ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΕ ΜΓΣ

Lyapunov Redesign
Sliding mode control

Lyapunov Redesign

ΜΓΣ - ΜΕΜΕ που έρχεται στην μορφή

$$\dot{x} = Ax + b\beta(x)[u - \alpha(x)] \quad x \in \Re^n \; u \in \Re$$

Μη γραμμικές συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x) \in \Re$

$$\beta(x) > 0 \;\; \forall x$$

Έλεγχος γραμμικοποίησης με ανάδραση

$$u = \alpha(x) + \beta(x)^{-1} v$$

v νέα είσοδος ελέγχου

ΣΚΒ $\quad \dot{x} = Ax + bv \quad$ Γραμμικό σύστημα

Είσοδος ελέγχου

$$v = F^T x$$

Γραμμική ανάδραση καταστάσεων για τοποθέτηση πόλων

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x$ όπου επιθυμητό $A + bF^T$ γ.α.ε

Πρόβλημα Επανασχεδίασης

Έλεγχος που να εξασφαλίζει γ.α.ε στο σύστημα με αβέβαιες μη γραμμικές συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x) \in \Re$

<u>Προσθετικές αβεβαιότητες</u>

$u = \bar{\alpha}(x) + \beta(x)^{-1} v$ όπου $\bar{\alpha}(x)$ εκτίμηση & $v = F^T x$

$\left|\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)\right| < \varepsilon \ \ \forall x$ όπου ε Γνωστό & όχι μικρό αναγκαστικά

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x + b\beta(x)\left[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)\right]$

Λύση

Επιπλέον σήμα ελέγχου $\boxed{u = \bar{\alpha}(x) + \beta(x)^{-1} F^T x + \delta v}$

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x + b\beta(x)\left[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x) + \delta v\right]$

$V = x^T P x$ $\left[A + bF^T\right]^T P + P\left[A + bF^T\right] = -I$

$$\dot{V} = -\left\|x\right\|^2 + 2x^T P b\beta(x)[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)] + 2x^T P b\beta(x)\delta v$$

$$\dot{V} \le -\left\|x\right\|^2 + 2\left|x^T P b\beta(x)\right|\varepsilon + 2x^T P b\beta(x)\delta v$$

Αν $\boxed{\delta v = -\varepsilon\, \mathrm{sign}[x^T P b\beta(x)]}$ τότε $\dot{V} \le -\left\|x\right\|^2$

Πολλαπλασιαστικές αβεβαιότητες

$$\dot{x} = Ax + b\beta(x)[u - \alpha(x)] \quad x \in \Re^n \ u \in \Re$$

Έστω

$$\left|\beta(x)\bar{\beta}^{-1}(x) - 1\right| < \varepsilon < 1 \ \forall x$$ όπου $\bar{\beta}(x)$ εκτίμηση

$$u = \alpha(x) + \bar{\beta}(x)^{-1}(v + \delta v) \qquad v = F^T x$$

ΣΚΒ $$\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x + b(\delta v + n(x))$$

όπου $n(x) = \left(\bar{\beta}(x)^{-1}\beta(x) - 1\right)(v + \delta v)$

Λύση $V = x^T P x$

$$\left[A + bF^T\right]^T P + P\left[A + bF^T\right] = -I$$

$$\dot{V} = -\|x\|^2 + 2x^T Pb[\delta v + n(x)]$$

$$\dot{V} \le -\|x\|^2 + 2x^T Pb\delta v + 2\left|x^T Pb\right|\left|n(x)\right|$$

Αν $\boxed{\left|n(x)\right| \le \rho(x)}$ $\quad \dot{V} \le -\|x\|^2 + 2x^T Pb\delta v + 2\left|x^T Pb\right|\rho(x)$

$\boxed{\delta v = -\rho(x)\,\mathrm{sign}[2x^T Pb]}$ τότε $\dot{V} \le -\|x\|^2$

Εύρεση του ρ(x) $\quad n(x) = \left(\bar{\beta}(x)^{-1}\beta(x) - 1\right)(v + \delta v)$

$$\left|n(x)\right| \le \varepsilon(\left|v\right| + \left|\delta v\right|) \le \varepsilon(\left|v\right| + \rho(x))$$

Εφόσον $\varepsilon < 1$ θέτω $\varepsilon(\left|v\right| + \rho(x)) \triangleq \rho(x)$

και λύνω ως προς $\rho(x)$

$$\boxed{\rho(x) = \frac{\varepsilon\left|v\right|}{(1-\varepsilon)}}$$

Έλεγχος ολίσθησης

Εστω ΜΓΣ ΜΕΜΕ

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \quad u \in R, \quad g(\mathbf{x}) > g_o > 0$$

Επιφάνεια ολίσθησης

Στόχος της σχεδίασης του u, ο περιορισμός της λύσης στο αμετάβλητο σύνολο

$$s \triangleq x_2 + \lambda x_1 = 0,$$

$$\lambda > 0$$

$x_2 = -\lambda x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\lambda x_1 \Rightarrow x_1 \to 0$ ανεξάρτητα από τις f(x), g(x)

Επομενως το σ.ι (0,0) δηλ η αρχη τον αξονων α.ε

Πως οδηγούμε την λύση στην s=0 και τη διατηρούμε εκεί?

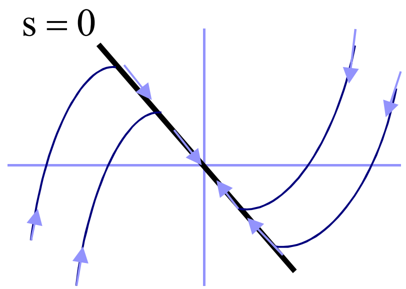
Έλεγχος ολίσθησης

Η δυναμική της επιφανειας ολίσθησης $\dot{s} = \lambda x_2 + f(x) + g(x)u$

Αρκει να επιλέξουμε την εισοδο ελεγχου u ετσι ωστε

$$V = \frac{1}{2}s^2 \Rightarrow \dot{V} = s\dot{s} \le -c'|s| \quad c' > 0$$

Συνθήκη ολίσθησης



Αν $$\left|\frac{\lambda x_2 + f(x)}{g(x)}\right| < n(x)$$

$$s\dot{s} \le |s|\, n(x) g(x) + s\, g(x) u$$

$$u = -\rho(x)\,\mathrm{sgn}(s)$$

$$\rho(x) = n(x) + c, \qquad c > 0$$

$$s\dot{s} \le |s|\, g(x)\big(n(x) - \rho(x)\big) \Rightarrow$$

$$s\dot{s} \le -c g_0 |s|$$

Έλεγχος ολίσθησης

- Αν $s(0) \neq 0$ η συνθήκη ολίσθησης (ΣΟ) εξασφαλίζει την συγκλιση στην *s* σε πεπερασμένο χρόνο

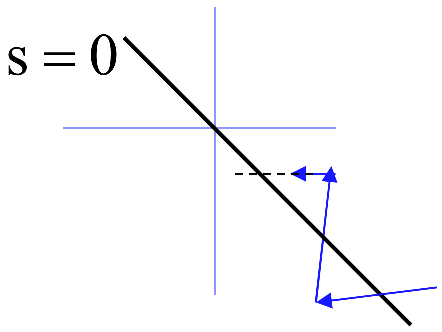
$$\boxed{t_r \leq \frac{|s(0)|}{c'}}$$

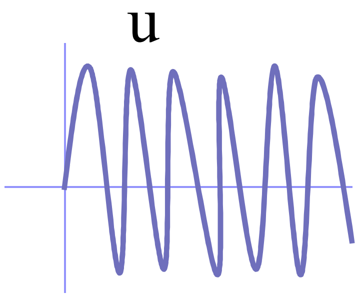
Εστω $s > 0$

$$s\dot{s} \leq -c'|s| \Rightarrow \dot{s} \leq -c' \Rightarrow \int_0^{t_r} \dot{s}\,dt \leq -c't_r \Rightarrow s(t)\Big|_0^{t_r} \leq -c't_r$$

$$\Rightarrow s(t_r) - s(0) \leq -c't_r \Rightarrow s(0) \geq c't_r \Rightarrow t_r \leq \frac{s(0)}{c'}$$

- Η ατελής υλοποίηση του διακόπτη στο u (διακόπτης με καθυστέρηση) δημιουργεί το ανεπιθύμητο φαινόμενο του *chattering*





Έλεγχος ολίσθησης

- Για να μειώσουμε το πλάτος του chattering χρησιμοποιούμε εκτιμήσεις των μ.γ $\hat{f}(x), \hat{g}(x)$ στην ισοδύναμη είσοδο ελέγχου u_{eq} από $\dot{s}=0$

$$\dot{s}=0 \Rightarrow u_{eq}=\frac{\lambda x_2+f(x)}{g(x)} \qquad \hat{u}_{eq}=\frac{\lambda x_2+\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

- Ο νόμος ελέγχου ώστε να επιτευχθεί **καθεστώς ολίσθησης** γίνεται

$$u=\hat{u}_{eq}-\rho(\mathbf{x})\operatorname{sgn}(s)$$

$$\dot{s}=\lambda x_2+f(x)+g(x)u=$$

$$=\left[\lambda\left(1-\frac{g(x)}{\hat{g}(x)}\right)x_2+f(x)-\frac{g(x)}{\hat{g}(x)}\hat{f}(x)\right]-g(x)\rho(x)\operatorname{sgn}(s)$$

$$=\delta(x)-g(x)\rho(x)\operatorname{sgn}(s)$$

- Αν $\left|\frac{\delta(x)}{g(x)}\right|\le n(x)$ μικρότερο από πριν και $\rho(x)=n(x)+c, \quad c>0$

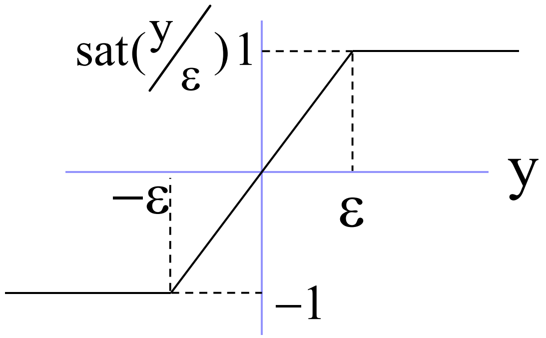
$$s\dot{s}\le|s|g(x)\big(n(x)-\rho(x)\big)\Rightarrow$$
$$s\dot{s}\le -cg_0|s|$$

Έλεγχος ολίσθησης

- Ο ασυνεχής όρος της u ομαλοποιείται με συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι η s φράσσεται από λεπτό οριακό στρώμα $|s(t)| < \varepsilon$

- Π.χ Συνάρτηση κορεσμού μεγάλης κλίσης (1/ε όπου ε μικρή θετική σταθερά)

$$\mathrm{sat}(y) = \begin{cases} y & y \le 1 \\ \mathrm{sgn}(y) & y > 1 \end{cases}$$



- Έξω από το οριακό στρώμα $|s(t)| > \varepsilon \qquad \dot{V} = s\dot{s} \le -c'|s|$

- Μέσα στο οριακό στρώμα $|s(t)| < \varepsilon \qquad V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1(s - \lambda x_1)$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 \le -\lambda x_1^2 + \varepsilon|x_1| \Rightarrow \dot{V}_1 \le -\lambda x_1^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda|x_1|}\right)$$

$$\dot{V}_1 \le -\lambda x_1^2(1-\theta) \quad 0 < \theta < 1 \quad \forall |x_1| \ge \varepsilon/\lambda\theta$$

$$x_1 \to \Omega_\varepsilon = \left\{|x_1| \le \varepsilon/\lambda\theta, |s| \le \varepsilon\right\}$$

Έλεγχος ολίσθησης-Παράδειγμα παρακολούθησης τροχιάς

- Έστω $\ddot{x}=f(x)+u$ $\quad \left|f(x)-\hat{f}(x)\right| \leq n(x)$ $\quad x_d(t) \in L_\infty$

  $x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$ $\quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1) + u\end{aligned}$ $\quad g(x) = 1 > 0$

- Ορίζουμε το σφάλμα παρακολούθησης $\quad e = x - x_d$
- Ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης $\quad s = \dot{e} + \lambda e$
- Επιλέγω ισοδύναμο νόμο ελέγχου $\quad \dot{s} = 0 \Rightarrow \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{e} = 0$

  $\hat{u}_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - \hat{f}(x)$ $\quad \Rightarrow u_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - f(x)$

- Νόμος ελέγχου $\quad u=\hat{u}_{eq}-\rho(x)\mathrm{sgn}(s)$ $\quad \ddot{e}+\lambda\dot{e}=f(x)-\hat{f}(x)-\rho(x)\mathrm{sgn}(s)$

  $s\dot{s} \leq (n(x)-\rho(x))\left|s\right|$

- Θέτω $\quad \rho(x) = n(x) + c, \quad c > 0$ $\quad s\dot{s} \leq -c\left|s\right|$

Εύρωστος Έλεγχος σε Τετράγωνα ΜΓΣ Συστήματα

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{u} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}, \quad \mathrm{G}(\mathbf{x}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{m\times m}} > 0$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \qquad \left\|\mathbf{f}\text{-}\hat{\mathbf{f}}\right\| \le D_f \qquad \underline{G} < \left\|\mathrm{G}(\mathbf{x})\right\| < \overline{G}$$

<u>Lyapunov Redesign</u>

$\left\|\mathbf{G}\widehat{\mathbf{G}}^{-1}\text{-}\mathrm{I}\right\| \le \mu < 1$ Αν $\widehat{\mathbf{G}} = (\underline{G} + \overline{G})\dfrac{\mathbf{I}}{2}$ $\left\|\mathbf{G}\widehat{\mathbf{G}}^{-1}\text{-}\mathrm{I}\right\| \le \dfrac{\overline{G} - \underline{G}}{\overline{G} + \underline{G}} < 1$

<u>Έλεγχος ολίσθησης</u> $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_m \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + \Lambda \mathbf{x}_1$ $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{eq}} \text{-} \rho(\mathbf{x})\mathrm{sgn}(\mathbf{s})$ $\dot{\mathbf{s}} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_{eq}$

Λ διαγώνιος

Αρκεί $\dot{\mathrm{V}} < 0$ όπου $\mathrm{V} = \dfrac{1}{2}\mathbf{s}^{\mathbf{T}}\mathbf{s}$ εναλλακτικά $\mathrm{V} = \dfrac{1}{2}\mathbf{s}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{s}$

Συνθηκες υπαρξης καθεστωτος ολισθησης-ΜΓΣ ΠΕΠΕ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u}, \mathbf{y} \in R^m$$

Επιφάνεια ολίσθησης $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_m \end{bmatrix}^T$ Αρκει $\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}} < 0$

Υπολογισμός του ισοδύναμου ελέγχου $\dot{\mathbf{s}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}\right] = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{eq}} = -\left[\dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{x})\right]^{-1} \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{a}(\mathbf{x})$

Σύστημα με φραγμένες αβεβαιότητες

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Delta a} + [\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Delta B}]\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{t})$$

Θεώρημα αμεταβλητότητας

Αν ισχύουν οι παρακατω συνθήκες αντιστοίχισης (matching conditions) το καθεστως ολίσθησης αποτελει αμετάβλητο συνολο και επομένως ειναι ανεξάρτητο απο τις αβεβαιότητες και τις διαταραχες.

$$\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{a}_1(\mathbf{x}), \quad \Delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{d}(\mathbf{t}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d}_1(\mathbf{t})$$

Απόδειξη αμεταβλητοτητας

$$\dot{\mathbf{s}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a} + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u} + \mathbf{d}\right] = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{B}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{d}_1)\right] + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{B}_1)\mathbf{u} = 0$$

$$\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{a}_1(\mathbf{x}),$$
$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\mathbf{x}),$$
$$\mathbf{d}(\mathbf{t}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d}_1(\mathbf{t})$$

Εστω μη ιδιαζων $\mathbf{I} + \mathbf{B}_1$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{eq}} = -(\mathbf{I} + \mathbf{B}_1)^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{d}_1)]$$

Αντικαθιστωντας στο συστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{a} + [\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{B}]\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{t})$$

Καταλήγουμε σε συστημα ανεξαρτητο των αβεβαιοτητων

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{a}(\mathbf{x})$$