

# Εργασία Εξαμήνου στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου III

Χατζηκύρκα Ελισάβετ 10792  
[elischat@ece.auth.gr](mailto:elischat@ece.auth.gr)

19 Ιανουαρίου 2025

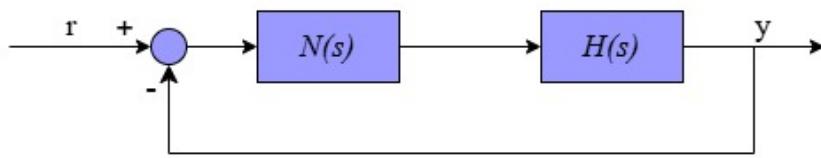
# Περιεχόμενα

<b>1 ΤΜΗΜΑ Α</b>	<b>2</b>
1.1 Θέμα 1 . . . . .	2
1.1.1 Ερώτημα i . . . . .	3
1.1.2 Ερώτημα ii . . . . .	4
1.1.3 Ερώτημα iii . . . . .	5
1.2 Θέμα 2 . . . . .	9
1.2.1 Ερώτημα i . . . . .	9
1.2.2 Ερώτημα ii . . . . .	11
1.2.3 Ερώτημα iii . . . . .	11
<b>2 ΤΜΗΜΑ Β</b>	<b>20</b>
2.1 Θέμα 1 . . . . .	20
2.1.1 Ερώτημα i . . . . .	20
2.1.2 Ερώτημα ii . . . . .	25
2.1.3 Ερώτημα iii . . . . .	28
2.2 Θέμα 2 . . . . .	30
<b>3 ΤΜΗΜΑ Γ</b>	<b>32</b>
3.1 Θέμα 1 . . . . .	32
3.2 Θέμα 2 . . . . .	36

# Κεφάλαιο 1

## ΤΜΗΜΑ Α

Στο Τμήμα Α της εργασίας επικεντρωνόμαστε στη μελέτη του παρακάτω συστήματος 1.1 για δύο διαφορετικές περιπτώσεις  $N(s)$ . Περιλαμβάνεται η θεωρητική ανάλυση των ζητουμένων, συνοδευόμενη από διαγράμματα προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν με βάση τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Τα διαγράμματα αποτελούν τη βάση για τα συμπεράσματα και τις παρατηρήσεις που παρουσιάζονται στην αναφορά.



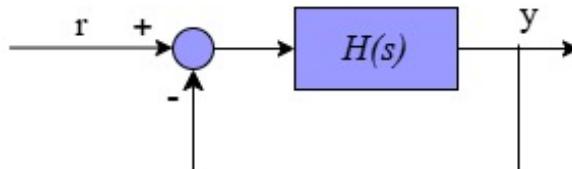
Σχήμα 1.1: Αρχικό Διάγραμμα Συστήματος προς μελέτη

όπου

$$H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}, \quad K, T > 0$$

### 1.1 Θέμα 1

Αρχικά, θεωρούμε πως  $N(1) = 1$ . Οπότε, τώρα το σύστημα προς μελέτη αναπαρίσταται στο 1.2.



Σχήμα 1.2: Σύστημα Θέματος 1

### 1.1.1 Ερώτημα i

Για το σύστημα **Κλειστού Βρόχου** ισχυεί:

$$H_{cl}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$$

Οπότε, θα έχουμε

$$H_{cl}(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$$

**Χαρακτηριστική Εξίσωση ΣΚΒ** Καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση για το σύστημα κλειστού βρόχου:

$$p_d(s) = s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} \quad (1)$$

Θυμόμαστε πως η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος κλειστού βρόχου 2ου βαθμού γράφεται ως:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2)$$

**Απόκριση & Χρόνος Αποκατάστασης** Αντιπαραθέτοντας τις (1) και (2), καταλήγουμε:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K}{T}, \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} \end{cases} \quad (1.1)$$

**Διαφορική Εξίσωση** Για την διαφορική εξίσωση του συστήματος ως προς το  $e(t) = r(t) - y(t)$ , από το 1.2 έχουμε

$$Y(s) = E(s) \cdot H(s) \implies H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία προκύπτει

$$Y(s) \cdot (s^2 + \frac{1}{T}s) = \frac{K}{T}E(s) \implies Y(s)s^2 + \frac{1}{T}sY(s) = \frac{K}{T}E(s) \quad (1.2)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, βρίσκουμε την διαφορική σε σχέση με την έξοδο  $y$ :

$$\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} = \frac{K}{T}e$$

Τώρα, για να την βρούμε σε σχέση με την είσοδο αναφοράς  $r$ , γνωρίζουμε πως  $e = r - y \implies y = r - e$ . Αντικαθιστώντας, προκύπτει

$$\ddot{r} - \ddot{e} + \frac{1}{T}(\dot{r} - \dot{e}) = \frac{K}{T}e \implies \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} = \ddot{e} + \frac{1}{T}\dot{e} + \frac{K}{T}e$$

**Εξισώσεις Κατάστασης** Θεωρούμε ως φασικές μεταβλητές τις καταστάσεις του σφάλματος, οπότε

$$\begin{aligned} x_1 &= e \\ x_2 &= \dot{e} = \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Οπότε, τώρα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} - \frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Ερώτημα ii

**Σημεία Ισορροπίας ΣΚΒ του σφάλματος**

- Για είσοδο **Βηματική Πλάτους A**:  $r(t) = A \cdot u(t)$

Θα έχουμε  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , και γι' αυτό

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1\end{aligned}\tag{1.5}$$

Οπότε, για τα σημεία ισορροπίας:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}\tag{1.6}$$

Άρα, έχουμε  $(0, 0)$  μοναδικό σημείο ισορροπίας σφάλματος.

- Για είσοδο **Ράμπας κλήσης B**:  $r(t) = B \cdot t \cdot u(t)$

Θα έχουμε  $\ddot{r} = 0$ ,  $\dot{r} = B$ , και γι' αυτό

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 + \frac{B}{T}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Οπότε, για τα σημεία ισορροπίας:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = \frac{B}{K} \end{cases}\tag{1.8}$$

Άρα, έχουμε  $(\frac{B}{K}, 0)$  μοναδικό σημείο ισορροπίας για ορισμένα  $B$ ,  $K > 0$

**Ερμηνεία τιμών ΣΙ & Επίδραση Κ, Τ στη σύγκλιση και στα ΣΙ** Έχουμε καταλήξει στο σύστημα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} = 0$$

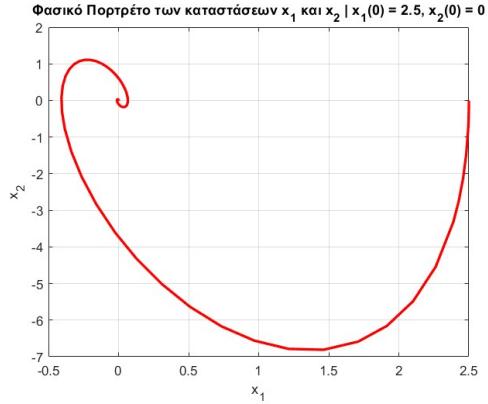
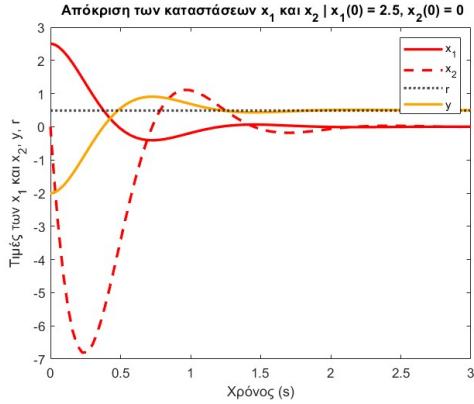
Από το κριτήριο Routh-Kurwitz συμπεραίνουμε πως για  $K, T > 0$  έχουμε **ασυμπτωτική ευστάθεια**. Άρα, το σύστημα θα συγκλίνει στα σημεία ισορροπίας και στις δύο περιπτώσεις εισόδου. Ειδικά, για την βηματική είσοδο θα συγκλίνει σε μηδενικό σφάλμα, αφού  $(0, 0)$  είναι σημείο ισορροπίας. Αντίστοιχα, για την είσοδο ράμπας, παρατηρούμε πως η παράμετρος  $K$  επηρεάζει την  $y_{ss}$  αφού  $(0, B/K)$  σημείο ισορροπίας. Επίσης, συμπεραίνουμε πως:

- Οι παράμετροι  $K, T$  επηρεάζουν την υπερύψωση  $\zeta$  και το  $\omega_n$
- Για την βηματική είσοδο, οι παράμετροι  $K, T$  δεν έχουν καμία επίδραση στα ΣΙ, άλλα επηρεάζουν τον χρόνο σύγκλισης.
- Για την είσοδο ράμπας, η παράμετρος  $K$  επιδρά στο ΣΙ και συγκεκριμένα στην θέση σφάλματος.

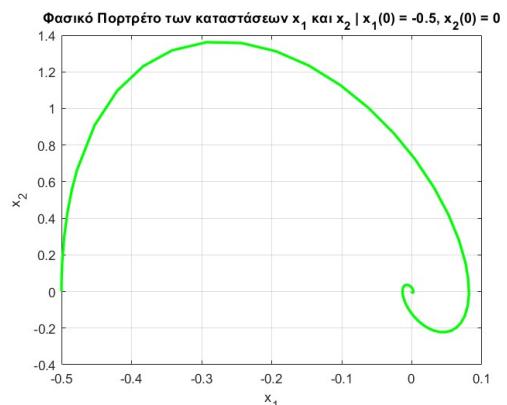
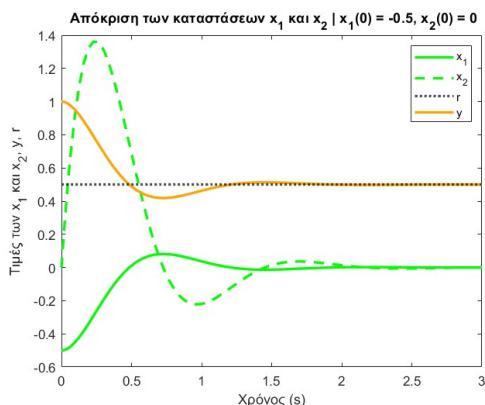
### 1.1.3 Ερώτημα iii

Τώρα, θεωρούμε  $K = 5$ ,  $T = 0.2$ . Στη συνέχεια, παραθέτουμε τα διαγράμματα των προσομοιώσεων του συστήματος όπως αυτά ζητούνται από την εκφώνηση της άσκησης.

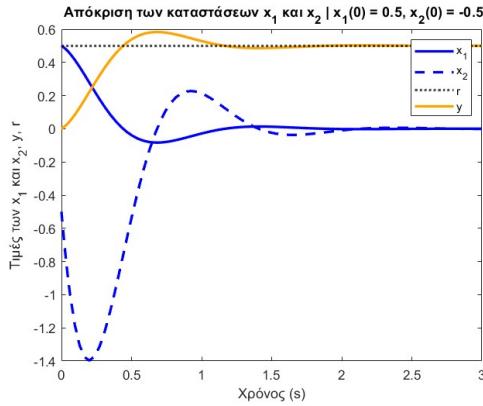
**Βηματική**  $r_u(t) = 0.5$  Διαγράμματα 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 απόκρισης των 2 καταστάσεων  $x_1$  και  $x_2$  στον χρόνο (δεξιά) και στο φασικό επίπεδο (αριστερά) για τα 6 διαφορετικά σημεία εκκίνησης. Στα δεξιά διαγράμματα αποτυπώνονται επίσης και η απόκριση της εισόδου  $r$  και της εξόδου  $y$  για τα 6 διαφορετικά αρχικά σημεία, όπως ζητείται στην εκφώνηση.



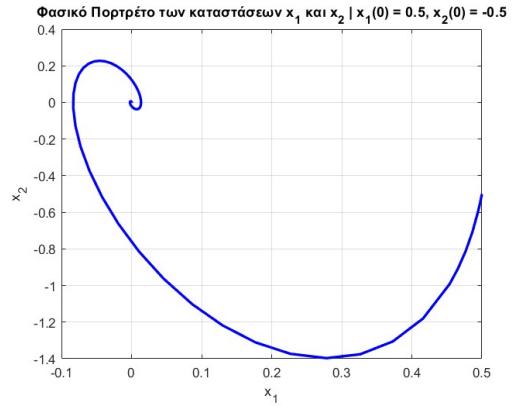
$$\Sigma \chi\text{ήμα 1.3: } y(0) = -2, \dot{y}(0) = 0$$



$$\Sigma \chi\text{ήμα 1.4: } y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$$

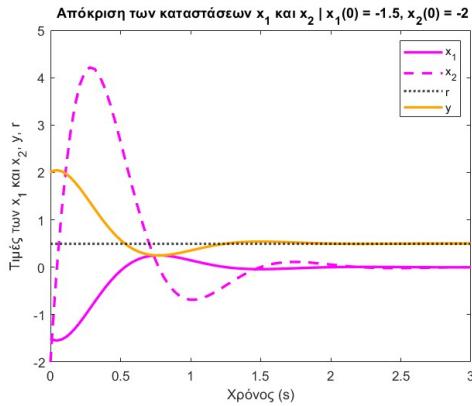


( $\alpha'$ )

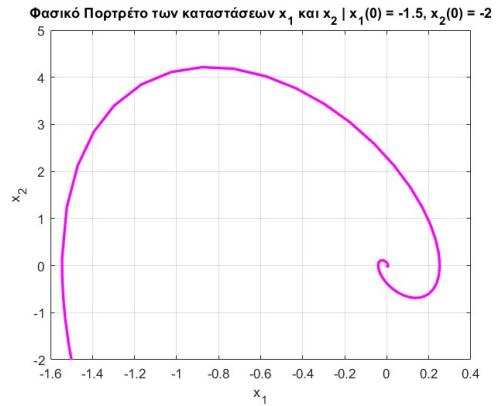


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi \dot{\eta} \mu \alpha 1.5: y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.5$$

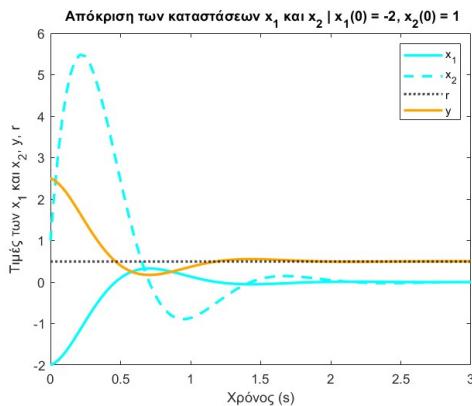


( $\alpha'$ )

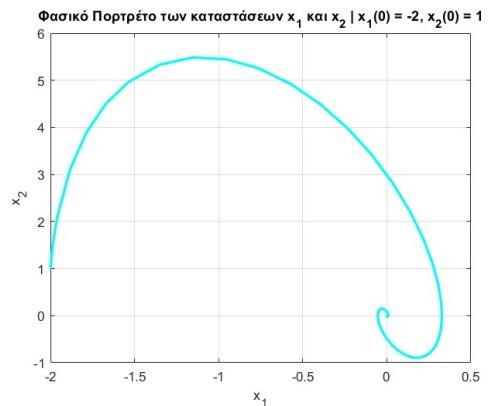


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi \dot{\eta} \mu \alpha 1.6: y(0) = 2, \dot{y}(0) = 2$$

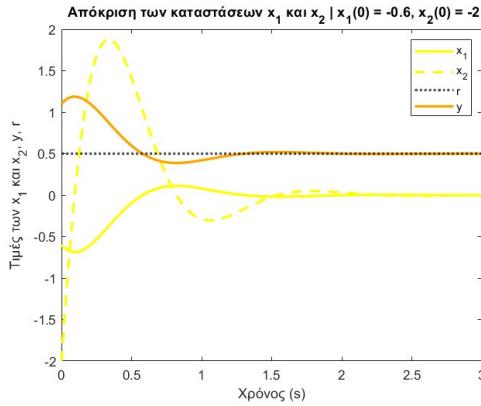


( $\alpha'$ )

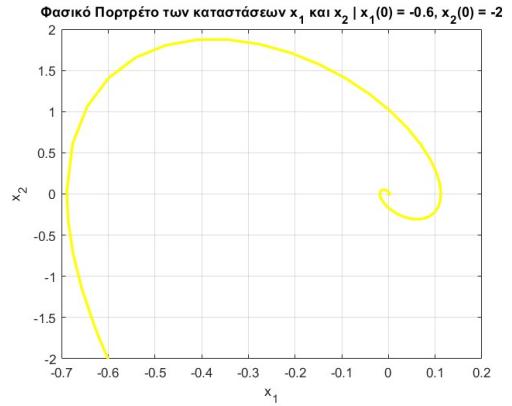


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi \dot{\eta} \mu \alpha 1.7: y(0) = 2.5, \dot{y}(0) = -1$$



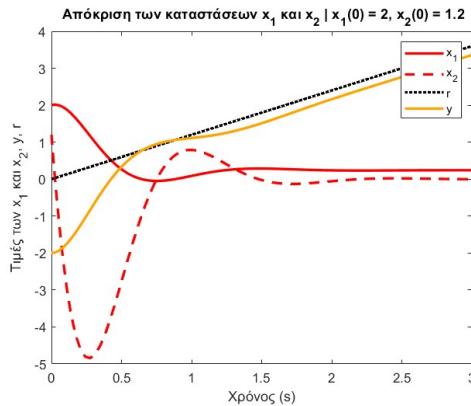
(α')



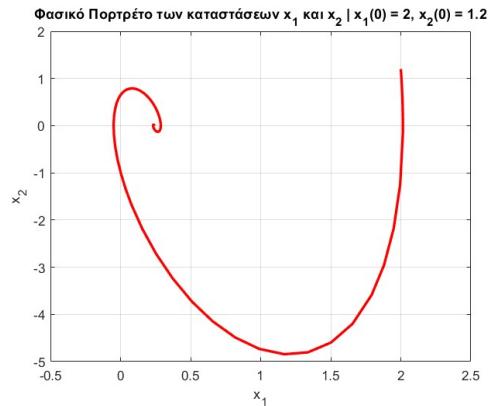
(β')

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.8: y(0) = 1.1, \dot{y}(0) = 2$$

**Είσοδος Ράμπας**  $r_r(t) = 1.2t$  Διαγράμματα 1.9 1.10 1.11 1.12 1.13 1.14 απόκρισης των 2 καταστάσεων  $x_1$  και  $x_2$ , της εισόδου  $r$  και της εξόδου  $y$  για τα 6 διαφορετικά αρχικά σημεία.

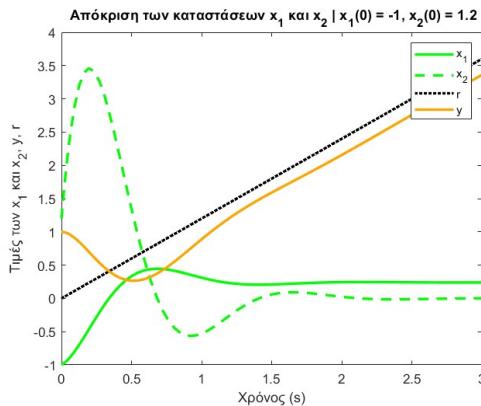


(α')

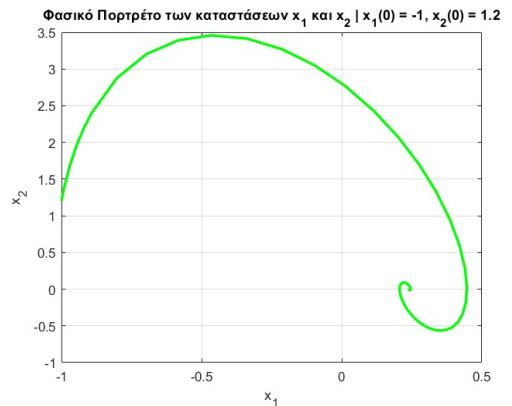


(β')

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.9: y(0) = -2, \dot{y}(0) = 0$$

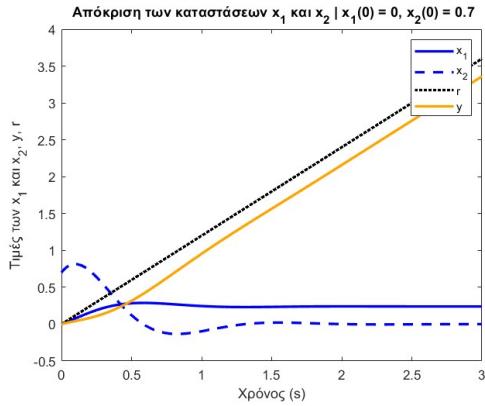


(α') Enter Caption for fig2

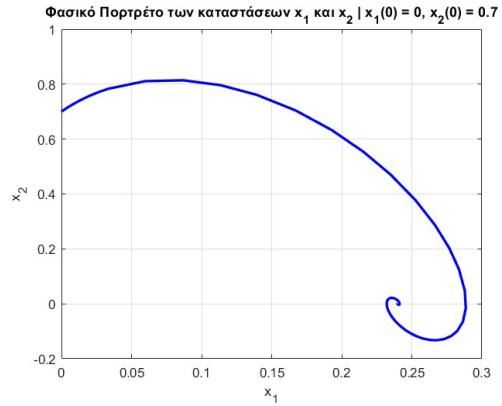


(β') Enter Caption for phase 2

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.10: y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$$

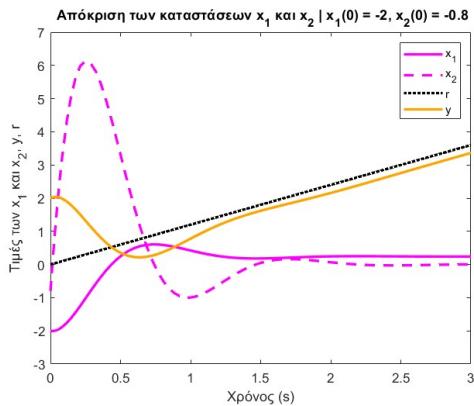


(α') Enter Caption for fig3

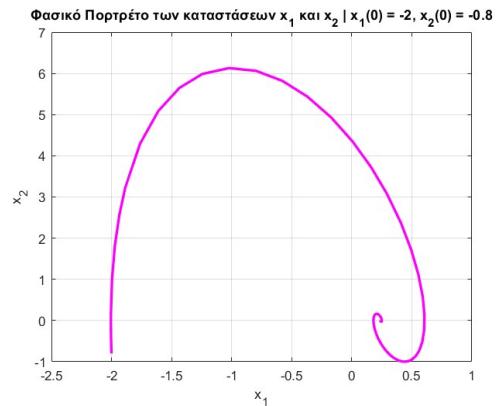


(β') Enter Caption for phase 3

$$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 1.11: y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.5$$

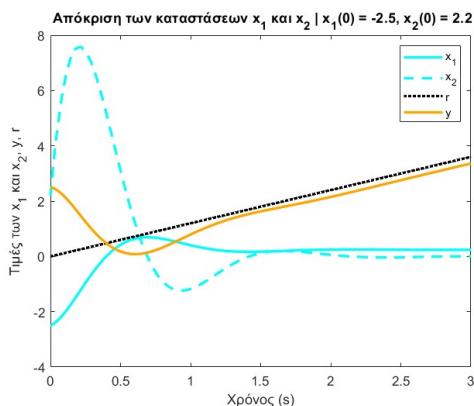


(α') Enter Caption for fig4

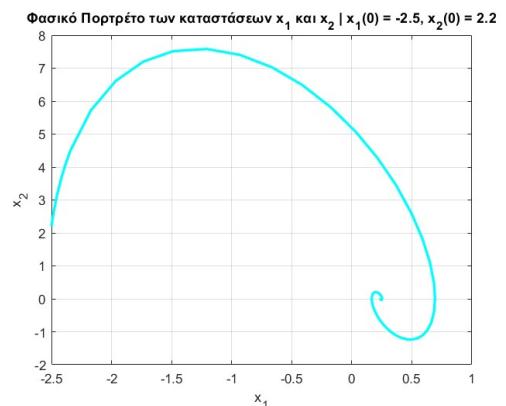


(β') Enter Caption for phase 4

$$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 1.12: y(0) = 2, \dot{y}(0) = 2$$

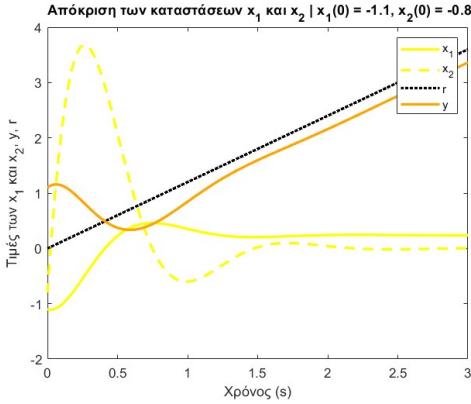


(α') Enter Caption for fig5

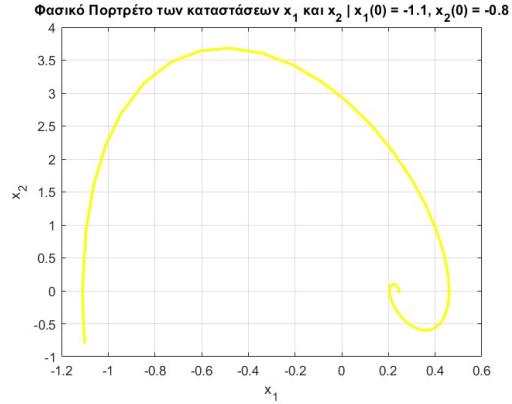


(β') Enter Caption for phase 5

$$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 1.13: y(0) = 2.5, \dot{y}(0) = -1$$



(α') Enter Caption for fig6



(β') Enter Caption for phase 6

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.14: y(0) = 1.1, y'(0) = 2$$

**Παρατηρήσεις στις Προσομοιώσεις** Όπως προβλέψαμε,

- Για την βηματική είσοδο, για κάθε σημείο εκκίνησης, παρατηρούμε ασυμπτωτική σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας και στην τιμή της εξόδου.
- Για την είσοδο ράμπας, για κάθε σημείο εκκίνησης, η απόκριση προσεγγίζει την έξοδο με ένα αναμενόμενο σταθερό σφάλμα, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για το σημείο ισορροπίας.

## 1.2 Θέμα 2

Τώρα, θεωρούμε πως η  $N(s)$  αποτελεί συνάρτηση μεταβλητού κέρδους με κλίση  $a$  για  $e \in [-e_0, e_0]$  και 1 αλλού. Οπότε, θα ισχυεί:

$$N(e) = \begin{cases} a \cdot e, & -e_0 < e < e_0 \\ 1 \cdot e, & \text{else} \end{cases} \quad (1.9)$$

Οπότε από το block διάγραμμα 1.1 έχουμε:

$$u = N(e) = \begin{cases} a \cdot e, & -e_0 < e < e_0 \\ e, & \text{else} \end{cases} \quad (1.10)$$

### 1.2.1 Ερώτημα i

Αρχικά, ακολουθούμε παρόμοια μεθοδολογία με το Θέμα 1. Από το παραπάνω block Διάγραμμα έχουμε:

$$Y(s) = U(s) \cdot H(s) \implies H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία προκύπτει

$$Y(s) \cdot (s^2 + \frac{1}{T}s) = \frac{K}{T}U(s) \implies Y(s)s^2 + \frac{1}{T}sY(s) = \frac{K}{T}U(s) \quad (1.11)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, βρίσκουμε την διαφορική σε σχέση με την έξοδο  $y$ :

$$\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} = \frac{K}{T}u$$

- **Για**  $e \in (-\infty, -e_0)$  ( $e_0, +\infty$ ) : Θα είναι  $u = e$ , αφού  $N(s) = 1$ , και άρα η μαθηματική ανάλυση συμπίπτει με αυτήν του θέματος 1 για γραμμικό σύστημα.
- **Για**  $e \in [-e_0, e_0]$  : Θα είναι  $u = a \cdot e = a(r - y)$ , αφού  $N(s) = a$ , και άρα θα έχουμε

$$\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} + \frac{aK}{T}y = \frac{aK}{T}r$$

Οπότε, προκύπτει χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου:

$$p_{cl} = s^2 + \frac{1}{T}s + a \cdot \frac{K}{T}$$

Οπότε, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = a \cdot \frac{K}{T}, \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_{n_a} = \sqrt{\frac{a \cdot K}{T}}, \\ \zeta_a = \frac{1}{2\sqrt{a \cdot T K}} \end{cases} \quad (1.12)$$

**Σύγκριση απόσβεσης και  $\omega_n$**  Από την γραφική παράσταση της εκφώνησης παρατηρούμε πώς  $a < 1$ . Άρα, αντίστοιχα θα ισχύει

$$\omega_{n_a} < \omega_n \quad \& \quad \zeta_a < \zeta$$

Επομένως, συμπεραίνουμε πως για περιορισμένο σφάλμα πετυχαίνουμε πιο ομαλή απόκριση με πιο σταθερό σύστημα, άλλα ταυτόχρονα πιο αργή σύγκλιση. Αντίθετα, για μεγαλύτερα σφάλματα έχουμε πιο γρήγορη απόκριση άλλα ευαίσθητη σε ταλαντώσεις.

### Νέες Εξισώσεις Κατάστασης

$$\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} = \frac{K}{T}u, \quad y = r - e$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} - \frac{K}{T}u = \ddot{e} + \frac{1}{T}\dot{e}$$

Έστω φασικές μεταβλητές  $x_1 = e$ ,  $x_2 = \dot{e} = \dot{x}_1$ . Τώρα, το σύστημα θα είναι :

- **Για**  $e \in [-e_0, e_0]$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} - \frac{1}{T}x_2 - a \cdot \frac{K}{T}x_1 \end{aligned}$$

- **Για**  $e \in (-\infty, -e_0)$  ( $e_0, +\infty$ ) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} - \frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 \end{aligned}$$

### 1.2.2 Ερώτημα ii

**Σημεία Ισορροπίας για Βηματική Είσοδο**  $r(t) = A \cdot u(t)$

Θα έχουμε  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , και γι' αυτό

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Άρα, έχουμε  $(0, 0)$  μοναδικό σημείο ισορροπίας σφάλματος **και στα 2 διαστήματα του e.**

**Σημεία Ισορροπίας για Είσοδο Ράμπας**  $r(t) = B \cdot t \cdot u(t)$

Θα έχουμε  $\ddot{r} = 0$ ,  $\dot{r} = B$ , και γι' αυτό

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = \frac{B}{a \cdot K} \end{cases}, e \in [-e_0, e_0] \quad (1.14)$$

Και

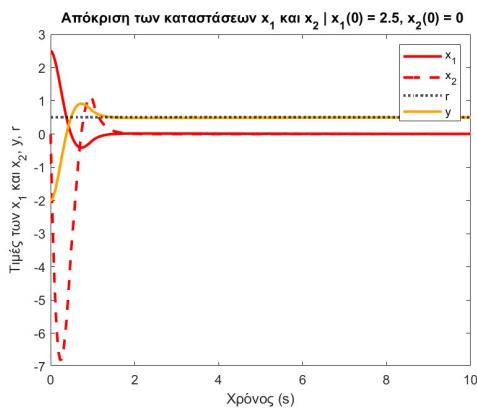
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = \frac{B}{K} \end{cases}, e \in \text{anywhere else} \quad (1.15)$$

Άρα, έχουμε  $(\frac{B}{a \cdot K}, 0)$  μοναδικό σημείο ισορροπίας για ορισμένα  $B$ ,  $K > 0$ , αν  $e \in [-e_0, e_0]$  και αντίστοιχα έχουμε  $(\frac{B}{K}, 0)$  μοναδικό σημείο ισορροπίας, αν το  $e$  ανήκει οπουδήποτε αλλού.

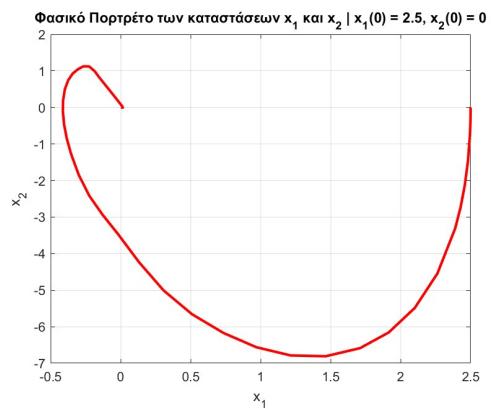
### 1.2.3 Ερώτημα iii

Τώρα, θεωρούμε  $K = 5$ ,  $T = 0.2$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $a = 0.05$

**Βηματική**  $r_u(t) = 0.5$  Παρακάτω τα διαγράμματα όπως ζητήθηκαν στην εκφώνηση, ακολουθώντας παρόμοια δομή με τα πορηγούμενα. Παρατηρούμε

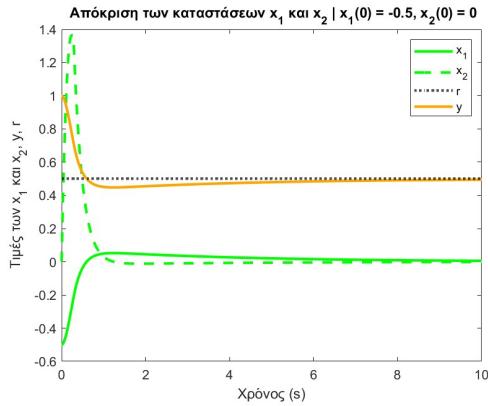


(α')

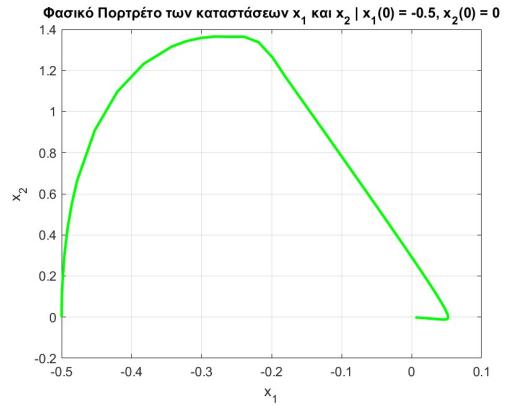


(β')

Σχήμα 1.15:  $y(0) = -2$ ,  $\dot{y}(0) = 0$

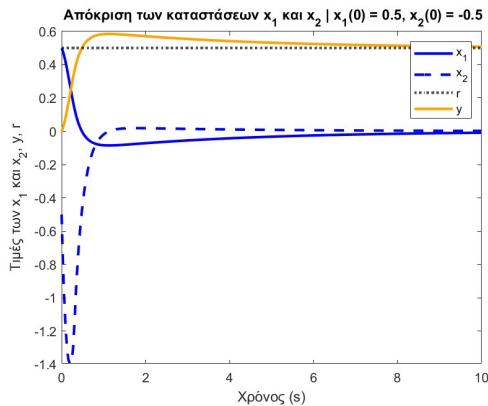


( $\alpha'$ )

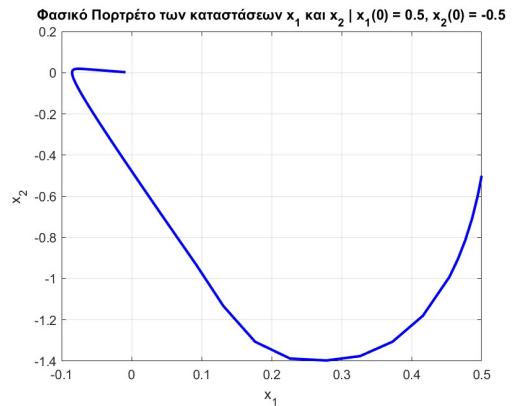


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\acute{\mu}\alpha 1.16: y(0) = 1, y'(0) = 0$$

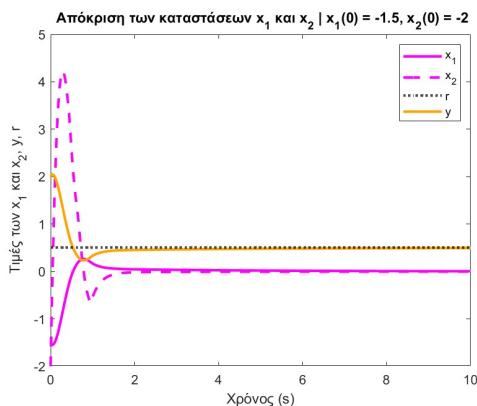


( $\alpha'$ )

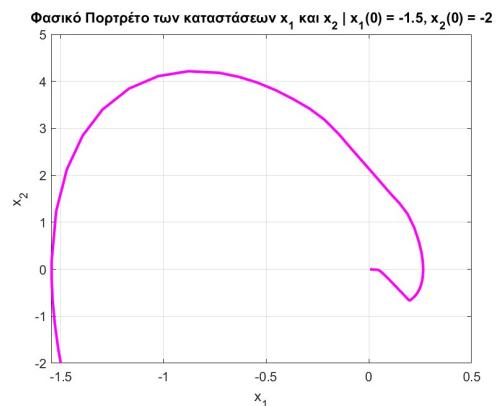


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\acute{\mu}\alpha 1.17: y(0) = 0, y'(0) = 0.5$$

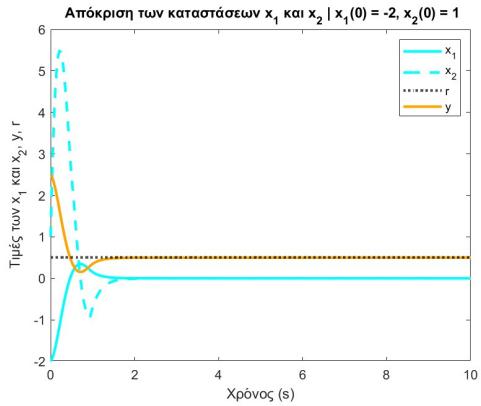


( $\alpha'$ )

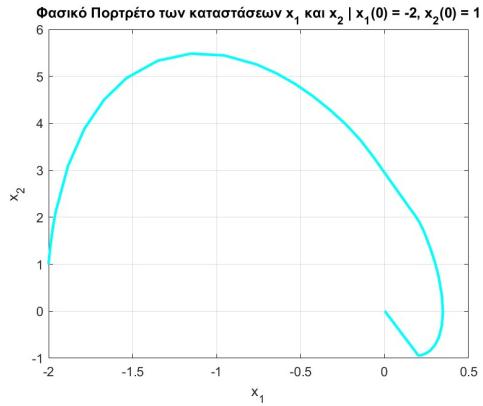


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\acute{\mu}\alpha 1.18: y(0) = 2, y'(0) = 2$$

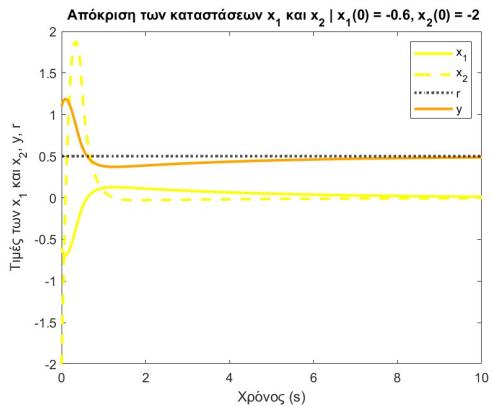


( $\alpha'$ )

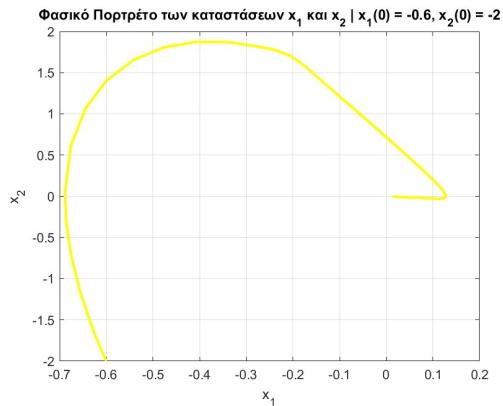


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.19: y(0) = 2.5, \dot{y}(0) = -1$$



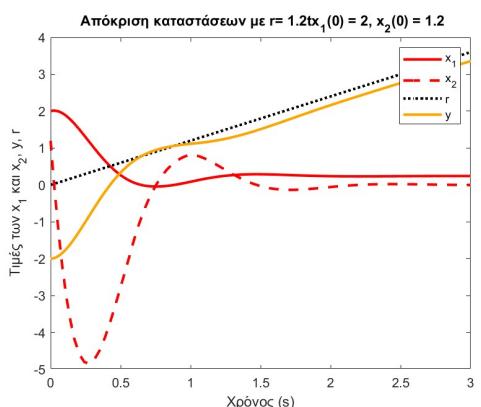
( $\alpha'$ )



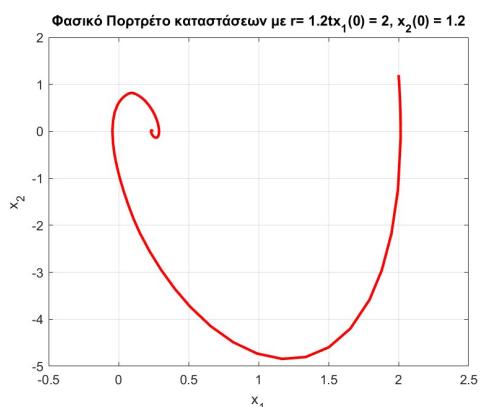
( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.20: y(0) = 1.1, \dot{y}(0) = 2$$

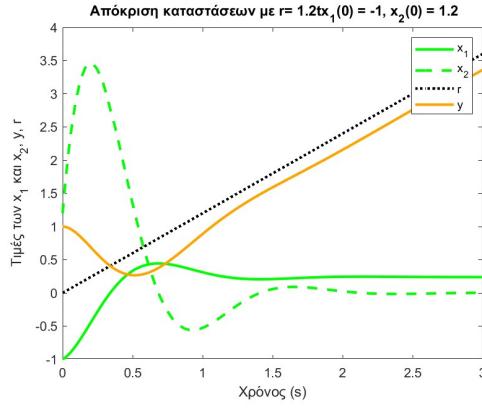
**Ράμπα**  $r_r(t) = 1.2t$  Διαγράμματα σύμφωνα με την εκφώνηση. Παρατηρούμε



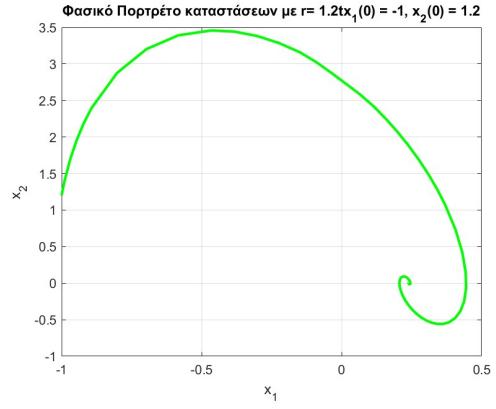
( $\alpha'$ )



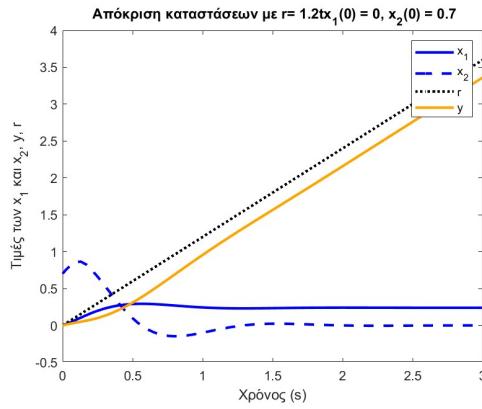
( $\beta'$ )



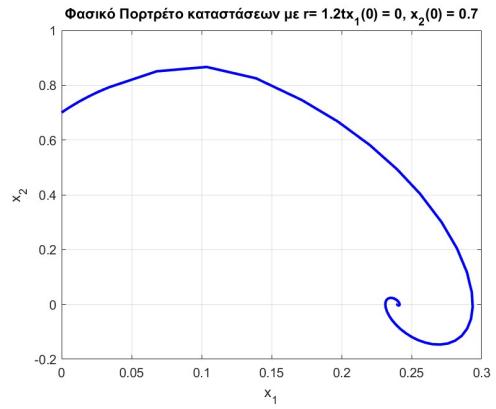
( $\alpha'$ )



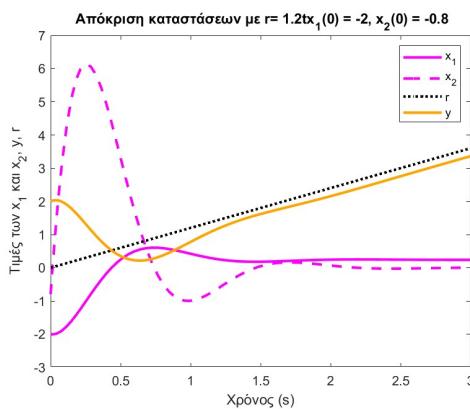
( $\beta'$ )



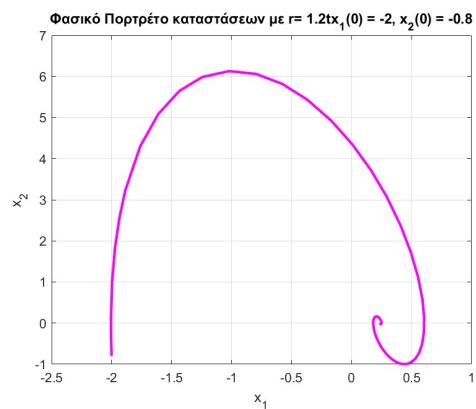
( $\alpha'$ )



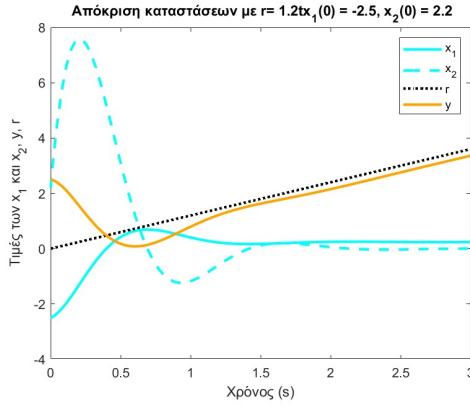
( $\beta'$ )



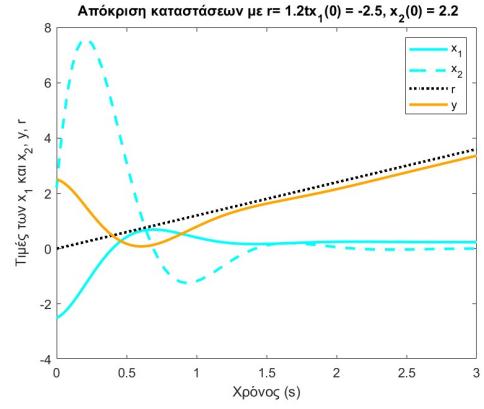
( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )

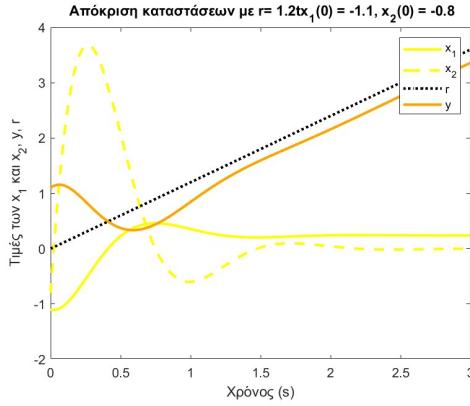


( $\alpha'$ )

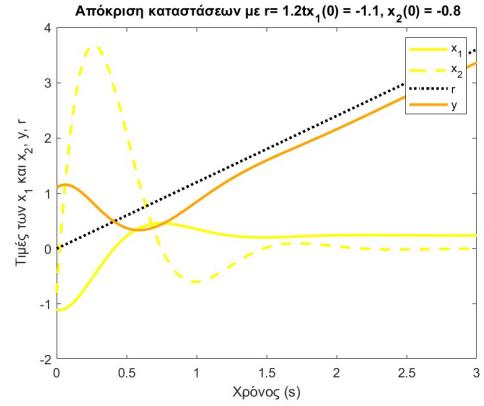


( $\beta'$ )

$\Sigma\chi\text{ήμα } 1.25$

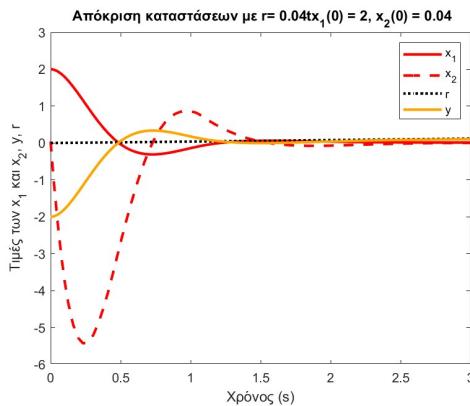


( $\alpha'$ )

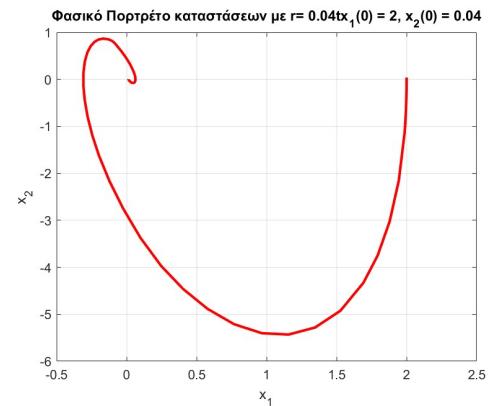


( $\beta'$ )

**Ράμπα**  $r_r(t) = 0.04t$  Διαγράμματα σύμφωνα με την εκφώνηση. Παρατηρούμε

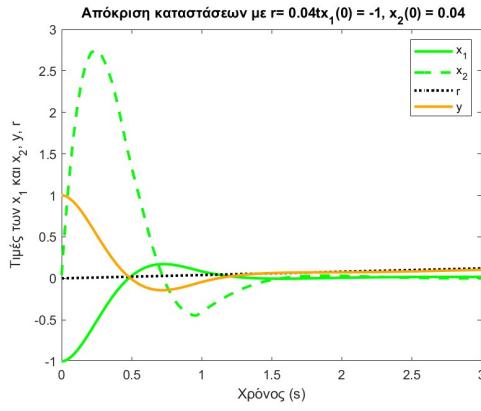


( $\alpha'$ )

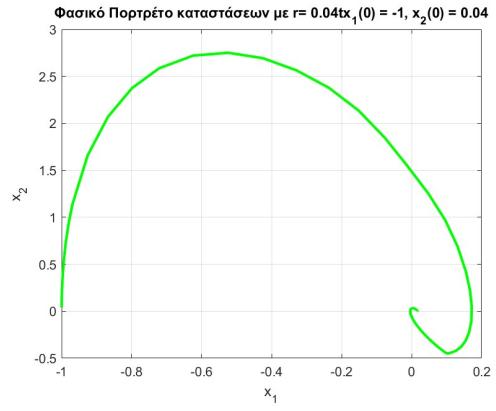


( $\beta'$ )

$\Sigma\chi\text{ήμα } 1.27: y(0) = -2, \dot{y}(0) = 0$

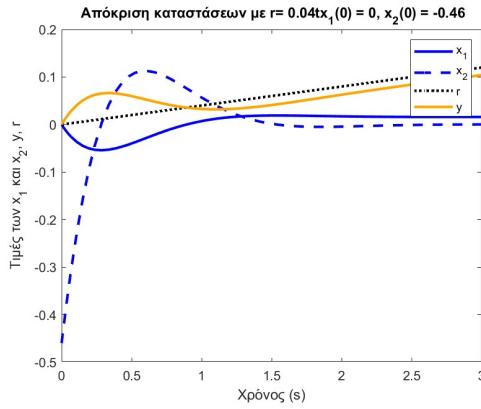


( $\alpha'$ )

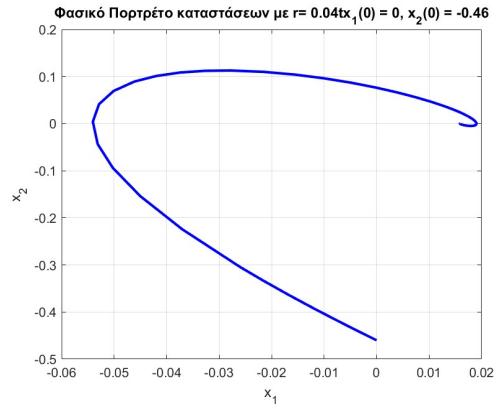


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi' \mu \alpha 1.28: y(0) = 1, y'(0) = 0$$

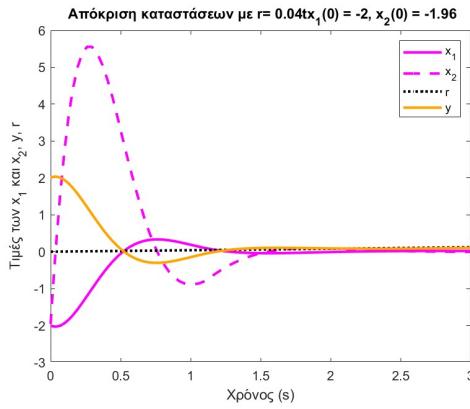


( $\alpha'$ )

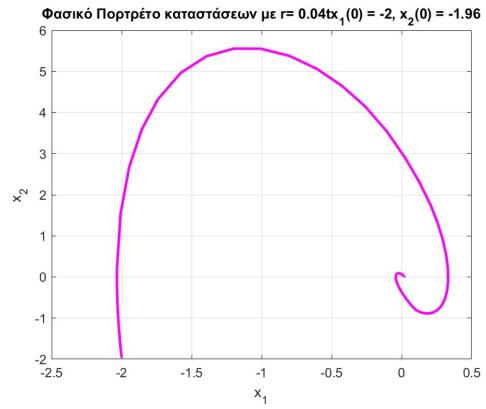


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi' \mu \alpha 1.29: y(0) = 0, y'(0) = 0.5$$

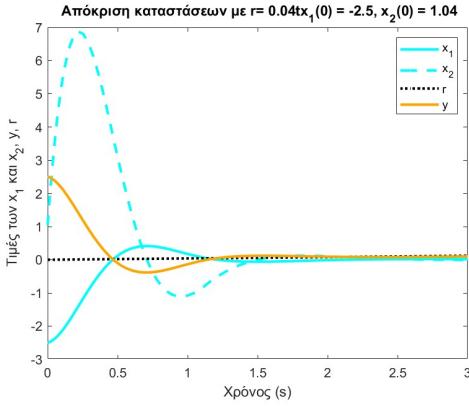


( $\alpha'$ )

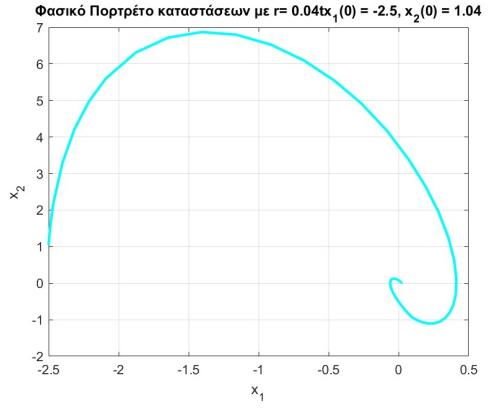


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi' \mu \alpha 1.30: y(0) = 2, y'(0) = 2$$

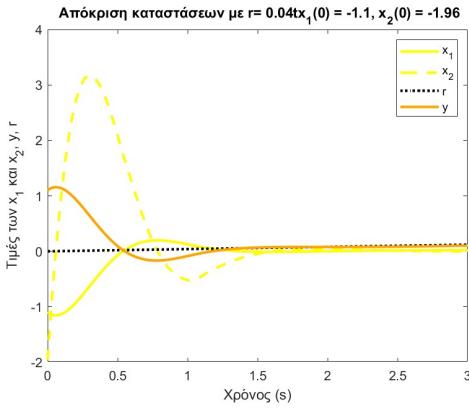


( $\alpha'$ )

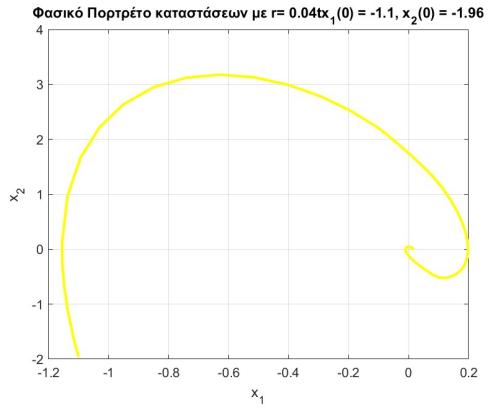


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.31: y(0) = 2.5, \dot{y}(0) = -1$$



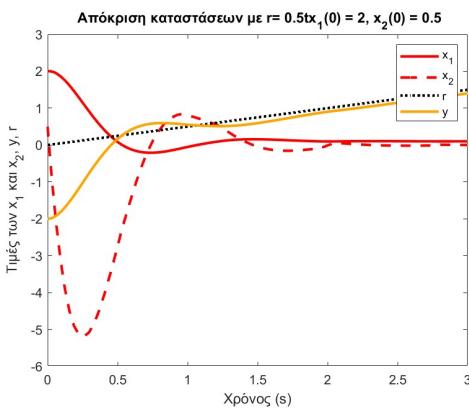
( $\alpha'$ )



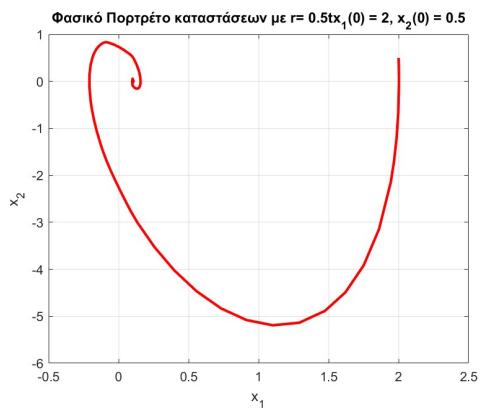
( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.32: y(0) = 1.1, \dot{y}(0) = 2$$

**Ράμπα**  $r_r(t) = 0.5t$  Στη συνέχεια, παραθέτουμε τα διαγράμματα των προσομοιώσεων του συστήματος όπως αυτά ζητούνται από την εκφώνηση της άσκησης.

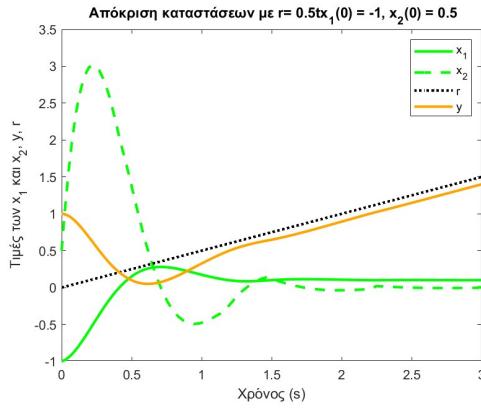


( $\alpha'$ )

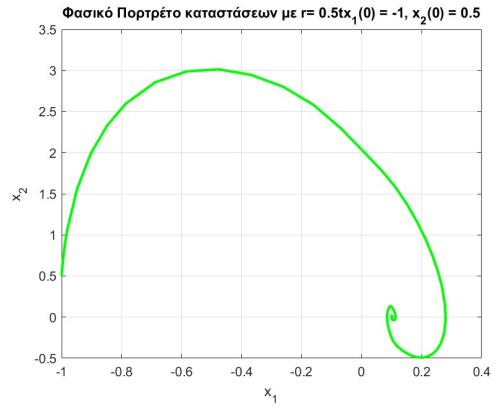


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi\text{ήμα } 1.33: y(0) = -2, \dot{y}(0) = 0$$

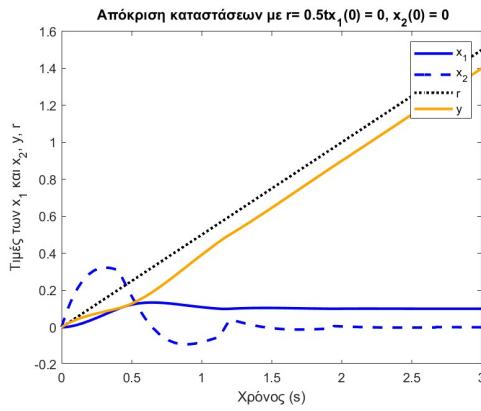


( $\alpha'$ )

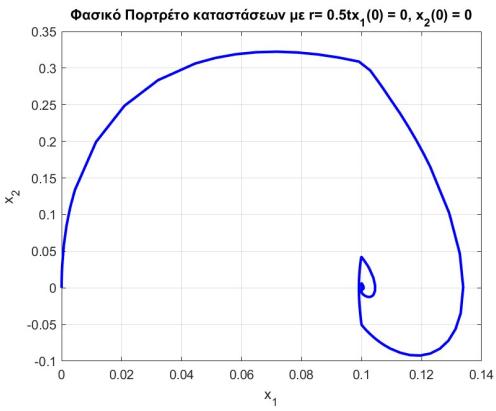


( $\beta'$ )

$$\Sigma\chi\text{ήμα } 1.34: y(0) = 1, y'(0) = 0$$

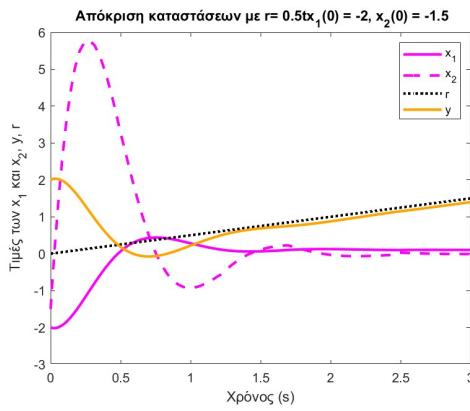


( $\alpha'$ )

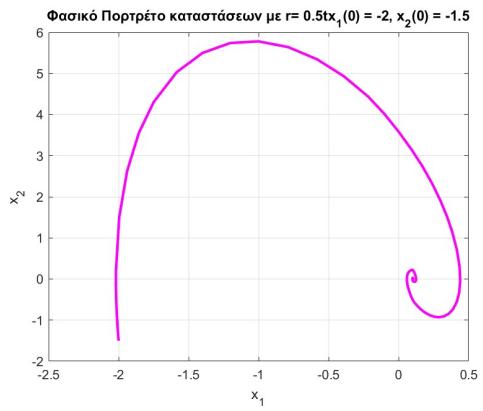


( $\beta'$ )

$$\Sigma\chi\text{ήμα } 1.35: y(0) = 0, y'(0) = 0.5$$

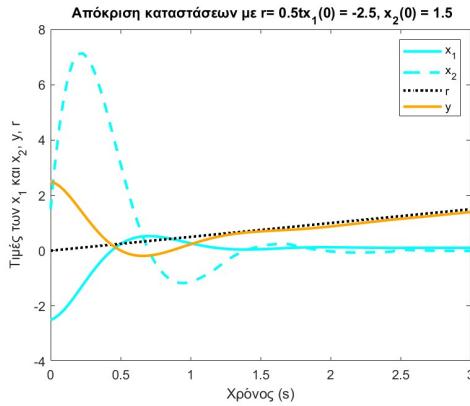


( $\alpha'$ )

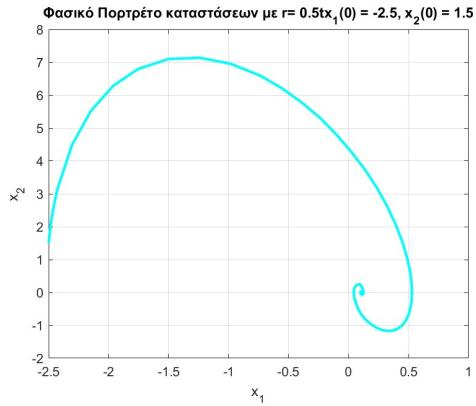


( $\beta'$ )

$$\Sigma\chi\text{ήμα } 1.36: y(0) = 2, y'(0) = 2$$

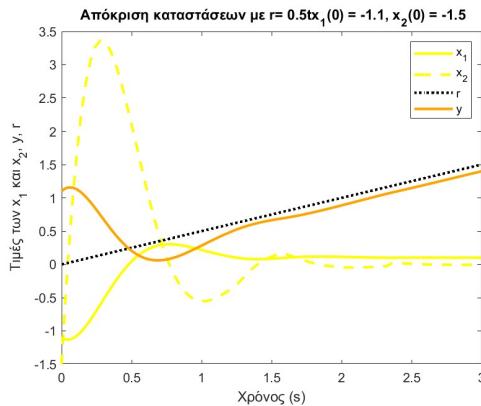


( $\alpha'$ )

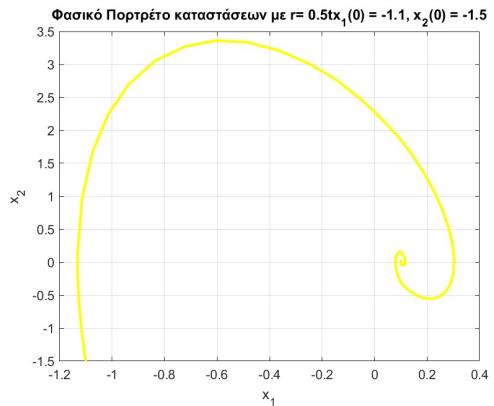


( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi \text{ήμα } 1.37: y(0) = 2.5, \dot{y}(0) = -1$$



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )

$$\Sigma \chi \text{ήμα } 1.38: y(0) = 1.1, \dot{y}(0) = 2.$$

### Ερμηνεία προσομοιώσεων σε σχέση με την θεωρητική ανάλυση

- Στην πρώτη περίπτωση, για βηματική είσοδο, παρατηρούμε ασυμπτωτική ευστάθεια των καταστάσεων και ασυμπτωτική σύγκλιση στην έξοδο
- Για  $r = 1.2t$  παρατηρούμε πως η έξοδος δεν προσεγγίζεται ακριβώς λόγω του σφάλματος ταχύτητας που προκύπτει από το  $x_1$ .
- Για την ράμπα με πλάτος 0.04 βρισκόμαστε εντός του boundary line  $e_0$  και παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά με την παραπάνω.
- Για ράμπα με πλάτος 0.5 βρισκόμαστε εκτός του Boundary line με  $x_1 > e_0 > 0$  το σύστημα δεν έχει σημείο ισορροπίας και γιαυτό παρατηρούμε κάποιες ταλαντώσεις που αποτυπώνονται καλύτερα στο φασικό πορτρέτο των καταστάσεων. (πχ 1.36β')

# Κεφάλαιο 2

## ΤΜΗΜΑ Β

Στο τμήμα Β της εργασίας επικεντρωνόμαστε στην μελέτη του συστήματος :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + g(x) + u(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

όπου  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  το διάνυσμα καταστάσεων,  $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου και  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία μη γραμμική και παραγωγίσιμη συνάρτηση των καταστάσεων  $\mathbf{x}$ .

### 2.1 Θέμα 1

Έχουμε γνωστή μορφή της μη γραμμικής συνάρτησης ως εξής:  $g(x) = x_1 x_2 + \theta x_2^2$  με  $\theta = \frac{1}{2}$ , οπότε έχουμε:

$$g(\mathbf{x}) = x_1 \cdot x_2 + \frac{x_2^2}{2}$$

Άρα, τώρα το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1 \cdot x_2 + \frac{x_2^2}{2} + u(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Και έχω σύστημα της μορφής:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + (g(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + (g + u)B\tag{2.3}$$

#### 2.1.1 Ερώτημα i

**Γραμμικό Μέρος** Θέτουμε  $u(\mathbf{x}) = 0$  και γραμμικοποιούμε το σύστημα γύρω από το μηδέν.

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 + x_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

Οπότε, θα είναι  $\lambda_i = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$  με  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, οπότε ο πίνακας  $f_x[0]$  είναι γραμμικά ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή από θεώρημα έμμεσης μεθόδου Lyapunov η αρχή των αξόνων είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Τώρα, θεωρούμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = x^T Px, \quad P > 0$$

με  $P = P^T > 0$  συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα ( $p_{21} = p_{12}$ ) που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov. Δηλαδή,  $A^T P + PA = -Q, \quad Q > 0$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{bmatrix} \quad (2.5) \\ \begin{bmatrix} -p_{11} - p_{12} & -p_{12} - p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} - p_{21} & p_{11} \\ -p_{21} - p_{22} & p_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{bmatrix} \\ \implies \begin{bmatrix} -2p_{11} - 2p_{21} & -p_{22} - p_{21} + p_{11} \\ p_{11} - p_{21} - p_{22} & 2p_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{cases} -2p_{11} - 2p_{21} = -q_1 \\ -p_{22} + p_{11} - p_{21} = 0 \\ p_{11} - p_{21} - p_{22} = 0 \\ 2p_{12} = -q_2 \end{cases} \implies \begin{cases} p_{22} = q_1/2 + q_2, \\ p_{11} = q_1/2 + q_2/2 \\ p_{21} = -q_2/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_{11} > 0, \\ p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \\ q_1, q_2 > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Θέτω  $Q = 0.2I$ , οπότε

$$q_1 = q_2 = 0.2$$

και τώρα

$$\begin{cases} p_{11} = 0.2, \\ p_{21} = p_{12} = -0.1 \\ p_{22} = 0.3 \end{cases} \implies P = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov έχω:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = (A^T x^T + u^T B^T)Px + x^T P(Ax + Bu) = x^T(A^T P + PA)x + 2x^T PBu \\ \implies \dot{V} &= -x^T Q x + 2x^T PBu \end{aligned}$$

Θέτω

$$u = -\text{sgn}(x^T PB)$$

ώστε να έχω ασυμπτωτική ενστάθεια στην αρχή των αξόνων. Επίσης, ισχυεί :

$$\dot{V} = -x^T Q x \leq -\lambda_{min}(Q) \|x\|^2$$

Οπότε,

$$\dot{V} \leq -\lambda_{min}(Q) \|x\|^2 + 2\|P\| \|x\| \quad (2.8)$$

$$\implies \|x\| < \frac{2\|P\|}{\lambda_{min}(Q)} \quad (2.9)$$

Όμως, για τον  $P$ , θετικά ορισμένο και συμμετρικό πίνακα, έχουμε:

$$\|P\| = \lambda_{max}(P)$$

Χαρακτηριστικό πολυνόμιο του  $P$ :

$$p_c(s) = (s - 0.2)(s - 0.3) - 0.01 = s^2 - 0.5s + 0.05$$

Οπότε, για τα  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.05}}{2} \implies \lambda_{max} = 0.3618$$

Επίσης, για τον πίνακα  $Q$ :

$$\lambda_{min}(Q) = 0.2$$

Επομένως, τελικά η (2.9) γίνεται:

$$\|x\| < 0.3 \quad (2.10)$$

**Πεδίο Έλξης** Το πεδίο έλξης είναι η περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας μέσα στην οποία οι λύσεις του συστήματος προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για το συγκεκριμένο σύστημα, αν και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (λόγω της έμμεσης μεθόδου Lyapunov και των ιδιοτιμών), λόγω της κυκλικής φύσης του συστήματος (με φανταστικές ιδιοτιμές), το πεδίο έλξης είναι περιοδικό και περιλαμβάνει τις τροχιές γύρω από το σημείο  $(0,0)$ . Επομένως, οι λύσεις δεν καταλήγουν σε  $(0,0)$  αλλά περιστρέφονται γύρω του.

Για την εκτίμηση του πεδίου έλξης αρκεί να βρούμε την ισοβαρή καμπύλη  $V(x) < c$  για την οποία ισχυεί η (2.10). Έχουμε:

$$V = x^T P x = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2$$

Δηλαδή,

$$V(\mathbf{x}) = 0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 = c \quad (2.11)$$

Η εξίσωση

$$0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 - c = 0$$

περιγράφει ελλειπτικές καμπύλες ισοϋψών γύρω από το σημείο  $(0,0)$ .

- Ο όρος  $0.2x_1^2$  ελέγχει το "τέντωμα" στον άξονα  $x_1$ .
- Ο όρος  $0.3x_2^2$  καθορίζει το "τέντωμα" στον άξονα  $x_2$ .
- Ο όρος  $-0.2x_1x_2$  προσθέτει περιστροφή ή κλίση στην έλλειψη.

Το μήκος του μεγαλύτερου άξονα δίνεται μετά από πράξεις ως  $z = 3\sqrt{c}$ . Θέτουμε  $z = 0.3$ :

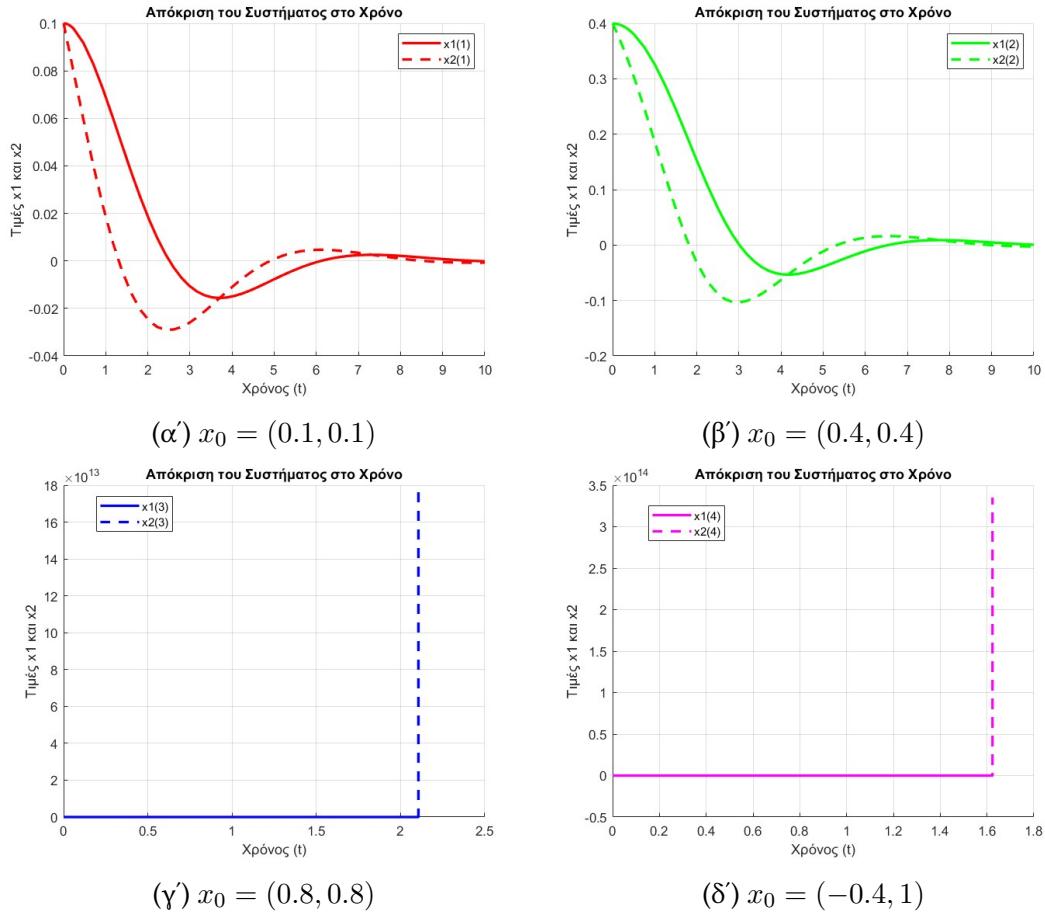
$$\implies c = 0.01$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του πεδίου έλξης:

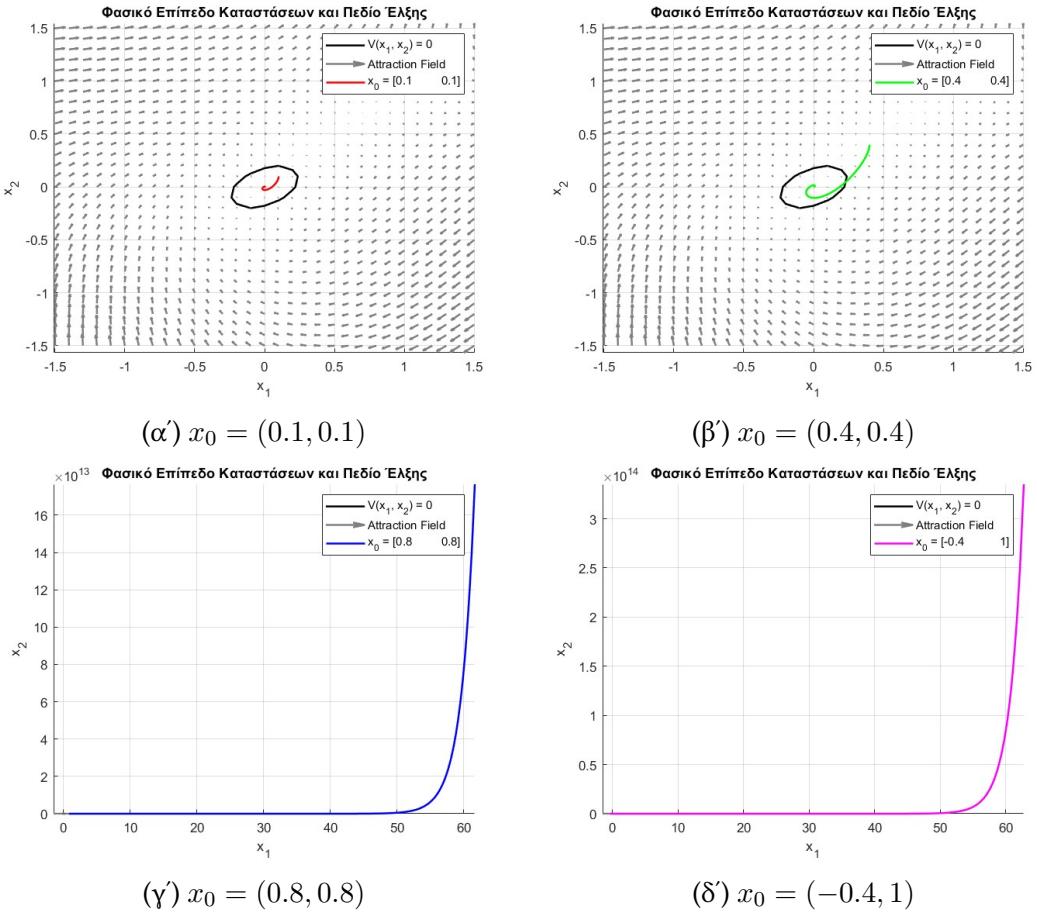
1. Το σύνολο  $\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < c\}$  ορίζει μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$
2. Η συνάρτηση  $V$  είναι θετικά ορισμένη με  $V(0,0) = 0$
3. Ικανοποιεί  $\dot{V}(x) < 0.01$  για όλα τα  $x$  εκτός από το  $(0,0)$

Άρα, το  $S_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < c\}$  είναι εκτίμηση του πεδίου έλξης, δηλαδή μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας, όπου οι τροχιές του συστήματος είναι φθίνουσες και συγκλίνουν στο  $(0,0)$ .

**Προσομοιώσεις** Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα απόκρισης και φασικού πορτρέτου, όπως αυτά ζητήθηκαν από την εκφώνηση της άσκησης.



Σχήμα 2.1: Αποκρίσεις για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



Σχήμα 2.2: Φασικά διαγράμματα για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

### Σχόλια για τις Προσομοιώσεις

- **Σημείο Εκκίνησης (0.1, 0.1):** Εκκινεί από ισοϋψή καμπύλη μικρότερη της της εκτίμησης του πεδίου έλξης 2.2α', ακολουθείται φθίνουσα τροχιά και παρατηρείται σύγκλιση στην αρχή των αξόνων.
- **Σημείο Εκκίνησης (0.4, 0.4):** Εκκινεί από ισοϋψή καμπύλη μεγαλύτερη από αυτή της εκτίμησης του πεδίου έλξης 2.2β'. Ωστόσο, ακολουθείται φθίνουσα τροχιά και παρατηρείται σύγκλιση στην αρχή των αξόνων.
- **Σημείο Εκκίνησης (0.8, 0.8):** Εκκινεί από ισοϋψή καμπύλη μεγαλύτερη από αυτή της εκτίμησης του πεδίου έλξης 2.2γ' και βάσει αυτού παρατηρούμε την αναμενόμενη μη φθίνουσα τροχιά. Αντίθετα, μάλιστα, η προσομοίωση τερματίζεται πρόωρα 2.1γ', διότι οι αριθμητικές τιμές αυξάνονται υπερβολικά για το υπολογιστικό περιβάλλον του Matlab.
- **Σημείο Εκκίνησης (-0.4, 1):** Εκκινεί από ισοϋψή καμπύλη μεγαλύτερη από αυτή της εκτίμησης του πεδίου έλξης 2.2δ' και βάσει αυτού παρατηρούμε την αναμενόμενη μη φθίνουσα τροχιά. Αντίθετα, μάλιστα, η προσομοίωση τερματίζεται πρόωρα 2.1δ', διότι οι αριθμητικές τιμές αυξάνονται υπερβολικά για το υπολογιστικό περιβάλλον του Matlab.

### 2.1.2 Ερώτημα ii

Τώρα, καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν νόμο ελέγχου για το σύστημα κλειστού βρόχου, ώστε αυτό να είναι γραμμικό με διπλή ιδιοτυπία  $\lambda = -3$ .

**Παράμετρος**  $\theta = \frac{1}{2}$

Αρχικά, έχουμε το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.12)$$

Επιλέγοντας,

$$u = -\frac{1}{2} x_2^2 - x_1 x_2 + v$$

θα έχουμε:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (2.13)$$

**Επιλογή Ελεγκτή** Τώρα, επιλέγουμε

$$v = -K^T \mathbf{x} = -k_1 x_1 - k_2 x_2$$

γραμμικό ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων ώστε  $\lambda_i = -3$ . Οπότε, για το σύστημα κλειστού βρόχου θα ισχύει:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.14)$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p_c(s) = s^2 + (k_2 + 1)s + k_1 + k_2 + 1$$

και επιθυμητό πολυώνυμο:

$$p_d(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

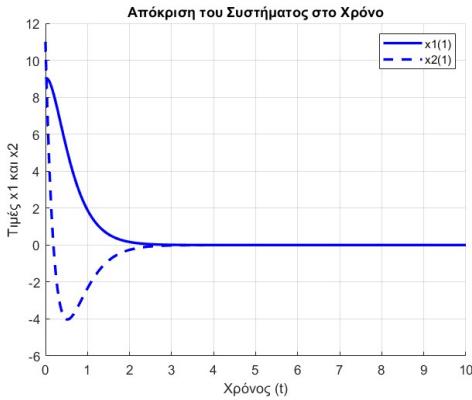
Παραλληλίζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\begin{cases} k_2 + 1 = 6 \\ k_1 + k_2 + 1 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} k_2 = 5 \\ k_1 = 3 \end{cases} \implies K = [3 \quad 5] \quad (2.15)$$

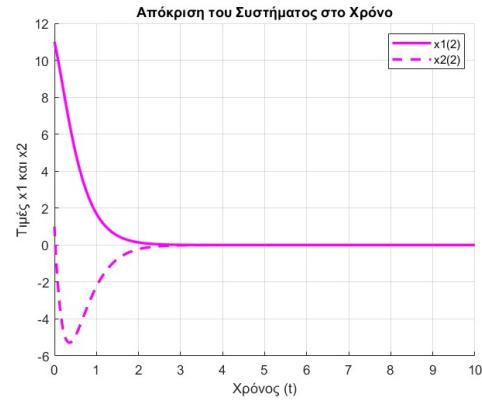
Επομένως, τελικά, ο ελεκτής είναι:

$$u(x) = -\frac{1}{2} x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - 5x_2$$

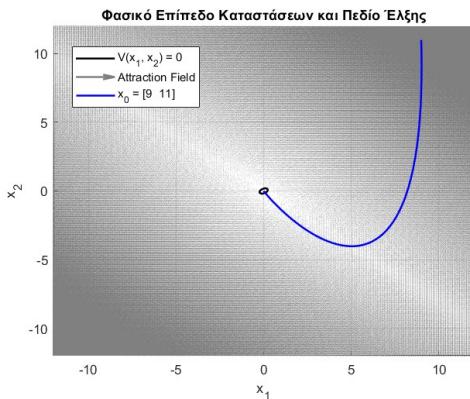
**Προσομοιώσεις** Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα απόκρισης και φασικού πορτρέτου, όπως αυτά ζητήθηκαν από την εκφώνηση της άσκησης.



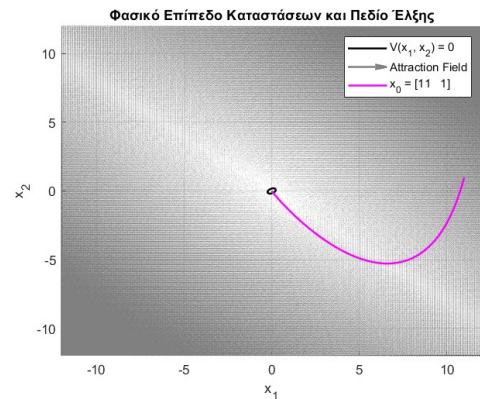
$$(\alpha') \quad x_0 = (9, 11)$$



$$(\beta') \quad x_0 = (11, 1)$$



$$(\gamma') \quad \text{Φασικό διάγραμμα για } x_0 = (9, 11)$$



$$(\delta') \quad \text{Φασικό διάγραμμα για } x_0 = (11, 1)$$

Σχήμα 2.3: Ανάλυση του συστήματος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

**Παράμετρος**  $\theta = 1$

Για  $\theta = 1$  ως εκτίμηση στον νόμο ελέγχου, ο ελεγκτής ορίζεται ως:

$$u(x) = -x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - 5x_2$$

Τώρα, το σύστημα είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -4x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \end{bmatrix}$$

### Σημεία Ισορροπίας

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = x_1, \\ -4x_1 - 5x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = x_1 = 0, \\ x_2 = x_1 = -18 \end{cases} \quad (2.16)$$

Οπότε, έχουμε 2 σημεία ισορροπίας:  $(0, 0)$  και  $(-18, -18)$ .

**Ευστάθεια κατά Lyapunov** Για την ανάλυση ευστάθειας του σημείου  $(0, 0)$ , επιλέγω θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

με,

$$\dot{V}(x) = 4x_1(-x_1 + x_2) + x_2(-4x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_2^2) = -4x_1^2 - x_2^2(5 + \frac{1}{2}x_2).$$

Παρατηρούμε ότι για  $x_2 > -10$ , η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη. Όποτε, έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια για το  $(0, 0)$  στην περιοχή κοντά στην αρχή των αξόνων.

**Πεδίο Έλξης** Θέτουμε  $x_2 = -10$ :

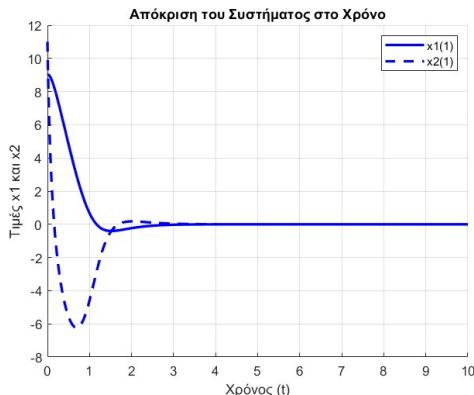
$$V(x) = 2x_1^2 + 50 = c$$

Χρειαζόμαστε την μεγαλύτερη ισοϋψή καμπύλη, δηλαδή το μέγιστο  $c$ , για το οποίο  $\dot{V}(x) = -4x_1^2 < 0$ , δηλαδή η  $V$  να είναι φθίνουσα με μοναδική λύση. Αυτό συμβαίνει μόνο για  $x_1 = 0$  και αντιστοιχεί σε  $c = 50$ . Σύμφωνα με τον ορισμό του πεδίου έλξης το

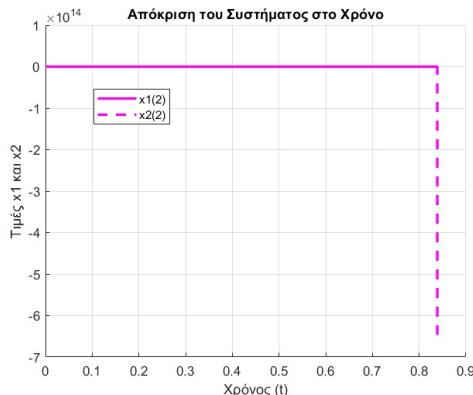
$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < c\}$$

αποτελεί εκτίμηση του πεδίου έλξης γύρω από το σημείο ισορροπίας, όπου οι τροχιές του συστήματος είναι φθίνουσες και συγκλίνουν σε αυτό.

**Προσομοιώσεις** Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα απόκρισης και φασικού πορτρέτου, όπως αυτά ζητήθηκαν από την εκφώνηση της άσκησης.

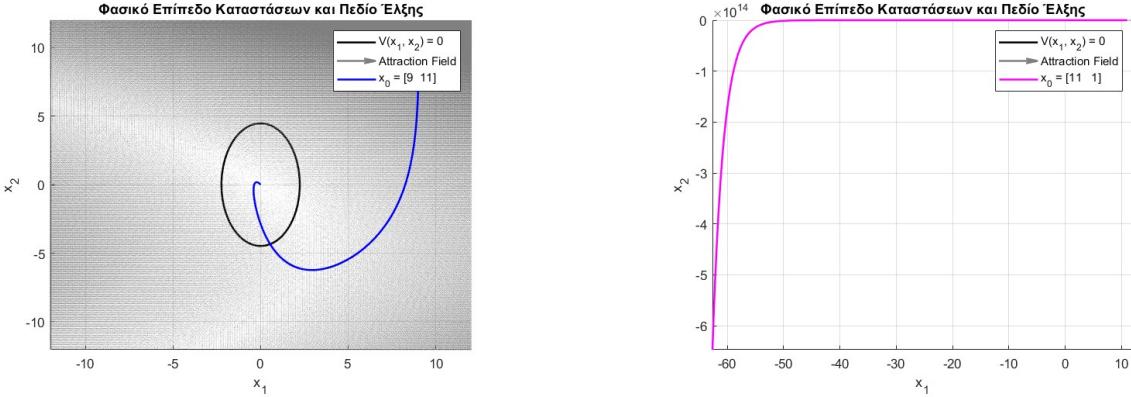


(α') Χρονική απόκριση για  $x_0 = (9, 11)$



(β') Χρονική απόκριση για  $x_0 = (11, 1)$

Σχήμα 2.4



(α') Φασικό διάγραμμα για  $x_0 = (9, 11)$

(β') Φασικό διάγραμμα για  $x_0 = (11, 1)$

Σχήμα 2.5

**Σχόλια για τις προσομοιώσεις** Παρατηρούμε πως από το 2.5 για το σημείο εκκίνησης  $(11, 1)$  δεν έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια, ενώ για το  $(9, 11)$  έχουμε. Βέβαια, το αποτέλεσμα της μη σύγκλισης είναι κάπως προβλέψιμο αφού εκκινούμε από μεγαλύτερη ισοσταθμική. Επομένως, η ασυνέχεια του νόμου ελέγχου πιθανώς επηρεάζει την ευστάθεια και συνεπώς, αναμένεται ότι το σύστημα κλειστού βρόχου δεν θα συγκλίνει στο  $(0, 0)$  ειδικά για κάποια χ εκτός του πεδίου έλξης.

### 2.1.3 Ερώτημα iii

Τώρα, θεωρούμε θ άγνωστη παράμετρο και καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν νόμο εκτίμησης για το  $\hat{\theta}$ , ο οποίος σε συνδυασμό με τον παραπάνω νόμο ελέγχου να επιτυγχάνει σύγκλιση στο  $(0, 0)$ . Θεωρούμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov από την εκφώνηση:

$$V(x) = x^T P x + \tilde{\theta}(t)^2$$

Θετικά ορισμένη συνάρτηση. Εφόσον, ο  $A$  είναι ευσταθής πίνακας, θα λύσουμε την εξίσωση Lyapunov:  $A^T P + P A = -Q$  με  $Q = \text{diag}([2, 4])$ :

Από (2.6) θα έχουμε:

$$\begin{cases} p_{22} = q_1/2 + q_2, \\ p_{11} = q_1/2 + q_2/2 \\ p_{21} = -q_2/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_{11} > 0, \\ p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \\ q_1, q_2 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p_{11} = 3 \\ p_{21} = p_{12} = -2 \\ p_{22} = 5 \end{cases} \quad (2.17)$$

Άρα, προκύπτει:

$$\implies P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

**Εκτίμηση παραμέτρου  $\theta$**  Το σύστημα προς μελέτη στον κλειστό βρόχο είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \tilde{\theta}x_2^2 \end{aligned}$$

με

$$u(x) = -x_1x_2 - \tilde{\theta}(t)x_2^2.$$

ενώ έχουμε και από την εκφώνηση  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . Οπότε, για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov έχουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} + 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \\
&= (x^T A^T + g^T B^T + uB^T)Px + x^T P(Ax + Bg + Bu) + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}}) \\
&= x^T A^T Px + x^T PAx + 2x^T PBg + 2uB^T Px + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}}) \\
&\Rightarrow \dot{V} = -x^T Qx + 2x^T PBg + 2uB^T Px + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}}) \\
&\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2gB^T Px + 2uB^T Px + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}}) \\
&= -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2(g + u)(5x_2 - 2x_1) + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}}) \\
&= -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2(\theta - \hat{\theta})(5x_2^3 - 2x_2^2 x_1 - \dot{\hat{\theta}})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Τώρα, επιλέγω  $\dot{\hat{\theta}} = -5x_2^3 + 2x_2^2 x_1$ , ώστε να προκύψει η παράγωγος της Lyapunov ως

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2$$

όπου  $\dot{V} \leq 0$ , αρνητικά ημιορισμένη, γιαυτό μιλάμε για ευσταθές σύστημα και φραγμένα  $x_1$ ,  $x_2$  και  $\hat{\theta}$ . Οπότε, προκύπτει:

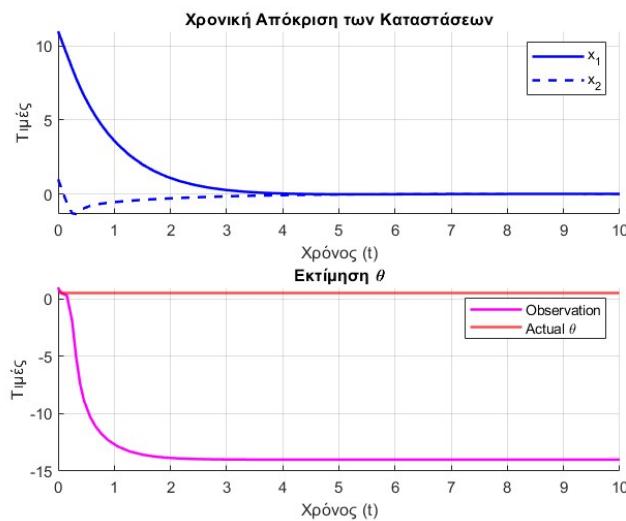
$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}} = +5x_2^3 - 2x_2^2 x_1$$

**Ασυμπτωτική Ευστάθεια** Για την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov ισχύει:

$$\ddot{V} = -4x_1(-x_1 + x_2) - 8(-x_1 + \tilde{\theta}x_2^2) \tag{2.19}$$

Έχουμε φραγμένες καταστάσεις και φραγμένη  $\ddot{V}$ , οπότε έχουμε και ομοιόμορφα συνεχή  $\dot{V}$ . Επομένως, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , θα είναι και  $\dot{V} \rightarrow 0$  και συνεπώς  $x_1, x_2 \rightarrow 0$  ασυμπτωτικά. Ωστόσο, για το  $\hat{\theta}$  δεν διασφαλίζεται η ασυμπτωτική σύγκλιση στο 0. Συνεπώς, δεν μπορεί να συναχθεί ότι το σύστημα είναι πλήρως ασυμπτωτικά ευσταθές, χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες επιλογές συνάρτησης Lyapunov  $V, \dot{V}, \ddot{V}$ .

**Προσομοιώσεις** Όπως αυτές ζητήθηκαν από την εκφώνηση της άσκησης.



$$\Sigmaχήμα 2.6: x_0 = (11, 1)$$

**Σχόλια για την προσομοίωση** Οι καταστάσεις  $x_1$  και  $x_2$  φαίνεται να συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0. Παρ' όλα αυτά, η εκτίμηση  $\hat{\theta}$  δεν συγκλίνει στην πραγματική τιμή  $\theta = 0.5$ , όπως προαναφέρθηκε.

## 2.2 Θέμα 2

Τώρα, καλούμαστε να σχεδιάσουμε εκ νέου τον νόμο ελέγχου με σκοπό ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός, χωρίς να γνωρίζουμε την μορφή της μη γραμμικότητας  $g(x)$ . Το σύστημα μας είναι:

$$\dot{x} = Ax + B(g + u) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(x) \quad (2.20)$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα ερωτήματα και λύνουμε την εξίσωση Lyapunov για έναν επιλεγμένο  $Q = 2I$ , που μας βολεύει και στους υπολογισμούς. Από την (2.6):

$$\begin{cases} p_{22} = q_1/2 + q_2, \\ p_{11} = q_1/2 + q_2/2 \\ p_{21} = -q_2/2 \end{cases} \implies \begin{cases} p_{22} = 3, \\ p_{11} = 2 \\ p_{21} = p_{12} = -1 \end{cases}$$

Άρα, προκύπτει:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε  $V(x) = x^T Px$ , θετικά ορισμένη συνάρτηση, με παράγωγο:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = (x^T A + gB^T + uB^T) Px + x^T P (Ax + Bg(x) + bu) \\ &= x^T (A^T P + PA) x + gPx + x^T Pg + uB^T Px + ux^T PB \\ \dot{V} &= -x^T Qx + 2gPx + 2uB^T Px. \end{aligned}$$

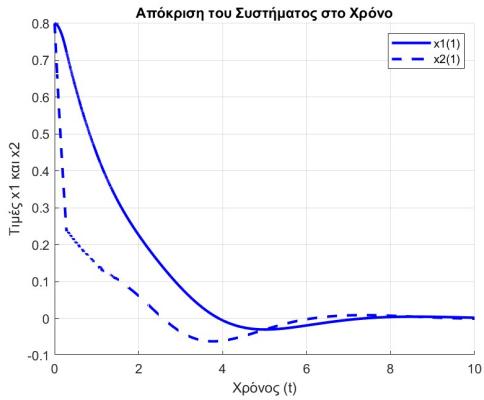
Άπο την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε  $g(x) \leq 2\|x\|^2$ , οπότε:

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -x^T Qx + 2\|g\|\|P\|\|x\| + 2uB^T Px \\ &\leq -x^T Qx + 4\|x\|^2\|P\|\|x\| + 2u\|P\|\|x\| \end{aligned}$$

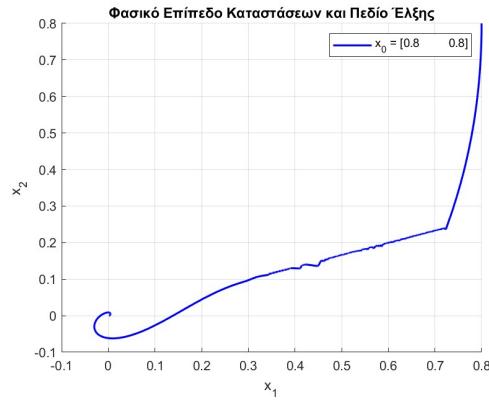
Επιλέγοντας,

$$u(x) = -2(x_1^2 + x_2^2) \operatorname{sgn}(x^T P)$$

Θα είναι  $\dot{V} < -x^T Qx$ , αρνητικά ορισμένη συνάρτηση. Οπότε,  $(0,0)$  ασυμπτωτικά ευσταθές.

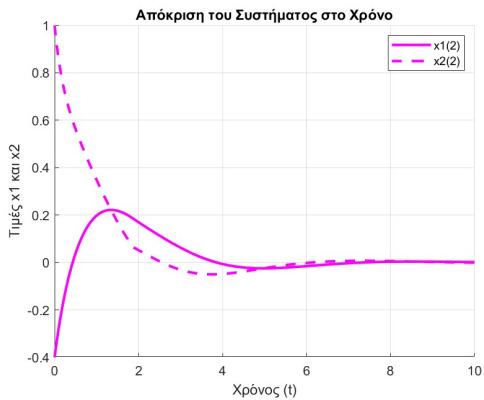


( $\alpha'$ )

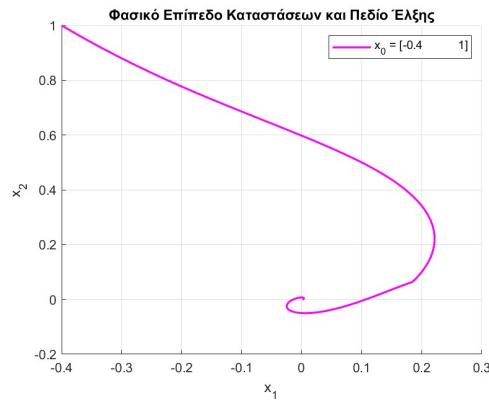


( $\beta'$ )

Σχήμα 2.7: Time response and phase plot corresponding to  $x_3(0) = [0.8, 0.8]$



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )

Σχήμα 2.8: Time response and phase plot corresponding to  $x_4(0) = [-0.4, 1]$ .

**Σχόλια για τις προσομοιώσεις** Η σύγκλιση επιτυγχάνεται με την χρήση του παραπάνω ελεγκτή όπως επιβεβαιώνεται και από τις προσομοιώσεις, παρά την άγνωστη παράμετρο  $\theta$ .

# Κεφάλαιο 3

## ΤΜΗΜΑ Γ

Στο τμήμα Γ της εργασίας επικεντρωνόμαστε στη μελέτη του συστήματος ενός ρομποτικού βραχίονα 2 περιστροφικών αρθρώσεων, ο οποίος μοντελοποιείται με την εξίσωση:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\ddot{q} + g(q) = u$$

με  $q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$ ,  $u$  είσοδος ελέγχου και  $H(q)$   $2 \times 2$  πίνακας αδράνειας του ρομπότ:

$$H(q) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

με γνωστές παραμέτρους συναρτήσει των  $m_i$ ,  $m_l$ ,  $I_i$  και  $l_{ci}$ .

### 3.1 Θέμα 1

Θεωρούμε  $q_{desired} = \left[ \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{3} \right]^T$  και  $u_{fdesired} = 0$  και καλούμαστε να σχεδιάσουμε νόμο ελέγχου με Sliding με στόχο ελέγχου τη σύγκλιση των φασικών μεταβλητών στις παραπάνω επιθυμητές τιμές.

**Εξισώσεις Κατάστασης** Αρχικά, θέτουμε μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = q \tag{3.1}$$

$$x_2 = \dot{q} \tag{3.2}$$

Οπότε, το σύστημα προς μελέτη θα είναι:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_2 = H^{-1}(x_1) \cdot (-g(x_1) - C(x_1, x_2)x_2 + u) \tag{3.4}$$

με  $H(q)$  αντιστρέψιμος ως θετικά ορισμένος.

**Σφάλμα και τροχιά ολίσθησης** Ορίζουμε το σφάλμα παρακολούθησης και δουλεύουμε με αυτό, ώστε ο στόχος ελέγχου να είναι η σύγκλιση στην αρχή των αξόνων, επιτυγχάνοντας μηδενικό σφάλμα:

$$e = q - q_d = x_1 - x_d \tag{3.5}$$

$$\dot{e} = \dot{x}_1 - \dot{x}_d = x_2 - \dot{x}_d \tag{3.6}$$

$$(3.7)$$

Τώρα, ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης:

$$s = \dot{e} + \lambda e = 0$$

με  $\lambda > 0$ . Οπότε,

$$s = 0 \implies \dot{e} = -\lambda e \implies \dot{e} < 0 \implies e \rightarrow 0$$

**Δυναμική Επιφάνεια Ολίσθισης**  $\dot{s} = \lambda \dot{e} + \ddot{e} = \lambda(x_2 - \dot{x}_d) + (\dot{x}_2 - \ddot{x}_d) = 0$

Όμως, επειδή  $x_d = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T$ , θα είναι

$$\dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0$$

τελικά από την (3.9) θα έχουμε

$$\dot{x}_2 + \lambda x_2 = 0$$

Αντικαθιστώντας από το σύστημα, έχουμε:

$$H^{-1}(x_1) \cdot (-g(x_1) - C(x_1, x_2)x_2 + u) + \lambda x_2 = 0$$

$$\implies \hat{u}_{eq} = -\hat{H}^{-1}(x_1)\lambda x_2 + \hat{C}(x_1, x_2)x_2 + \hat{g}(x_1)$$

Οπότε, ο ελεγκτής μας θα είναι της μορφής:

$$u = \hat{u}_{eq} - \rho(x) sgn(s)$$

Αντικανιστώντας στο σύστημα, θα έχουμε:

$$H(x_1)\dot{x}_2 + C(x_1, x_2)x_2 + g(x_1) = -\hat{H}^{-1}(x_1)\lambda x_2 + \hat{C}(x_1, x_2)x_2 + \hat{g}(x_1) - \rho \cdot sgn(s)$$

Μετά από προφανείς πράξεις, αντικατάσταση του  $\dot{x}_2 = \dot{s} - \lambda x_2$  και πολλαπλασιασμό με  $s$ , έχουμε

$$\implies H(x_1)s\dot{s} = -\rho|s| - s(\lambda x_2(\hat{H} - H) + x_2(C - \hat{C}) + g - \hat{g})$$

Εφόσον γνωρίζουμε τα άνω και κάτω όρια των συναρτήσεων του συστήματος, μπορούμε να γράψουμε:

$$H(x_1)s\dot{s} \leq -|s|(\lambda||x_2|| \cdot ||\hat{H} - H_{min}|| + ||x_2|| \cdot ||C_{max} - \hat{C}|| + ||g_{max} - \hat{g}|| - \rho)$$

Θέτοντας

$$\rho(x) = \lambda||x_2|| \cdot ||\hat{H} - H_{min}|| + ||x_2|| \cdot ||C_{max} - \hat{C}|| + ||g_{max} - \hat{g}|| + c$$

Θα ισχυεί,

$$H(x_1)s\dot{s} \leq -|s|c$$

Θεωρούμε συνάρτηση Lyapunov  $V = \frac{1}{2}H(x_1)s^2$  με παράγωγο:

$$\dot{V} = H(x_1)s\dot{s} \leq -c|s|$$

οπότε, καταλήγουμε πως το σύστημα συγκλίνει σε πεπερασμένο χρόνο στην επιφάνεια ολίσθησης και σ εκθετικά ευσταθές με χρήση του

$$u = \hat{u}_{eq} - \rho \cdot sgn(s) \tag{3.8}$$

Έτσι, ικανοποιείται και η Reachability Condition, ως:

$$\begin{cases} s > 0, & \dot{s} < 0 \\ s < 0, & \dot{s} > 0 \end{cases} \implies s\dot{s} < 0$$

Για τις εκτιμήσεις των μη γραμμικών συναρτήσεων παίρνουμε τις παραμέτρους τους από τον Π3 της εκφώνησης και βρίσκουμε τον μέσο όρο αυτών:

$$\begin{cases} \hat{l}_{c1} = 0.25, & \hat{l}_{c2} = 0.175 \\ \hat{I}_1 = 0.26, & \hat{I}_2 = 0.08 \\ \hat{m}_l = 1 \end{cases}$$

Τα άνω και κάτω όρια των εκτιμήσεων των μη γραμμικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στον νόμο ελέγχου, υπολογίζονται απευθείας στον κώδικα από τα αντίστοιχα άνω και κάτω όρια των άγνωστων παραμέτρων του Π3 της εκφώνησης.

**Υλοποίηση Ελεγκτή στο Matlab** Στην προσομοίωση, για την υλοποίηση του ελεγκτή, δεν χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση προσήμου  $\text{sgn}(s)$ , αλλά η συνάρτηση  $\text{sat}(s)$ , όπως υποδεικνύεται στην εκφώνηση. Ο τελικός ελεγκτής διατυπώνεται ως εξής:

$$u = \begin{cases} u_{\text{eq}} - \rho \cdot \text{step} \cdot s, & |s| \leq e_0, \\ u_{\text{eq}} - \rho, & s > e_0, \\ u_{\text{eq}} + \rho, & s < -e_0. \end{cases}$$

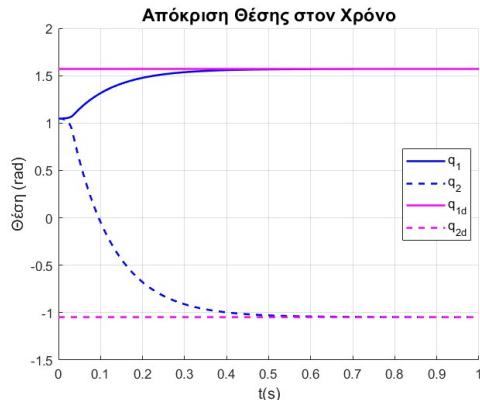
Ο ελεγκτής διατηρεί την κατάσταση του συστήματος πάνω στην επιφάνεια ολίσθησης, όπως διαπιστώνουμε και στη συνέχεια, ενώ το saturation συμβάλλει στη μείωση του chattering, δηλαδή των ανεπιθύμητων γρήγορων ταλαντώσεων στο σήμα ελέγχου. Εφαρμόζεται με βάση την επιφάνεια ολίσθησης  $s$ , προσφέροντας διαφορετική διόρθωση ανάλογα με την απόσταση από την επιφάνεια:

- **Εντός μικρής περιοχής:** εφαρμόζεται ομαλή διόρθωση μέσω της παραμέτρου `step`, εξασφαλίζοντας σταδιακή προσαρμογή εντός του boundary layer.
- **Εκτός της περιοχής:** η διόρθωση γίνεται πιο "σκληρή", επιβάλλοντας ισχυρότερο έλεγχο για την ταχεία επιστροφή στην επιφάνεια ολίσθησης.

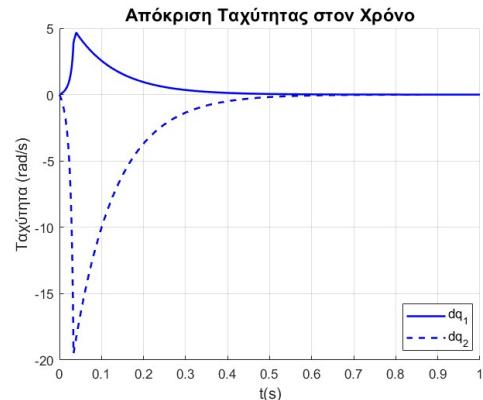
Για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

- $\lambda$ : Ελέγχει την ταχύτητα σύγκλισης στην επιφάνεια ολίσθησης. Υψηλές τιμές οδηγούν σε πιο απότομες αποκρίσεις αλλά ενδέχεται να αυξήσουν το chattering.
- $\rho$ : Καθορίζει την ένταση της διόρθωσης, με μεγαλύτερες τιμές να παρέχουν μεγαλύτερη ανθεκτικότητα σε αβεβαιότητες.
- $e_0$ : Καθορίζει το πλάτος της περιοχής του boundary layer, εντός της οποίας εφαρμόζεται το ομαλό saturation.
- `step`: Ρυθμίζει τη διακριτή προσαρμογή του ελεγκτή εντός του boundary layer, επηρεάζοντας τη σταθερότητα και την ομαλότητα της διόρθωσης.

**Προσομοιώσεις** Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα που εξήχθησαν από την προσομοίωση του συστήματος και κρίνεται ότι θα συμβάλουν στην αξιολόγηση του νόμου ελέγχου που σχεδιάσαμε. Οι παράμετροι του ελεγκτή επιλέχτηκαν μετά από δοκιμές.

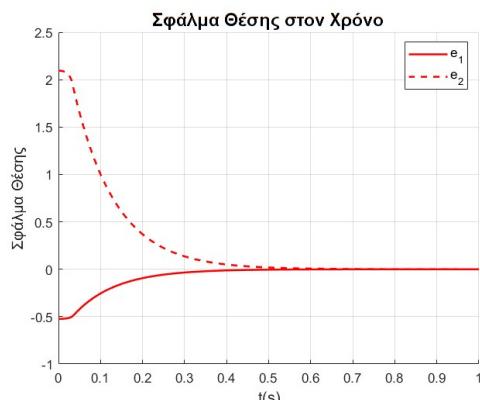


(α') Απόκριση Θέσης στον Χρόνο

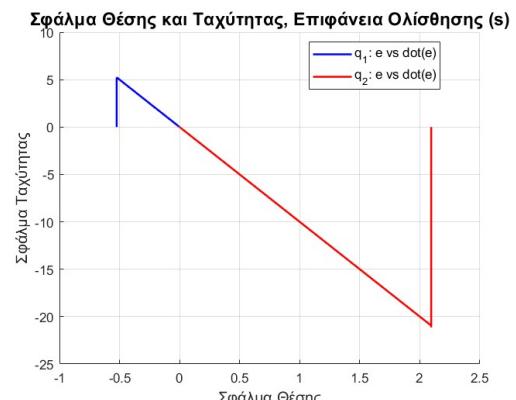


(β') Απόκριση Ταχύτητας στον Χρόνο

Σχήμα 3.1: Συγκεντρωτικά Διαγράμματα Αποκρίσεων Θέσης και Ταχύτητας



(α') Σφάλμα Θέσης στον Χρόνο

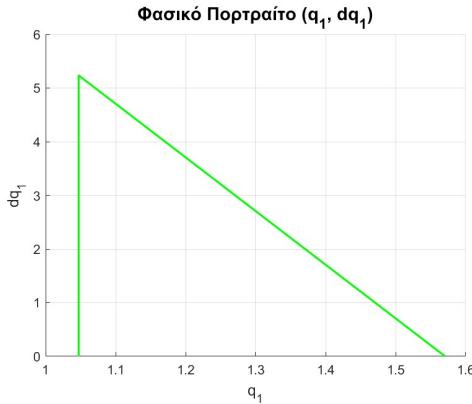


(β') Επιφάνεια Ολίσθησης

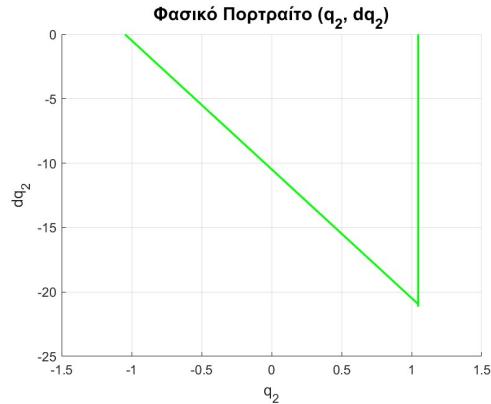
Σχήμα 3.2: Συγκριτικά Διαγράμματα Σφάλματος Θέσης και Επιφάνειας Ολίσθησης

## Παρατηρήσεις

- 3.1: Παρατηρούμε πως ο στόχος ελέγχου επιτυγχάνεται πλήρως ως προς τη θέση αλλά και ως προς την ταχύτητα των 2 αρθρώσεων του βραχίονα σε λιγότερο από 0.7 sec.
- 3.2α': Η παραπάνω παρατήρηση επιβεβαιώνεται και από την απόκριση του σφάλματος θέσης στον χρόνο, το οποίο συγκλίνει στο 0 και για τις 2 αρθρώσεις.
- 3.2β': Εδώ, μάλιστα, φαίνεται και η πορεία προς την τροχιά  $s=0$ , όπου παρατηρούμε πως με κλίση  $\lambda$  το σφάλμα αποκτά γραμμική σχέση με την παράγωγο του και καταλήγει πάνω στην επιφάνεια ολίσθησης. Με μπλε και κόκκινο αποτυπώνεται ουσιαστικά το φασικό πορτρέτο για τα σφάλματα στο  $q_1$  και  $q_2$ , αποδεικνύοντας την σύγκλιση στην επιφάνεια ολίσθησης. Παρακάτω, φαίνονται και μεμονωμένα για καλύτερη οπτικοποίηση.



(α') Επιφάνεια Ολίσθησης q1



(β') Επιφάνεια Ολίσθησης q2

## 3.2 Θέμα 2

Με το ίδιο μοντελοποιημένο σύστημα, καλούμαστε τώρα να σχεδιάσουμε έναν νόμο ελέγχου που να οδηγεί το σύστημα στην παρακάτω επιθυμητή τροχιά:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \pi/4 + \frac{\pi}{6} \sin(0.2\pi t) \\ -\frac{\pi}{3} + \pi \cos(0.2\pi t) \end{bmatrix}$$

Οπότε, για την επιθυμητή ταχύτητα των αρθρώσεων θα ισχυεί:

$$\dot{q}_d = \begin{bmatrix} \pi^2/30 \cdot \cos(0.2\pi t) \\ -\pi^2/15 \cdot \sin(0.2\pi t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{q}_d = \begin{bmatrix} -\pi^3/150 \cdot \sin(0.2\pi t) \\ -\pi^3/75 \cdot \cos(0.2\pi t) \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με το θέμα 1, έχουμε:

$$s = \dot{e} + \lambda e = (x_1 - x_d)\lambda + x_2 - \dot{x}_d$$

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \dot{x}_2 - \ddot{x}_d + \lambda(x_2 - \dot{x}_d) = 0$$

Τελικά, προκύπτει:

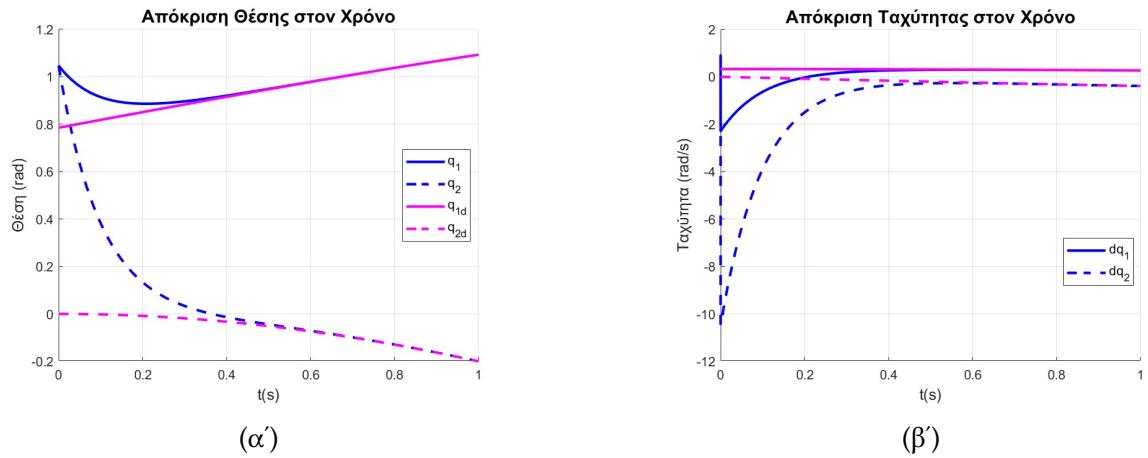
$$\hat{u}_{eq} = (\ddot{x}_d - \lambda x_2 + \lambda \dot{x}_d)H(\hat{x}_1) + \hat{C}(x_1, x_2)x_2 + g(\hat{x}_1)$$

Αντικαθιστώ στο σύστημα τον  $u = \hat{u}_{eq} - \rho sgn(s)$  και καταλήγω πως με

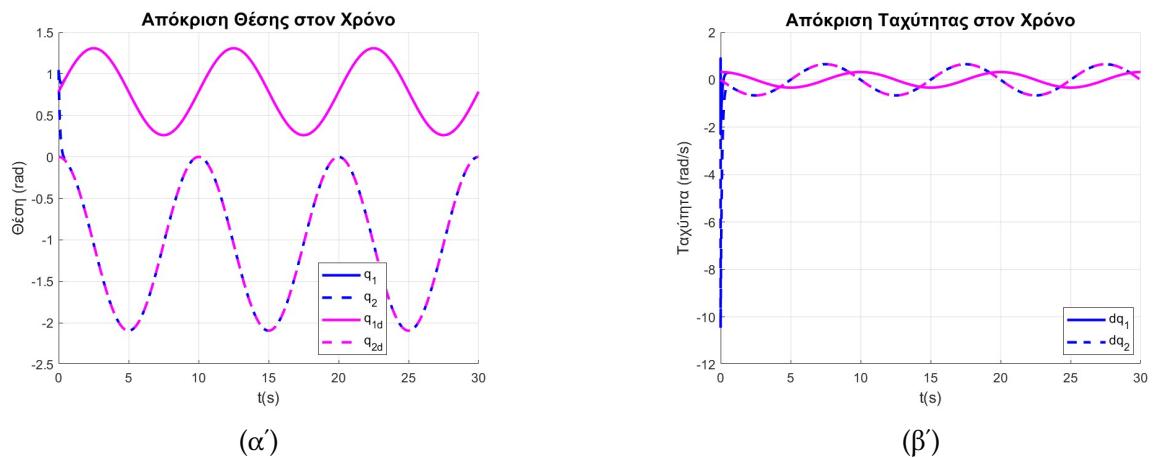
$$\rho = ||\ddot{x}_d - \lambda x_2 + \lambda \dot{x}_d|| \cdot ||H_{max} - \hat{H}|| - ||x_2|| \cdot ||C_{max} - \hat{C}|| + |\hat{g} - g_{min}|$$

και συνάρτηση Lyapunov  $V = \frac{1}{2}H(x_1)s^2$ , καταλήγουμε σε εκθετική ευστάθεια, με τον ίδιο τρόπος, όπως και στο Θέμα 1.

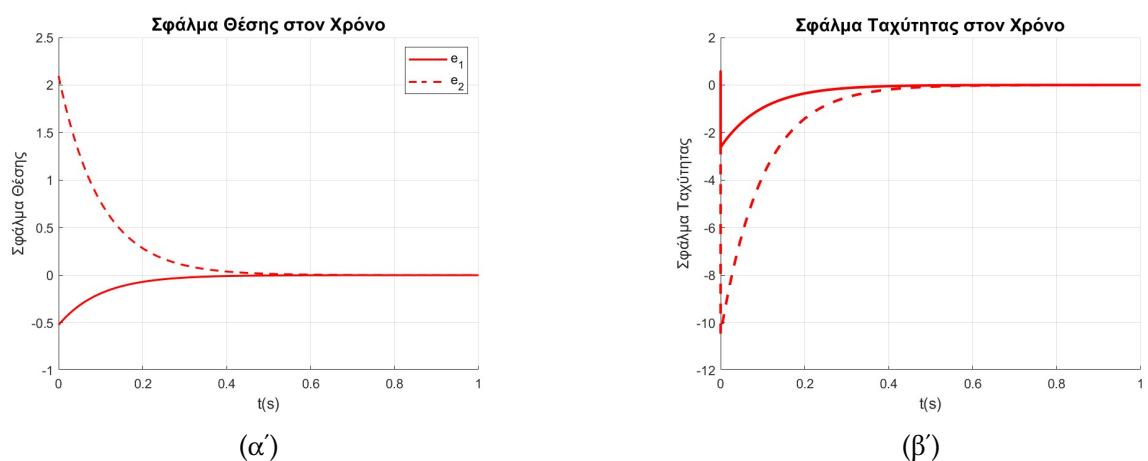
**Προσομοιώσεις** Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα που εξήχθησαν από την προσομοίωση του συστήματος και κρίνεται πως συμβάλουν στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Ως ελεγκτής χρησιμοποιείται ο ίδιος με το πρώτο μέρος.



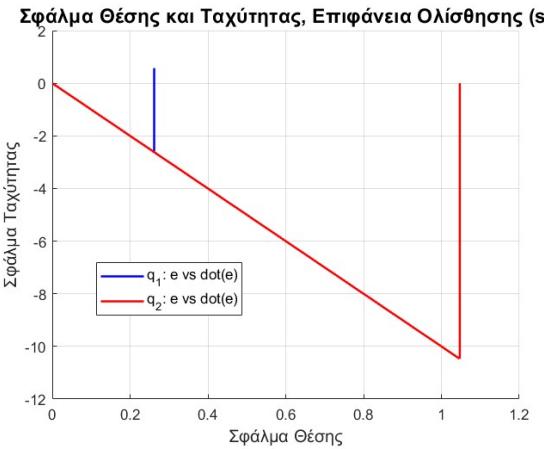
Σχήμα 3.4: Αποκρίσεις Θέσης και Ταχύτητας σε χρόνο 1 sec



Σχήμα 3.5: Αποκρίσεις Θέσης και Ταχύτητας σε χρόνο 30 sec



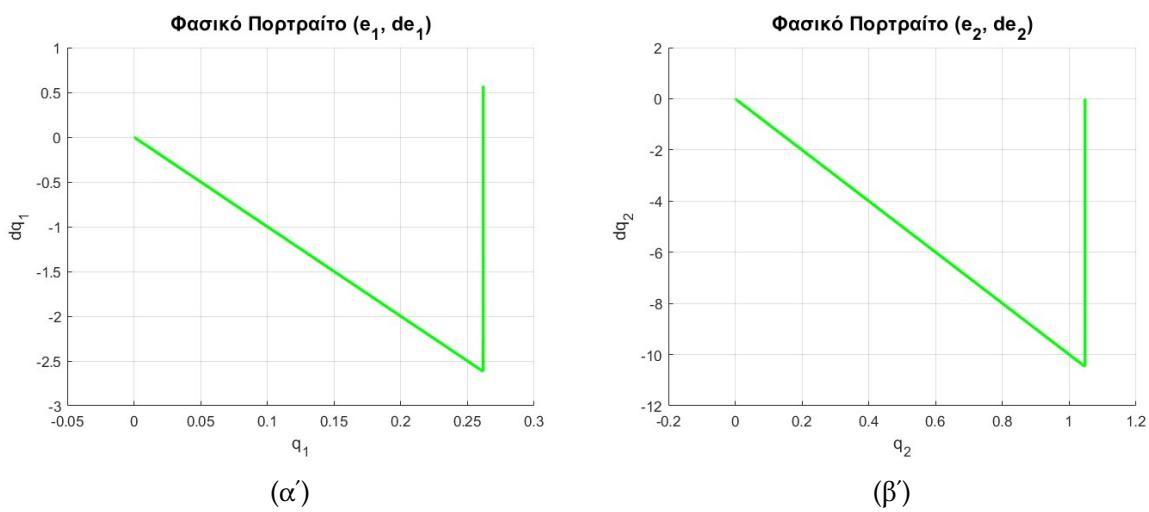
Σχήμα 3.6: Σφάλματα Θέσης και Ταχύτητας στον Χρόνο



Σχήμα 3.7: Sliding Surface

### Παρατηρήσεις

- 3.4 και 3.5: Ο στόχος ελέγχου της θέσης επιτυγχάνεται πλήρως για την  $q_1$  και την  $q_2$ . Βλέπουμε ότι συγκλίνει στα 0.5sec περίπου, ενώ σε βάθος χρόνου η τροχιά παρακολουθείται επιτυχώς. Το ίδιο ισχυεί και για την ταχύτητα των αρθρώσεων, οι οποίες συγκλίνουν εξίσου.
- 3.6: Η παραπάνω διαπίστωση επιβεβαιώνεται και στις απεικονίσεις των αποκρίσεων των σφαλμάτων, τα οποία συγκλίνουν στο μηδέν, τόσο για την ταχύτητα όσο και για την θέση των 2 αρθρώσεων.
- 3.7: Αποτυπώνεται ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα φτάνει στην επιφάνεια ολίσθησης και πως παραμένει σε αυτήν με τον μηδενισμό των σφαλμάτων. Γιαυτό και παρατηρούμε 2 ευθείες για το κάθε φασικό πορτρέτο σφαλμάτος για  $q_1$  και  $q_2$ . Παρακάτω αποτυπώνονται και μεμονωμένα τα 2 φασικά πορτρέτα για καλύτερη οπτικοποίηση.



Σχήμα 3.8

# Βιβλιογραφία

- [1] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, *Σύγχρονα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα, 14η Έκδοση
- [2] Βασίλειος Πετρίδης, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Τόμος Β, Εκδόσεις Ζήτη
- [3] Διαλέξεις από το μάθημα "Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 3", Πολυτεχνική Σχολή ΑΠΘ
- [4] MATLAB, *What Is Sliding Mode Control?*, [Online] <https://www.youtube.com/watch?v=RD-2oiwEbDo&t=617s>
- [5] The MathWorks, Inc., *MATLAB Documentation for ode*. [Online]. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode>