ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΣ ΕΜΜΕΣΗ ΜΕΘΟΔΟΣ LYAPUNOV

Εφαρμογές σε
(α) μελέτες ευρωστίας
(β) γραμμικοποίησης & επανασχεδίασης ελέγχου

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ LYAPUNOV

- Εισαγωγή $\dot{x}(t) = Ax(t): \quad x_o \quad x_e = 0$

Διακριτές ιδιοτιμές

$$x(t) = Q\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & . & . \\ . & . & . \\ . & . & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Q^{-1} x_o$$

Μη διακριτές ιδιοτιμές

όρους $t^p e^{\lambda_i t}$

$$\dot{x}(t) = Ax(t): \quad x_o \quad x_e = 0$$

x_e ευσταθές

A ευσταθής

$$\Big\} \Leftrightarrow \{\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i\}$$

x_e γ.α.ε

A γ.α.ε

$$\Big\} \Leftrightarrow \{\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i\}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$$

Ευστάθεια ΓΣ κατά Lyapunov

- βοηθητική για γραμμικά συστήματα υψηλής τάξης
- η V(x) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για βελτίωση της απόκρισης του συστήματος
- βοηθητική για τα ΜΓΣ στην σχεδίαση καλύτερων ελεγκτών

Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov για Γραμμικά συστήματα

$\dot{x} = Ax: \quad x_o$

Για κάποιο $Q \in R^{nxn} \quad Q = Q^T > 0$

$\{x_e = \gamma\alpha\varepsilon\} \Leftrightarrow \exists$ { μοναδική λύση $P^T = P > 0$

της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA = -Q\}$

Απόδειξη

$$P^T = P > 0$$

$$V(x) = x^T P x$$

ορισμένη θετική & μη φραγμένη ακτινικά

$$\begin{bmatrix} Q = Q^T > 0 \\ P^T = P > 0 \\ A^T P + PA = -Q \end{bmatrix} \Rightarrow x_e = \gamma.\alpha.\varepsilon$$

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)] = \dot{x}^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t)$$

$$= [Ax(t)]^T P x(t) + x(t)^T P [Ax(t)] = x(t)^T [A^T P + PA] x(t)$$

$$\dot{V} = -x^T Q x \leq 0 \qquad Q > 0$$

$$\Rightarrow x_e = \gamma.\alpha.\varepsilon$$

$-\dot{V}$ ορισμένη Θετική

Διαδικασία διερεύνησης ευστάθειας ΓΣ

- Επιλέγουμε $Q^T = Q > 0$ επιλογή της $-\dot{V}(x) = x^T Q x$
- Βρίσκουμε $P^T = P$ που λύνει την $A^T P + PA = -Q$

  εύρεση της $V(x) = x^T P x$
- Ελέγχουμε άν $P > 0$

  ή βρίσκουμε συνθήκες που το εξασφαλίζουν

Παράδειγμα

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = Q = 2I > 0$$

$$A^T P + PA = -Q \Rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a_0 p_{12} = -2 \\ 2(p_{12} - a_1 p_{22}) = -2 \\ p_{11} - a_1 p_{12} - a_0 p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = \dfrac{1}{a_0} \\ p_{22} = \dfrac{1+a_0}{a_1 a_0} \\ p_{11} = \dfrac{a_1^2 + (1+a_0)a_0}{a_1 a_0} \end{cases}$$

Αναγκαίες συνθήκες $P > 0$

$$\begin{cases} p_{11} > 0 \\ p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1^2 + (1+a_0)a_0}{a_1 a_0} > 0 \\ \dfrac{\left(a_1^2 + (1+a_0)^2\right)a_0}{a_1^2 a_0^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_0 > 0 \end{cases}$$

Εναλλακτική διαδικασία

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$V(x) = x^T P x$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= p_1 x_1 \dot{x}_1 + p_2 x_2 \dot{x}_2 \\ &= p_1 x_1 x_2 + p_2 x_2 (-a_0 x_1 - a_1 x_2) \\ &= (p_1 - a_0 p_2) x_1 x_2 - p_2 a_1 x_2^2 = -x^T \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{p_1 - a_0 p_2}{2} \\ -\dfrac{p_1 - a_0 p_2}{2} & a_1 p_2 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

$$\dot{V}(x) \le 0 \quad \begin{cases} p_1 - a_0 p_2 = 0 \\ a_1 p_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{p_1}{p_2} > 0 \\ a_1 > 0 \end{cases}$$

$$-\dot{V}(x) = a_1 p_2 x_2^2$$

δεν είναι ορισμένη θετική

Θεώρημα LaSalle

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 \Rightarrow x_1 = 0$$

Ιδιότητες του πίνακα P

$$\dot{x} = Ax : \quad x_o$$

Έστω $Q^T = Q > 0$ και $j(x_o) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt$

Αν $P^T = P > 0$ μοναδική λύση της $A^T P + PA = -Q$

τότε (i) $j(x_o) = x_o^T P x_o$

(ii) $P = \int_0^\infty [e^{A^T t}] Q [e^{At}] dt > 0$

Απόδειξη

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)]dt = x(t)^T P x(t)\Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)]dt = -\int_0^\infty x(t)^T Q x(t)$$

$$-\int_0^\infty x(t)^T Q x(t) = x(t)^T P x(t)\Big|_0^\infty = x(\infty)^T P x(\infty) - x(0)^T P x(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x(t)^T Q x(t)dt = x_o^T P x_o \Rightarrow (i)$$

$$j(x_o) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t)dt \quad = \int_0^\infty [e^{At}x_o]^T Q[e^{At}x_o]dt = \int_0^\infty x_o^T [e^{At}]^T Q[e^{At}]x_o dt$$

$$x(t) = e^{At}x_o \qquad = x_o^T [\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt] x_o$$

$$\int_0^\infty x(t)^T Q x(t)dt = x_o^T P x_o > 0 \quad \forall x_0 \neq 0$$

$$P = \int_0^\infty [e^{A^T t}] Q [e^{At}] dt > 0$$

Ταχύτητα σύγκλισης

Έστω $V(x), \quad -\dot{V}(x)$ ορισμένες θετικές συναρτήσεις

$$\alpha = \min_x \left[\frac{-\dot{V}(x)}{V(x)} \right] \quad \text{ή} \quad -\alpha = \max_x \left[\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right]$$

για $x \neq 0$
$$\dot{V}(x) = \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} V(x) \leq -\alpha V(x)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x) \quad \Rightarrow V[x(t)] \leq V[x(0)] e^{-\alpha t}$$

Δείκτης ταχύτητας απόκρισης

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x) \qquad V[x(t)] \leq V[x(0)]e^{-\alpha t}$$

Μετά από χρόνο t_s $\quad V[x(0)]e^{-\alpha t_s}$

Η λύση θα περιοριστεί στην ισοσταθμική της V

α: δείκτης ταχύτητας απόκρισης

$$\alpha = \min_x \left[\frac{-\dot{V}(x)}{V(x)} \right]$$

Για ταχύτερο σύστημα θέλουμε όσο το δυνατόν πιο αρνητική $\dot{V}(x)$

Γραμμικά συστήματα
Δείκτης ταχύτητας απόκρισης

$$V(x) = x^T P x$$

$$-\dot{V}(x) = x^T Q x$$

$$\alpha = \min_x \left[\frac{-\dot{V}(x)}{V(x)} \right] = \min_x \left[\frac{x^T Q x}{x^T P x} \right] = \frac{\lambda_{min}(Q) \|x\|^2}{\lambda_{max}(P) \|x\|^2}$$

Δείκτης ταχύτητας απόκρισης

στα γραμμικά συστήματα

$$\alpha = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}$$

Εκθετική ευστάθεια των γ.α.ε ΓΣ

Αν $\dot{x} = Ax : \quad x_o$ A: γ.α.ε

$\exists$ πραγματικοί $c, \lambda > 0$

έτσι ώστε $\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \ \forall x_0$

Άρα $x_e=0$ Γενικά Εκθετικά Ευσταθές

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x)$$

$$V(0) \leq \lambda_{\max}(P)\|x_0\|^2$$

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)$$

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} > 0$$

$$V(x) \leq V(0)e^{-\alpha t} \Rightarrow$$

$$\|x\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|x_0\|e^{-\frac{1}{2}\alpha t}$$

Σχεδίαση Ελέγχου ΓΣ με Επιτάχυνση Σύγκλισης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t): \quad x(0)=x_o \qquad \text{A: γ.α.ε}$$

$$|u(t)| \le 1, \quad \forall t \qquad A^T P + PA = -Q \qquad P = P^T > 0$$

$$V[x] = x^T Px \qquad Q^T = Q > 0 \quad \pi\chi.\, Q = I$$

$$0 \le \lambda_{min} \|x(t)\|^2 \le x^T Px = V[x(t)] \Rightarrow 0 \le \|x(t)\|^2 \le \frac{V[x(t)]}{\lambda_{min}}$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t)$$

$$= [Ax + bu]^T Px(t) + x(t)^T P[Ax + bu]$$

$$= -x(t)^T Qx(t) + 2u(t)b^T Px(t)$$

$$u(t) = -\mathrm{sign}[b^T x(t)]$$

$$|u(t)| \le 1, \quad \forall t$$

$$\dot{V}(x) = -x(t)^T Q x(t) + 2u(t) b^T P x(t)$$

$$= -x(t)^T Q x(t) - 2\left|b^T P x(t)\right|$$

$$\le -x(t)^T Q x(t) \le 0$$

$-\mathring{V}[x] \ge x^T Q x \Rightarrow -\mathring{V}$ ορισμένη θετική $\quad G_r, \forall r > 0$

Αρα X_e=0 γ.α.ε

Γραμμικά Χρονικά Μεταβαλλόμενα

$$\dot{x} = A(t)x : \quad x_o \quad x \in \Re^n$$

αν $A(t)$ γ.α.ε $\forall t \geq 0 \not\Rightarrow$ $x_e = 0$ γ.α.ε

Π.χ $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ $\lambda_{1,2} = -1 \ \forall t$

$$x_2 = x_2(0)e^{-t}$$

$$\dot{x}_1 + x_1 = x_2(0)e^{t}$$

Θεώρημα για ΓΧΜΣ

$$\dot{x} = A(t)x : \quad x_o$$

Αν $\quad \exists \quad P^T = P > 0 \ \ (P \in R^{nxn})$

$$\lambda_{min}\left[Q(t)\right] \geq \lambda > 0 \quad \forall t \geq 0$$

όπου $\quad -Q(t) = A^T(t)P + PA(t)$

τότε $\quad x_e = 0 \quad$ γενικά εκθετικά ευσταθές

Απόδειξη

$$V(x,t) = x^T P x, \quad P^T = P > 0$$

$$\dot{V} = x^T \left(A^T(t)P + PA(t) \right) x$$

$$-\dot{V} = x^T \left[-\left(A^T(t)P + PA(t) \right) \right] x \ \square \ x^T Q(t) x$$

Από την συνθήκη του θεωρήματος

$$-\dot{V} = x^T Q(t) x \geq \lambda_{min}(Q(t)) \|x\|^2 \geq \lambda \|x\|^2$$ Ορ.θετ.

άρα $x_e = 0$ γ.α.ε

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda \|x\|^2 \Rightarrow \dot{V}(x) \leq -\lambda V(x)$$ για $P = I$

$$V(x) \leq V(0) e^{-\lambda t} \Rightarrow \|x\| \leq \|x_0\| e^{-\frac{1}{2}\lambda t}$$ $x_e = 0$ γ.ε.ε

Άλλα θεωρήματα- $\dot{x} = A(t)x : \quad x_o$ Συνθήκες για την γ.ε.ε του σ.ι $x_e=0$

$$\exists\, \lambda > 0, \quad \forall i, \quad \forall t \geq 0 \quad \lambda_i\left(A(t) + A^T(t)\right) < -\lambda$$

$$\exists\, \lambda > 0, \quad \forall i, \quad \forall t \geq 0 \quad \lambda_i\left(A(t)\right) < -\lambda$$

& $A(t)$ φραγμένος και $\int_0^\infty A^T(t)A(t)dt < \infty$

Γραμμικά Συστήματα με διαταραχή

$\dot{x} = \left[A_1 + A_2(t)\right]x : \quad x_o \quad A_1$:γ.α.ε , $\quad A_2(t)$ συνεχής

$A_2(t) \to 0 \quad t \to \infty$ Ή $\int_0^\infty \left\|A_2(t)\right\| dt < \infty$

Εμμεση μέθοδος Lyapunov

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] : x(t_o) = x_o \quad x_e = 0$$

- Γραμμικοποίηση γύρω από το x_e=0 $\quad \dot{x} = f_x[0]x$

$$\dot{x} = f_x[0]x + (f[x] - f_x[0]x)$$

- Η Ιακωβιανή της f

$$f_x[0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1[0]}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_1[0]}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n[0]}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_n[0]}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα έμμεσης μεθόδου

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] : x(t_o) = x_o \quad x_e = 0$$

Αν $f_x[0] = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\exists \alpha,\ \beta > 0$

έτσι ώστε $\|f[x] - f_x[0]x\| \leq \beta \|x\|^2, \ \forall x \in G_\alpha$ τότε

αν $f_x[0] =$ γ.α.ε τότε x_e ασυμπτωτικά ευσταθές

$\exists i \ \ \omega\sigma\tau\varepsilon \ \ \mathrm{Re}[\lambda_i(f_x[0])] > 0$ τότε x_e ασταθές

$\exists i \ \ \omega\sigma\tau\varepsilon \ \ \mathrm{Re}[\lambda_i(f_x[0])] = 0$ τότε $\nexists$ συμπέρασμα

Απόδειξη

- $$\dot{x} = f_x[0]x + (f[x] - f_x[0]x)$$

Αν $f_x[0] =$ γ.α.ε $\exists P^T = P > 0 \quad f_x[0]^T P + Pf_x[0] = -I$

- $V = x^T P x$ ορισμένη θετική στο $G_r \quad \forall r > 0$

- $$\dot{V}(x) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) =$$

$$= x^T \left(f_x[0]^T P + Pf_x[0] \right) x + 2x^T P \left(f_x[x] - f_x[0]x \right)$$

$$= -\|x\|^2 + 2x^T P \left[f_x[x] - f_x[0]x \right]$$

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 + 2x^T P\left(f_x[x] - f_x[0]x\right)$$

$$\leq -\|x\|^2 + 2\|x\|\,\|P\|\,\beta\|x\|^2 \quad \forall x \in G_\alpha$$

$$\overset{\circ}{V}[x] \leq -\|x\|^2\left[1 - 2\|x\|\,\|P\|\beta\right] \quad \forall x \in G_\alpha \quad (x \in G_\alpha \Rightarrow \|x\| \leq \alpha)$$

αν $\quad \left[1 - 2\|x\|\,\|P\|\beta\right] > \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \|x\| < \dfrac{1-\varepsilon}{2\|P\|\beta}$

$$0 < \gamma < \min\left[\alpha\ ,\ \frac{1-\varepsilon}{2\|P\|\beta}\right]$$

τότε $\quad \dot{V}[x] \leq -\varepsilon\|x\|^2 \quad \forall x \in G_\gamma \qquad -\dot{V}[x]$ Ορ. θετική

Παράδειγμα

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2$$

$$f_x[0] = \begin{bmatrix} -1+x_2 & 1+x_1 \\ -1 & 2x_2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_x[0] = \gamma.\alpha.\varepsilon$$

Άρα x_e=α.ε

$$\|f[x] - f_x[0]x\| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \right\| = \left(x_1^2 x_2^2 + x_2^4\right)^{1/2} = |x_2|\|x\| \le \|x\|^2, \quad \forall x \in \Re^2$$

$$\alpha = \infty \qquad \beta = 1 \qquad 0 < \gamma \le \frac{1-\varepsilon}{2\|P\|}$$

έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \qquad \|P\| = \lambda_{max}(P) \cong 1.81$$

$$\gamma = 0.137$$

Γραμμικοποίηση

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\dot{x} = f_x[0,0]x + f_u[0,0]u, \quad x \in \Re^n, \quad u \in \Re^m$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A = f_x[0,0] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\u=0}} \qquad B = f_u[0,0] = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{x=0\\u=0}}$$

$$f_x[0,0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=0\\u=0}}$$

$$f_u[0,0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & . & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & . & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=0\\u=0}}$$

Γραμμικός έλεγχος

$$u = Fx$$

Άρα γρ. ΣΚΒ

$$\boxed{\dot{x} = (A + BF)x}$$

Ή γραμμικοποίηση
Μ.Γ ΣΚΒ

Μη Γραμμικός έλεγχος

$$u = u(x)$$

Γραμμικοποίηση νόμου ελέγχου

$$u = u_x(0)x, \quad u_x(0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}$$

$$\dot{x} = f\left(x, u(x)\right) \square \ f_1(x)$$

$$\boxed{\dot{x} = f_{1x}(0)x} \qquad f_{1x}(0) = A + BF$$

Παράδειγμα

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_2^5 - (x_1^2 + 1)u$$

$$f_x[0,0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 u & -20x_2^4 \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \sin x_1 + x_1^3 + x_2 \cos^2 x_1$$

$$u_x(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_u[0,0] = \begin{bmatrix} 0 \\ -(x_1^2 + 1) \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = u_x(0)x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -u$$

$$\dot{x} = \big[f_x[0,0] + f_u[0,0]u_x(0)\big]x$$

$$f_x[0,0] + f_u[0,0]u_x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Γραμμικός Έλεγχος ΜΓΣ με ασταθές σημείο ισορροπίας

$$\dot{x} = f[x,u]$$

$$f_x[0,0] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\u=0}}$$

$$\exists i \quad \omega\sigma\tau\varepsilon\, \mathrm{Re}[\lambda_i(f_x[0,0])] > 0$$

X_e=0 ασταθές

Σχεδίαση γρ. ελέγχου $u = Fx$

Έτσι ώστε $\left[f_x[0,0] + f_u[0,0]F\right]$ γ.α.ε

$$\dot{x} = \left[f_x[0,0] + f_u[0,0]F\right]x$$

Οπότε στο ΜΓΣ $\dot{x} = f[x, u = Fx]$

X_e=0 ασυμπτωτικά ευσταθές

Παράδειγμα $\dot{x} = f[x,u]$

$$f[x,u] = \begin{bmatrix} -x_1^2 + x_2 + x_2^2 \\ x_1^2 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$f_x[0,0] = \begin{bmatrix} -2x_1 & 1+2x_2 \\ 2x_1 + 2 + u & x_2 - 1 + u \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left| f_x[0,0] - \lambda I \right| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

$f_x[0,0]$ ασταθής

$$\left[f_x[0,0] + f_u[0,0]F \right]$$

$? u = Fx$ ώστε $\left[f_x[0,0] + f_u[0,0]F\right]$ γ.α.ε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + F_1 & -1 + F_2 \end{bmatrix}$$

Επιθυμητό Χαρ.Πολυώνυμο $(\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$$\left[f_x[0,0] + f_u[0,0]F\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 = -4 \\ F_2 = -2 \end{Bmatrix}$$

Αρα $u(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Εφαρμογές-Μελέτη ευρωστίας

$$\dot{x} = \bar{A}x + bu, \quad x \in \Re^n, \quad u, y \in \Re$$

$$y = c^T x$$

$$u = \bar{k}y, \quad \bar{k} \in \Re$$

Γραμμικό σύστημα ΜΕΜΕ
με ανάδραση εξόδου

ΣΚΒ $\dot{x} = \left[\bar{A} + \bar{k}bc^T\right]x$ γ.α.ε

$\bar{A}$ Ονομαστική δυναμική

Αβεβαιότητες/
Σφάλματα μοντέλου

$A_\gamma = \bar{A} + \gamma E$
$\gamma \in \Re$

γE διαταραχές δυναμικής

Πρόβλημα Ευρωστίας

$\dot{x} = \left[A_\gamma + \bar{k}bc^T\right]x$

Είναι γ.α.ε για μια περιοχή του γ??

Λύση $\dot{x} = \left[A_\gamma + \bar{k}bc^T\right]x = \left[\left(\bar{A} + \bar{k}bc^T\right) + \gamma E\right]x$

Εφόσον $\bar{A} + \bar{k}bc^T$ γ.α.ε Επιλέγω $V = x^T P x$

όπου $$\left[\bar{A} + \bar{k}bc^T\right]^T P + P\left[\bar{A} + \bar{k}bc^T\right] = -I$$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V} = -\|x\|^2 + 2\gamma x^T E^T P x \le -\|x\|^2 + 2|\gamma|\,\|x\|^2\,\|E^T P\|$$

$$\dot{V} \le -\|x\|^2\left(1 - 2|\gamma|\|E^T P\|\right)$$ $-\dot{V}$ ορ. θετική αν

Περιοχή του γ που εξασφαλίζει γ.α.ε στο σύστημα με διαταραχή γE $|\gamma| < \dfrac{1}{2\|E^T P\|}$

Γραμμικοποίηση & επανασχεδίαση

ΜΓΣ εδώ ΜΕΜΕ που έρχεται στην μορφή

$$\dot{x} = Ax + b\beta(x)[u - \alpha(x)] \quad x \in \Re^n \; u \in \Re$$

Μη γραμμικές συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x) \in \Re$

$$\beta(x) \neq 0 \;\; \forall x$$

Έλεγχος γραμμικοποίησης με ανάδραση

$$u = \alpha(x) + \beta(x)^{-1} v$$

v νέα είσοδος ελέγχου

ΣΚΒ $\dot{x} = Ax + bv$ Γραμμικό σύστημα

Είσοδος ελέγχου

$$v = F^T x$$

Γραμμική ανάδραση καταστάσεων για τοποθέτηση πόλων

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x$ όπου επιθυμητό $A + bF^T$ γ.α.ε

Πρόβλημα Επανασχεδίασης

Έλεγχος που να εξασφαλίζει γ.α.ε στο σύστημα με αβέβαιες μη γραμμικές συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x) \in \Re$

$u = \bar{\alpha}(x) + \beta(x)^{-1} v$ όπου $\bar{\alpha}(x)$ εκτίμηση & $v = F^T x$

$\left|\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x$ όπου ε Γνωστό & όχι μικρό αναγκαστικά

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x + b\beta(x)\left[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)\right]$

Λύση

Επιπλέον σήμα ελέγχου $u = \bar{\alpha}(x) + \beta(x)^{-1} F^T x + \delta(t)$

ΣΚΒ $\dot{x} = \left(A + bF^T\right)x + b\beta(x)\left[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x) + \delta\right]$

$V = x^T P x$ $\left[A + bF^T\right]^T P + P\left[A + bF^T\right] = -I$

$$\dot{V} = -\|x\|^2 + 2x^T Pb\beta(x)[\bar{\alpha}(x) - \alpha(x)] + 2x^T Pb\beta(x)\delta$$

$$\dot{V} \le -\|x\|^2 + 2\left|x^T Pb\beta(x)\right|\varepsilon + 2x^T Pb\beta(x)\delta$$

Αν $\delta = -\varepsilon\, \mathrm{sign}[x^T Pb\beta(x)]$ τότε $\dot{V} \le -\|x\|^2$