Hedging with futures:

Scenario: One relatively simple way to hedge an exposure to stock price variations is to enter a forward contract. However a contract of this kind may not be readily available, not to mention the risk of default. Another possibility is to hedge using the futures market, which is well-developed, liquid and protected from the risk of default.

Notation

$F(0,T)$ forward price

$f(0,T)$ futures price

$\Rightarrow$ $V_F(t) = [F(t,T) - F(0,T)]\, e^{-r(T-t)}$ ← Value of a forward at time t.

$\Rightarrow$ $V_f(t) = \left[f(t,T) - f(0,T) \right] e^{-r(T-t)}$ ← Value of a future at time t.

Building up:

Let's suppose the hedge horizon to be $t_h \leq T$, and suppose also to have an exposure to $S(t)$.

(1) Hedging using forward contracts: ($t_h \equiv T$ on the underlying asset $S(t)$)

The portfolio: $P = (1, N)$ N = number of forward contracts

(stock)

$N > 0$ long forward

$N < 0$ short forward

The value of the portfolio at time t: $V_p(t) = V_S(t) + N\, V_F(t)$

$\Rightarrow$ Then: $\Delta V_p(T) := V_p(T) - V_p(0)$ (We are interested in the variance of the value gained, which is a random variable)

$V_p(0) = S(0) + N \cdot 0$

$V_p(T) = S(T) + N\, V_F(T)$

$\Delta V_p(T) = S(T) - S(0) \cdot e^{rT} + N\, V_F(T)$

Goal: We want to minimize the variance of the portfolio (i.e. the risk)

Let's try with: $N = -1$

$\Delta V_p(T) = S(T) - S(0) e^{rT} - \underbrace{V_F(T)}_{\text{This is the payoff of the position.}}$

$F(0,T) = S(0) e^{rT}$

$= \cancel{S(T)} - S(0) e^{rT} - (\cancel{S(T)} - F(0,T)) = F(0,T) - S(0) e^{rT} = 0$

(Past lecture)

(If this happens I did perfect hedging obtaining no-risk.

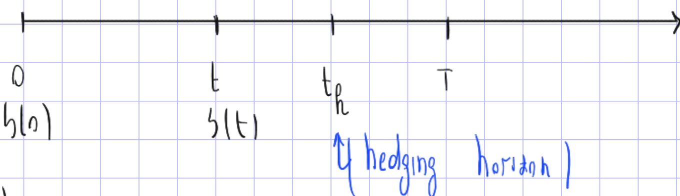
$\Downarrow$

(PERFECT HEDGING)

(2) Hedging using futures contracts:

- $t_h \neq T$, t_h hedge horizon
- Underlying asset : $S(t)$

Basis : $b(t,T) = S(t) - f(t,T)$



(Value of a future contract)

$$V_f(t) = \Big[f(t,T) - f(0,T) \Big] e^{-r(T-t)}$$

(Introduced now)

- $b(t,T) = 0$
- $f(t,T) \longrightarrow f(T,T) = S(T)$

OBS. $t_h \leq T$ and typically $T - t_h$ is chosen as close as possible to zero.

Building up: (Assuming $r = 0 \Rightarrow e^{rt} = 1 \ \forall t$)

- We construct a portfolio $P = (1, N)$ with 1 asset S and N futures

$$V_p(t) = V_S(t) + N\, V_f(t)$$

$$V_p(0) = S(0) + N \cdot 0$$

$$V_p(t_h) = S(t_h) + N V_f(t_h) = S(t_h) + N \Big[f(t_h,T) - f(0,T) \Big] \cdot 1$$

$(r=0)$

$$\Delta V_p(t_h) = V_p(t_h) - V_p(0) = S(t_h) + N \Big[f(t_h,T) - f(0,T) \Big] - S(0)$$

$$= S(t_h) - S(0) + N \Big[f(t_h,T) - f(0,T) \Big]$$

Goal: I want to find N to minimize (Variance):

$$Var(\Delta_p(t_h)) = Var\left[\Delta S(t_h) + N \Delta f(t_h)\right]$$

(Formula of the variance of the sum of 2 r.v.)

$$= Var\left[\Delta S(t_h)\right] + N^2 \, Var\left[\Delta f(t_h)\right] + 2N \, cov(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h))$$

•) $Var(\Delta S(t_h)) = Var(S(t_h) - S(0)) = Var(S(t_h))$

•) $Var(\Delta f(t_h)) = Var(f(t_h,T) - f(0,T)) = Var(f(t_h,T))$

•) $Cov(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h)) = Cov(S(t_h), f(t_h,T))$

$$\Rightarrow \overbrace{Var(\Delta V_p(t))}^{\sigma_V^2} = \overbrace{Var(S(t_h))}^{\sigma_S^2} + \overbrace{Var(f(t_h,T))}^{\sigma_f^2} N^2 + 2N \overbrace{Cov(S(t_h), f(t_h,T))}^{\sigma_{S,f}}$$

$$\sigma_V^2 = \sigma_S^2 + \sigma_f^2 N^2 + 2N \sigma_{S,f}$$

OBS. Notice that for a forward contract we find:

$$Var(\Delta V_p(t)) = Var(S(T)) + V(\underbrace{F(T,T)}_{=S(T)})N^2 + 2N \, Cov(S(T), F(T,T))$$

$$= (N^2+1) \, Var(S(T)) + 2N \, Var(S(T))$$

$N = -1$

$$= 2Var(S(T)) - 2\,Var(S(T)) = 0$$

I need to minimize the variance w.r.t. N.

(Convex function)

$$\sigma_V^2 = \sigma_S^2 + N^2 \sigma_f^2 + 2N \sigma_{S,f}$$

∘) Let's minimize the variance w.r.t. N:

$$\frac{d(\sigma_V^2)}{dN} = 2N\sigma_f^2 + 2\sigma_{S,f} = 0 \rightarrow \boxed{N^* = -\frac{\sigma_{S,f}}{\sigma_f^2}}$$

(Negative if $\sigma_{S,f} > 0$, let's assume that)

∘) We have to short N^* futures contracts (since $N^* < 0$)

$$N^* = -\rho \frac{\sigma_S}{\sigma_f} \qquad \rho := \mathrm{Cov}(S(t_h), f(t_h, T))$$ (DA CAPIRE)

$$\mathrm{Var}(\Delta V_p(t_h)) = \mathrm{Var}(\Delta S(t_h) + N^* \Delta f(t_h)) = \sigma_S^2 + \underbrace{\frac{\sigma_{S,f}^2}{\sigma_f^4}}_{=N^2} \cdot \sigma_f^2 - 2\frac{\sigma_{f,S}}{\sigma_f^2}\sigma_{f,S}$$

$$= \sigma_S^2 - 2\frac{\sigma_{f,S}^2}{\sigma_f^2}$$

The variance of the difference in the value of the portfolio throughout the time span $(0, t_h)$

If $\sigma_{f,S}^2 = 0$ we are not hedging. We have the same risk (variance) as the asset itself.

$$N^* = -\frac{\mathrm{Cov}(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h))}{\mathrm{Var}(\Delta f(t_h))}$$

This reminds to linear regression

$$\Delta S = \alpha + \beta \Delta f + \varepsilon$$

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(\Delta S, \Delta f)}{\mathrm{Var}(\Delta f)} \quad \rightsquigarrow \text{so} \quad \beta = -N^*$$

If : -) $N^* = 0$, $\beta = 0$ no hedge is possible

-) $N^* = 1$, $\beta = -1$ UNITARY HEDGE

Perfect hedge is a case of unitary hedge → $T_h = T$
→ Underlying asset of f is S.

Definition (Effectiveness of the hedge)

The relative difference between the asset variance and the hedged portfolio variance:

$$\frac{\sigma_S^2 - \sigma_V^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_{fS}^2}{\sigma_S^2 \sigma_f^2} = \rho^2 = R^2$$

(force i calcol.)

linear correlation

6 Recap Lezione 6 – Hedging with Futures

Idea generale della lezione Si studia come coprire (hedging) un'esposizione al rischio di prezzo di un asset $S(t)$ usando forward e soprattutto futures. Si evidenzia che il forward può dare copertura perfetta quando l'orizzonte di hedging coincide con la maturity, mentre con i futures in generale compare il **basis risk**, quindi l'hedging viene impostato come un problema di **minimizzazione della varianza**.

Scenario e motivazione Un modo semplice per coprire l'esposizione alle variazioni di $S(t)$ è entrare in un forward, ma un forward può non essere facilmente disponibile e presenta rischio di controparte. Il mercato futures è invece più sviluppato e liquido e, tramite exchange e clearing house, riduce il rischio di default.

Notazione Si indica con $F(0,T)$ il forward price e con $f(0,T)$ il futures price. Il valore di un forward stipulato a 0 e osservato a t è

$$V_F(t) = \big(F(t,T) - F(0,T)\big)e^{-r(T-t)}.$$

In modo analogo, il valore del futures (nella formulazione vista a lezione) si scrive

$$V_f(t) = \big(f(t,T) - f(0,T)\big)e^{-r(T-t)},$$

e spesso si usa l'ipotesi operativa $r = 0$, per cui $e^{rt} = 1$.

Hedging con forward e copertura perfetta Si considera un portafoglio $P = (1, N)$ composto da 1 unità dell'asset e N forward con maturity T, con $N > 0$ long forward e $N < 0$ short forward. Il valore del portafoglio è $V_p(t) = V_S(t) + NV_F(t)$. Poiché $V_p(0) = S(0)$, alla maturity si ha

$$V_p(T) = S(T) + N\big(S(T) - F(0,T)\big).$$

Nel caso $N = -1$ si ottiene

$$\Delta V_p(T) = F(0,T) - S(0)e^{rT},$$

che diventa costante e pari a zero se vale $F(0,T) = S(0)e^{rT}$. In tale situazione si ottiene **perfect hedging** e la varianza della variazione di valore è nulla.

Hedging con futures e basis risk Si introduce un **hedge horizon** $t_h < T$, scelto tipicamente vicino a T. Si definisce la **basis** come $b(t,T) = S(t) - f(t,T)$. Si ha $b(T,T) = 0$ e $f(t,T) \to f(T,T) = S(T)$, ma per $t < t_h < T$ la basis è in generale diversa da zero e può variare nel tempo, generando **basis risk**.
Si costruisce un portafoglio $P = (1, N)$ con 1 unità dell'asset e N futures. Con l'ipotesi operativa $r = 0$, si usa $V_p(0) = S(0)$ e

$$V_p(t_h) = S(t_h) + N\big(f(t_h,T) - f(0,T)\big),$$

quindi

$$\Delta V_p(t_h) = \big(S(t_h) - S(0)\big) + N\big(f(t_h,T) - f(0,T)\big).$$

Ponendo $\Delta S(t_h) = S(t_h) - S(0)$ e $\Delta f(t_h) = f(t_h,T) - f(0,T)$, si ottiene

$$\Delta V_p(t_h) = \Delta S(t_h) + N\Delta f(t_h).$$

Obiettivo e funzione varianza Si sceglie N per minimizzare la varianza della variazione di valore del portafoglio,

$$\text{Var}\left(\Delta V_p(t_h)\right).$$

Usando la formula della varianza della somma di due variabili aleatorie,

$$\text{Var}\left(\Delta V_p(t_h)\right) = \text{Var}\left(\Delta S(t_h)\right) + N^2\,\text{Var}\left(\Delta f(t_h)\right) + 2N\,\text{Cov}\left(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h)\right).$$

La funzione è convessa in N, quindi il minimo si ottiene imponendo la derivata nulla.

Hedge ratio ottimo Derivando rispetto a N e imponendo lo zero,

$$\frac{d}{dN}\operatorname{Var}\big(\Delta V_p(t_h)\big) = 2N\operatorname{Var}\big(\Delta f(t_h)\big) + 2\operatorname{Cov}\big(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h)\big) = 0,$$

da cui

$$N^* = -\frac{\operatorname{Cov}\big(\Delta S(t_h), \Delta f(t_h)\big)}{\operatorname{Var}\big(\Delta f(t_h)\big)}.$$

Interpretazione economica di N^* La quantità N^* rappresenta il **numero ottimo di contratti futures** da includere nel portafoglio per ridurre al minimo la variabilità complessiva della variazione di valore sull'orizzonte $(0, t_h)$. Il termine al numeratore misura quanto le variazioni del futures si muovono insieme a quelle dell'asset, mentre il denominatore misura la volatilità del futures stesso. Se la covarianza è elevata in valore assoluto, il futures è efficace nel compensare le fluttuazioni dell'asset; se invece la varianza del futures è grande, ne servono meno contratti in valore assoluto per ottenere lo stesso effetto di copertura.

Se $\operatorname{Cov}(\Delta S, \Delta f) > 0$, allora $N^* < 0$ e si assume una posizione **short** nei futures, poiché le variazioni positive dell'asset tendono a essere compensate da variazioni negative della componente futures del portafoglio.

Scrivendo $\operatorname{Cov}(\Delta S, \Delta f) = \rho\,\sigma_S\sigma_f$, si ottiene anche

$$N^* = -\rho\,\frac{\sigma_S}{\sigma_f},$$

che evidenzia come l'hedge ratio dipenda dalla **correlazione** tra asset e futures e dal rapporto tra le loro deviazioni standard.

Collegamento con regressione lineare La forma di N^* richiama la regressione lineare

$$\Delta S = \alpha + \beta\Delta f + \varepsilon,$$

in cui

$$\beta = \frac{\operatorname{Cov}(\Delta S, \Delta f)}{\operatorname{Var}(\Delta f)},$$

quindi $\beta = -N^*$. Il coefficiente di regressione identifica la quantità di futures che minimizza la varianza della variazione di valore del portafoglio sull'intervallo $(0, t_h)$.

Casi notevoli e unitary hedge Se $N^* = 0$, allora $\beta = 0$ e non si riesce a fare hedging in modo efficace. Se $N^* = 1$, allora $\beta = -1$ e si ha **unitary hedge**. Il **perfect hedge** è un caso particolare di unitary hedge quando $t_h = T$ e l'underlying del derivato coincide con l'asset, condizione che elimina il basis risk.

Effectiveness of the hedge Si definisce l'**effectiveness** come la riduzione relativa della varianza passando dall'asset non coperto al portafoglio coperto,

$$\frac{\sigma_S^2 - \sigma_V^2}{\sigma_S^2}.$$

Usando il valore ottimo N^*, si ottiene che tale quantità coincide con ρ^2 e anche con β^2. L'efficacia dell'hedge dipende quindi dalla correlazione lineare tra ΔS e Δf: maggiore è $|\rho|$, maggiore è la quota di rischio eliminabile, mentre $|\rho| < 1$ implica varianza residua e quindi presenza di basis risk.