Solutionnaire de l’exercice 2

1) Les phases des planètes

La lune, le 18 juillet 2018.
Je suis un peu show-off…

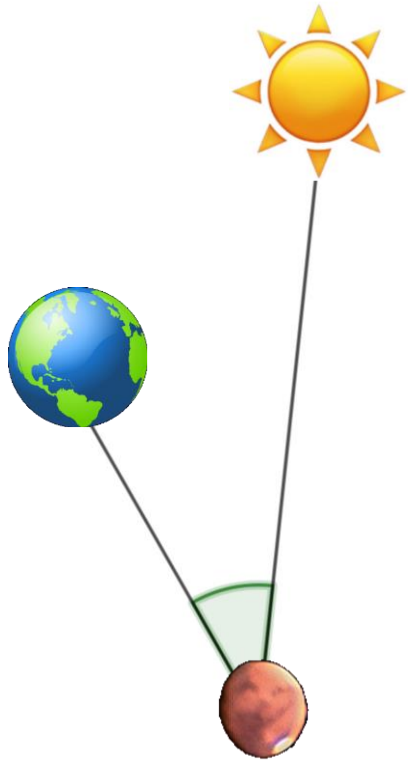
Les corps célestes de notre système solaire sont éclairés par le Soleil, et nous les voyons à différent angles, ce qui produit ce que les astronomes appellent une **phase**.

Vénus, le 4 août 2018,
à son dernier quartier.

Mars, le 13 septembre 2018

1) Les phases des planètes

- Pour caractériser précisément la phase d'un corps céleste, les astronomes utilisent **l'angle de phase**.
- Il s'agit de l'angle entre le Soleil et la Terre, vus depuis le corps céleste en question.



1) Les phases des planètes

- Lorsqu'un corps céleste a un angle de phase aigu, on voit presque tout le disque. Lorsque l'angle de phase est droit, on voit un quartier. Lorsque l'angle de phase est obtus, on voit un croissant.
- **Exercice :** Montrer qu'il est impossible pour un objet plus éloigné du Soleil que la Terre de nous apparaître comme un croissant ou un quartier.

Angle de phase > 90°

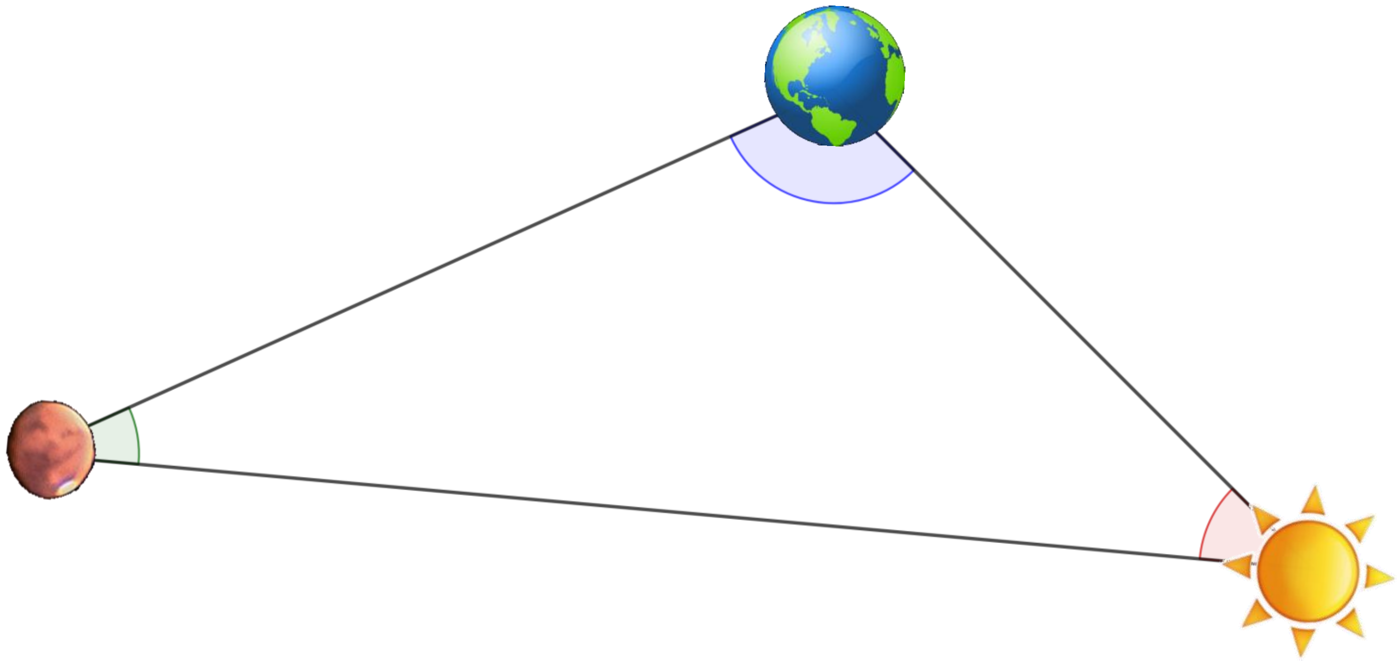
Angle de phase = 90°

Angle de phase < 90°

Indice : Considérer le Triangle Soleil-Terre-Planète.

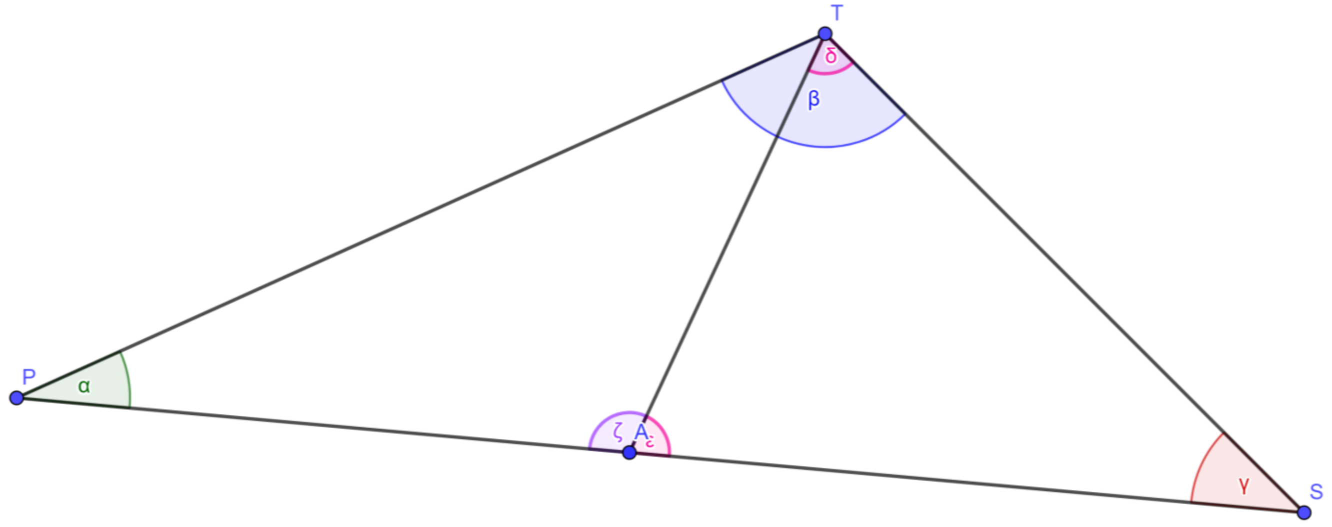
1) Les phases des planètes
Solution

On considère le triangle Terre-Soleil-Planète.



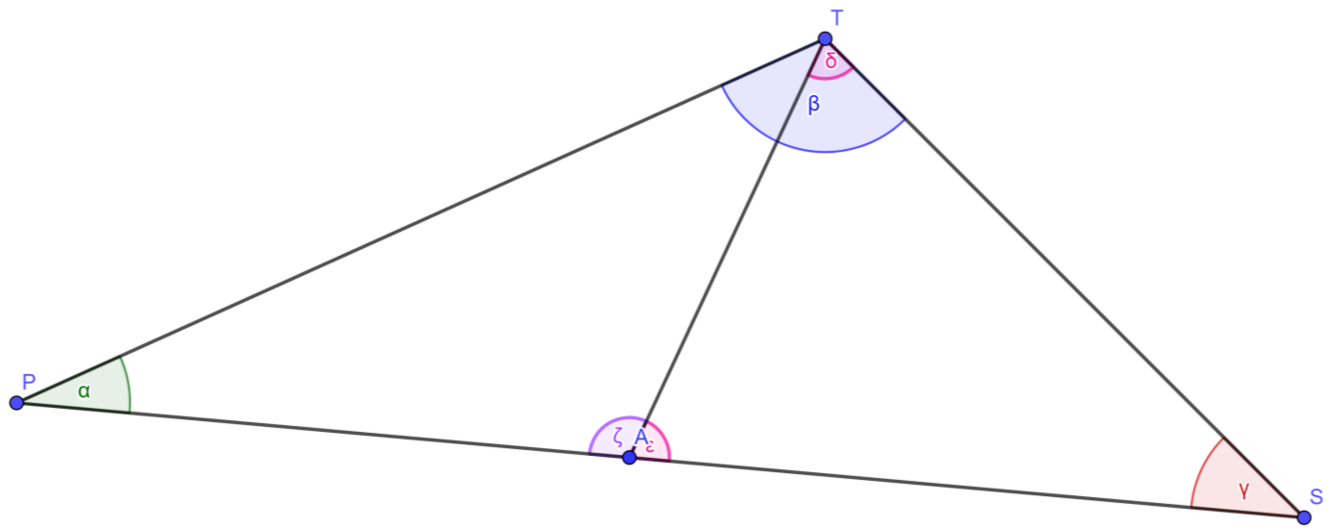
1) Les phases des planètes
Solution

1) Par hypothèse, PS est plus grande que TS. On retranche à PS une droite AS égale à TS (Prop. I.3)
2) On joint TA. **Le triangle STA est isocèle, puisque TS et TA sont égales.**



1) Les phases des planètes
Solution

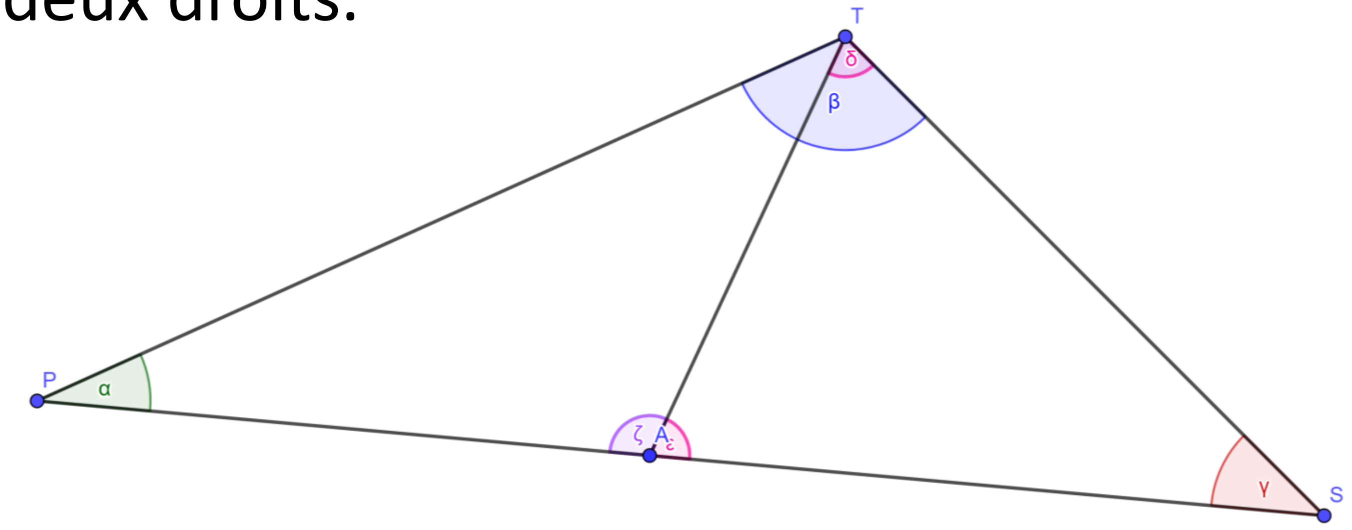
Les angles SAT et ATS sont égaux (Prop. I.5). **Ils sont chacun aigus** (plus petits que des droits), car autrement la somme des angles intérieurs du triangle STA serait supérieure à deux droits.



1) Les phases des planètes
Solution

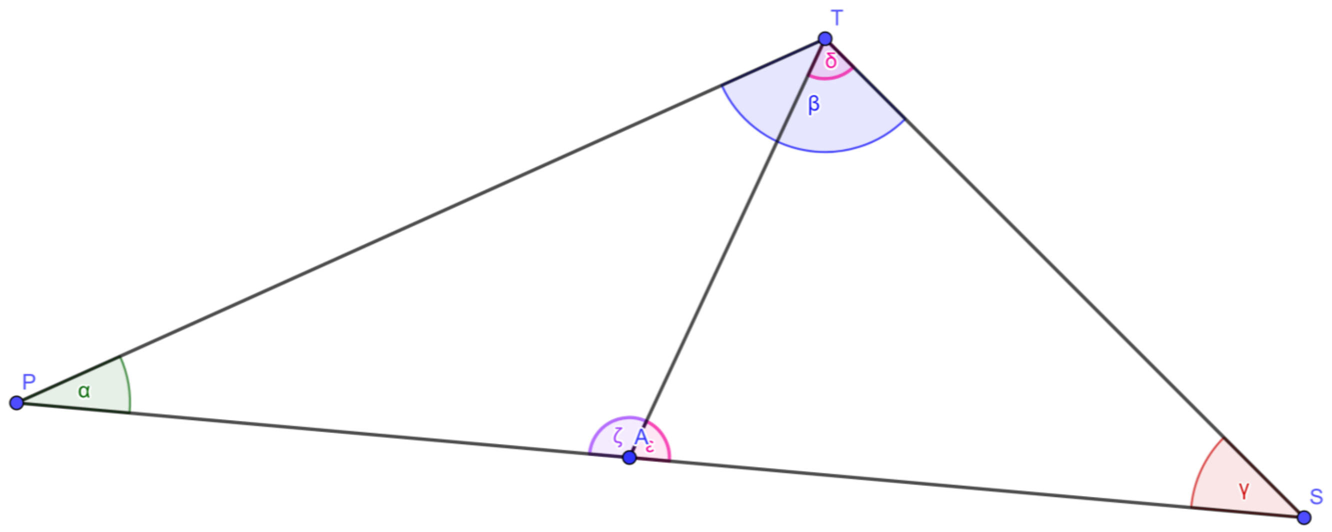
Les angles SAT et TAP sont de part et d'autre de la droite TA élevée sur PS. Ils font donc ensemble deux droits (Prop. I.13)

Alors, **l'angle TAP est obtus**, puisque l'angle SAT est aigu, et qu'ils font ensemble deux droits.



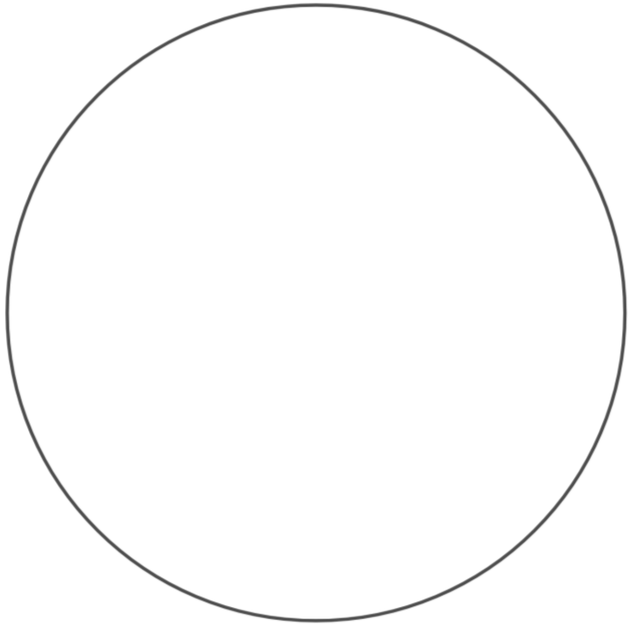
1) Les phases des planètes
Solution

Un triangle ne peut avoir plus d’un angle obtus ou droit. (Prop. I.32), et les angles TPS et TAP sont dans le triangle TPA, et l’angle TAP est obtus. Donc **l’angle TPS (angle de phase) est aigu**, ce qu’il fallait démontrer.



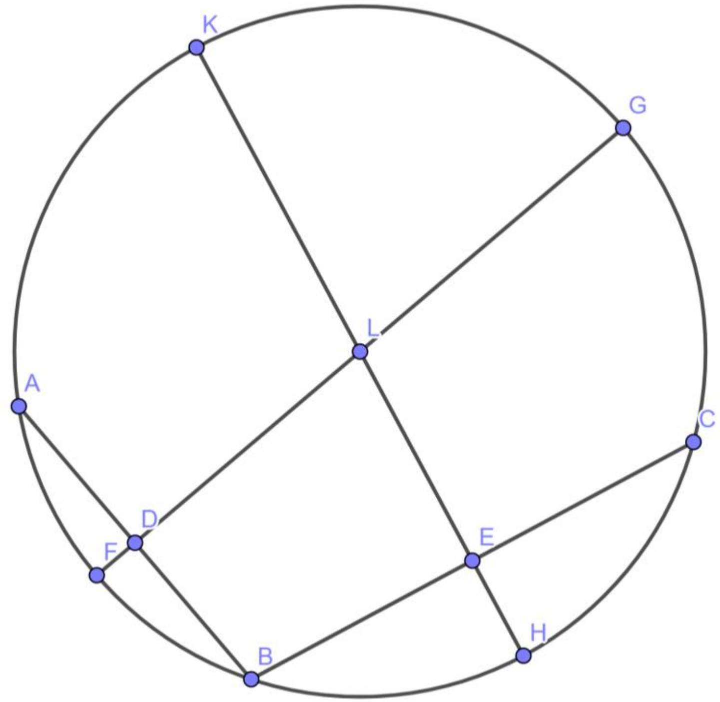
2) Proposition III.1

Trouver le centre d’un cercle donné.



2) Proposition III.1
Solution

1) Choisir trois points A, B, C sur la circonférence. Joindre AB, BC.
2) Couper AB en son milieu D, BC en son milieu E.
3) Monter les perpendiculaires, FG à AB par D et HK à BC par E. Nommer L l’intersection de FG et HK.

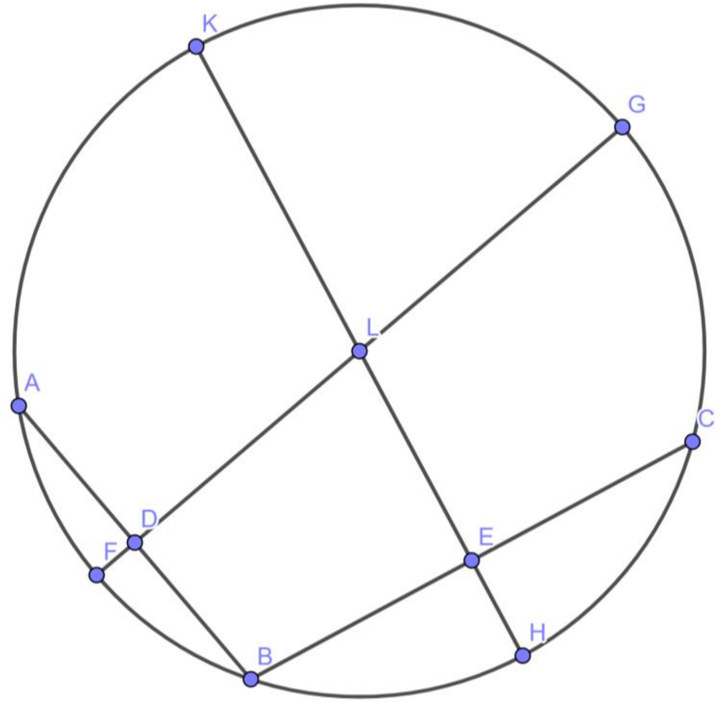


2) Proposition III.1
Solution

Le point L est le centre du cercle.

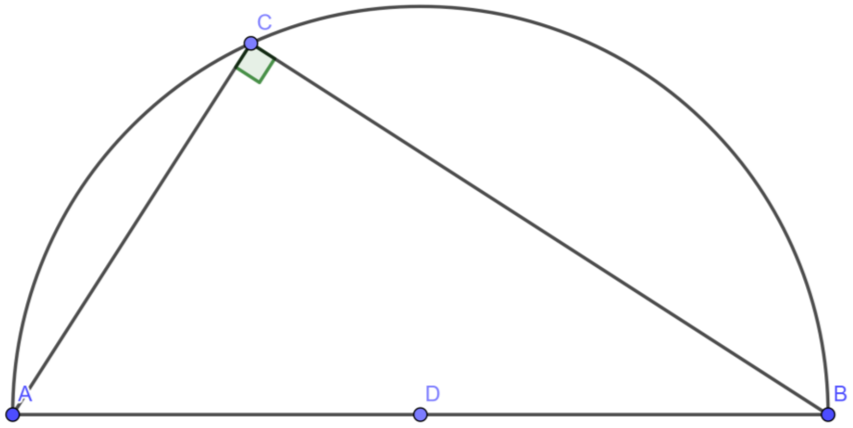
En effet, FG est un diamètre du cercle (Porisme III.1) et passe par le centre, mais HK est aussi un diamètre du cercle, et passe donc aussi par le centre (Porisme III.1)

Le centre est donc un point qui se situe sur FG et sur HK. Mais ce point est unique, et c’est L. Le point L est donc le centre du cercle, ce qu’il fallait faire.



3) Théorème de Thalès

Dans un cercle, tout triangle construit sur un diamètre et dont le sommet se trouve sur la circonférence du cercle est un triangle rectangle.



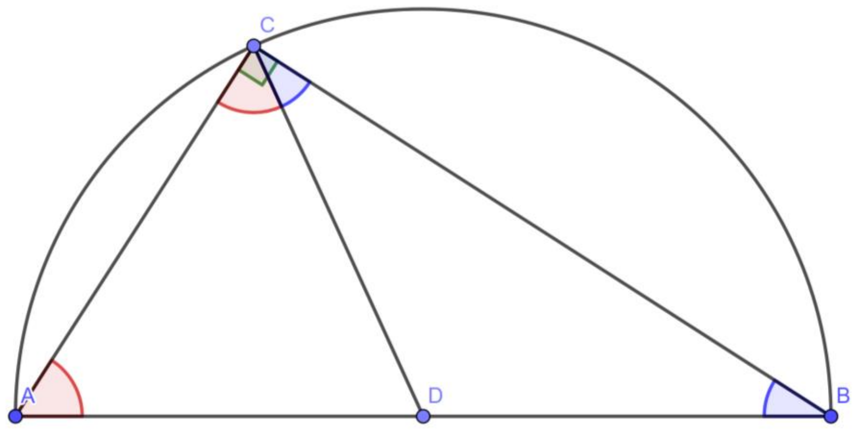
Indice : triangles isocèles.

3) Théorème de Thalès
Solution

1) Joindre CD.

AD et CD sont deux rayons du même cercles, donc égales. De même, CD et BD sont égales (Déf I.15) **Les triangles CDA et CDB sont donc isocèles.**

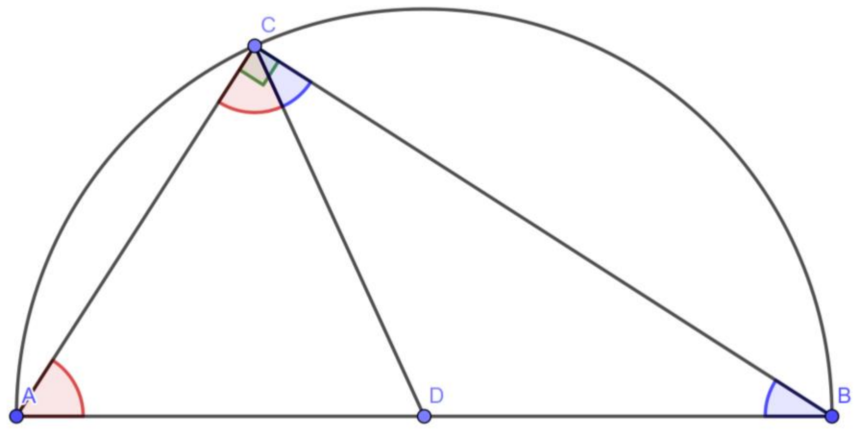
Par conséquent, les angles CAD et ACD sont égaux entre eux, de même que les angles CBD et BCD. (Prop I.5)



3) Théorème de Thalès
Solution

Par conséquent, le double des angles ACD et BCD pris ensemble est égal aux angles CAB, ABC et BCA pris ensemble.

Mais **ces trois derniers sont égaux ensemble à deux droits** (Prop. I.32).

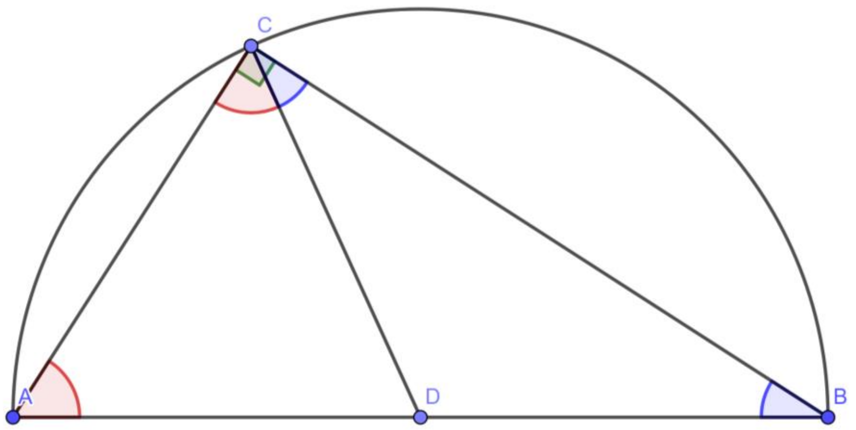


3) Théorème de Thalès
Solution

Puisque le double des angles ACD et BCD ensemble est égal à deux droits, alors les angles ACD et BCD ensemble font un droit.

Mais les angles ACD et BCD ensemble sont égaux à l'angle BCA.

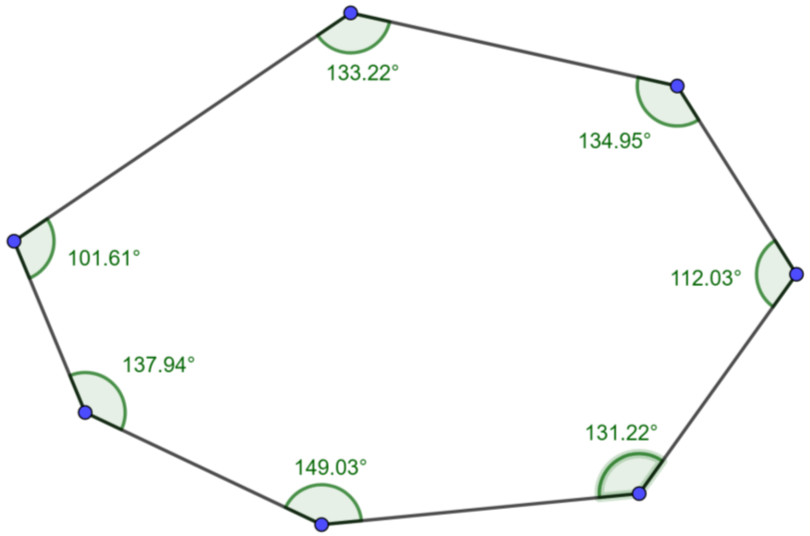
Donc, l'angle BCA est égal à un droit, ce qu'il fallait démontrer.



4) Sommes d'angles intérieurs

Montrer que les angles intérieurs d'une figure rectiligne convexe* ensembles sont égaux à autant d'angles droits que le double du nombre de côtés, moins quatre.

[Si n est le nombre de côtés, alors la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est $90° \times (2n - 4) = 180° \times (n - 2)$]



$$
\begin{array}{r}
101{,}61° \\
+\ 133{,}22° \\
+\ 134{,}95° \\
+\ 112{,}03° \\
+\ 131{,}22° \\
+\ 149{,}03° \\
+\ 137{,}94° \\
\hline
900{,}00°
\end{array}
$$

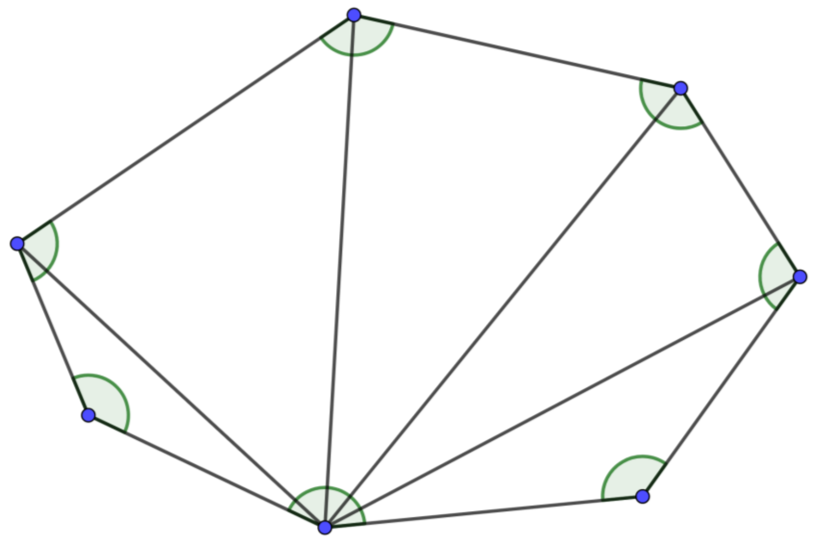
180° x (7-2) = 900,00°

*C'est vrai sans la convexité, mais c'est plus facile à montrer avec la convexité.

4) Somme d’angles intérieurs
Solution

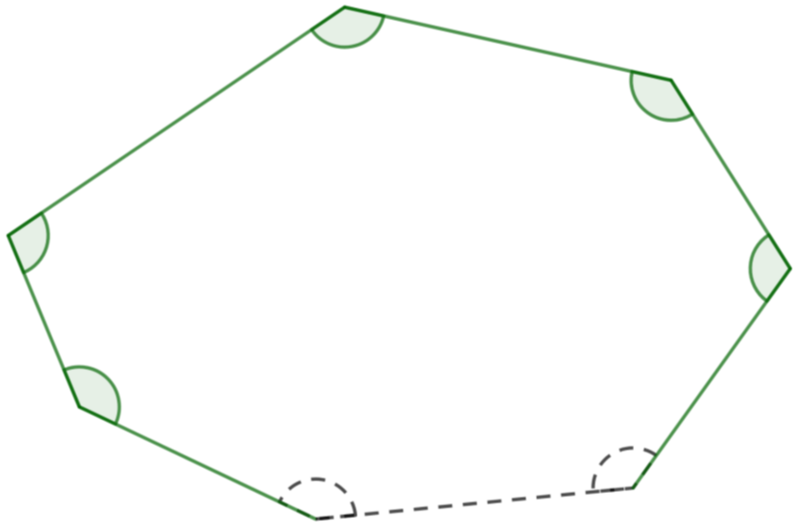
1) Choisir un sommet quelconque, et joindre les autres jusqu’à ce qu’on ait découpé la figure en triangles.

La somme des angles intérieurs est égale à 180° x le nombre de triangles. On a (n-2) triangles si il y a n faces. Donc on a bien (n-2)x180°

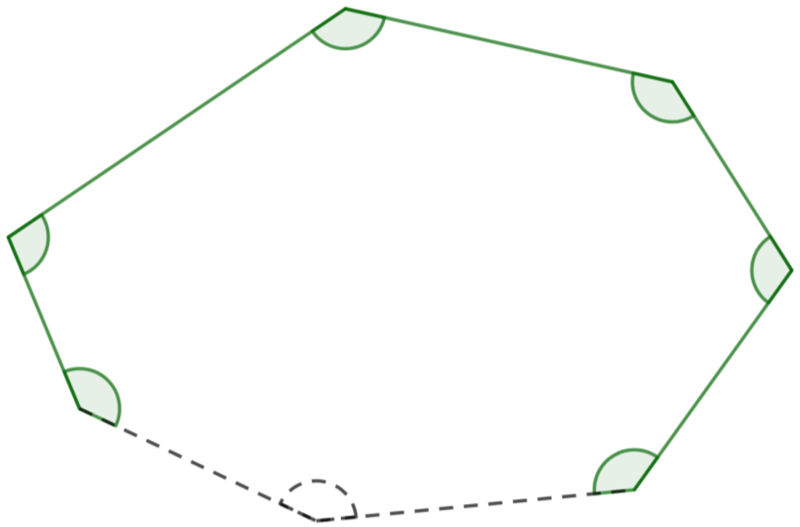


5) Congruence des figures (défi)

(a) Si deux figures rectilignes planes ont les côtés sauf la base égaux chacun à chacun, et les angles contenus par les côtés adjacents égaux chacun à chacun, alors les bases sont égales et les figures sont congrues.



(b) Si deux figures rectilignes planes ont les côtés sauf deux égaux chacun à chacun, et tous les angles, sauf celui contenu par les deux côtés restants, égaux, alors les deux figures sont congrues.



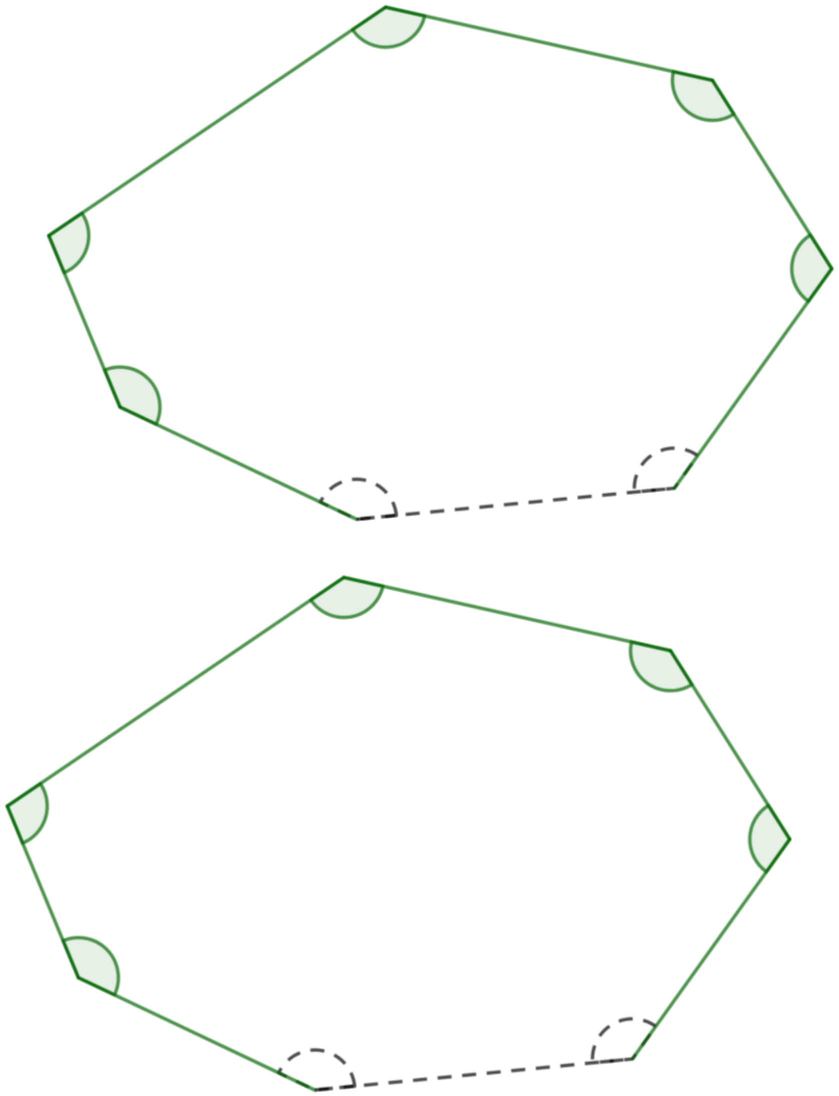
5) Congruence des figures (défi)
Solution (a)

On part avec deux figures. On connait les longueurs des segments en vert, ainsi que les angles en vert. Les côtés sont égaux deux à deux, les angles égaux deux à deux.

On va montrer que les pointillés (angles et côtés) doivent aussi être égaux, et que les figures sont congruentes.

Pour ce faire, on procède par induction.

Tout d’

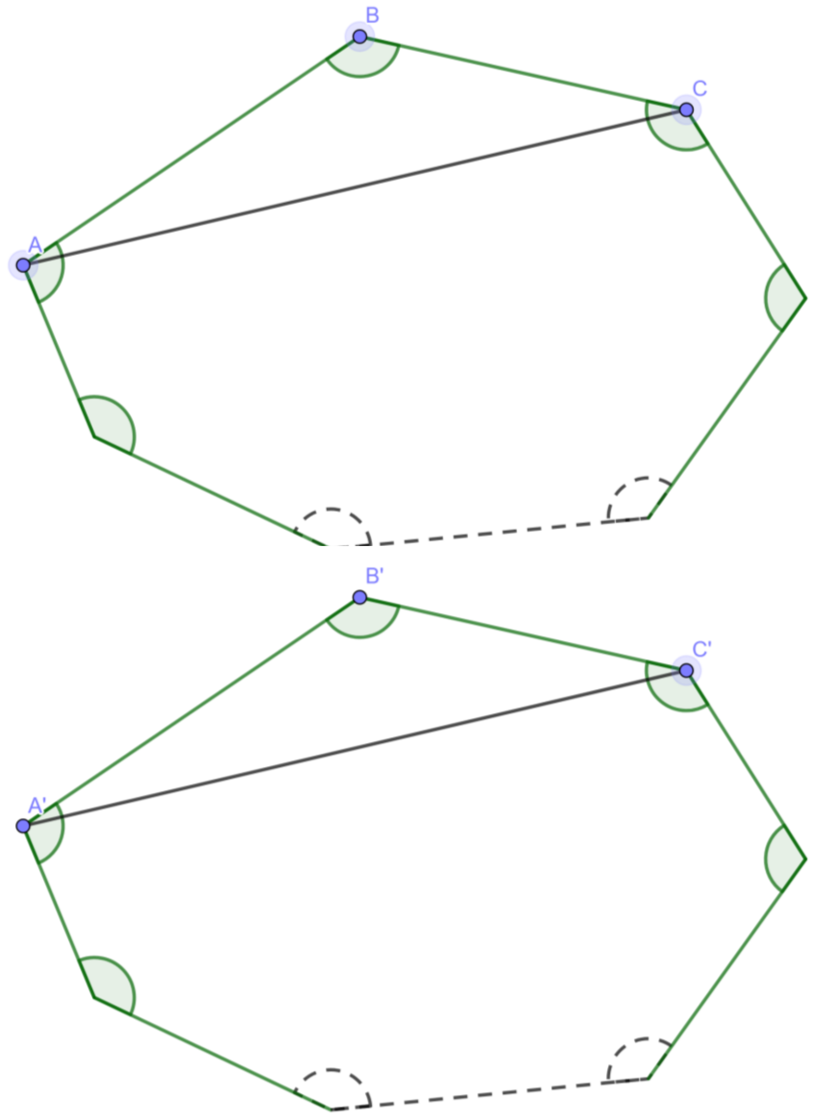


5) Congruence des figures (défi)
Solution (a)

Nous savons que l'énoncé (a) est vrai pour toutes les figures à trois côtés (Prop. I.4)

Nous allons maintenant supposer que l'énoncé (a) est vrai pour toutes les figures à (n-1) côtés.

Avec cette supposition, nous allons prouver que l'énoncé (a) est aussi vrai pour les figures à n côtés.

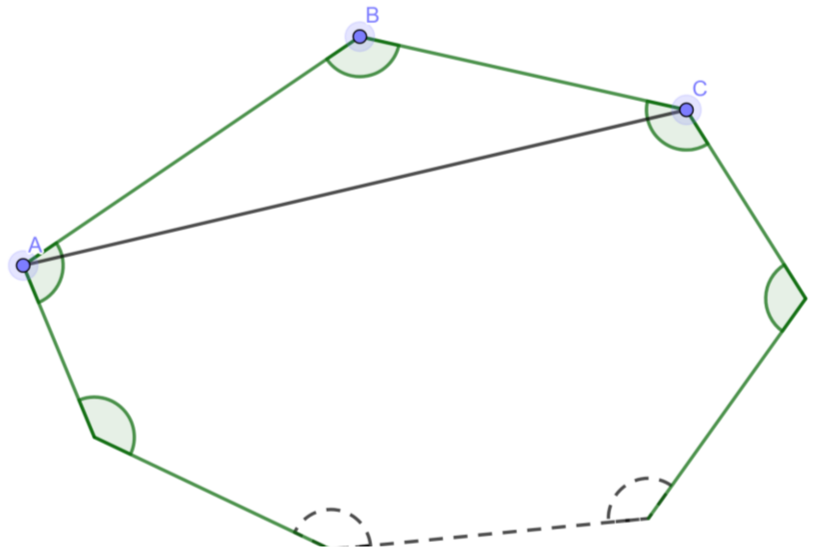


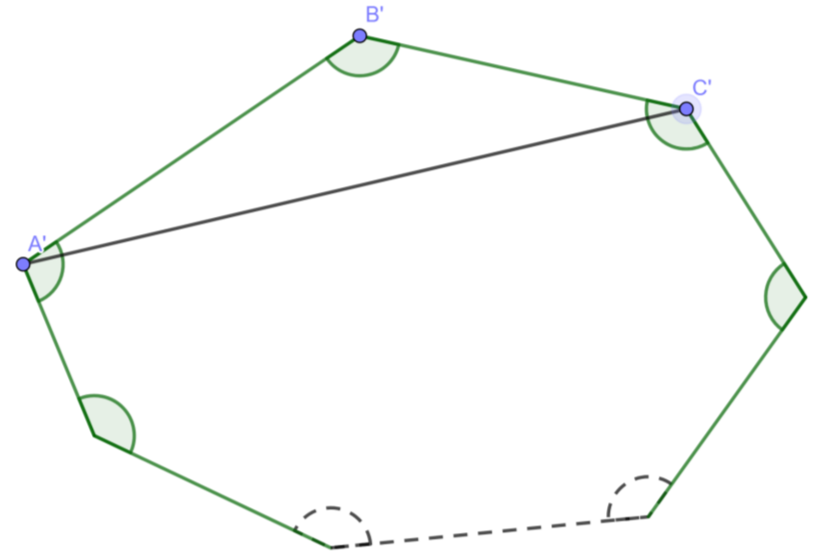
5) Congruence des figures (défi)

Solution (a)

1) Choisir trois sommets consécutifs de la première figure; les appeler A, B, C.
2) Faire de même avec la seconde figure. Appeler les sommets A', B', C'
3) Joindre AC pour former le triangle ABC. Joindre A'C' pour former le triangle A'B'C'.

Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux, puisque AB = A'B', BC = B'C' et les angles ABC et A'B'C' sont égaux. (Prop. I.4)



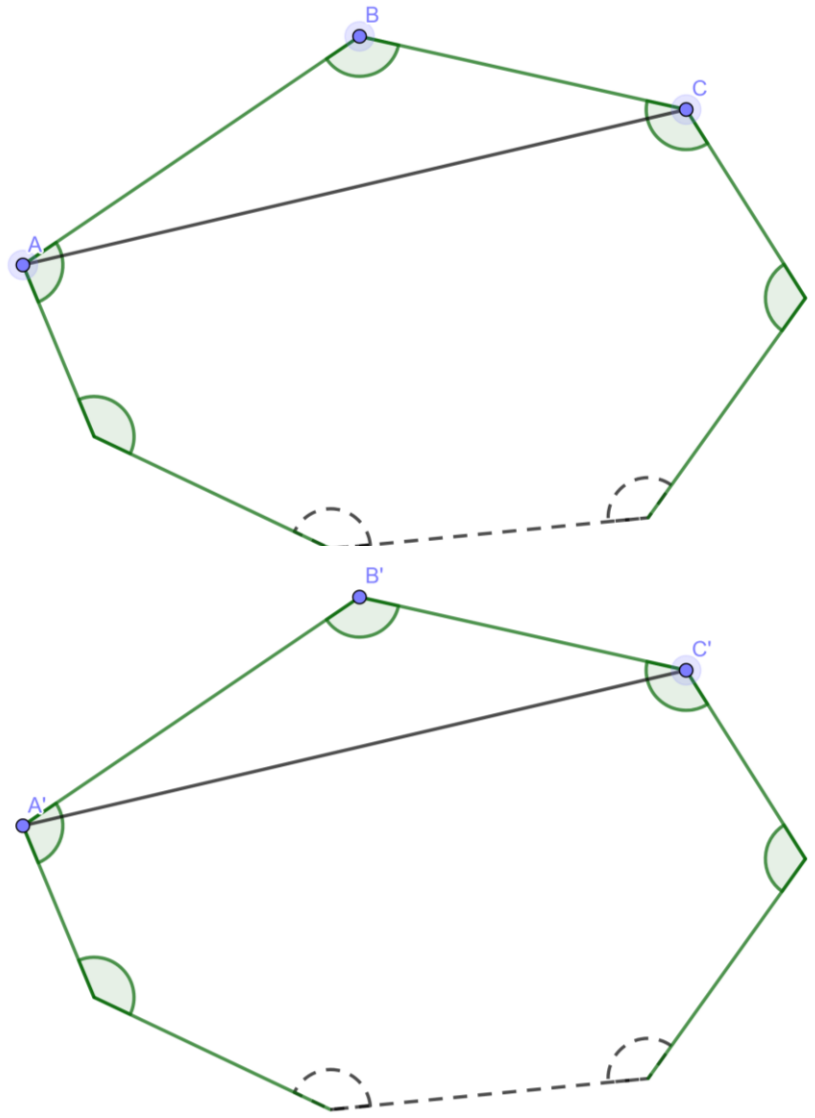


5) Congruence des figures (défi)
Solution (a)

Nous avons supposé que l'énoncé est vrai pour les figures avec (n-1) côtés.

En particulier, puisque AC = A'C', **les figures obtenues en soustrayant les triangles ABC et A'B'C' sont donc supposées congruentes**, puisqu'elles satisfont les critères de l'énoncé (a), et on un côté de moins.

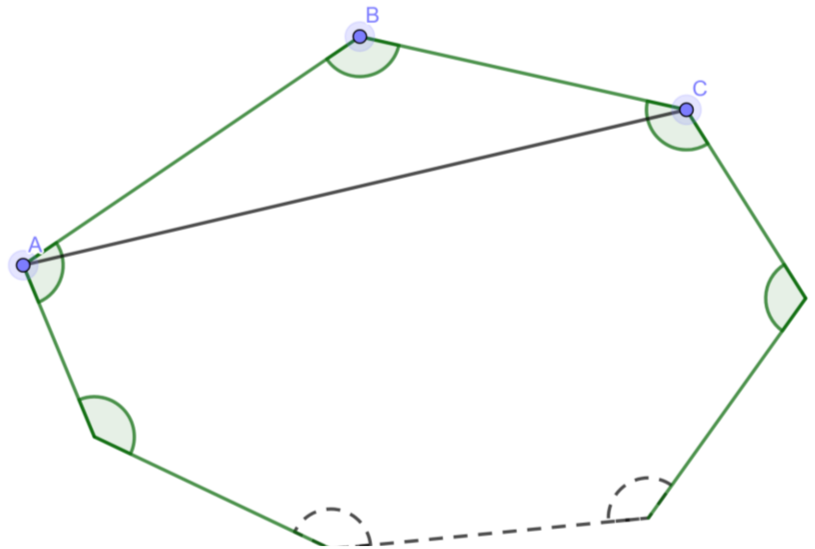
Mais alors, puisque les triangles ABC et A'B'C' sont aussi congruents, **les figures complètes sont congruentes aussi.**

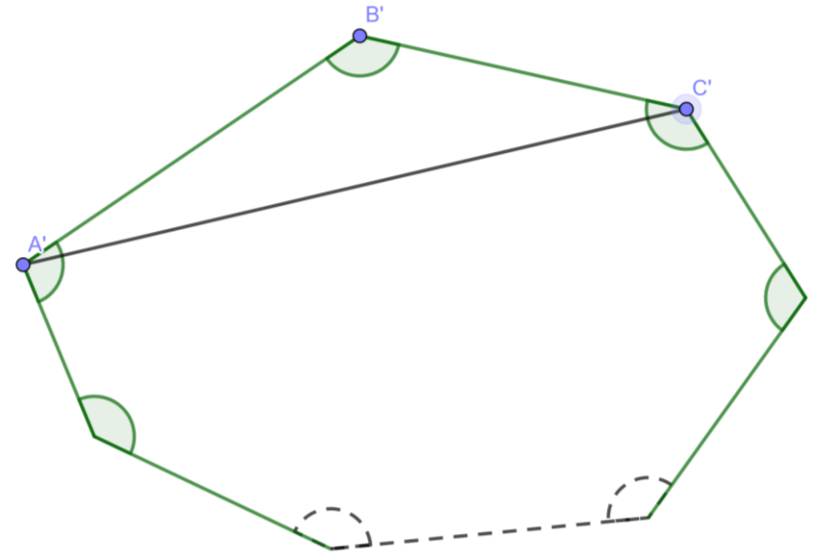


5) Congruence des figures (défi)
Solution (a)

Nous venons de montrer qu'en supposant l'énoncé pour les figures à n côtés, l'énoncé doit aussi être vrai pour les figures avec (n+1) côtés.

Puisque, « au départ », l'énoncé est au moins vrai pour les figures à trois côté, alors par induction, l'énoncé est vrai pour toutes les figures rectilignes. Ce qu'il fallait démontrer.



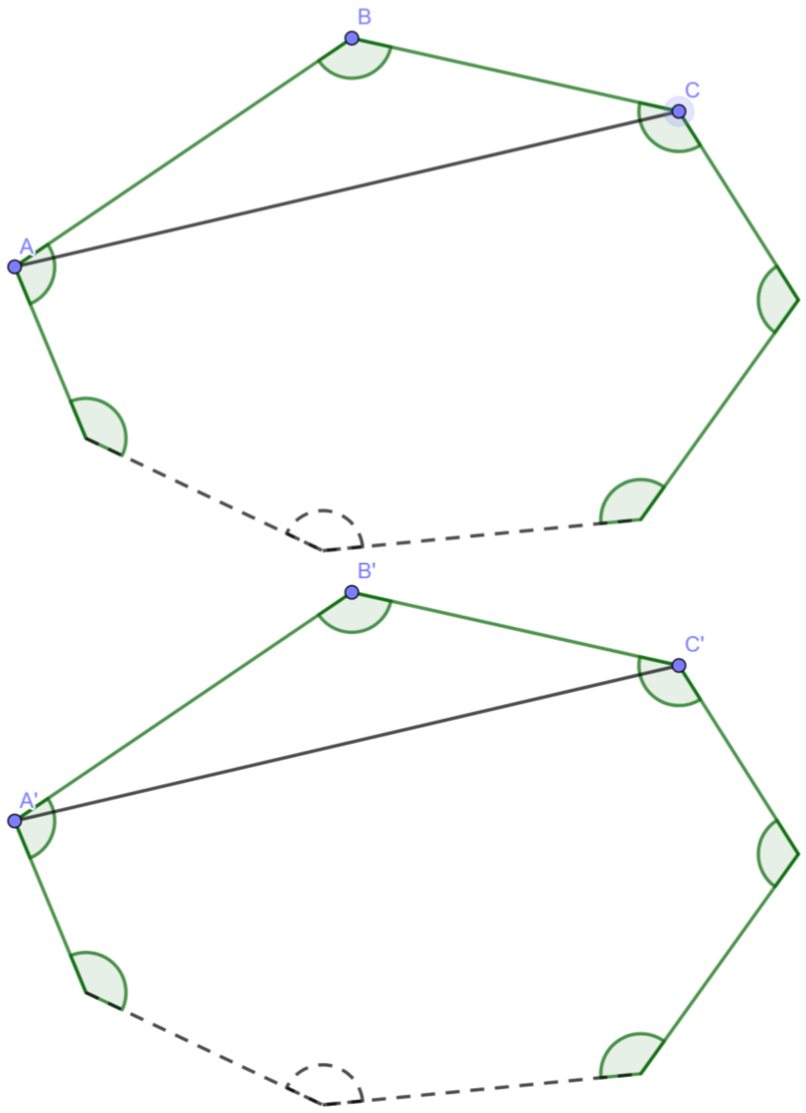


5) Congruence des figures (défi)
Solution (b)

On raisonne de manière exactement analogue pour prouver l'énoncé (b) :

D'abord, on sait qu'il est vrai pour les figures à trois côtés (Prop. I.26)

Ensuite, on montre que si on suppose l'énoncé vrai pour les figures à (n-1) côtés, il doit également être vrai pour les figures à n cotés. On fait ceci exactement de la même façon que pour l'énoncé (a).

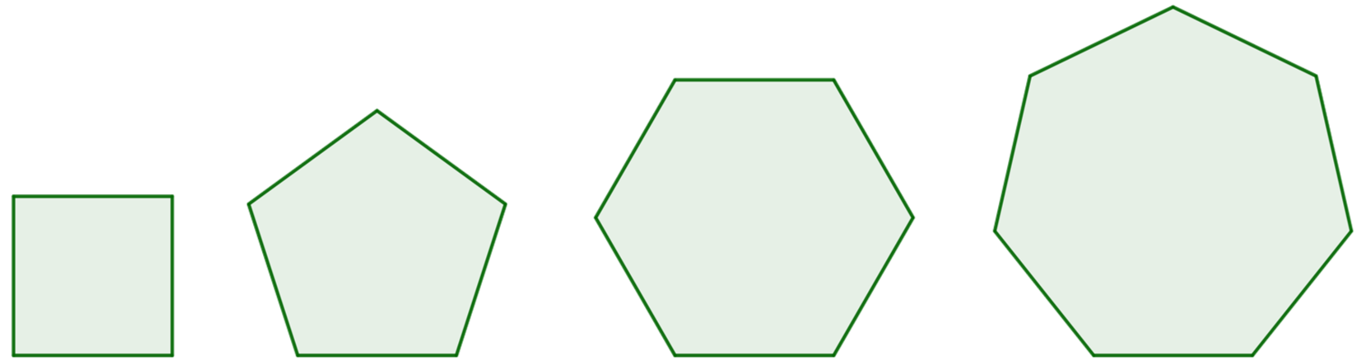


6) Polygones réguliers (défi)

Un polygone est une figure plane rectiligne dont tous les côtés sont égaux entre eux, et tous les angles intérieurs égaux entre eux.

(a) Montrer qu'un polygone régulier avec un nombre impair de côtés n'a aucune paire de côtés parallèles.

(b) Montrer qu'un polygone régulier avec un nombre pair de côtés est contenu par des paires de droites parallèles.

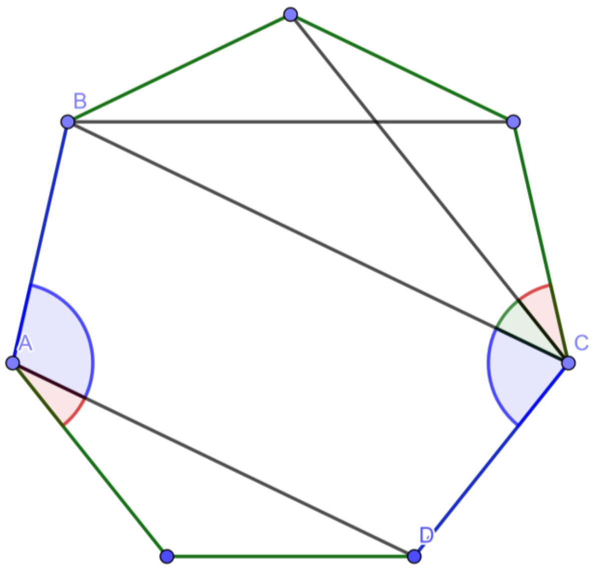


6) Polygones réguliers
Solution (a)

1) On choisit deux côtés AB et CD non-adjacents. On en relie les extrémités du même côté : AD et BC.

En ce faisant, on a « séparé » le polygone en un espèce de sandwich : un quadrilatère ABCD, la « garniture », et des pains de part et d’autre.

Comme le nombre de côtés est impair, forcément un de nos deux « pains » est plus petit que l’autre. Supposons qu’il s’agit du « pain » du côté AC.

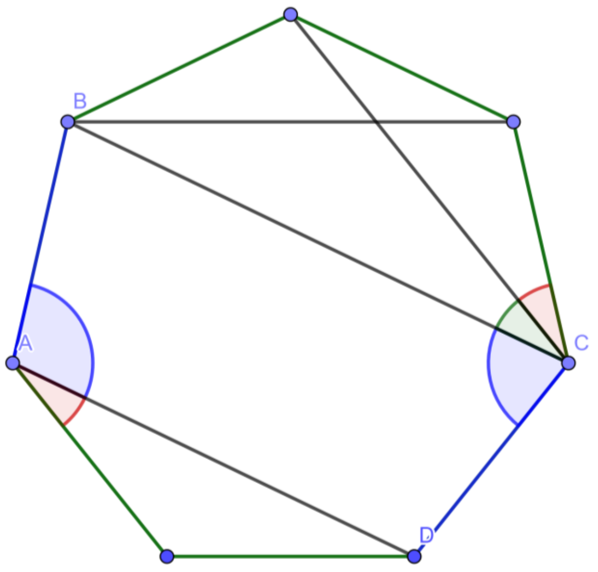


6) Polygones réguliers
Solution (a)

Du côté de BC, au point C, on peut aussi tracer une diagonale qui sous-tend autant de côtés du polygone que dans notre « plus petit pain ».

Forcément, les deux « pains », des « arcs » de polygone avec autant de côtés, d'égales longueurs, et des angles égaux, sont congruents.

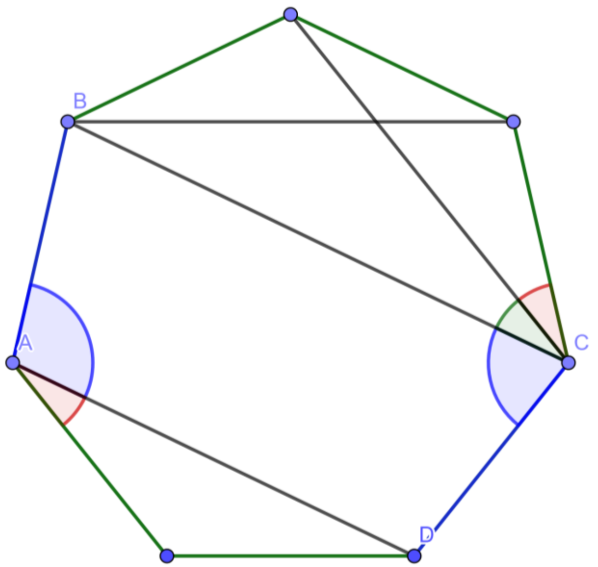
Ici, les angles rouges sur la figure sont donc égaux, puisqu'ils sont des angles correspondants de deux figures congruentes.



6) Polygones réguliers
Solution (a)

Les côtés AB et CD sont égaux, puisqu'ils sont deux côtés d'un polygone régulier.

Si on suppose qu'ils sont parallèles, alors les côtés BC et AD sont aussi égaux et parallèles, et les angles BAD et BCD sont égaux car opposés dans le même parallélogramme. Sur notre figure, ce sont les angles bleus.

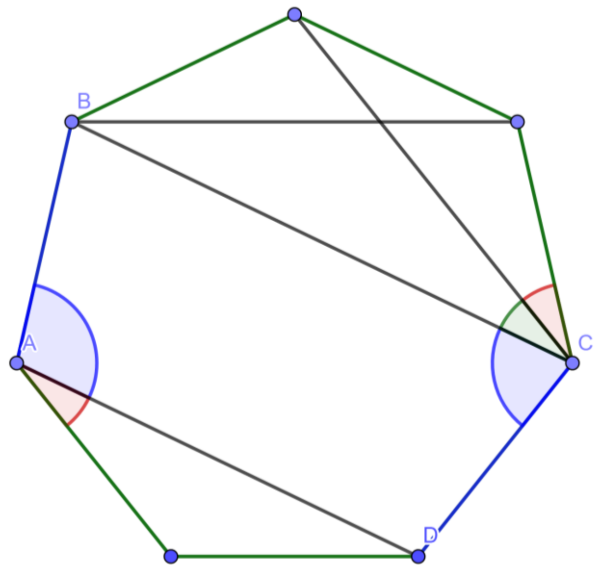


6) Polygones réguliers
Solution (a)

Mais alors, L’angle bleu et l’angle rouge ensemble font un angle intérieur du polygone régulier. Ils doivent être égaux à l’angle bleu pris avec l’angle rouge et l’angle vert sur la figure, puisque ces derniers forment aussi un angle intérieur du polygone.

Mais ils sont forcément inégaux, puisque l’angle vert n’est pas nul.

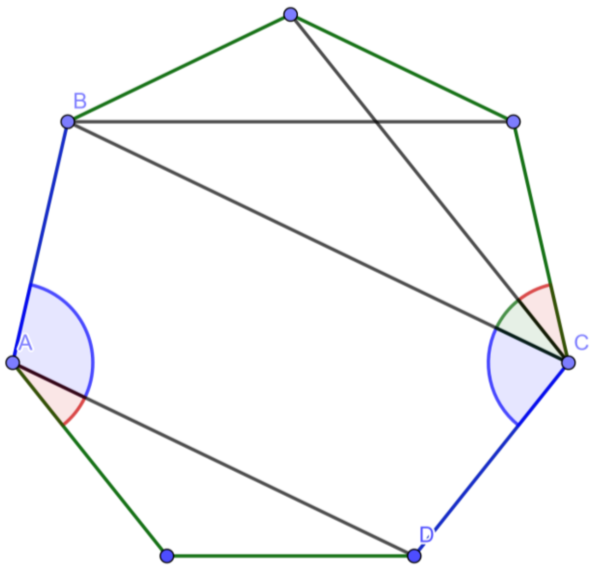
Donc on doit conclure que AB et CD ne sont pas parallèles.



6) Polygones réguliers
Solution (a)

On vient de voir que si on choisit deux côtés non-adjacents dans un polygone régulier avec un nombre impair de côtés, ils ne peuvent pas être parallèles.

On doit conclure que dans un polygone avec un nombre impair de côtés, il est impossible de trouver une paire de côtés parallèles.



6) Polygones réguliers
Solution (b)

Pour tout côté AB de notre polygone, on prend CD le côté opposé qui sépare notre polygone en un sandwich avec des « pains » ayant chacun autant de côtés l'un que l'autre.

Alors, les « pains » sont congruents, et les angles à leurs bases sont tous égaux. Mais comme tous les angles dans notre polygone sont égaux entre eux, alors si on leur soustrait les angles à la base des « pains », les restes seront égaux entre eux.

Mais les restes sont les quatre angles intérieurs du quadrilatère ABCD. Si ils sont égaux, ils sont droits et notre quadrilatère est un rectangle, et AB est parallèle à CD.