

Presentación de la Asignatura

Mg. Ariel Gonzalez
Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto
agonzalez(AT)dc.exa.unrc.edu.ar

Temas de la Clase: *Modalidad de la asignatura e Introducción al*
Modelado y Simulación de Sistemas

Presentación de la Asignatura

Horarios de la Materia

Teóricos (Ariel Gonzalez)
Miércoles de 16a 19hs. (aula 103 Pab. II)

Prácticos (Cecilia Kilmurray – Ariel Gonzalez)
Martes de 9 a 12hs (aula 103 Pab. II) y Jueves de 10 a 12hs. (aula 101 Pab. II)

Respecto a las Consultas

- La Secretaría del Departamento de Computación no posee información acerca de horarios, exámenes, etc. de la asignatura.
- No se responderán consultas telefónicas en ningún momento.
- No se responderán consultas personalmente fuera de los horarios de clases o de consultas.
- No se pegarán carteles informativos en el Departamento de Computación.
- **Toda la información** referida a la materia se encontrará **exclusivamente** en el **sitio web de la asignatura:** <http://dc.exa.unrc.edu.ar/moodle/>

Presentación de la Asignatura

Modalidad y Calendario

El régimen de regularización de la materia exige la aprobación de un examen parcial (con recuperación) y un trabajo práctico integrador (con defensa)

Parcial: 24 de mayo.
Recuperación: 31 de mayo.

Proyecto:
Comienzo: 01 de junio,
Entrega: 14 de junio.

- Los trabajos prácticos obligatorios deberán ser resueltos en grupos de 2 personas. Las entregas serán por e-mail, y tendrán posteriormente una defensa si el docente lo requiere.
- Los exámenes y el trabajo integrador deben aprobarse con nota mínima 5 (cinco).

Presentación de la Asignatura

Contenidos Generales

- Introducción al Modelado y Simulación de Sistemas.
- Sistemas de Eventos Discretos. Conceptos principales. Etapas de un estudio de simulación.
- Revisión de conceptos de probabilidad y estadística.
- Herramientas y Lenguajes de Simulación existentes (SIMSCRIPT, C++SIM, OMNET++, **POWER-DEVS**, JMT, DEVS-JAVA , **EOSimulator**, etc.).
- Validación y verificación de modelos de simulación.
- Análisis de resultados de las simulaciones.
- DEVS, un formalismo para simulación orientada a eventos discretos. Extensiones y Herramientas (Power-Devs).
- Sistemas Continuos. Conceptos fundamentales. Ecuaciones Diferenciales. Métodos de Integración Numérica. Características y Análisis de los Métodos

Presentación de la Asignatura

BIBLIOGRAFIA

- **“Discrete-Event System Simulation”. Jerry Banks, John S. Carson, II, Barry L. Nelson, David M. Nicol. Quinta Edición. ISBN-10: 0136062121. Publisher: Prentice Hall.**
- “Simulation modeling and analysis”. Averill M. Law. W. David Kelton. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. 1991. ISBN: 0-07-100803-9.
- “Discrete-event modeling and simulation: a practitioner's approach”. Gabriel A. Wainer. ISBN 1420053361, 9781420053364, 2009.
- “Simulation computer systems, Techniques and Tools”. M. H. Mac Dougall. ISBN: 0-262-13229-X.
- **“Theory of Modelling and Simulation”. B. Zeigler. Wiley, N. Y. 1976.**
- “Multifaceted Modeling and discrete event simulation”. B. Zeigler. Academic Press. 1984.
- “Object Oriented simulation with hierarchial modular models”. B. Zeigler. Academic Press. 1990.
- **“Simulation Modelling with Pascal”, Ruth M. Davies and Robert M. O'Keefe.**
- Apuntes varios que se irán subiendo a la web de la asignatura.

Introducción

Introducción y Definiciones

- **Sistema:** Conjunto de entidades que están interrelacionados entre sí como una unidad para la consecución de un fin (Shannon, 1988).
- **Modelo:**
 - “Un objeto X es un modelo del objeto Y para el observador Z, si Z puede emplear X para responder cuestiones que le interesan acerca de Y”.(Minsky).
 - “Descripción o abstracción de un sistema con el propósito de analizar algunas de sus características”

$$modelos = \left\{ \begin{array}{l} \text{Físicos} \\ \text{Matemáticos} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Icónicos} \\ \text{Analógicos} \\ \text{Analíticos vs Numéricos} \\ \text{Determinísticos vs Estocásticos} \\ \text{Discretos vs Continuos} \end{array} \right.$$

Simulación:

“Simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a cabo experiencias con él, con la finalidad de aprender el comportamiento del sistema o de evaluar diversas estrategias para el funcionamiento del sistema”.(Shannon) 1988).

Introducción

Quando una Simulación es una Herramienta Apropriada

- No existe el sistema real.
- No existe una solución analítica.
- Existe una formulación matemática pero es costoso obtener una solución.
- Costos: *el sistema real puede ser muy caro para experimentar con el.*
- Seguridad: *el sistema real es demasiado “peligroso” como para experimentar.*
- Entrenamiento: *entrenar en un simulador puede ser mas accesible que en el sistema real.*
- Entretenimiento: *la industria de juegos y realidad virtual se basa en técnicas de simulación por computadoras.*
- Tratabilidad: *puede llevar demasiado tiempo experimentar con el sistema real.*

Introducción

Cuando una Simulación **NO** es una Herramienta Apropiable

- Cuando el problema puede ser resuelto por el sentido común .
 - El problema puede resolverse analíticamente.
 - Si es menos costoso llevar a cabo experimentos directos con el sistema real.
 - Si los costos superan los “ahorros”.
 - Si los recursos y el tiempo no son disponibles.
 - Si no hay datos disponibles, ni siquiera estimaciones.
 - Si los directivos tienen expectativas poco razonables, si piden mucho y demasiado pronto, o si se sobreestima el poder de la simulación.
 - Si el comportamiento del sistema es demasiado complejo o no se puede definir.
- “La conducta humana es a veces muy complejas de modelar.”

Introducción

Ventajas y Desventajas de la Simulación

Ventajas:

- Explorar nuevas políticas sin interrumpir el sistema real.
- Nuevos diseños sin comprometer recursos.
- Pruebas de Viabilidad
- Se puede obtener una visión sobre la interacción de las variables.
- Se puede obtener una visión sobre la importancia de las variables para la performance del sistema.
- Análisis de cuellos de botella.
- Un estudio de simulación puede ayudar a comprender cómo funciona el sistema en lugar de cómo las personas piensan como el sistema funciona.
- las preguntas: "¿Qué pasa si", pueden ser contestadas (útil en el diseño de nuevos sistemas).

Introducción

Desventajas:

- La construcción de Modelos requiere un especial entrenamiento.
- Resultados dificultosos de interpretar.
- Los modelos de simulación y análisis pueden ser lentos y costosos.

Introducción

Aplicaciones Recientes

TITLE: “The Turkish Army Uses Simulation to Model and Optimize Its Fuel-Supply System”

AUTHOR(S): I. Sabuncuoglu, A. Hatip

REPORTED: November-December 2005 in *Interfaces*

SAVINGS: Millions of US\$.

TITLE: “Simulation Implements Demand-Driven Workforce Scheduler for Service Industry”

AUTHOR(S): M. Zottolo, O.M. U" Igen, E.Williams

REPORTED: *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference*, eds. S.G. Henderson, B.

Biller, M.-H. Hsieh, J. Shortle, J.D. Tew, and R.R. Barton.

CONDUCTED BY: PMC (www.pmc corp.com)

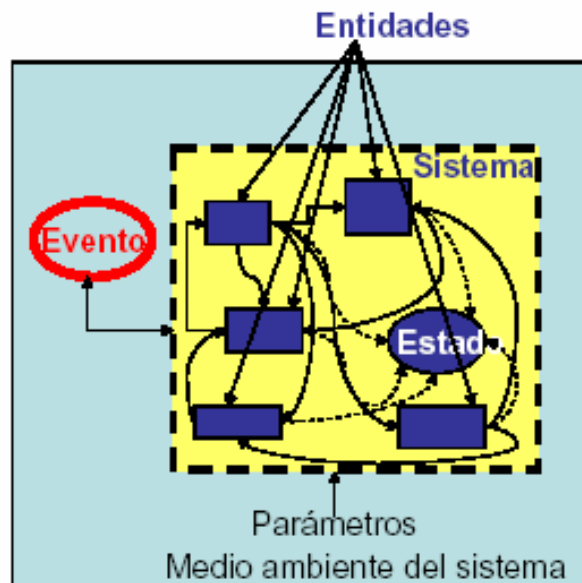
SAVINGS: Estimated at US\$80 million.

Winter Simulation conference: <http://www.wintersim.org/>

Modelado de Sistemas

Sistema y Medio Ambiente (Environment)

*Un sistema es una **colección de entidades** (gente, órdenes de fabricación, autos, llamadas telefónicas, paquetes de datos, ...) los cuales **interactúan para lograr algún propósito lógico**.*



Entidad – objeto de interés en el sistema

Atributo: propiedad de una entidad

Actividad: conj. de acciones predefinidas en un período de tiempo especificado

Estado del sistema: colección de variables que describen el sistema en cualquier momento en el tiempo

Evento: suceso instantáneo que puede ser asociado con un cambio en el estado del sistema

Medio Ambiente del Sistema: región fuera del sistema que afecta el comportamiento del sistema

Modelado de Sistemas

Ejemplos:

- Un sistema bancario clientes/cajeros.
- Un sistema de ensablado en una fábrica.
- Una LAN

Un sistema puede estar contenido dentro de otro sistema, ej.

Cliente/cajero \subseteq Banco \subseteq Economía Argentina \subseteq Sistema económico global.

ENTIDADES Y ATRIBUTOS

Las entidades tienen atributos. Ejemplo: sistema cliente/cajero

Entidades

cliente

cajero

Atributos

tiempo de arribo, posición en la cola

estado {ocupado, ocioso}

Los valores, en un instante dado, de los atributos de todas las entidades dentro del sistema definen el **estado del sistema.**

Modelado de Sistemas

ESTADO DE UN SISTEMA

El estado del sistema es una **colección de variables** necesarias para describir un sistema en un tiempo dado, según los objetivos del estudio.

Ejemplo: en el sistema cliente/cajero, el estado del sistema es
{número de clientes en la cola, estado del cajero, o el número de cajeros ocupados}

Definición de Modelo Matemático

Es un conjunto de expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes caracterizantes del sistema.

Modelado de Sistemas

Variables y Parámetros

Las magnitudes que caracterizan y rigen la evolución de un sistema se denominan variables y parámetros.

Los **parámetros** son magnitudes constantes (o que varían lentamente, independiente de lo que ocurre en el sistema). Ej: masa, resistencia eléctrica, etc.

Las **variables** son magnitudes que cambian con el tiempo.

Entre ellas encontramos:

- **Variables fundamentales**: tiempo (t) y espacio (x, y, z). Son independientes de la evolución del sistema.
- **Entradas**: representan la acción del resto del universo sobre el sistema. Son independientes de la evolución del mismo.
- **Variables dependientes**: representan la magnitudes que cambian en función de la evolución del sistema.
- **Salidas**: Son variables dependientes que nos interesan y que podemos observar.

Modelado de Sistemas

CONCEPTO MAS PRECISO DE ESTADO

Definición:

“El **Estado** de un modelo matemático es un conjunto de variables dependientes cuyo conocimiento en un instante de tiempo, asumiendo conocidos los valores de las entradas, permite calcular el valor de cualquier otra variable dependiente en dicho instante.”

- ✓ Si el modelo es **determinista**, el conocimiento del estado en un instante de tiempo y de las entradas en todo momento permite predecir la evolución de todas las variables del sistema.

En general, el conjunto de variables dependientes que constituyen el estado puede elegirse de distintas maneras.

Modelado de Sistemas

CLASIFICACION DE LOS MODELOS

Una forma de clasificar modelos es en función de la manera en que las variables evolucionan en el tiempo.

Tiempo Continuo: Las variables evolucionan continuamente en el tiempo. Generalmente se representan mediante ecuaciones diferenciales.

Ej. Avión en vuelo: velocidad y posición cambian continuamente en el tiempo

En la simulación, el reloj avanza de manera continua.

Tiempo Discreto: Las variables sólo pueden cambiar en determinados instantes de tiempo. Se suelen representar mediante ecuaciones en diferencias.

En la simulación, el reloj avanza a intervalos constantes.

Eventos Discretos: Las variables pueden cambiar en cualquier momento, pero sólo puede haber números finitos de cambios en intervalos de tiempo finitos.

Ej. Cajero del banco: el número de clientes cambia solo cuando alguien arriba o completa el servicio y parte.

En la simulación, el reloj avanza al tiempo de ocurrencia del próximo evento.

Muchos sistemas reales tienen características discretas y continuas (ej. Flujo de tráfico)

Modelado de Sistemas

MODELOS QUE ESTUDIAREMOS

Estocásticos y Determinísticos

Contienen
variables
aleatorias

No contiene
componentes
aleatorios. Por cada
entrada tienen una
única salida.

Dinámicos

Simulan el
comportamiento
del sistema a
través del
tiempo

Discretos

Las variables de estado
cambian
en puntos de tiempo
separados
en respuesta a eventos

Continuos

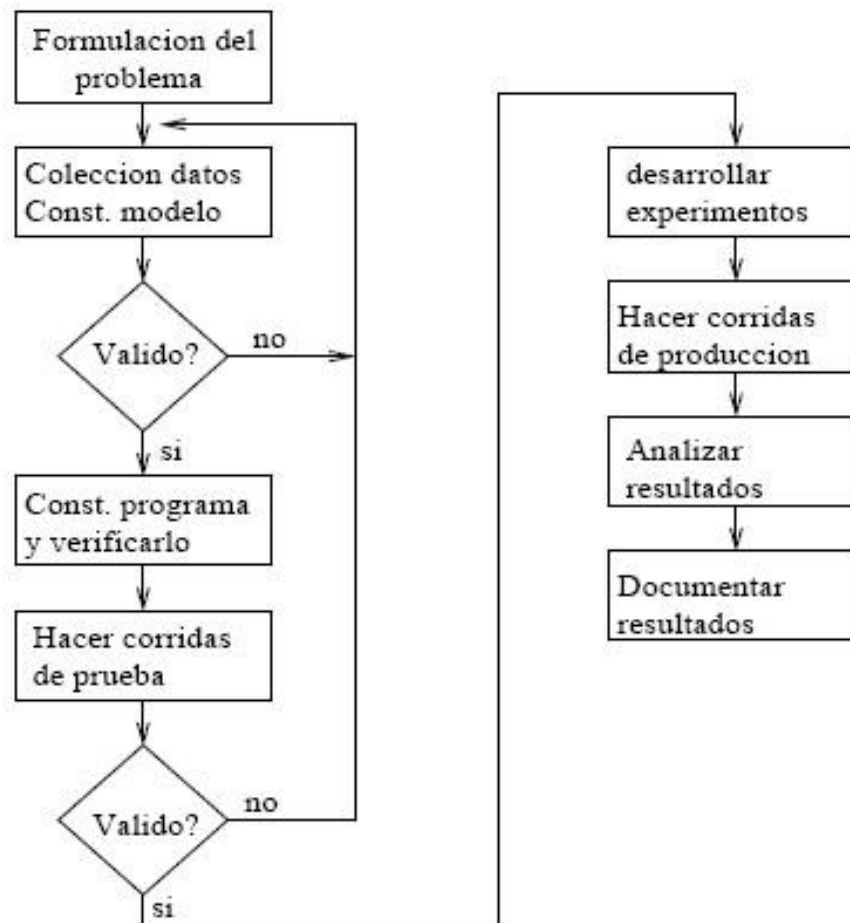
Las variables evolucionan
continuamente en el
tiempo

CLASIFICACIÓN DE SOFTWARE DE SIMULACIÓN

- Un **lenguaje de simulación** es un lenguaje de programación con características especiales que lo hacen aplicable a problemas de simulación.
 - **orientados a planificación de eventos** (SIMAN, SIMSCRIPT, SLAM).
 - **orientados a procesos** (GPSS, SLAM II, SIMSCRIPT 11.5, SIMULA).
 - **examinación de actividades** (ESCL).
- Un **simulador** es una aplicación (tool) que permite simular sistemas de alguna clase “sin necesidad de programación”. Ej. OMNET++, SimFactory, Simulink, etc.
- **Bibliotecas o Frameworks** para lenguajes de programación de propósitos generales, ej. **EOSimularor**, SIMLIB, C++SIM, JAVASIM, SMPL.

Introducción

ETAPAS EN EL DESARROLLO DE UN SISTEMA DE SIMULACION



Simulación Orientada a Eventos Discretos

Simulación de Sistemas Discretos

Simulación Orientada a Eventos Discretos

Componentes de un Sistema de Simulación orientado a eventos discretos

- Estado del sistema: conjunto de variables de estado que describen el modelo.
- Reloj: una variable global con el tiempo corriente.
- Planificador de ocurrencias de eventos: manejador de la lista de eventos futuros (FEL), determina el próximo evento y avanza el reloj al momento de su ocurrencia.
- FEL: la lista de eventos futuros.
- Rutina de inicialización: inicializa el modelo al tiempo cero.
- Variables con estadísticas: información para medir la performance del sistema.
- Biblioteca de generación de Variables Aleatorias: funciones de generación de V. A. para varias distribuciones.
- Facilidades para hacer análisis de resultados.
- Generación de informes y animación.

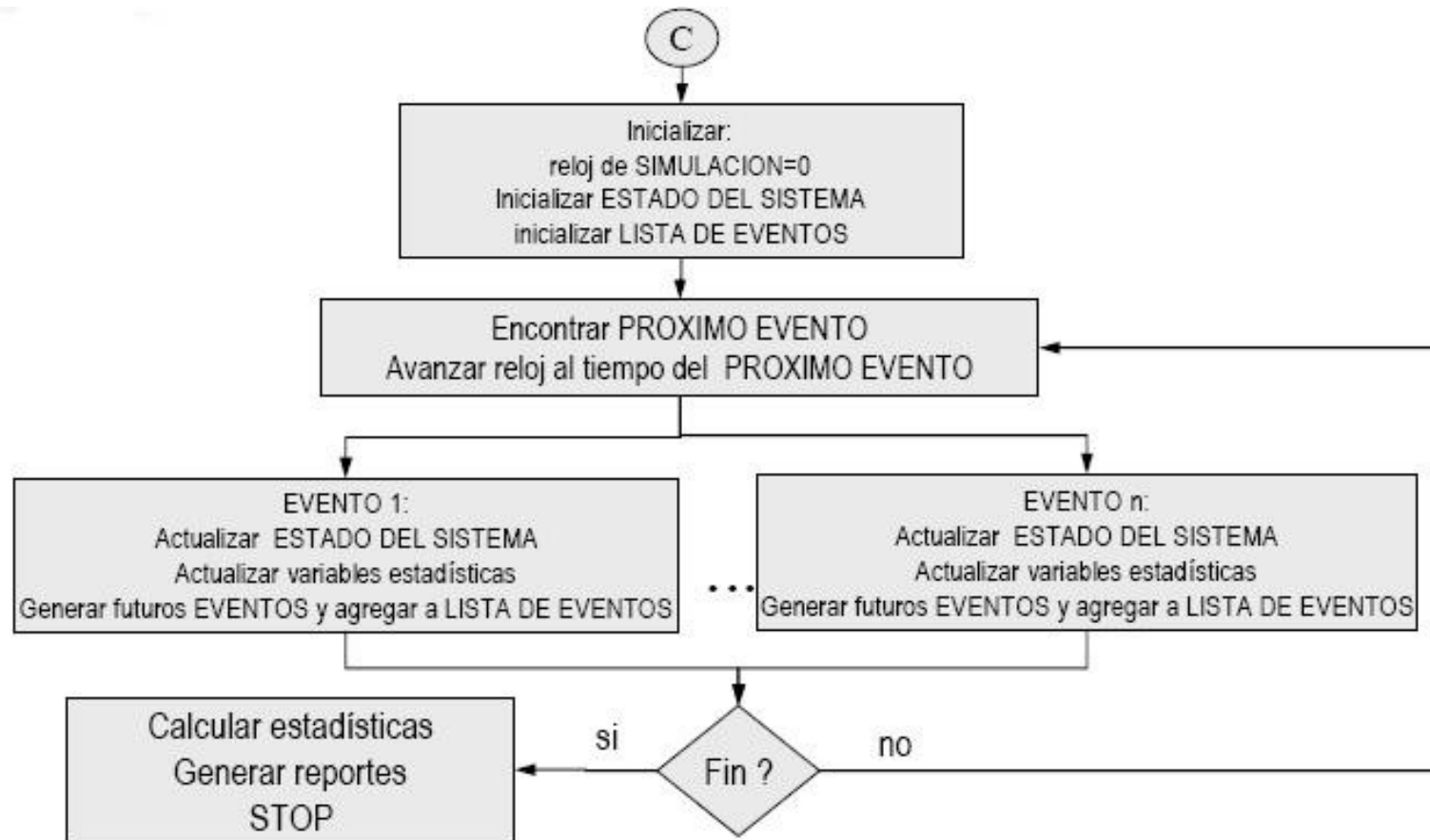
Modelado de Sistemas

Construcción de modelos

- Identificar las entidades estáticas y dinámicas relevantes.
Por ej.
 - entidad dinámica --> clientes.
 - entidad estática --> cajero
- Identificar atributos de interés de las entidades.
- Seleccionar distribuciones de los datos de entrada.
- Identificar actividades que ocurren en el sistema.
- Identificar eventos.
- Definir variables de estado y variables para estadísticas.

Modelado de Sistemas

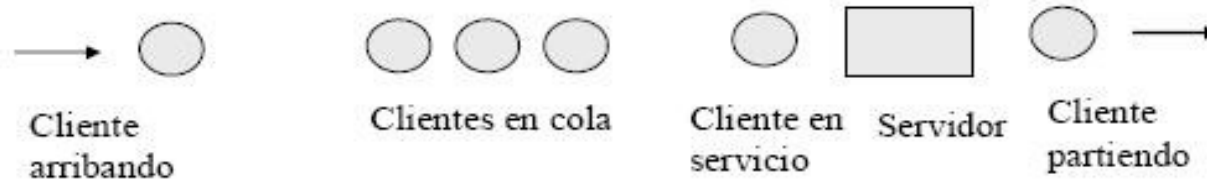
Flujo de un programa de simulación discreta



Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

Simulación de un sistema de cola con un servidor

➤ Definición del problema



A_i : tiempos entre arribos; variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

S_i : tiempos de servicio; variable aleatorias independientes idénticamente distribuidas; variables independientes del tiempo entre arribos.

D_i : demora en cola del i -ésimo cliente.

Disciplina de cola: FIFO

Estado inicial del sistema: cola vacía, servidor ocioso.

Condición de fin: cuando el n -ésimo cliente entra en servicio (n clientes han completado sus demoras en cola).

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

➤ Medidas de Performance:

_____ - Demora promedio en cola - $d(n)$.

_____ - Longitud promedio de cola - $q(n)$.

_____ - Utilización promedio del servidor - $u(n)$.

➤ Las medidas de performance son variables aleatorias.

➤ Estimamos el valor esperado (media) de la variable aleatoria.

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

Demora promedio en cola

– $d(n)$: demora promedio esperada en cola de los n clientes (variable aleatoria, depende de los A_i y S_i).

$$\hat{d}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

Longitud promedio de cola

Sea $Q(t)$ el número de clientes en la cola en el tiempo t .

Sea p_i la proporción de tiempo que $Q(t) = i$.

Sea $T(n)$ el tiempo requerido para observar n demoras en la cola

Sea T_i = tiempo total durante la simulación en que la cola es de longitud i , entonces:

$$T(n) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots, \text{ entonces } p_i = T_i / T(n)$$

El número promedio de clientes en la cola es:

$$q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i \quad , \text{ o que es lo mismo: } q(n) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T(n)}$$

Como estamos haciendo una simulación usamos estimaciones de p_i , es decir, \hat{P}_i : proporción observada de $T(n)$ en que la cola tiene longitud i

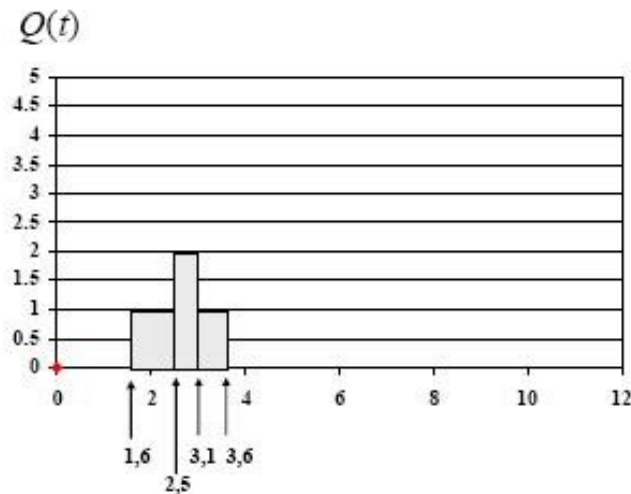
Entonces:

$$\hat{q}(n) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T(n)}$$

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

Longitud promedio de cola

Otra expresión para $\hat{q}(n)$:



La suma en el numerador de $\hat{q}(n)$ es el área bajo la curva de $Q(t)$ entre el comienzo y el fin de la simulación

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \int_0^{T(n)} Q(t)dt \quad \hat{q}(n) = \frac{\int_0^{T(n)} Q(t)dt}{T(n)}$$

Esta integral puede ser acumulada como áreas de rectángulos a medida que la simulación procede.

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

Utilización del Servidor

Utilización esperada del servidor (proporción de tiempo durante la simulación que el servidor está ocupado):

Sea $B(t)$ el número de clientes en el servidor en el tiempo t .

Sea p_i la proporción de tiempo que $B(t) = i$.

Sea T_i el tiempo total con i clientes en el servidor.

$$u(n) = \sum_{i=0}^n i p_i$$

p_i es la proporción de tiempo observado, entonces:

$$p_i = T_i / T(n)$$

$$\hat{u}(n) = \sum_{i=0}^n i \hat{p}_i$$

$$\hat{u}(n) = \frac{\sum_{i=0}^n i T_i}{T(n)}$$

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor

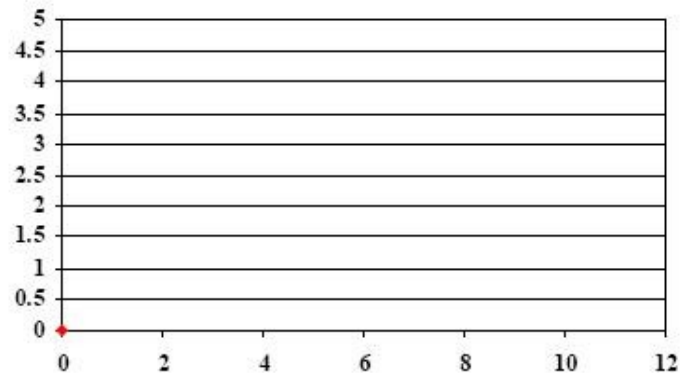
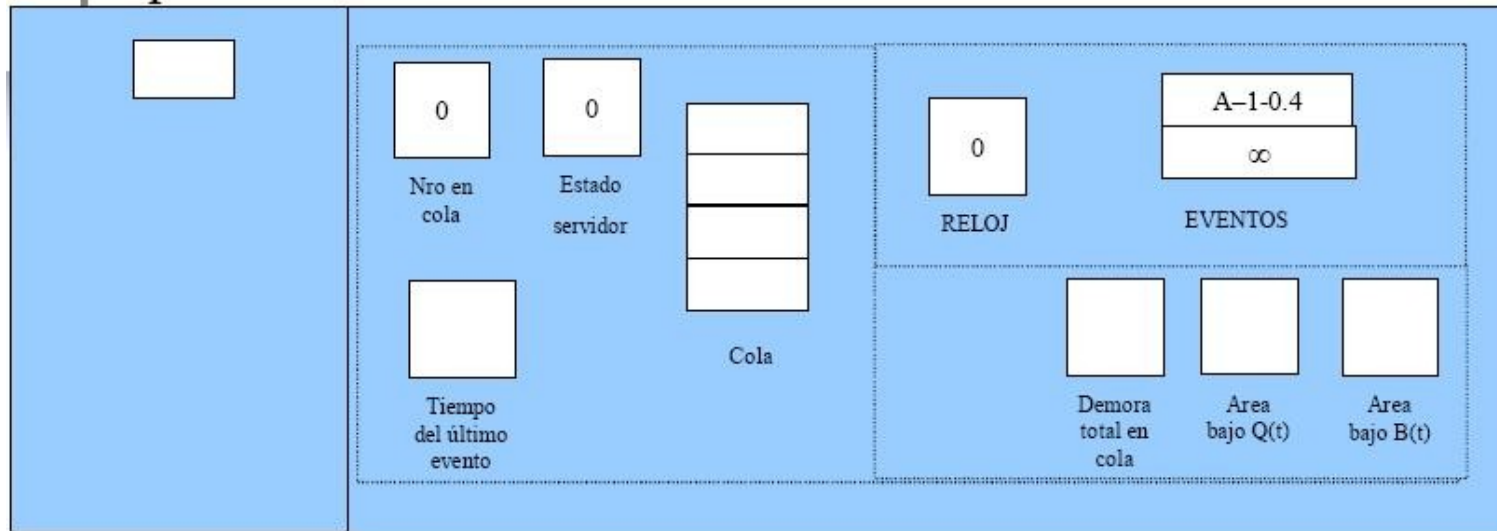
EJEMPLO

Asumamos que conocemos la siguiente información de arribos y servicios:

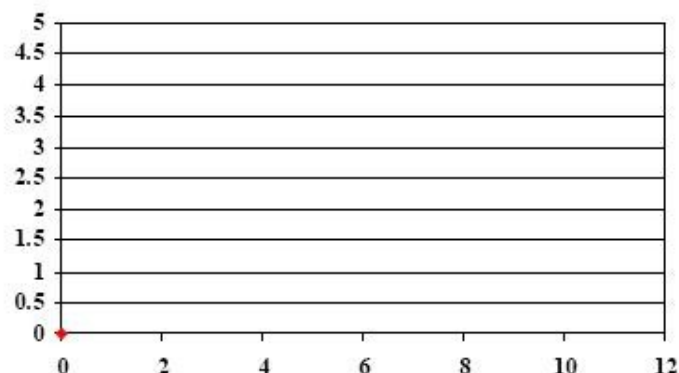
Entidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tiempo entre arribos	0.4	1.2	0.5	1.7	0.2	1.6	0.2	1.4	1.9
Tiempo de arribo	0.4	1.6	2.1	3.8	4	5.6	5.8	7.2	9.1
Tiempo de servicio	2	0.7	0.2	1.1	3.7	0.6			

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 0 : Inicialización



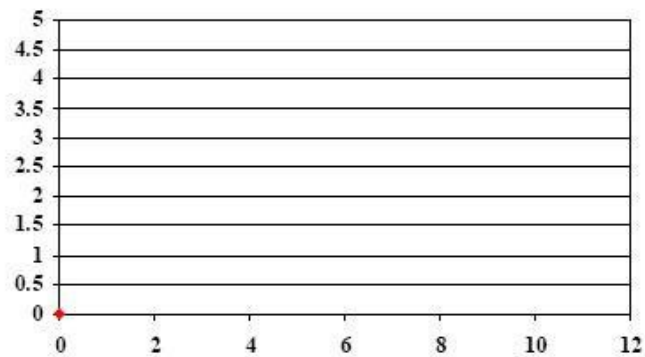
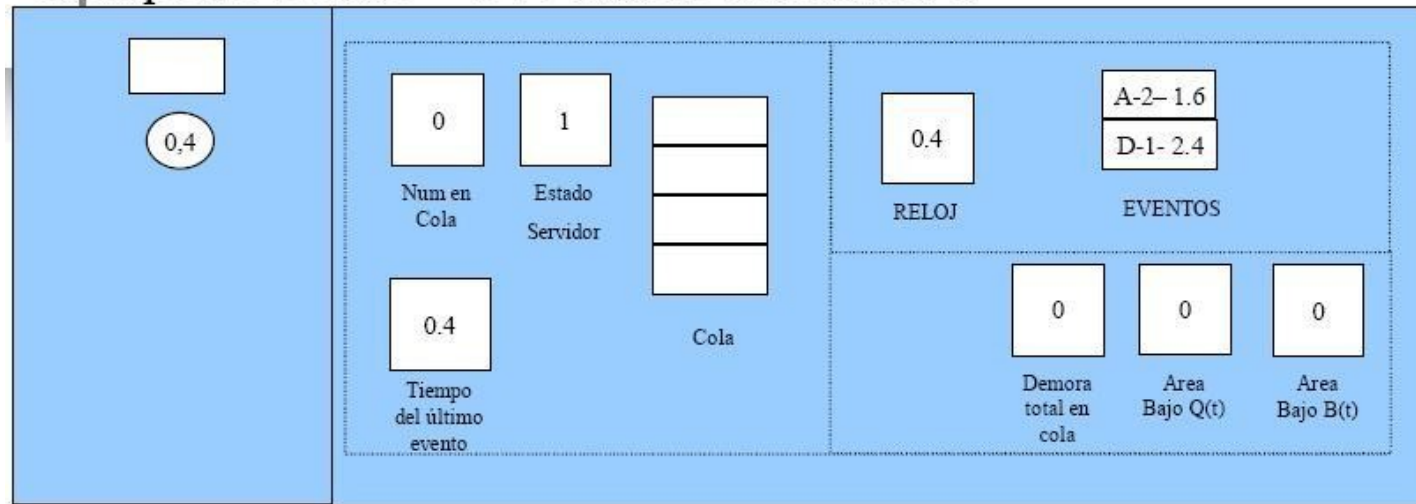
Tamaño de cola



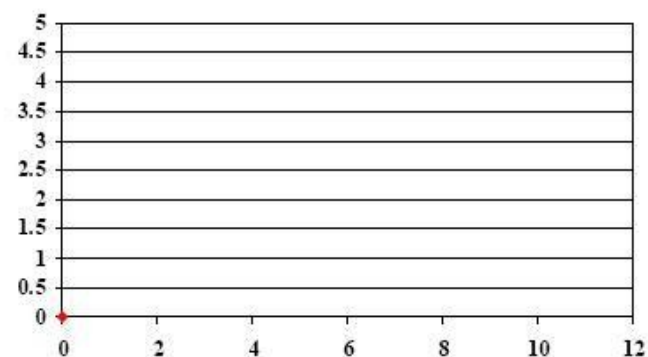
Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 0.4 : Arribo del cliente 1



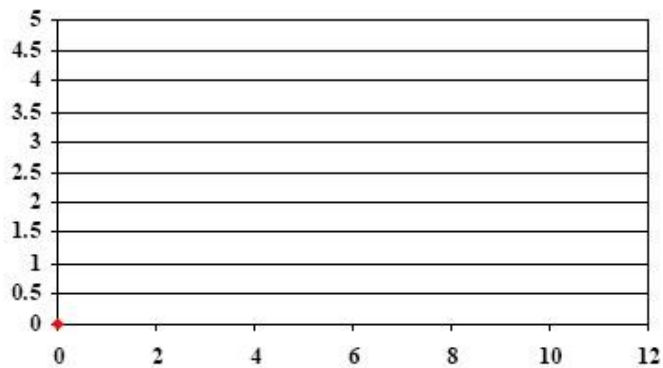
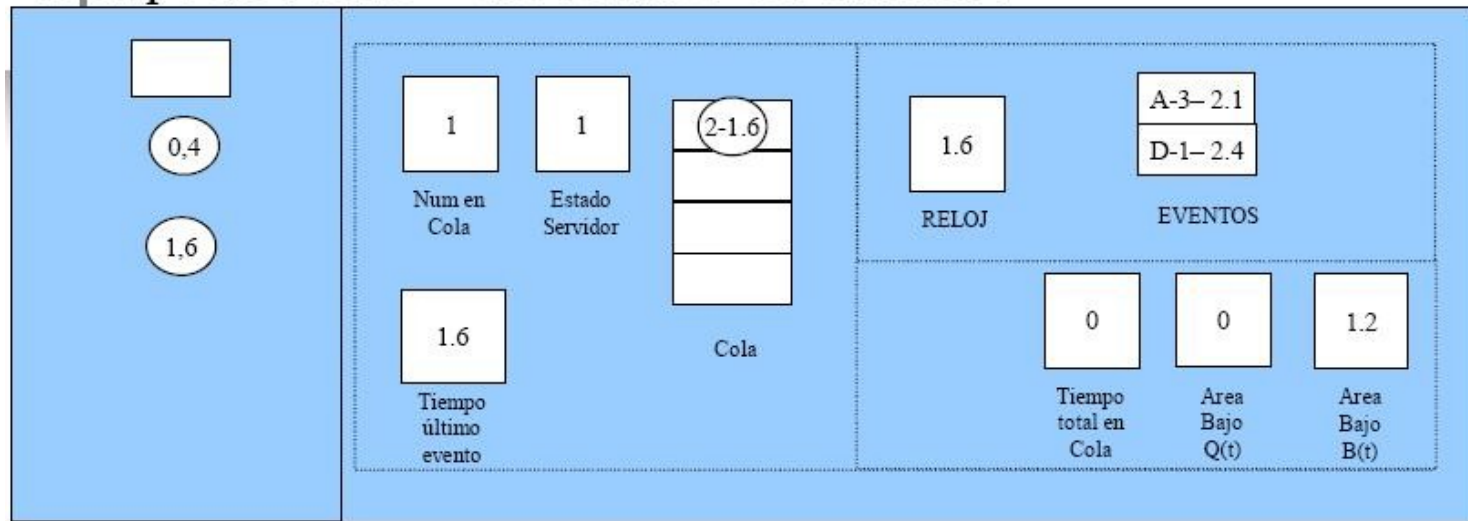
Tamaño de Cola



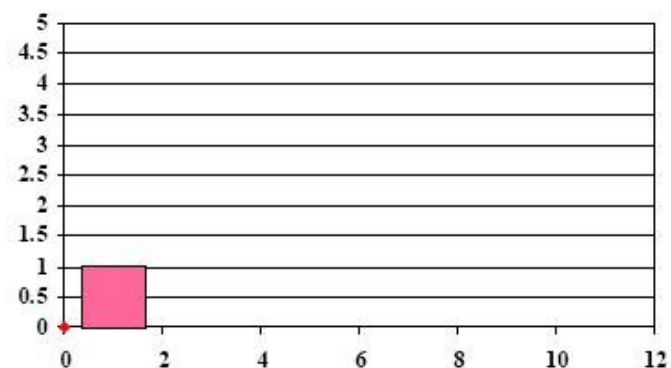
Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 1.6 : Arribo del cliente 2



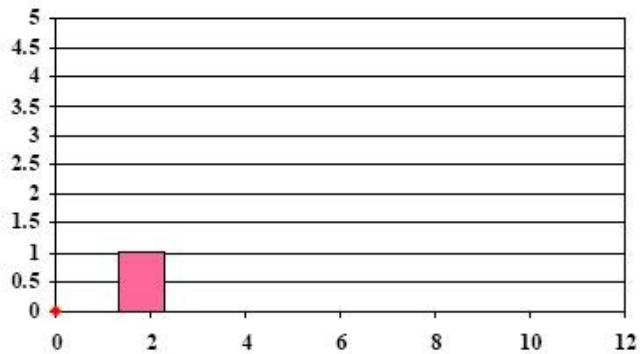
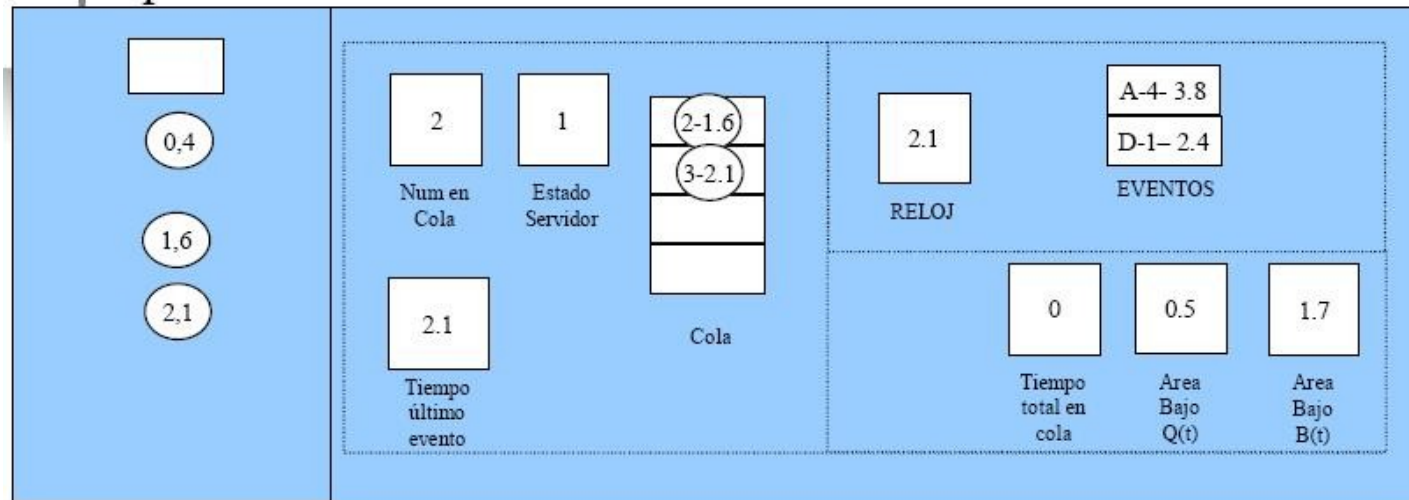
Tamaño de cola



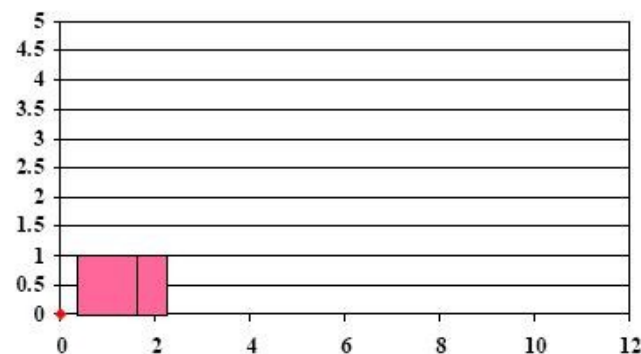
Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 2.1 - Arribo del cliente 3



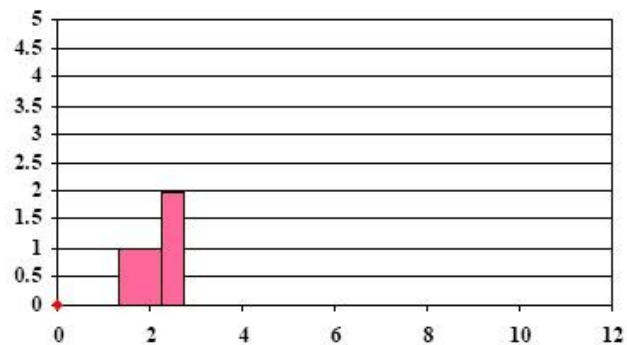
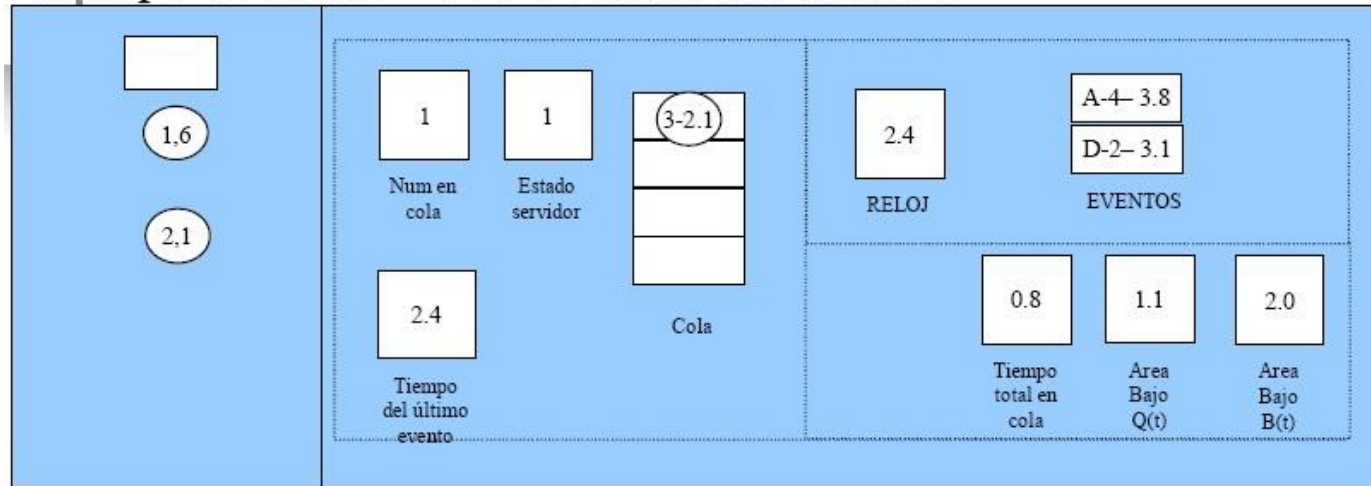
Tamaño de cola



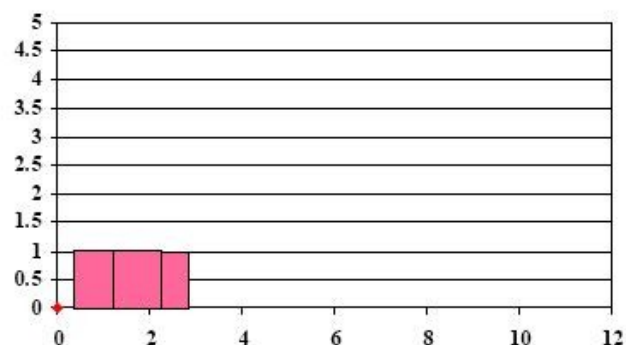
Estado del servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 2.4 : Partida del cliente 1



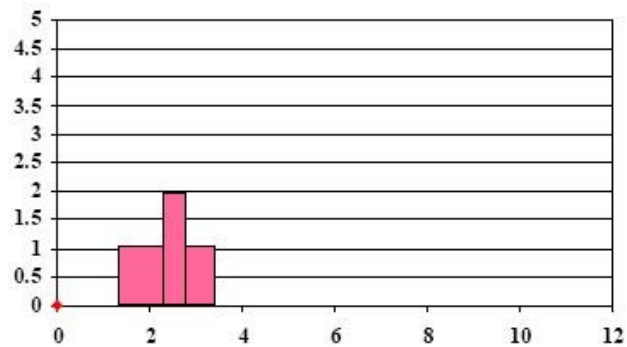
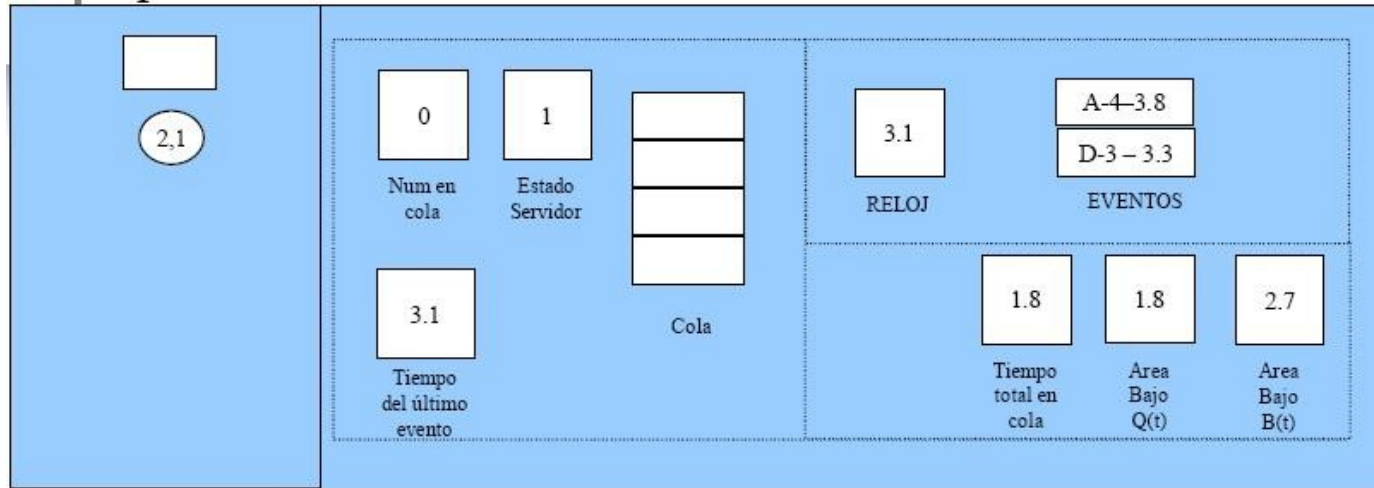
Tamaño de cola



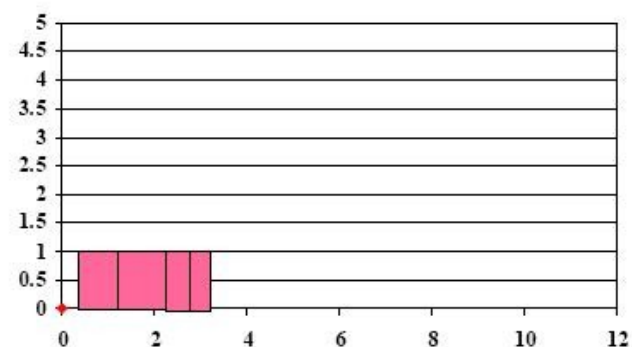
Estado del servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 3.1 : Partida del cliente 2



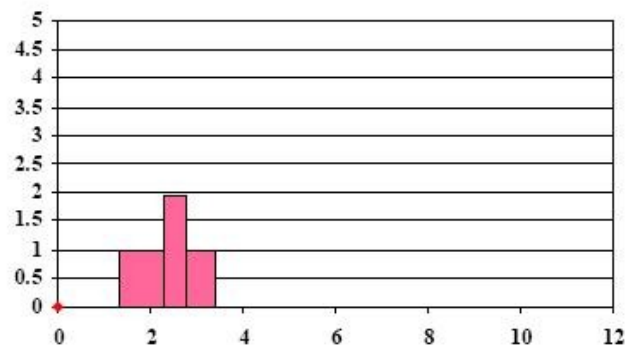
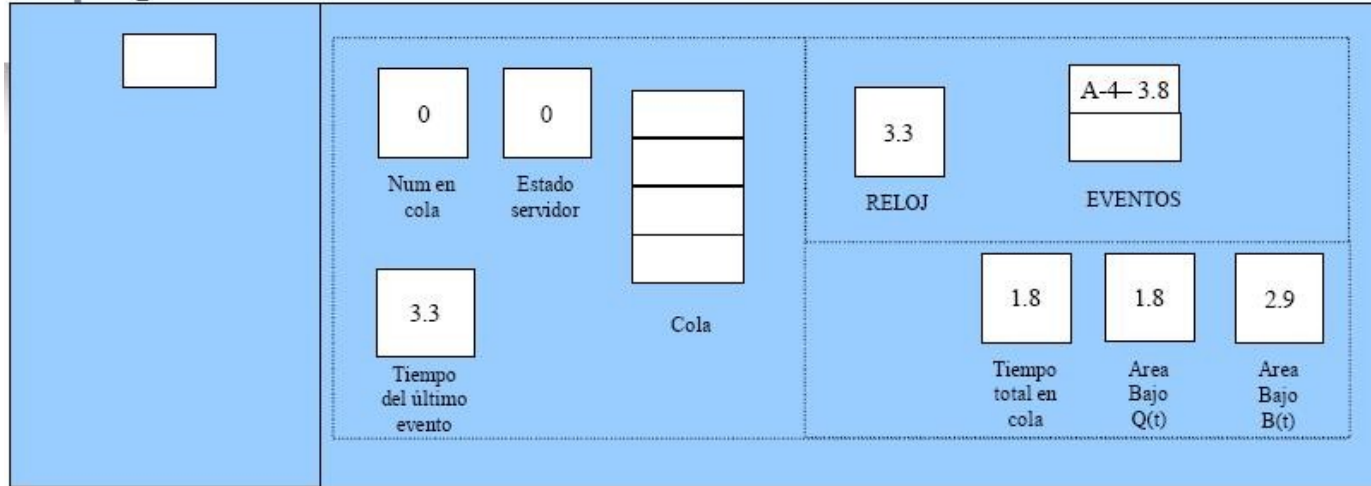
Tamaño de Cola



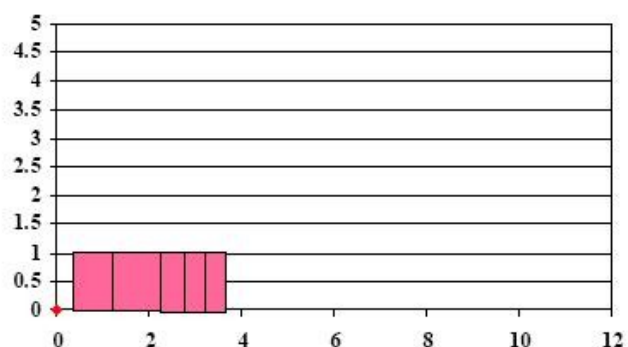
Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 3.3 : Partida del cliente 3



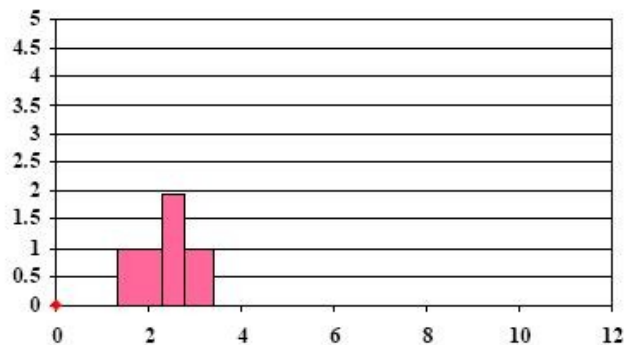
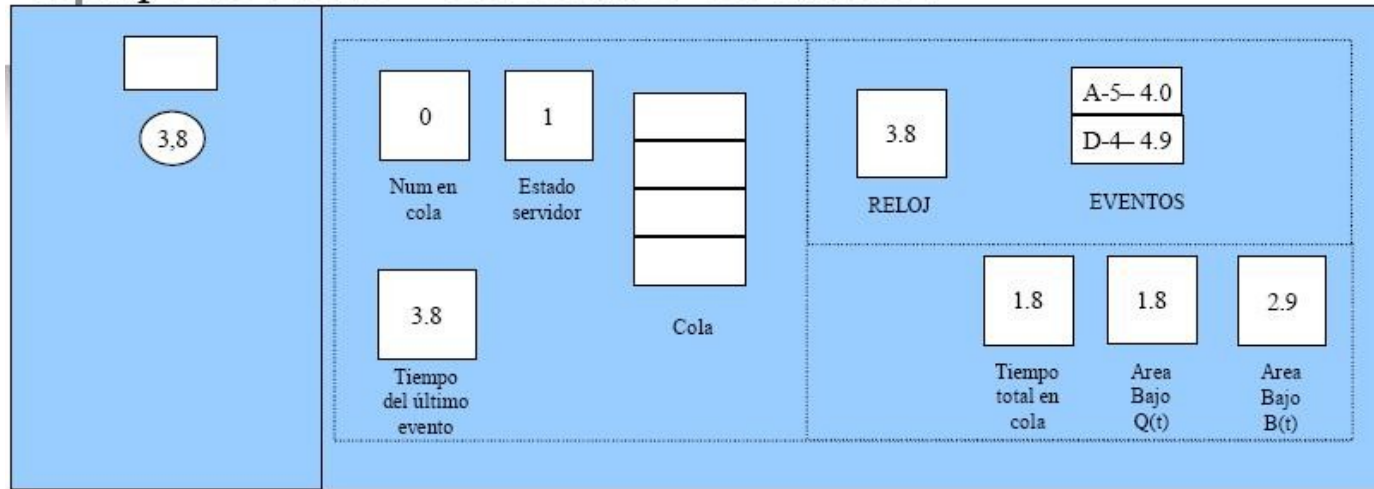
Tamaño de Cola



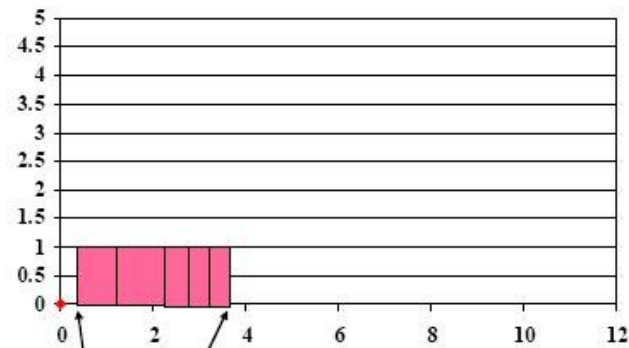
Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Tiempo de evento = 3.8 : Arribo del cliente 4



Tamaño de Cola



Estado del Servidor

Simulación de un Sistema de Cola con un Servidor - EJEMPLO

Demora promedio en Cola y utilización del Servidor

Asumiendo que D_i es la demora en cola experimentada por el cliente i . La demora promedio en cola es simple de calcular como demora total/número total de clientes que han completado su demora en cola.

$$\begin{aligned}\hat{d}(n) &= \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \\ &= \frac{1.8}{4} \\ &= 0.45\end{aligned}$$

Fracción de tiempo que el servidor está ocupado.

$$\hat{u}(n) = \frac{\sum_{i=0}^n iT_i}{T(n)} = \frac{0 \times T_0 + 1 \times T_1}{3,8} = \frac{3,3 - 0,4}{3,8} = 0,76$$

Modelos Dinámicos : M/M/1

Simulación de tiempos de Arribos y de Servicios

Considere el siguiente sistema de cola M/M/1 :

$\lambda = 3$ (tiempo entre arribos 0.333) $\mu = 4$ (tiempo de servicio = 0.25)



Generando un número random $r \in (0,1)$ podemos simular tiempos entre arribos de la siguiente forma:

$$r = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow 1 - r = e^{-\lambda x} \Rightarrow \ln(1 - r) = -\lambda x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r) \quad (\text{Tiempo entre arribos})$$

$$y = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - r) \quad (\text{Tiempo de servicio})$$

Modelos Dinámicos : M/M/1

Tenemos un sistema con un único servidor.

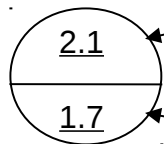
Las entidades del sistema serán clientes. Cada cliente tendrá los siguientes atributos:

- Tiempo de arribo
- Tiempo de servicio

Habrán dos eventos en el sistema:

- Arribo
- Partida

Por cada cliente:

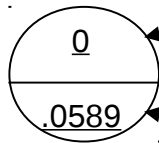


Tiempo de arribo: el tiempo del último arribo al sistema + un tiempo entre arribo

Tiempo de servicio: tiempo en el servidor, una vez que la entidad tiene control del servidor

Modelos Dinámicos : M/M/1

Considere nuestro 1er cliente en el sistema



Por defecto el 1er arribo se asume en $t=0$.

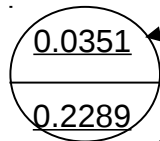
Generamos un número random (e.j. 0.21) para determinar el tiempo de servicio. En base a nuestra fórmula:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{\mu} \ln(1-r) \\ &= \frac{-1}{4} \ln(1-.21) \\ &= .0589 \end{aligned}$$

Este cliente entrará al *servidor* en $t = 0$ y permanecerá por 0.0589 unidades de tiempo. Por lo tanto partirá en el tiempo = 0.0589

Modelos Dinámicos : M/M/1

Considere nuestro 2do cliente en el sistema



Generamos otro número random para tiempo de servicio (e.j. 0.6).

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{\mu} \ln(1-r) \\ &= \frac{-1}{4} \ln(1-.6) \\ &=.2289 \end{aligned}$$

El primer cliente arribó en $t = 0$. Generamos un número random (0.1) para determinar el tiempo entre arribo. En base a nuestra fórmula el tiempo entre arribo es:

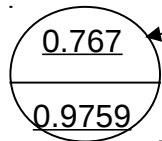
$$\begin{aligned} x &= \frac{-1}{\lambda} \ln(1-r) \\ &= \frac{-1}{3} \ln(1-.1) \\ &=.0351 \end{aligned}$$

El tiempo de arribo es $0 + 0.0351 = 0.0351$.

El cliente 2 arriba en 0.0351, pero no puede recibir servicio hasta que el cliente 1 parta (en 0.0589). Entonces, el cliente 2 partirá en $\max(.0351, .0589) + .2289 = .2880$

Modelos Dinámicos : M/M/1

Considere nuestro 3er cliente en el sistema



Generamos otro número random para tiempo de servicio (ej 0.5).

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{\mu} \ln(1-r) \\&= -\frac{1}{4} \ln(1-0,5) \\&= 0,1733\end{aligned}$$

El 2do cliente arribó en $t = 0.0351$. Generamos un número random (ej. 0.9) para determinar el tiempo entre arribos. En base a nuestra fórmula el tiempo entre arribos es:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1-r) \\&= -\frac{1}{3} \ln(1-.9) \\&= .767\end{aligned}$$

El tiempo de arribo es $0.0351 + .767 = 0.8026$

El cliente 3 partirá en $\max(.2878, .8026) + .1733 = .9759$ unidades de tiempo

Modelos Dinámicos : M/M/1

Cálculos usando una planilla:

	Arribo			Servicio			
		Tiempo	Tiempo	Tiempo de	Comienzo	Fin	
Entidad	Random #	entre arribo	de arribo	Random #	Servicio	Servicio	Servicio
1			0	0.21	0.0589	0	0.0589
2	0.1	0.0351	0.0351	0.6	0.2291	0.0589	0.2880
3	0.9	0.7675	0.8026	0.5	0.1733	0.8026	0.9759
4	0.9808	1.3180	2.1206	0.1219	0.0325	2.1206	2.1531
5	0.8486	0.6292	2.7498	0.9179	0.6250	2.7498	3.3748
6	0.8458	0.6231	3.3729	0.1143	0.0304	3.3748	3.4052
7	0.4275	0.1859	3.5588	0.1104	0.0292	3.5588	3.5881
8	0.1483	0.0535	3.6124	0.3418	0.1046	3.6124	3.7169
9	0.9749	1.2287	4.8410	0.0312	0.0079	4.8410	4.8489
10	0.9689	1.1571	5.9981	0.8769	0.5238	5.9981	6.5219
11	0.0037	0.0012	5.9994	0.6340	0.2513	6.5219	6.7732
Tiempo total de servicio					2.0660		

Utilización del Servidor: $2.0660/6.773 = .305$

Modelos Dinámicos : M/M/1

Tiempo en el sistema

Entidad	Random #	Tiempo entre Arribo	Tiempo de arribo	Tiempo de Random #	Comienzo Servicio	Fin Servicio	Tiempo en el Sistema
1			0	0.21	0.0589	0	0.0589
2	0.1	0.0351	0.0351	0.6	0.2291	0.0589	0.2529
3	0.9	0.7675	0.8026	0.5	0.1733	0.8026	0.1733
4	0.9808	1.3180	2.1206	0.1219	0.0325	2.1206	0.0325
5	0.8486	0.6292	2.7498	0.9179	0.6250	2.7498	0.6250
6	0.8458	0.6231	3.3729	0.1143	0.0304	3.3748	0.0323
7	0.4275	0.1859	3.5588	0.1104	0.0292	3.5588	0.0292
8	0.1483	0.0535	3.6124	0.3418	0.1046	3.6124	0.1046
9	0.9749	1.2287	4.8410	0.0312	0.0079	4.8410	0.0079
10	0.9689	1.1571	5.9981	0.8769	0.5238	5.9981	0.5238
11	0.0037	0.0012	5.9994	0.6340	0.2513	6.5219	0.7738
Tiempo total en el sistema							2.6142

Tiempo promedio en el sistema: $2.6142/11 = .2376$

Modelos Dinámicos : M/M/1

Tiempo en cola

	Arribo			Servicio				Tiempo en Cola
	Random #	Tiempo entre Arribos	Tiempo de arribo	Random #	Tiempo de Servicio	Comienzo de Servicio	Fin de Servicio	
Entidad 1			0	0.21	0.0589	0	0.0589	0.0000
2	0.1	0.0351	0.0351	0.6	0.2291	0.0589	0.2880	0.0238
3	0.9	0.7675	0.8026	0.5	0.1733	0.8026	0.9759	0.0000
4	0.9808	1.3180	2.1206	0.1219	0.0325	2.1206	2.1531	0.0000
5	0.8486	0.6292	2.7498	0.9179	0.6250	2.7498	3.3748	0.0000
6	0.8458	0.6231	3.3729	0.1143	0.0304	3.3748	3.4052	0.0019
7	0.4275	0.1859	3.5588	0.1104	0.0292	3.5588	3.5881	0.0000
8	0.1483	0.0535	3.6124	0.3418	0.1046	3.6124	3.7169	0.0000
9	0.9749	1.2287	4.8410	0.0312	0.0079	4.8410	4.8489	0.0000
10	0.9689	1.1571	5.9981	0.8769	0.5238	5.9981	6.5219	0.0000
11	0.0037	0.0012	5.9994	0.6340	0.2513	6.5219	6.7732	0.5225
Tiempo total en la cola del sistema								0.5483

Tiempo promedio en cola: $.5483/11 = .0498$