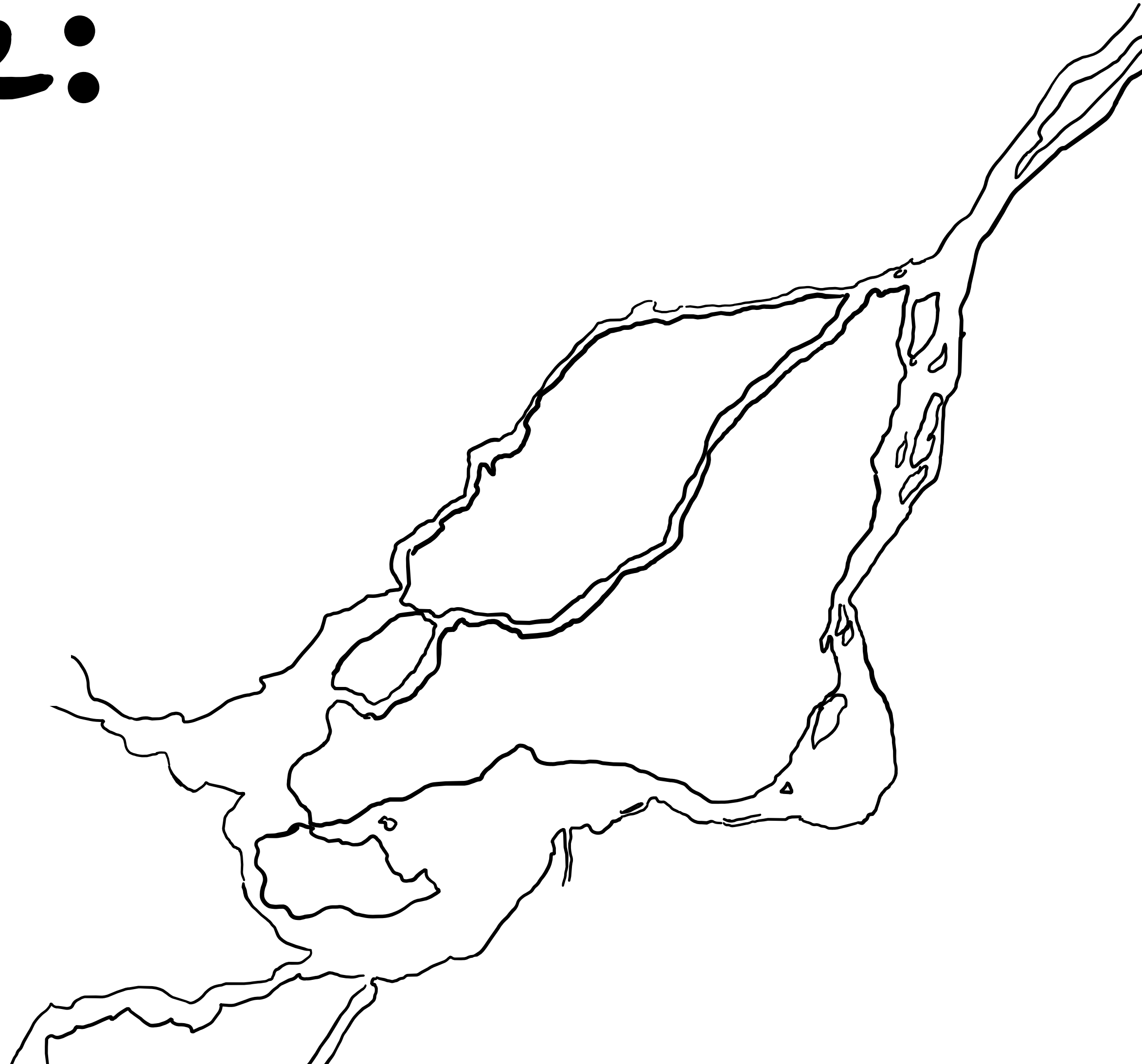

Bienvenue à
MONTRÉAL

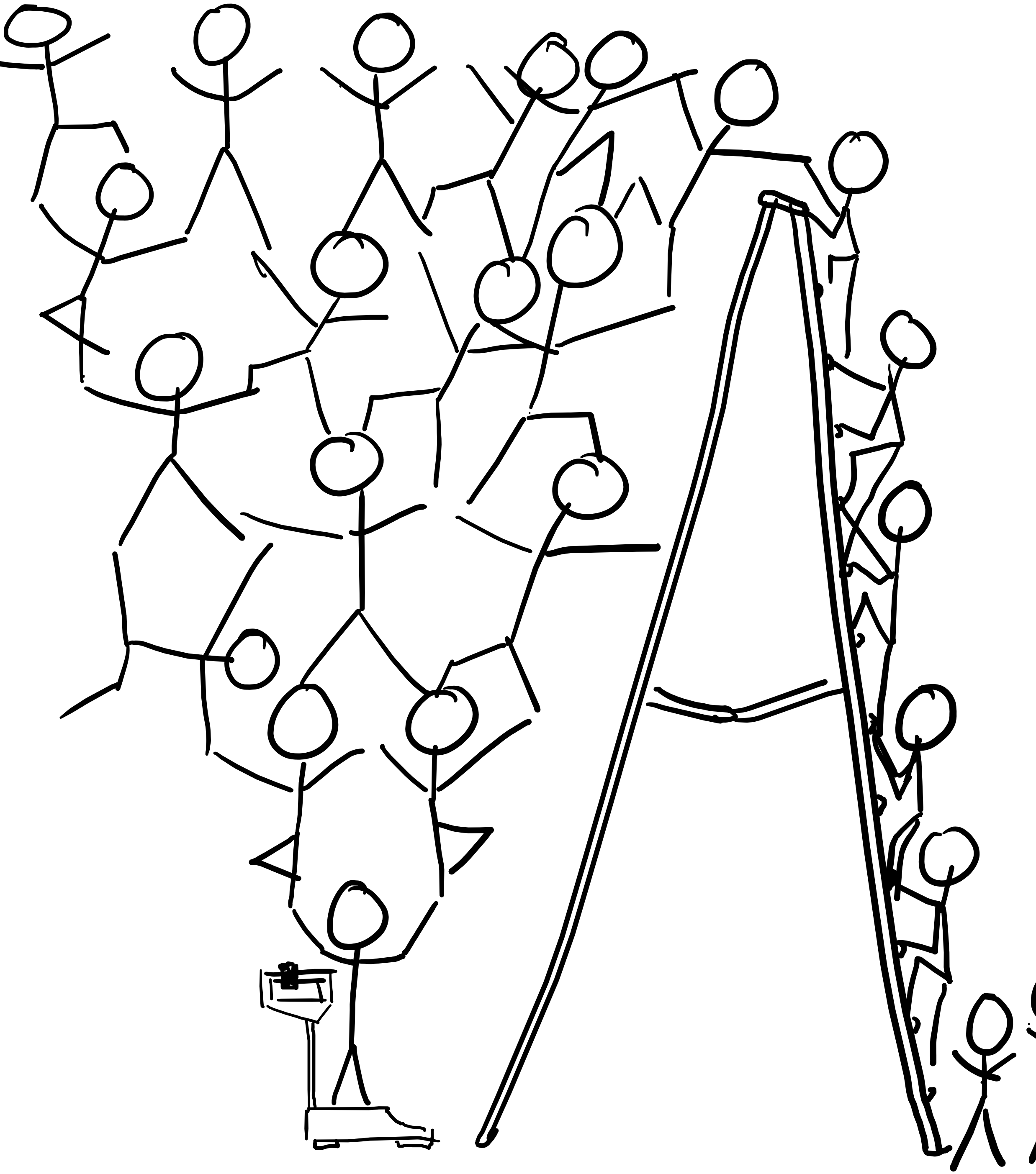
Population de la

région urbaine:

4 098 927 *

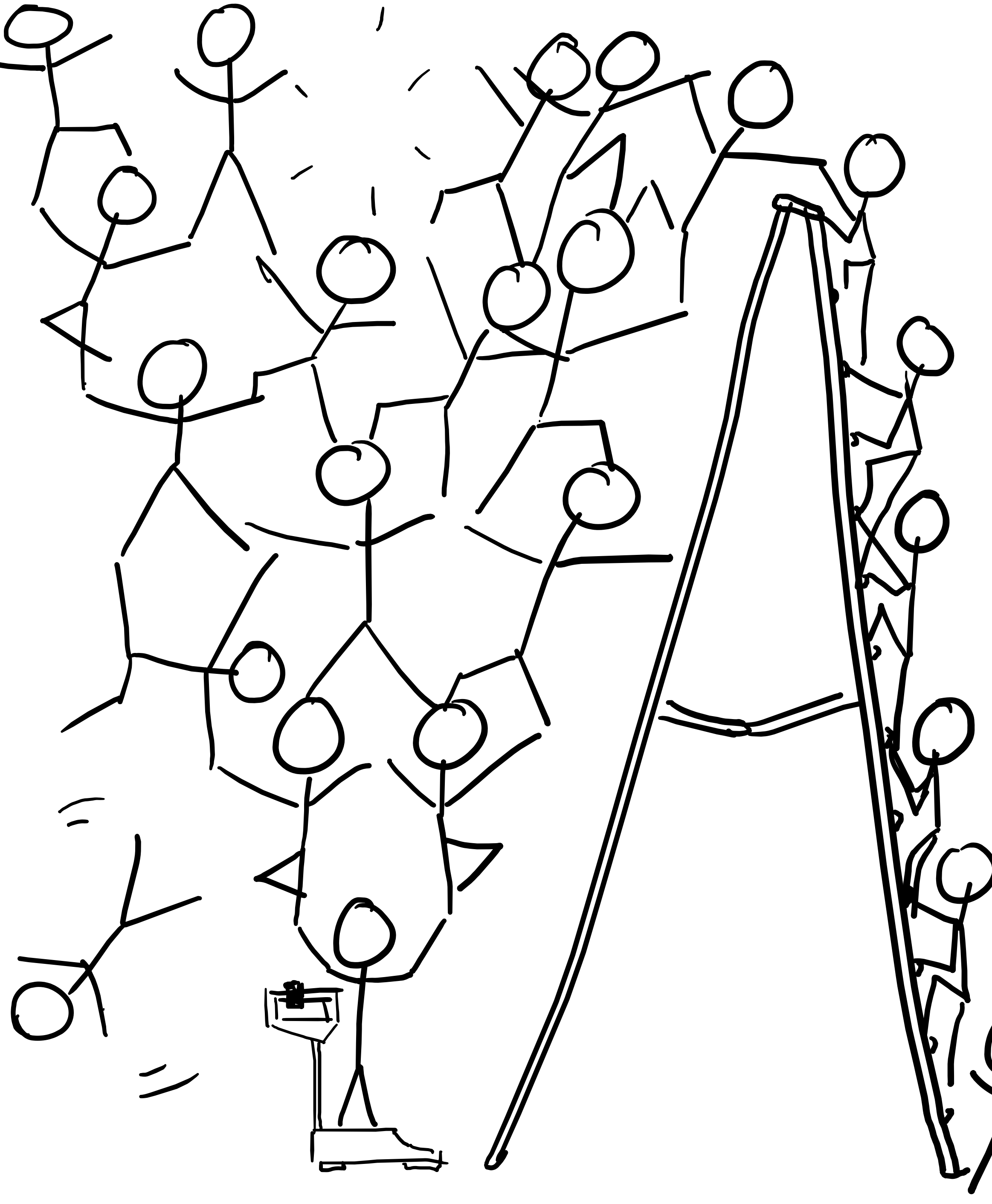
au recensement de 2016.





Si on embarque tout ce beau monde-là sur un pèse-personnes...

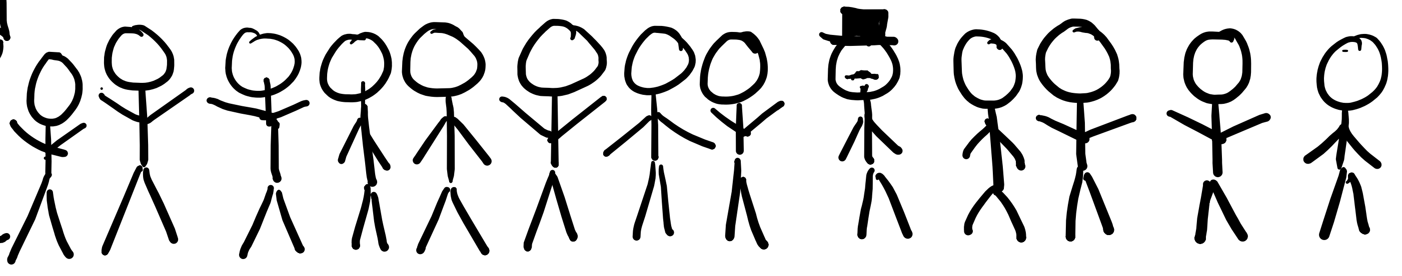
Ça pèse combien ?



Si on enlève une seule personne,

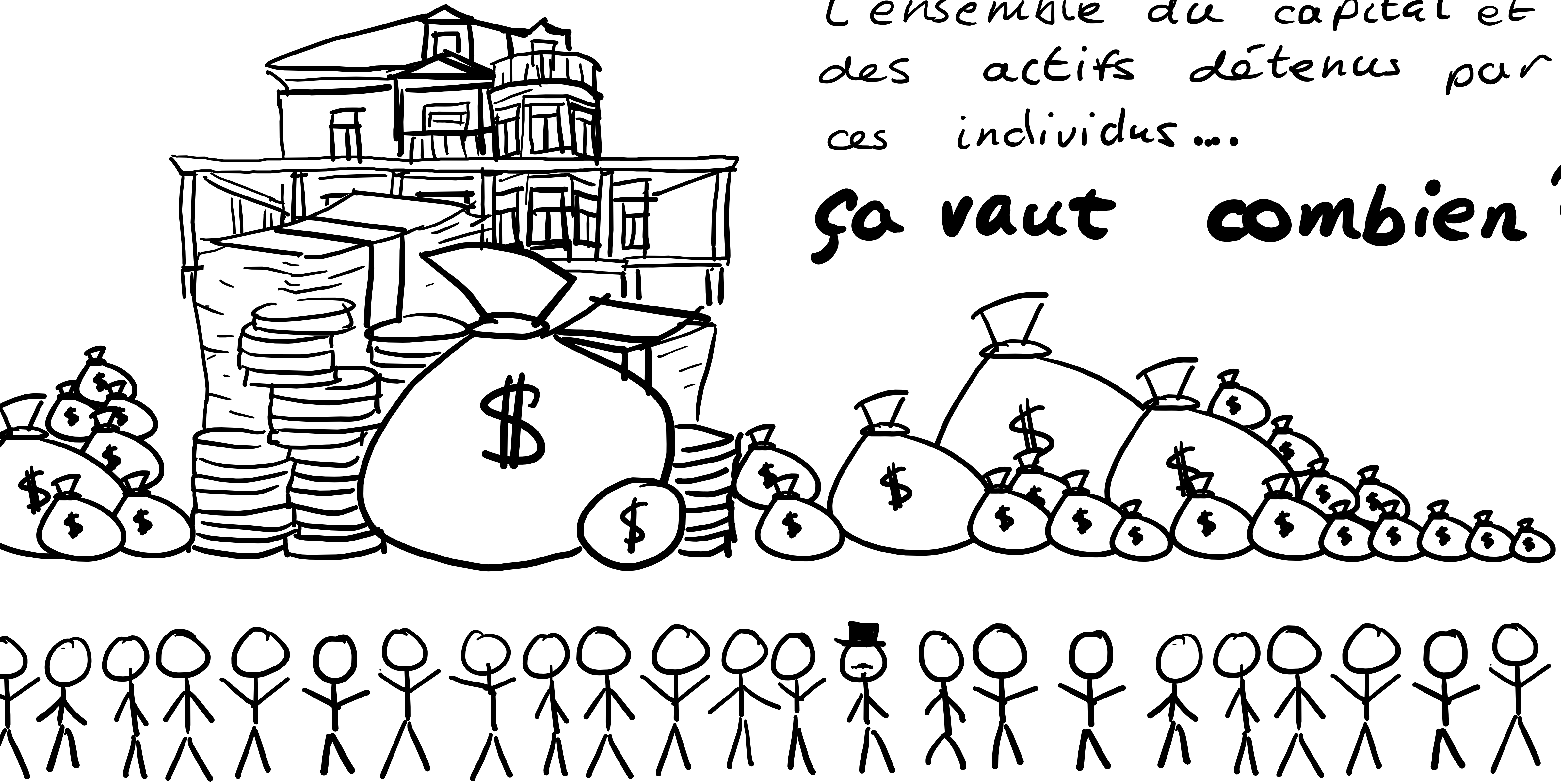
est-ce que ça change grand chose ?

Est-ce que ça dépend qui ?



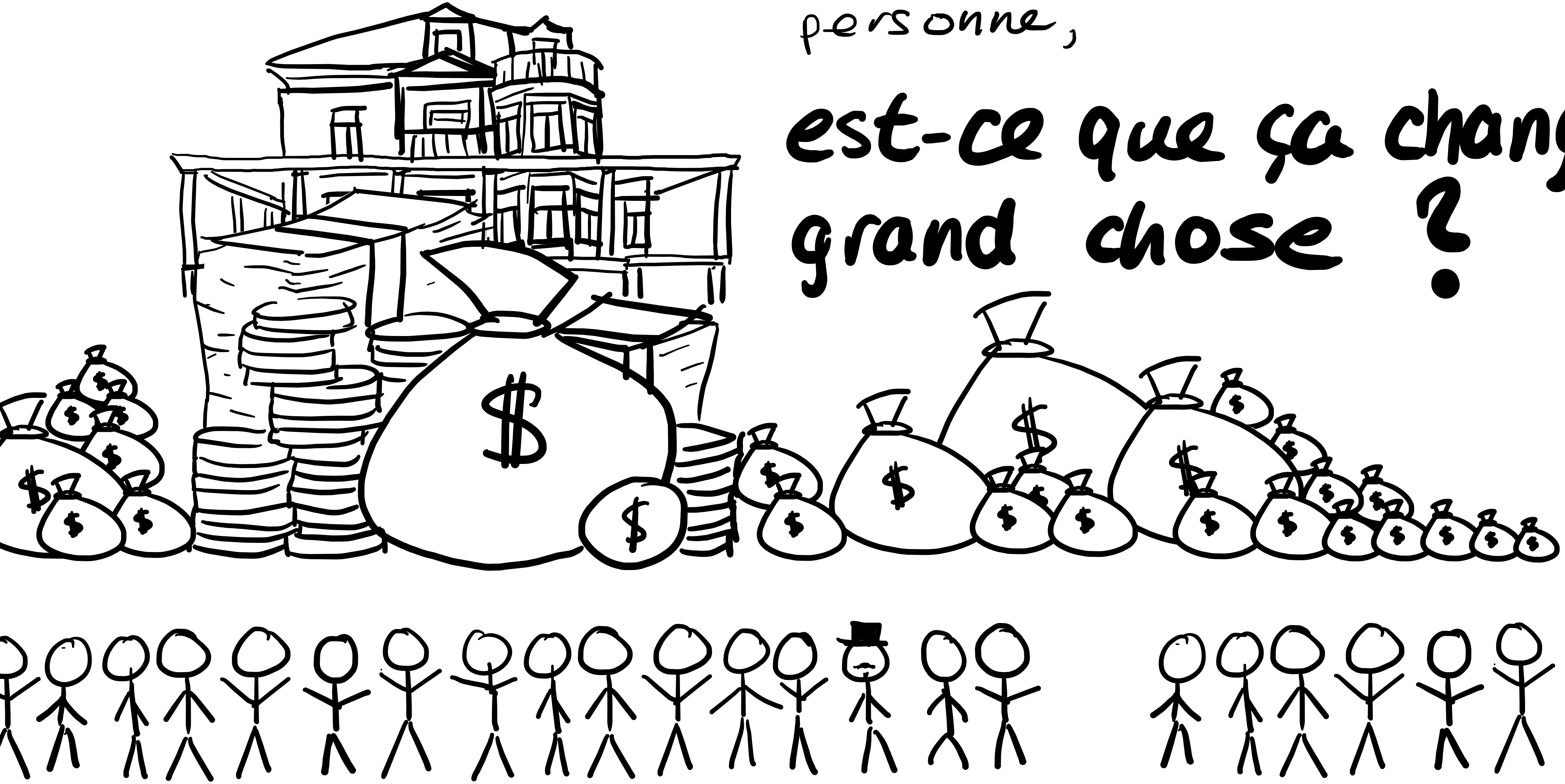
Et si on prend l'ensemble du capital et des actifs détenus par ces individus....

ça vaut combien ?

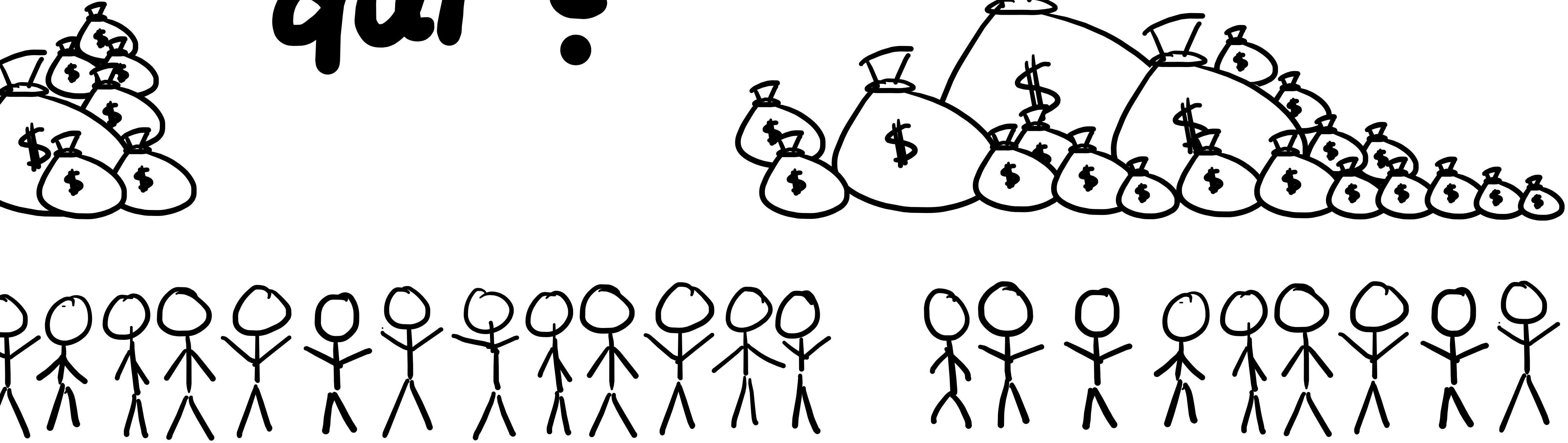


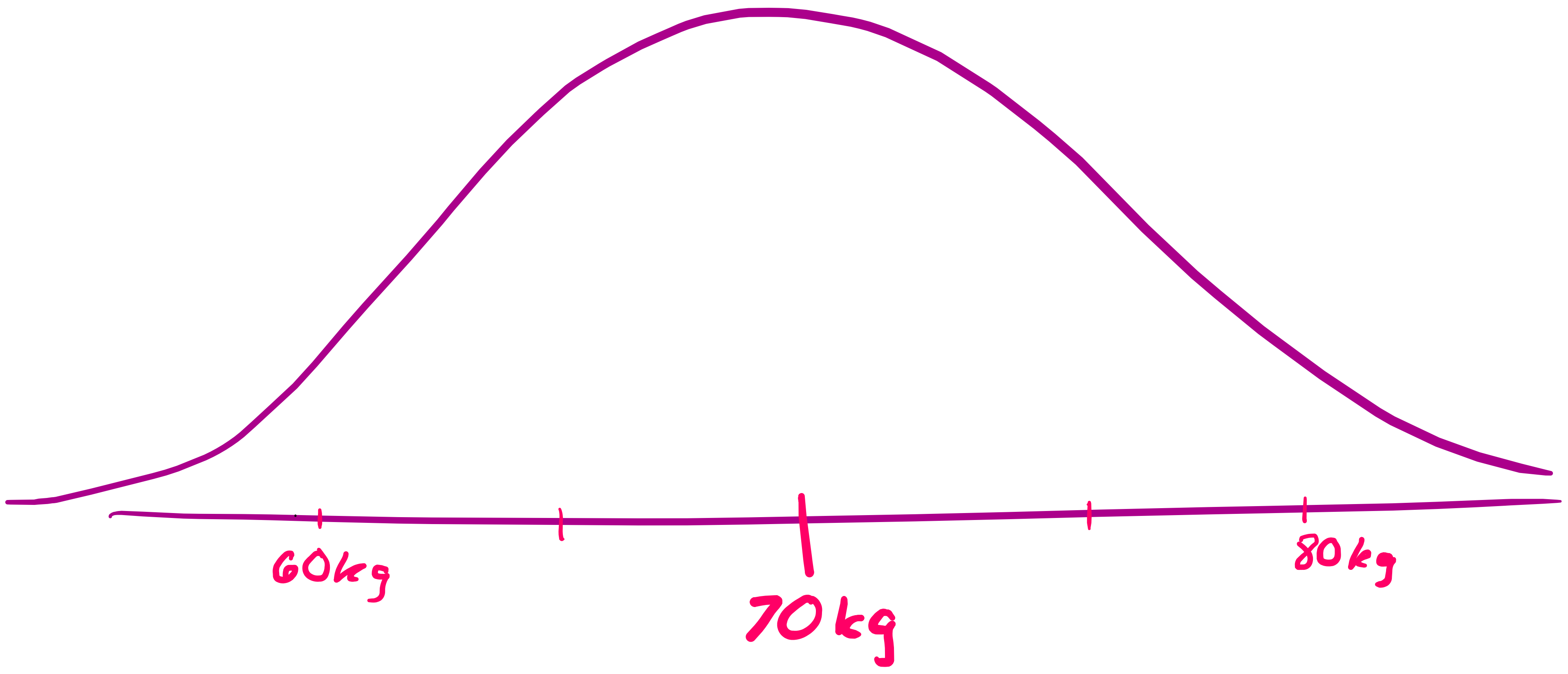
Si on enlève une personne,

est-ce que ça change grand chose ?

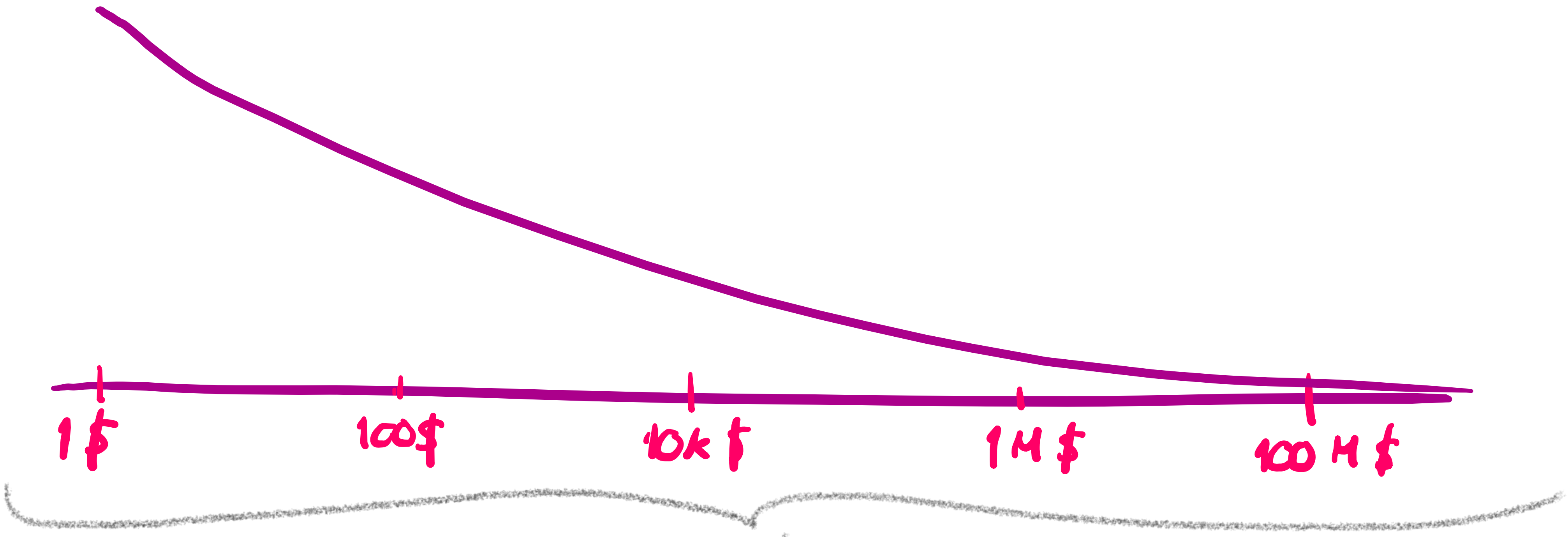


Est-ce que ça dépend qui ?





distribution de la **masse corporelle**



échelle logarithmique

distribution de l'**actif**

Petit guide d'autodéfense statistique

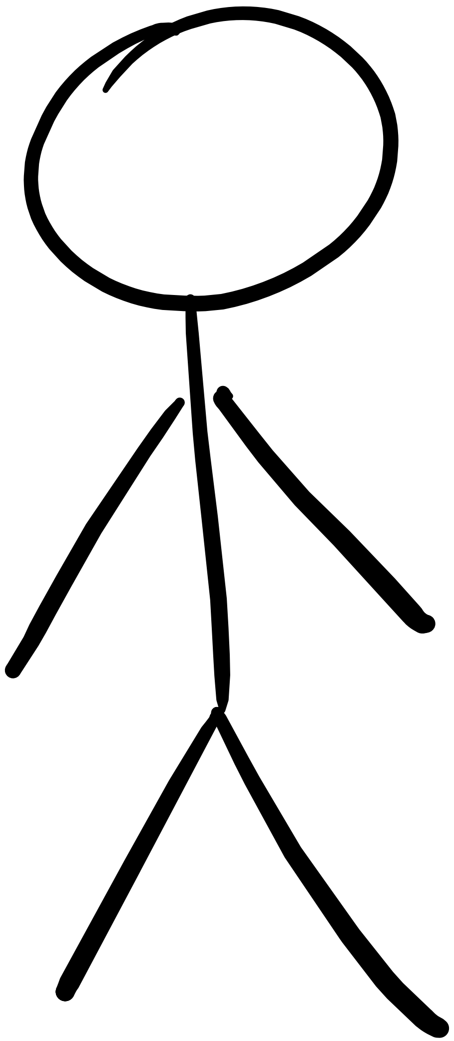
une introduction simple
aux probabilités et aux statistiques.

Élise Davignon, M.Sc.
doctorante et chargée de cours à l'U. de Montréal
elise.davignon@umontreal.ca

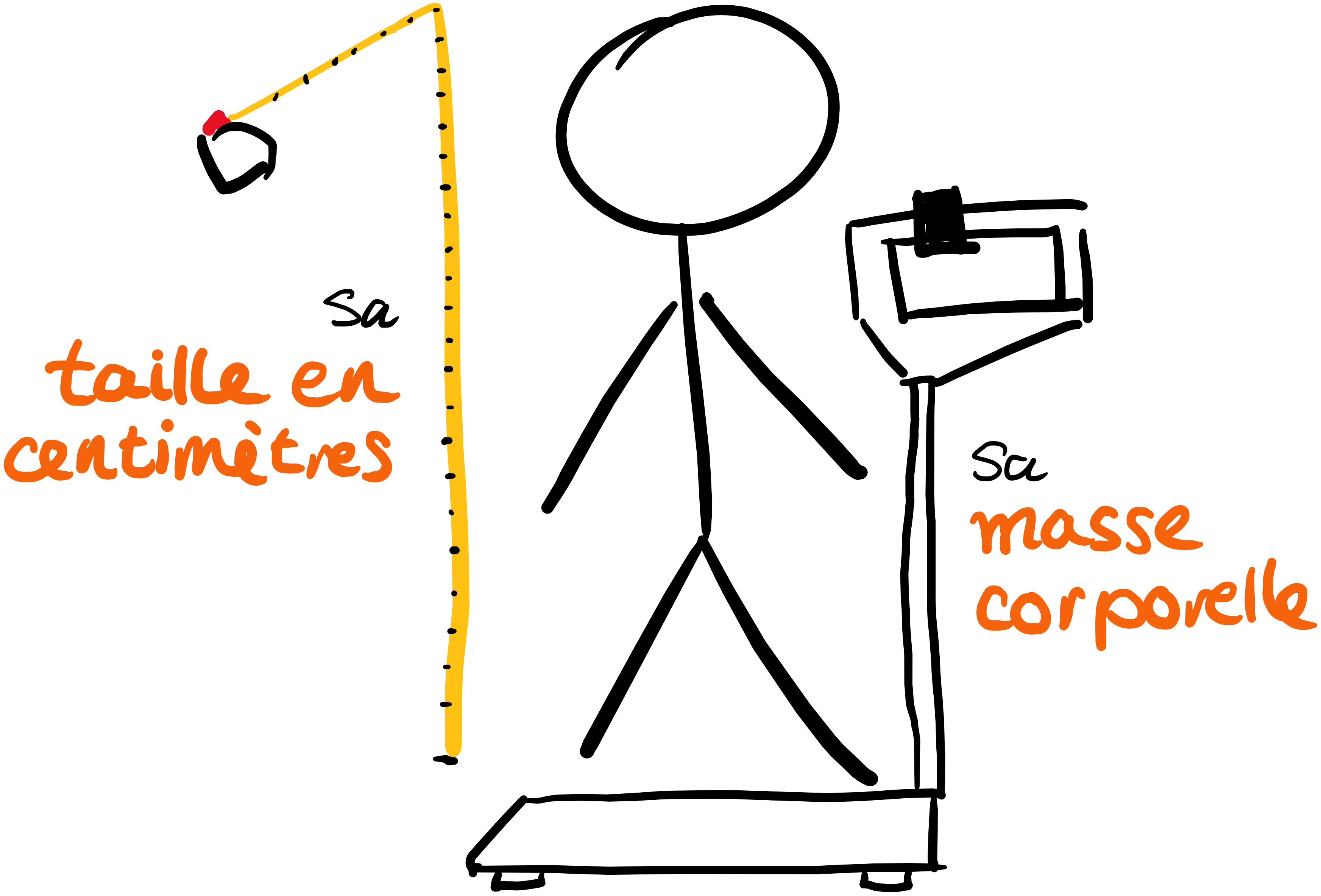

Quelles valeurs
prennent les nombres
aléatoires ?
f(x)
x
Gros plan sur les
3.) Variables
aléatoires

définition des variables aléatoires.

On choisit un·e Montréalais·e au hasard...

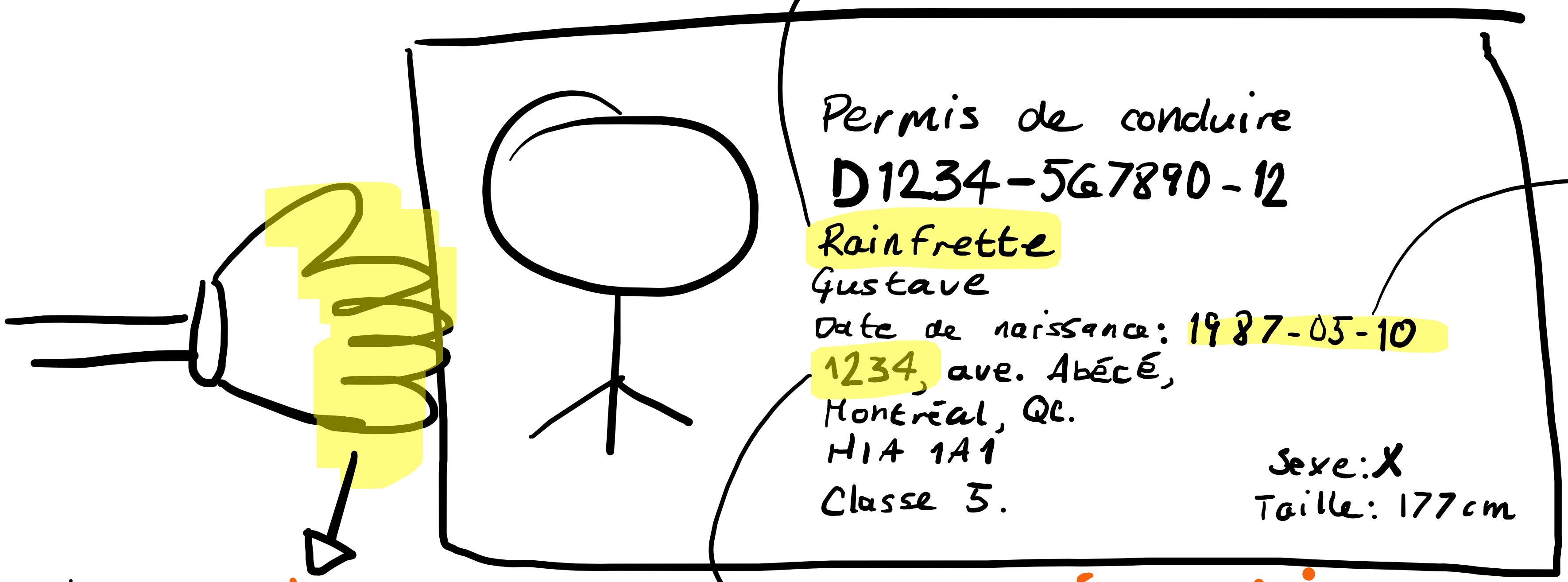


... puis on mesure:



... puis on mesure:

Le nombre de lettres dans son nom de famille

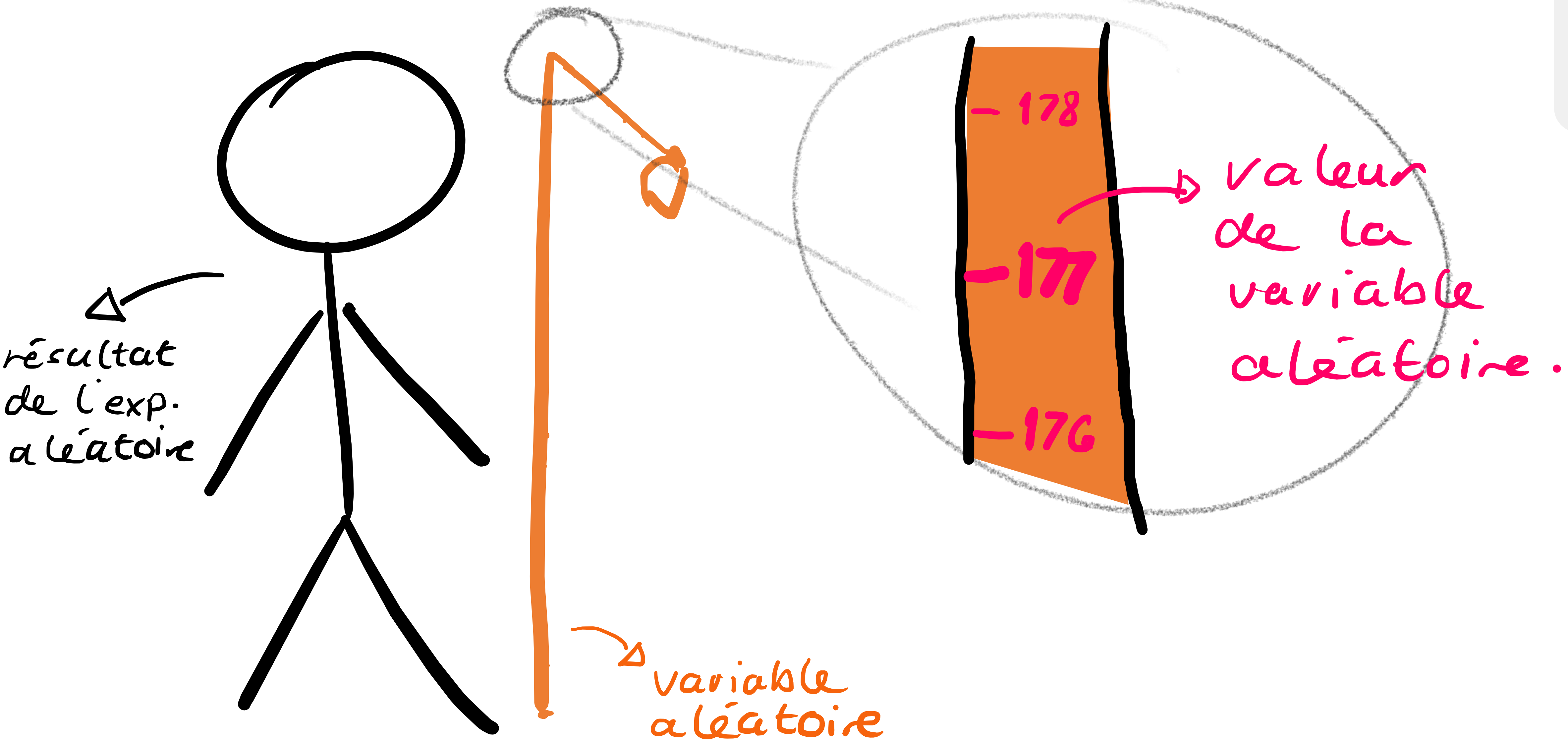


son âge

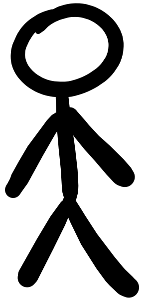
Le nombre de doigts de sa main gauche

Le numéro civil de son adresse

Une variable aléatoire



Une variable aléatoire

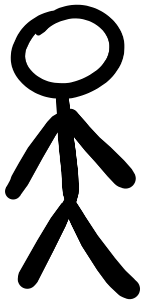
T () = 177 cm

la variable aléatoire

le résultat de l'expérience aléatoire

la valeur de la variable qui correspond au résultat.

Une **variable aléatoire**

T () = 177 cm

(une fonction) (son argument) (sa valeur).

Une **variable aléatoire**

oméga minuscule

$$T(\omega) = x$$

(une fonction) (son argument) (sa valeur).

Une **variable aléatoire**

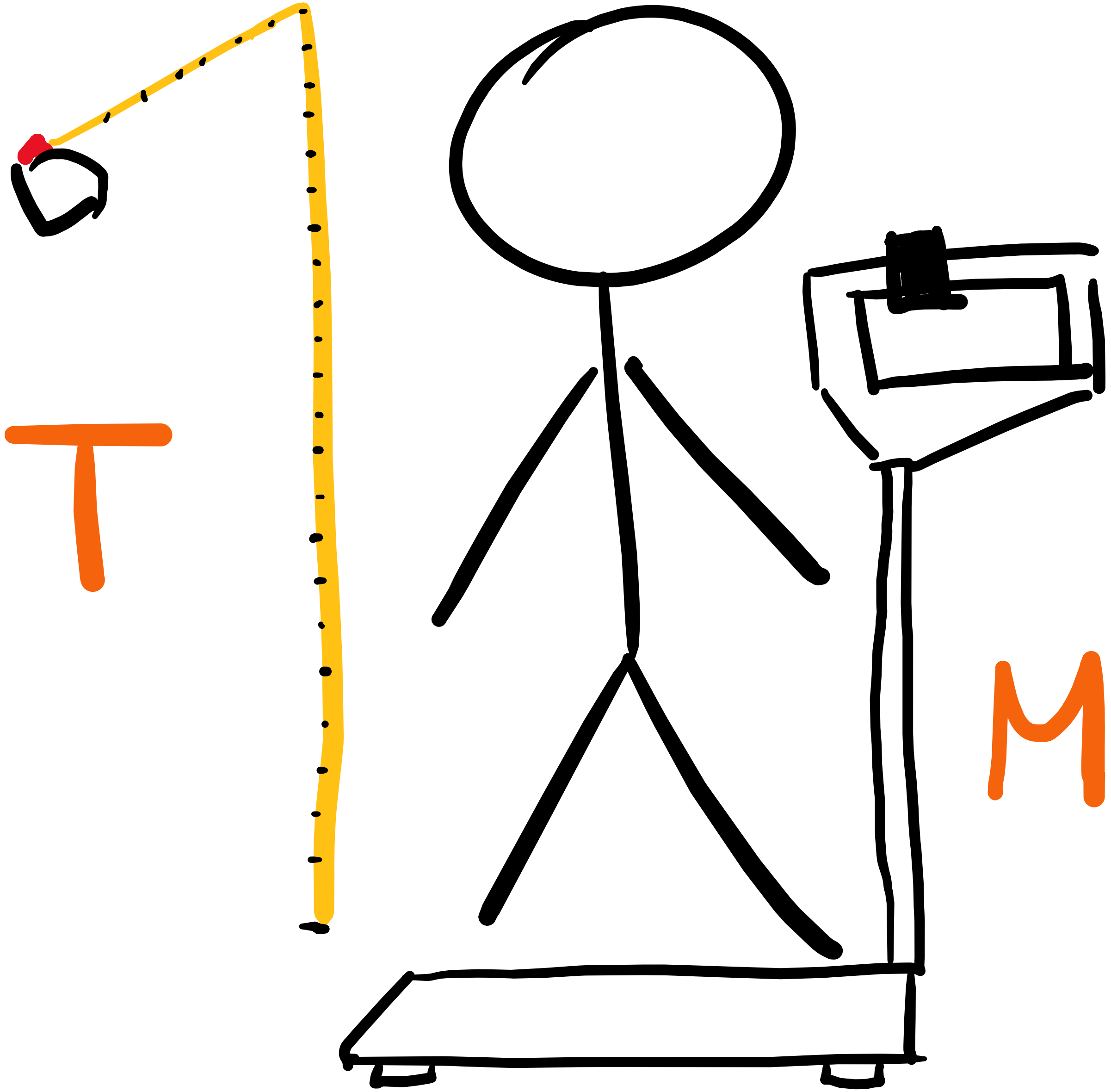
$$T = x$$

Une **variable aléatoire**

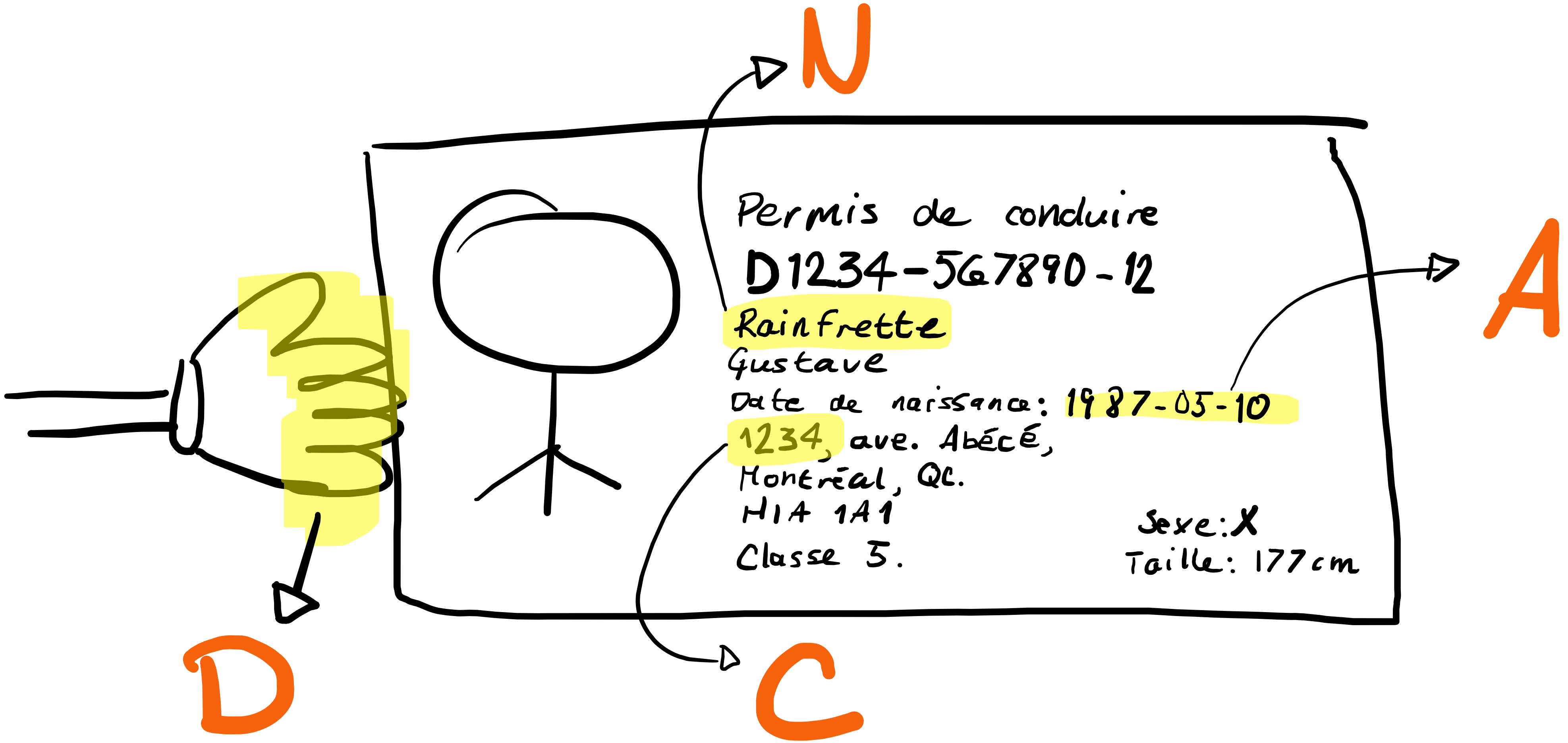
sa **valeur** pour le résultat de l'expérience aléatoire qui s'est réalisé.

On omet souvent l'argument dans le contexte des **v.a.** pour alléger la notation.

On peut considérer en même temps plusieurs **variables aléatoires.**



On peut considérer en même temps plusieurs variables aléatoires.



On peut considérer en même temps plusieurs **variables aléatoires.**

$T($🧍$) = 177\,\mathrm{cm}$ $\qquad$ $A($🧍$) = 35$ ans

$M($🧍$) = 68\,\mathrm{kg}$ $\qquad$ $C($🧍$) = 1234$

$N($🧍$) = 10$ $\qquad$ $D($🧍$) = 5$

$$\mathrm{MANDAT} = 737\,205\,000\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{ans}^2\cdot\mathrm{cm}$$

On peut définir des **événements** à l'aide des **variables aléatoires:**

$$E = \{X = 5\}$$

... et on peut donc calculer la **probabilité** de ces **événements.**

$$P(\underbrace{X=5}) = \frac{1}{12}$$

Cette expression a du sens, car $\{X=5\}$ est un **événement.**

... et on peut donc calculer la **probabilité** de ces **événements**.

$$\cancel{P(X) = \frac{1}{12}}$$

Cette expression n'a pas de sens ! En effet, **on ne peut que mesurer des probabilités d'événements**. Or, X est une **variable aléatoire**.

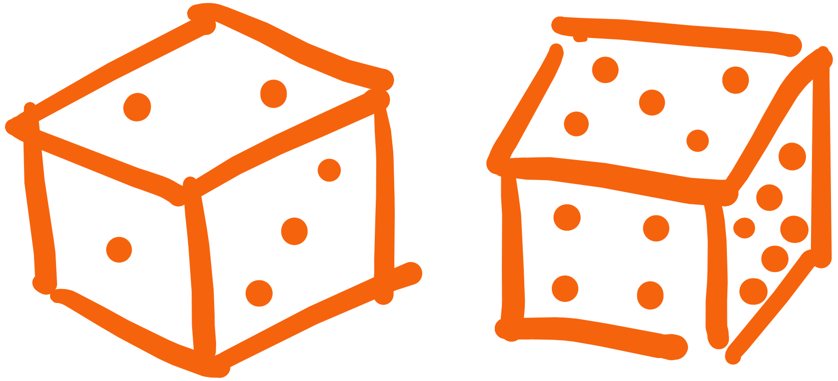
quelques
exemples

$$\{X = 2\}$$

Le premier dé montre un ⚁

$$\{X + Y = 7\}$$

La somme des dés est 7.



X Y

$$\{Y \geq 4\}$$

Le second dé est ≥ ⚃

$$\{X < Y\}$$

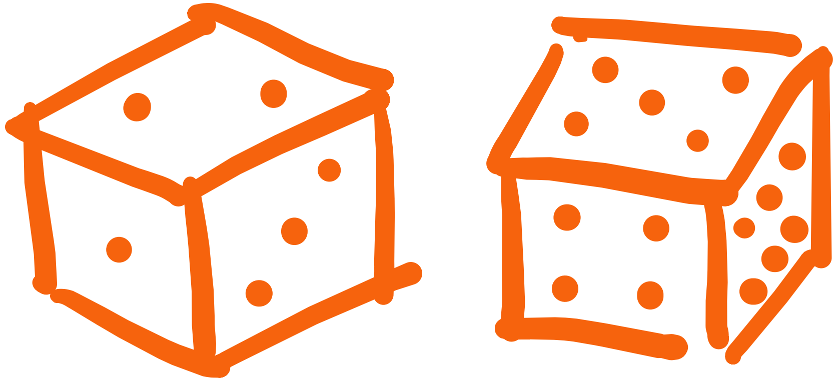
Les dés sont en ordre croissant.

quelques

exemples

$P(X = 2) = \frac{1}{6}$

$P(X + Y = 7) = \frac{1}{6}$



X Y

$P(Y \geq 4) = \frac{1}{2}$

$P(X < Y) = \frac{15}{36}$

L'indépendance.

X et Y sont **indépendantes**

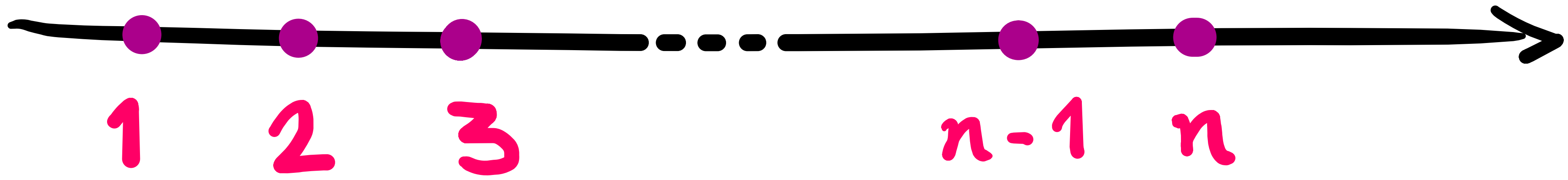
si

$$P(X \leq a \mid Y \leq b) = P(X \leq a)$$

pour tous a, b.

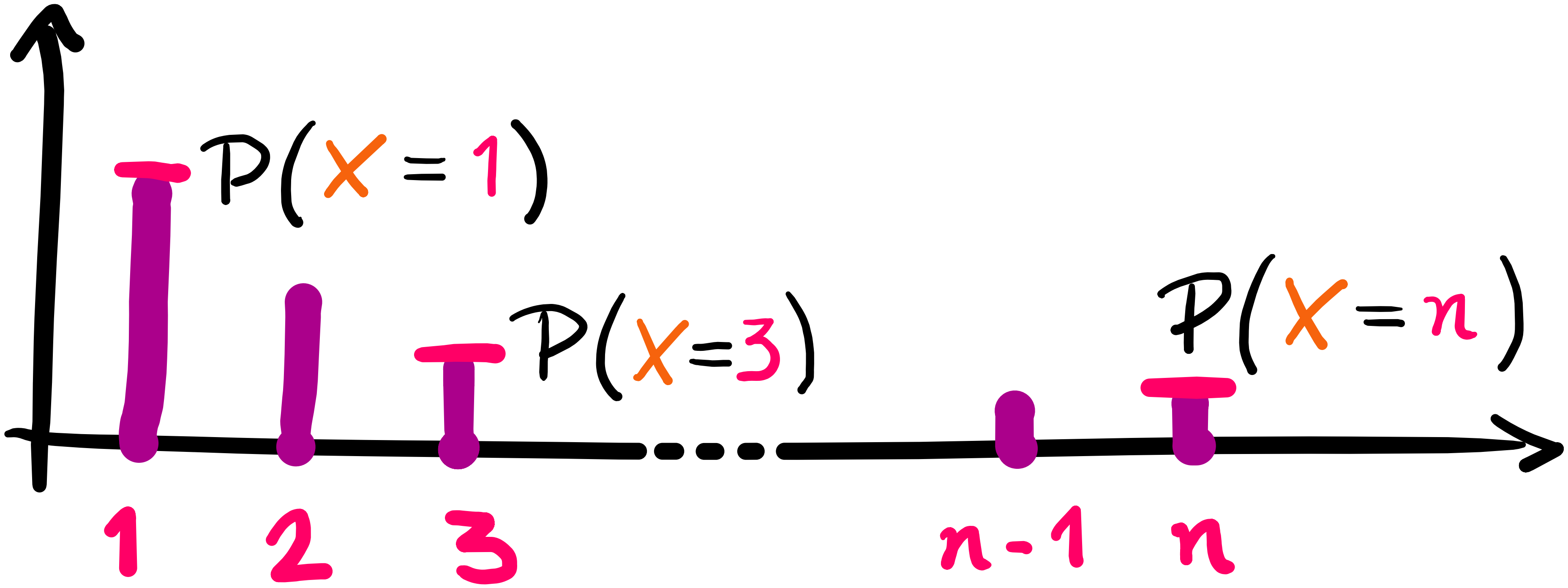
La distribution d'une variable aléatoire.

Les variables aléatoires discrètes. ⟵ Chuuuut !



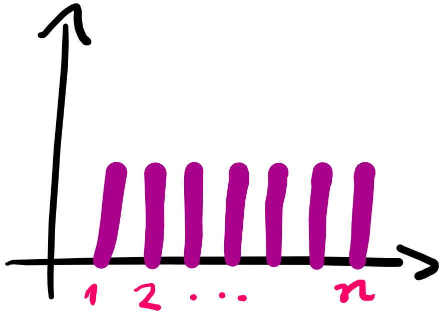
Les variables aléatoires **discrètes** peuvent prendre une **liste** de **valeurs**.

La distribution d'une variable aléatoire discrète est caractérisée par

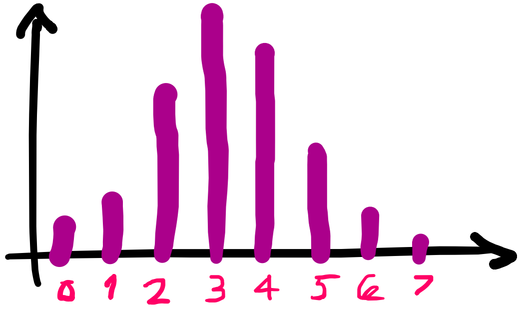


sa **fonction de masse.**

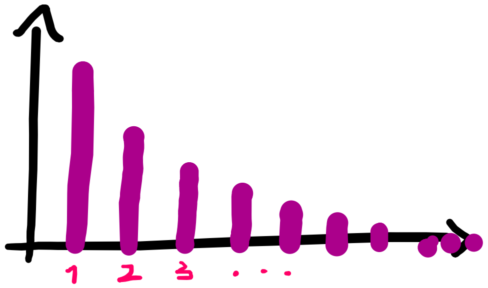
quelques distributions discrètes



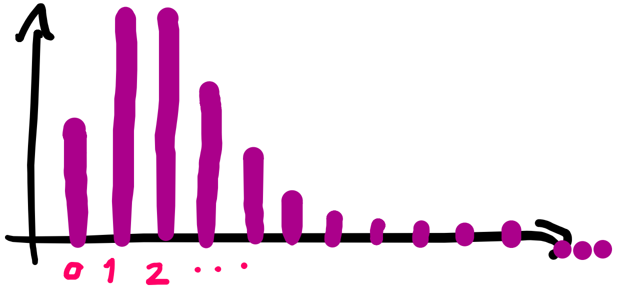
distribution
uniforme



distribution
binomiale



distribution
géométrique

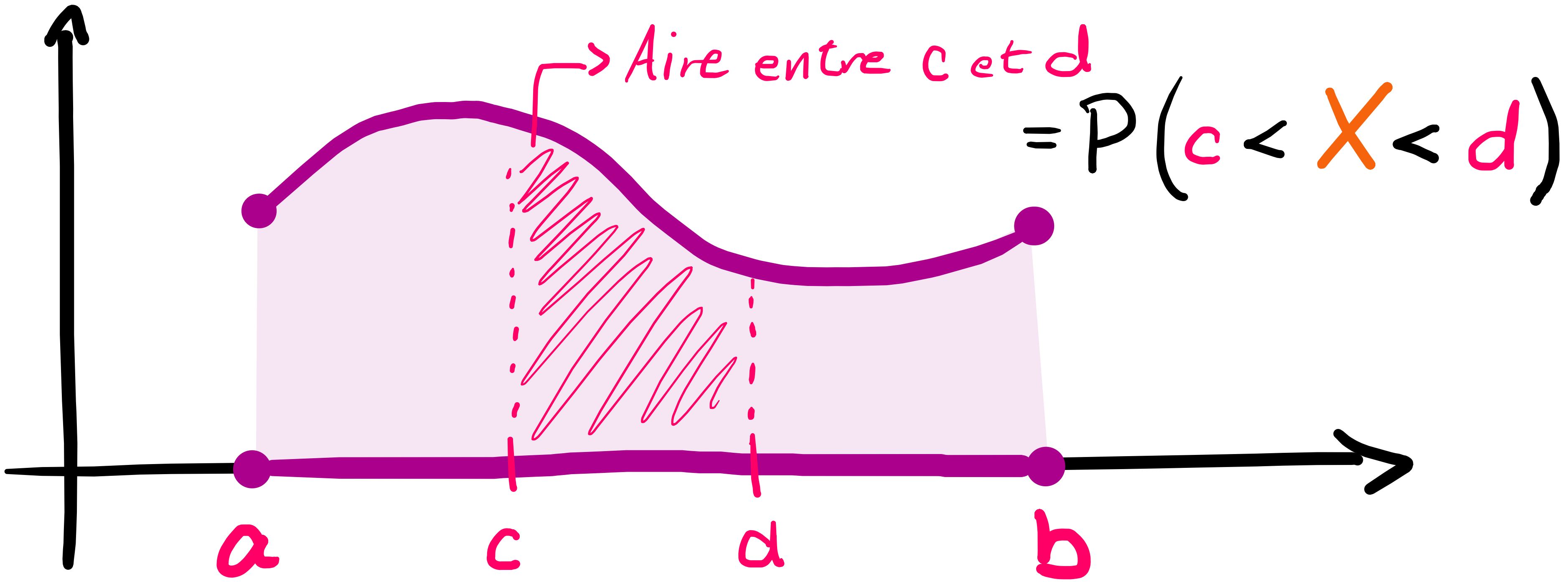


distribution de
Poisson.

Les variables aléatoires continues.

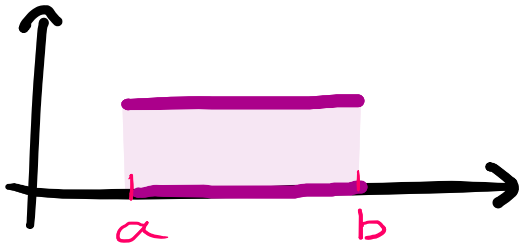
Les variables aléatoires **continues** peuvent prendre une infinité de **valeurs** dans une **plage**.

La distribution d'une variable aléatoire continue est caractérisée par

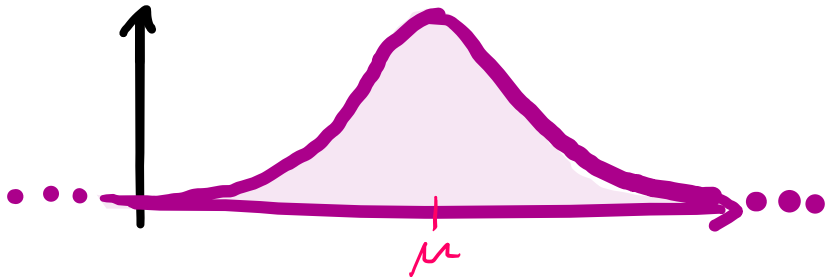


Sa densité.

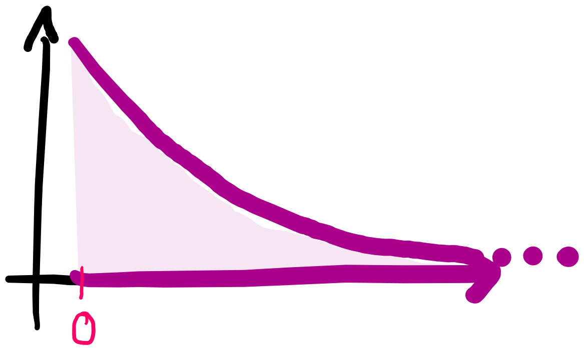
quelques distributions continues.



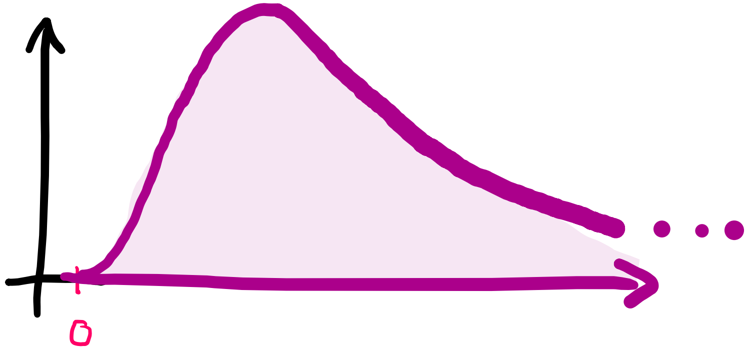
distribution
uniforme



distribution
normale



distribution
exponentielle

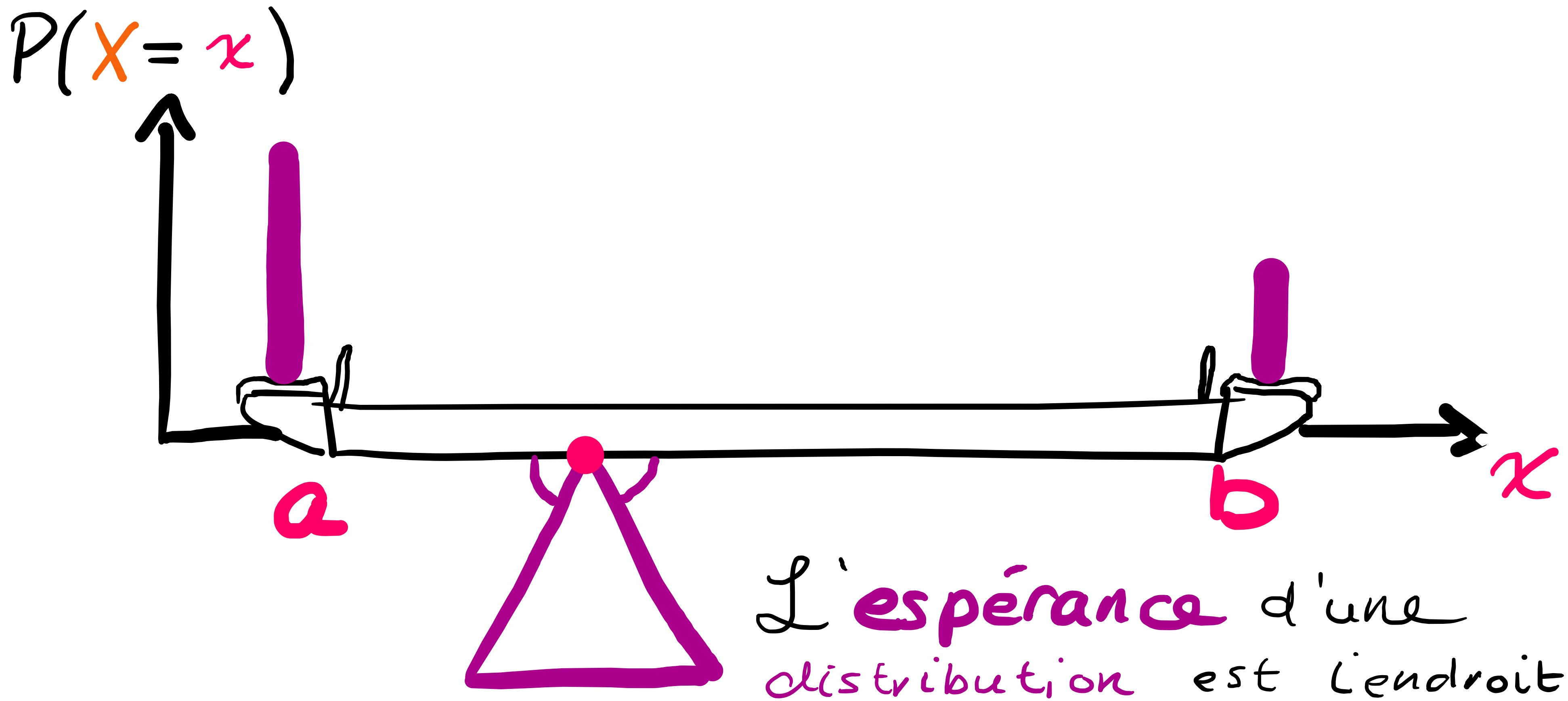


distribution
gamma.

Les paramètres des distributions.

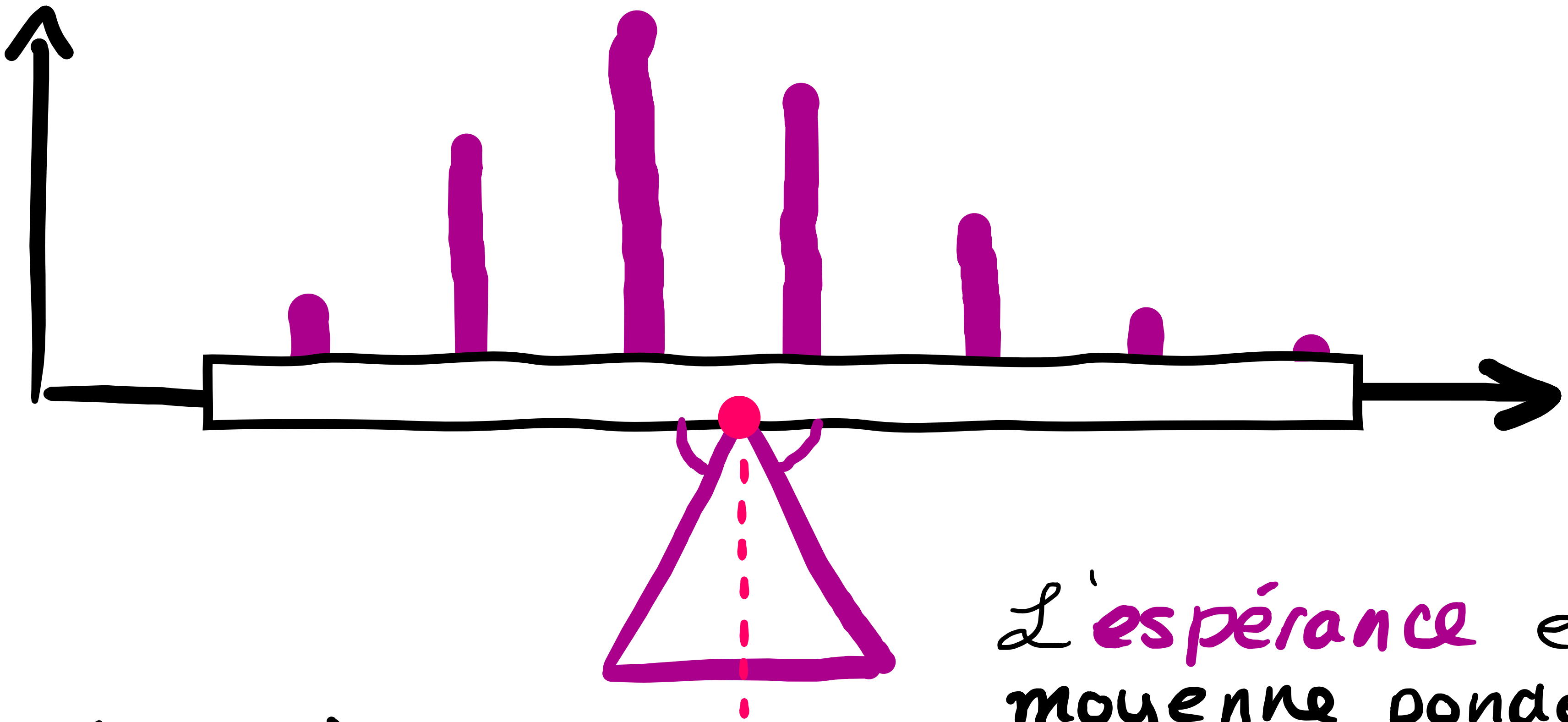
i. les mesures de la tendance centrale.

L'espérance d'une variable aléatoire.



L'espérance d'une distribution est l'endroit où il faut placer le pivot pour que la bascule soit en équilibre.

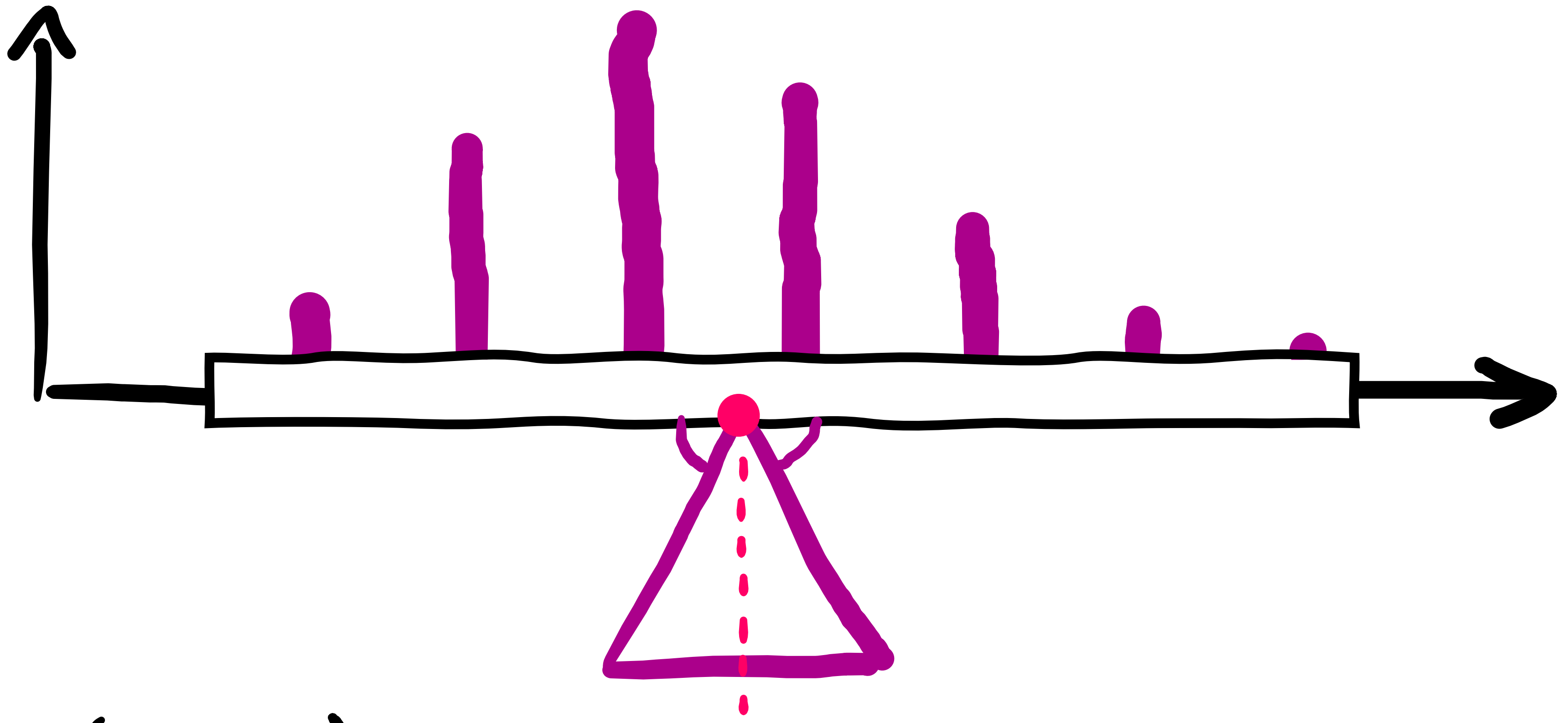
L'espérance d'une variable aléatoire.



$$E(X) = \mu$$

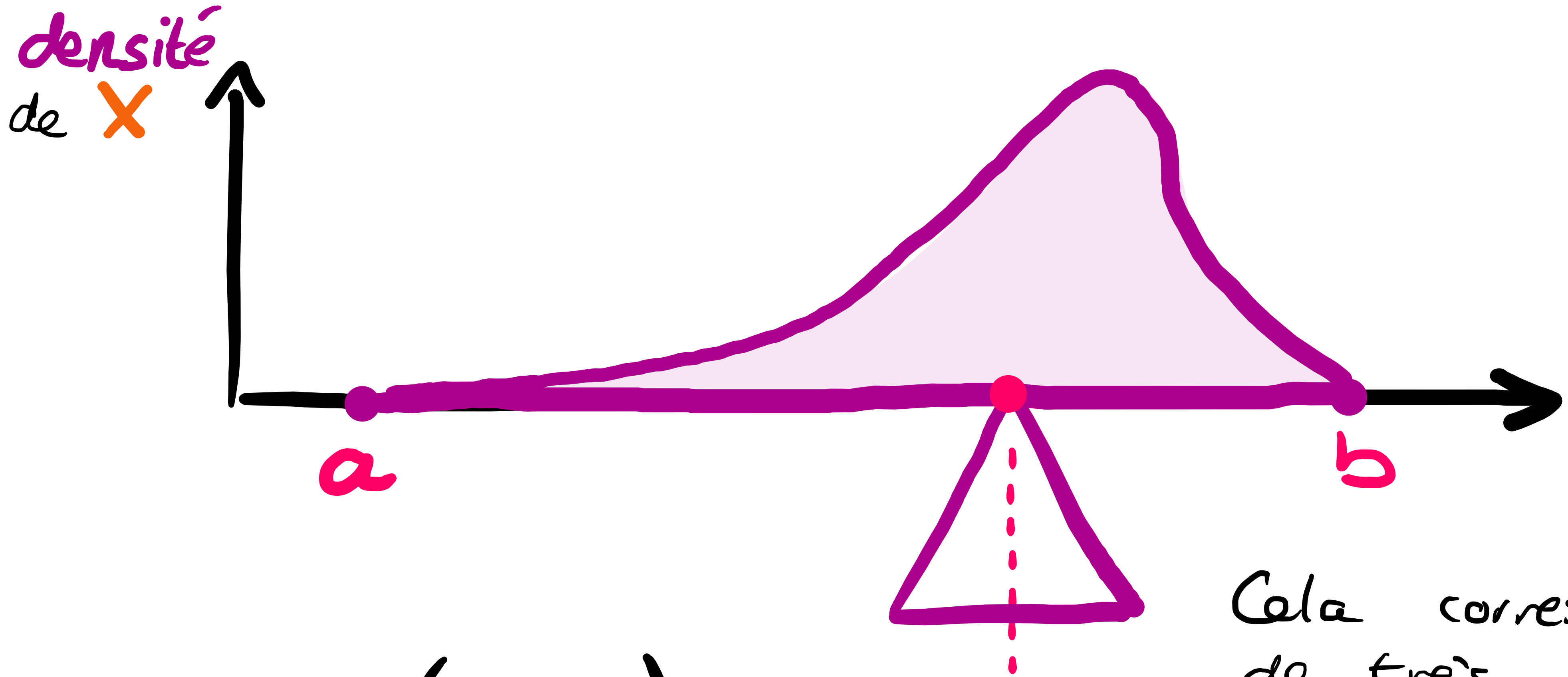
L'espérance est la **moyenne pondérée** des valeurs possibles selon leurs probabilités.

L'espérance d'une variable aléatoire.



$$E(X) = \mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + \cdots$$

L'espérance d'une variable aléatoire.



$$E(X) = \mu$$

Cela correspond de très près à la notion de **centre de masse.**

L'espérance d'une variable aléatoire.

la lettre grecque mu.

$$E(X) = \mu$$

L'espérance — la variable aléatoire — La valeur de l'espérance de la variable aléatoire.

L'espérance d'une variable aléatoire.

$$E(X) = \mu$$

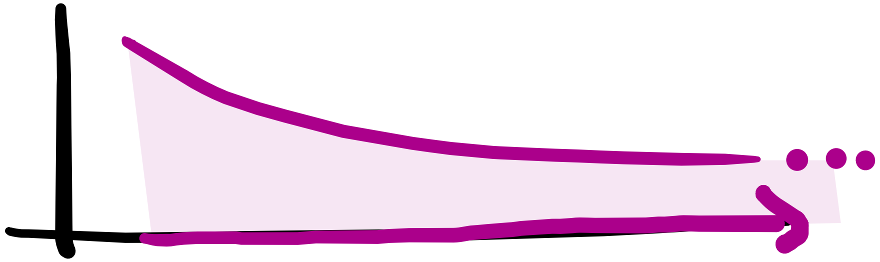
(une fonction) (son argument) (la valeur correspondante)

Parfois, on appelle aussi ces objets des fonctionnelles puisque leur argument est lui-même une fonction.

L'espérance d'une variable aléatoire.

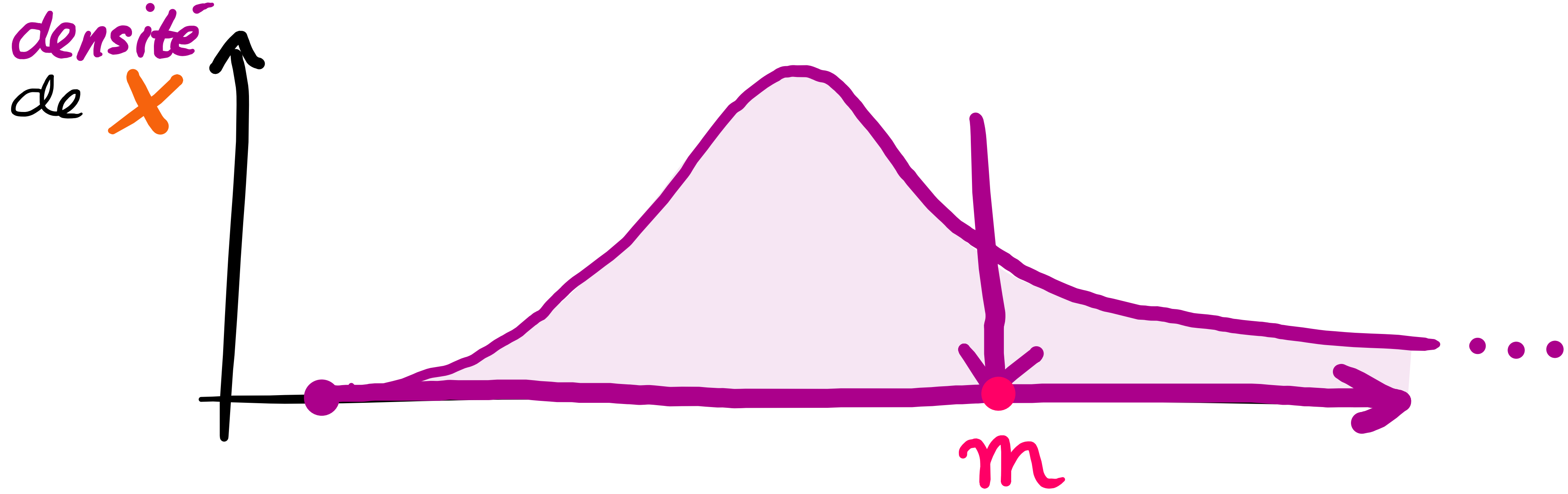
L'espérance n'existe pas toujours !

Par exemple, si $P(X \geq t)$ est proportionnel à $1/t$, $E(X)$ n'existe pas.



Peu importe où on placerait le « pivot », le côté droit (infini) serait toujours « infiniment lourd » ...

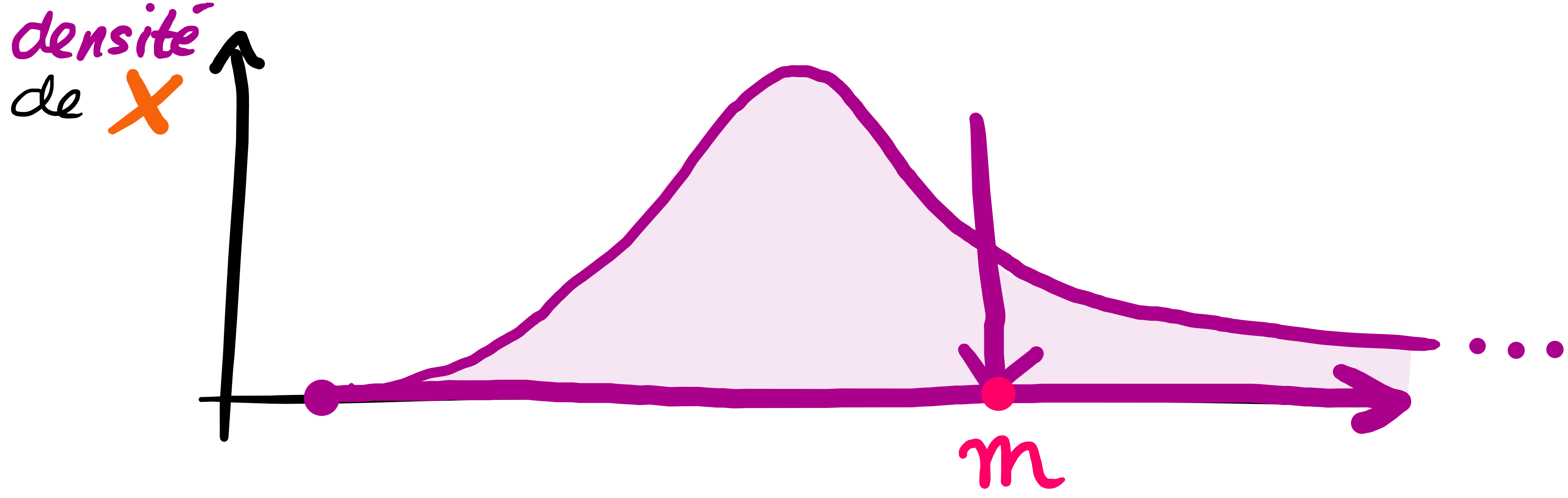
Les médianes.



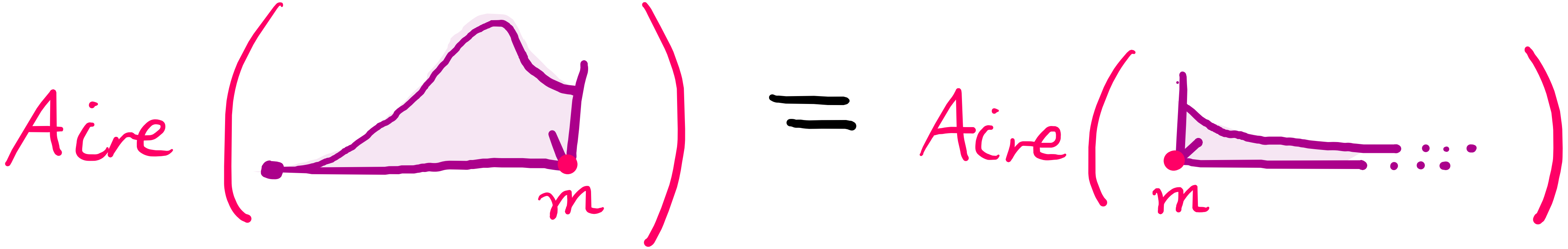
m est une **médiane** de la distribution de X si :

$$P(X \leq m) = P(X \geq m)$$

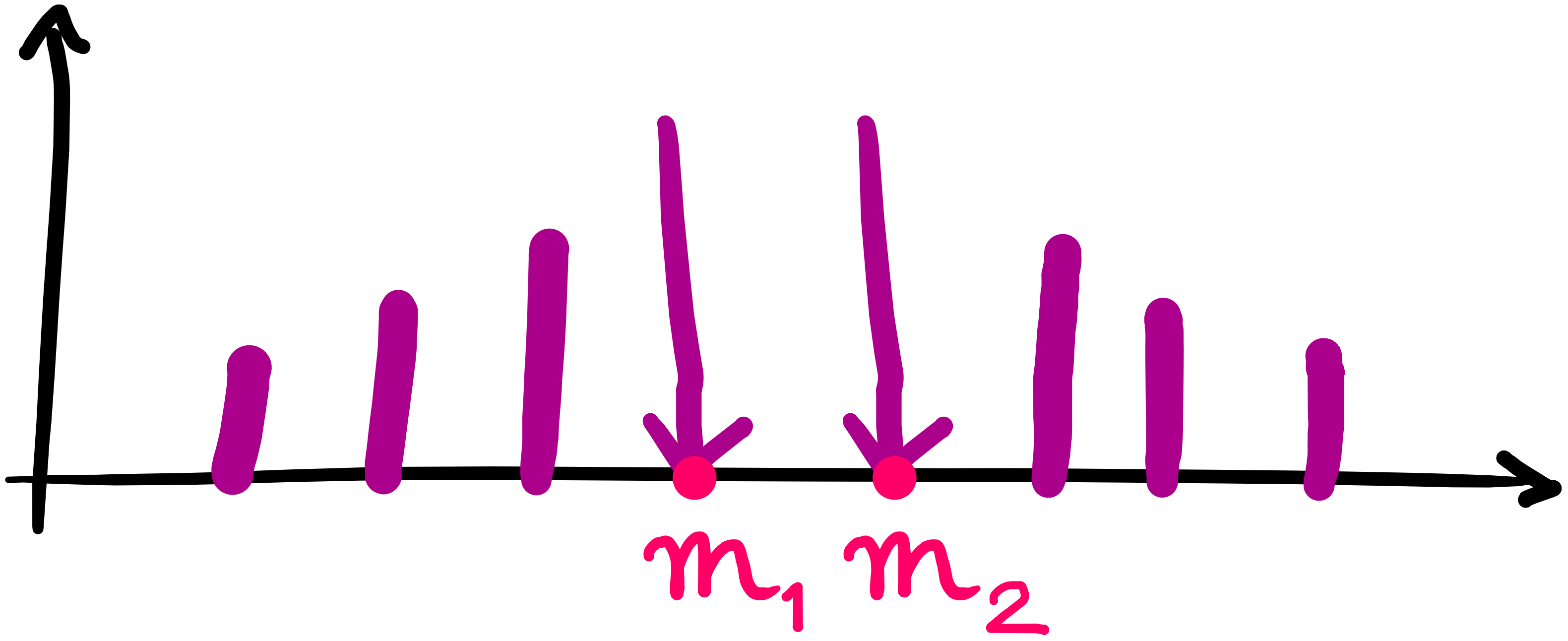
Les médianes.



m est une **médiane** de la distribution de X si :

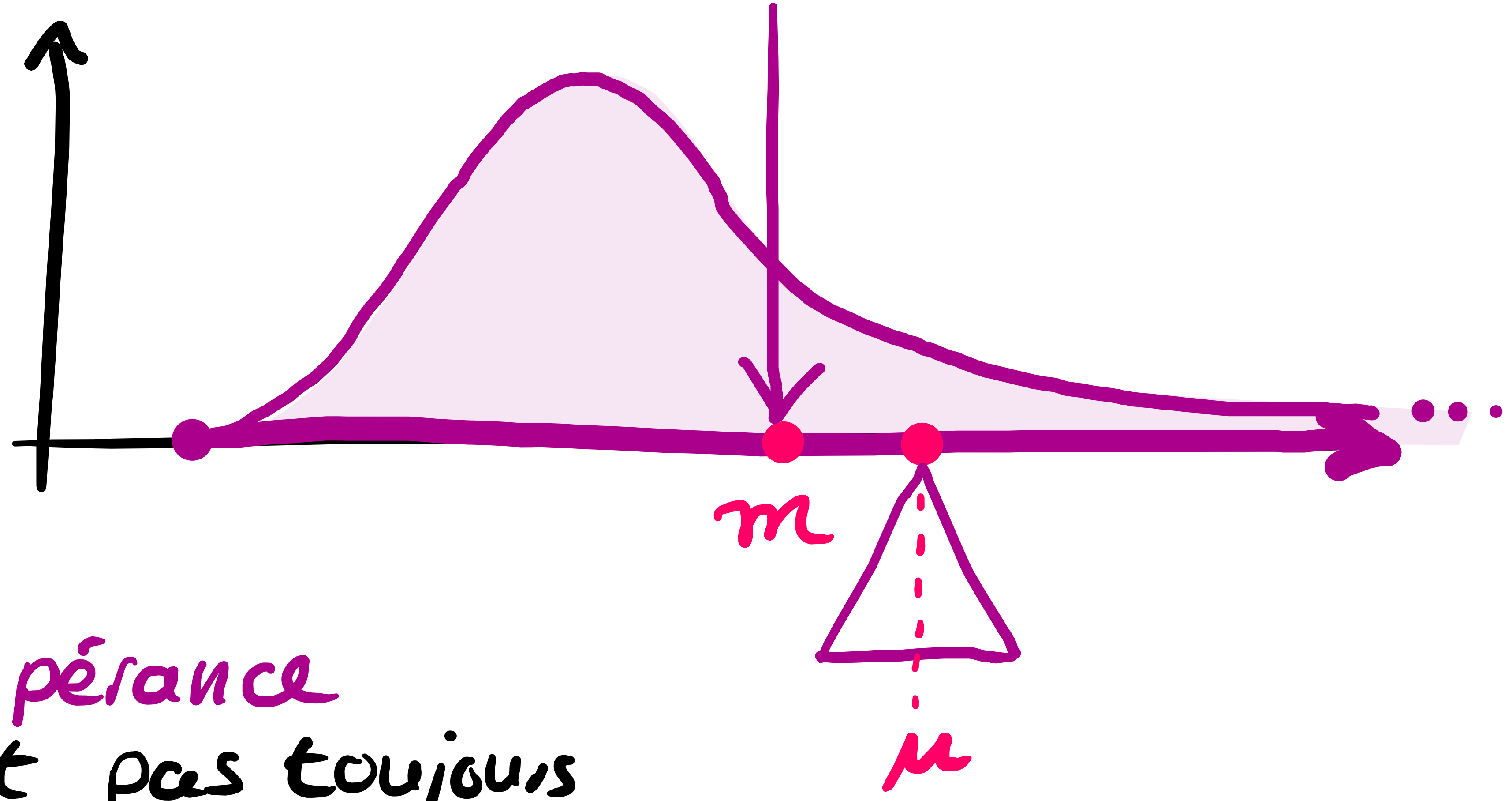


Les médianes.



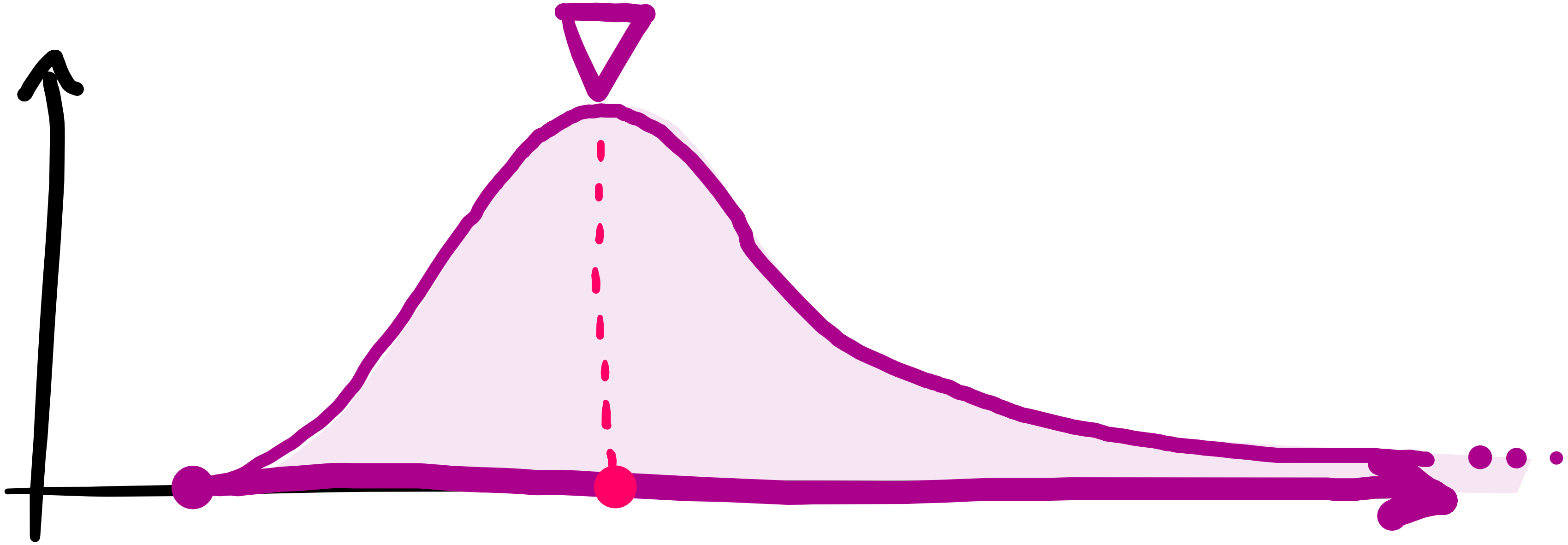
Une médiane n'est pas forcément unique !

Les médianes.



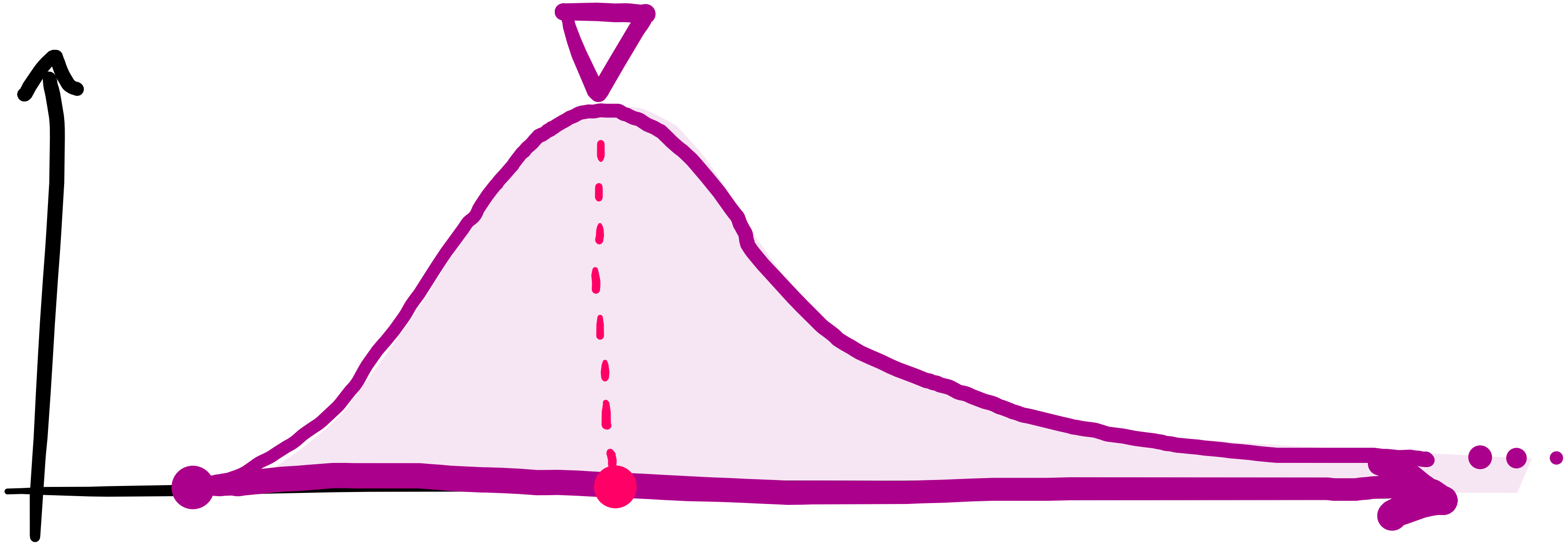
L'espérance n'est pas toujours une médiane.

Le mode



Le mode est la valeur pour laquelle la densité (ou la fonction de masse) est **maximale.**

Le mode

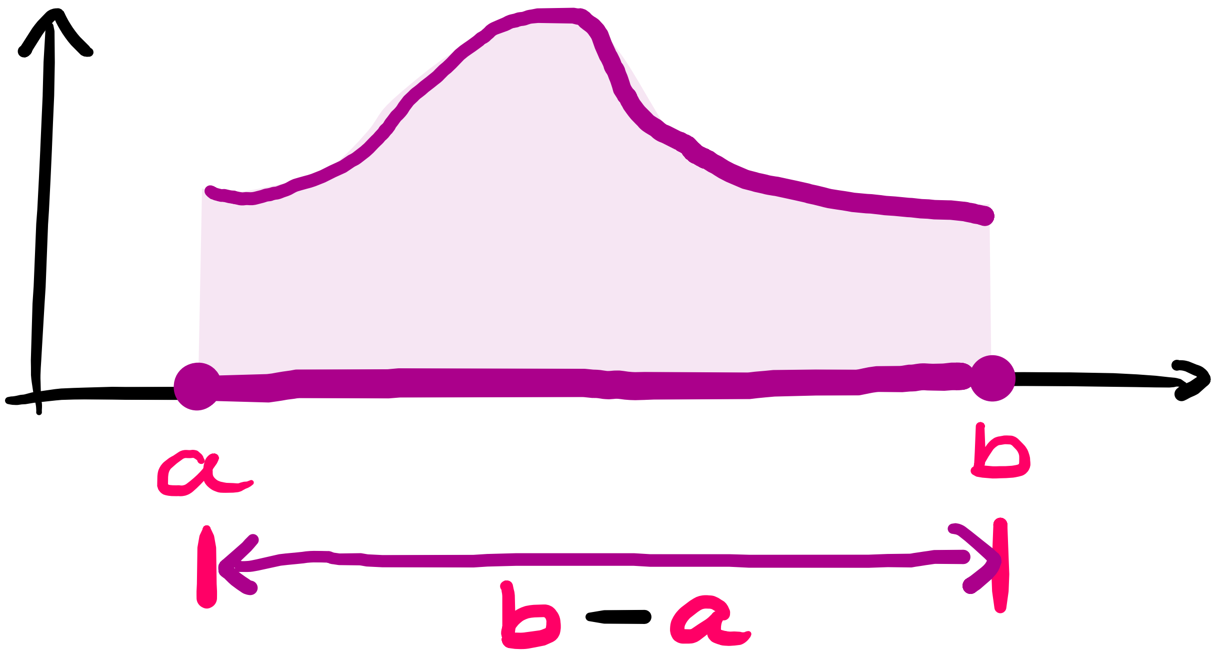


C'est la valeur la plus « vraisemblable »
ou la plus fréquente.

Les paramètres des distributions.

ii. les mesures de dispersion.

L'étendue.



L'**étendue** est le plus grand écart possible entre deux valeurs de la distribution.

La variance et l'écart-type.

On définit la variance :

$$\mathrm{Var}(X) = E\big(\underbrace{(X-\mu)^2}_{\text{valide ! } (X-\mu)^2 \text{ est une v.a.}}\big)$$

et l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

sigma

racine carrée.

La variance et l'écart-type.

Si $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$,

$$P(\mu - n\sigma < X < \mu + n\sigma) \geq \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

la probabilité que X est à moins de n écarts-types de son espérance.

peu importe la distribution de X !

la loi des grands nombres,

la distribution normale,

et

le théorème central de la limite.

La loi des grands nombres.

Supposons que $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sont une suite de variables aléatoires

- indépendantes et
- identiquement distribuées, avec
- $E(X_1)$ existe. Alors,

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu = E(X_1)$$

La moyenne de l'échantillon tend vers l'espérance de la distribution

La loi des grands nombres.

On focus souvent sur ça ...

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu = E(X_1)$$

la moyenne de l'échantillon — tend vers — l'espérance de la distribution

La loi des grands nombres.

Supposons que X_1, X_2, X_3, ... sont une suite de variables aléatoires

- indépendantes et
- identiquement distribuées, avec
- $E(X_1)$ existe.

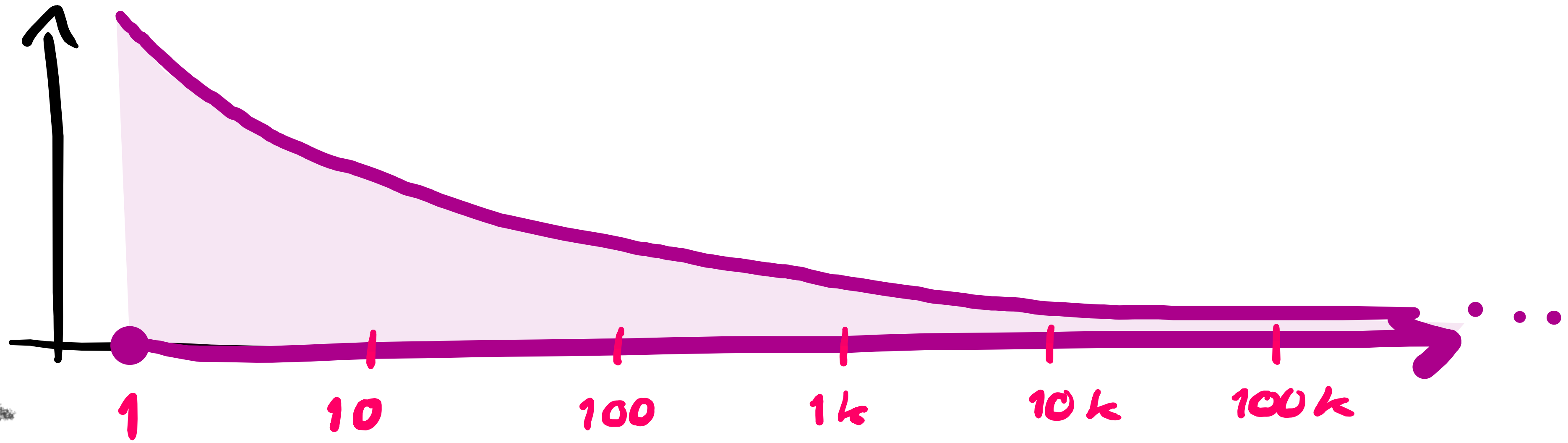
Alors,

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu = E(X_1)$$

la moyenne de l'échantillon tend vers l'espérance de la distribution

et pas assez souvent sur ça

La distribution de Pareto.

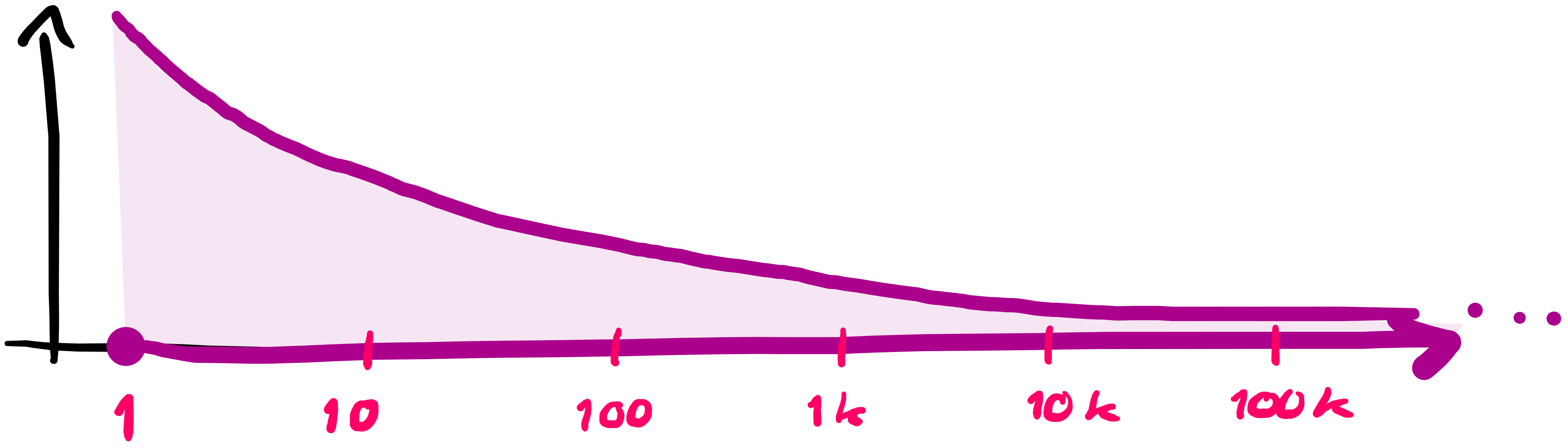


X suit une distribution de **Pareto** si

Log X suit une distribution **exponentielle.**

échelle logarithmique.

La distribution de Pareto.



Si on a $E(\log X) \geq 1$ avec $\log X$ qui suit une distribution exponentielle, alors

$E(X)$ n'existe pas !

La distribution de Pareto.

exemples :

Le nombre d'hectares brûlés par un feu de forêt.

Le nombre d'abonnés touchés par une panne de courant.

Le revenu d'un.e particulier/ère.

Dans ces cas, on ne peut appliquer la loi des grands nombres !

Le temps d'attente à l'hôpital.

Si T_i est le temps attendu par la i^e personne pour recevoir un service, en général, les T_i ne sont ni indépendants, ni identiquement distribués.

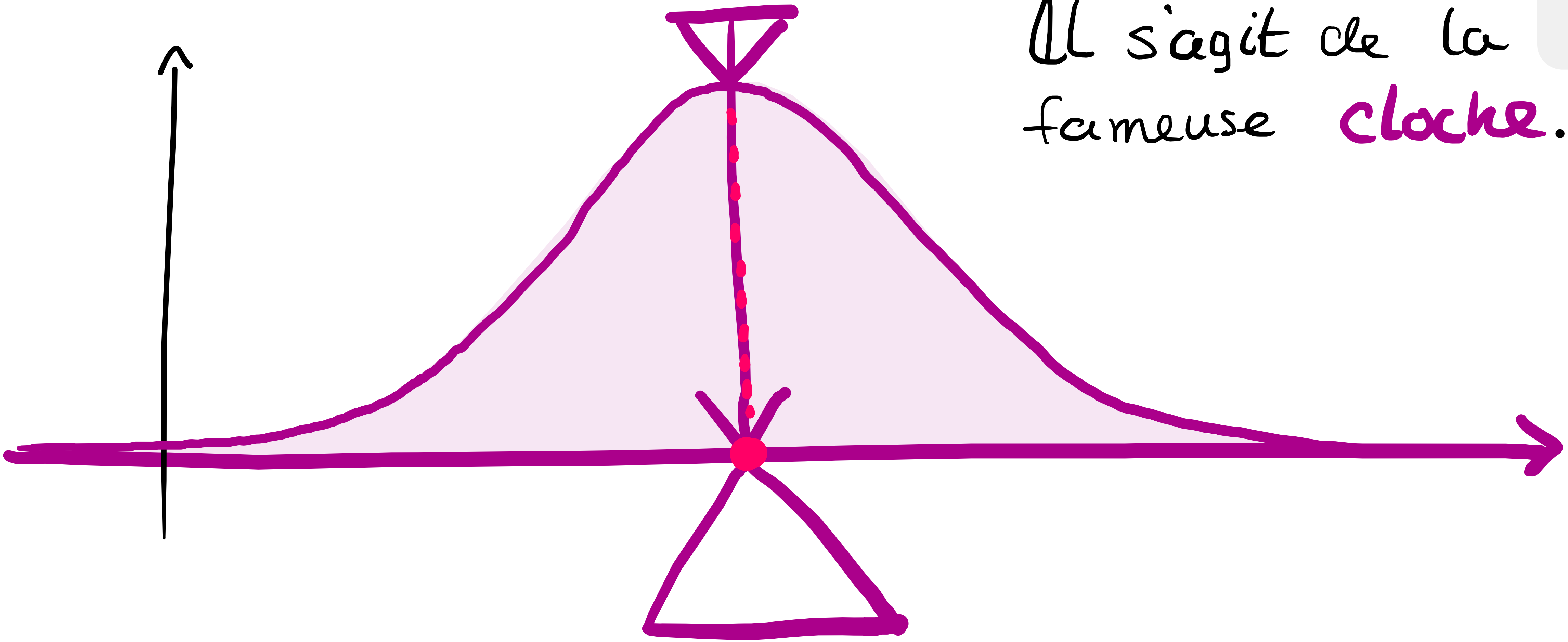
$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n}{n} \propto n$$

proportionnel à n.

La moyenne ne s'interprète pas bien !

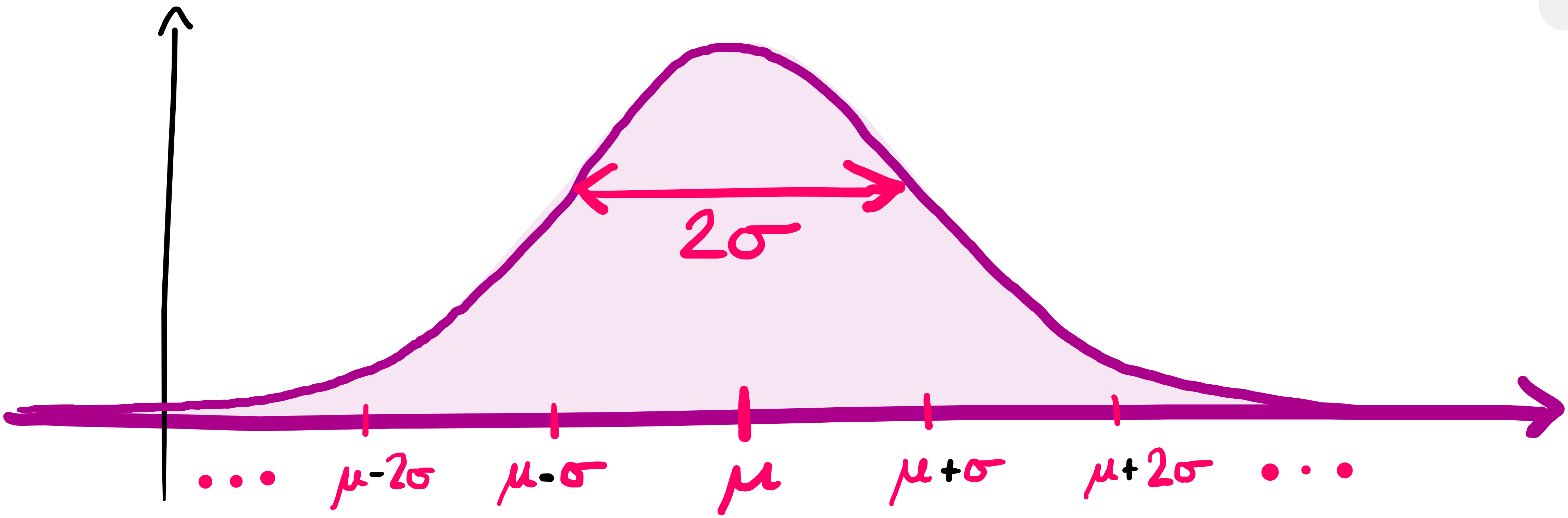
La distribution normale.

Il s'agit de la fameuse cloche.



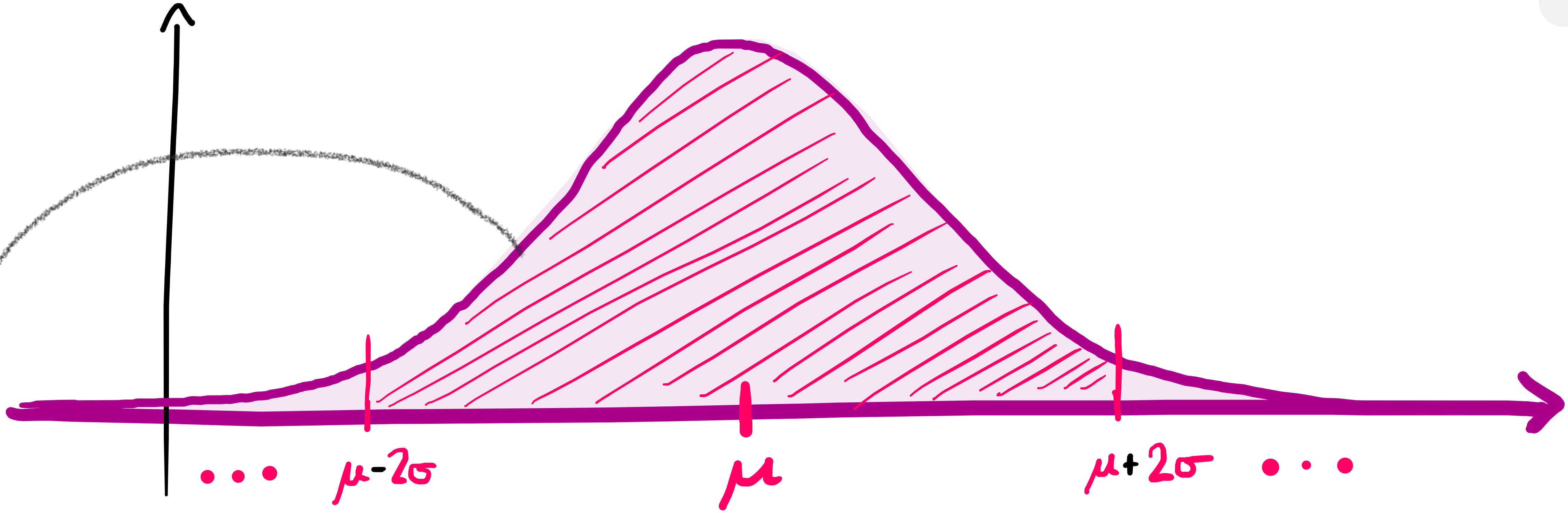
mode = médiane = μ = espérance

La distribution **normale.**



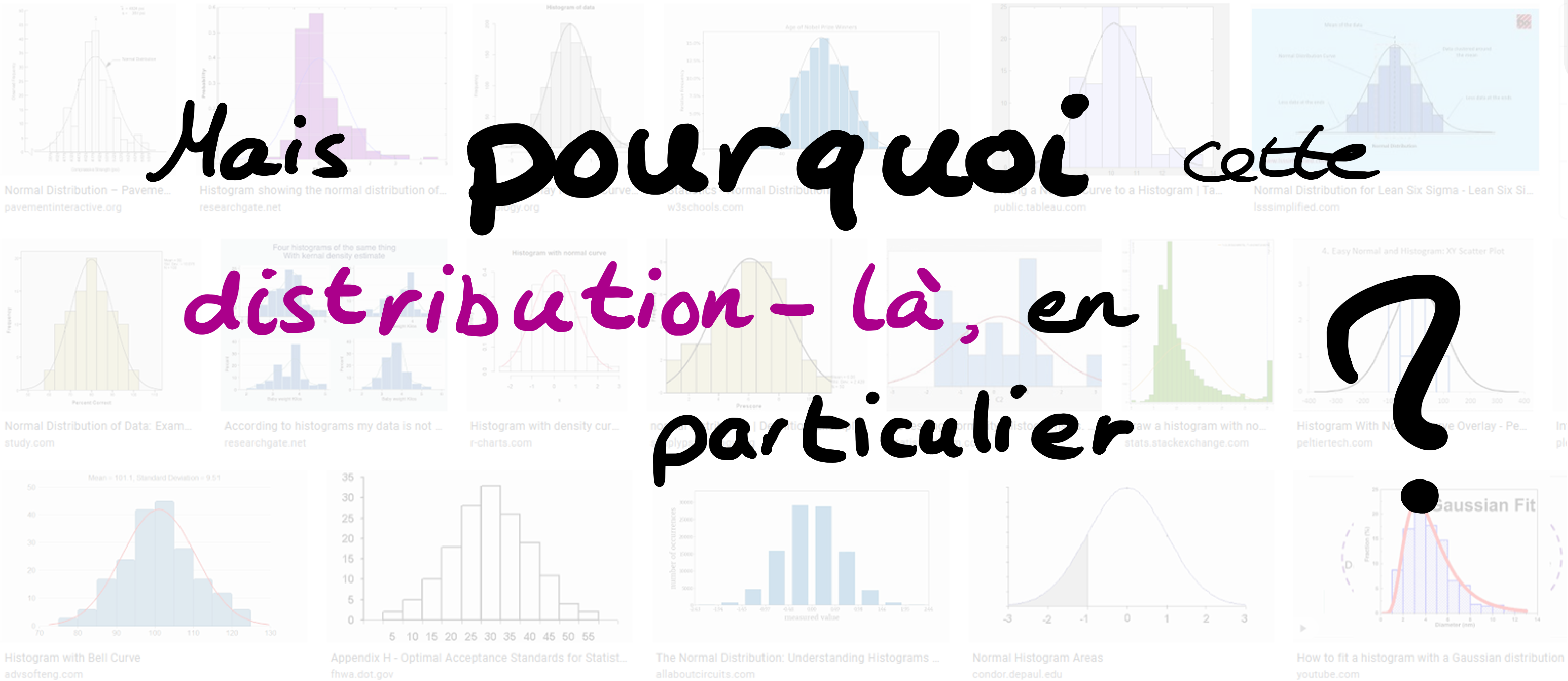
σ = écart-type

La distribution normale.



$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \simeq 95\%.$$

La distribution normale.



Mais **pourquoi** cette distribution-là, en particulier ?

Le théorème central de la limite.

Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots$ des variables aléatoires

- indépendantes et
- identiquement distribuées, avec
- $E(X_1)$ et $\sigma(X_1)$ existent.

Alors, ...

Le théorème central de la limite.

... lorsque n est grand,

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

suit approximativement une distribution **normale**

avec $\mu = E(X_1) \cdot n$ et $\sigma = \sigma(X_1) \cdot \sqrt{n}$

Le théorème central de la limite.

Des sommes de petits effets aléatoires indépendants tendent donc à produire des distributions normales,

naturellement.

Cette expérience imaginée par Sir Francis Galton est une preuve empirique du T.C.L.

La semaine prochaine.

$x_1, x_2, \dots, x_n$

Les données empiriques

X

le modèle

$X_1, X_2, \dots, X_n$

L'échantillon modèle.

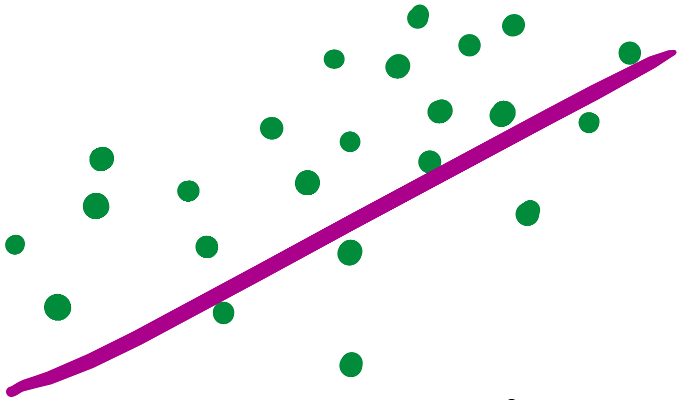
$\hat{X}$

Les estimateurs

H_0

Les tests d'hypothèse

Les intervalles de confiance



Les régressions.

Merci de m'avoir écoutée !