Nodi di decisione, in cui abbiamo un insieme finito di opzioni tra le quali scegliere.
- Nodi casuali (*chance nodes*), che corrispondono a distribuzioni di probabilità discrete. Ogni scenario ha una probabilità π_j, che in generale dipende dalla percorso seguito sull'albero.
- Nodi risultato, tipicamente associati a flussi di cassa.



In un albero si alternano decisioni e nodi casuali, che portano a risultati economici incerti.

Ci possono in realtà essere anche flussi di cassa intermedi, in funzione delle decisioni prese e degli scenari casuali che si realizzano.

La decisione dipende dall'awersione al rischio e da come lo valutiamo (con quale metrica)

Esempio: Lancio di un prodotto

Un'azienda ha sviluppato un nuovo prodotto e deve decidere se lanciarlo effettivamente sul mercato.

Non vuol dire che per forza bisogna venderlo

In casi di successo, ci si attende un profitto pari a 120,000 euro; in caso contrario, il profitto sarà solo di 20,000 euro, La probabilità di successo è stimata pari al 60%.

In alternativa, si può vendere il brevetto a 60,000 euro. => Vendo la proprietà intellettuale

→ Indagine di mercato: misuro il gradimento

Una terza opzione è aspettare e commissionare un *customer survey*, verificare il gradimento del prodotto presso un campione di consumatori potenziali.

(*) Ma qual e' la probabilità che sia utile

Il survey costa 4000 euro e, nel caso in cui l'esito sia promettente, la probabilità (condizionata) di successo sale al 90%, mentre scende al 30% in caso contrario.

- Qual è la strategia ottimale, se si vuole massimizzare il valore atteso del profitto?

  Facciamo finta di essere neutrali al rischio → guardiamo solo il valore atteso

- Qual è il massimo ammontare che vale la pena di spendere per il survey?

Apparentemente, tra i dati del problema ne manca uno, ovvero la probabilità di ottenere un risultato promettente dal survey.

(*) E' implicito nei dati, solo un numero ci porta a questi dati

Il concetto importante di questa slide è riferito proprio al **suvery**: questo non cambia la probabilità di successo o insuccesso di un prodotto, cambia solo l'informazione che abbiamo noi a riguardo.

Qui voglio solo capire se il prodotto e' buono, non miro a capire come migliorarlo

Il survey mira ad acquisire informazioni, ma *non* a riprogettare e migliorare il prodotto.

Pertanto, la probabilità a priori, non condizionata, di successo non può essere modificata dalla decisione di effettuare o meno l'indagine di mercato.

Se indichiamo con q la probabilità che il survey abbia esito promettente, con OK l'evento di successo sul mercato e con GO e noGO i due eventi legati al survey, abbiamo

Successo, Produci

Teorema delle PROBABILITA' TOTALI

$$0.6 = \mathbb{P}(\text{OK}) = \mathbb{P}(\text{OK} \mid \text{GO}) \cdot \mathbb{P}(\text{GO}) + \mathbb{P}(\text{OK} \mid \text{noGO}) \cdot \mathbb{P}(\text{noGO})$$
$$= 0.9 \times q + 0.3 \times (1 - q) \quad \Rightarrow \quad q = 0.5$$

Il problema può essere rappresentato mediante un albero decisionale.

La strategia di soluzione procede all'indietro, mediante l'etichettamento sequenziale *backward* dei nodi con il loro valore atteso monetario (EMV – *Expected Monetary Value*).

Valore atteso monetario

Possiamo etichettare un nodo solo quando tutti i suoi successori sono etichettati.

Da collegare a programmazione dinamica

$S_{t+1} = g(S_t, x_t, \xi_{t+1})$ a tempo discreto

S_t: Stato fisico oppure di conoscenza; x_t: azione; ξ_{t+1}: E' una variabile casuale per la gestione dei rischi

Prendo la decisione a tempo t, l'informazione ξ arriva a t+1

Ricordiamo che siamo NEUTRALI al rischio

La strategia e' una politica che mappa lo stato in una azione $\pi(S_t) \to x_t$

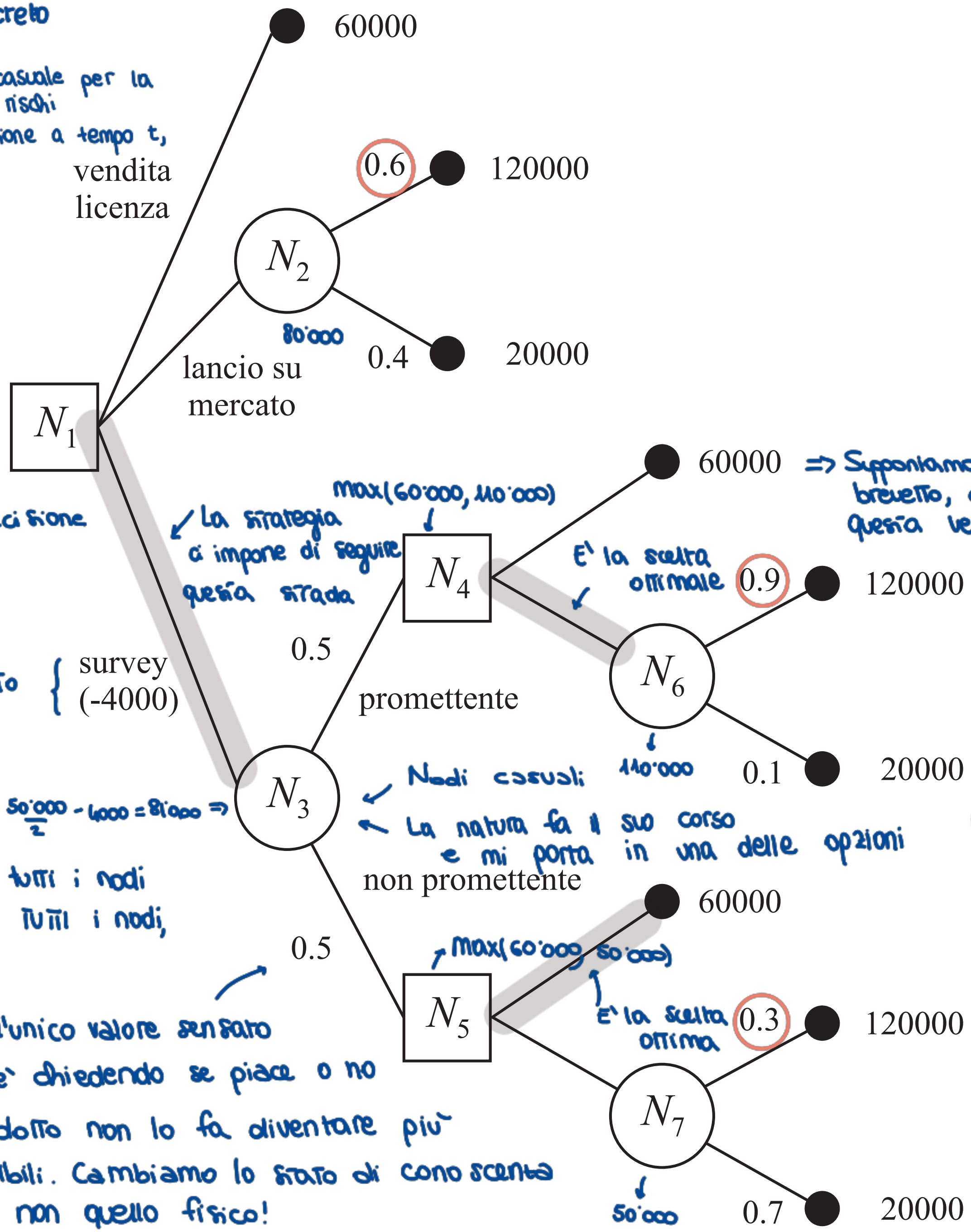
decido { Ho io il controllo

Nodo di decisione

Cambiamo lo stato di informazione, non lo stato fisico del sistema

Per trovare una politica si etichettano tutti i nodi con un valore economico. Si etichettano TUTTI i nodi, anche quelli casuali e di decisione

$\mathbb{E}(N_3) = \frac{110'000}{2} + \frac{50'000}{2} - 4000 = 81'000$



=> Supponiamo di poter ancora vendere il brevetto, cioe' il survey non influenza questa vendita (non e' detto che sia vero)

(*) Da questi numeri vediamo che p passa da valori che portano grande varianza, a nodi che hanno p per varianze minori

E' l'unico valore sensato perche' chiedendo se piace o no il prodotto non lo fa diventare piu' appetibili. Cambiamo lo stato di conoscenza non quello fisico!

Sulla base delle previsioni prendiamo delle decisioni => non basta il valore atteso

=> Analisi prescrittiva

(ES)

Cosa è una previsione?

Dovete decidere quante T-shirt produrre (o comprare) per un prossimo evento sportivo.

Produrre e distribuire una T-shirt costa 5€; ogni T-shirt viene venduta a 20€, ma quelle invendute devono essere vendute con un forte sconto.

Assumiamo che lo sconto (rispetto al prezzo di vendita) sia pari all'80%, per cui il prezzo di markdown è 4€.

Una previsione credibile, basata su eventi simili, ci porta a prevedere una domanda attesa pari a 12000 pezzi. Tuttavia, la domanda è soggetta a molta incertezza.

Un consulente, tenendo conto dell'incertezza, suggerisce di essere moderatamente conservativi e propone di acquistare (o produrre) 10000 pezzi.

Che ne dite?

In questo caso la penalità e' molto asimmetrica => bisogna costruire la densità e poi vedere il quantile

se vado corto perdo 15€, se vado lungo perdo 1€

↓

Bisogna utilizzare una LOSS NON simmetrica

Il newsvendor ha una finestra di vendita in cui si realizza una domanda casuale => la decisione va presa prima di conoscere la domanda

domanda (D)

decisione (q) ← rivendo (pu) l'invenduto

Il modello newsvendor e le sue estensioni

Versione prototipale di problemi legati a prodotti deperibili, come certi tipi di generi alimentari, o soggetti a obsolescenza, come i prodotti fashion:

- q è la quantità acquistata/prodotta al costo unitario c;
- D è la domanda osservata nella finestra di vendita;
- ogni pezzo viene venduto a un prezzo $p > c$ durante la finestra di vendita, ed a un prezzo ridotto $p_u < c$ successivamente.

unsold

L'intuizione potrebbe suggerire di porre semplicemente $\boxed{q = \mathbb{E}[D]}$, il valore atteso della domanda durante la finestra di vendita.

Controesempio. => Non va bene assumere $q = \mathbb{E}(D)$

Il controesempio mira a dimostrare che q = E[D] non è in generale la scelta migliore

- Distribuzione di probabilità della domanda uniforme e discreta tra 5 e 15, per cui il valore atteso è 10; → Per la distribuzione uniforme
- costo unitario $c = 20$;
- prezzo di vendita $p = 25$; eventuali giacenze residue non hanno alcun valore ($p_u = 0$). → L'invenduto ha valore ϕ

(*) Se ne compriamo 6 abbiamo i seguenti scenari di domanda ⇒ 5 → guadagno 5
Così via per tutti gli altri scenari
6
⋮ → guadagno 30 (6·5)
15

Dato q, il profitto per ogni scenario di domanda D è

Il profitto assume due valori differenti in base all'opzione in cui siamo:
- Sono andata **corta**: ho comprato meno di quanto avrei potuto vendere
- Sono andata **lunga**: ho comprato più di quanto ho venduto

è il profitto ⇒
$$\begin{cases} (p-c)q & \text{se } q \le D \\ pD - cq & \text{se } q > D. \end{cases}$$
→ Vendo tutto se ciò che ho comprato è minore della domanda

Rimane dell'invenduto

Con EP(q) indichiamo il profitto atteso corrispondente.

La decisione (in base al modello) è tra 5 e 15

q	5	6 (*)	7	8	9	10
EP(q)	25.00	27.73	28.18	26.36	22.27	15.91
q	11	12	13	14	15	
EP(q)	7.27	-3.64	-16.82	-32.27	-50.00	

Var = 0 Il migliore

Se $q = 5$, non avremo mai residui e venderemo in ogni scenario 5 pezzi, con un profitto costante e pari a $(25-20)\times 5 = 25$.

Se poniamo $q = 6$, profitto è pari a $(25-20)\times 6 = 30$ in tutti gli scenari per cui $D \ge 6$, mentre abbiamo $(25-20)\times 5 - 20 = 5$, se $D = 5$:

$$\text{EP}(6) = \frac{5 + 10 \times 30}{11} = 27.73.$$

Si vede chiaramente come la soluzione $q = \mathbb{E}[D] = 10$ non sia ottimale. Al contrario, $q^* = 7$, un valore decisamente inferiore.

L'esempio ci insegna che il valore atteso non è la migliore opzione!

Ma il valore 7, era trovabile diversamente? Assumiamo per facilità che la distribuzione sia nel continuo tra 5 e 15, con $m=5$ e $c_u = 20$

$\boxed{\beta = \frac{m}{m+c_u}} = \frac{5}{25} = 0.2$ ⇒ Bisogna prendere il quantile con livello di probabilità 0.2 ⇒ 7 è la quantità ottimale!

↳ Calcoli prossime slide

Nel discreto, la funzione è data per punti e si guarda dove c'è l'inversione del trend

Non ha senso massimizzare il profitto → dipende da una variabile casuale! Quindi noi vogliamo massimizzare l'attesa del profitto

In realtà, il risultato non sorprende se introduciamo due tipi di costo:

1. se $\boxed{q < D}$, avremo un costo opportunità $m = p - c$ (il margine di profitto) per la parte di domanda non soddisfatta (*shortfall*),

Non e' detto che m e c_u siano uguali quindi la loss non e' per forza simmetrica (panettiere vs moda)

$$(D - q)^+ = \max\{0, D - q\};$$

2. se $\boxed{q > D}$ avremo un costo $c_u = c - p_u$ (costo dell'invenduto) legato alla svendita della giacenza residua (*surplus*),

Costo di produzione

a quanto vendo l'invenduto

$$(q - D)^+ = \max\{0, q - D\}.$$

Nel caso dell'esempio, $m = 5$ mentre $c_u = 20$, ed essendo il margine di profitto inferiore al costo di un invenduto, la decisione risulta conservativa.

Consideriamo una formulazione analitica del problema, dove assumiamo che la domanda abbia distribuzione nel continuo con densità $f_D(x)$ nota.

Il valore atteso del profitto è

Ma dove vedo la penalita'?

Assumiamo di stribuita nel continuo

e' la realizzazione della domanda

Consideriamo il supporto di f_D tra 0 e ∞

NB Non e' facile capire il profitto atteso

$$\text{EP}(q) \equiv \mathbb{E}[\pi(q, D)] = m \left(\int_0^q x f_D(x)\, dx + \int_q^{+\infty} q f_D(x)\, dx \right)$$
$$- c_u \int_0^q (q - x) f_D(x)\, dx. \quad (1)$$

Densita'

Se $x > q$, vendo quanto ho prodotto/comprato $= q$

Otteniamo una funzione di q

La scegliamo

E' una variabile casuale che Non controlliamo

E' la svendita

Quanto perdo a causa dell'invenduto

Leibniz!

{ Per ottenere il max dobbiamo considerare la derivata

Per prima cosa bisogna trovare la funzione obbiettivo da massimizzare

Dim che se la loss e' il valore assoluto, la sol migliore e' la mediana: $\min_{\alpha} \mathbb{E}(|X-\alpha|) \Rightarrow \alpha^*$ e' la mediana (derivata a φ)

→ Come commutare derivata e integrale

Teorema: regola di Leibniz. Consideriamo una funzione di due variabili $g(q,x)$ e definiamo una funzione della sola q come

Anche gli estremi dipendono da q

$$\boxed{G(q) = \int_{h_1(q)}^{h_2(q)} g\,(q,x)\;dx.}$$

Notiamo che anche gli estremi di integrazione sono funzioni di q. Sotto opportune ipotesi di continuità, la regola di Leibniz permette di scrivere:

∃ integrale e derivate

→ quello che ottengo integrando g

Valuto x in $h_2(q)$

$$\boxed{\frac{dG}{dq}(q) = \int_{h_1(q)}^{h_2(q)} \frac{\partial g}{\partial q}(q,x)\;dx + g\,(q, h_2\,(q)) \cdot h_2'\,(q) - g\,(q, h_1\,(q)) \cdot h_1'\,(q)\,.}$$

Derivata totale

Derivata parziale

Per l'integrale

Nel caso del profitto atteso del newsvendor, tramite la regola di Leibniz otteniamo

Applichiamo il Teorema a tutti gli integrali di $\mathbb{E}$

Derivata del primo integrale

Secondo integrale

Derivata del terzo integrale

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{E}[\pi(q,D)]}{dq} &= m\left(q \cdot f_D(q) + \int_q^{+\infty} f_D(x)\,dx - q \cdot f_D(q)\right) - c_u \int_0^q f_D(x)\,dx \\
&= m \int_q^{+\infty} f_D(x)\,dx - c_u \int_0^q f_D(x)\,dx \\
&= m\,(1 - F_D(q)) - c_u F_D(q) = 0,
\end{aligned}$$

Estremo inferiore

→ E' la derivata dell'integrale

→ Funzione di sopravvivenza

Vogliamo il max, spariamo la derivata a φ

→ Funzione di ripartizione

dove $F_D(x) \doteq \mathbb{P}\{D \leq x\}$ è la funzione di distribuzione cumulativa della domanda. Ponendo a zero la derivata prima, ricaviamo immediatamente

Se $F(q^*) = 0.5$, allora $q^* = \mathbb{E}(q)$

Quindi se le penalita' sono simmetriche l'ottimo coincide con la mediana, che per funzioni simmetriche e' il valore atteso

Monotona non decrescente

$$F\,(q^*) = \frac{m}{m + c_u}. \qquad (2)$$

→ $0 \leq F(q^*) \leq 1$

↳ E' un livello di probabilita' e q^* e' il quantile che corrisponde a quella probabilita'

Riutilizzando la regola di Liebniz

Come verifica, possiamo controllare la derivata seconda,

$$\frac{d^2\mathbb{E}\left[\pi(q,D)\right]}{dq^2} = -m\, f_D(q) - c_u\, f_D(q) < 0, \qquad \forall q,$$

La funzione e' concava

E' un max globale

in quanto la funzione di densità non può assumere valori negativi. Ciò dimostra la concavità del profitto atteso rispetto a q.

La condizione di ottimalità prescrive un valore di q^* tale da ottenere una data probabilità di non andare in stockout, che è una misura del livello di servizio.

Per valori di m molto grandi rispetto a c_u, il livello di servizio ottimale tende al 100%, e quindi si acquista/produce molta merce, mentre esso si riduce se il margine è basso.

Esempio: newsvendor nel caso normale. Se assumiamo domanda normale, con valore atteso μ e deviazione standard σ, le note proprietà dei quantili di una distribuzione normale ci permettono di scrivere

Nota che qui non hai una "normale standard" quindi aggiungi la media e la deviazione standard

Interpretabile economicamente →

$$\boxed{q^* = \mu + z_\beta \sigma,}$$

All'aumentare di σ, q^* aumenta a patto che il quantile z_β sia positivo ($\beta > 0.5$)

dove z_β è il quantile della normale standard corrispondente al livello di probabilità

Ma come entrano le info economiche?

Probabilità

$$\boxed{\beta = \frac{m}{m + c_u}.}$$

Consideriamo beta come se fosse "alpha" e vogliamo trovare il quantile (inerente alla distribuzione cumulata)

È facile vedere che il solo caso in cui è ottimale ordinare il valore atteso μ della domanda si verifica per penalità simmetriche $m = c_u$.

Si potrebbe pensare che all'aumentare dell'incertezza della domanda si debba essere conservativi e ordinare meno del valore atteso. In realtà non è così in generale.

Esiste anche un altro modo, del tutto equivalente, di ricavare la regola di decisione, introducendo una funzione di perdita,

D>q quando vado corto — quando vado lungo D<q

Introduciamo la loss → $$\boxed{L(q, D) = m(D - q)^+ + c_u(q - D)^+},$$

legata alla discrepanza tra q e D. Si può dimostrare che il profitto atteso e il valore atteso della perdita differiscono per una costante:

Se $\mathbb{E}(D)$ fosse una previsione perfetta

$$\mathbb{E}[\pi(q, D)] = m\mathbb{E}[D] - \mathbb{E}[L(q, D)].$$

→ Ho la loss perchè la domanda la scopro dopo

Massimizzare il profitto atteso è quindi equivalente a minimizzare il valore atteso della funzione di perdita, che rappresenta una penalità legata all'impatto economico della discrepanza tra q e D.

Se noi scegliessimo q come previsione della domanda, dovremmo scegliere una funzione di perdita opportuna:

- nel caso di una perdita quadratica, $L(q, D) = (q - D)^2$, è facile dimostrare che la soluzione ottima sarebbe $q^* = \mathbb{E}[D]$;

- nel caso di una perdita data dalla deviazione assoluta, $L(q, D) = |q - D|$, usando la regola di Leibniz è facile dimostrare che la soluzione ottima è data dalla mediana della domanda, ovvero il quantile al livello di probabilità 50%.

  Loss simmetrica

Nel caso del newsvendor, la penalità è lineare a tratti, come la funzione valore assoluto, ma le due pendenze non sono simmetriche.

Supponiamo di avere 20 prodotti $\Rightarrow \max\limits_{q} \sum_{i=1}^{20} \mathbb{E}_{D_i}(\Pi_i(q_i, D_i))$ con q_i i prodotti

$\sum_{i=1}^{20} V_i q_i < V_{TOT}$ $\Rightarrow$ Vincolo che fa interagire i problemi $\Rightarrow$ NON è divisibile in 20 newsvendor

$q_i \geq 0 \quad \forall i$

- Correlazione tra i prodotti $\Rightarrow$ distribuzione congiunta? Per l'attesa non serve prendere in considerazione la correlazione

Se non fossimo neutrali al rischio e considerassimo la Varianza allora è importante la correlazione

- Probabilità di sostituzione del prodotto

- Se la finestra di vendita è lunga si possono fare + momenti di produzione

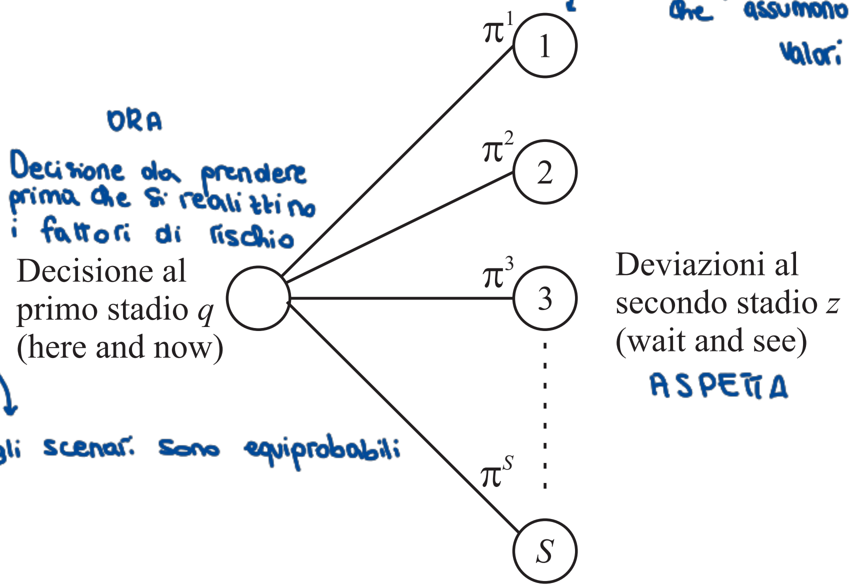
Formula di quadratura Gaussiana (...) in cui d^s sono i nodi e π^s i pesi

$\boxed{\text{Un modello a due stadi basato su scenari}}$ → Modello di decisione a 2 stadi

La versione di base del newsvendor ammette una semplice soluzione analitica, che può non essere disponibile per casi più complessi e realistici.

Scenari possibili con domande che assumono determinati valori

ORA
Decisione da prendere prima che si realizzino i fattori di rischio



ASPETTA

Possiamo caratterizzare la domanda mediante un albero di scenari a due stadi.

Per ogni scenario $s = 1, \dots, S$, abbiamo un valore di domanda d^s e una probabilità π^s.

Può essere un vettore

Se usiamo una simulazione Monte Carlo, $\boxed{\pi^s = 1/S}$, ma esistono approcci di generazione degli scenari, in cui le probabilità non sono necessariamente uniformi.

gli scenari sono equiprobabili

Un problema di decisione in condizioni di incertezza può essere formulato su più stadi di decisione. Per il problema newsvendor, abbiamo due stadi decisionali:

Prima di osservare la domanda

1. Al primo stadio decisionale occorre scegliere q. Si tratta di una decisione *here and now*, da assumere prima di osservare la domanda D.

2. Al secondo stadio decisionale, dopo avere osservato la domanda, si prendono decisioni *wait and see*, che dipendono dalla domanda.

• Dimostrare che il problema si risolve come il news vendor

Livello di protezione nel trasporto aereo di passeggeri

Consideriamo l'aereo con classe Business e Economy

D_1, P_1	D_2, P_2
B	E

con D la domanda e P il prezzo del biglietto

Con "livello di protezione" significa quanti posti in B e quanti in E considerando $B+E = S_0$

Il mercato è segmentato — chi compra E non vuole comprare B e viceversa

Assumiamo che prima si venda E e poi B

=> Perché è simile al news vendor → **Regola di Littlewood**

Consideriamo $\boxed{F_D(q^*) = \frac{C_{under}}{C_{under} + C_{over}}}$, vogliamo determinare q. Il meglio sarebbe $D_1 = q$.

Deve tenere conto della capacità dell'aereo

- $C_{under} = (P_1 - P_2)$ → Nel determinare F, la dipendenza è D_A, non cambia D_B => Otteniamo $F_{D_A}(q^*) = 1 - \frac{P_2}{P_1}$
- $C_{over} = (P_2)$

=> Si ottiene così la Regola di Littlewood $q^* = F^{-1}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$, assumendo la distribuzione nel continuo

↳ Euristica: expected marginal seat revenue che applica sequenzialmente la regola di Littlewood con più classi

Ragionamenti marginali

Consideriamo il problema $\max_q \pi(q) = \overset{\text{ricavo}}{R(q)} - \overset{\text{costo}}{C(q)} \Rightarrow \pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0 \Rightarrow R'(q) = C'(q)$ in cui «marginale» riguarda le derivate

ricavo marginale: $R'(q)$; costo marginale: $C'(q)$

Perchè ragionando con q nel continuo, $R'(q) = C'(q)$?
↓
Spostarsi NON cambia

- Se $R'(q) > C'(q)$, allora conviene incrementare la produzione
- Se $R'(q) < C'(q)$, è il contrario, conviene non produrre

Notiamo che, se arriva un passeggero ECO ho certezza di guadagno P_2 e incertezza su P_1

↳ Sono all'ottimo quando mi è indifferente $\boxed{P_2 = P_1 \cdot P(D_1 > q)}$ (probabilità) → Nel continuo è equivalente a $P_2 = P_1(1 - F_1(q))$ che è equivalente alla regola di Littlewood

Eco, Business

quando mi è indifferente vendere eco o business

Problema equivalente al NEWSVENDOR $\Rightarrow$ $\underbrace{m P(D > q) - C_u P(D \leq q)}_{\text{derivata del profitto atteso all'ottimo}} = 0$ dove passo da $q \to q+1$

↳ Andando nel continuo $m(1 - F_D(q)) = C_u F_D(q) \Rightarrow \boxed{F_D(q) = \frac{m}{m + C_u}}$ otteniamo così la soluzione ottima in maniera più intuitiva

↗ quello che vendi $= \min\{D, q\}$

Nel caso newsvendor scolastico, le decisioni wait and see sono degeneri, in quanto rappresentano un surplus z_+^s oppure uno shortfall z_-^s per ogni scenario s:

$$q - d^s = \max\{0, q - d^s\} - \max\{0, d^s - q\} = z_+^s - z_-^s.$$

↳ Potrebbe essere positiva o negativa (lunghi o corti)

Penalizzando le deviazioni, otteniamo il seguente problema LP:

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & \sum_{s=1}^{S} \pi^s \left(m z_-^s + c_u z_+^s \right) \\ \text{s.t.} \quad & q = d^s + z_+^s - z_-^s, \quad s \in [S] \\ & q, z_+^s, z_-^s \geq 0. \end{aligned}} \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Valore atteso della loss discretizzata

Non sono vere decisioni, le usiamo per rendere la loss lineare (altrimenti sarebbe lineare a tratti)

$\Rightarrow$ Vincolo implicito (vado lungo)·(vado corto)=0
$z_+^s \cdot z_-^s = 0$
All'ottimo è certo che valga, quindi NON va scritto

↳ Assumiamo $q \in \mathbb{R}$, altrimenti aggiungo il vincolo $q \in \mathbb{N}$

Se la domanda ha distribuzione su valori interi, otterremo un modello LP a numeri interi.

Il modello di newsvendor per scenari è solo formalmente un modello a due stadi, in quanto le variabili di deviazione rispetto a un target non sono vere e proprie decisioni, ma solo un modo per esprimere in modo lineare una funzione di perdita lineare a tratti.

Modello apparentemente a 2 stadi, il secondo e' fittizio

Un modello di **programmazione lineare stocastica a due stadi con ricorso** è del tipo:

Questo problema da' una matrice angolare a blocchi. Fissando x ottimizzo su ogni y di scenario (ottengo matrice diagonale a blocchi) → Risolvibili parallelamente!

	x	y_1	y_2	y_3
	A			
	T_1	W		
	T_2		W	

$$\min \quad \overbrace{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}^{\text{costi al primo stadio}} + \sum_{s\in[S]} \underbrace{\pi_s}_{\text{prob scenario}} \underbrace{\mathbf{q}_s^{\mathsf{T}}}_{\text{costo}}\mathbf{y}_s \tag{4}$$

wait and see ⇒ dipende dallo stato perche' e' la decisione al secondo stadio

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

→ Vincoli al primo stadio

$$\mathbf{W}\mathbf{y}_s + \mathbf{T}_s\mathbf{x} = \mathbf{h}_s, \qquad \forall s \in [S], \tag{6}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}_s \geq \mathbf{0}.$$

Nella funzione obiettivo (4) sommiamo un termine di costo al primo stadio, che dipende dalle variabili al primo stadio $\mathbf{x}$, all valore atteso del costo al secondo stadio, che dipende dalle variabili di ricorso $\mathbf{y}^s$.

I vincoli (6) collegano le variabili al primo e secondo stadio.

Possiamo osservare come i dati $\mathbf{q}^s$, $\mathbf{T}_s$ e $\mathbf{h}_s$ possano essere stocastici. Di regola, la matrice di ricorso $\mathbf{W}$ è non stocastica.

Esempio del pizzaiolo

BILL of MATERIALS: □ → prodotto finito da assemblare dopo (2° stadio)

□ □ □ → componenti devono essere pronti all'uso subito (1° stadio)

$\boxed{\text{Il caso assemble-to-order}}$

⇒ l'assemblaggio deve essere veloce, non può essere un collo di bottiglia

---

Consideriamo una versione semplificata di un problema in ambiente di produzione Assemble-To-Order (ATO), in cui un prodotto finito è caratterizzato da *feature*, per ognuna delle quali sono disponibili *opzioni* alternative.

Preparati prima di osservare la domanda

caratteristiche = ingredienti

È possibile mantenere a scorta i componenti, che vengono quindi prodotti in condizioni di incertezza sulla domanda, per poi assemblare solo quando si riceve l'ordine cliente.

- Il cliente può ordinare uno di tre prodotti finiti (assemblati): A_1, A_2 e A_3. Consideriamo tre scenari equiprobabili, la cui domanda media è fornita in tabella.

- Per assemblare i finiti si usano cinque componenti: c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5. La distinta base (*bill of materials*) può presentare molti livelli. Si tratta qui di una distinta base piatta.

  Può essere a diversi livelli

- I componenti richiedono delle lavorazioni su tre gruppi di macchine: M_1, M_2 e M_3. Per ogni componente e gruppo di macchine abbiamo il tempo di lavorazione. Inoltre abbiamo la disponibilità totale di tempo macchina per ogni gruppo, ed il costo per ogni componente.

Poiché, per assunzione, l'assemblaggio finale è rapido, assumiamo che esso avvenga a capacità infinita e ne trascuriamo i costi.

Valore atteso della domanda

Domanda prodotto ai scenario S_i

Prodotti ↓

Scenari	S_1	S_2	S_3	media	prezzo
A_1	100	50	120	90	80
A_2	50	25	60	45	75
A_3	100	110	60	90	90

Prezzo del singolo prodotto finito

→ Il costo è 60 per tutti, ma questo ha il margine di profitto maggiore

* Riduce l'impatto dell'incertezza « Ricetta dei prodotti »

* Componenti Comuni

Componenti specifici

Quanti pezzi per produrre Ai

Si fa con 1 componente c_1, c_2 e c_3 →

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
A_1	1	1	1	0	0
A_2	1	1	0	1	0
A_3	1	1	0	0	1

Macchine su cui lavorare i componenti ↓ Tempi di lavorazione

→	M_1	M_2	M_3	cost
c_1	1	2	1	20
c_2	1	2	2	30
c_3	2	2	0	10
c_4	1	2	0	10
c_5	3	2	0	10
avail.	800	700	600	

→ costo dei componenti

"Ore" per il macchinario M_1

I componenti c_1 e c_2 siano comuni a tutti i finiti, mentre $c3$, $c4$ e $c5$ sono specifici di ciascun assemblato. Inoltre, il costo totale è identico per ogni finito, ma i prezzi di vendita no. Chiaramente, il prodotto A_3 è quello con il massimo margine di profitto, mentre A_2 è quello meno interessante.

assumiamo il valore atteso della domanda

Supponiamo, come primo passo, di ignorare l'incertezza sulla domanda e di considerare solo il suo valore atteso. Definiamo le variabili decisionali:

- x_i, $i = 1, \ldots, 5$, il numero intero di componenti che produciamo;
- y_j, $j = 1, \ldots, 3$, il numero intero di finiti che assembliamo e vendiamo. ⇒ Assunzione

Quanti finiti penso di vendere, non dipende dallo scenario perchè guardo la media

La massimizzazione del profitto richiede la soluzione del problema a numeri interi:

Trascuro il costo di assemblaggio

Definisce il costo di produzione

$$\max \quad -\sum_{i=1}^{5} C_i x_i + \sum_{j=1}^{3} P_j y_j \tag{7}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{5} T_{im} x_i \le L_m \qquad m = 1, 2, 3 \tag{8}$$

→ Vincoli capacità produttiva

$$y_j \le \bar{d}_j \qquad j = 1, 2, 3 \tag{9}$$

Domanda media

$$\sum_{j=1}^{3} G_{ij} y_j \le x_i \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{10}$$

⇒ Livelli decisionali collegati

Numero della ricetta = numeri nella distinta base

$$x_i, y_j \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Incichiamo i fabbisogni di tempo per il componente i sulla macchina m e la disponibilità di quest'ultima con T_{im} e L_m; la domanda attesa per ogni finito con $\bar{d}_j$; i i coefficienti delle distinte base con G_{ij}.

Ma questo piano scommette tutto sul terzo prodotto $\Rightarrow$ NON è una grande idea per non essere avversi al rischio

Usando un metodo per la programmazione intera si ottiene:

$$x_1^* = 116, \quad x_2^* = 116, \quad x_3^* = 26, \quad x_4^* = 0, \quad x_5^* = 90,$$

Fai tutto quello che puoi del prodotto A_3

Non fai il prodotto A_2

$$y_1^* = 26, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 90,$$

Solo 26 perché finisce la capacità produttiva

con valore di profitto ottimo pari a 3220. $\Rightarrow$ Profitto all'ottimo

Non è reale! Suppone un solo scenario medio!

Si scommette tutto sul prodotto finito con il margine di profitto più ampio, lasciando la capacità residua al secondo prodotto preferito. Tale soluzione è una scommessa rischiosa.

Formuliamo quindi un modello di programmazione stocastica a due stadi, in cui la variabile decisionale y_j^s, legata agli assemblaggi, dipende anche dallo scenario $s \in \{1, 2, 3\}$ e si adatta alla domanda d_j^s:

Modello di programmazione stocastica a due stadi

$$\max \quad -\sum_{i=1}^{5} C_i x_i + \underbrace{\sum_{s=1}^{3} \pi^s}_{\text{Valore atteso del ricavo}} \left(\sum_{j=1}^{3} P_j y_j^s \right) \tag{11}$$

La domanda dipende dallo scenario

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{5} T_{im} x_i \le L_m \qquad m = 1, 2, 3 \tag{12}$$

$$y_j^s \le d_j^s \qquad j = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, 3 \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{3} G_{ij} y_j^s \le x_i \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad s = 1, 2, 3 \tag{14}$$

$$x_i, y_j^s \in \mathbb{Z}_+.$$

Vincolo che lega il 1° e il 2° stadio

Data la produzione x_i^*, bisogna risolvere il problema al secondo stadio $\Rightarrow$ il valore atteso del profitto col deterministico è 2320 che è di molto più basso di quello trovato ora, cioè 2883,33. Questi sono i due valori numerici da confrontare.

La soluzione numerica fornisce:

Nota che $x_3^* + x_5^* \neq x_1^*$ perché bisogna essere pronti a tutto

Sui componenti in comune senti poca incertezza $\rightarrow$

$$x_1^* = 115, \quad x_2^* = 115, \quad x_3^* = 55, \quad x_4^* = 0, \quad x_5^* = 65,$$

$\rightarrow$ Otteniamo una sol meno estrema

$$\left.\begin{aligned} y_1^{1*} &= 50, & y_2^{1*} &= 0, & y_3^{1*} &= 65, \\ y_1^{2*} &= 50, & y_2^{2*} &= 0, & y_3^{2*} &= 65, \\ y_1^{3*} &= 55, & y_2^{3*} &= 0, & y_3^{3*} &= 60. \end{aligned}\right\} \text{Queste non le guardo ora}$$

Non confrontabile

Il profitto atteso è 2883.33. Si vede chiaramente come tale soluzione sia meno estrema. I componenti comuni non risentono di grandi cambiamenti, grazie a un effetto di *risk pooling*. $\Rightarrow$ Mette insieme i rischi così li senti meno

Una possibile ragione di perplessità è che il profitto atteso, 2883.33, è inferiore al valore della funzione obiettivo ottenuta per il modello deterministico, 3220. Tale confronto è del tutto privo di senso.

Per confrontare i due piani di produzione di componenti dobbiamo applicare la soluzione del modello deterministico in ciascuno scenario, ottimizzando gli assemblaggi sotto il vincolo di disponibilità dei componenti.

Così facendo, si ottiene questa soluzione:

$$\begin{aligned} y_1^1 &= 26, & y_2^1 &= 0, & y_3^1 &= 90, \\ y_1^2 &= 26, & y_2^2 &= 0, & y_3^2 &= 90, \\ y_1^3 &= 26, & y_2^3 &= 0, & y_3^3 &= 60. \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Il profitto è un disastro!

Si vede bene che il problema sta nel terzo scenario, in cui si assemblano solo 60 unità di A_3, in quanto la sua domanda è bassa in quello scenario.

Nel contesto dell'ottimizzazione stocastica e delle equazioni differenziali stocastiche, il **valore di una soluzione stocastica** si riferisce al valore atteso della soluzione in un momento futuro specifico o su un orizzonte temporale dato. Rappresenta l'esito o la prestazione media del sistema stocastico in considerazione. Il valore di una soluzione stocastica è un concetto cruciale nella modellazione stocastica e nel processo decisionale, in quanto ci consente di quantificare il comportamento a lungo termine e i potenziali esiti di un sistema in condizioni di incertezza. Viene spesso utilizzato per valutare l'efficacia di diverse strategie di controllo o decisioni di investimento in presenza di fluttuazioni casuali.

Dato il carattere speculativo della soluzione, in questo scenario non possiamo produrre A_1, in quanto disponiamo di una quantità bassa del componente specifico necessario.

Il risultato è un doppio disastro: non solo buttiamo via componenti specifici per A_3, ma anche componenti comuni la cui flessibilità non siamo pronti a sfruttare.

Come conseguenza, il profitto atteso della soluzione deterministica è 2320, molto più bassa di quanto risulterebbe da un modello deterministico inadeguato.

Valore che guadagni se tieni conto dell'incertezza

La differenza $2883.33 - 2320 = 563.33$ è detta **valore della soluzione stocastica** (VSS). → la soluzione che tiene conto dell'incertezza è migliore!

Consideriamo il problema con l'incertezza $\Rightarrow \max_x \mathbb{E}(\pi(x, D)) \to x_I^*, \boxed{\pi_I^*}$

senza incertezza $\Rightarrow \max_x \pi(x, D) \to x_D^*, \pi_D^*$ non è un valore significativo!

$\downarrow$

$\mathbb{E}(x_D^*, D) = \boxed{\pi^*}$ è il valore da confrontare

Potremmo avere ancora altri stadi. Ma è conveniente? L'albero diventa complicato da gestire velocemente. Quindi servono dei metodi di decomposizione per gestire i problemi a grandi dimensioni

Da 2 a multi stadi è computazionalmente oneroso.

Il caso di due ordini di produzione

In questi stadi le decisioni sono della stessa natura: quanto produrre

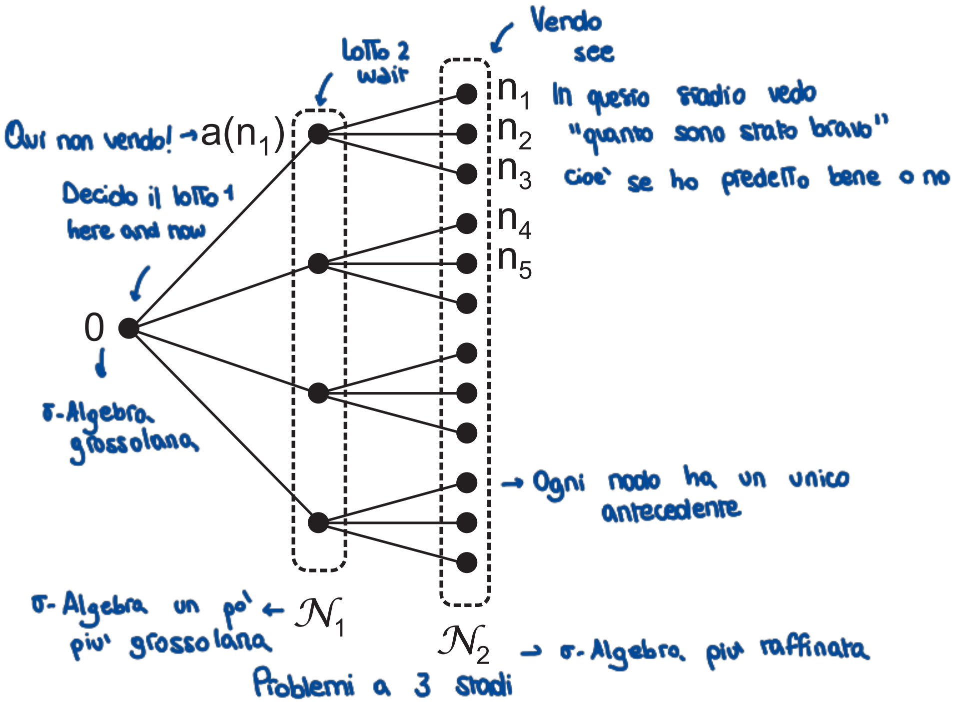
Consideriamo un produttore nel settore dell'abbigliamento sportivo, che deve iniziare la produzione con notevole anticipo rispetto alla stagione di vendita, ma può lanciare due ordini di produzione invece che uno solo. Questo è utile se, a cavallo dei due ordini di produzione, si possono acquisire informazioni utili per rivedere le previsioni di vendita.

Ma come evolvono le previsioni tra ω_1 e ω_2? Rimane irrisolto

Abbiamo un albero di decisione a tre stadi. Nel nodo 0 occorre prendere una decisione *here and now* sui primi lotti di produzione per ogni articolo (SKU). → Stock-Keeping Unit = prodotti a magazzino

L'insieme di nodi intermedi $\mathcal{N}_1$ rappresenta gli stati un cui dovremo prendere una decisione circa i secondi lotti di produzione, avendo una previsione di domanda più accurata.

Infine, per ogni nodo terminale (foglia) in $\mathcal{N}_2$ osserviamo le vendite effettive.



Ogni nodo $n \in \mathcal{N}_2$ ha esattamente un predecessore (antecedente) $a(n) \in \mathcal{N}_1$.

antecedente

Dati:

- Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme di capi di abbigliamento (SKU).
- Indichiamo con K_1 e K_2 il massimo numero di capi che possiamo produrre nelle due campagne di produzione, rispettivamente, e con m_i, $i \in \mathcal{I}$ i lotti minimi di produzione. → Vincolo di capacità produttiva
  ↘ Supponiamo lo stesso tempo di produzione
  (m_i:) al di sotto non ha senso mandare in produzione
- La domanda per ogni SKU $i \in \mathcal{I}$ e per ogni scenario $n \in \mathcal{N}_2$, la cui probabilità a priori è $\pi^{(n)}$, è indicata con d_i^n. (n –) nodo (i –) prodotto → la domanda finale la osservo al terzo stadio
  ($\pi^{(n)}$:) Con Monte Carlo sono tutti equiprobabili, altrimenti possono essere diversi
- Per ogni SKU abbiamo coefficienti di penalità c_i^+ e c_i^- per gli eventuali surplus e shortfall, come nel caso newsvendor.

Definiamo anche le variabili decisionali necessarie.

QUANTO produco
Se il livello di produzione è basso – discreto; alto – arrotondiamo nel continuo
Non negativa

- La quantità prodotta in ogni nodo $n \in \{0\} \cup \mathcal{N}_1$, x_i^n. => Associamo le variabili ai nodi
  ↳ Il tempo è implicito nei nodi (a quale ser appartengono)
- Per ogni nodo in cui si può produrre, le variabili binarie $\delta_i^n \in \{0, 1\}$. => SE produco
  ↳ Il range di ammissibilità di produzione è non convesso => uso le variabili binarie

• Variabile semi continua con regione di ammissibilità NON convessa

- Infine, le variabili u_i^n e o_i^n rappresentano le deviazioni, shortfall/underage (↓ corti) e surplus/overage (↓ lunghi), rispetto alla domanda osservata.

Si ottiene il seguente problema MILP:

Probabilità dei nodi foglie — perdi il margine di profitto se vai corto

$$\min \quad \sum_{n\in\mathcal{N}_2} \pi^n \left[\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(c_i^+ \underbrace{o_i^n}_{\text{overage}} + c_i^- \underbrace{u_i^n}_{\text{underage}} \right) \right]$$

⇒ Minimizzazione delle penalità

Se sei andato lungo devi vendere a saldo

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i^0 \le K_1$$

→ Vincoli di capacità

Assumiamo tempi di lavorazione per i prodotti uguali, allora i vincoli di capacità li prendo come numero di prodotti

Almeno il minimo m_i — Produco solo se $\delta_i^0 = 1$ con nodo 0 e articolo i

$$(*)\; x_i^0 \ge m_i\delta_i^0, \qquad x_i^0 \le K_1\delta_i^0 \qquad i \in \mathcal{I}$$

⇒ «Vincolo della grande M»

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i^n \le K_2 \qquad n \in \mathcal{N}_1$$

→ Vincolo di capacità

Non consideriamo il magazzino in quanto su a(n) non vendo, quindi non si vedono i flussi nel mezzo

$$x_i^n \ge m_i\delta_i^n, \qquad x_i^n \le K_2\delta_i^n \qquad i \in \mathcal{I},\ n \in \mathcal{N}_1$$

→ Uguale a (*)

$$x_i^0 + x_i^{a(n)} = \underbrace{d_i^n}_{\text{domanda}} + o_i^n - u_i^n \qquad i \in \mathcal{I},\ n \in \mathcal{N}_2$$

→ "I conti li facciamo alla fine"

⇒ Andrò lungo (o^n) o corto (u^n). Descrive cos'ho fatto nel nodo radice e nello step intermedio

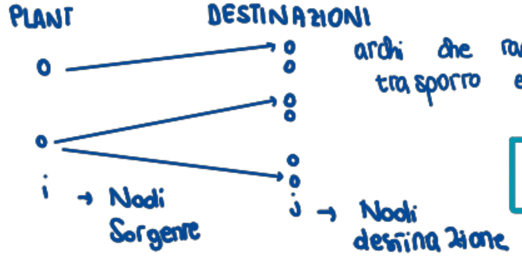
$$x_i^n \in \mathbb{Z}_+,\ \delta_i^n \in \{0,1\} \qquad i \in \mathcal{I},\ n \in \{0\} \cup \mathcal{N}_1$$

Consideriamo volumi NON troppo grandi, quindi consideriamo la produzione nel discreto

$$u_i^n,\ o_i^n \ge 0 \qquad i \in \mathcal{I},\ n \in \mathcal{N}_2.$$

Nel caso delle variabili di deviazione, non è necessario richiedere che assumano valori interi, in quanto tale condizione è implicata dagli altri vincoli.

Versione del problema classico del trasporto => L'idea e' trovare la posizione corretta per gli impianti di produzione



archi che rappresentano la possibilita' del trasporto e il costo di quest'ultimo

In questo caso le decisioni da compiere nei due stadi sono completamente diversi

Plant location con incertezza sulla domanda

→ Rete bipartita: non ci sono flussi laterali (nella realta' non sempre)

Estendiamo al caso stocastico il modello di plant location, nella sua forma classica.

↳ problema di network design

Ci limitiamo a considerare incertezza sulla domanda, ma in un contesto reale potrebbero essere incerti anche la capacità produttiva oppure i costi di trasporto.

↳ Problemi – Rompe una macchina
Problemi metereologici – Radicale
Ora queste incertezze non le consideriamo

↳ Li consideriamo deterministici, ma possono essere soggetti a incertezza non radicale

Definiamo:

- d_j^s la domanda nel nodo destinazione $j \in \mathcal{J}$ per lo scenario $s \in \mathcal{S}$;

→ Al primo stadio

- $y_i \in \{0, 1\}$ la decisione di aprire un impianto nel nodo sorgente $i \in \mathcal{I}$; → Variabile di design

↳ Variabile binaria da prendere ora: costruisco la fabbrica oppure no?

- $x_{ij}^s \geq 0$ la quantità trasportata dal nodo sorgente i al nodo destinazione j nello scenario s. => Flussi di merce → Variabile di controllo

Secondo stadio

i e j fanno riferimento ai nodi, non ai prodotti

È evidente la diversa natura delle variabili y_i del primo stadio, relative al progetto della rete, rispetto alle variabili x_{ij}^s del secondo stadio, relative al controllo della rete.

la formulazione e' molto dura e potrebbe non avere una soluzione ammissibile

Una estensione naturale del modello deterministico di plant location è:

↳ Problema non a ricorso completo

costo del trasporto sull'arco ij che assumiamo deterministico

$$\min \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} f_i y_i + \sum_{s\in\mathcal{S}} \pi^s \left(\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij} x_{ij}^s \right)$$

→ In ogni scenario risolvo un problema di trasporto

Apparentemente ragioniamo sul valore atteso, ma ponendo il vincolo • la rete deve soddisfare la domanda massima che può essere richiesta

⇒ Non e' IE, ma soddisfo la domanda per ogni singolo scenario

↳ Chiediamo allora di soddisfare la domanda con una certa probabilità

Vincolo troppo duro, bisogna renderlo soft

s.t.

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_{ij}^s = d_j^s \qquad s \in \mathcal{S},\ j \in \mathcal{J}$$

→ Vorremmo soddisfare la domanda in ciascun nodo finale

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} x_{ij}^s \le R_i y_i \qquad s \in \mathcal{S},\ i \in \mathcal{I}$$

– Se il nodo e' stato realmente aperto

Capacita' produttiva (numero di pezzi)

$$x_{ij}^s \ge 0,\ y_i \in \{0,1\}.$$

① ⇒ Potrei allora aggiungere un vincolo probabilistico (s)

↓

Ma portano problemi non convessi e allora non va bene

② Rendiamo i vincoli e la formulazioni elastiche

Nel modello, π^s rappresenta la probabilità dello scenario s, mentre f_i e c_{ij} sono i costi fissi di apertura degli impianti e i costi variabili di trasporto.

L'inclusione di uno scenario estremo, per quanto improbabile, forza a sovradimensionare la rete.

Possiamo introdurre una variabile decisonale $z_j^s \ge 0$, che possiamo interpretare in due modi:

- l'ammontare di domanda non soddisfatta nel nodo destinazione j nello scenario s;
- l'ammontare di domanda soddisfatta facendo ricorso a un contoterzista nel nodo destinazione j nello scenario s. ⇒ Faccio produrre da altri
  L'azienda compera così capacità produttiva

Ma come generiamo gli scenari? Ancora da discutere

Il modello diventa:

Problema a ricorso completo

Andiamo a penalizzare la variabile di scarto

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i y_i + \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi^s \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} c_{ij} x_{ij}^s \right) + \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi^s \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j z_j^s \right),$$

Associamo al nodo in base all'importanza del cliente

Può essere il costo di far produrre a un controterzista

La domanda non soddisfatta

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} x_{ij}^s + z_j^s = d_j^s \qquad s \in \mathcal{S},\ j \in \mathcal{J},$$

→ Quello che produciamo + Prodotti da altri

Variabile di scarto

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} x_{ij}^s \le R_i y_i \qquad s \in \mathcal{S},\ i \in \mathcal{I},$$

$$x_{ij}^s, z_j^s \ge 0,\ y_i \in \{0, 1\}.$$

Il coefficiente di penalità β_j, che dipende dal nodo destinazione, potrebbe anche essere impiegato per riflettere il valore strategico del nodo destinazione j, che può far parte di un mercato geografico più o meno rilevante.