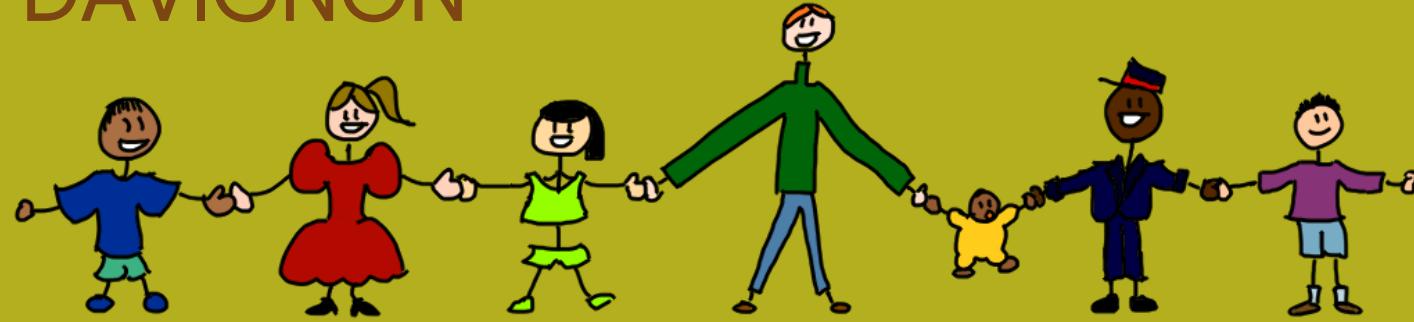


APRÈS « FUGUE EN SOL INCONNU », LA NOUVELLE PRÉSENTATION DE

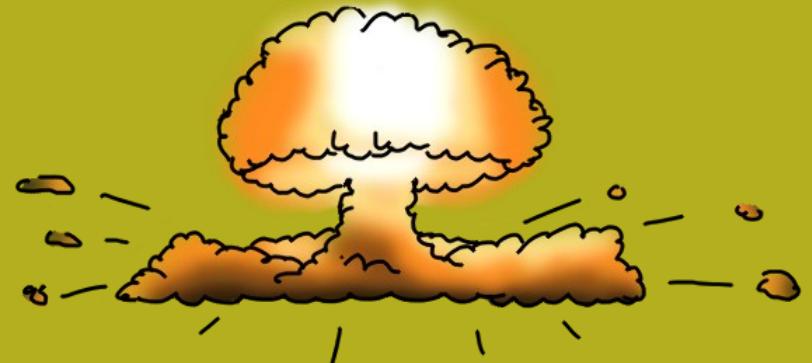
ÉLISE DAVIGNON

La somme,



et les pépins !

la queue



UNE PRÉSENTATION DU CLUBMATH

25 SEPTEMBRE 2024

La somme



« SI TOUT LE MONDE SE DONNAIT LA MAIN...

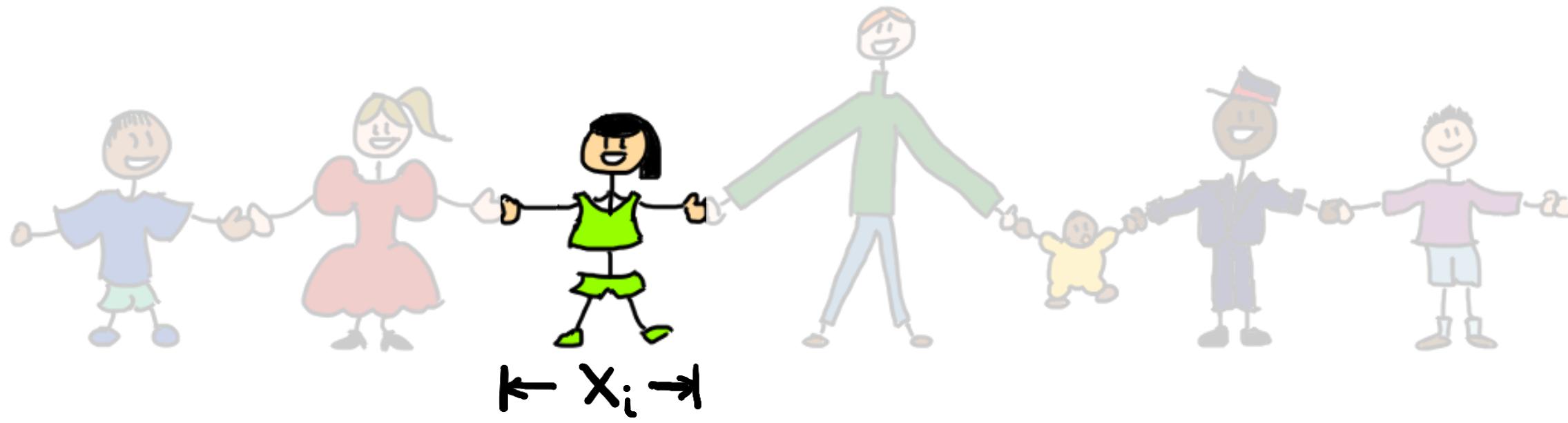
... TOUT LE MONDE AURAIT LES MAINS OCCUPÉES. »



ÇA SERAIT LONG COMMENT ?

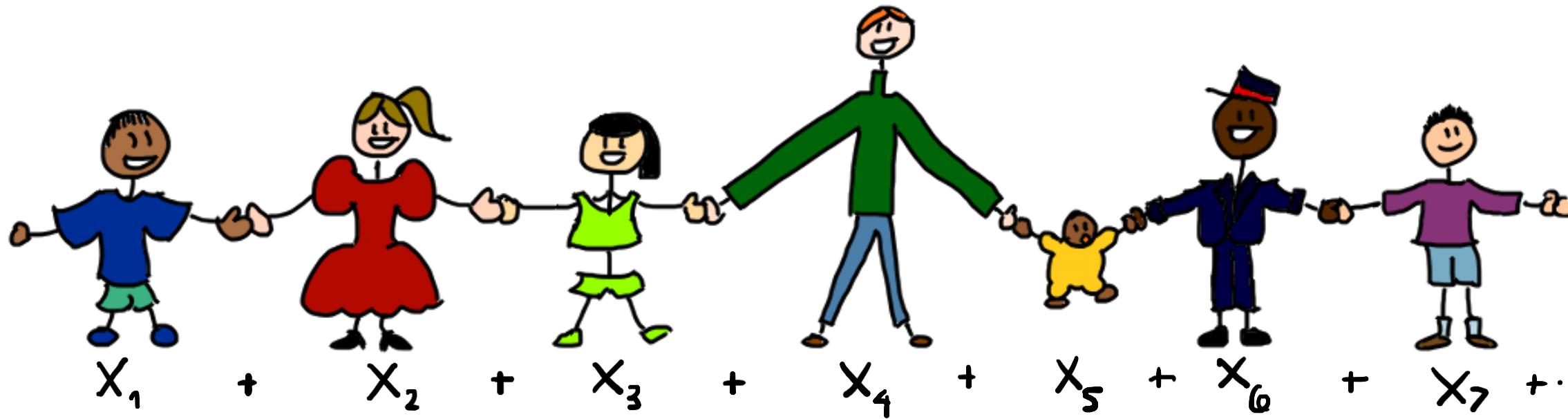


ÇA SERAIT LONG COMMENT ?



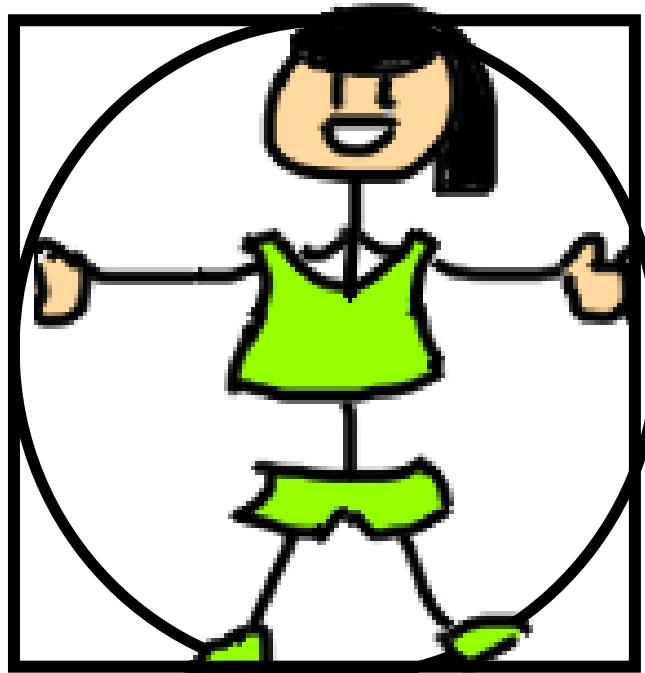
ENVERGURE DE LA i ÈME PERSONNE

$$\sum_{i=1}^n x_i = \text{LONGUEUR TOTALE}$$



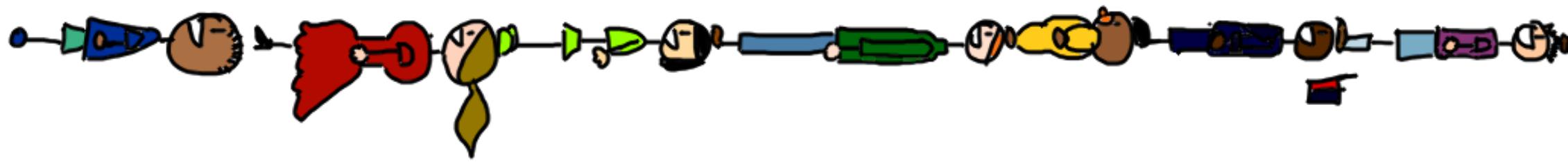
LES x_i SONT DES VARIABLES ALÉATOIRES

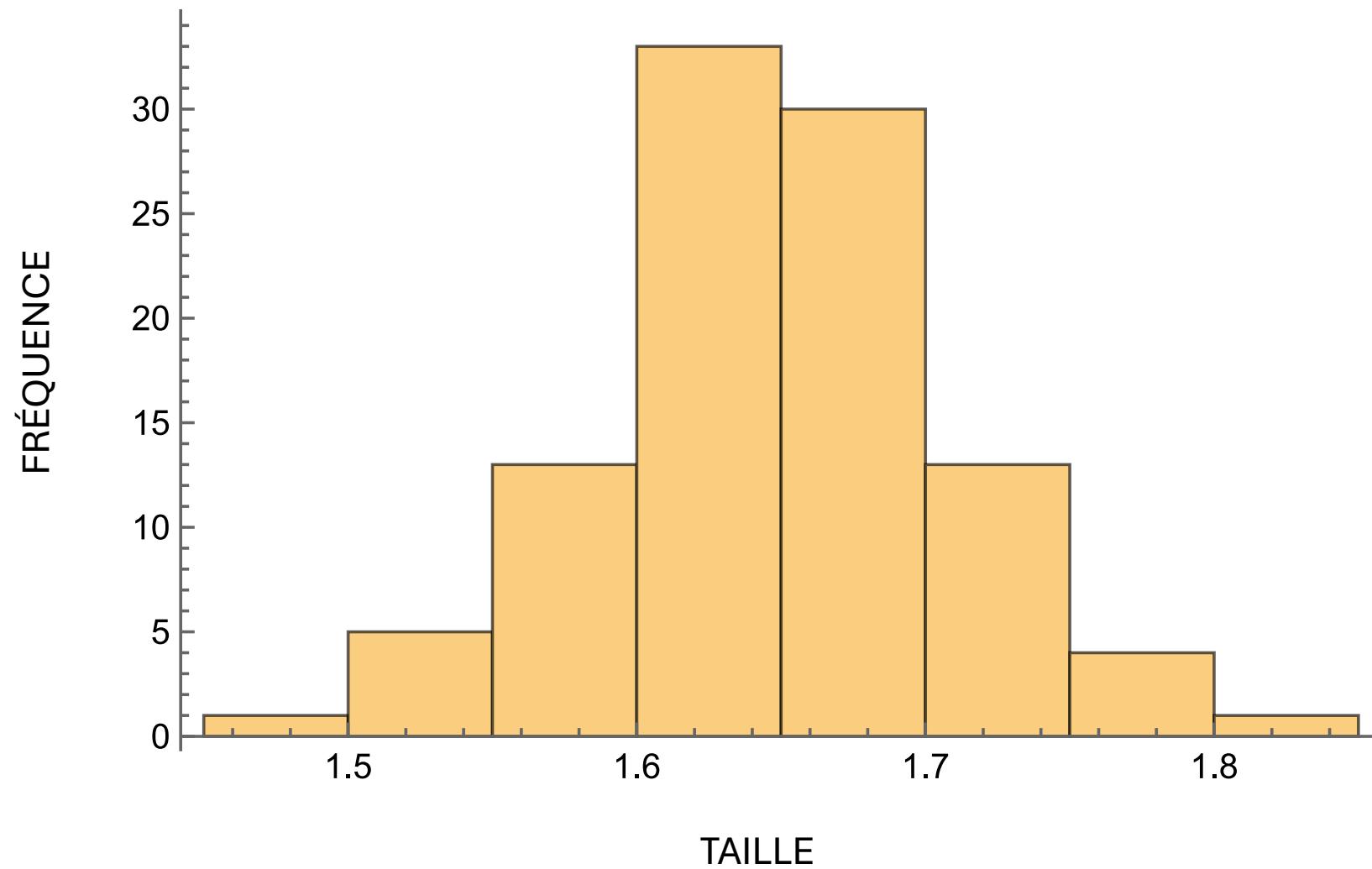
TAILLE

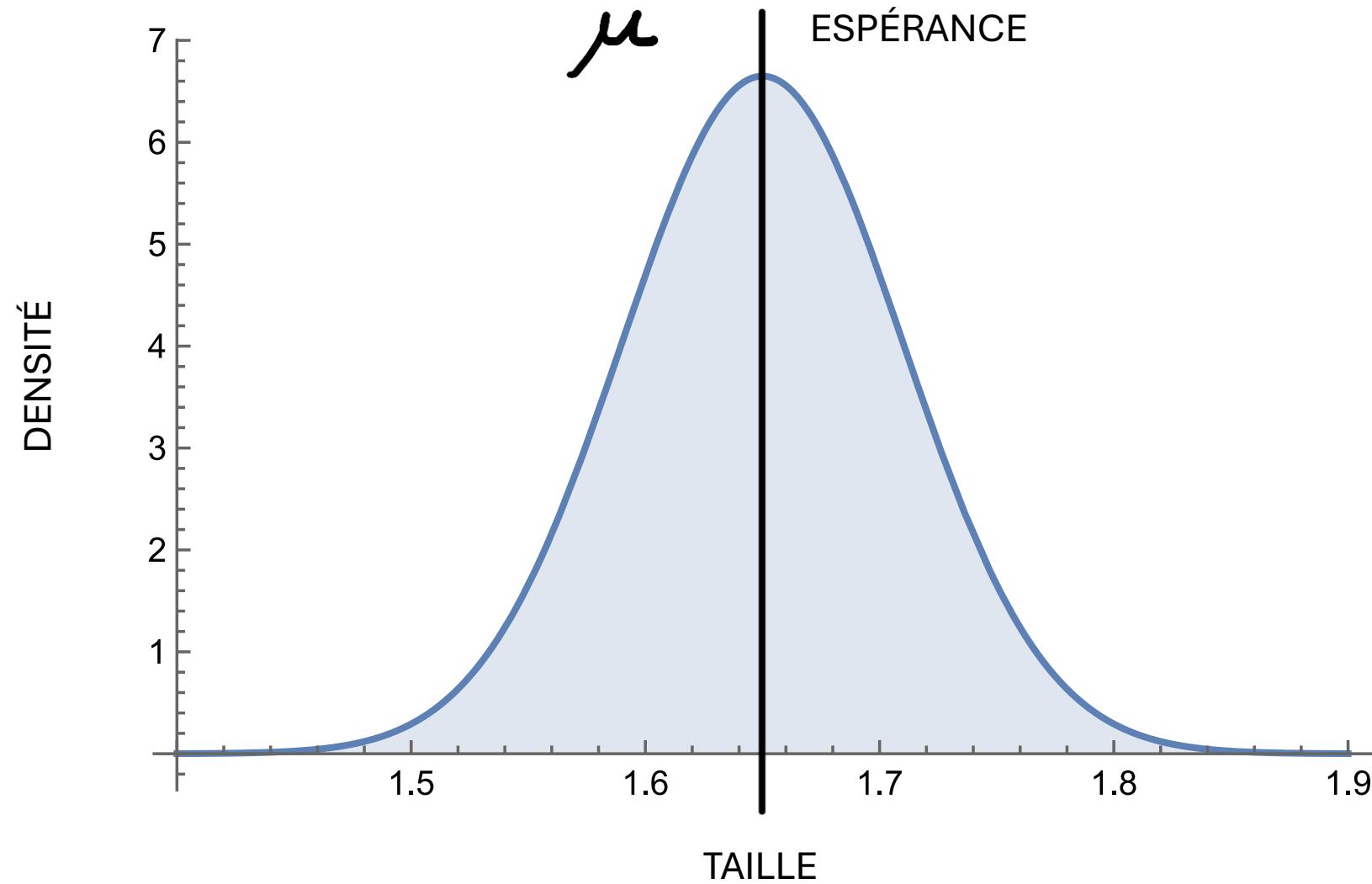


ENVERGURE

OUF...







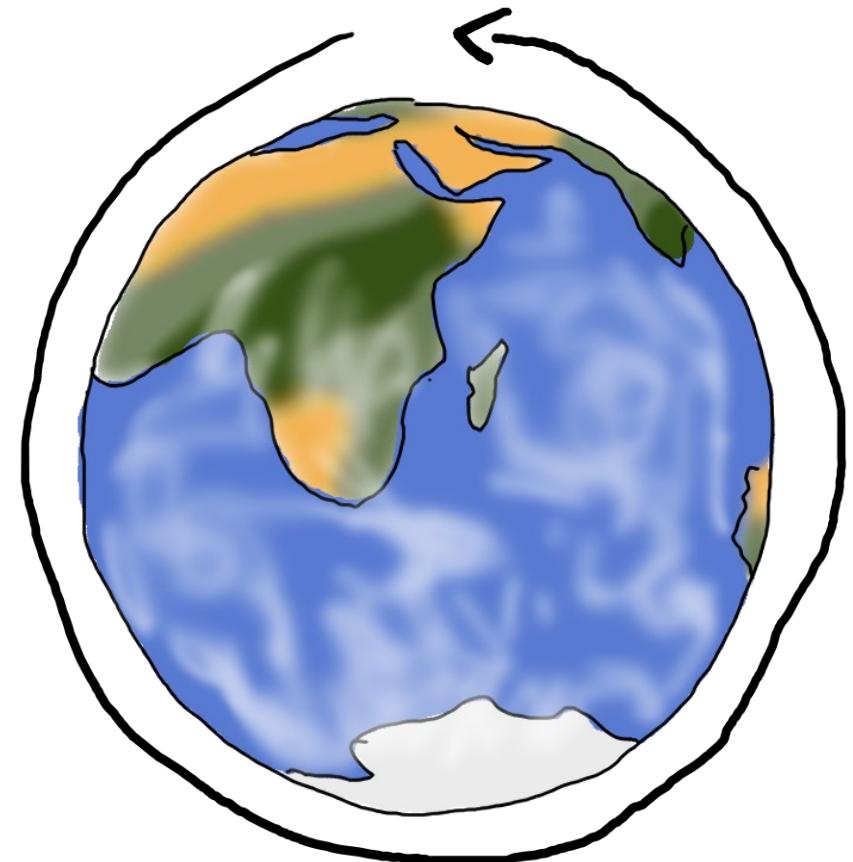
$$\sum_{i=1}^n x_i \simeq n \cdot \mu$$

LA LOI DES GRANDS NOMBRES

SI $n = 8$ MILLIARDS

ET $\mu = 1,65$ M

$$\sum_{i=1}^n X_i \simeq 12,3 \text{ MILLIONS DE KM}$$



~ 300 X LE TOUR DE LA TERRE !



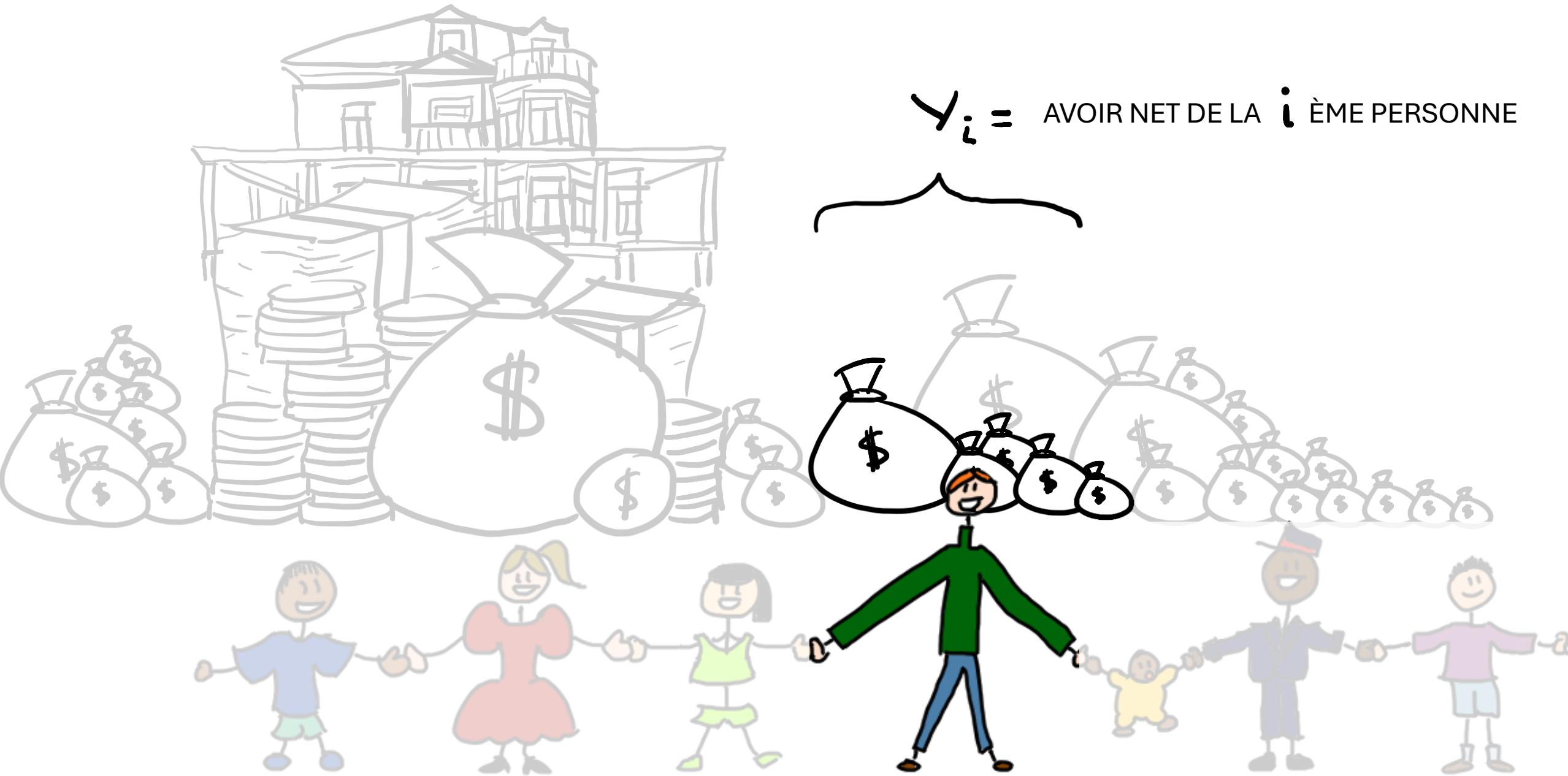
QUELLE DIFFÉRENCE SI ON ENLÈVE UNE PERSONNE... ?



ÇA DÉPEND QUI ?



SI ON MET ENSEMBLE L'ARGENT DE TOUT LE MONDE ...





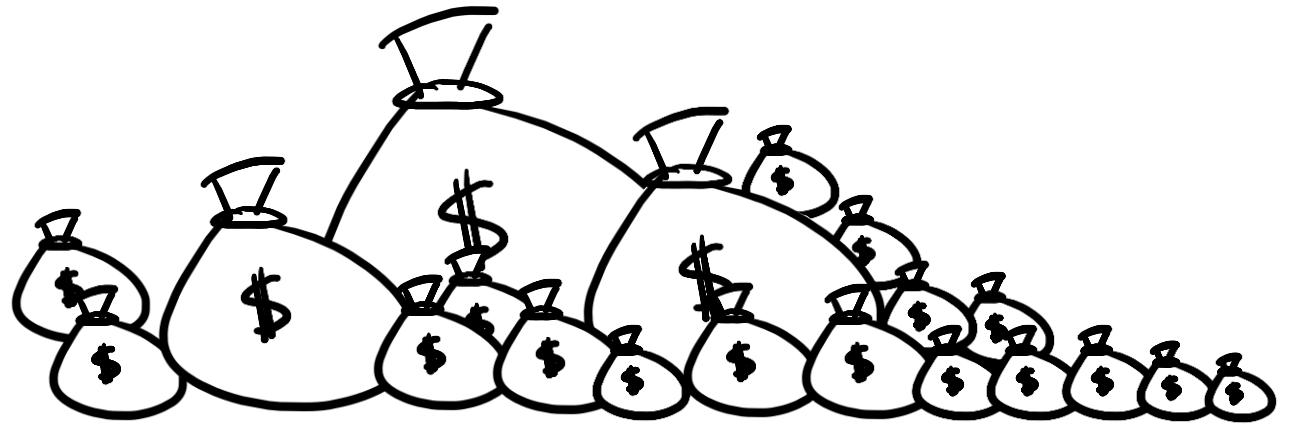
$$\sum_{i=1}^n y_i = \text{RICHESSE TOTALE}$$



ET SI ON ENLÈVE LA FORTUNE DE QUELQU'UN... ÇA FAIT UNE DIFFÉRENCE ?



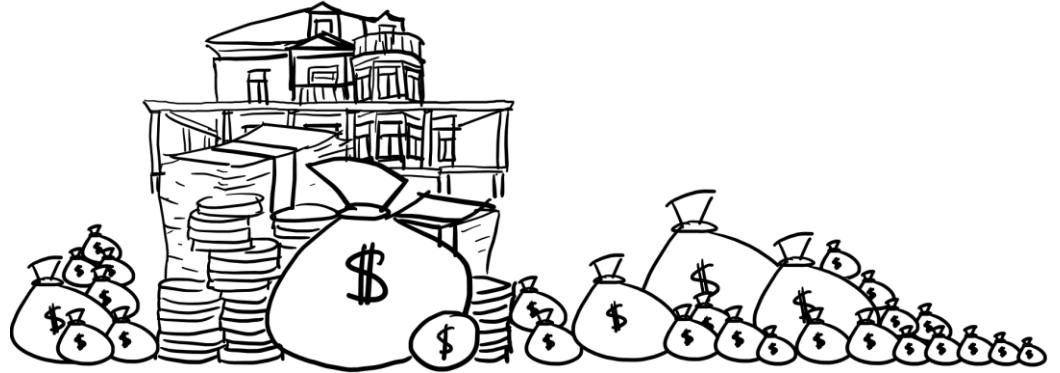
ÇA DÉPEND QUI ?





LES TAILLES

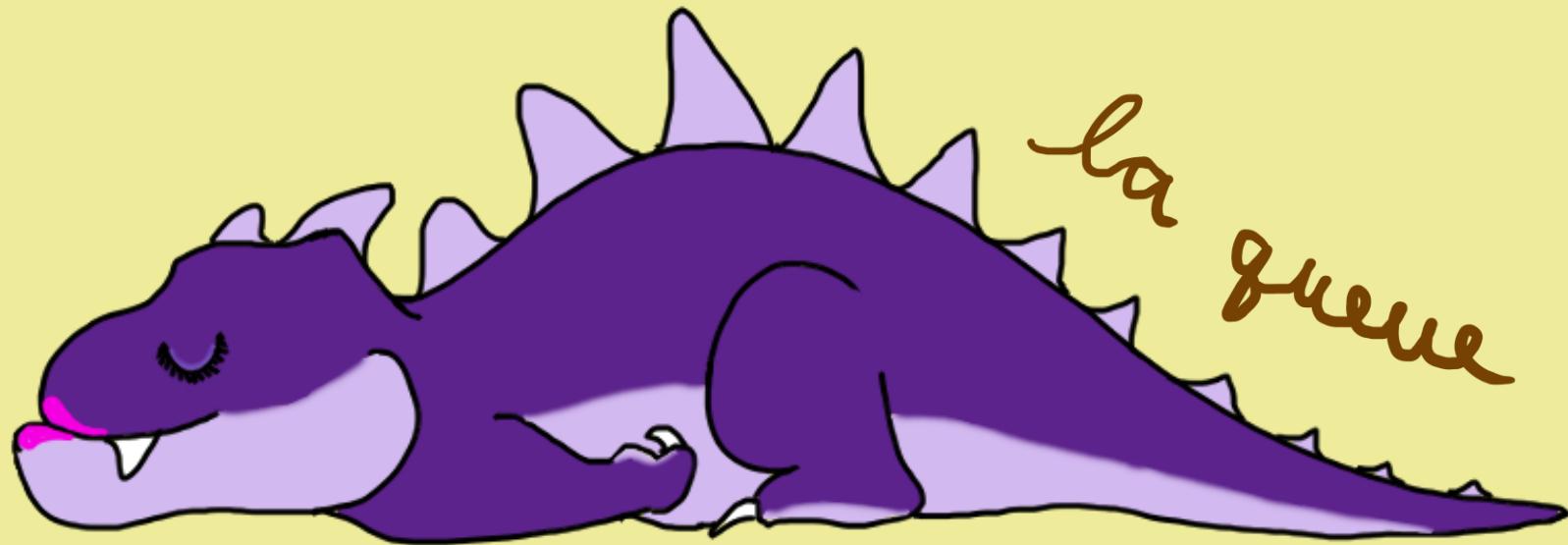
- DISTRIBUTION NORMALE
- PAS TROP DE GRANDES VALEURS
- PERSONNE NE CONTRIBUE UNE FRACTION SIGNIFICATIVE DE LA SOMME À LUI/ELLE SEUL·E



LA FORTUNE

- DISTRIBUTION ?
- DES VALEURS EXTRÊMES
- UN INDIVIDU PEUT CONTRIBUER UNE FRACTION SIGNIFICATIVE DE LA SOMME

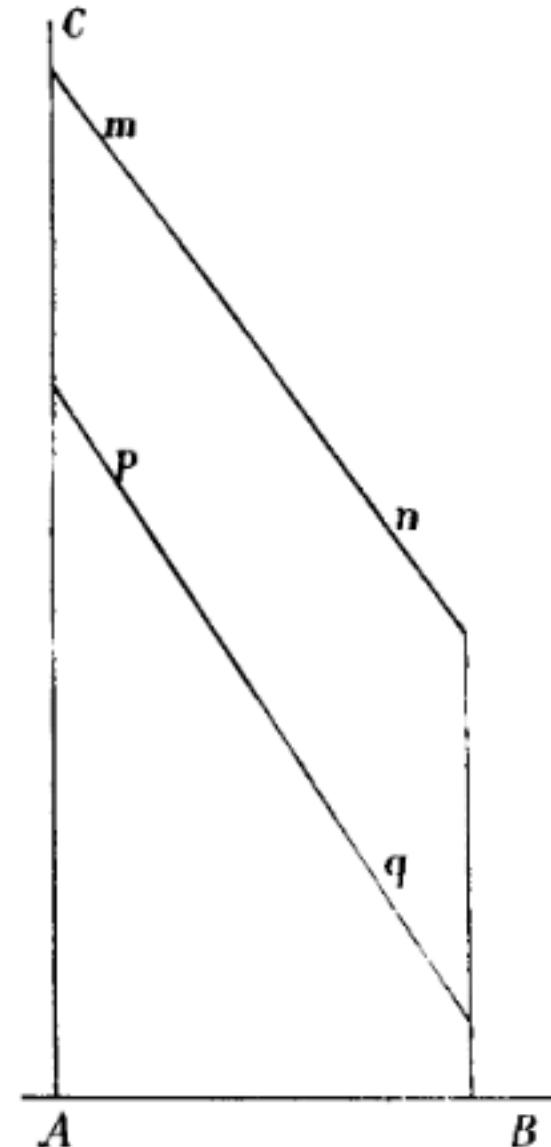
CHAPITRE II



Dans ce qui suit, nous indiquerons par x un certain revenu, et par N le nombre de contribuables ayant un revenu supérieur à x .

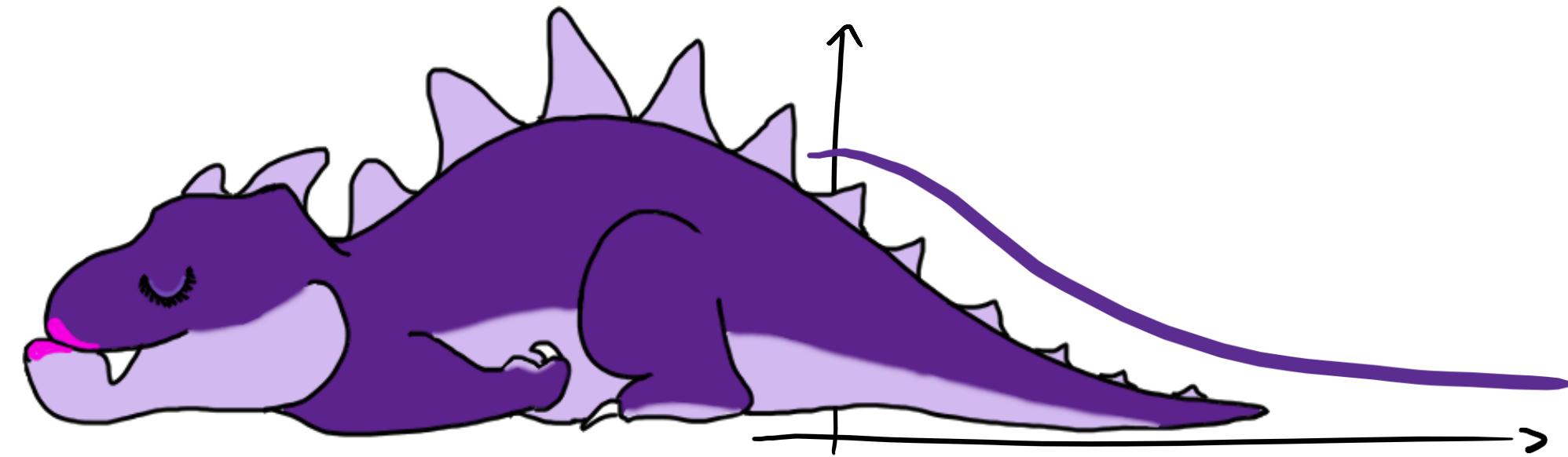
En Angleterre, c'est seulement pour la schedule D : Commerce et professions, que nous avons une classification étendue des contribuables suivant l'importance des revenus. Mais, en compensation, il y a l'avantage d'avoir ces résultats pour des époques assez éloignées et pour des organisations économiques aussi différentes que le sont celles de l'Angleterre proprement dite et de l'Irlande.

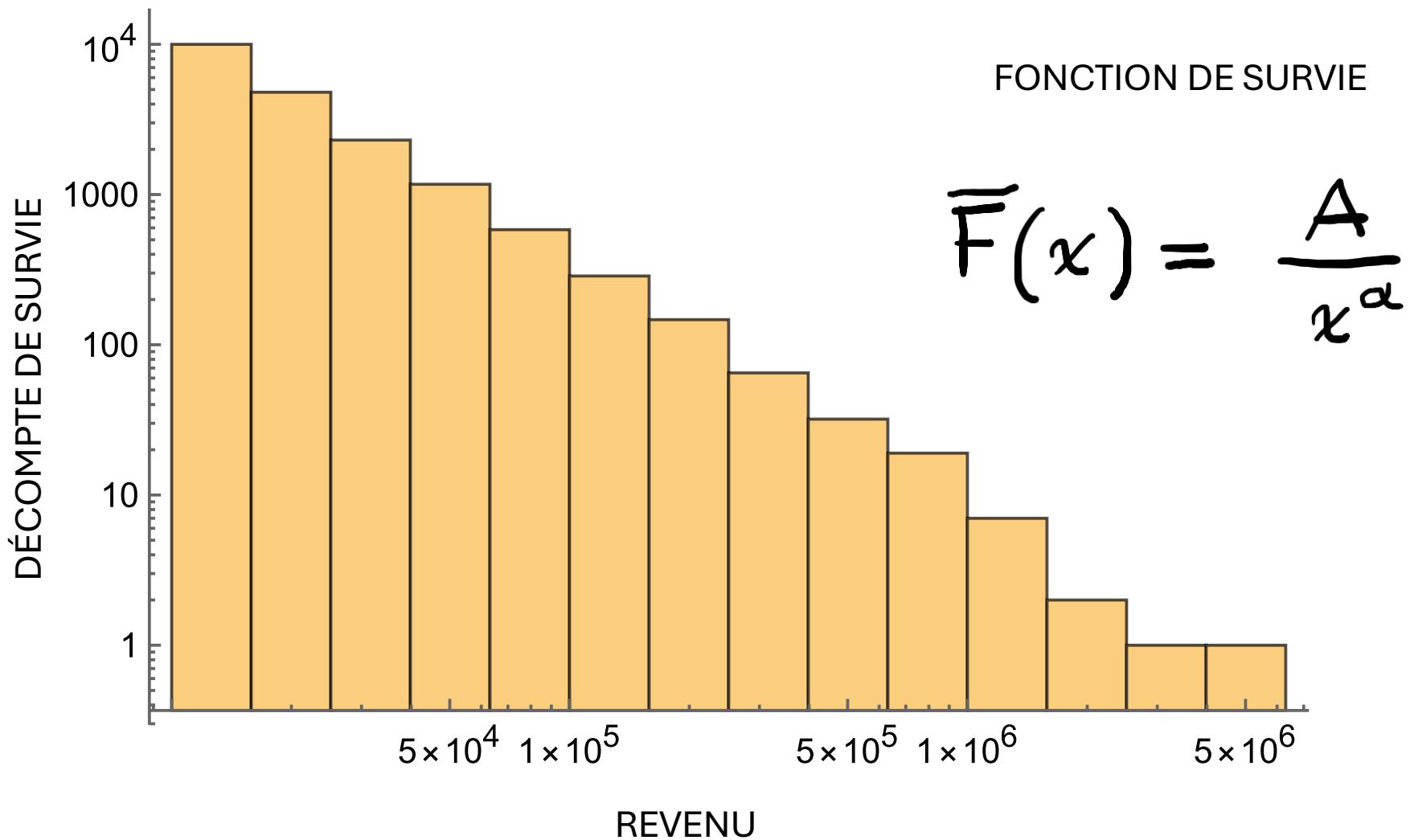
Traçons deux axes AB et AC. Sur AB portons les logarithmes de x , sur AC les logarithmes de N .

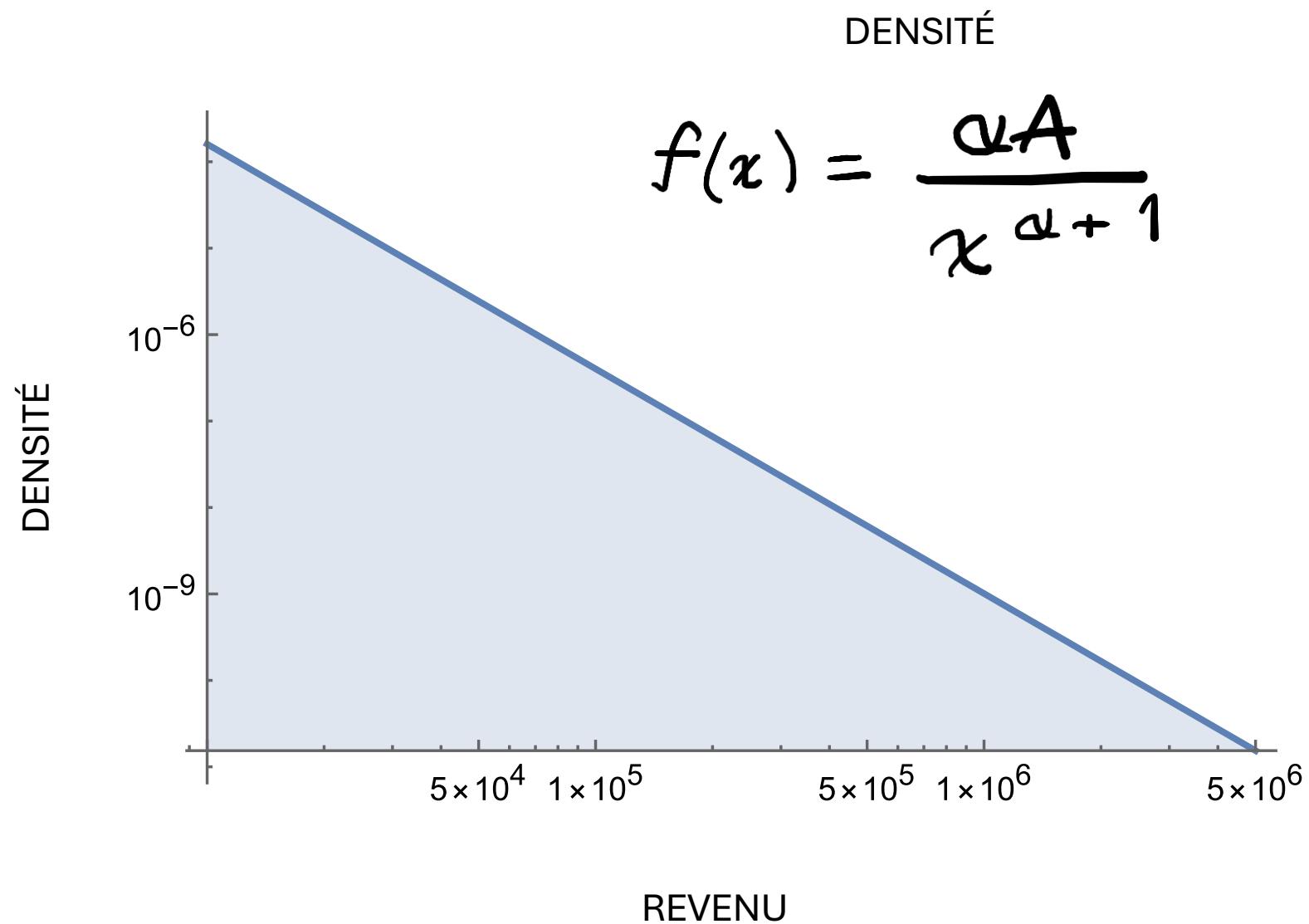


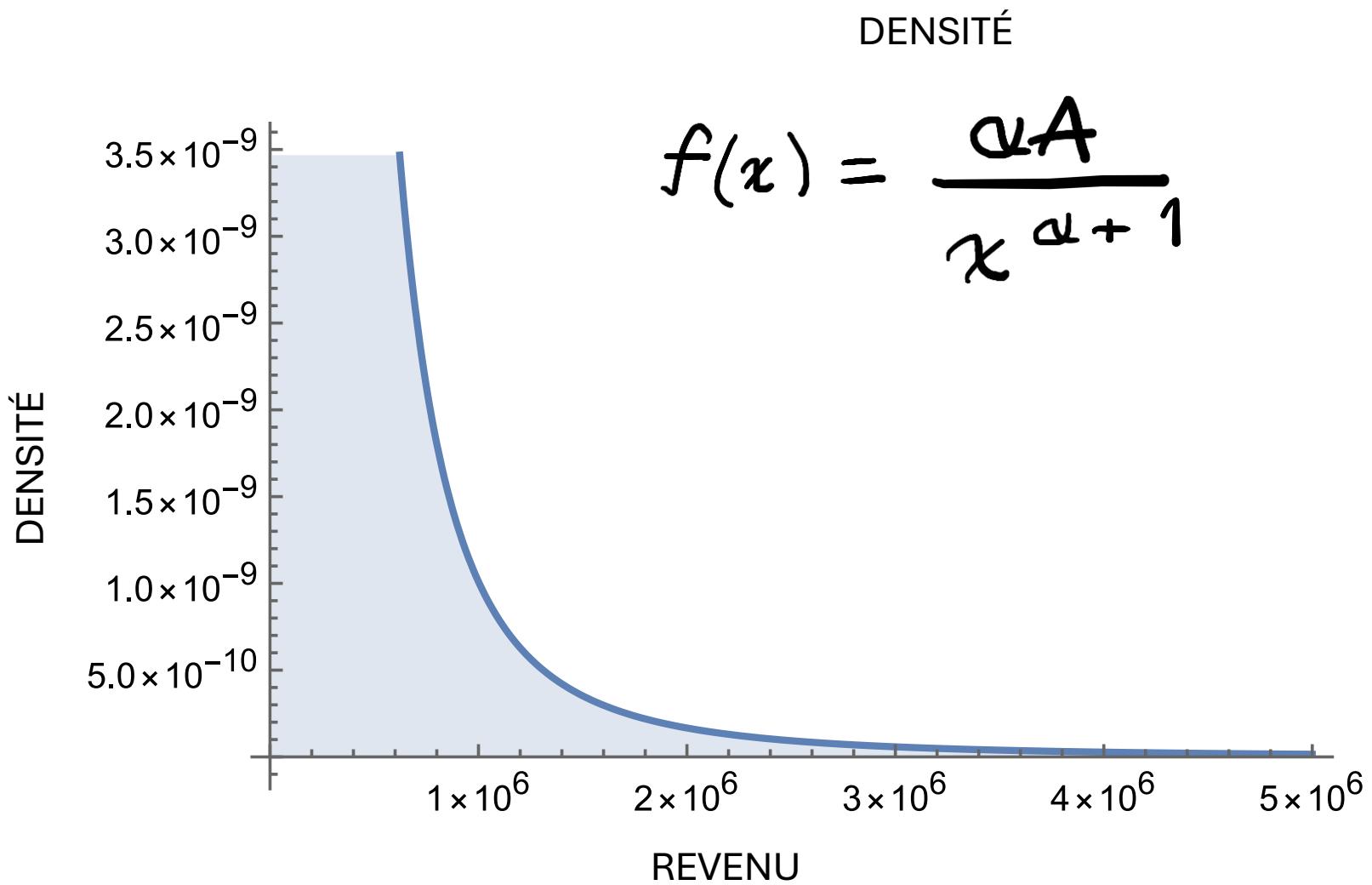
la queue d'une distribution

$$\bar{F}(x) = P\{X > x\}$$









variables à queues lourdes

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha A \cdot \int_A^\infty \frac{x^2 dx}{x^{\alpha+1}}$$

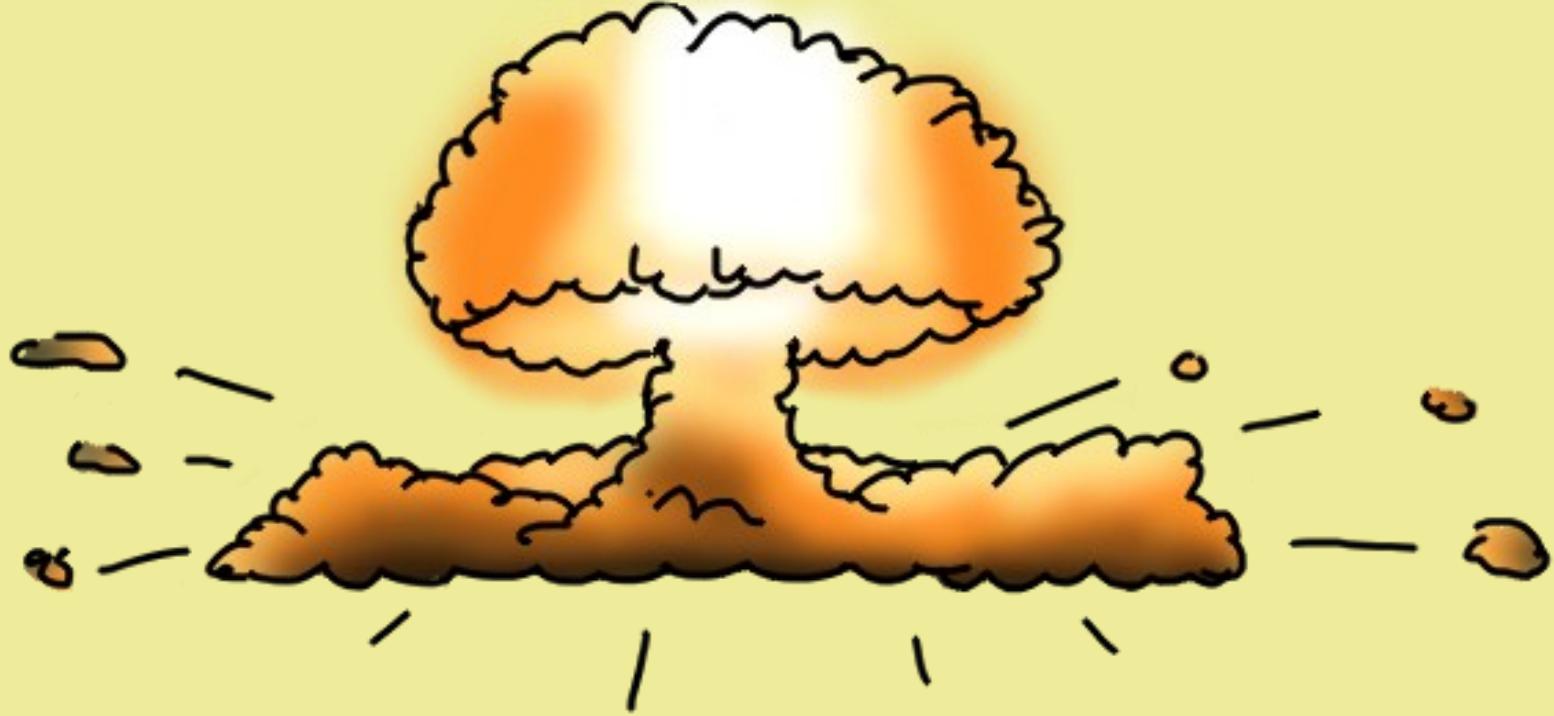
$$\mathbb{E}[X] = \alpha A \int_A^\infty \frac{x dx}{x^{\alpha+1}}$$

SI $\alpha < 2$, LA VARIANCE N'EXISTE PAS

SI $\alpha < 1$, L'ESPÉRANCE N'EXISTE PAS

EN GÉNÉRAL, UNE DISTRIBUTION A UNE QUEUE LOURDE SI LE SECOND MOMENT N'EXISTE PAS.

CHAPITRE III



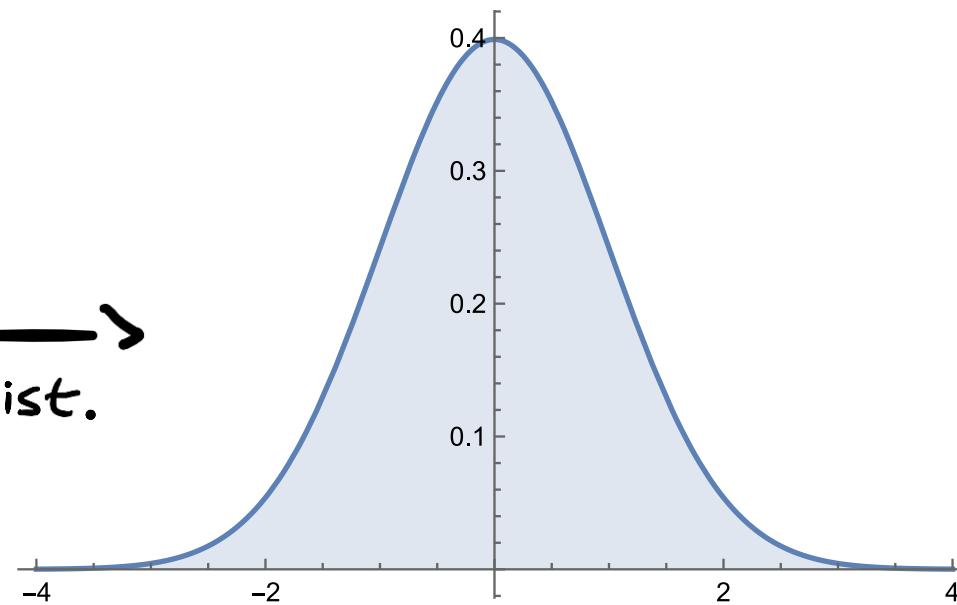
les pepins !

Rappel : le théorème central limite

SI $E[X^2] < \infty$ ET L'ESPÉRANCE EST μ ET LA VARIANCE EST σ^2 ALORS

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

dist.



Rappel: la loi des grands nombres

SI $E[X] = \mu < \infty$ ALORS

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \mu$$

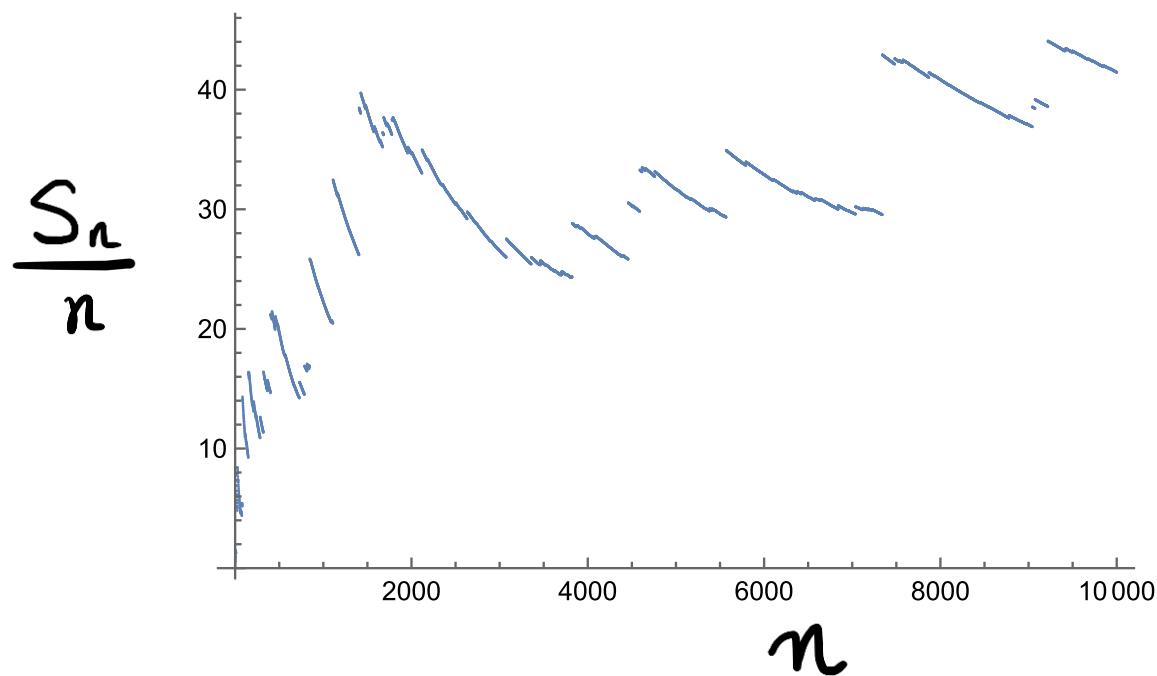
LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON CONVERGE VERS L'ESPÉRANCE

Si $d < 1 \dots$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

NE CONVERGE PAS

!



LA MOYENNE N'EST PAS
UN BON INDICATEUR DE
LA TENDANCE CENTRALE
POUR UNE TELLE
DISTRIBUTION

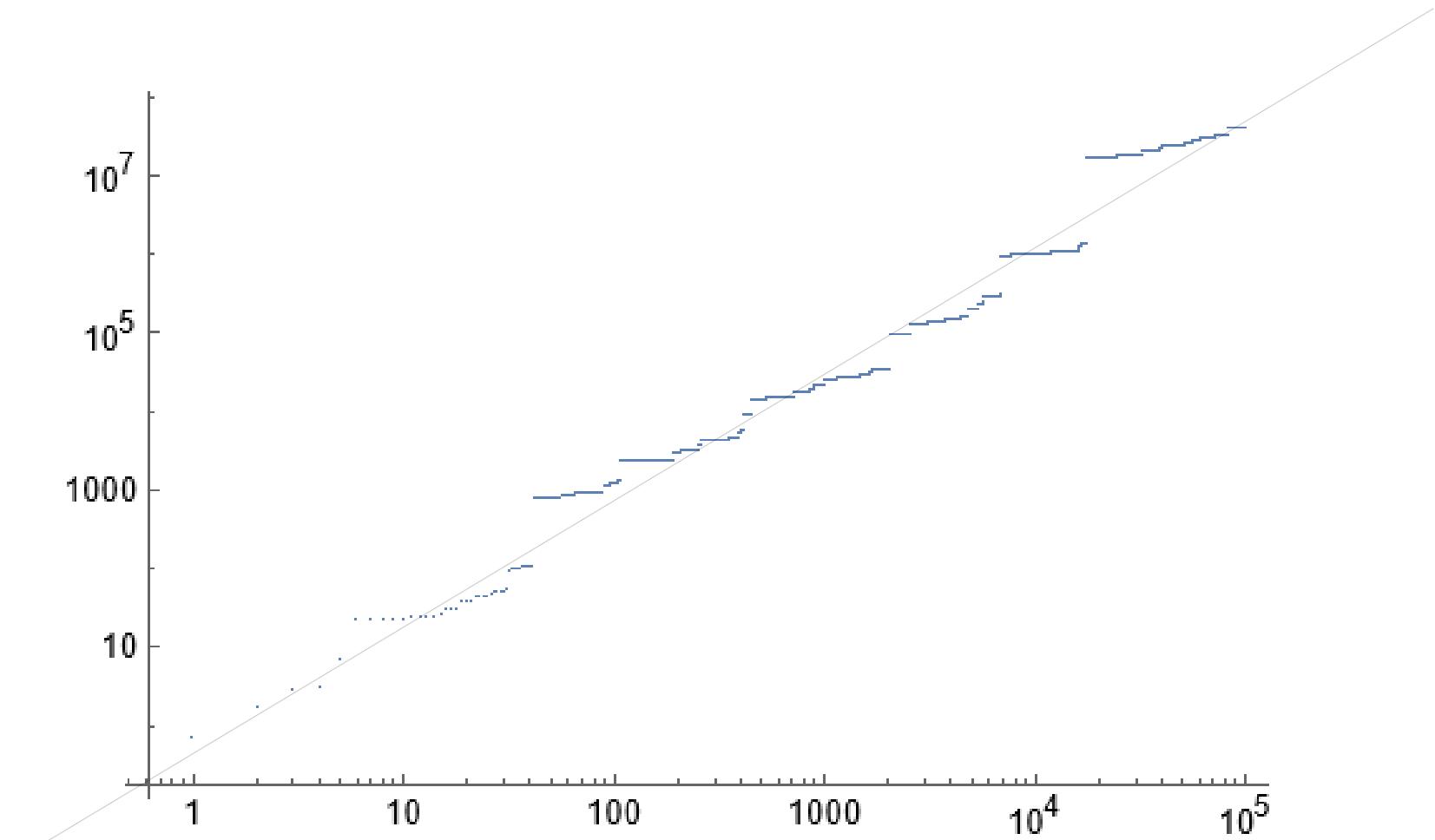
Théorème

SI $\bar{F}(x) = Ax^{-\alpha}$ AVEC $\alpha < 1$ ALORS

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{\text{dist}} S(\alpha)$$

$S(\alpha)$ EST UNE DISTRIBUTION STABLE

$$\Rightarrow " \sum_{i=1}^n x_i = O(n^{1/\alpha}) "$$



POUR κ DE 1 À 100 000; PARETO AVEC $A = .1$ ET $\kappa = .6$

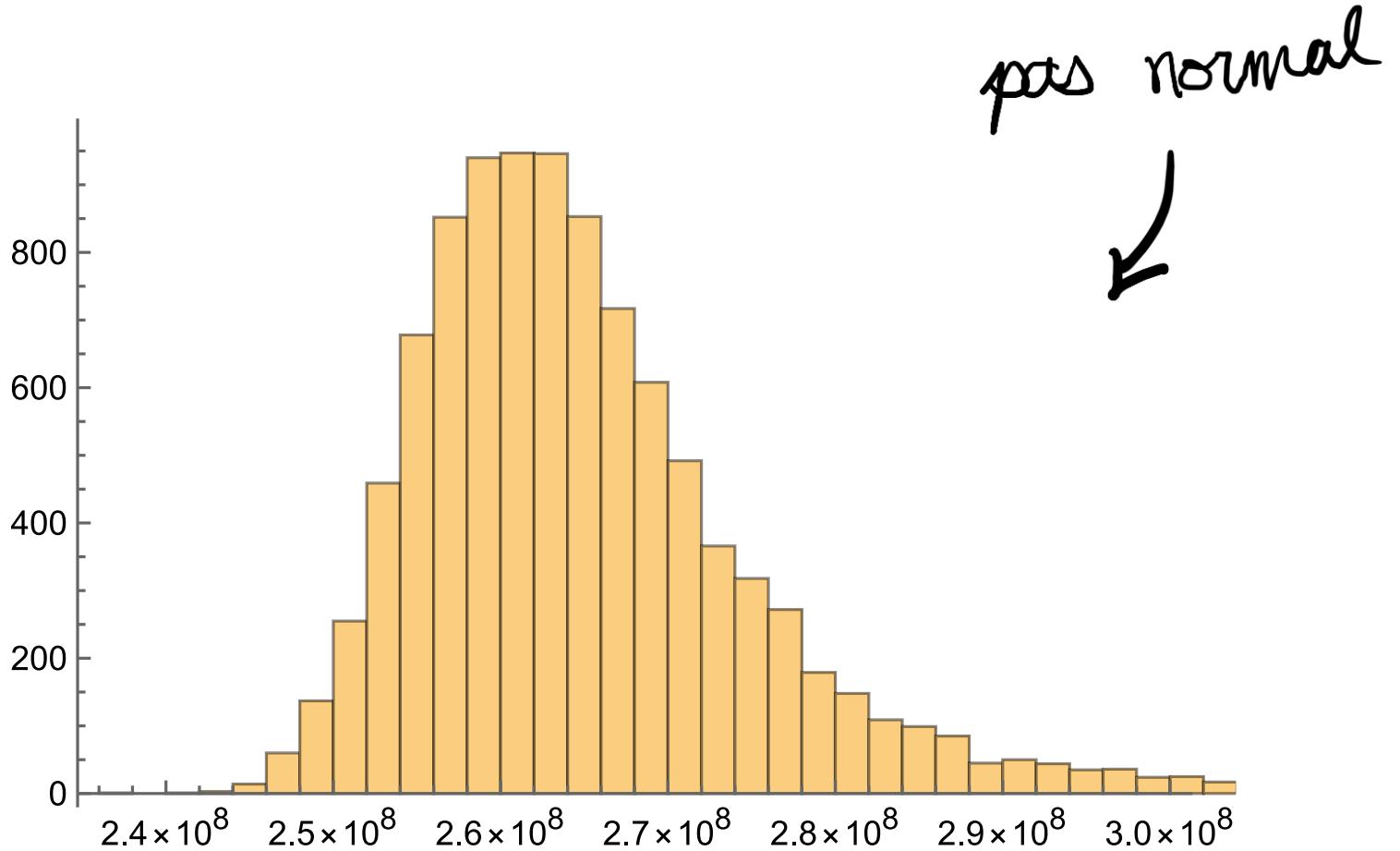
Si $1 < \alpha < 2$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad \checkmark$$

MAIS !

LA DISTRIBUTION NORMALE N'ES PAS UNE BONNE APPROXIMATION DES
FLUCTUATIONS AUTOUR DE L'ESPÉRANCE !





10K SOMMES DE 10K TERMES ~ PARETO AVEC $A = 10\,000$ ET $\alpha = 1.6$

théorème :

SI $F(x) = Ax^{-\alpha}$ AVEC $1 < \alpha < 2$ ALORS

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\text{dist}} S(\alpha)$$

LES FLUCTUATIONS SONT DE L'ORDRE DE $n^{1/\alpha}$

Les distributions stables

\mathcal{D} EST STABLE SI IL EXISTE DES SUITES a_n ET b_n T.Q. SI $x_i \sim \mathcal{D}$,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i - b_n}{a_n} \sim \mathcal{D}$$

$\Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ EST STABLE AVEC $b_n = 0$, $a_n = \sqrt{n}$

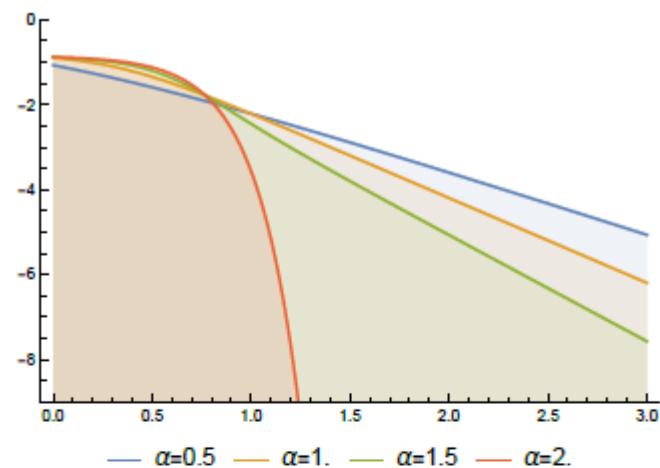
théorème :

TOUTE DISTRIBUTION STABLE A UNE FONCTION CARACTÉRISTIQUE DE LA FORME :

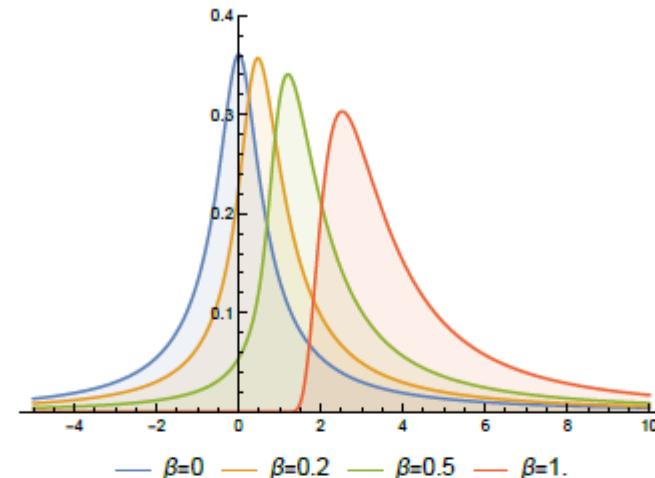
$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itS}] = e^{it\mu - |ct|^\alpha (1 + i\beta H(t, \alpha))};$$

$$H(t, \alpha) = \text{sgn } t \cdot \begin{cases} \tan \frac{1}{2}\pi\alpha & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log t & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

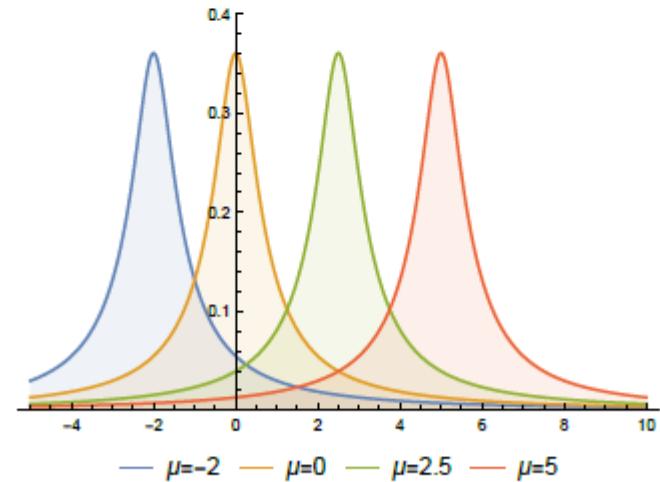
OUACHE



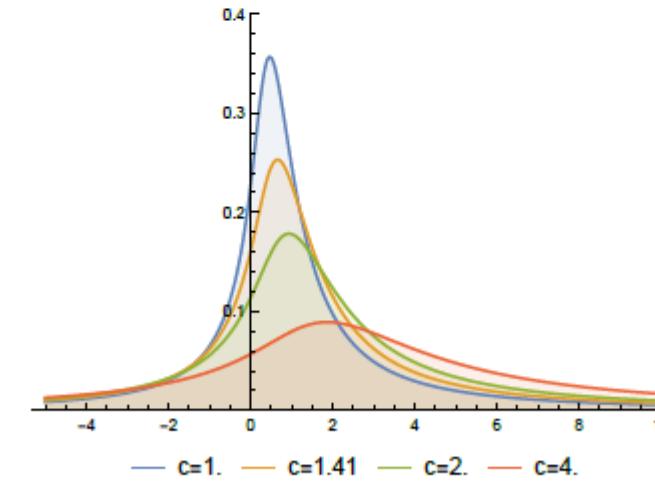
(a) $\beta = 0, \mu = 0, c = 1.$
Axes logarithmiques (base 10)



(b) $\alpha = 0.8, \mu = 0, c = 1.$



(c) $\alpha = 0.8, \beta = 0, c = 1$



(d) $\alpha = 0.8, \beta = 0.2, \mu = 0$

SOURCE: MA
THÈSE

Fig. 1.3. Impact des paramètres α, β, μ et c sur la densité des lois stables.

les renouvellements



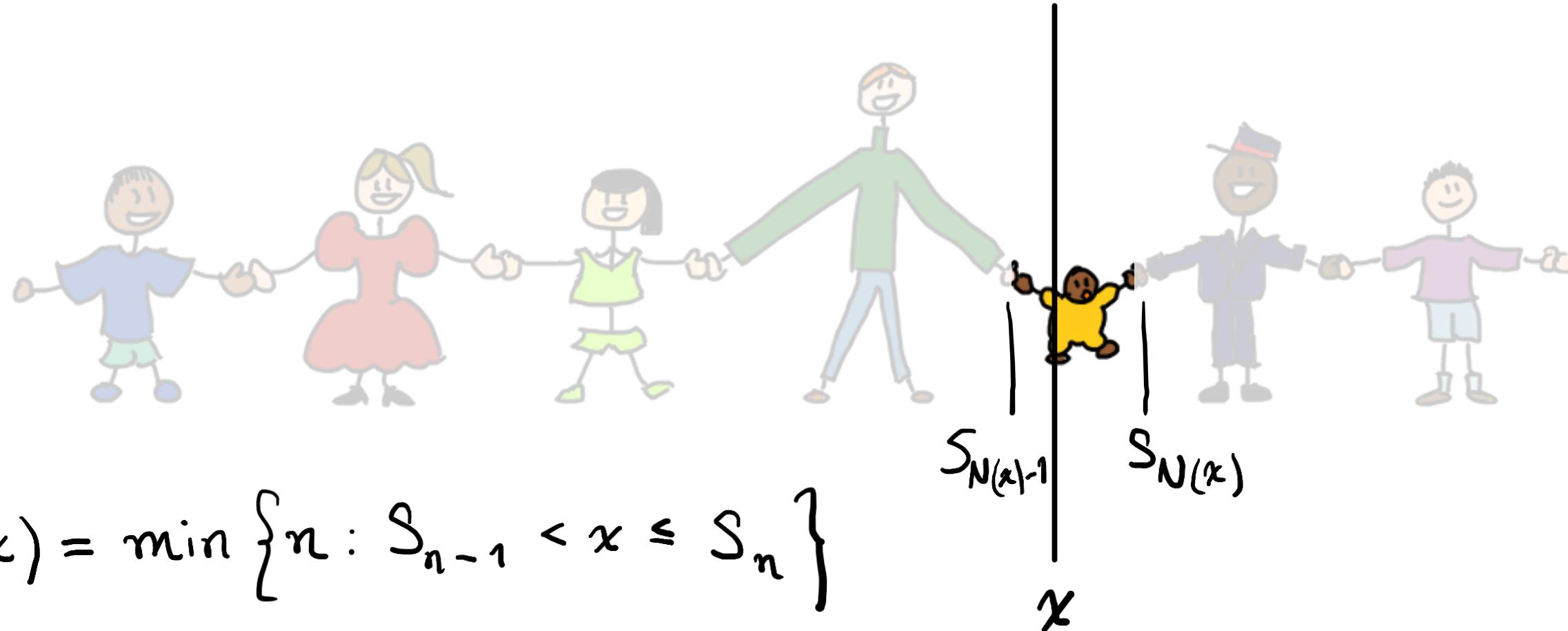


UNE COURSE À RELAIS UN PEU... SPÉCIALE...



COMBIEN FAUT-IL ÊTRE POUR DÉPASSER 100M ?

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \text{LONGUEUR APRÈS } n \text{ PERSONNES}$$



NOMBRE DE PERSONNES QU'IL FAUT POUR DÉPASSER x

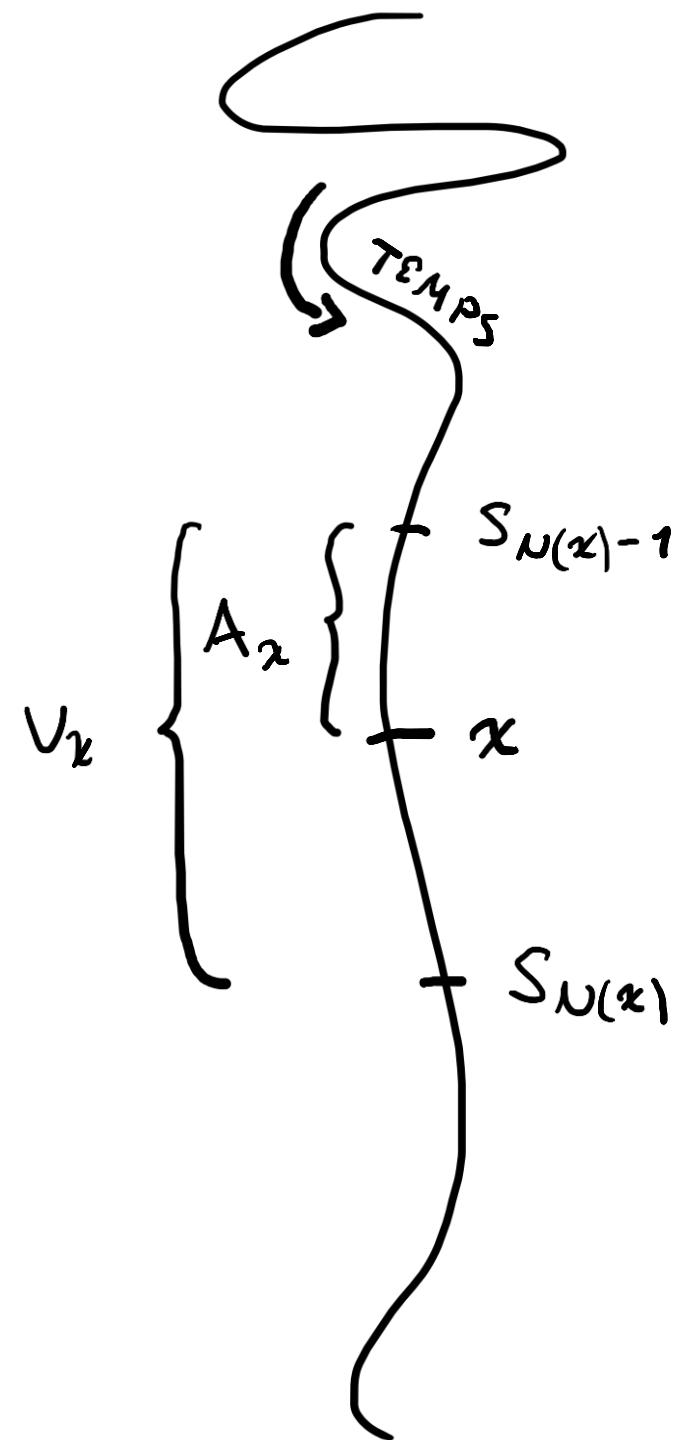
S_n = TEMPS DU n IÈME RENOUVELLEMENT

x = " TEMPS PRÉSENT "

$N(x)$ = RENOUVELLEMENT COURANT

$v_x = S_{N(x)} - S_{N(x)-1}$
= DURÉE DE VIE TOTALE DU RENOUVELLEMENT COURANT

$A_x = x - S_{N(x)-1}$
= ÂGE DU RENOUVELLEMENT COURANT



théorème:

SI $E[x_i] = \mu$ EXISTE, ALORS AVEC $\bar{F}(t) = P\{X > t\}$

$$P\{A_x > u\} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_u^\infty \bar{F}(t) dt$$

L'ÂGE DU RENOUVELLEMENT COURANT CONVERGE EN DISTRIBUTION

EN PARTICULIER,

$$\frac{\zeta_{N(x)-1}}{x} \longrightarrow 1$$

« LE RENOUVELLEMENT QUI NOUS FAIT ATTEINDRE χ NE CONTRIBUE PAS À LUI SEUL UNE FRACTION SIGNIFICATIVE DE LA SOMME »

théorème : (Loi de l'arc-sinus)

SI $\bar{F}(t) = A t^{-\alpha}$ AVEC $\alpha < 1$, ALORS

$$\frac{S_{N(x)-1}}{x} \xrightarrow{\text{dist}} B(\alpha, 1-\alpha)$$

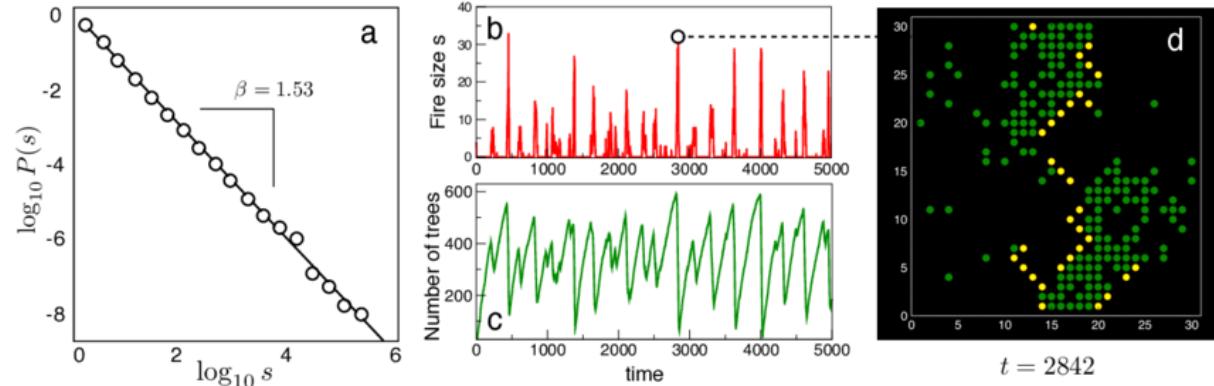
LE RENOUVELLEMENT QUI FAIT DÉPASSER x CONTRIBUE UNE FRACTION NON-NULLE ALÉATOIRE DE LA SOMME TOTALE



POUR TERMINER ...

Distributions à queues lourdes : rares ?

- DISTRIBUTION DU REVENU; DE L'ACTIF NET
- TAILLE DES FEUX DE FORêt
- TAILLES DES PANNESES ÉLECTRIQUES
- LA DISTRIBUTION DES TAILLES DE GISEMENTS DE PÉTROLE
- DISTRIBUTION DES PRÉCIPITATIONS; CRUES DES RIVIÈRES
- ETC...



Merci! Questions?