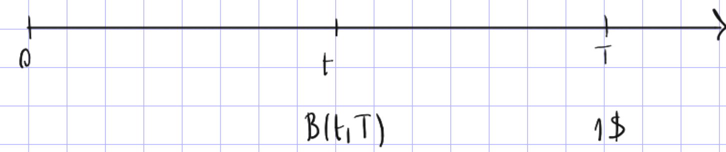
General Term Structure

Scenario: Here we shall discuss a model of bond prices <u>without</u> the condition that the yield should be independent of maturity, i.e. from $y(t)$ to $y(t,T)$

Consequently the formula of the bond's price would be: $B(t,T) = e^{-(T-t)\,y(t,T)}$



Definition (Spot rate):

If we consider $B(0,T)$ then it is associated with $y(0,T)$ which is called spot-rate

Formula:

$y(0,T)$ is only a function of the maturity T, and when we want to find the price of a coupon bond we write:

$$P = C_1 e^{-y(0,t_1)t_1} + C_2 e^{-y(0,t_2)t_2} + \dots + (C_n + F)\, e^{-y(0,T)T}$$

Bootstrap method:

Starting by defining $y(0,T)$ as the zero-curve, the bootstrap method is used to build this zero-curve.

Example:

Bond Principal	Time to Maturity (years)	Coupon per year*	Bond price
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

(* Half the stated coupon is paid each 6 months)

- Solution -

(2.1.B) 1) $97.5 = e^{-y(0,0.25)\cdot 0.25}\cdot 100 \Rightarrow y(0,0.25) = -\ln\left(\frac{97.5}{100}\right)\cdot\frac{1}{0.25} = 0.10127$

(2.1.B.) 2) $\overset{94.0}{\overset{\|}{B(0,0.5)}} = 100\cdot e^{-y(0,0.5)\,0.5} \Rightarrow y(0,0.50) = -\ln\left(\frac{94.0}{100}\right)\cdot\frac{1}{0.5} = 0.10469$

(2.1.B.) 3) $\overset{90.0}{\overset{\|}{B(0,1.0)}} = 100\cdot e^{-y(0,1.0)\cdot 1.0} \Rightarrow y(0,1.0) = -\ln\left(\frac{90}{100}\right)\cdot\frac{1}{1} = 0.10536$

(1.B.) 4) $\overset{96.0}{\overset{\|}{B(0,1.5)}} = 4\cdot e^{-y(0,0.5)\cdot 0.5} + 4\cdot e^{-y(0,1)\cdot 1} + (100+4)\cdot e^{-y(0,1.5)\cdot 1.5} =$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{(96.0 - 3.80 - 3.60)}{104}\right)\cdot\frac{1}{1.5} = y(0,1.5) = 0.10681$$

(1.B.) 5) $\overset{101.6}{\overset{\|}{B(0,2)}} = 6\cdot e^{-y(0,0.5)\cdot 0.5} + 6\cdot e^{-y(0,1)\cdot 1} + 6\cdot e^{-y(0,1.5)\cdot 1.5} + (100+6)\cdot e^{-y(0,2)\cdot 2}$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{101.6 - 5.69 - 5.4 - 5.41}{106}\right)\cdot\frac{1}{2} = y(0,2) = 0.10806$$

General Term Structure of ZCB:

We recall that $B(t,T)$ is the price of a bond at time t and maturity at time T, where $t-T$ is called time-to-maturity.

Prop. If the term structure $y(t,T)$ is deterministic, then no-arbitrage implies:

$$B(0,T) = B(0,t)\,B(t,T)$$

Proof. If $B(0,T) < B(0,t)\,B(t,T)$

At time 0:

- Buy a bond $B(0,T)$. $(-B(0,T))$
- Sell a fraction $\boxed{B(t,T)}$ of a $B(0,t)$ bond. $(+B(0,t)B(t,T))$

  (meant as number)

  (Here is where we use the assumption of knowing the future bond's price)
- Invest $B(0,t)B(t,T) - B(0,T)$ in a bank account.

$V(0) = 0$

At time t:

- I need to pay $B(t,T)$ due to the bond sold. $(-B(t,T))$
- I issue a $B(t,T)$ bond to pay aforementioned bond. $(+B(t,T))$

$V(t) = 0$

At time T:

- I need to pay 1 \$ due to $B(t,T)$ $(-1\$)$
- I obtain a positive cash flow from the bond bought at time 0, $B(0,T)$ $(+1\$)$
- I take back my money from the bank account where they grew up interests $(+x > 0)$

$V(T) = x > 0$

Consequencies:

- This means that the general term structure $B(t,T)$ is completely determined by the initial term structure.

If $B(0,t)\cdot B(t,T) = B(0,T) \wedge B(t,T) = e^{-y(t,T)\cdot(T-t)}$ then:

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} = e^{y(0,t)t - y(0,T)T}$$

- historical data say that the future term structure does not depend entirely from the initial term structure $\Rightarrow$ future rates are random.

$$B(t,T) = e^{-y(t,T)\cdot(T-t)}$$

Deterministic Forward Rates :

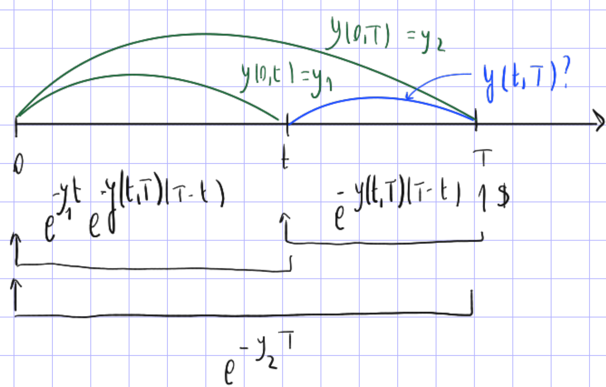
Let's assume that $B(0,T) = B(0,t)\,B(t,T)$ holds, and so $y(t,T)$ are deterministic and $y(t,T)$, so $B(t,T)$, entirely depends on the starting situation.

We explicitly say that this is an assumption, this is not the truth, but it might be useful.

Computation: With the aforementioned assumption we will find $y(t,T)$ having just $y(0,T)$ and $y(0,t)$.

Consider first $y = $ cost

(We will consider the continuous compounded discount)



Assume $y(0,t)$ is the initial term structure of the rate: $y_1 = y(0,t)$, $y_2 = y(0,T)$

What I'm looking for is: $y(t,T)$

From knowing that: $B(0,T) = B(0,t)B(t,T)$

$$e^{-y_2 T} = e^{-y_1 t}\, e^{-\underbrace{y(t,T)}_{\text{(we want this)}}(T-t)}$$

$$y(t,T) = \frac{-\ln(e^{-y_2 T}) + \ln(e^{-y_1 t})}{T-t} = \frac{y_2 T - y_1 t}{T-t} = \frac{y(0,T)T - y(0,t)t}{T-t}$$

Conclusion: By knowing the zero rates we can find all the forward rates.

Forward Rate Agreement:

Definition & Explaination:

A Forward Rate Agreement (FRA) is a derivative contract in which the parties agree to exchange, at the contract's maturity, the difference between a fixed rate (or forward rate) and a market variable rate (or settlement rate) multiplied by the contract's duration and the notional principal. The period between the contract's execution date and the date from which interest begins to accrue is called the "grace period," which allows parties to hedge against future interest rate changes.

The seller of the FRA will receive payment based on the fixed rate and will make payments based on the variable rate, while the buyer will receive payment based on the variable rate and will make payments based on the fixed rate. Since both parties are obligated to perform, the FRA is a symmetrical derivative contract.

The FRA allows parties to hedge against future interest rate changes; with the FRA, it is possible to invest or borrow at the current forward rate. Selling the FRA allows a party with future investment needs to lock in the current forward rate. In this way, if the market rate is lower than the FRA rate at the time of investment, the seller receives the difference, and vice versa. In any case, the investor/seller of the FRA will obtain a return equal to the initial forward rate from their future investment.

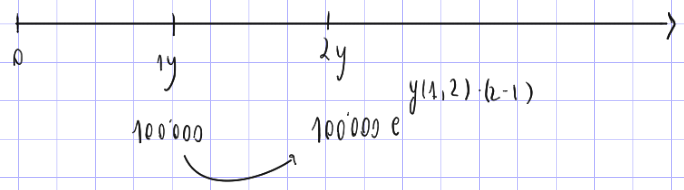
For this reason, the seller of an FRA is typically someone who expects (or fears) a future decrease in interest rates, while the buyer of an FRA is someone who expects (or fears) an increase in rates. Like all derivatives, the FRA can be used for hedging, speculation, and arbitrage purposes.

The FRA is a derivative contract, non-standardized, traded over the counter (OTC) through bilateral negotiations; it is not traded on regulated markets.

How to decide in advance the forward rates:

Example:

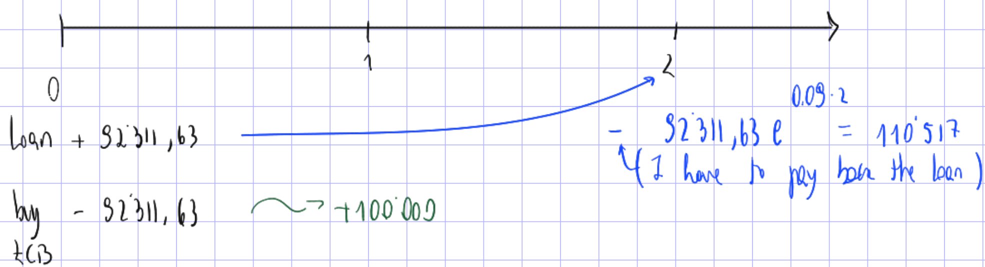
Your company loans \$ 100'000 in 1 year, it will pay back the loan after 2 years



Suppose you can observe the zero rates: $y(0,1) = 8\%$, $y(0,2) = 9\%$

|| I borrow today an amount of money to buy a ZCB with maturity 1 year and $F = 100'000$

↳ the value now of $B(0,1) = 100000\, e^{-y(0,1)\cdot 1} = 92'311.63$



Borrow 92'311,63 for 2 years at a rate $y(0,2) = 9\%$

I will receive 100'000 \$ $t=1$ and I have to pay back 110'517 $t=2$

To find $y(1,2)$:

$$110'517\, e^{-y(1,2)\,t} = 100'000$$

↓

This gives back:

$$y(1,2) = \ln\left(\frac{110'517}{100'000}\right) \approx 10\%$$

↳ Forward Rate Agreement : R

4 Recap Lezione 4 – Term Structure, Bootstrap and Forward Rates

Idea generale della lezione La lezione studia la **struttura a termine dei tassi di interesse** senza imporre l'ipotesi che il rendimento sia indipendente dalla maturity. Si introducono gli **spot rates**, la costruzione della **zero curve tramite bootstrap**, le proprietà di non arbitraggio nel caso di struttura a termine deterministica e il concetto di **forward rate**, con applicazione ai **Forward Rate Agreements (FRA)**.

Struttura a termine e prezzo dei bond Si considera il prezzo di un zero-coupon bond al tempo t con maturity T, indicato come $B(t,T)$, dove $T-t$ è il **time-to-maturity**. Senza assumere rendimenti costanti sulle maturity, il prezzo del bond è espresso come

$$B(t,T) = e^{-y(t,T)(T-t)}.$$

General term structure of zero-coupon bonds La struttura a termine dei zero-coupon bond è descritta dall'insieme dei prezzi $B(t,T)$ al variare della maturity T. Essa è equivalente alla struttura a termine dei rendimenti $y(t,T)$, che sintetizzano l'informazione contenuta nei prezzi dei bond per ogni scadenza.

Spot rate Fissando $t=0$, il rendimento $y(0,T)$ associato al bond $B(0,T)$ è detto **spot rate**. Gli spot rates descrivono la struttura a termine iniziale dei tassi di interesse.

Prezzo di un coupon bond tramite spot rates Se $y(0,T)$ dipende solo dalla maturity T, il prezzo di un coupon bond può essere scritto come somma dei valori attuali dei flussi di cassa

$$P = c_1 e^{-y(0,t_1)t_1} + c_2 e^{-y(0,t_2)t_2} + \cdots + (c_n + F)e^{-y(0,T)T}.$$

Bootstrap method Definendo la funzione $y(0,T)$ come **zero curve**, il **bootstrap method** viene utilizzato per costruirla a partire dai prezzi di mercato dei bond. Si procede in modo sequenziale

- Si ricavano gli spot rates associati ai zero-coupon bond
- Si utilizzano tali spot rates per scontare i flussi noti dei bond coupon
- Si determina iterativamente il nuovo spot rate

Nel caso di coupon pagati semestralmente, ciascun flusso viene scontato con il tasso corrispondente alla sua maturity.

Term structure deterministica Se la struttura a termine $y(t,T)$ è deterministica, l'assenza di arbitraggio implica la relazione

$$B(0,T) = B(0,t)\,B(t,T).$$

Argomento di non arbitraggio La relazione viene dimostrata tramite la costruzione di un portafoglio che soddisfa le seguenti proprietà

- Ha valore nullo a $t=0$
- Ha valore nullo a t
- Genera un payoff positivo certo a T

In violazione dell'assenza di arbitraggio se l'uguaglianza non fosse soddisfatta.

Conseguenze Se i tassi sono deterministici, la struttura a termine futura $B(t,T)$ è completamente determinata dalla struttura iniziale. Vale inoltre la relazione

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} = e^{y(0,t)t - y(0,T)T}.$$

In generale, tuttavia, la struttura a termine futura non dipende interamente da quella iniziale.

Forward rates deterministici Assumendo che

$$B(0,T) = B(0,t)\,B(t,T),$$

i forward rates $y(t,T)$ risultano deterministici e dipendono solo dalla struttura iniziale. Si sottolinea esplicitamente che questa è un'assunzione utile, ma non necessariamente realistica.

continuous compounding

Calcolo dei forward rates Assumendo capitalizzazione continua, dalla relazione

$$e^{-y(0,T)T} = e^{-y(0,t)t}\, e^{-y(t,T)(T-t)}, \qquad y(t,T) = \frac{y(0,T)T - y(0,t)t}{T-t}.$$

Conoscendo gli spot rates iniziali è quindi possibile determinare tutti i forward rates.

Forward Rate Agreement (FRA) Un **Forward Rate Agreement (FRA)** è un contratto derivato in cui le parti si scambiano, alla maturity del contratto, la differenza tra due tassi di interesse

- Un tasso fisso detto forward rate
- Un tasso variabile di mercato detto settlement rate

La differenza è moltiplicata per la durata del contratto e per il notional principal.

Interpretazione economica del FRA Le posizioni contrattuali nel FRA sono così definite

- Il seller dell'FRA riceve il tasso fisso e paga il tasso variabile
- Il buyer dell'FRA riceve il tasso variabile e paga il tasso fisso

Il FRA consente di coprirsi contro variazioni future dei tassi di interesse e permette di fissare oggi il rendimento di un investimento o di un prestito futuro.

Determinazione anticipata dei forward rates Attraverso gli spot rates osservabili $y(0,1)$ e $y(0,2)$, è possibile costruire un'operazione equivalente tramite zero-coupon bond e determinare il forward rate $y(1,2)$. Il forward rate rappresenta il tasso implicito che rende equivalente il valore attuale dei flussi futuri.

Caratteristiche del FRA Il FRA è un contratto con le seguenti caratteristiche

- Non standardizzato
- Negoziato over-the-counter (OTC)
- Utilizzabile per hedging, speculazione e arbitraggio