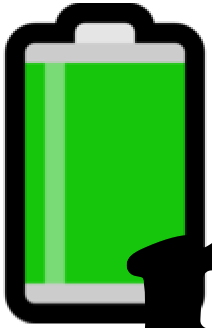


p ou f

a story of **love**
a story of loss
a story of coin
and a story of toss

Pile ou face,
c’est très contre-intuitif
Vous ne me croyez pas ?

C’est le temps d’un quiz !

Répondez aux questions avec les icones dans l’onglet « participants » de Zoom.

Question 1 : un petit échauffement…

Vous tirez à pile ou face. Qu’est-ce qui est plus probable ?

La face de la reine

La tête d’orignal

Les deux sont équiprobables

Question 1 : un petit échauffement…

Vous tirez à pile ou face. Qu'est-ce qui est plus probable ?

La face de la reine

La tête de chevreuil

Aucun des deux

Question 2 : on réessaye …

Vous tirez à pile ou face. Qu’est-ce qui est plus probable ?

Face

Pile

Les deux sont équiprobables

Question 2 : on réessaye …

Vous tirez à pile ou face. Qu'est-ce qui est plus probable ?

Face

Pile

Les deux sont équiprobables

Le jeu de Penney (n)

- Albertine et Béatrice choisissent chacun.e une séquence de « pile » ou « face » de longueur n.
- On tire une pièce de façon répétée.
- La gagnante est celle don’t la sequence apparaîtra en premier.

Question 3 : on rehausse le niveau …

Le temps d’attente moyen avant de voir apparaître la séquence « PFPF » est il

- plus long
- plus court
- exactement le même

que le temps d’attente moyen pour voir apparaître la séquence « FPFF » ?

Question 3 : on rehausse le niveau …

Le temps d’attente moyen avant de voir apparaître la séquence « PFPF » est il

plus long

plus court

exactement le même

que le temps d’attente moyen pour voir apparaître la séquence « FPFF » ?

Question 4 : ok on se réessaye …

On joue au jeu de Penney, avec $n = 4$. Si Albertine choisit la sequence "PFPF", et que Béatrice choisit la sequence "FPFF", qui a le plus de chances de l'emporter ?

- Albertine
- Béatrice
- Les deux ont autant de chances de l'emporter

Question 4 : ok on se réessaye …

On joue au jeu de Penney, avec $n = 4$. Si Albertine choisit la sequence "PFPF", et que Béatrice choisit la sequence "PFPP", qui a le plus de chances de l'emporter ?

Albertine

Béatrice

Les deux ont autant de chances de l'emporter

Question 5 : ok on rebaisse le niveau…

On joue au jeu de Penney, avec $n = 3$. Si Albertine choisit la sequence “PPP”, et que Béatrice choisit la sequence “FPP”, qui a le plus de chances de l’emporter ?

- Albertine
- Béatrice
- Les deux ont autant de chances de l’emporter

Question 5 : ok on rebaisse le niveau…

On joue au jeu de Penney, avec $n = 3$. Si Albertine choisit la sequence “PPP”, et que Béatrice choisit la sequence “FPP”, qui a le plus de chances de l’emporter ?

- Albertine
- Béatrice
- Les deux ont autant de chances de l’emporter

Stop ! … hammertime !

On va voir un peu de la théorie derrière ces résultats étonnants.

Corrélations, autocorrélations de mots.

- On va considérer des mots de longueur n dans l'alphabet $\Omega = \{P, F\}$
- On note $m = m_1 m_2 \dots m_n$ le mot, avec m_i le $i$ème caractère.
- On note $c(m, M) = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ le **vecteur de corrélations** de m et M.
- On calcule que c_i est égal à 1 si les i premiers caractères de M sont identiques aux i derniers caractères de m.

Exemple

On veut calculer le vecteur de corrélations entre « PPP » et « FPP », et celui de « FPP » avec « PPP ».

c_0	c_1	c_2		c_0	c_1	c_2

PPP
FPP
	PPP
	 FPP
		PPP
		  FPP
				FPP
				PPP
					FPP
					 PPP
						FPP
						  PPP

0	0	0		0	1	1

Le cas spécial des auto-corrélations

- On a que $c_0(m,m) = 1$, puisqu'on compare le mot entire à lui-même.
- On a que $c_{n-1}(m,m) = 1$ si et seulement si le mot commence et se termine par le même caractère.
- On a que $c_1(m,m) = 1$ si et seulement si le mot est compose d'un seul caractère répété et, dans ce cas, $c_i(m,m) = 1$ pour tout i.

c_0	c_1	c_2	c_0	c_1	c_2

PPP
PPP
	PPP
	 PPP
		PPP
		  PPP
			FPP
			FPP
				FPP
				 FPP
					FPP
					  FPP

1	1	1	1	0	0

Polynômes de corrélations, nombre de Conway

- Le **polynôme de corrélations** pour deux mots m, M est
$$p_{m,M}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(m, M)\, z^i$$
- Le “**nombre de Conway**” (Conway’s Leading Number) associé est
$$C_{m,M} = 2^{n-1} p_{m,M}\left(\frac{1}{2}\right)$$
- C’est simplement le nombre obtenu en lisant le vecteur de correlations comme un nombre écrit en binaire.

Exemple

On veut calculer le vecteur de corrélations entre « PPP » et « FPP », et celui de « FPP » avec « PPP ».

c_0	c_1	c_2
PPP FPP	PPP FPP	PPP FPP
0	0	0

Nombre de Conway : 0

c_0	c_1	c_2
FPP PPP	FPP PPP	FPP PPP
0	1	1

Nombre de Conway : 3

La première fois …

- $a_i(m)$: nombre de mots de longueur i qui se terminent par le mot m, et où le mot m n'apparait pas avant.
- $p_i(m)$: probabilité que le mot m apparaisse pour la première fois après i lancers.

$$p_i(m) = \frac{a_i(m)}{2^i}$$

La première fois …

$$G_m(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(m)\, z^i$$

$$\dots (arguments\ combinatoires)$$

$$= \frac{z^k}{z^k + (1 - 2z)p_{m,m}(z)}$$

La suite $a_i(m)$ ne depend que de $c(m, m)$ -- ou de $C_{m,m}$!!!

L'espérance du temps d'attente

Si T_m est le nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître le mot m, alors

$$E[T_m] = \sum_{i=1}^{\infty} i\, p_i(m)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\, a_i(m)}{2^i}$$
$$= \ \ldots$$
$$= \left(z\, G'_m(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}}$$

L'espérance du temps d'attente

On trouve finalement, en calculant, que

$$E[T_m] = 2\ C_{m,m}$$

Il suit que les mots « PPP…P » et « FFF…F » sont systématiquement ceux avec les plus longs temps d'attente moyens, soient $2^{n+1} - 2$.

Probabilité de gagner

Si on a deux mots m, M, avec

$$\beta = \frac{C_{m,m} - C_{m,M}}{C_{M,M} - C_{M,m}}$$

on a que la probabilité que M paraisse avant m est

$$\frac{\beta}{\beta + 1}$$

Exemples

- Si $m = FPFF$ et $M = PFPF$, alors on a que $C_{m,m} = 9$ (1001) et $C_{M,M} = 10$ (1010) – donc, $E[T_m] = 18$ et $E[T_M] = 20$.
- Par contre, $C_{M,m} = 5$ (0101) et $C_{m,M} = 0$ (0000). Donc, $\beta = 9/5$, et la probabilité que M paraisse avant m est de $\frac{9}{14} > \frac{1}{2}$.

Question 6 : allez, une petite dernière...

Il existe une séquence de longueur $n = 3$ qui est meilleure que toutes les autres au jeu de Penney.

Vrai

Faux

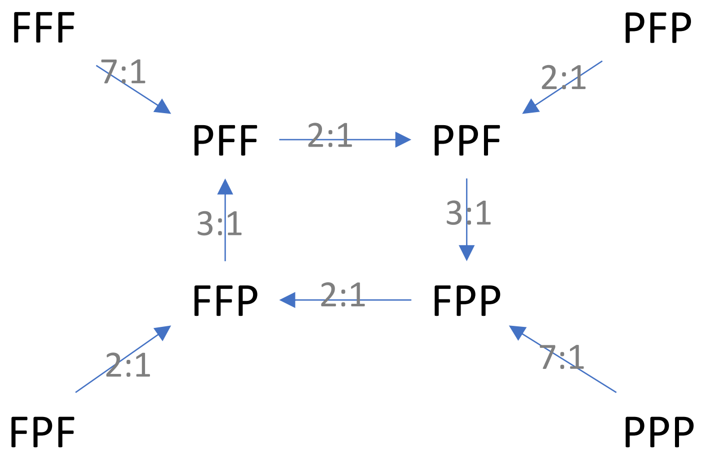
Question 6 : allez, une petite dernière…

Il existe une séquence de longueur $n = 3$ qui est meilleure que toutes les autres au jeu de Penney.

Vrai

Faux

Les meilleurs choix :



Légende :

$A \xrightarrow{p:q} B$

B est le meilleur choix contre A, avec un ratio de victoires de p:q.

Références

- https://arxiv.org/pdf/2006.13002.pdf
  Agarwal et al., “From Unequal Chance to a Coin Game Dance : Variants of Penney’s Game”, (prepub.)
- Berlekamp, Conway et Guy, “Winning ways for your mathematical plays”, AK Peters (2nd edition, 2004).
- Collings, “Coin Sequence Probabilities and Paradoxes”, Bulletin of the institute of Mathematics and its applications, 18 (1992).
- Penney, Journal of Recreational Mathematics, Oct. 1969, p 241.