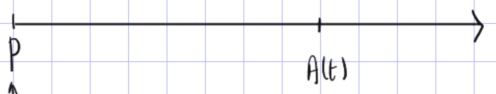
Time Value of money - Chapter 2 of Capinsky

(In questo capitolo tratteremo il calcolo dell'interesse su un capitale di partenza, detto principal.)



Principal today

money change their value over time

(amount of money at time t) (Interest gain at time t)

$A(t) - P = I(t)$ interest

Definition: (Interest rate)

We consider a unit time $t=1$ (usually 1 year)

$I(1) =: I$, $A(1) =: A$

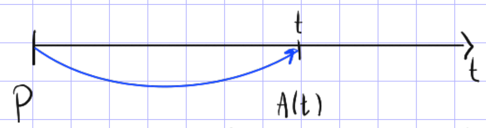
$A - P = I$ and we can define the interest rate $r = I/P$ (%)

$I = Pr$

Tasso di interesse unitario, ossia tasso di interesse accumulato dopo un'unità di tempo.

(Composto / Composizione)

Simple Compound



Interesse Semplice: Si riferisce a un tipo di interesse calcolato esclusivamente sul capitale iniziale investito o prestato. In altre parole, l'interesse viene calcolato solo sul principale originale senza tener conto degli interessi accumulati nel tempo.
La formula per calcolare l'interesse semplice è: Interesse = Capitale iniziale × Tasso di interesse × Tempo.

Formula: $A(t) = P + \overbrace{P \cdot r \cdot t}^{I} = \underbrace{P(1 + rt)}_{\text{Growth - factor}}$ (r tasso di interesse unitario)

(The interest increases linearly in time)

Scenario: If we change the unit-time: → from years to months.
We need to find the relationship between r_{12} and r (year)

Qui stiamo dicendo che: siccome le quantità definite in precedenza, come il rate o il tasso di interesse unitario, sono state definite considerando come tempo unitario 1 anno. Se si vuole cambiare l'unità di tempo vanno apportate delle modifiche. È importante però notare che i cambiamenti riportati devono essere consistenti, ovvero i due modelli, dopo lo stesso tempo, generano gli stessi interessi.

(Framework)

$$A(1) = P(1 + r\,1)$$
$$A(12) = P(1 + r_{12} \cdot 12)$$

⤳ these must be equal ⇒ $A(1) = A(12)$

$$\cancel{P}(\cancel{1} + r \cdot 1) = \cancel{P}(\cancel{1} + r_{12} \cdot 12)$$

$$r_{12} = \frac{r}{12}$$

(Questo ci dice che le due modellizzazioni sono analoghe se si prende $r_{12} = r/12$.)

Oss. (Discount)

·) $A(t) = P(1 + rt)$ → $P = \dfrac{A(t)}{(1 + rt)}$

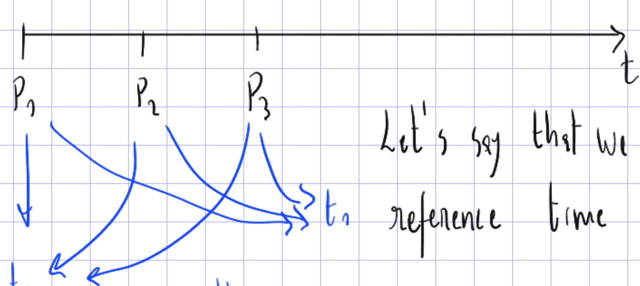
(This is important since sometimes I need the present value of a future amount of money)

Definition: (Cashflow)

CASHFLOW

"Cashflow" in italiano è tradotto come "Flusso di cassa". Si riferisce all'entrata e all'uscita di denaro in un'azienda, un investimento o un'attività durante un periodo di tempo specifico. Il flusso di cassa può essere positivo, quando l'entrata di denaro supera le uscite, o negativo, quando le uscite superano l'entrata di denaro.

Il flusso di cassa è un importante indicatore finanziario utilizzato per valutare la liquidità e la solvibilità di un'azienda, nonché per analizzare la sua capacità di generare entrate sufficienti per coprire le spese operative e gli investimenti futuri. Un flusso di cassa positivo è spesso considerato un segno di buona salute finanziaria, mentre un flusso di cassa negativo può indicare problemi di liquidità o finanziari.
Il flusso di cassa è anche utilizzato dagli investitori per valutare il valore di un investimento e per prendere decisioni finanziarie informate



Let's say that we want to know the cashflow, we have to choose a reference time w.r.t. set the amount of money.

I can bring them to the starting point, but I could have done to another instant of time. But they have to be referred to the same instant in order to determine if there was a profit.

(Periodic Compound)

||

Scenario:

COMPOUND INTEREST:

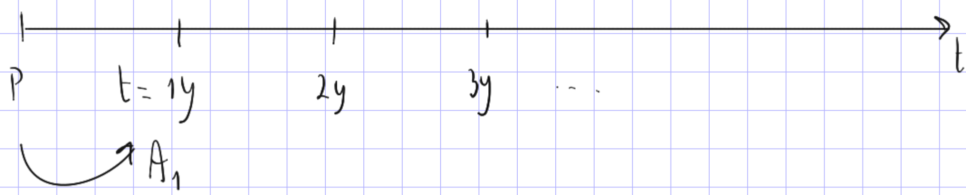
Another way to make investments is: "I don't want to make the investment and leave the capital there forever, after a period of time I want to take all this quantity, interest included, and I want to build the new interest on the whole amount."

In italiano, "Compound interest" è tradotto come "Interesse composto". Si tratta di un tipo di interesse che viene calcolato non solo sul capitale iniziale investito o prestato, ma anche sugli interessi accumulati nel corso del tempo.

L'interesse composto consente agli interessi guadagnati in precedenza di essere reinvestiti e di generare ulteriori interessi negli anni successivi. Questo porta a una crescita esponenziale del capitale nel tempo, poiché gli interessi si accumulano su interessi precedentemente guadagnati.

L'interesse composto è ampiamente utilizzato in ambito finanziario, ad esempio nei conti di risparmio, nei prestiti, negli investimenti e nei mutui. È importante notare che il tasso di interesse composto può portare a un significativo aumento del valore di un investimento nel lungo periodo rispetto all'interesse semplice, in cui gli interessi non sono reinvestiti.

(Essentially after a time τ what I grew with interests becomes my new capital.)



Formula:

$$A_1 = P(1 + r) \quad \text{(Annual rate)}$$

$$A_2 = A_1(1 + r) = P(1 + r)^2$$

$$A_3 = A_2(1 + r) = P(1 + r)^3$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_{n-1}(1 + r) = P(1 + r)^n$$

New Scenario: If we want to change the unit of time, how do we change r?

Next steps:

We have to introduce two kind of rates:

- The nominal annual rate
- The effective annual rate

NOMINAL ANNUAL RATE & EFFECTIVE ANNUAL RATE

Definition: (Nominal annual rate)

r is convertible m-times a year:

$r_m = \frac{r}{m}$, but the amount cannot be re-invested.

→ I still have to wait one year to re-invest the amount reached, but if I want to understand the rate of interest in months it is enough to take $r_m = \frac{r}{m}$, as we did before.

(Essentially it does not take into account the reinvestment of the money.)

(ex. 12 months)

$M = 12 \qquad r_{12} = \frac{r}{12}$

In italiano, "Nominal annual rate" può essere tradotto come "Tasso annuo nominale". Si tratta di un tasso di interesse espresso su base annua, senza tener conto della frequenza con cui l'interesse viene capitalizzato o composto. In altre parole, il tasso annuo nominale rappresenta il tasso di interesse dichiarato o contrattuale applicato a un capitale per un periodo di un anno senza considerare eventuali effetti dovuti al periodo di capitalizzazione degli interessi.

Ad esempio, se un prestito ha un tasso annuo nominale del 5%, significa che l'interesse sul prestito è del 5% all'anno, indipendentemente dal fatto che l'interesse sia calcolato una volta all'anno o più frequentemente.

È importante notare che il tasso annuo nominale non tiene conto degli effetti del tasso di interesse effettivo, che tiene conto della frequenza di capitalizzazione degli interessi e fornisce una misura più accurata del costo o del rendimento di un'operazione finanziaria.

Nominal annual rate

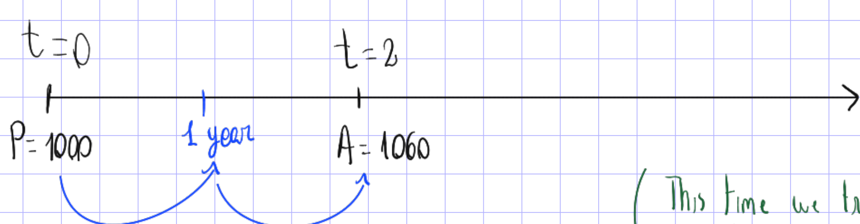
Definition: (Effective annual rate)

Effective annual rate

In italiano, "Effective annual rate" viene tradotto come "Tasso annuo effettivo" o "Tasso di interesse annuo effettivo (TAEG)". Il Tasso annuo effettivo rappresenta il tasso di interesse composto che tiene conto della frequenza di capitalizzazione degli interessi nel corso di un anno. In altre parole, tiene conto non solo del tasso di interesse nominale, ma anche di quante volte l'interesse viene capitalizzato durante l'anno.

Il Tasso annuo effettivo è un indicatore più accurato del costo o del rendimento di un'operazione finanziaria rispetto al tasso di interesse nominale, poiché riflette il vero costo o rendimento tenendo conto della capitalizzazione degli interessi nel corso dell'anno. Questo tasso viene spesso utilizzato per confrontare e valutare diversi prodotti finanziari, come prestiti, investimenti e conti di risparmio, poiché fornisce una misura standardizzata del costo o del rendimento annuo.

Example:



$I = 60 \qquad r = 6\%$

(This time we try to re-invest the money capitalized after 1 year.)

We want to find the: r_e in 2-year, $\quad r_2 = \frac{6\%}{2} = 3\%$

$A_2 = 1000\,(1 + \underbrace{r_2}_{0.03})^2 = 1060.9 \underset{(\neq)}{>} 1060$

(← If I re-invest the money I end up with more than before, obviously. So if I am able to re-invest r_e must be different from r_m)

r nominal annual rate → r_m (time changed simple compound)

r_e effective " rate → $r_e \neq r$

Formula: $A_1 = P(1+r_e)$

$A_1 = P(1+r_m)^m$

$(\text{known}) \rightarrow \;= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$

→ (We consider 1 unit of time and we want them to be equal. So 1 eff. compound vs periodic compounding)

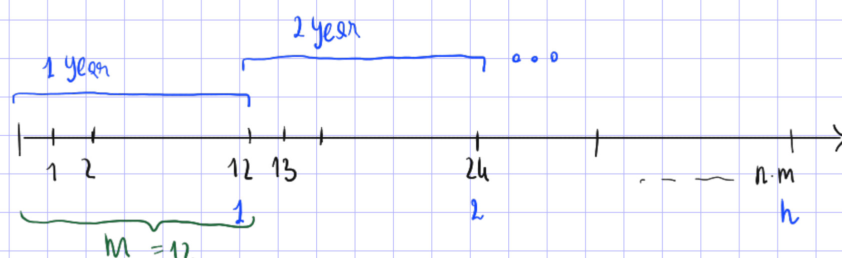
(Obs. We could have done it also with continuous compounding.)

$$P(1+r_e) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \iff (1+r_e) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m \iff r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$$

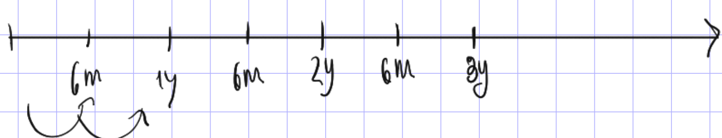
Further generalizations on periodic compounding:

Scenario: As it happened with 1 year, that could have been divided in 12 parts, so $m=12$, giving the formula of the effective rate ($r_e = \dots$) the time span can be increased even more, seeing the evolution of the interest throughout multiple years (n). So the time can be seen as the product of elementary m, specifically $m \cdot n$. At each m there is a re-capitalization, and so the formula is trivially written as:

Formula: $A(n) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$,



example: $n=3$ $m=2$



If $A(t) = P\underbrace{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$ GROWTH FACTOR (From P to $A(t)$)

$$P = \frac{A(t)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}} = A(t)\underbrace{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}}$$

DISCOUNT FACTOR (From $A(t)$ to P)

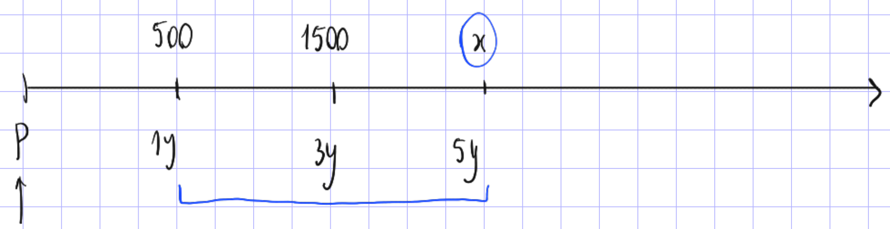
EQUATION OF VALUE

(Compare money w.r.t. a specific time instant)

Scenario: I borrow 3000 € today, to pay off the debt I have to pay 500 € after 1 year, 1500 € after 3 years and an unknown amount after 5 years.

To find the last payment we must refer to the same time, typically referred to the present value.

Example:



Principal today = 3000 € $\qquad r = 10\%$ (← nominal annual rate)

P is a debt

I have to bring them all to the starting point

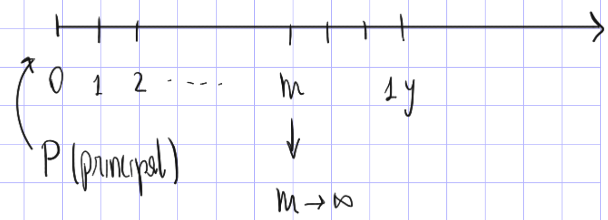
$$3000 = 500(1+r)^{-1} + 1500(1+r)^{-3} + x(1+r)^{-5} = \dots$$

$$= 500(1.1)^{-1} + 1500(1.1)^{-3} + x(1.1)^{-5}$$

$$\Rightarrow x = (1.1)^{5}\left[3000 - 500(1.1)^{-1} - 1500(1.1)^{-3}\right] = 2284.48\ €$$

Continuous Compounding: (The capital is compounded continuously)

Scenario: If there is no limit to the frequency of periodic compounding then we assume continuous compounding.



Formula:

$$A = P \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m} = P \cdot e^{r}$$

$$A(t) = P \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = P \cdot \underbrace{e^{rt}}_{\text{GROWTH FACTOR}}$$

(← Law usually used.)

$$A(t) = P\, e^{rt}$$

$$P = A(t) \cdot \underbrace{e^{-rt}}_{\text{(Discount factor)}}$$

OSS. **Effective annual rate with continuous compounding**

Formula:

$$\left.\begin{aligned} A &= P e^{r} \\ A &= P(1 + r_e) \end{aligned}\right\}$$ must be equal (referred to 1 year)

$$e^{r} = 1 + r_e \iff r = \ln(1 + r_e) \iff r_e = e^{r} - 1$$

RETURN OF INVESTMENT →

In italiano, "Return of Investment" è tradotto come "Ritorno dell'Investimento" o più comunemente come "ROI".

Il Ritorno dell'Investimento (ROI) è una misura utilizzata per valutare la redditività di un investimento, esprimendo il guadagno o la perdita rispetto al costo dell'investimento.
Il ROI viene calcolato generalmente come la differenza tra il guadagno dell'investimento e il costo dell'investimento, divisa per il costo dell'investimento, e viene espressa come percentuale o valore decimale.

Un ROI positivo indica che l'investimento ha generato un guadagno, mentre un ROI negativo indica una perdita. Il ROI è una metrica importante utilizzata dagli investitori per valutare l'efficacia e la redditività degli investimenti e per prendere decisioni informate sull'allocazione dei capitali.

1) Linear Return :

Valore dell' investimento al tempo s.

$V(s)$ —————— $V(t)$ ⟶

$V(t)$ ← Valore " " " " t.

Formula: $LR(s,t) = \dfrac{V(t) - V(s)}{V(s)}$

Fows on Simple compounding

•) The LR between s and t :

$$LR(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} = \frac{V(s)\left(1 + r(t-s)\right) - V(s)}{V(s)} = r(t-s)$$

$$\iff \quad V(t) = V(s) \cdot \left(1 + r(t-s)\right)$$

•) Additivity :

If the rate r is kept constant, there's additivity in time, i.e. $t_1 < t_2 < t_3$

$$LR(t_1, t_2) + LR(t_2, t_3) = r(t_2 - t_1) + r(t_3 - t_2) = r(t_3 - t_1) = LR(t_1, t_3)$$

Let's check the additivity property with continuous compounding:

$$V(t) = e^{r(t-s)} V(s)$$

$$LR(t,s) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} = \frac{e^{r(t-s)} V(s) - V(s)}{V(s)} = e^{r(t-s)} - 1$$

$\downarrow$

$t_1 < t_2 < t_3$,

$$LR(t_1, t_2) + LR(t_2, t_3) = e^{r(t_2 - t_1)} - 1 + e^{r(t_3 - t_2)} - 1 \neq e^{r(t_3 - t_1)} - 1$$

not good

Since the continuous compounding is used, we must re-define the concept of return.

(exercise x casa:
Find the linear return with compounded interest rates)

2) Log-returns:

$$R(s,t) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(s)}\right)$$

$(\ln = \log = \lg)$

Prop:

Logreturns are additive, indeed:

$t_1 < t_2 < t_3$

$$R(t_1, t_2) + R(t_2, t_3) = \lg\left(\frac{V(t_2)}{V(t_1)}\right) + \log\left(\frac{V(t_3)}{V(t_2)}\right) =$$

$$= \cancel{\log(V(t_2))} - \log(V(t_1)) + \log(V(t_3)) - \cancel{\log(V(t_2))}$$

$$= \log(V(t_3)) - \log(V(t_1)) =$$

$$= \log\left(\frac{V(t_3)}{V(t_1)}\right)$$

MONEY MARKET:

Risk-free assets

- ZERO COUPON BONDS
- COUPON BONDS
- BONDS FORWARD
- ANNUITIES
- BANK ACCOUNT

ZERO COUPON BONDS:

Definition (Zero Coupon Bonds)

A T-maturity ZCB is a contract that guarantees its holder the payment of ONE UNIT OF CURRENCY at time T with no intermediate payments.

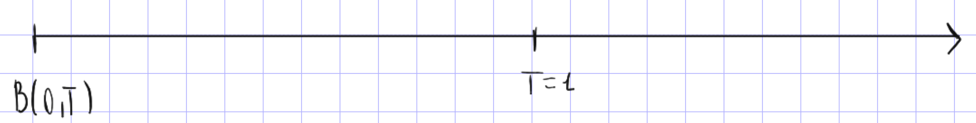
(also called: FACE VALUE, standard amount: $F = 1$ or 100)

Pricing of the Z.C.B.

(Notation)

$B(t,T)$: the value at time $t < T$ of a ZCB with maturity T. (Surely its value must be ≤ 1, since 1 € today worth more than 1€ at maturity T.)

$T-t :=$ time to maturity.



Prop. •) $B(T,T) = 1$ $(= F)$

OBS. If we knew the interest rate r then $B(0,T)$ would be the present value of the face value.

$$B(0,T) = 1e^{-rT}$$

$$B(t,T) = 1 \cdot e^{-r\underbrace{(T-t)}_{\text{time to maturity}}}$$

Actual scenario:

In reality bonds are traded ⇒ Thus, their value is determined by the market and we can find the rate implied by the bond price using continuously compounded rate.

$$B(0,T) = e^{-r(0,T)\cdot T}$$

$$r(0,T) = -\ln\left(\frac{B(0,T)}{T}\right)$$

$$B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)}$$

$$r(t,T) = -\ln\left(\frac{B(t,T)}{T-t}\right)$$

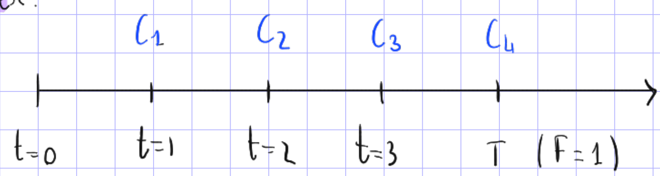
COUPON BOND

Definition: (Coupon Bonds)

Coupon bonds pay to the holder periodically coupons and at maturity T they pay also the face value (← COUPON)

Pricing of Coupon bonds

The theoretical price of a coupon Bond is the present value of all cash flows received by the holder.



Price of the Coupon bond

1 = Face Value , $t_4 = T$

$$C(0,T) = C_1 e^{-r_1 t_1} + C_2 e^{-r_2 t_2} + C_3 e^{-r_3 t_3} + (C_4 + 1) e^{-r_4 t_4}$$

I have to sum the coupon w.r.t. to this time and also the facevalue.

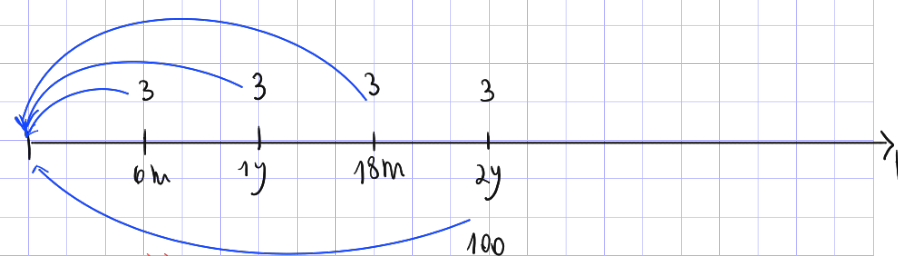
Example (1) : (Pricing of a Z.C.B.)

	MATURITY	ZERO RATE	
6m	0.5	0.05	$B(0, 6m)$
1y	1	0.058	$B(0, 1y)$
18m	1.5	0.064	$B(0, 18m)$
2y	2	0.068	$B(0, 2y)$

- Solution -

$$B(0, 18m) = e^{-0.064 \cdot 1.5} \cdot 1$$

Example (2) : (Pricing of a coupon bond)



Face Value : 100

Coupon : (6% annum paid semi-annually) ??

3% of the face value paid each 6 months

- Solution -

$$C(0,2) = 3 \cdot e^{-r(0,6m) \cdot 0.5} + 3 \cdot e^{-r(0,1y) \cdot 1} + 3 \cdot e^{-r(0,18m) \cdot 1.5} + 103 \cdot e^{-r(0,2y) \cdot 2}$$

$$= 3 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} + 3 \cdot e^{-0.058 \cdot 1} + 3 \cdot e^{-0.064 \cdot 1.5} + 103 \cdot e^{-0.068 \cdot 2}$$

$$= 98.39$$

(RESA)

BOND YIELD

Definition (Bond yield)

The bond yield is the single discount rate that, when applied to all cash flows given a bond price equal to its market price.

Example:

Suppose that you observe $(10, 2) = 98.39$, the bond yield is y given by:

$$3 \cdot e^{-y\,0.5} + 3\, e^{-y \cdot 1} + 3\, e^{-y\,1.5} + 103 \cdot e^{-y \cdot 2} = 98.39$$

$\downarrow$

$y = 6.76\%$

PAR YIELD:

Definition (Par Yield)

The par yield is the coupon rate that makes the bond price = to its face value.

Example:

In the example above $F = 100$ semi-annually paid coupons:

$$\frac{c}{2}\, e^{-0.05 \cdot 0.5} + \frac{c}{2}\, e^{-0.058 \cdot 1} + \frac{c}{2}\, e^{-0.064 \cdot 1.5} + \left(100 + \frac{c}{2}\right) e^{-0.068} = 100$$

$\uparrow$ equation in c.

Annuity

Definition (Annuity)

An annuity is a sequence of finitely many payments of a FIXED amount of money due to EQUAL time INTERVALS

Present value of an annuity:

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^n} = C \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^j} = C \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

(Present value of the 1st annuity) (Present value of the 2nd annuity) ...

BANK ACCOUNT :

Definition (Bank account)

"Level of the account of an investor, the risk-free position of the investor"

The concept of "bank account" refers to an investor's position that is risk-free. It is like a safe harbor for your money where there is no risk of loss. You can think of this account as a secure benchmark compared to other investments that may involve risks. It is important because it provides a stable baseline for evaluating how much you gain or lose with other riskier investments in your portfolio.

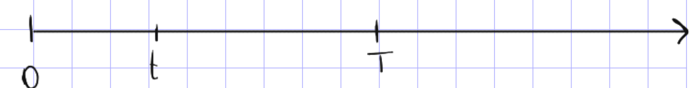
We can think of the account as a tradable asset (because bonds are)

Terminology:

- Long position: buy bonds
- Short position: sell bonds

Value at time 0 of the bank account ≡ amount of money available.

→ $A(0)$



Value of the bank account (with Z.C.B.)

Il valore del mio account si quantifica in numero di bond acquistabili

- $\dfrac{A(0)}{B(0,T)} =$ n° of ZCB with maturity T we can buy with the initial amount.

- $B(t,T) = e^{-r(T-t)} = e^{-rT} \cdot e^{rt} = e^{rt} B(0,T)$

- $A(t) = (\text{num. of Z.C.B.}) \cdot B(t,T) = \dfrac{A(0)}{B(0,T)} \cdot B(t,T) = A(0)\, e^{rt}$

  $\dfrac{A(0)}{B(0,T)} \Downarrow$ # of ZCB

  ↳ Il valore al tempo t del mio account è pari al numero di bond posseduti per il loro valore attuale.

Investment in bonds:

Scenario:

The price $B(t,T)$ of a zero coupon Bond depends on two time variables t, T.

Up to now we assumed r constant: $B(t,T) = e^{-r(T-t)} \cdot 1$

In a more general setting we can assume r as a function of the time t and the maturity T.

$$r(t,T): \quad B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)} \cdot 1$$

·) Now instead we will assume that the interest rate implied by the bond does not depend on T, i.e., we consider:

$$y(t) = r(t,T) = r(t) \quad \Rightarrow \quad B(t,T) = e^{-y(t)(T-t)}$$

·) Now we will prove that if such an assumption is made, if $y(t)$ is deterministic then $y(t) = y(0) = \text{cost}$, otherwise arbitrage opportunities exist. In other words $y(t)$ is either a r.v. or a constant.

Prop: If the yield for some $t > 0$ were known at time $t=0$, that $y(t) = y(0)$ $\forall t$, or else an arbitrage strategy could be found.

Proof:

(Under this assumption we will found an arbitrage strategy.)

Suppose $y(t) > y(0)$ (We know that in advance)

(Prendo in prestito)

$t=0$ I borrow 1\$ at rate $y(0)$, and deposit it at rate $y(0)$

$t=1$ Withdraw the deposit with interest $e^{y(0)t}$ and invest at $y(t)$ $t \to t+1$.

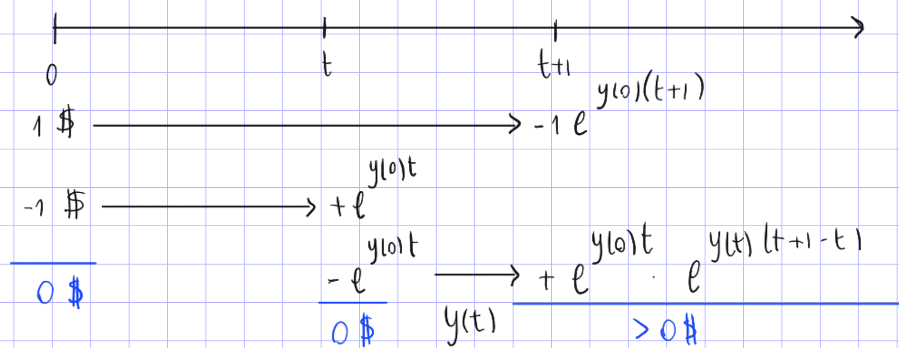
$t+1$ withdraw the investment $e^{y(0)t} \; e^{y(t)(t+1-t)}$

Replay the loan $- e^{y(0)(t+1)}$

You have : $e^{y(0)t} \, e^{y(t)\cdot(t+1-t)} - e^{y(0)(t+1)}$

$$e^{y(0)t}\Big(\underbrace{e^{y(t)} - e^{y(0)}}_{>0}\Big)$$

Scheme:



(The reverse is similar)

Conclusion:

This proposition implies that if the yield is indep. from T and deterministic then it is constant.

2 Recap Lezione 2 – Time Value of Money and Bonds

Idea generale della lezione La lezione formalizza il concetto di **time value of money** e introduce gli strumenti base del **money market**, con focus su **zero-coupon bonds** e **coupon bonds**. L'obiettivo è capire come confrontare valori monetari in tempi diversi tramite **capitalizzazione** e **sconto**, come definire correttamente un **return**, e come prezzare e confrontare investimenti tramite **discount factors**, **zero rates**, **yield** e **par yield**.

Time value of money Si investe oggi un capitale (principal) P e si vuole determinare il valore futuro $A(t)$ al tempo t, oppure viceversa si conosce un valore futuro e si vuole trovare il valore equivalente oggi. L'interesse maturato è $I(t) = A(t) - P$. Per unità di tempo $t = 1$, si ha $A - P = I$. Il **tasso di interesse** è definito come

$$r = \frac{I}{P} \qquad \Rightarrow \qquad I = Pr.$$

Simple compounding L'interesse cresce in modo **lineare** nel tempo, senza "interesse sull'interesse". L'ammontare al tempo t è

$$A(t) = P + Prt = P(1 + rt),$$

con **growth factor** $1 + rt$. Lo sconto corrispondente è

$$P = \frac{A(t)}{1 + rt}.$$

La coerenza delle unità di tempo è essenziale, il tasso deve essere espresso nella stessa unità del tempo utilizzato.

Compound compounding L'interesse viene **capitalizzato periodicamente**, quindi ogni periodo l'interesse maturato entra nel capitale e genera ulteriore interesse. Con r **nominal annual rate** convertibile m volte l'anno, il tasso per periodo è $\frac{r}{m}$ e dopo t anni

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Il valore attuale si ottiene con lo sconto

$$P = \frac{A(t)}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}}.$$

Nominal annual rate Si introduce un tasso annuo **nominale** r quando la capitalizzazione avviene m volte l'anno, in modo che il tasso per periodo sia $\frac{r}{m}$ e l'accumulazione su t anni sia coerente con la convenzione di capitalizzazione periodica

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Effective annual rate Si vogliono confrontare investimenti con diverse frequenze di capitalizzazione tramite un unico tasso annuo "comparabile". L'**effective annual rate** r_e è definito imponendo equivalenza a un anno

$$P(1 + r_e) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m} \qquad \Rightarrow \qquad r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m} - 1.$$

Continuous compounding La capitalizzazione avviene in modo "continuo" nel tempo. Passando al limite $m \to \infty$

$$A(t) = Pe^{rt}, \qquad P = A(t)e^{-rt}.$$

La relazione con l'effective annual rate è

$$Pe^{r} = P(1 + r_e) \qquad \Rightarrow \qquad r = \ln(1 + r_e), \quad r_e = e^{r} - 1.$$

Equation of value Si hanno più flussi di cassa in tempi diversi (prestiti, rimborsi, pagamenti) e si vuole imporre che siano **equivalenti** rispetto a un tempo di riferimento (tipicamente $t = 0$). Il principio è riportare tutti i flussi allo stesso tempo con i fattori di sconto e imporre l'uguaglianza tra valori attuali. In forma generale

$$\sum_i \mathrm{CF}_i \cdot \mathrm{DF}(t_i) = 0,$$

dove $\mathrm{DF}(t_i)$ è il discount factor coerente con la convenzione di capitalizzazione adottata.

Return: linear return e log-return Si osserva un valore $V(s)$ al tempo s e un valore $V(t)$ al tempo t, e si vuole misurare la performance dell'investimento tra s e t. Il **linear return** è

$$LR(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)}.$$

Nel caso di interesse semplice, il return è coerente con l'additività su intervalli consecutivi. Con capitalizzazione non lineare (es. continua) tale additività non vale in generale. Si introduce il **log-return**

$$R(s,t) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(s)}\right),$$

che soddisfa sempre l'additività

$$R(t_1,t_2) + R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3).$$

Money market Si considerano strumenti **risk-free** che generano flussi deterministici e che vengono usati come "mattoni" per prezzare cash flow futuri. Tra gli strumenti si considerano **zero coupon bonds**, **coupon bonds**, **bond forwards**, **annuities** e **bank account**. Il formalismo chiave è quello dei **discount factors** e dei **zero rates**.

Bank account Si considera un conto bancario come strumento risk-free che permette di accumulare capitale nel tempo secondo una convenzione di capitalizzazione scelta. Indicando con $A(t)$ l'ammontare al tempo t, le forme tipiche sono $A(t) = P(1 + rt)$, $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$ oppure $A(t) = Pe^{rt}$, con attualizzazione ottenuta invertendo la rispettiva relazione.

Annuity Si considera un'**annuity** come una sequenza di pagamenti deterministici a date prefissate. Il valore oggi è la somma dei valori attuali dei pagamenti, ottenuti scontando ciascun flusso con il fattore di sconto coerente con la struttura dei tassi.

Investment in bond Si interpreta l'acquisto di un bond come un investimento che scambia un esborso certo oggi con una sequenza di flussi futuri deterministici. Il confronto tra investimenti in bond passa attraverso attualizzazione dei flussi, uso di zero rates e sintesi tramite yield e par yield.

Zero-coupon bonds (ZCB) Si vuole prezzare oggi un titolo che paga **un solo** flusso certo a scadenza T. Indicando con $B(t,T)$ il valore al tempo $t < T$

$$B(T,T) = 1.$$

Se il bond è scambiato a mercato, lo **zero rate** implicito (continuamente composto) è definito da

$$B(0,T) = e^{-r(0,T)T} \qquad \Rightarrow \qquad r(0,T) = -\ln\left(\frac{B(0,T)}{T}\right),$$

e analogamente

$$B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)} \qquad \Rightarrow \qquad r(t,T) = -\ln\left(\frac{B(t,T)}{T-t}\right).$$

Coupon bonds Si vuole prezzare oggi un titolo che paga cedole a date intermedie e rimborsa il face value alla maturity. Il prezzo teorico è il valore attuale di tutti i flussi. Se le cedole c_i sono pagate ai tempi t_i e $t_n = T$, con face value $F = 1$

$$C(0,T) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\, e^{-r_i t_i} + (c_n + 1)e^{-r_n t_n},$$

dove r_i sono i tassi (zero rates) associati alle diverse scadenze.

Bond yield Si osserva un prezzo di mercato di un bond e si vuole riassumere l'intera struttura dei flussi con un **unico** tasso equivalente. Lo **yield** y è il tasso (unico) che, applicato a tutti i flussi del bond, riproduce il prezzo

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_i \, e^{-y t_i},$$

dove CF_i sono i flussi di cassa (cedole e rimborso) ai tempi t_i.

Par yield Si vuole determinare quale tasso cedolare rende un bond scambiato "alla pari", cioè con prezzo uguale al face value. Il **par yield** è il coupon rate c tale che il prezzo del bond soddisfi

$$P = F,$$

con P dato dalla somma dei valori attuali dei flussi (cedole costruite con c e rimborso del face value) scontati tramite la struttura dei tassi.