Tema:
Modelos Estadísticos en Simulación

Mg. Ariel González (Departamento de Computación – Fac. Cs. Exactas – UNRC). Mail: agonzalez(AT)dc.exa.unrc.edu.ar)

Propósito y Descripción

- El modelador ve a los fenomenos del mundo en términos probabilisticos, mas que deterministicos.
  - Algunos modelos estadísticos podrían describir las variaciones .
- Un modelo adecuado puede ser desarrollado tomando muestras del fenómeno de interés:
  - Seleccionar una distribución conocida a través de conjeturas
  - Hacer estimaciones de los parámetros
  - Test de bondad.

Revisión de Terminologías y Conceptos

- Contenido de la Clase:
  - Revisión de varias distribuciones de probabilidad importantes
  - Presentar algunas aplicaciones típicas de estos modelos

- Primer parte:

Revisión de los siguientes conceptos:
  - Variables aleatorias Discretas
  - Variables aleatorias Continuas
  - Function de Distribución Acumulada
  - Medidas Estadísticas.

Variable Aleatoria Discreta [Revisión de Probabilidad]

- X es una variable aleatoria discreta, si el número de valores posibles de X es finito o infinito numerable.
- Ejemplo: Considere la cantidad de autos que pasan por un punto de la ruta diariamente.
  - Sea X a ser el número de autos que pasan diariamente por un punto determinado de la ruta.
  - R_x = posibles valores de X (espacio muestral de X) = $\{0,1,2,\ldots\}$
  - $p(x_i)$ = probabilidad de ocurrencia de $x_i = P(X = x_i)$
- $p(x_i)$, $i = 1,2, \ldots$ debe satisfacer:

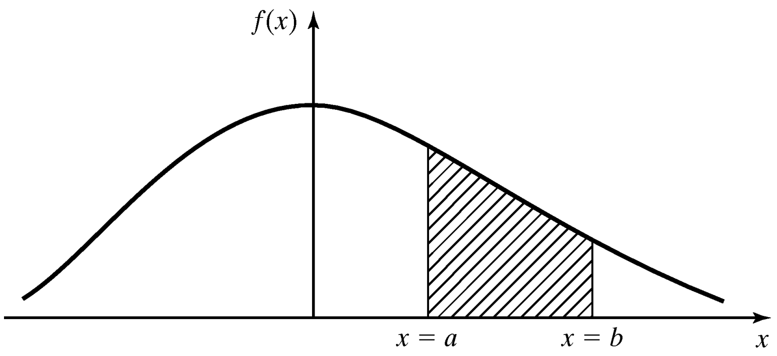
  1. $p(x_i) \geq 0, \ \forall i$
  2. $\sum p(x_i) = 1$

- La colección de pares $[x_i, p(x_i)]$, $i = 1,2,\ldots$, es llamada distribución de probabilidad de X, y $p(x_i)$ es llamada función masiva de probabilidad (fmp) de la variable aleatoria discreta X.

Variable Aleatoria Continua [Revisión de Probabilidad]

- *X* es una variable aleatoria continua si su espacio muestral R_x es un intervalo o una colección de intervalos (ej. *ingresos, tiempo o duración*).
- La probabilidad de que *X* se encuentre en el intervalo *[a,b]* esta dada por: $$P(a \le X \le b) = \int f(x)\,dx$$
- *f(x)*, denota la función de densidad de prob. de *X*, y satisface:

$$1.\ f(x) \ge 0,\ \forall\, x \in R_X$$
$$2.\ \int_{R_X} f(x)\,dx = 1$$
$$3.\ f(x) = 0,\ \text{si } x \notin R_X$$



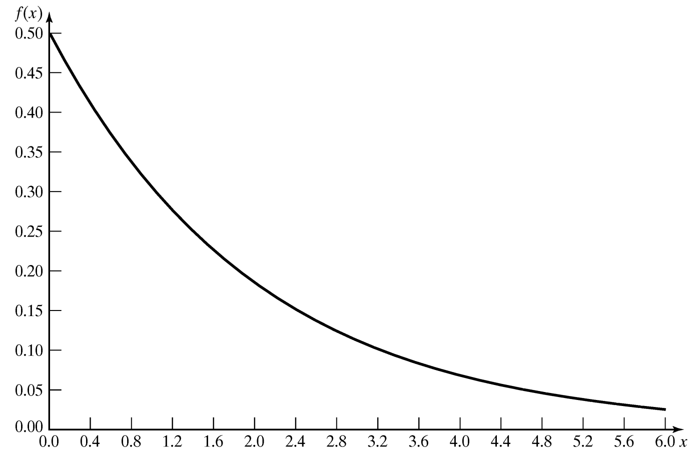
- Propiedades

$$1.\ P(X = x_0) = 0,\ \text{porque} \int f(x)\,dx = 0$$
$$2.\ P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

Variable Aleatoria Continua [Revisión de Probabilidad]

- Ejemplo: La vida de un dispositivo de inspección es dada por una variable aleatoria continua *X* con fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$



  - *X* tiene una distribución exponencial con media 2 años
  - La probabilidad de que el dispositivo "viva" entre 2 y 3 years es:

$$P(2 \leq x \leq 3) = \frac{1}{2} \int e^{-x/2} dx = 0.14$$

Función de Distribución Acumulada

- La función de distribución acumulada (fda) es denotada por *F(x)*, donde *F(x) = P(X <= x)*
  - Si *X* es discreta, entonces $F(x) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i)$
  - Si *X* es continua, entonces $F(x) = \int f(t)\,dt$
- Propiedades

1. F es una función no decreciente. Si $a \prec b$, entonces $F(a) \leq F(b)$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

- Todas las cuestiones de probabilidad a cerca de *X* pueden responderse en términos de la fda, es decir:

$$P(a \prec X \leq b) = F(b) - F(a), \text{ para toda } a \prec b$$

Función de Distribución Acumulada

- Ejemplo: Un dispositivo de inspeccion tiene fda:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int e^{-t/2}dt = 1 - e^{-x/2}$$

  - La probabilidad de que el dispositivo dure a lo sumo 2 años:

$$P(0 \le X \le 2) = F(2) - F(0) = F(2) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

  - La probabilidad de que éste dure entre 2 y 3 años:

$$P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \left(1 - e^{-(3/2)}\right) - \left(1 - e^{-1}\right) = 0.145$$

Medidas Estadísticas

- El valor esperado (media) de X se denota por E (X)
  - Si *X* es discreta $$E(x) = \sum_{\text{all } i} x_i p(x_i)$$
  - Si *X* es continua $$E(x) = \int x f(x)\, dx$$
  - Una medida de la tendencia central
- La varianza de *X* es denotada por *V(X)* or *var(X)* or σ^2
  - Definition: $V(X) = E[(X - E[X]^2]$
  - Also, $V(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$
  - Una medida de propagación o variación de los posibles valores de X alrededor de la media.
- La desviación estandar de *X* es denotada por σ
  - Definition: raíz cuadrada de *V(X)*
  - Expresada en la misma unidad de la media

Medidas Estadísticas

- Ejemplo: La media de la vida de un dispositivo de inspección que vimos en los ejemplos anteriores:

$$E(X)=\frac{1}{2}\int xe^{-x/2}dx=-xe^{-x/2}\Big|_0^{\infty}+\int e^{-x/2}dx=2$$

- Para computar la varianza de *X*, Primero computamos *E(X²)*:

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\int x^2e^{-x/2}dx=-x^2e^{-x/2}\Big|_0^{\infty}+\int e^{-x/2}dx=8$$

- En este caso, la varianza y desviación estandar de la vida de los dispositivos es:

$$V(X)=8-2^2=4$$
$$\sigma=\sqrt{V(X)}=2$$

Medidas Estadísticas

Ejemplo con variable aleatoria discreta (arrojar un dado):

$E(X)= 1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 21/6 = 3.5$

- La mediana (medida alternativa de la tendencia central), $X_{0.5}$, es el valor más pequeño de x tal que $F_X(x) \geq 0.5$.

  Para una variable aleatoria continua, $F(x_{0.5}) = 0.5$

- La moda es:
  - Discreto: es el valor de la V.A. que ocurre mas frecuentemente.
  - Continuo: es el valor sobre el cual la fdp es maximizada.

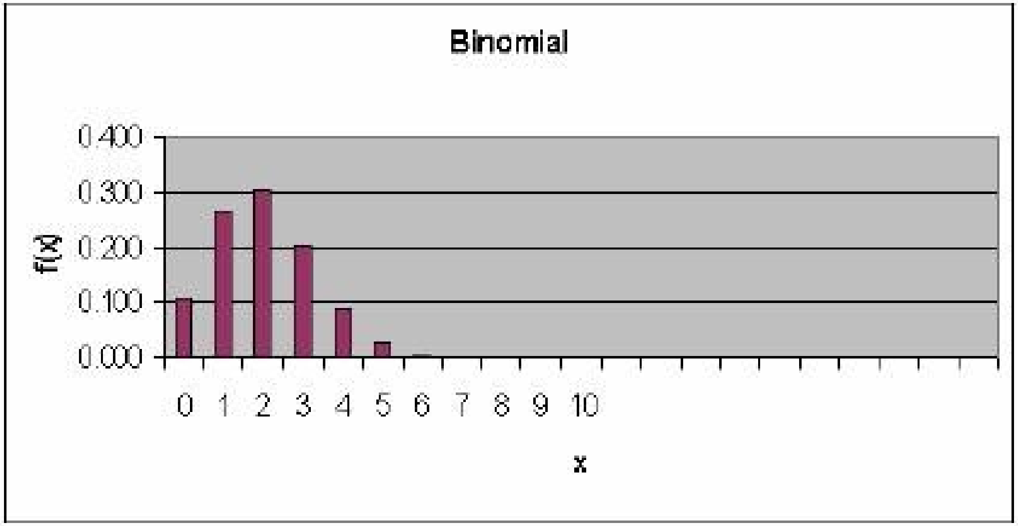
Medidas Estadísticas

- Ejemplo de mediana – Discreta. Considere la siguiente Distr. Binomial con *t* =10 y *p* = 0.2:

$$f(x)=\binom{t}{x}p^{x}(1-p)^{t-x}$$

Mediana →

x	f(x)	F(X)
0	0.107	0.107
1	0.268	0.376
2	0.302	0.678
3	0.201	0.879
4	0.088	0.967
5	0.026	0.994
6	0.006	0.999
7	0.001	1.000



Modelos estadísticos mas usados

- Sedunda Parte:

Se presentan los modelos estadísticos mas apropiados para algunas áreas de aplicación. Estas areas incluyen:

- Sistemas de espera (teoria de colas).
- Sistemas de inventarios y cadenas de suministros (*Supply-Chain*)
- Confiabilidad y reparación (mantenimiento)
- Limitación de Datos

Sistemas de espera

- En un sistema de espera los patrones de interarribo y tiempos de servicios pueden ser probabilísticos
- Ejemplo de modelos estadísticos para la distribución del tiempo entre llegadas o de servicio :
  - Distribución exponencial: si los tiempos de servicio tienen una alta variabilidad.
  - Distribución normal: más o menos constante, con cierta variabilidad aleatoria (ya sea positivo o negativo).
  - Distribución Gamma y de Weibull: más general que la exponencial (involucra la ubicación de las modas de fdp y las formas de las colas (colas mas largas)).
  - La distr. Exponencial es un caso particular de la Gamma y Weibull.

Inventario y cadena de suministros

- En los sistemas de inventarios y cadenas de suministros reales, hay al menos tres variables aleatorias:
  - El número de unidades demandadas por pedido o por período de tiempo
  - El tiempo entre las demandas
  - El tiempo de reabastecimiento o satisfación de la demanda (lead-time)

- Modelos estadisticos ejemplos para la distribución del tiempo de satisfacción o reposición (lead time):
  - Gamma

- Modelos estadisticos ejemplos para la distribución de la demanda:
  - Poisson.
  - Binomial Negativa: cola más larga que la de Poisson (demandas mas grandes).

Fiabilidad y Mantenibilidad

- Tiempo entre Fallas (TeF)
  - Exponencial: Fallas son aleatorias
  - Gamma: para la redundancia de espera, donde cada componente tiene un exponencial TeF.
  - Weibull: falla es dependiente de la falla mas grave de un gran numero de defectos en un sistema de componentes.
  - Normal: Fallas son debido al desgaste

Otras Areas

- Para el caso de *Limitacion de Datos*, algunas distribuciones mas usadas son:
  - Uniforme, triangular and beta
- Otras distribuciones: Bernoulli, binomial y hyperexponential.

Distribuciones Discretas

- Las variables aleatorias discretas (v.a.d) son usadas para describir fenómenos aleatorios en los cuales solo valores enteros pueden ocurrir.

- Tercera Parte

  Presentamos a continuación las siguientes distribuciones:
  - Distribución Bernoulli
  - Distribución Binomial
  - Distribución Geométrica and binomial negativa
  - Distribución Poisson

Distribucion Bernoulli [Distr. Discretas]

- Tenemos un fenómeno de Bernoulli si al analizarlo sólo son posibles dos resultados y la v.a. X que lo representa sólo puede tomar 2 valores:
  - X=1 (**éxito**, con probabilidad p)
  - X=0 (**fracaso**, con probabilidad 1-p =q)
    - a) Si se acierta o no al responder al azar una pregunta tipo test con 2 resultados posibles (verdadero o falso)
      P(acertar)= P(X=1) = p = 0,5 P(no acertar)= P(X=0) = 1-p = 0,5
    - b) Según datos del CIS, el 40% de los votantes de un municipio tienen intención de votar a un determinado partido político en las próximas elecciones. Cual es la probabilidad de elegir un votante al azar y que vaya a votar o no a ese partido?

- La media μ y la varianza σ2 de la v.a. X son:
  - μ = E[X] =Σx * p(x) = 1.p +0 * (1-p) = **p** = 0,5 para a)
  - σ2 = Σx2 p(x) –μ2= 12.p +02. (1-p) – p2= p - p2 = **p(1-p) = p * q** = 0,5*0,5= 0,25 para a)

- Función de probabilidad: $P[X = x] = p^x (1 - p)^{1-x}$, X=0 ó X=1
- X~Be(p), que se lee como: la v.a. X sigue una distribución Bernoulli de parámetro p.

Distribucion Binomial [Distr. Discretas]

- El numero de éxitos en *n* ensayos Bernoulli, *X*, tiene una distribución binomial.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \underbrace{p^x q^{n-x}}_{\text{Probabilidad de que haya } x \text{ éxitos y (n-x) fallas.}}, & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0, & \text{otrocaso} \end{cases}$$

  - La media, *E(x) = p + p + … + p = n*p*
  - La varianza, *V(X) = pq + pq + … + pq = n*pq*
- La Distr. Bernoulli se puede considerar como un caso particular de una binomial con n=1 **Be(p)=Binomial(n=1,p).**
- **Ejemplo:** Número de aciertos en un test, que se responde al azar, con 3 preguntas con respuesta verdadero o falso.

Distribución Geometrica & Binomial Negativa

- Distribución Geometrica
  - El número de ensayos Bernoulli, hasta llegar al 1er éxito:

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}p, & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0, & \text{otros caso} \end{cases}$$

  - *E(x) = 1/p, and V(X) = q/p²*

- Distribución Binomial negativa
  - El número de ensayos Bernoulli, hasta llegar al *k-ésimo* éxito
  - Si Y es una distr. binomial negativa con parametros p y k, ent.:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^{k}, & x = k, k+1, k+2, \ldots \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

  - *E(Y) = k/p, y V(X) = kq/p²*

Distribución de Poisson

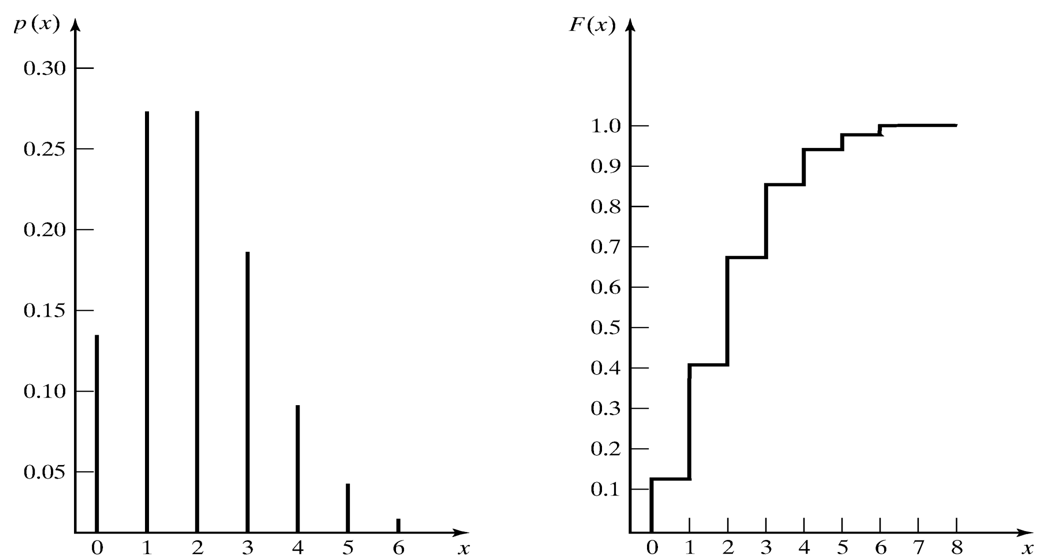
[Distr. Discretas]

- La distribución de Poisson describe muchos procesos aleatorios bastante bien y es matemáticamente muy sencillo. donde $\alpha > 0$, fdp and fda are:

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha}\alpha^{x}}{x!}, & x=0,1,\ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x}\frac{e^{-\alpha}\alpha^{i}}{i!}$$

  - $E(X) = \alpha = V(X)$



(a) (b)

Distribución de Poisson [Distr. Discretas]

- Ejemplo: Un técnico de reparación de computadoras responde a un “beep” cada vez que hay una llamada al servicio técnico. El número de pitidos por hora ~ Poisson(α = 2 per hour).
  - La probabilidad de que ocurran 3 “beep” en la próxima hora es:
    $p(3) = e^{-2}2^{3}/3! = 0.18$
    también, $p(3) = F(3) – F(2) = 0.857-0.677=0.18$
  - La probabilidad de que ocurran 2 o mas beep en una hora es:
    $p(2 \text{ o mas}) = 1 – p(0) – p(1)$
    $= 1 – F(1)$
    $= 0.594$

Distributiones Continuas

- Las variables aleatorias continuas (v.a.c.) se puede utilizar para describir fenómenos aleatorios en los que la variable puede tomar cualquier valor en algún intervalo.
- Cuarta Parte:

  Las distribuciones que veremos a continuación son:
  - Uniforme
  - Exponencial
  - Normal
  - Weibull
  - Lognormal
  - Triangular
  - Gamma

Distribución Uniforme [Distr. Continuas]

- Una v.a. *X* es uniformemente distribuida sobre el intervalo (*a,b*), *U*(*a,b*), si su fdp y fda son:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x \prec a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \prec b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

- Propiedades
  - $P(x_1 < X < x_2)$ es proporcional a la longitud del intervalo $[F(x_2) - F(x_1) = (x_2-x_1)/(b-a)]$
  - $E(X) = (a+b)/2$ $\qquad$ $V(X) = (b-a)^2/12$
- U(0,1) provee el medio para generar numeros aleatorios, desde la cual variables aleatorias pueden ser generadas.

Distribución Uniforme

- Se utiliza ante la falta de información.
  - Ejemplo del callcenter. Solo se conoce la media (α=3) (pág. 190).

- Ejercicio:
  - Un colectivo arriba cada 20 min. a una parada a partir de las 6:40hsA.M. Un cierto pasajero no conoce esa información, pero éste arriba aleatoriamente a la parada para tomar el colectivo entre las 7:00 y 7:30hs. Cual es la probabilidad de que el pasajero espere mas de 5 minutos en la parada? (pág. 191)

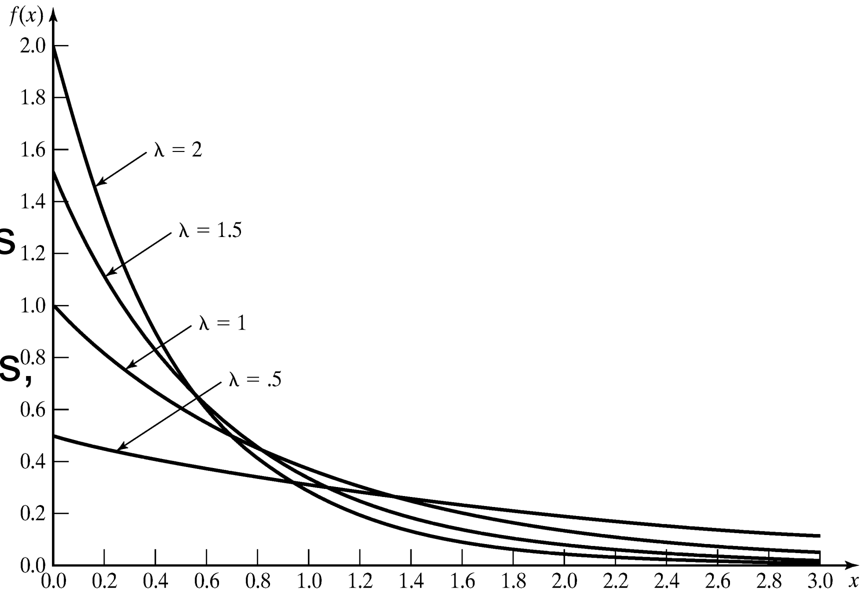
Distribución Exponencial [Distr. Continuas]

- Una v.a. *X* es exponencialmente distribuída con parametro λ > 0 su si fdp y fda son:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

  - $E(X) = 1/\lambda$ $V(X) = 1/\lambda^2$

  - Se utiliza para modelar tiempos entre arribos cuando son completamente aleatorios, y para modelar los tiempos de servicio que son muy variables
  - Para varias fdp exponencial diferentes, el valor de la intersección con el eje vertical es λ, y todas fdp's eventualmente intersecan.



Distribución Exponencial [Distr. Continuas]

- Propiedad "Memoryless" (sin memoria)
  - Para todo s y t mayor o igual a 0:

    $$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

  - Ejemplo: los fallos de una lampara ~ exp(λ = 1/3 por hora).
    - La probabilidad que la lamp. dure mas de 3 horas es:

      $P(X > 3) = 1-(1-e^{-3/3}) = e^{-1} = 0.368$
    - La probabilidad que la lamp. dure entre 2 y 3 horas es:

      $P(2 <= X <= 3) = F(3) – F(2) = 0.145$
    - La probabilidad que la lamp. dure por una hora mas luego de 2.5 horas de operación es:

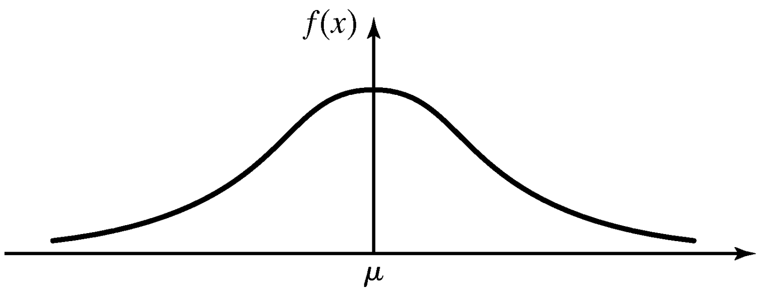
      $P(X > 3.5 \mid X > 2.5) = P(X > 1) = e^{-1/3} = 0.717$

Distribución Normal

- Una v.a. *X* es normalmente distribuida tiene fdp:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],\quad -\infty < x < \infty$$

  - Media: $-\infty < \mu < \infty$
  - Varianza: $\sigma^2 > 0$
  - Se denota: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$



- Propiedades especiales:
  - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, and $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
  - $f(\mu-x)=f(\mu+x)$; la fdp es simetrica a cerca de μ.
  - El máximo valor de la fdp ocurre en $x = \mu$; la media y la moda son iguales.

Distribución Normal

- Evaluación de la distribucion (de la integral):
  - Uso de métodos numéricos (soluciones no en forma cerrada)
  - Transformación de variables, permite que se pueda evaluar independientemente de μ y σ, usando una distribución normal estandar:

    $$Z \sim N(0,1)$$

  - Transformación de variables: sea Z = (X - μ) / σ,

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$\int \varphi(z)\, dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

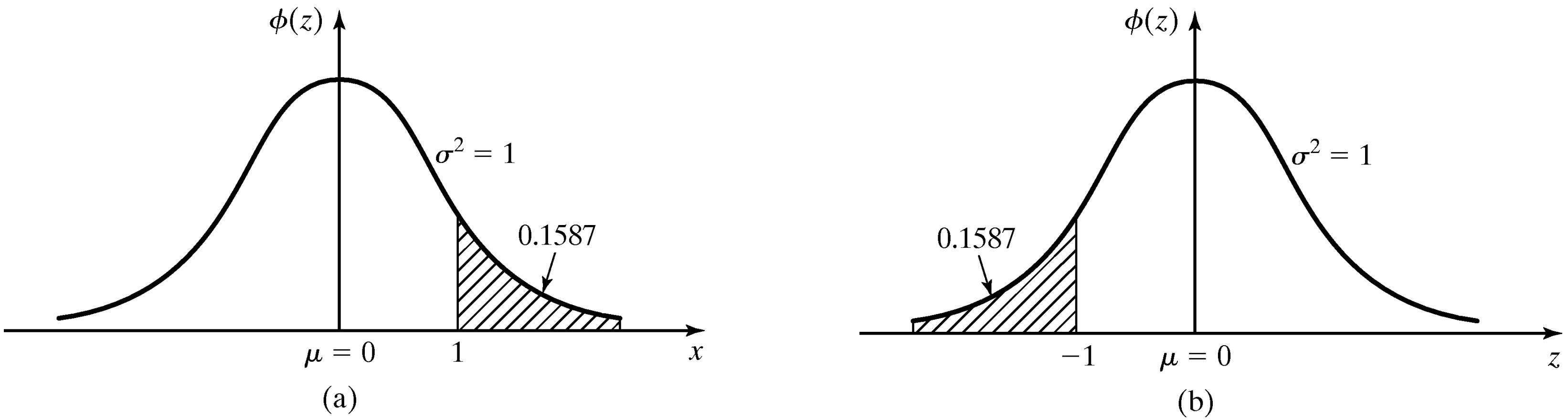
,where $\Phi(z) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$

Distribución Normal [Distr. Continuas]

- Ejemplo: El tiempo necesario para cargar un buque de alta mar, *X*, es distribuida como *N(12,4)*
  - La probabilidad de que el buque sea cargado en menos de 10 horas es:

$$F(10) = \Phi\left(\frac{10-12}{2}\right) = \Phi(-1) = 0.1587$$

- Usando la propiedad simetrica, $\Phi(1)$ es el complemento de Φ (-1)



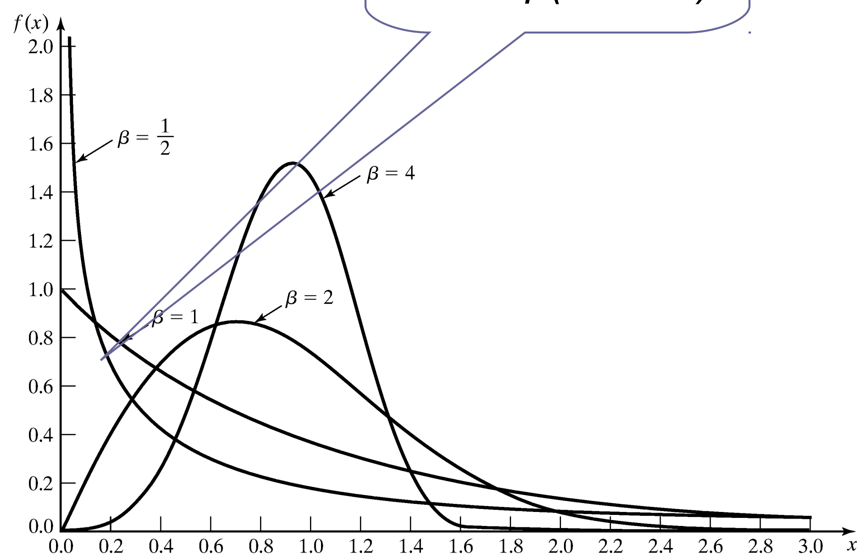
Distribución Weibull

- Una v.a. *X* tiene una distribución Weibull si su fdp tiene la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x \geq v \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

- 3 parametros:
  - parametro de ubicación: υ, $(-\infty < v < \infty)$
  - Parametro de forma: β, $(\beta > 0)$
  - Parametro de escala. α, (> 0)
- Grafico con $\upsilon = 0$ y $\alpha = 1$.

Cuando $\beta = 1$,
$X \sim exp(\lambda = 1/\alpha)$



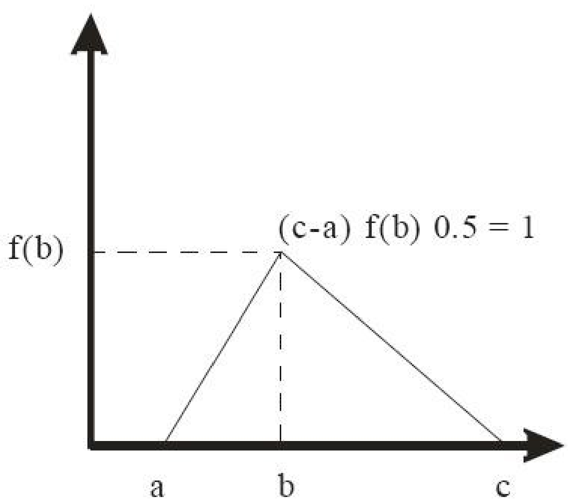
Distribución Triangular [Distr. Continuas]

- Una v.a. *X* tiene una distribución Triangular si su fdp tiene la forma (con a ≤b≤c):
- *E(X)=(a+b+c)/3*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le b\\[2mm] \dfrac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b< x\le c\\[2mm] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

- La moda (*b = 3E(X) - (a+c))*
 es mas usada que la media.
- *Altura de la moda es:2/(c-a)*

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\[2mm] \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a< x\le b\\[2mm] 1-\dfrac{(c-x)^2}{(c-b)(c-a)} & b< x\le c\\[2mm] 1 & x> c\end{cases}$$



- Ejemplo:
  - Sensor electrónico (pag. 208).

Distribución Gamma

[Distr. Continuas]

- Una v.a. *X* tiene una distribución Gamma si su fdp tiene la forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta\theta}{\Gamma(\beta)}(\beta\theta x)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-\beta\theta\,x}, & x>0\\ 0, & \text{otros casos}\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}1-\displaystyle\int_x^{\infty}\dfrac{\beta\theta}{\Gamma(\beta)}(\beta\theta t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-\beta\theta\,t}dt, & x>0\\ 0, & \text{otros casos}\end{cases}$$

  - Parametro de forma: β , ($\beta > 0$)
  - Parametro de escala. θ, (> 0)
- donde $\Gamma(\beta)$ es la *función gamma* que se define de la siguiente manera:

$$\Gamma(\beta)=\int_0^{\infty} x^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-x}dx$$

- Integrando dicha ecuación por partes, se obtiene:

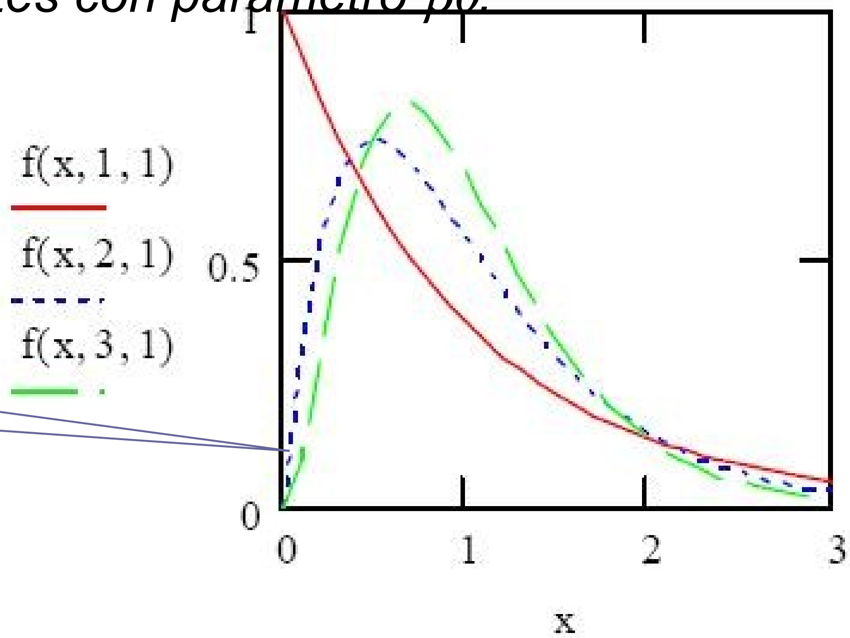
$$\Gamma(\beta) = (\beta-1)\,\Gamma(\beta-1)$$

- Si β es entero, usando $\Gamma(1) = 1$, la ecuación anterior se transforma en: $\Gamma(\beta) = (\beta-1)!$

Distribución Gamma

- Por lo tanto, la función gamma puede ser vista como una generalización del factorial.
- *E(X)= 1/θ*
- *V(X)= 1/(βθ* ^{2}*)*
- *Que pasa cuando β =1?*
- *Relación con la distr. exponencial cuando se suman β v.a. exponenciales independientes con parametro βθ.*

Cuando θ=1,
β = 1, 2 y 3



Distribución Erlang [Distr. Continuas]

- Es igual a la distribución gamma cuando *β* es igual a un entero *k*. Esta distribución se puede asociar a la variable *X* que resulta de sumar *k* distribuciones exponenciales independientes con parámetros *k θ*, esto es:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

- *donde la fdp de X_j es:*

- *Con esta Interpretación:* $g(x_j) = \begin{cases} (k\theta)\, e^{-k\theta\, x_j}, & x_j\, 0 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$

$$E(X) = \frac{1}{k\theta} + \frac{1}{k\theta} + \ldots + \frac{1}{k\theta} = \frac{1}{\theta} \qquad V(X) = \frac{1}{(k\theta)^2} + \frac{1}{(k\theta)^2} + \ldots + \frac{1}{(k\theta)^2} = \frac{1}{k\theta^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\theta x)^i\, e^{-k\theta\, x}}{i!}, & x > 0 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

- *Ejemplo:*
  - *Propietario que se va de vacaciones y desea dejar iluminada su casa (pág.196).*
  - *Examen Médico.*

Proceso Poisson [Distr. Poisson]

- Definición: *N(t)* es una función de conteo que representa el número de eventos que han ocurrido en el intervalo *[0,t].*
- Un proceso de conteo {*N(t), t*>=*0*} es un proceso Poisson con tasa media λ si:
  - Los arribos ocurren de a uno por vez
  - {*N(t), t*>=*0*} tiene incrementos estacionarios
  - {*N(t), t*>=*0*} tiene incrementos independientes

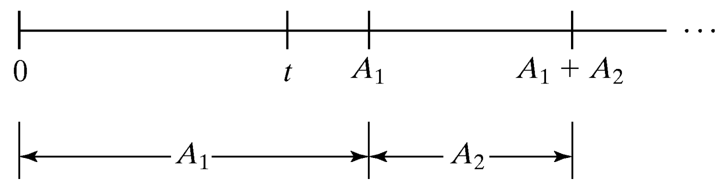
- Si los eventos ocurren de acuerdo a un proceso Poisson ent.

$$P[N(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad \text{for } t\geq 0 \text{ and } n=0,1,2,\ldots$$

  - La media y la varianza son iguales: $E[N(t)] = V[N(t)] = \lambda t$
  - Incremento estacionario: el número de eventos en el tiempo desde *s* a *t* es también Poisson-distribuído (***N(t)-N(s)***)con media $\lambda(t-s)$

Tiempo entre Arribos [Distr. Poisson]

- Considerar los tiempo de interarribos de un proceso Poisson (A_1, A_2, …), donde A_i es el tiempo que pasa entre el arribo *i* y el arribo *i+1*



$$\{A_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$$

El 1er arribo ocurre luego del tiempo t sii no hay arribos en el intervalo [0,t], es decir:

$$P\{A_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$$P\{A_1 <= t\} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{[fda de exp}(\lambda)\text{]}$$

- Los tiempos interarrbos, A_1, A_2, …, son exponencialmente distribuídos e independientes con media $1/\lambda$

Cant. Arribos ~ *Poisson*($\lambda\tau$) ⇔ Tiempos entre arribos ~ *Exp*($1/\lambda$)

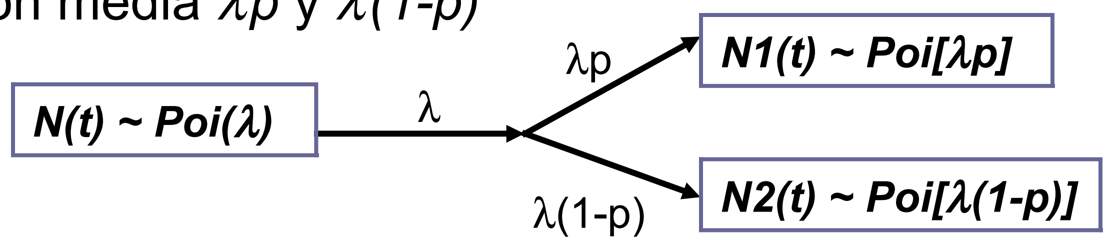
Stationary & Independent

Memoryless

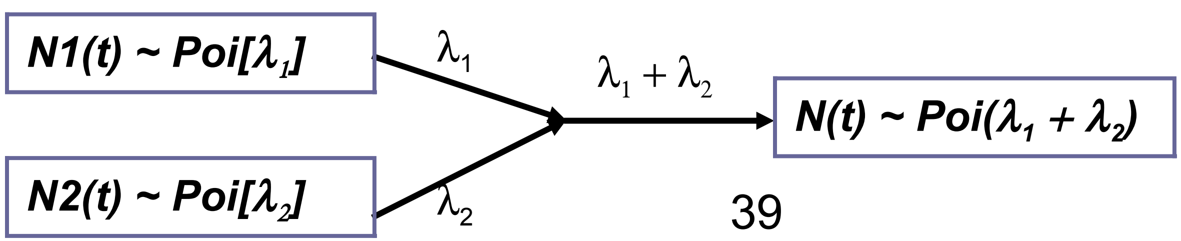
- ***Que relacion hay entre la propiedad "memoryless" y la de "independencia"?***

Dividir y Combinar (Splitting and Pooling) [Distr. Poisson]

- Dividiendo procesos:
  - Suponemos que cada evento de un proceso Poisson puede ser clasificado como Tipo I, con probabilidad *p* y Tipo II, con probabilidad *1-p.*
  - $N(t) = N1(t) + N2(t)$, donde $N1(t)$ y $N2(t)$ son ambos procesos Poisson con media λp y $\lambda(1-p)$



- Combinando:
  - Suponer 2 (o mas!!) procesos Poisson combinados
  - *Sea* $N(t) = N1(t) + N2(t)$, entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa $\lambda_1 + \lambda_2$



Proceso Poisson No Estacionario (PPNE) [Distr. Poisson]

- Un proceso Poisson sin incrementos estacionarios, caracterizado por $\lambda(t)$ (la tasa de arribos en el tiempo t).Ej.: hora del almuerzo, num. de llamadas en horario de comercio.

- La clave para trabajar con un PPNE es el número de esperado de arribos por tiempo t, $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t)=\int \lambda(s)ds$$

- Para un proceso Poisson estacionario con tasa de arribo λ, tenemos $\Lambda(t)=\lambda t$, como tasa media.

- Relación entre un proceso Poisson estacionario $N(t)$ *con* $\lambda=1$ y un PPNE $N_{ppne}(t)$ con tasa $\lambda(t)$:
  - Sean t_1, t_2, … los tiempos de arribo de un proceso estacionario con $\lambda = 1$, y T_1, T_2, … los tiempos de arribo de un PPNE con tasa $\lambda(t)$. Se cumple:

$$t_i = \Lambda(T_i)$$
$$T_i = \Lambda^{-1}(t_i)$$

Proceso Poisson No Estacionario (PPNE) [Distr. Poisson]

- Ejemplo: Suponemos que los arribos a una Oficina tienen tasas 2 por min. desde las 8 am hasta las 12 pm, y luego de 0.5 por min. hasta las 4 pm.
- t = 0 corresponde a las 8 am, la función *N(t)* de PPNE tiene tasa:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4 \\ 0.5, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

El número esperado de arribos por tiempo t:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 4 \\ \int 2\,ds + \int 0.5\,ds = \frac{t}{2} + 6, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

- La distribución de probabilidad del número de llegadas entre las 11 am y 2 pm .

$P[N_{nnep}(6) - N_{nnep}(3) = k] \quad = P[N(\Lambda(6)) - N(\Lambda(3)) = k]$

$= P[N(9) - N(6) = k]$

$= e^{(9-6)}(9-6)^{k}/k! = e^{3}(3)^{k}/k!$

Distribuciones Empiricas [Distr. Empirica]

- Una distribución cuyos parámetros son valores observados en una muestra de datos.
  - Puede ser usado cuando es imposible o innecesario establecer que una variable aleatoria tiene una distribución paramétrica particular.
  - Ventaja: ningún supuesto más allá de los valores observados en la muestra.
  - Desventaja: la muestra no podría cubrir todo el rango de valores posibles.

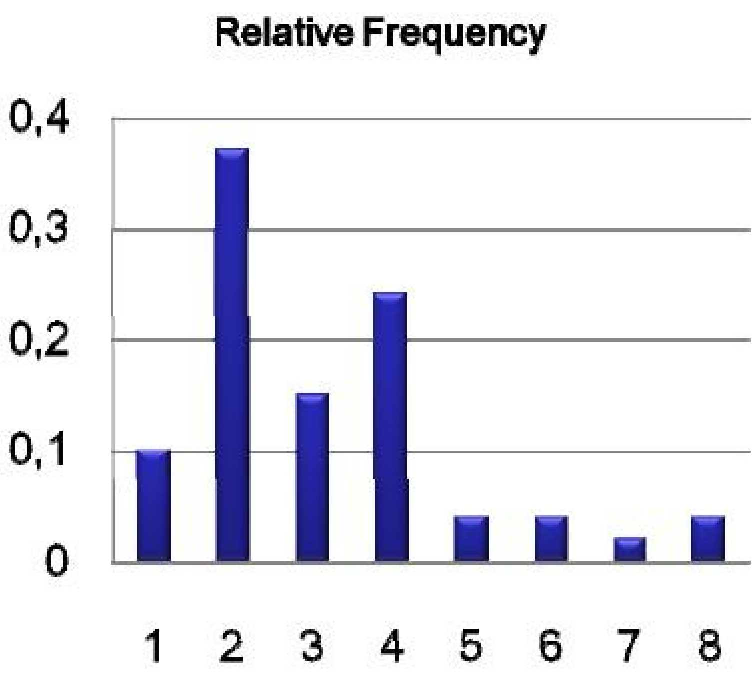
Distribuciones Empíricas – Ejemplo

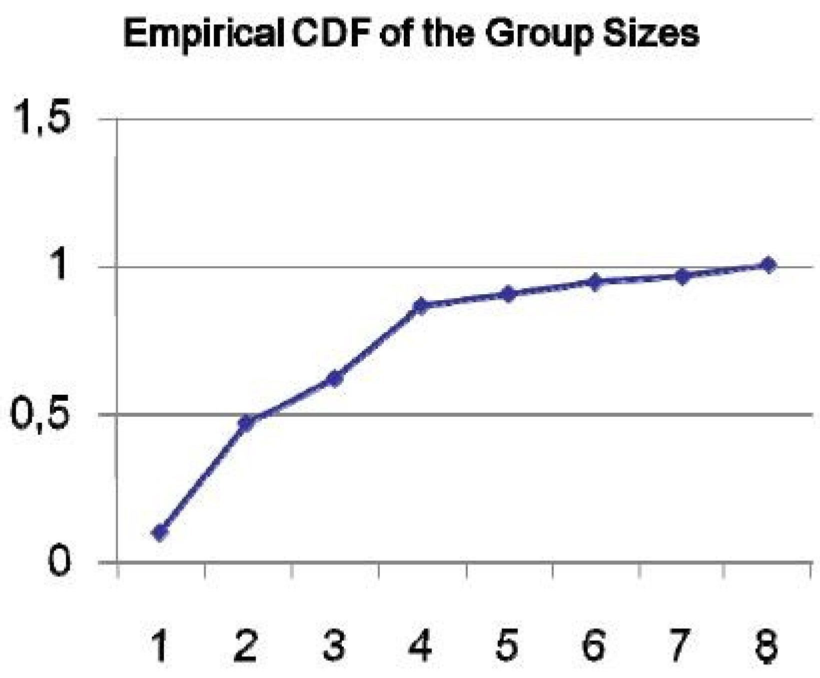
[Distr. Empírica]

- Las personas arriban en grupos de 1 a 8 personas
- Observación de los últimos 300. Resumido en la siguiente tabla.

Group Size	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Relative Frequency
1	30	0.10	0.10
2	110	0.37	0.47
3	45	0.15	0.62
4	71	0.24	0.86
5	12	0.04	0.90
6	13	0.04	0.94
7	7	0.02	0.96
8	12	0.04	1.00

Distribuciones Empíricas – Ejemplo





Resumen

- El mundo que ve el analista de simulación es probabilística, no determinista.
- En esta sección:
  - Revisión de varias distribuciones de probabilidad importante .
  - Mostramos las aplicaciones de las distribuciones de probabilidad en un contexto de simulación.
- Una tarea importante en la modelización de una simulación es la recopilación y análisis de datos de entrada, por ejemplo, hipotetizar una forma de distribución para los datos de entrada. Se debe saber:
  - Diferencias entre las distribuciones discretas, continuas, y distribuciones empíricas.
  - Procesos Poisson y sus propiedades.