Generación de Variables Aleatorias

Mg. Ariel González (Departamento de Computación – Fac. Cs. Exactas – UNRC). Mail: agonzalez(AT)dc.exa.unrc.edu.ar)

Propósito

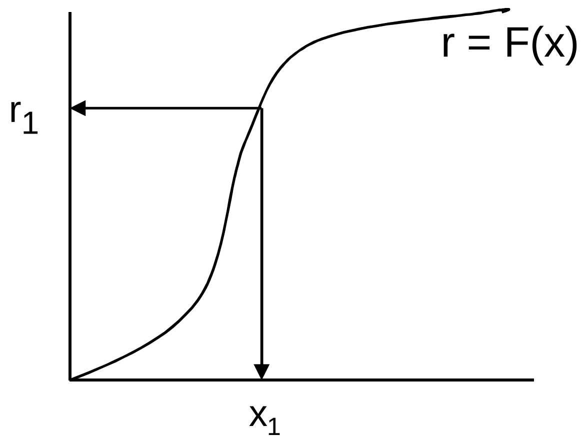
- Comprender como se generan muestras de una distribución específica como entrada a un modelo de simulación.

- Algunas técnicas mas usadas para generar variables aleatorias.
  - Transformada Inversa.
  - Aceptación y Rechazo.

Técnica de la Transformada Inversa

- El concepto:
  - Para una fda: $r = F(x)$
  - Generar r desde una uniforme(0,1)
  - encontrar x:

$$\boxed{x = F^{-1}(r)}$$



Distribución Exponencial

- Distr. Exponencial:
  - fda:

$$r = F(x)$$
$$= 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{para } x \geq 0$$

  - Para generar $X_1, X_2, X_3 \ldots$

$$X_i = F^{-1}(R_i)$$
$$= -(1/\lambda) \ln(1-R_i)$$

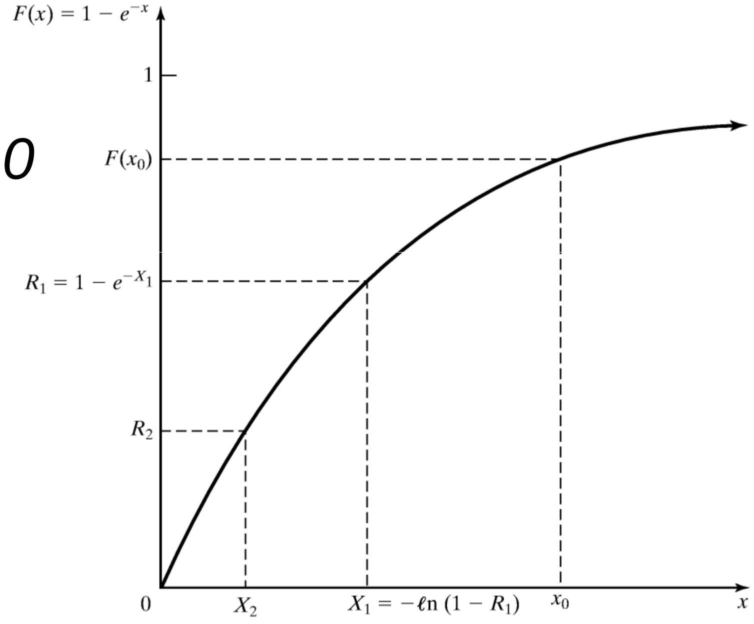
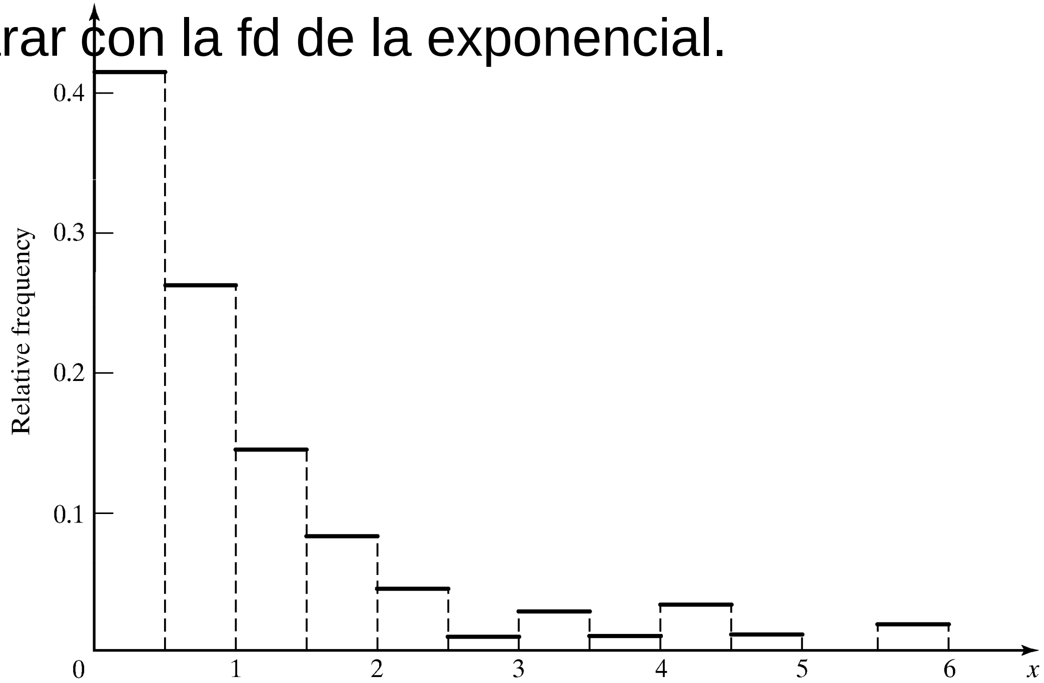


Figura: Transformada Inversa para exp(λ = 1)

Distribución Exponencial [transformada Inversa]

- Ejemplo: Generar *200* variables X_i con distrib. $exp(\lambda = 1)$
  - Generar *200 Rs* con U(0,1) utilizando la formula anterior. El histograma de los Xs tiene la forma de la fig. de abajo:
  - Comparar con la fd de la exponencial.



Otras Distribuciones [transformada Inversa]

- Ejemplos de otras distribuciones:
  - Uniform distribution
  - Weibull distribution
  - Triangular distribution

Distribuciones Continuas Empíricas [Transf.-Inversa]

- Cuando una distr. Teórica no es aplicable
- Coleccionar datos empíricos:
  - Remuestreo de los datos observados
  - Obtener valores mediante Interpolación.
- Para una muestra pequeña (tamaño *n*):
  - Ordenar los datos

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$$

  - Asignar la probablidad 1/n a cada intervalo $x_{(i-1)} \leq x \leq x_{(i)}$

$$\boxed{X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i\left(R - \frac{(i-1)}{n}\right)}$$

donde $a_i = \dfrac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{1/n - (i-1)/n} = \dfrac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{1/n}$

  - Ejemplo. Datos recolectados:2,76 1,83 0,80 1,45 1,24 (pág. 307)

Distribuciones Continuas Empíricas [Transf.-Inversa]

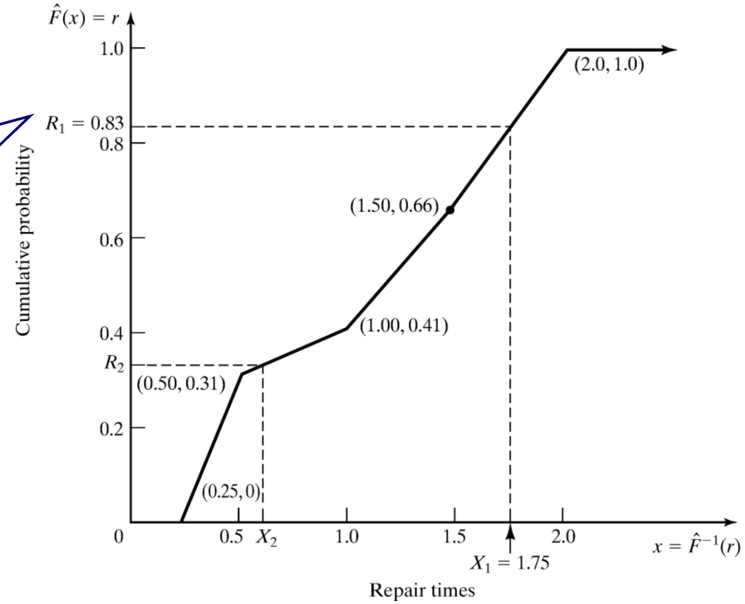
- Ejemplo: Si la muestra es grande, se pueden agrupar. Suponer que se han recolectado datos de tiempos de reparación de 100 máquinas dañadas.

i	*Intervalo (Horas)*	*Frecuencia*	*Frecuencia Relativa*	*Frecuencia Acum., c_i*	*Pendiente, a_i*
1	$0.25 \leq x \leq 0.5$	31	0,31	0,31	0,81
2	$0.5 \leq x \leq 1.0$	10	0,10	0,41	5,0
3	$1.0 \leq x \leq 1.5$	25	0,25	0,66	2,0
4	$1.5 \leq x \leq 2.0$	34	0,34	1,00	1,47

Considere $R_1 = 0.83$:

$c_3 = 0.66 < R_1 < c_4 = 1.00$

$X_1 = x_{(4-1)} + a_4(R_1 - c_{(4-1)})$
$= 1.5 + 1.47(0.83-0.66)$
$= 1.75$



Distribuciones Discretas [Transf.-Inversa]

- Todas las distr. Discretas pueden ser generadas via la técnica de la Transformada Inversa.
- Ejemplos de aplicación:
  - Empírica
  - Uniforme Discreta
  - Geométrica

Técnica de Aceptación y Rechazo

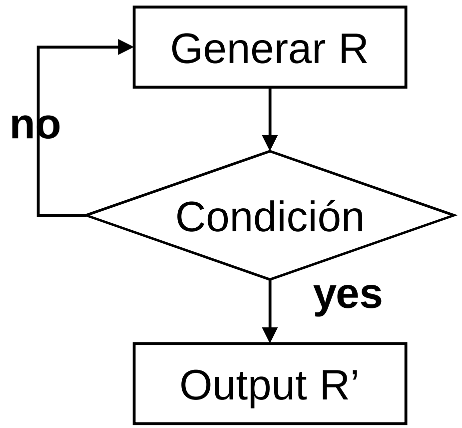
- Muy usada cuando la inversa de la fda no existe.
- Ilustración: Para generar variables aleatorias, $X \sim U(1/4, 1)$

Procedimiento:

Paso 1. Generar R ~ U[0,1]

Paso 2a. Si R >= ¼, acceptar X=R.

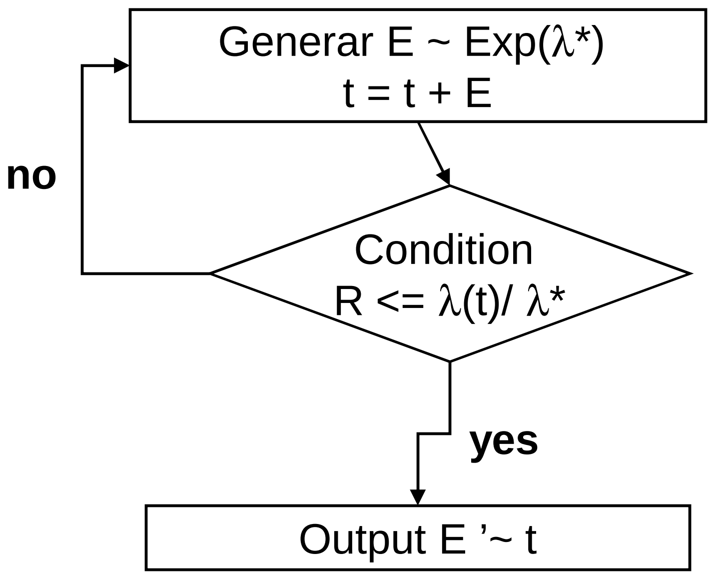
Paso 2b. Si R < ¼, rechazar R, retornar al Paso 1.



- Eficiencia: habilidad para minimizar el número de rechazos.
- **Poisson Distribution (pág. 318)**

Proceso Poisson No Estacionario

- Método de “adelgazamiento”:
  - Generar un Proceso de arribos Poisson Estacionario a la tasa mas grande, $\lambda^* = \max \lambda(t)$
  - “Aceptar” solo una porción de los arribos (“adelgazamiento”), para obtener (o simular) la tasa variable deseada.



PPNE

- Ejemplo: Generar una V.A. para un PPNE

Dato: Tasas de Arribos

t *(min)*	*Tiempo Medio entre arribos (min)*	*Tasa de Arribo λ(t) (#/min)*
0	15	1/15
60	12	1/12
120	7	1/7
180	5	1/5
240	8	1/8
300	10	1/10
360	15	1/15
420	20	1/20
480	20	1/20

Procedimiento:

Step 1. $\lambda^* = max\ \lambda(t) = 1/5$, $t = 0$ and $i = 1$.

Step 2. Para un núm. Aleatorio $R = 0.2130$,

$E = -5ln(0.213) = 13.13$

$t = 13.13$

Step 3. Generar $R = 0.8830$

$\lambda(13.13)/\lambda^*=(1/15)/(1/5)=1/3$

Dado $R>1/3$, NO generar el arribo.

Step 2. Para un núm. Aleatorio $R = 0.5530$,

$E = -5ln(0.553) = 2.96$

$t = 13.13 + 2.96 = 16.09$

Step 3. Generar $R = 0.0240$

$\lambda(16.09)/\lambda^*=(1/15)/(1/5)=1/3$

Dado $R<1/3,\ T_1 = t = 16.09$,

and $i = i + 1 = 2$

Técnicas Especiales

- Solo se aplican a distribuciones específicas.
- Por ejemplo:
  - *Transformación Directa* para una distribución normal o loganormal
  - Método de Convolución
  - Distr. Beta (desde una distr. gamma)

Transformación Directa

- Método para una normal(μ, σ^2):
  - Generar $Z_i \sim N(0,1)$

$$\boxed{X_i = \mu + \sigma Z_i}$$

- Método para una lognormal(μ, σ^2):
  - Generate $X \sim N((\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{Y_i = e^{X_i}}$$

Resumen

- Principios de generación de V.A.s via:
  - Técnica de la Transformada Inversa.
  - Técnica de Aceptación y Rechazo
  - Técnicas especiales

Referencias

- DAGPUNAR, J. [1998] , *Principles of Random Variate Generation*, Clarendom Press, Oxford.
- LAW, A. M. [2007], *Simulation Modeling and Analysis*, 4th ed., McGraw-Hill, New York.
- RIPLEY, B.D. [1987], *Stochastic Simulation*, Wiley, New York.
- **Jerry Banks, John S. Carson, II, Barry L. Nelson, *Discrete-Event System Simulation*, David M. Nicol. Quinta Edición. ISBN-10: 0136062121. Publisher: Prentice Hall.**