Hashing

Livro de Sedgewick e Wayne: sec.3.4, p.458. Website do livro: resumo sec.3.4, slides. Código fonte, documentação, e dados de teste de todos os programas do livro: veja algs4.cs.princeton.edu/code/.

Esta página trata da implementação de TSs (tabelas de símbolos) por meio de *tabelas de dispersão* e *tabelas de hash*. A teoria é simples mas o sucesso das implementações depende de truques práticos. Pode-se dizer que essas implementações envolvem mais arte que ciência.

Hashing tem dois ingredientes fundamentais: uma *função de hashing* e um mecanismo de *resolução de colisões*.

Resumo:

- função de espalhamento (hash function)
- colisões
- hashing modular (resto da divisão)
- o papel dos números primos
- os métodos `hashCode()` de Java
- hipótese do hashing uniforme
- resolução de colisões por encadeamento (lista ligada)
- resolução de colisões por sondagem linear
- redimensionamento da tabela de hash

Pré-requisitos:

- tabelas de símbolos

Ideias preliminares

- Exemplo 1: Imagine um pequeno país (bem menos que 100 mil cidadãos) onde os números de CPF têm apenas 5 dígitos decimais. Considere a tabela que leva CPFs em nomes:

  ```
  chave  valor associado
  01555  Ronaldo
  01567  Pelé
  ...    ...
  80114  Maradona
  80320  Dunga
  95222  Romário
  ```

  Como armazenar a tabela? Resposta: vetor de 100 mil posições. Use *a própria chave* como índice do vetor!

  - O vetor é conhecido com "tabela de hash" e
  - terá muitas posições vagas (desperdício de espaço), mas
  - a busca (get) e a inseção (put) serão extremamente rápidas.

- Exemplo 2: Imagine uma lista ligada cujas chaves são nomes de pessoas. Suponha que a lista está em ordem alfabética.

  ```
  chave                valor associado
  Antonio Silva        8536152
  Arthur Costa         7210629
  Bruno Carvalho       8536339
  ...                  ...
  Vitor Sales          8535922
  ```

```
Wellington Lima       5992240
Yan Ferreira          8536023
```

Para acelerar as buscas, divida a lista em 26 pedaços: os nomes que começam com `"A"`, os que começam com `"B"`, etc. Nesse caso,

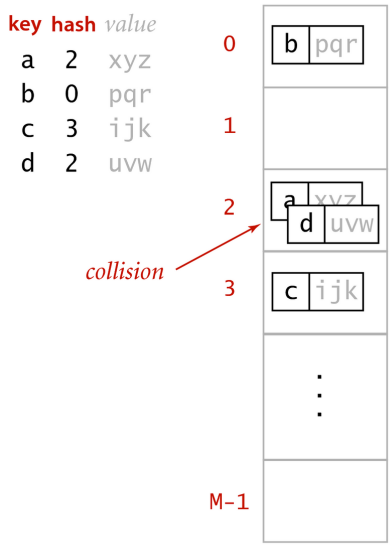
- o vetor de 26 posições é a "tabela de hash" e
- cada posição do vetor aponta para o começo de uma das listas.

Exercícios 1

1. Qual a diferença entre o exemplo dos CPFs acima e a implementação `BinarySearchST` já discutida?
2. Qual a diferença entre o exemplo das listas ligadas de nomes e a implementação `SequentialSearchST` já discutida?

Funções de hashing

- Uma *tabela de dispersão* ou *tabela de hash* (hash table) é um vetor cada uma de cujas posições armazena zero, uma, ou mais chaves (e valores associados). (O conceito é propositalmente vago.)
- Parâmetros importantes:
  - M : número de posições na tabela de hash
  - N : número de chaves da tabela de símbolos
  - $\alpha = N/M$: *fator de carga* (load factor)
- *Função de espalhamento* ou *função de hashing* (hash function): transforma cada chave em um índice da tabela de hash.
- A função de hashing responde a pergunta "Em qual posição da tabela de hash devo colocar esta chave?". A função de hashing *espalha* as chaves pela tabela de hash.
- A função de hashing associa um *valor hash* (hash value), entre 0 e $M-1$, a cada chave.
- No exemplo dos CPFs temos $\alpha < 1$ e a função de hashing é a identidade.
- No exemplo dos nomes de pessoas temos $\alpha > 1$ e a função de hashing é `nome.charAt(0)`.
- A função de hashing produz uma *colisão* quando duas chaves diferentes têm o mesmo valor hash e portanto são levadas na mesma posição da tabela de hash:



Hashing: the crux of the problem

- Exemplo: Chaves são números de identificação (7 dígitos) de estudantes da universidade e M vale 100.

```
8536152
7210629
8536339
8536002
...
8067490
8536106
8536169
8531845
```

  Uma possível função de hashing: 2 primeiros dígitos da chave. Outra possibilidade: 2 dígitos do meio. Outra possibilidade: 2 últimos dígitos. Qual dessas espalha melhor as chaves pelo intervalo 0 . . 99?

- Outro exemplo: função de hashing que leva qualquer número de CPF brasileiro (que tem nove dígitos) no correspondente "dígito verificador" (um número entre 0 e 99). (Por exemplo, leva 111444777 em 35.) O "dígito verificador" de um CPF depende de *todos* os dígitos do CPF.
- Ideal: a função de hashing deveria usar *todos* os dígitos da chave; assim, chaves ligeiramente diferentes serão levadas em números muito diferentes. (Subproduto: podemos usar o valor hash como *checksum* para verificar a integridade de um texto!)
- Escolha M e a função de hashing de modo a
  - diminuir o número de colisões;
  - *espalhar* bem as chaves pelo intervalo 0 . . M−1.

Função de hashing modular

- Que funções de hashing são usadas na prática?
- Se as chaves são inteiros positivos, podemos usar a função modular (resto da divisão por M):

```
private int hash(int key) {
    return key % M;
}
```

- Exemplos com M = 100 e com M = 97:

key	hash ($M = 100$)	hash ($M = 97$)
212	12	18
618	18	36
302	2	11
940	40	67
702	2	23
704	4	25
612	12	30
606	6	24
772	72	93
510	10	25
423	23	35
650	50	68
317	17	26
907	7	34
507	7	22
304	4	13
714	14	35
857	57	81
801	1	25
900	0	27
413	13	25
701	1	22
418	18	30
601	1	19

Modular hashing

- Em hashing modular, é bom que M seja primo (por algum motivo não óbvio).
- No caso de strings, podemos iterar hashing modular sobre os caracteres da string:

```
int h = 0;
for (int i = 0; i < s.length(); i++)
    h = (31 * h + s.charAt(i)) % M;
```

No lugar do multiplicador `31`, poderia usar qualquer outro inteiro `R`, de preferência primo, mas suficientemente pequeno para que os cálculos não produzam overflow.

Exercícios 2

1. Qual o valor da expressão `key % M` se `key` é negativo?
2. Por que convém evitar overflow no cálculo do valor hash de uma string?
3. (SW 3.4.4) Escreva um programa para encontrar valores de `a` e `M`, com `M` o menor possível, tais que a função de hashing `(a * k) % M`, que transforma a `k`-ésima letra do alfabeto em um valor hash, não produza colisões quando aplicada às chaves `S E A R C H X M P L`. (Isso é conhecido como *função de hashing perfeita*.)

Os métodos hashCode de Java

- Em Java, todo tipo-de-dados tem uma método padrão `hashCode()` que produz um inteiro entre -2^{31} e $2^{31}-1$ (aproximadamente 2 bilhões negativos a 2 bilhões positivos). Exemplo:

```
String s = StdIn.readString();
int h = s.hashCode();
```

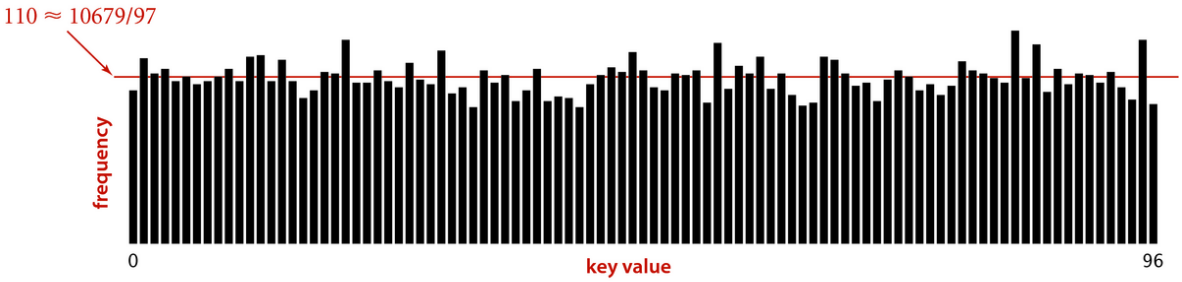
- Para converter o `hashCode()` em um número entre 0 e $M-1$, tome o resto da divisão por M. Antes, é melhor desprezar o bit mais sigificativo para evitar que `%` lide com números negativos e produza um resultado negativo:

```
private int hash(Key x) {
    return (x.hashCode() & 0x7fffffff) % M;
}
```

(O uso da máscara `0x7fffffff` seria desnecessário se Java tivesse um tipo-de-dados `unsigned int`.)

O que se espera de uma função de hashing ideal

- Queremos uma função de hashing que
  - possa ser calculada eficientemente e
  - espalhe bem as chaves pelo intervalo 0 . . M–1.
- Exemplo: Valores hash calculados a partir do `hashCode()` padrão como acima para o conjunto de palavras (excluídas as repetidas) em `tale.txt`, com $M = 97$. No histograma, cada barra dá o número de palavras que têm o valor hash indicado na ordenada. O histograma sugere que a função espalha bem as palavras.



Hash value frequencies for words in *Tale of Two Cities* (10,679 keys, $M = 97$)

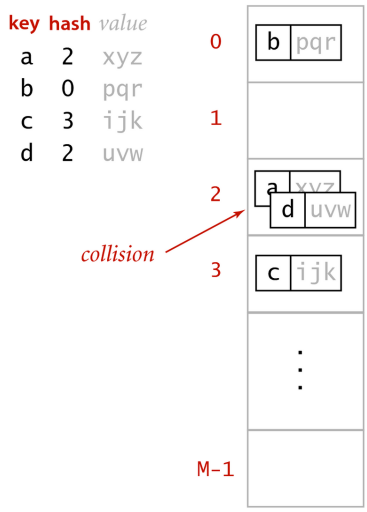
- Hipótese do Hashing Uniforme: Vamos *supor* que nossas funções de hashing distribuem as chaves pelo intervalo de inteiros 0 . . M–1 de maneira *uniforme* (todos os valores hash igualmente prováveis) e *independente*.
- Exemplo: Supõe-se que os números sorteados pela Loteria Federal são todos igualmente prováveis. Supõe-se também que são independentes: só porque 888888888888 nunca foi sorteado, ele não tem maior probabilidade de sair no próximo sorteio.
- Na verdade, nenhuma função determinística satisfaz a Hipótese do Hashing Uniforme. (Essa impossibilidade é uma questão profunda e fundamental em Ciência da Computação.) Mas a hipótese é útil porque permite fazer cálculos para prever o desempenho aproximado de tabelas de hash.
- A função de hashing que usamos acima para analisar o livro `tale.txt` parece ser aproximadamente uniforme.

Exercícios 3

1. Elimine as palavras repetidas de `tale.txt`. Depois, faça um histograma como o mostrado acima mas usando $M = 100$.
2. Faça um histograma como o mostrado acima para as palavras de `tale.txt` (sem repetições), com $M = 97$, mas alguma função de hashing diferente da usada acima.
3. Faça um histograma como o acima para as palavras de `quincasborba.txt` (depois de eliminadas as repetidas).
4. É fácil implementar operações como `min()`, `max()`, `floor()` e `ceiling()` em tabelas de símbolos implementadas com tabelas de hash?

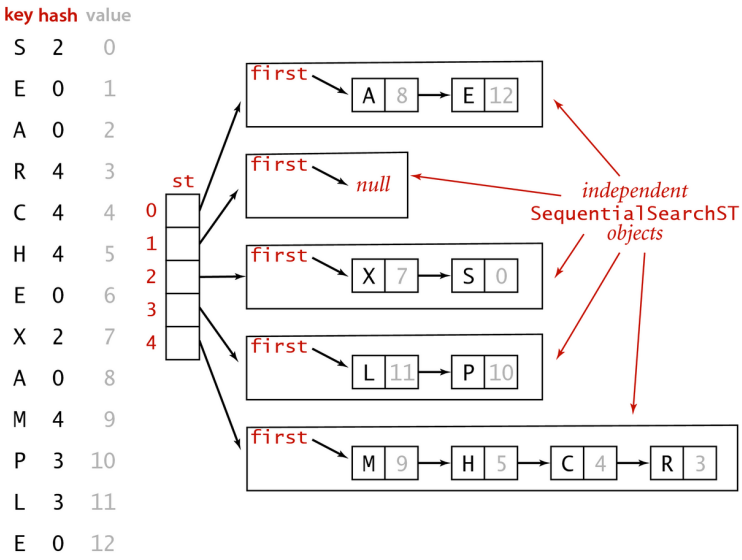
Implementação 1: hashing com encadeamento

- Agora que cuidamos das funções de hashing, podemos tratar de métodos de resolução de colisões.
- Precisamos inventar um meio de *resolver colisões*.



Hashing: the crux of the problem

- Resolução de colisões por *encadeamento* (separate chaining): M listas ligadas, cada uma implementa uma tabela de símbolos.



Hashing with separate chaining for standard indexing client

- Em geral, $N > M$ e portanto $\alpha > 1$.
- Algoritmo 3.5: Hashing com encadeamento, classe **SeparateChainingHashST** (usa SequentialSearchST):

```
public class SeparateChainingHashST<Key, Value> {

    private int N;  // número de chaves
    private int M;  // tamanho da tabela de hash

    private SequentialSearchST<Key,Value>[] st;  // vetor de TSs

    public SeparateChainingHashST(int M) {
```

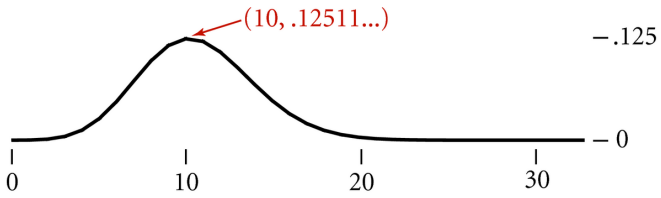
```
        this.M = M;
        st = (SequentialSearchST<Key,Value>[]) new SequentialSearchST[M];
        for (int i = 0; i < M; i++)
            st[i] = new SequentialSearchST<Key,Value>();
    }

    public SeparateChainingHashST() {
        this(997); // tamanho de tabela default
    }

    private int hash(Key key) {
        return (key.hashCode() & 0x7fffffff) % M;
    }

    public Value get(Key key) {
        int h = hash(key);
        return st[h].get(key);
    }

    public void put(Key key, Value val) {
        int h = hash(key);
        st[h].put(key, val);
    }
```

- (Com 997 listas, espera-se que esse código seja cerca de 1000 vezes mais rápido que `SequentialSearchST`.)
- Veja código completo em algs4/SeparateChainingHashST.java (usa redimensionamento da tabela de hash).

Análise

- O comprimento *médio* das listas é N/M. Mas poderíamos ter uma lista muito longa e todas as demais muito curtas, não? Para eliminar essa possibilidade, precisamos *saber* ou *supor* algo sobre os dados.
- Proposição K: Em uma tabela de hash encadeada com M listas e N chaves, se vale a hipótese do hashing uniforme, a probabilidade de que o número de chaves em cada lista não passa de N/M multiplicado por uma pequena constante, essa probabilidade é muito próxima de 1.
- Exemplo: Se $N/M = 10$, a probabilidade de que uma lista tem comprimento maior que 20 é inferior a 0.8%.
- A prova da Proposição K usa apenas teoria de probabilidades clássica. Graças à hipótese do hashing uniforme, a probabilidade de que uma determinada lista tem exatamente k elementos é

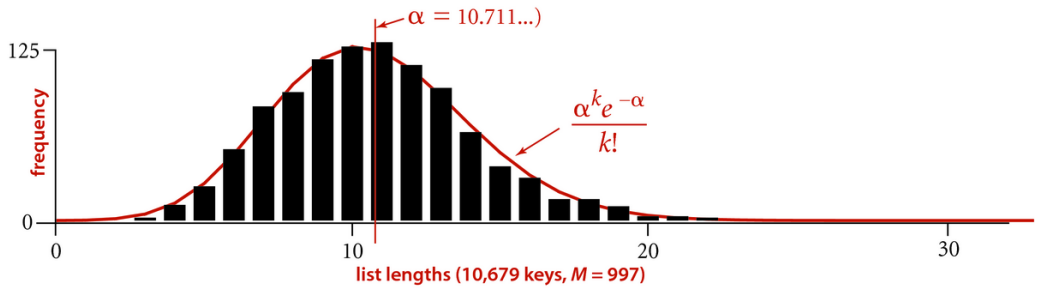
$$\binom{N}{k}\left(\frac{1}{M}\right)^{k}\left(\frac{M-1}{M}\right)^{N-k}$$



Binomial distribution ($N = 10^4$, $M = 10^3$, $\alpha = 10$)

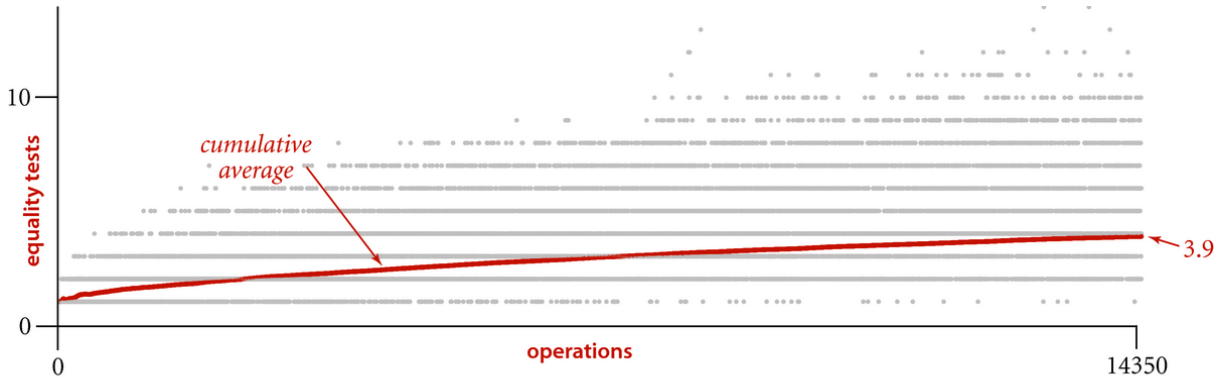
Resta apenas mostrar que essa distribuição binomial é "bem concentrada" em torno de α, ou seja, que a probabilidade de que a lista tenha, digamos, mais que 2α chaves é muito pequena.

- Exemplo: SW aplicou `FrequencyCounter` com `SeparateChainingHashST` de 997 listas às palavras do livro `tale.txt`. No gráfico, a altura de cada barra sobre o ponto k do eixo horizontal dá o número de listas que têm comprimento k:



List lengths for `java FrequencyCounter 8 < tale.txt` using SeparateChainingHashST

- Exemplo: SW usou o programa-cliente `FrequencyCounter` com `SeparateChainingHashST` de 997 listas para examinar as palavras com 8 ou mais letras do livro `tale.txt`. O gráfico mostra o número de nós visitados (= número de comparações feitas) por cada chamada de `put()`. Os pontos vermelhos dão a média acumulada. (Compare com os gráficos de SequentialSearchST, BST e RedBlackBST.)



Costs for `java FrequencyCounter 8 < tale.txt` using SeparateChainingHashST (*M* = 997)

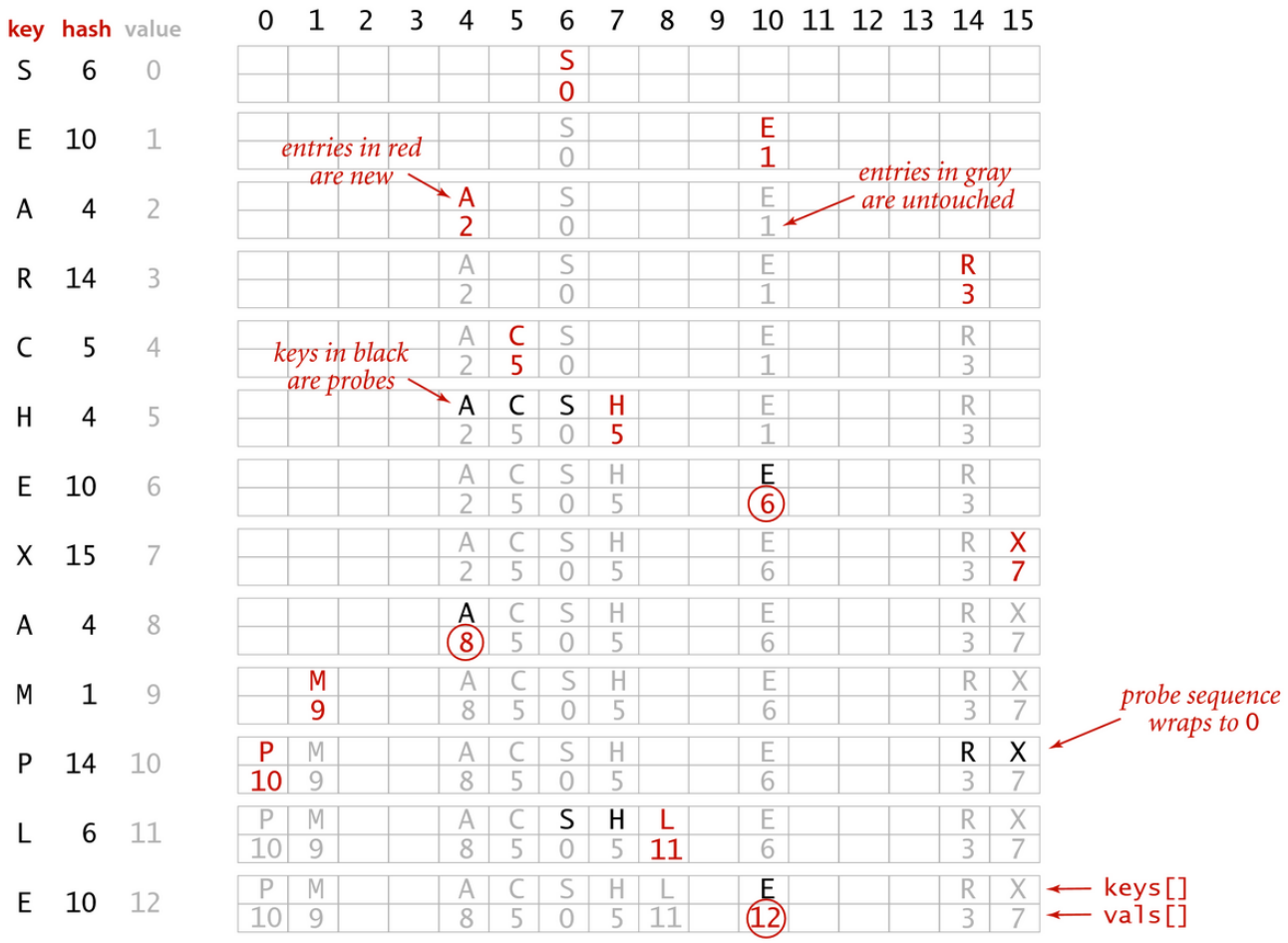
- Como escolher o valor de *M*? Escolha *M* tão grande que as listas sejam curtas mas não tão grande que muitas listas fiquem vazias. Felizmente, o valor de *M* não é crítico.

Exercícios 4

1. Podemos ter $\alpha < 1$ numa tabela de hash com encadeamento?
2. (SW 3.4.1) Insira as chaves `E A S Y Q U T I O N`, nessa ordem, usando hashing com encadeamento, em uma tabela com *M* = 5 listas. Use a função de hashing `11*k % M` para transformar a `k`-ésima letra do alfabeto em um índice da tabela de hash.
3. Repita os experimentos com o livro `tale.txt` usando valores de *M* diferentes de 997 (tente valores que são potência de 2, por exemplo).
4. (SW 3.4.9) Acrescente um método `delete()` à classe `SeparateChainingHashST`. O seu método deve ser ansioso: ele deve remover o chave solicitada imediatamente (e não simplesmente marcá-la com `null` para remoção posterior).
5. (SW 3.4.19) Acrescente um iterador `keys()` à classe `SeparateChainingHashST`.
6. Acrescente um método a `SeparateChainingHashST` que calcule o custo médio de uma busca bem-sucedida, supondo que cada chave tem a mesma probabilidade de ser buscada. (O custo da busca é o número de comparações de chaves.)
7. Acrescente um método a `SeparateChainingHashST` que calcule o custo médio de uma busca malsucedida sob a hipótese de hashing uniforme. (O custo da busca é o número de comparações de chaves.)
8. (SW 3.4.36) *Faixa de comprimentos de listas*. Escreva um programa que insira *N* chaves inteiras (números `int`) aleatórias em uma tabela de tamanho *N*/100 usando hashing com encadeamento e depois determine o comprimento da lista mais curta e da mais longa. Faça isso para *N* igual a 10^3, 10^4, 10^5, 10^6. (Faça um pequeno relatório sobre os resultados e acrescente o relatório, como comentário, ao final do seu programa.)

Implementação 2: hashing com sondagem linear

- Outro jeito de resolver colisões é a *sondagem linear* (linear probing): se uma posição da tabela estiver ocupada, tente a próxima!
- Precisamos ter $N \leq M$ e portanto $\alpha \leq 1$.
- Exemplo: Rastreamento de hashing com sondagem linear para as chaves `S E A R C H E X A M P L E` e tabela de hash de tamanho $M = 16$:



Trace of linear-probing ST implementation for standard indexing client

- Veja a [animação de hashing com sondagem linear] no website do livro.
- Algoritmo 3.6: Hashing com sondagem linear, classe **LinearProbingHashST** (sem redimensionamento):

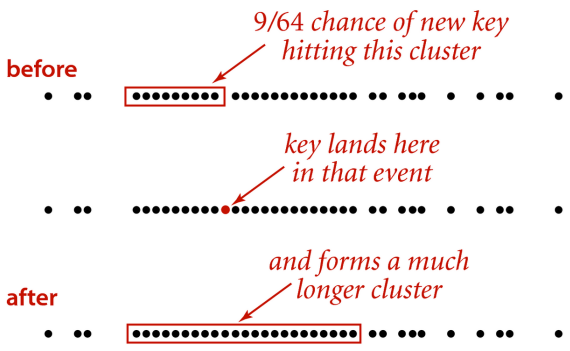
```
public class LinearProbingHashST<Key, Value> {

    private int N;
    private int M = 16;
    private Key[] keys;
    private Value[] vals;

    public LinearProbingHashST() {
        keys = (Key[])   new Object[M];
        vals = (Value[]) new Object[M];
    }

    public LinearProbingHashST(int cap) {
        M = cap;
        keys = (Key[])   new Object[M];
        vals = (Value[]) new Object[M];
    }
```

```
private int hash(Key key) {
    return (key.hashCode() & 0x7fffffff) % M;
}

public void put(Key key, Value val) {
    int i;
    for (i = hash(key); keys[i] != null; i = (i + 1) % M)
        if (keys[i].equals(key)) {
            vals[i] = val;
            return;
        }
    keys[i] = key;
    vals[i] = val;
    N++;
}

public Value get(Key key) {
    for (int i = hash(key); keys[i] != null; i = (i + 1) % M)
        if (keys[i].equals(key))
            return vals[i];
    return null;
}
```

- Note que a tabela de hash é preenchida com `null` no início.
- Mantenha o fator de carga α sempre bem abaixo de 1. Se N chegar perto de M, a operação de inserção pode demorar muito tempo procurando por uma posição vaga na tabela.

Análise

- Se a função de hashing satisfaz a hipótese de hashing uniforme, poderíamos pensar que as chaves ficam espalhadas "por igual" pela tabela. Mas não é bem assim...
- A sondagem linear tem a tendência de produzir *clusters* (grumos, pelotas, caroços, agrupamentos contíguos) na tabela de hash.
- Exemplo: clusters em uma tabela de hash com 64 posições:



Clustering in linear probing ($M = 64$)

- Exemplo: padrões de ocupação de tabela de hash com sondagem linear comparada com ocupação aleatória. (Acho que "8192" está errado; deveria ser "8191". O que você acha?):

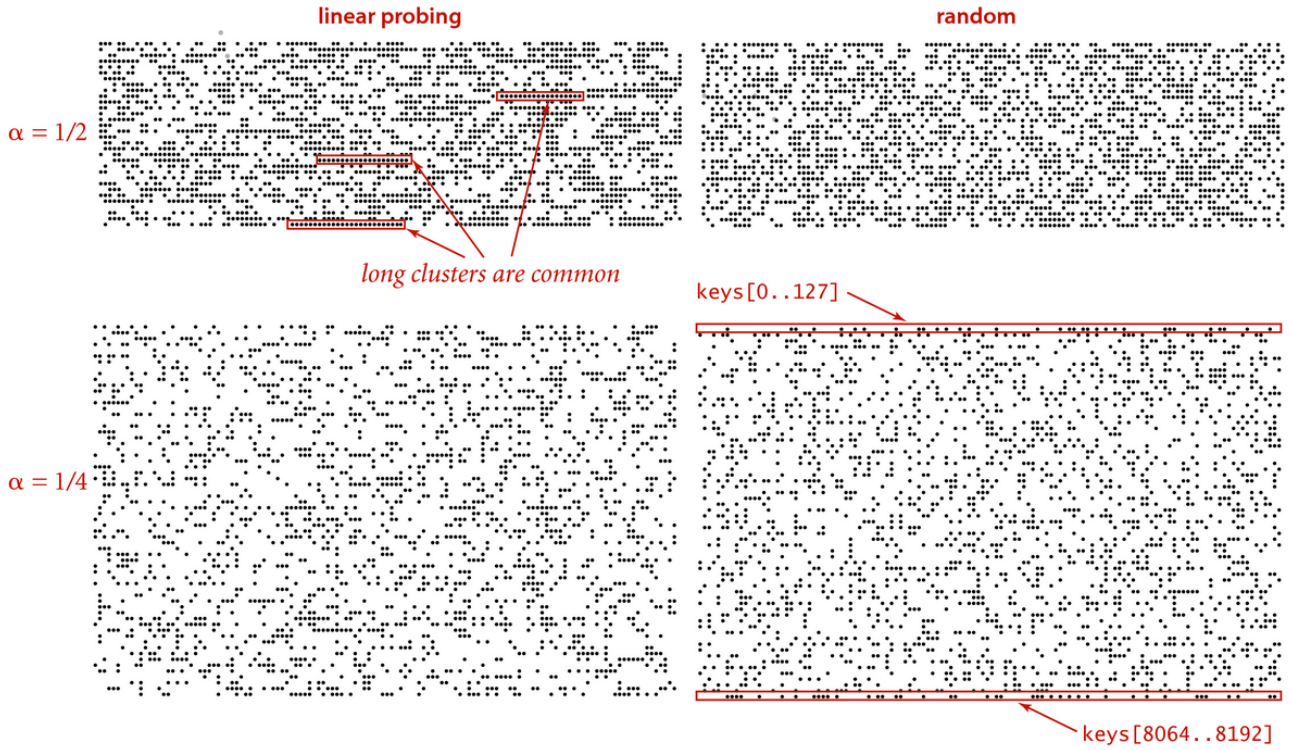


Table occupancy patterns (2,048 keys, tables laid out in 128-position rows)

- Se vale a hipótese do hashing uniforme, clusters longos tendem a crescer mais que os curtos.
- Proposição M: Supondo que vale a hipótese do hashing uniforme, e que α está entre 0 e 1 mas não muito perto de 1, o número médio de sondagens em buscas bem-sucedidas é aproximadamente

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

  e o número médio de sondagens em buscas malsucedidas (ou inserções) é aproximadamente

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$$

- Exemplo: quando α = 0.5, temos aproximadamente 1.5 sondagens por busca bem-sucedida e aproximadamente 2.5 sondagens por busca malsucedida.
- Exemplo: quando α = 0.25, temos aproximadamente 1.16 sondagens por busca bem-sucedida e aproximadamente 1.39 por busca malsucedida.
- Prova da Proposição M: Knuth provou em 1962 (não é muito fácil).
- Car parking problem: Knuth faz analogia com automóveis procurando vaga de estacionamento em uma rua que já tem carros estacionados. Quantas tentativas um automóvel precisa fazer, em média?

Exercícios 5

1. Por que a análise das buscas malsucedidas e bem-sucedidas é feita em separado?
2. (SW 3.4.10) Insira as chaves `E A S Y Q U T I O N`, nessa ordem, usando hashing com sondagem linear, em uma tabela com M = 16 posições. Use a função de hashing `11*k % M` para transformar a `k`-ésima letra do alfabeto em um índice da tabela de hash. Repita o exercício com M = 10.
3. Quero acrescentar à classe `LinearProbingHashST` um método `delete()` que remova uma dada chave `key` da tabela. Mostre, por meio de um exemplo simples, que o código a seguir não resolve o problema.

```
public void delete(Key key) {
    if (!contains(key)) return;
    int i = hash(key);
    while (!key.equals(keys[i]))
        i = (i + 1) % M;
    keys[i] = null;
    vals[i] = null;
}
```

4. (SW 3.4.17, p.471) Acrescente à classe `LinearProbingHashST` um método `delete()` que remova uma dada chave (e o valor associado).
5. (SW 3.4.19) Acrescente um iterador `keys()` à classe `LinearProbingHashST`.
6. (SW 3.4.20) Acrescente à classe `LinearProbingHashST` um método que calcule o custo médio de uma busca bem-sucedida, supondo que cada chave da tabela tem a mesma probabilidade de ser buscada. (O custo da busca é o número de sondagens, ou seja, o número de posição visitadas da tabela de hash.) Use o código de LinearProbingHashST sem redimensionamento. Escreva um cliente `CustoSondagemLinear.java` que teste o novo método usando um gerador de números aleatórios. Use `VisualAccumulator` para fazer um gráfico de custos em função do número *N* de chaves. Superponha o gráfico com as previsões dadas na Proposição M.
7. (SW 3.4.21) Acrescente à classe `LinearProbingHashST` um método que calcule o custo médio de uma busca *malsucedida* supondo uma função de hashing aleatória. (O custo da busca é o número de sondagens, ou seja, o número de posição visitadas da tabela de hash.) (Observação: Não é necessário calcular nenhum função de hash para resolver essa questão.) Use o código de LinearProbingHashST sem redimensionamento. Escreva um cliente `CustoSondagemLinear.java` que teste o novo método usando um gerador de números aleatórios. Use `VisualAccumulator` para fazer um gráfico de custos em função do número *N* de chaves. Superponha o gráfico com as previsões dadas na Proposição M.

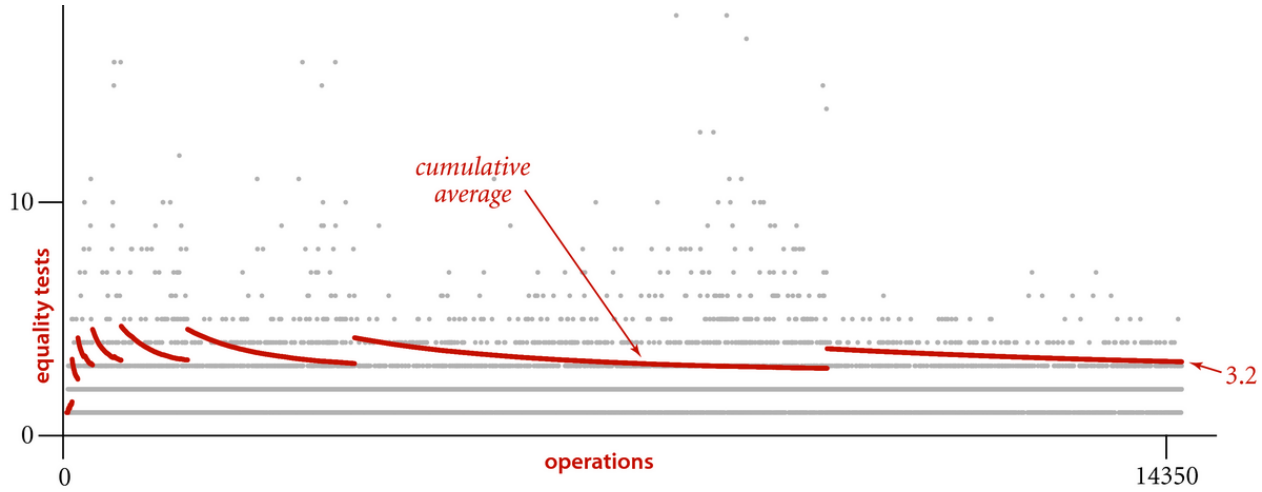
Redimensionamento da tabela de sondagem linear

- Na sondagem linear, é essencial que α fique bem abaixo de 1. Convém manter $\alpha \leq 1/2$ (ou seja, $N \leq M/2$).
- Para manter α sob controle, a tabela de hash deve ser redimensionada, quando necessário, no início de `put()`.
- Algoritmo 3.6, continuação: redimensionamento em **LinearProbingHashST**:

```
public void put(Key key, Value val) {
    if (N >= M/2) resize(2*M);
    . . .
    . . .
}

private void resize(int cap) {
    LinearProbingHashST<Key, Value> temp;
    temp = new LinearProbingHashST<Key, Value>(cap);
    for (int i = 0; i < M; i++) {
        if (keys[i] != null) {
            temp.put(keys[i], vals[i]);
        }
    }
    keys = temp.keys;
    vals = temp.vals;
    M    = temp.M;
}
```

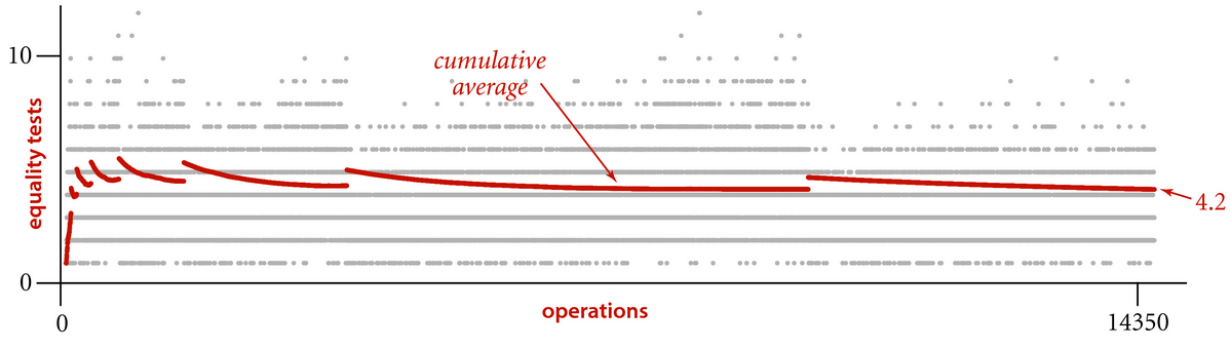
- Também é bom manter $\alpha > 1/8$, para evitar desperdício de espaço. Isso se faz com redimensionamento no fim de `delete()` quando necessário.
- Veja o código completo em algs4/LinearProbingHashST.java.
- A troca de `M` por `2*M` em `put()` vai contra o conselho de usar números primos como valores de `M`. Uma ideia melhor é usar uma tabela de primos para trocar `M` pelo primo imediatamente acima de `2*M`.

- A análise de desempenho do hashing com redimensionamento deve ser feita, necessariamente, em termos *amortizados*. A conclusão é previsível: o consumo de tempo esperado de qualquer sequência de T operações que começam com uma tabela vazia é proporcional a T.
- Exemplo: O livro aplicou `FrequencyCounter` com `LinearProbingHashST` com redimensionamento para examinar as palavras com 8 ou mais letras do livro `tale.txt`. O gráfico mostra o número de nós visitados (= número de comparações feitas) por cada chamada de `put()`. Os pontos vermelhos dão a média acumulada.



Costs for `java FrequencyCounter 8 < tale.txt` using `LinearProbingHashST` (with doubling)

- Redimensionamento também pode ser aplicado ao hashing com encadeamento, mas nesse caso o redimensionamento não é essencial.
- Exemplo: O livro aplicou `FrequencyCounter` com `SeparateChainingHashST` com redimensionamento para examinar as palavras com 8 ou mais letras do livro `tale.txt`. O gráfico mostra o número de nós visitados (= número de comparações feitas) por cada chamada de `put()`. Os pontos vermelhos dão a média acumulada.



Costs for `java FrequencyCounter 8 < tale.txt` using `SeparateChainingHashST` (with doubling)

Exercícios 6

1. Escreva uma versão de `SeparateChainingHashST` que faça redimensionamento da tabela de hash.
2. (SW 3.4.26) *Remoção preguiçosa sob sondagem linear*. Acrescente um método `delete()` à classe `LinearProbingHashST`. Para remover uma chave da tabela, o método deve atribuir `null` ao valor associado à chave e adiar a efetiva remoção da chave (e do valor associado) até o momento em que a tabela for redimensionada. (Observação: Você deve sobrescrever o valor `null` se uma operação `put()` subsequente associar um novo valor à chave.) O desafio é decidir quando `resize()` deve ser chamado. Para tomar a decisão de redimensionar, seu método deve levar em conta não só o número de posições vagas da tabela mas também o número de posições "mortas".

Perguntas e respostas

- PERGUNTA: Eu não deveria escrever "*n* mod *M*" para indicar o resto da divisão de *n* por *M*?
  RESPOSTA: É verdade. Essa é a notação tradicional em matemática. Mas eu prefiro escrever "*n* % *M*" porque é assim que se escreve em Java e C.
- PERGUNTA: Qual o valor `Math.abs(-2147483648)`?
  RESPOSTA: A resposta é `-2147483648`, por estranho que pareça. É o efeito do overflow em números do tipo `int`.
- PERGUNTA: Qual o resultado de `%` (resto da divisão) para números negativos?
  RESPOSTA: O quociente `a/b` é arredondado em direção a `0`. O resto `a % b` é definido de modo que `(a / b) * b + a % b` seja igual a `a`. Por exemplo, `-14/3` e `14/-3` valem `-4`, mas `-14 % 3` vale `-2` enquanto `14 % -3` vale `2`.
- PERGUNTA: Por que não implementar `hash(x)` simplesmente como `x.hashCode() % M`?
  RESPOSTA: Porque o resultado do operador `%` pode ser negativo!
- PERGUNTA: As funções de hashing da biblioteca Java satisfazem a hipótese do hashing uniforme?
  RESPOSTA: Não.

Quora: "If Hash Map has the search complexity of O(1) and B tree has O(Log n), why does the database index use B tree and not Hash Map?" Resposta de Michael Veksler.

---

www.ime.usp.br/~pf/estruturas-de-dados/
Atualizado em 2018-05-21
Paulo Feofiloff
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística da USP