

# 1 Recap Lezione 1 – Financial Instruments and Markets

**Idea generale della lezione** La lezione introduce i **financial instruments** e i **financial markets**, presentando le principali categorie di **securities e contratti**, con particolare attenzione a **bonds, stocks, derivatives, forwards, futures e options**. L'obiettivo è fornire le definizioni di base, chiarire le differenze tra strumenti e introdurre i concetti di **payoff, price, risk e posizioni long/short**.

**Securities e contratti** Una **security** è un documento che conferisce diritti di proprietà su un **financial claim**. I mercati finanziari vengono classificati in base alle caratteristiche degli strumenti dal punto di vista dell'investitore.

## Classificazione principale

- **Basic securities**
  - **Stocks** Securities che rappresentano una quota di proprietà di un'impresa
  - **Fixed income (bonds)** Securities di debito che prevedono pagamenti determinati o predeterminabili
  - **Foreign exchange (FX)** Strumenti legati allo scambio tra valute diverse
  - **Commodities** Beni fisici standardizzati scambiati nei mercati finanziari
- **Derivatives and contracts**
  - **Forwards e futures** Contratti che fissano oggi le condizioni di uno scambio futuro
  - **Options (call e put)** Contratti che conferiscono il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un underlying

**Bonds** Un **bond** è una security che rappresenta uno strumento di debito e conferisce al detentore il diritto a ricevere flussi di cassa futuri determinati.

- Un pagamento predeterminato a una data futura detta **maturity**
- Un **nominal value** detto anche face value, par value o principal

## Caratteristiche principali

- Il **bond price** è il prezzo pagato dal creditore al debitore
- Il **nominal value** è l'importo rimborsato alla maturity
- L'**interest rate** è espresso come percentuale del nominal value
- I bonds sono soggetti a **default risk**

## Tipologie di bonds

- **Maturity**
  - Short-term bond con maturity minore o uguale a un anno
  - Long-term bond con maturity superiore a un anno
- **Pure discount bond / zero coupon bond**
  - Bond che prevede un unico pagamento alla maturity
  - Prezzo iniziale inferiore al nominal value
- **Coupon bond**
  - Bond che prevede pagamenti periodici detti **coupons**
  - Alla maturity pagamento dell'ultimo coupon più il nominal value

**Stocks** Una **stock** è una security che conferisce al detentore una quota di proprietà dell'impresa emittente.

- I profitti possono essere reinvestiti oppure distribuiti come **dividends**
- I dividends non sono garantiti
- Il prezzo è noto al tempo iniziale ma non nel futuro

**Risk** L'acquisto e la successiva vendita di una stock può generare un risultato incerto.

- **Profit** Quando il return è positivo
- **Loss** Quando il return è negativo

Il **return** dipende dalla differenza tra prezzo di vendita e prezzo di acquisto. La **capital gain** è la differenza tra selling price e initial price, mentre il rapporto tra dividend e prezzo è detto **dividend yield**.

## Posizioni

- **Long position** Posizione che consiste nell'acquisto di una security
- **Short position** Posizione che consiste nella vendita di una security non posseduta
- Il venditore short beneficia di una riduzione del prezzo
- Ogni contratto è uno **zero-sum game**

**Derivatives** Un **derivative** è uno strumento finanziario il cui valore dipende dal valore di un **underlying asset**. I derivatives sono anche detti **contingent claims** e permettono il trasferimento del rischio tra operatori.

**Forwards e Futures** Un **forward contract** è un accordo in cui le parti fissano oggi prezzo, quantità e data futura di consegna, con regolamento alla maturity e tipica negoziazione **OTC**. Un **future contract** è un contratto simile ma scambiato in un **exchange** ed è soggetto a **marking to market**.

**Spot price, forward price e payoff** Lo **spot price** è il prezzo corrente dell'underlying. Il **forward price** è il prezzo fissato oggi per uno scambio futuro.

- Payoff long position pari a  $S_T - K$
- Payoff short position pari a  $K - S_T$

Il forward contract è uno **zero-sum game**.

**Options** Una **option** è una security che conferisce al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un underlying a un prezzo prefissato.

## Tipologie di options

- **Call option** Diritto di acquistare l'underlying
- **Put option** Diritto di vendere l'underlying

## Payoff delle options

- Call long con payoff  $(S_T - K)^+$
- Put long con payoff  $(K - S_T)^+$

Il prezzo dell'opzione è detto **option price** ed è pagato dal buyer al writer.

## 2 Recap Lezione 2 – Time Value of Money and Bonds

**Idea generale della lezione** La lezione formalizza il concetto di **time value of money** e introduce gli strumenti base del **money market**, con focus su **zero-coupon bonds** e **coupon bonds**. L'obiettivo è capire come confrontare valori monetari in tempi diversi tramite **capitalizzazione** e **sconto**, come definire correttamente un **return**, e come prezzare e confrontare investimenti tramite **discount factors**, **zero rates**, **yield** e **par yield**.

**Time value of money** Si investe oggi un capitale (principal)  $P$  e si vuole determinare il valore futuro  $A(t)$  al tempo  $t$ , oppure viceversa si conosce un valore futuro e si vuole trovare il valore equivalente oggi. L'interesse maturato è  $I(t) = A(t) - P$ . Per unità di tempo  $t = 1$ , si ha  $A - P = I$ . Il **tasso di interesse** è definito come

$$r = \frac{I}{P} \quad \Rightarrow \quad I = Pr.$$

**Simple compounding** L'interesse cresce in modo **lineare** nel tempo, senza “interesse sull'interesse”. L'ammontare al tempo  $t$  è

$$A(t) = P + Prt = P(1 + rt),$$

con **growth factor**  $1 + rt$ . Lo sconto corrispondente è

$$P = \frac{A(t)}{1 + rt}.$$

La coerenza delle unità di tempo è essenziale, il tasso deve essere espresso nella stessa unità del tempo utilizzato.

**Compound compounding** L'interesse viene **capitalizzato periodicamente**, quindi ogni periodo l'interesse maturato entra nel capitale e genera ulteriore interesse. Con  $r$  **nominal annual rate** convertibile  $m$  volte l'anno, il tasso per periodo è  $\frac{r}{m}$  e dopo  $t$  anni

$$A(t) = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Il valore attuale si ottiene con lo sconto

$$P = \frac{A(t)}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}}.$$

**Nominal annual rate** Si introduce un tasso annuo **nominale**  $r$  quando la capitalizzazione avviene  $m$  volte l'anno, in modo che il tasso per periodo sia  $\frac{r}{m}$  e l'accumulazione su  $t$  anni sia coerente con la convenzione di capitalizzazione periodica

$$A(t) = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

**Effective annual rate** Si vogliono confrontare investimenti con diverse frequenze di capitalizzazione tramite un unico tasso annuo “comparabile”. L'**effective annual rate**  $r_e$  è definito imponendo equivalenza a un anno

$$P(1 + r_e) = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \quad \Rightarrow \quad r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

**Continuous compounding** La capitalizzazione avviene in modo “continuo” nel tempo. Passando al limite  $m \rightarrow \infty$

$$A(t) = Pe^{rt}, \quad P = A(t)e^{-rt}.$$

La relazione con l'effective annual rate è

$$Pe^r = P(1 + r_e) \quad \Rightarrow \quad r = \ln(1 + r_e), \quad r_e = e^r - 1.$$

**Equation of value** Si hanno più flussi di cassa in tempi diversi (prestiti, rimborsi, pagamenti) e si vuole imporre che siano **equivalenti** rispetto a un tempo di riferimento (tipicamente  $t = 0$ ). Il principio è riportare tutti i flussi allo stesso tempo con i fattori di sconto e imporre l'uguaglianza tra valori attuali. In forma generale

$$\sum_i CF_i \cdot DF(t_i) = 0,$$

dove  $DF(t_i)$  è il discount factor coerente con la convenzione di capitalizzazione adottata.

**Return: linear return e log-return** Si osserva un valore  $V(s)$  al tempo  $s$  e un valore  $V(t)$  al tempo  $t$ , e si vuole misurare la performance dell'investimento tra  $s$  e  $t$ . Il **linear return** è

$$LR(s, t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)}.$$

Nel caso di interesse semplice, il return è coerente con l'additività su intervalli consecutivi. Con capitalizzazione non lineare (es. continua) tale additività non vale in generale. Si introduce il **log-return**

$$R(s, t) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(s)}\right),$$

che soddisfa sempre l'additività

$$R(t_1, t_2) + R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3).$$

**Money market** Si considerano strumenti **risk-free** che generano flussi deterministici e che vengono usati come “mattoni” per prezzare cash flow futuri. Tra gli strumenti si considerano **zero coupon bonds**, **coupon bonds**, **bond forwards**, **annuities** e **bank account**. Il formalismo chiave è quello dei **discount factors** e dei **zero rates**.

**Bank account** Si considera un conto bancario come strumento risk-free che permette di accumulare capitale nel tempo secondo una convenzione di capitalizzazione scelta. Indicando con  $A(t)$  l'ammontare al tempo  $t$ , le forme tipiche sono  $A(t) = P(1 + rt)$ ,  $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$  oppure  $A(t) = Pe^{rt}$ , con attualizzazione ottenuta invertendo la rispettiva relazione.

**Annuity** Si considera un'**annuity** come una sequenza di pagamenti deterministici a date prefissate. Il valore oggi è la somma dei valori attuali dei pagamenti, ottenuti scontando ciascun flusso con il fattore di sconto coerente con la struttura dei tassi.

**Investment in bond** Si interpreta l'acquisto di un bond come un investimento che scambia un esborso certo oggi con una sequenza di flussi futuri deterministici. Il confronto tra investimenti in bond passa attraverso attualizzazione dei flussi, uso di zero rates e sintesi tramite yield e par yield.

**Zero-coupon bonds (ZCB)** Si vuole prezzare oggi un titolo che paga **un solo** flusso certo a scadenza  $T$ . Indicando con  $B(t, T)$  il valore al tempo  $t < T$

$$B(T, T) = 1.$$

Se il bond è scambiato a mercato, lo **zero rate** implicito (continuamente composto) è definito da

$$B(0, T) = e^{-r(0, T)T} \quad \Rightarrow \quad r(0, T) = -\ln\left(\frac{B(0, T)}{T}\right),$$

e analogamente

$$B(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)} \quad \Rightarrow \quad r(t, T) = -\ln\left(\frac{B(t, T)}{T-t}\right).$$

**Coupon bonds** Si vuole prezzare oggi un titolo che paga cedole a date intermedie e rimborsa il face value alla maturity. Il prezzo teorico è il valore attuale di tutti i flussi. Se le cedole  $c_i$  sono pagate ai tempi  $t_i$  e  $t_n = T$ , con face value  $F = 1$

$$C(0, T) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{-r_i t_i} + (c_n + 1)e^{-r_n t_n},$$

dove  $r_i$  sono i tassi (zero rates) associati alle diverse scadenze.

**Bond yield** Si osserva un prezzo di mercato di un bond e si vuole riassumere l'intera struttura dei flussi con un **unico** tasso equivalente. Lo **yield**  $y$  è il tasso (unico) che, applicato a tutti i flussi del bond, riproduce il prezzo

$$P = \sum_{i=1}^n CF_i e^{-yt_i},$$

dove  $CF_i$  sono i flussi di cassa (cedole e rimborso) ai tempi  $t_i$ .

**Par yield** Si vuole determinare quale tasso cedolare rende un bond scambiato “alla pari”, cioè con prezzo uguale al face value. Il **par yield** è il coupon rate  $c$  tale che il prezzo del bond soddisfi

$$P = F,$$

con  $P$  dato dalla somma dei valori attuali dei flussi (cedole costruite con  $c$  e rimborso del face value) scontati tramite la struttura dei tassi.

### 3 Recap Lezione 3 – Duration and Interest Rate Risk

**Idea generale della lezione** La lezione analizza il **rischio di tasso di interesse** associato ai bond e introduce strumenti analitici per misurare la **sensibilità del prezzo di un titolo obbligazionario alle variazioni del rendimento**. Il concetto centrale è la **duration**, ottenuta a partire da un'approssimazione di primo ordine del prezzo del bond, e il suo utilizzo nella gestione del rischio e nella costruzione di strategie di copertura.

**Bond price come funzione del rendimento** Il prezzo di un bond può essere visto come una funzione del rendimento  $y$ ,

$$B(y) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-y t_i},$$

dove  $c_i$  sono i flussi di cassa pagati ai tempi  $t_i$ .

**Sviluppo di Taylor del prezzo del bond** Si considera lo sviluppo di Taylor del prezzo del bond attorno a un valore  $y_0$ ,

$$B(y) = B(y_0) - D(y_0)B(y_0)\Delta y + \frac{1}{2}C(y_0)B(y_0)(\Delta y)^2 + \dots$$

dove  $D(y_0)$  e  $C(y_0)$  rappresentano rispettivamente duration e convexity valutate in  $y_0$ .

**Duration** La **duration** è definita come

$$D(y) = -\frac{1}{B(y)} \frac{dB(y)}{dy} = \sum_{i=1}^n t_i \left( \frac{c_i e^{-y t_i}}{B(y)} \right).$$

La duration ammette le seguenti interpretazioni

- È una **combinazione convessa dei tempi di pagamento**, poiché i pesi  $\frac{c_i e^{-y t_i}}{B(y)}$  sono positivi e sommano a uno
- Misura la **sensitività del prezzo del bond** rispetto a variazioni del rendimento secondo

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -D(y) \Delta y$$

- Costituisce una **misura di rischio di tasso di interesse**, quantificando l'esposizione del valore del bond a shock sui tassi

**Convexity** La **convexity** è definita come

$$C(y) = \frac{1}{B(y)} \frac{d^2 B(y)}{dy^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2 \left( \frac{c_i e^{-y t_i}}{B(y)} \right).$$

**Portfolio of bonds** Si considera un portafoglio di  $n$  bond con quantità  $q_i$  e prezzi  $B_i(y)$ , per cui il valore del portafoglio è

$$P(y) = \sum_{i=1}^n q_i B_i(y).$$

Imponendo che la duration del portafoglio soddisfi

$$-D_p(y)P(y) = \frac{dP(y)}{dy} = -\sum_{i=1}^n q_i D_i(y) B_i(y), \quad D_p(y) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i D_i(y) B_i(y)}{P(y)} = \sum_{i=1}^n D_i(y) \left( \frac{q_i B_i(y)}{P(y)} \right).$$

Si definiscono quindi

$$w_i = \frac{q_i B_i(y)}{P(y)}, \quad D_p(y) = \sum_{i=1}^n w_i D_i(y).$$

**Dynamic hedging** La duration fornisce una copertura valida localmente. Poiché il rendimento e il tempo influenzano il valore della duration, è necessario un aggiornamento continuo del portafoglio. Il **dynamic hedging** consiste nel ribilanciare dinamicamente le posizioni per mantenere sotto controllo l'esposizione al rischio di tasso.

## 4 Recap Lezione 4 – Term Structure, Bootstrap and Forward Rates

**Idea generale della lezione** La lezione studia la **struttura a termine dei tassi di interesse** senza imporre l'ipotesi che il rendimento sia indipendente dalla maturity. Si introducono gli **spot rates**, la costruzione della **zero curve tramite bootstrap**, le proprietà di non arbitraggio nel caso di struttura a termine deterministica e il concetto di **forward rate**, con applicazione ai **Forward Rate Agreements (FRA)**.

**Struttura a termine e prezzo dei bond** Si considera il prezzo di un zero-coupon bond al tempo  $t$  con maturity  $T$ , indicato come  $B(t, T)$ , dove  $T - t$  è il **time-to-maturity**. Senza assumere rendimenti costanti sulle maturity, il prezzo del bond è espresso come

$$B(t, T) = e^{-y(t, T)(T-t)}.$$

**General term structure of zero-coupon bonds** La struttura a termine dei zero-coupon bond è descritta dall'insieme dei prezzi  $B(t, T)$  al variare della maturity  $T$ . Essa è equivalente alla struttura a termine dei rendimenti  $y(t, T)$ , che sintetizzano l'informazione contenuta nei prezzi dei bond per ogni scadenza.

**Spot rate** Fissando  $t = 0$ , il rendimento  $y(0, T)$  associato al bond  $B(0, T)$  è detto **spot rate**. Gli spot rates descrivono la struttura a termine iniziale dei tassi di interesse.

**Prezzo di un coupon bond tramite spot rates** Se  $y(0, T)$  dipende solo dalla maturity  $T$ , il prezzo di un coupon bond può essere scritto come somma dei valori attuali dei flussi di cassa

$$P = c_1 e^{-y(0, t_1)t_1} + c_2 e^{-y(0, t_2)t_2} + \dots + (c_n + F) e^{-y(0, T)T}.$$

**Bootstrap method** Definendo la funzione  $y(0, T)$  come **zero curve**, il **bootstrap method** viene utilizzato per costruirla a partire dai prezzi di mercato dei bond. Si procede in modo sequenziale

- Si ricavano gli spot rates associati ai zero-coupon bond
- Si utilizzano tali spot rates per scontare i flussi noti dei bond coupon
- Si determina iterativamente il nuovo spot rate

Nel caso di coupon pagati semestralmente, ciascun flusso viene scontato con il tasso corrispondente alla sua maturity.

**Term structure deterministica** Se la struttura a termine  $y(t, T)$  è deterministica, l'assenza di arbitraggio implica la relazione

$$B(0, T) = B(0, t) B(t, T).$$

**Argomento di non arbitraggio** La relazione viene dimostrata tramite la costruzione di un portafoglio che soddisfa le seguenti proprietà

- Ha valore nullo a  $t = 0$
- Ha valore nullo a  $t$
- Genera un payoff positivo certo a  $T$

In violazione dell'assenza di arbitraggio se l'uguaglianza non fosse soddisfatta.

**Conseguenze** Se i tassi sono deterministici, la struttura a termine futura  $B(t, T)$  è completamente determinata dalla struttura iniziale. Vale inoltre la relazione

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} = e^{y(0, t)t - y(0, T)T}.$$

In generale, tuttavia, la struttura a termine futura non dipende interamente da quella iniziale.

**Forward rates deterministici** Assumendo che

$$B(0, T) = B(0, t) B(t, T),$$

i forward rates  $y(t, T)$  risultano deterministici e dipendono solo dalla struttura iniziale. Si sottolinea esplicitamente che questa è un'assunzione utile, ma non necessariamente realistica.

**Calcolo dei forward rates** Assumendo continuous compounding, dalla relazione

$$e^{-y(0,T)T} = e^{-y(0,t)t} e^{-y(t,T)(T-t)}, \quad y(t,T) = \frac{y(0,T)T - y(0,t)t}{T-t}.$$

Conoscendo gli spot rates iniziali è quindi possibile determinare tutti i forward rates.

**Forward Rate Agreement (FRA)** Un **Forward Rate Agreement (FRA)** è un contratto derivato in cui le parti si scambiano, alla maturity del contratto, la differenza tra due tassi di interesse

- Un tasso fisso detto forward rate
- Un tasso variabile di mercato detto settlement rate

La differenza è moltiplicata per la durata del contratto e per il notional principal.

**Interpretazione economica del FRA** Le posizioni contrattuali nel FRA sono così definite

- Il seller dell'FRA riceve il tasso fisso e paga il tasso variabile
- Il buyer dell'FRA riceve il tasso variabile e paga il tasso fisso

Il FRA consente di coprirsi contro variazioni future dei tassi di interesse e permette di fissare oggi il rendimento di un investimento o di un prestito futuro.

**Determinazione anticipata dei forward rates** Attraverso gli spot rates osservabili  $y(0,1)$  e  $y(0,2)$ , è possibile costruire un'operazione equivalente tramite zero-coupon bond e determinare il forward rate  $y(1,2)$ . Il forward rate rappresenta il tasso implicito che rende equivalente il valore attuale dei flussi futuri.

**Caratteristiche del FRA** Il FRA è un contratto con le seguenti caratteristiche

- Non standardizzato
- Negoziato over-the-counter (OTC)
- Utilizzabile per hedging, speculazione e arbitraggio