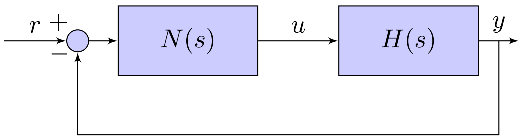
Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου III

Εργασία Μαθήματος 2024 - 2025

Τμήμα Α (0.5 Μονάδες)

Δίνεται το σύστημα ελέγχου του σχήματος:



όπου

$$H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \qquad K, T > 0$$

1. Θεωρείστε αρχικά ότι $N(s) = 1$.

   i . Να υπολογίσετε τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου, τις τιμές των ω_n και ζ, τη διαφορική εξίσωση του συστήματος ως προς το σφάλμα $e(t) = r(t) - y(t)$ και τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος θεωρώντας ως κατάσταση τις φασικές μεταβλητές του σφάλματος.

   ii . Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου του σφάλματος όταν η είσοδος είναι:

   α. Βηματική είσοδος πλάτους A.

   β. Είσοδος ράμπας κλίσης B.

   Να ερμηνεύσετε τις τιμές των σημείων ισορροπίας του σφάλματος και να σχολιάσετε την επίδραση των παραμέτρων K, T στη σύγκλιση και στα σημεία ισορροπίας του συστήματος.

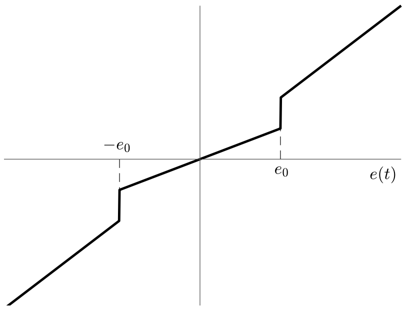
   iii . Θεωρείστε ότι $K = 5$, $T = 0.2$. Να προσομοιώσετε το σύστημα θέτοντας αρχικά βηματική είσοδο αναφοράς $r_u(t) = 0.5$ και στη συνέχεια είσοδο ράμπας $r_r(t) = 1.2t$. Να απεικονίσετε την απόκριση των δύο

Αριθμός Προσομοίωσης	**Αρχική Θέση**	**Αρχική Ταχύτητα**
1	$y(0) = -2$	$\dot{y}(0) = 0$
2	$y(0) = 1$	$\dot{y}(0) = 0$
3	$y(0) = 0$	$\dot{y}(0) = 0.5$
4	$y(0) = 2$	$\dot{y}(0) = 2$
5	$y(0) = 2.5$	$\dot{y}(0) = -1$
6	$y(0) = 1.1$	$\dot{y}(0) = 2$

Πίνακας 1: Αρχικές Συνθήκες Προσομοιώσεων

καταστάσεων στο χρόνο και στο φασικό επίπεδο καθώς και την απόκριση του y και της εισόδου αναφοράς σε κοινό διάγραμμα. Ως αρχικές τιμες των y, $\dot{y}$ να θεωρήσετε τις τιμές του πίνακα 1.

2. Θεωρείστε ότι η συνάρτηση $N(s)$ αποτελεί μια συνάρτησση μεταβλητού κέρδους, με κλίση α για τιμές σφάλματος $e(t)$ στο διάστημα $[-e_0, e_0]$ και 1 αλλού. Η χρονική έκφραση της συνάρτησης δίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Μη γραμμικική συνάρτηση

   i . Σχολιάστε τη συμπεριφορά λειτουργίας του συστήματος για $e(t) \in [-e_0, e_0]$ και για $|e(t)| > e_0$ βρίσκοντας τα ζ, ω_n σε κάθε περίπτωση. Να βρείτε τις νέες εξισώσεις κατάστασης του μη γραμμικού συστήματος σφάλματος θεωρώντας φασικές μεταβλητές.

   ii . Να υπολογίσετε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου του σφάλματος για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του συστήματος θεωρώντας:

      α. Βηματική είσοδο πλάτους A.

      β. Είσοδο ράμπας κλίσης B.

   iii . Θεωρείστε ότι $K = 5$, $T = 0.2$, $e_0 = 0.2$, $\alpha = 0.05$. Να προσομοιώσετε το σύστημα θέτοντας αρχικά βηματική είσοδο $r_u(t) = 0.5$ και στη συνέχεια εισόδους ράμπας $r_{r1}(t) = 1.2t$, $r_{r2}(t) = 0.04t$, $r_{r3}(t) = 0.5t$. Να απεικονίσετε την απόκριση των δύο καταστάσεων στο χρόνο και στο φασικό επίπεδο καθώς και την απόκριση του y και της εισόδου αναφοράς σε κοινό διάγραμμα. Ως αρχικές τιμες των y, $\dot{y}$ να θεωρήσετε τις τιμές του πίνακα 1. Να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα των προσομοιώσεών σας ως προς τη θεωρητική ανάλυση των προηγούμενων ερωτημάτων. Να συγκρίνετε την απόκριση του συστήματος με τα αποτελέσματα του ερωτήματος 1.

Τμήμα B (1.0 Μονάδα)

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + g(\boldsymbol{x}) + u(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα καταστάσεων, $u(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου, και $g(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία εν γένει άγνωστη μη γραμμική και παραγωγίσιμη συνάρτηση των καταστάσεων.

1. Έστω ότι η μορφή της μη γραμμικής συνάρτησης είναι γνωστή:

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 + \theta x_2^2, \qquad \theta = \frac{1}{2}$$

i . Αποδείξτε με την έμμεση μέθοδο Lyapunov ότι η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Βρείτε μια εκτίμηση του πεδίου έλξης χρησιμοποιώντας την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$ με $\boldsymbol{P}$ να είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov για το γραμμικοποιημένο σύστημα για $\boldsymbol{Q} = 0.2\boldsymbol{I}$. Προσομοιώστε το σύστημα για αρχικές τιμές $\boldsymbol{x}_1(0) = [0.1 \quad 0.1]^T$, $\boldsymbol{x}_2(0) = [0.4 \quad 0.4]^T$, $\boldsymbol{x}_3(0) = [0.8 \quad 0.8]^T$, $\boldsymbol{x}_4(0) = [-0.4 \quad 1]^T$, και απεικονίστε γραφικά την απόκριση του συστήματος στο χρόνο και στο επίπεδο κατάστασης σε ένα κοινό διάγραμμα με την εκτίμηση του πεδίου έλξης και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

ii . Σχεδιάστε ένα νόμο ελέγχου ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου να είναι γραμμικό και να έχει διπλή ιδιοτιμή στο $\lambda = -3$. Προσομοιώστε το σύστημα του κλειστού βρόγχου για αρχικές τιμές $\boldsymbol{x}_5(0) = [9 \quad 11]^T$, $\boldsymbol{x}_6(0) = [11 \quad 1]^T$ θεωρώντας ότι:

α. Ο νόμος ελέγχου χρησιμοποιεί την πραγματική τιμή της θ ($\theta = 0.5$)

β. Ο νόμος ελέγχου χρησιμοποιεί την τιμή $\theta = 1$ (διάφορη της πραγματικής).

Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

iii . Θεωρείστε ότι η παράμετρος θ είναι άγνωστη. Σχεδιάστε ένα νόμο εκτίμησης $\dot{\hat{\theta}}$ ο οποίος σε συνδιασμό με ελεγκτή της μορφής του προηγούμενου ερωτήματος, επιτυγχάνει τον στόχο ελέγχου, δηλαδή την γενική ασυμπτωτική σύγκλιση του $\boldsymbol{x}$ στο μηδέν και ότι όλα τα σήματα του συστήματος κλειστού βρόχου είναι φραγμένα. Χρησιμοποιείστε την συνάρτηση Lyapunov

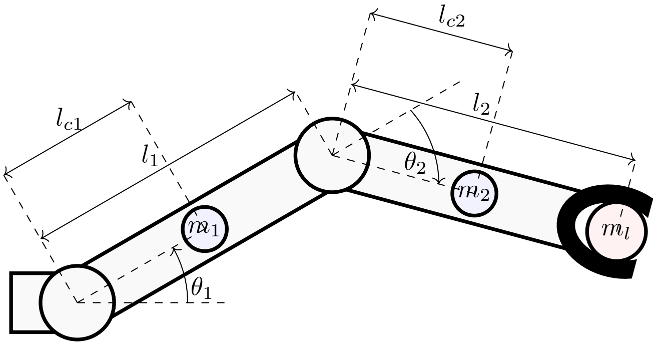
$$V = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} + \tilde{\theta}(t)^2$$

με $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ και $\boldsymbol{P}$ η λύση της εξίσωσης Lyapunov για το γραμμικό μέρος του συστήματος κλειστού βρόγχου για $\boldsymbol{Q} = diag([2, 4])$. Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες $V, \dot{V}$ μπορεί να αποδειχθεί η σύγκλιση των καταστάσεων στο μηδέν; Προσομοιώστε το σύστημα για αρχική τιμή $\boldsymbol{x}_6(0) = [11 \quad 1]^T$ και αρχική τιμή της εκτίμησης $\hat{\theta}(0) = 1$. Απεικονίστε τις χρονικές αποκρίσεις των καταστάσεων και της $\hat{\theta}$. Παρατηρείστε αν η παράμετρος $\hat{\theta}$ συγκλίνει στην πραγματική της τιμή και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

2. Έστω ότι δεν γνωρίζουμε την μορφή της μη γραμμικότητας $g(\boldsymbol{x})$, αλλά γνωρίζουμε μόνο ότι $|g(\boldsymbol{x})| \leq 2||\boldsymbol{x}||^2$. Σχεδιάστε την είσοδο ελέγχου u ώστε η αρχή των αξόνων στο σύστημα κλειστού βρόγχου να είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθής. Προσομοιώστε το σύστημα για τις αρχικές τιμές $\boldsymbol{x}_3(0) = [0.8 \quad 0.8]^T$, $\boldsymbol{x}_4(0) = [-0.4 \quad 1]^T$ και απεικονίστε γραφικά την απόκριση του συστήματος στο χρόνο και στο επίπεδο κατάστασης. Για την προσομοίωση και μόνο χρησιμοποιείστε την μορφή της $g(\boldsymbol{x})$ του πρώτου ερωτήματος.

Τμήμα Γ (1.0 Μονάδα)

Δίνεται ο ρομποτικός βραχίονας δύο περιστροφικών αρθρώσεων του σχήματος:



Με θ_i συμβολίζουμε τη γωνία περιστροφής της κάθε άρθρωσης, με l_i το μήκος του κάθε συνδέσμου, που έχει μάζα m_i η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του που απέχει l_{ci} από την προηγούμενη άρθρωση. Ο βραχίονας κρατάει στο άκρο του φορτίο μάζας m_l. Θεωρώντας το διάνυσμα $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^T$, ο βραχίονας μοντελοποιείται με την εξίσωση:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{u}$$

όπου $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ είναι ο 2×2 πίνακας αδράνειας του ρομπότ, ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, ο $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ αφορά δυνάμεις κεντρομώλους, και Κοριόλις δυνάμεις και το διάνυσμα $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ σχετίζεται με βαρυτικές δυνάμεις. Η είσοδος ελέγχου $\boldsymbol{u}$ είναι η ροπή που ασκούν οι κινητήρες των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα. Ο πίνακας $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Παράμετρος	Περιγραφή	Τιμή
m_1	Μάζα πρώτου συνδέσμου	$6kg$
m_2	Μάζα δεύτερου συνδέσμου	$4kg$
l_1	Μήκος πρώτου συνδέσμου	$0.5m$
l_2	Μήκος δεύτερου συνδέσμου	$0.4m$
g	Επιτάχυνση της βαρύτητας	$9.81m/s^2$

Πίνακας 2: Τιμές Γνωστών Παραμέτρων

Παράμετρος	Περιγραφή	Κάτω Όριο	Άνω Όριο
l_{c1}	Κέντρο μάζας πρώτου συνδέσμου	0.1	0.4
l_{c2}	Κέντρο μάζας δεύτερου συνδέσμου	0.05	0.3
I_1	Ροπή αδράνειας πρώτου συνδέσμου	0.02	0.5
I_2	Ροπή αδράνειας δεύτερου συνδέσμου	0.01	0.15
m_l	Μάζα φορτίου	0	2

Πίνακας 3: Όρια Άγνωστων Παραμέτρων

με

$$h_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1^2 + 2l_1 l_{c2}\cos q_2) + m_l(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) + I_1 + I_2$$
$$h_{12} = m_2 l_{c2}(l_{c2} + l_1 \cos q_2) + m_l l_2(l_2 + l_1 \cos q_2) + I_2$$
$$h_{22} = l_{c2}^2 m_2 + l_2^2 m_l + I_2$$

όπου I_1, I_2 οι ροπές αδρανείας κάθε συνδέσμου. Για τον πίνακα $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ έχουμε:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2)\sin q_2 \dot{q}_2 & -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2)\sin q_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_1) \\ l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2)\sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) + (m_2 l_1 + m_l l_1 + m_1 l_{c1}) g \cos q_1 \\ (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

όπου με g συμβολίζουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Οι τιμές των παραμέτρων m_1, m_2, l_1, l_2, g είναι γνωστές και δίνονται στον Πίνακα 2. Για τις υπόλοιπες γνωρίζουμε φράγματα που δίνονται στον Πίνακα 3. **Για τις προσομοιώσεις του συστήματος μόνο και όχι του ελεγκτή**, να χρησιμοποιήσετε τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων που δίνονται στον πίνακα 4.

Θεωρείστε αρχική τιμή των αρθρώσεων $\boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T$ και μηδενικές ταχύτητες.

Παράμετρος	Περιγραφή	Τιμή
l_{c1}	Κέντρο μάζας πρώτου συνδέσμου	$0.2m$
l_{c2}	Κέντρο μάζας δεύτερου συνδέσμου	$0.1m$
I_1	Ροπή αδράνειας πρώτου συνδέσμου	$0.43kgm^2$
I_2	Ροπή αδράνειας δεύτερου συνδέσμου	$0.05kgm^2$
m_l	Μάζα φορτίου	$0.5kg$

Πίνακας 4: Πραγματικές Τιμές Αγνώστων Παραμέτρων

1. Θεωρείστε ως επιθυμητή τιμή τη θέση $\boldsymbol{q}_d = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T$ και μηδενική τελική επιθυμητή ταχύτητα. Να σχεδιαστεί νόμος ελέγχου με την τεχνική ολίσθησης ώστε το σύστημα να συγκλίνει στην επιθυμητή θέση.

2. Θεωρείστε την επιθυμητή τροχιά:

$$\boldsymbol{q}_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sin 0.2\pi t \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\cos 0.2\pi t \end{bmatrix}$$

   Να σχεδιαστεί νόμος ελέγχου με την τεχνική ολίσθησης ώστε το σύστημα να ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά $\boldsymbol{q}_d(t)$.

Παραδοτέα:

- Αναφορά που θα περιέχει τη θεωρητική ανάλυση και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Σε όσα διαγράμματα περιέχονται στην αναφορά, να ονομάσετε τους άξονες και να σημειώσετε μονάδες μέτρησης. Η αναφορά να έχει εξώφυλλο στο οποίο θα αναγράφεται το ονοματεπώνυμο και το ΑΕΜ σας και να είναι σε μορφή αρχείου pdf. Η αναφορά πρέπει να είναι γραμμένη με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Κατά τη βαθμολόγηση της εργασίας λαμβάνεται υπόψιν μόνο ο,τι περιέχεται στην αναφορά.

- Κώδικας σε matlab με τις προσομοιώσεις κάθε ερωτήματος. Ο κώδικας πρέπει να παράγει τα σχετικά διαγράμματα που σχολιάζονται στην αναφορά. Μην συμπεριλάβετε τμήματα του κώδικα στην αναφορά σας.

Το σύνολο των παραδοτέων θα ανέβει στο e-learning ως ένα αρχείο zip που θα περιέχει την αναφορά, τα αρχεία της κάθε άσκησης και οποιοδήποτε επιπλέον αρχείο matlab υλοποιήσετε.

Υποδείξεις:

- Για τις προσομοιώσεις στο Τμήμα Α χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση ode45 του matlab με χρόνο προσομοίωσης $3s$. Για το δεύτερο ερώτημα να προσαρμόσετε το χρόνο προσομοίωσης όπου χρειάζεται.

- Για τις προσομοιώσεις στο Τμήμα Β χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση ode45 του matlab με χρόνο προσομοίωσης $10s$.

- Για τις προσομοιώσεις σας στο Τμήμα Γ χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση ode15s του matlab με χρόνο προσομοίωσης κατάλληλο με βάση τις σχεδιαστικές επιλογές που κάνατε για τις ελεύθερες παραμέτρους του ελεγκτή, ώστε να είναι διακριτά και τα μεταβατικά φαινόμενα και η παρακολούθηση της τροχιάς.

- Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας στους ελεγκτές σας στο Τμήμα Γ χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση κορεσμού (saturation function) αντί για τη συνάρτηση προσήμου στους όρους.

- Για να βελτιώσετε την ευκρίνεια των αποτελεσμάτων σας στις προσομοιώσεις σας χρησιμοποιήστε την επιλογή Refine της odeset του matlab.