Introduction aux Livres des Éléments

SÉANCE 2 : LA GÉOMÉTRIE PLANE

ÉLISE DAVIGNON
elise.davignon@umontreal.ca

UPop montréal

Aujourd'hui

Solutions de l'exercice 1 (Livre I, propositions 1, 2, 3)

Livre I
Congruence des triangles, des angles
Théorie des parallèles
Angles intérieurs d'un triangle
Théorème de Pythagore

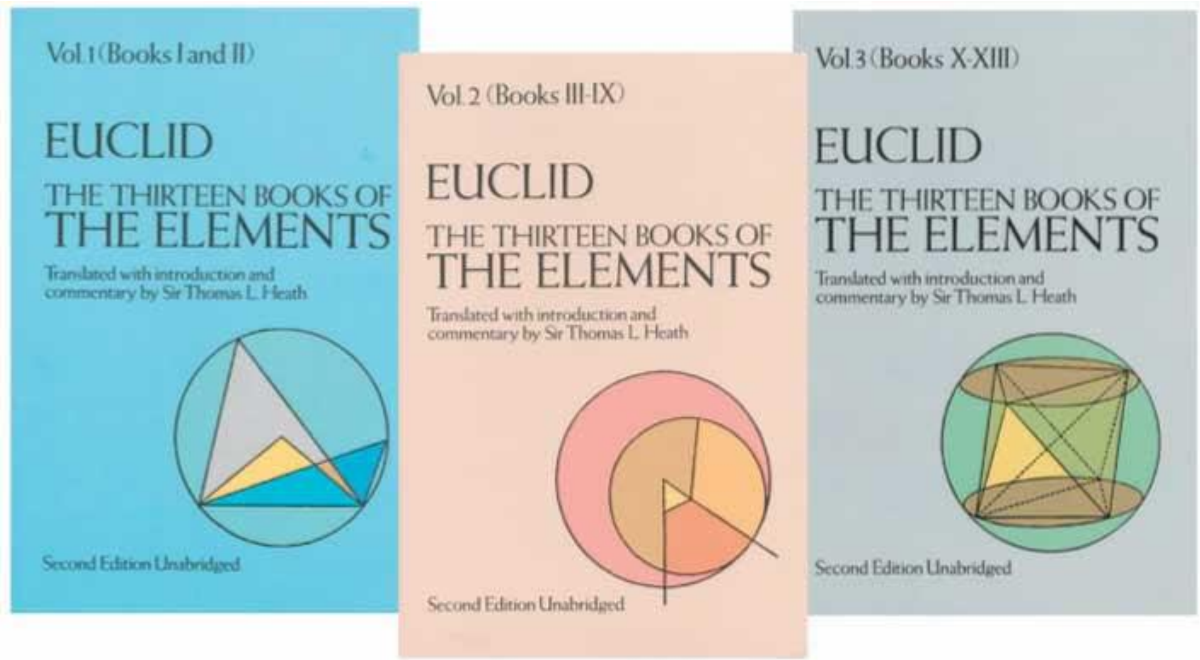
Livres II, III, IV

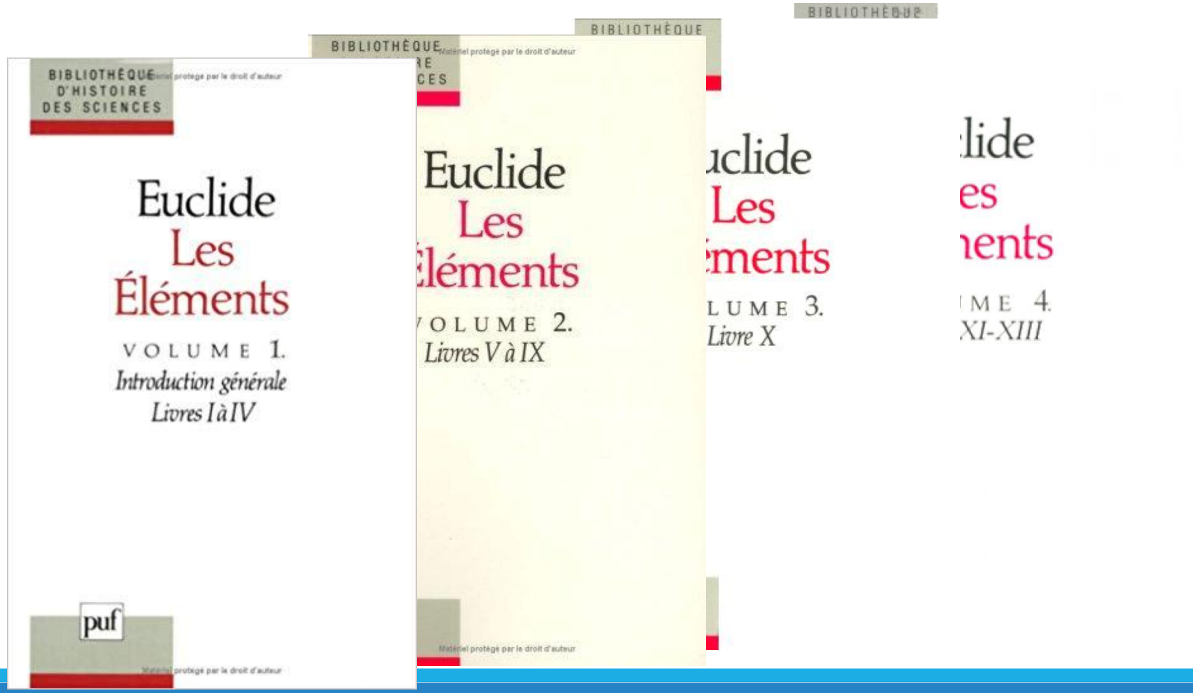
Discussions, questions, exercices…

Rappel : Les éléments

En anglais : Thomas L. Heath (1908, seconde édition en 1925, re-publié chez Dover en 1956)

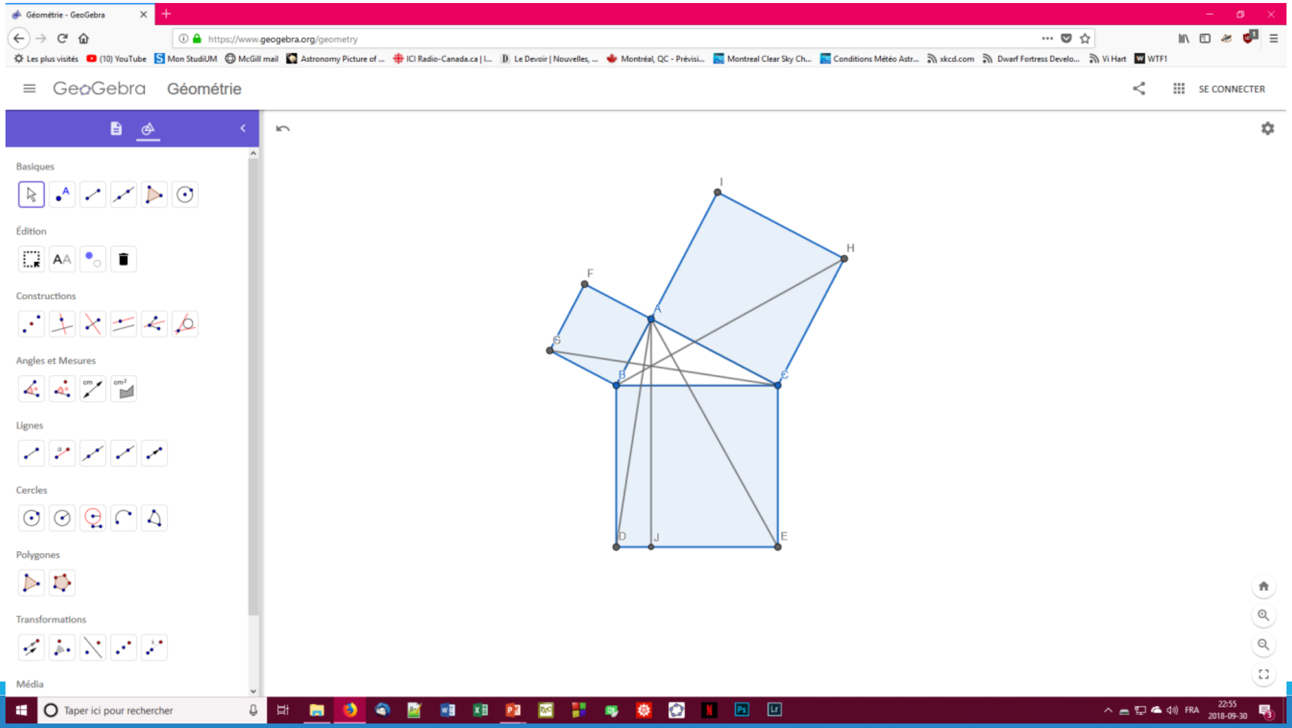
En français : Bernard Vitrac (1990), aux presses universitaires de France.





Rappel : GeoGebra

Crayon, règle, compas ou…
GeoGebra ! https://www.geogebra.org/geometry



Solutions de l’exercice 1

PROPOSITIONS I.1, 2, 3

Proposition I.1

Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.

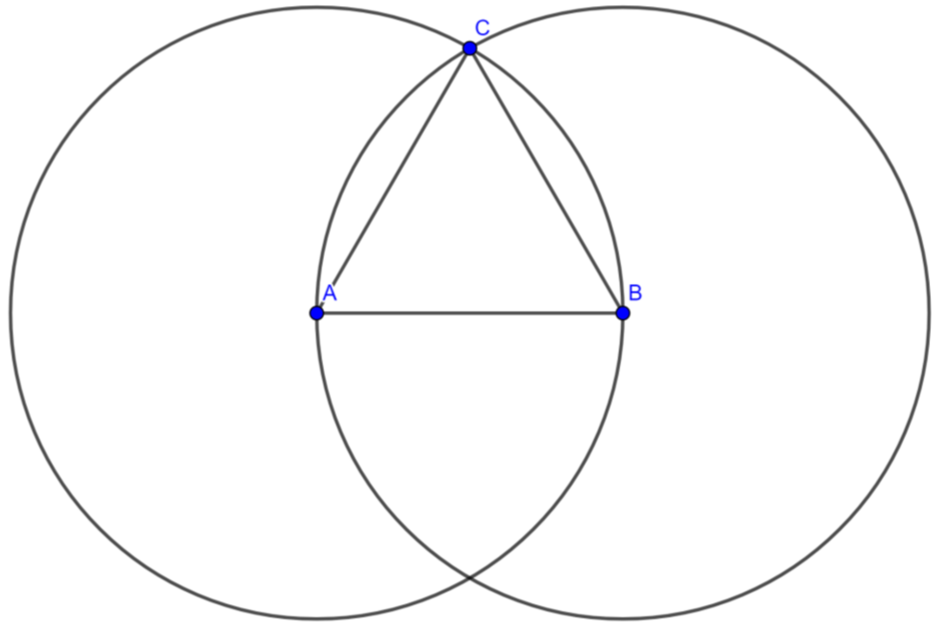
Proposition I.1

Solution:

1) Tracer le cercle de centre A et de rayon AB (Demande 3)

2) Tracer le cercle de centre B et de rayon AB (Demande 3)

3) Appeler une intersection des deux cercles C
Joindre AC et BC (Demande 1)



Proposition I.1

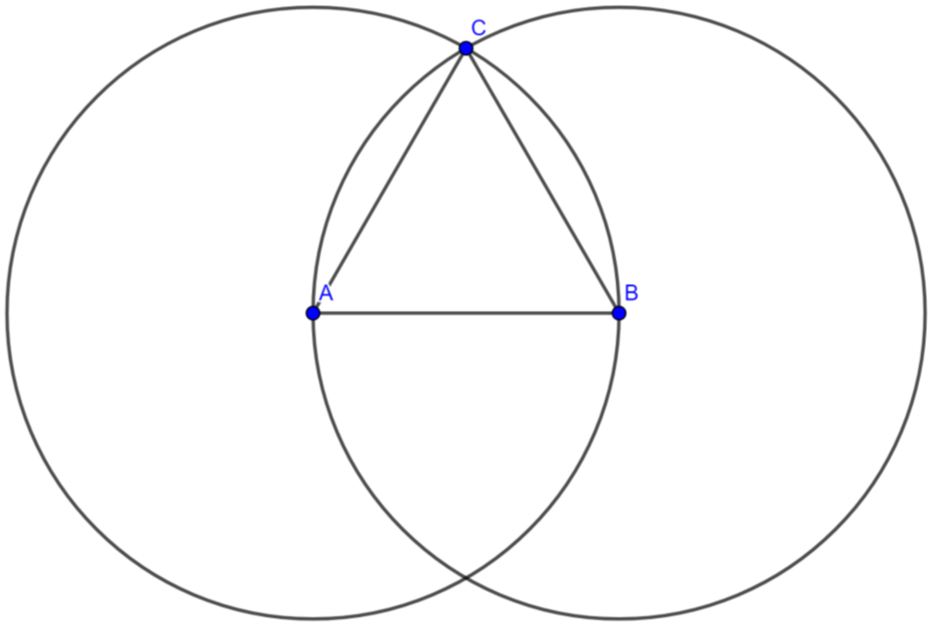
Le triangle ABC est équilatéral.

En effet, puisque AB et AC sont deux rayons du même cercle, ils sont égaux (Déf. 15)

Puisque AB et BC sont deux rayons du même cercle, ils sont égaux (Déf. 15)

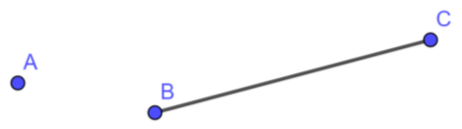
Puisque AB est égal à AC et à BC, alors AC est égal à BC (N. C. 1)

Donc les trois côtés sont égaux, donc le triangle est équilatéral (Déf. 20), ce qu'il fallait faire.



Proposition I.2

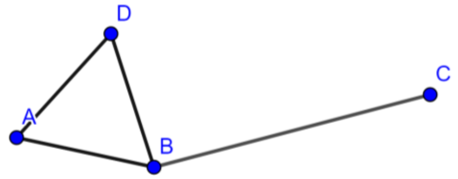
Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée.



Proposition I.2

Solution.

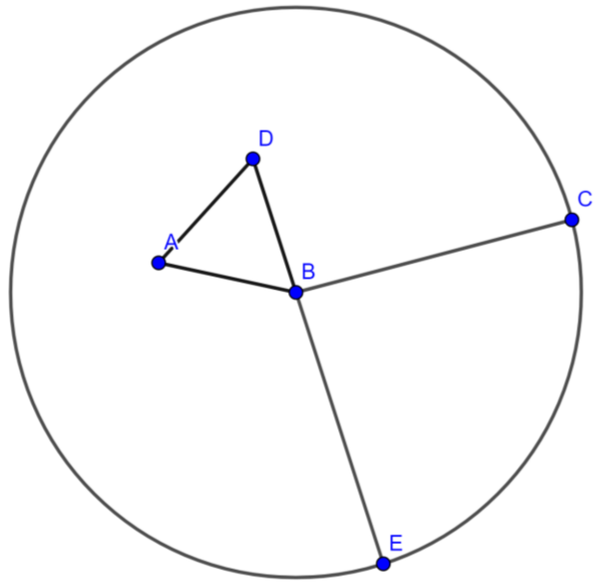
1) Joindre A et B (Demande 1)
Tracer le triangle équilatéral ABD (Proposition 1)



Proposition I.2

2) Tracer le cercle de centre B et de rayon BC
(Demande 3)

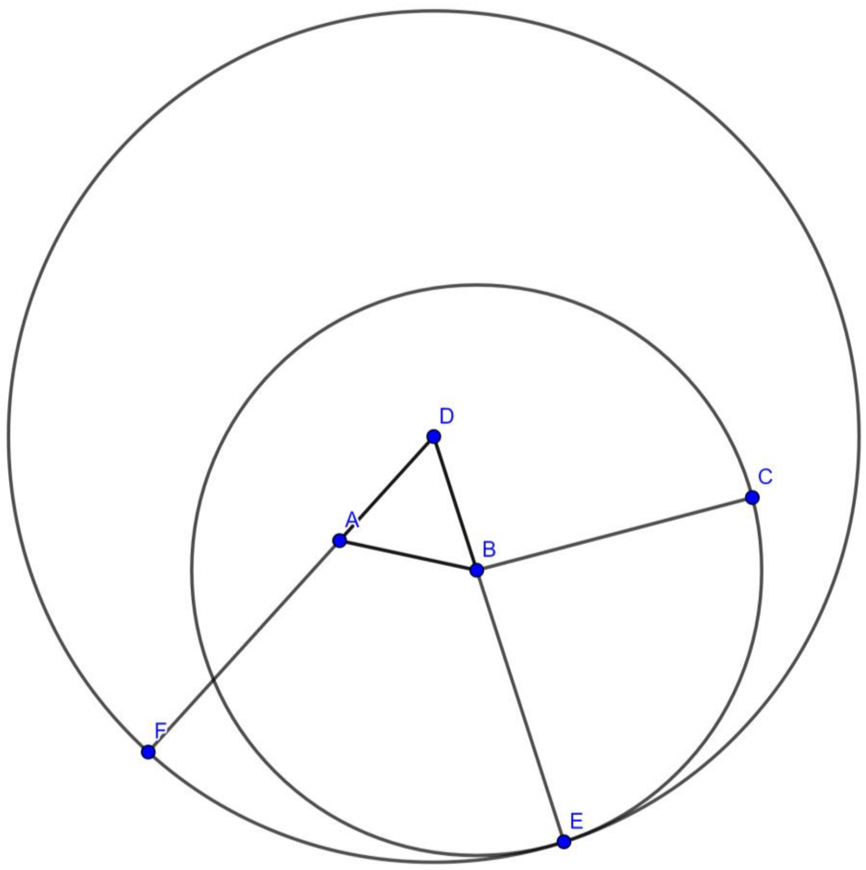
3) Prolonger DB jusqu'au point E, sur le cercle.
(Demande 2)



Proposition I.2

4) Tracer le cercle de centre D et de rayon DE. (Demande 3)

5) Prolonger DA jusqu'au point F sur le cercle. (Demande 2)



Proposition I.2

Le segment AF est égal au segment BC. En effet,

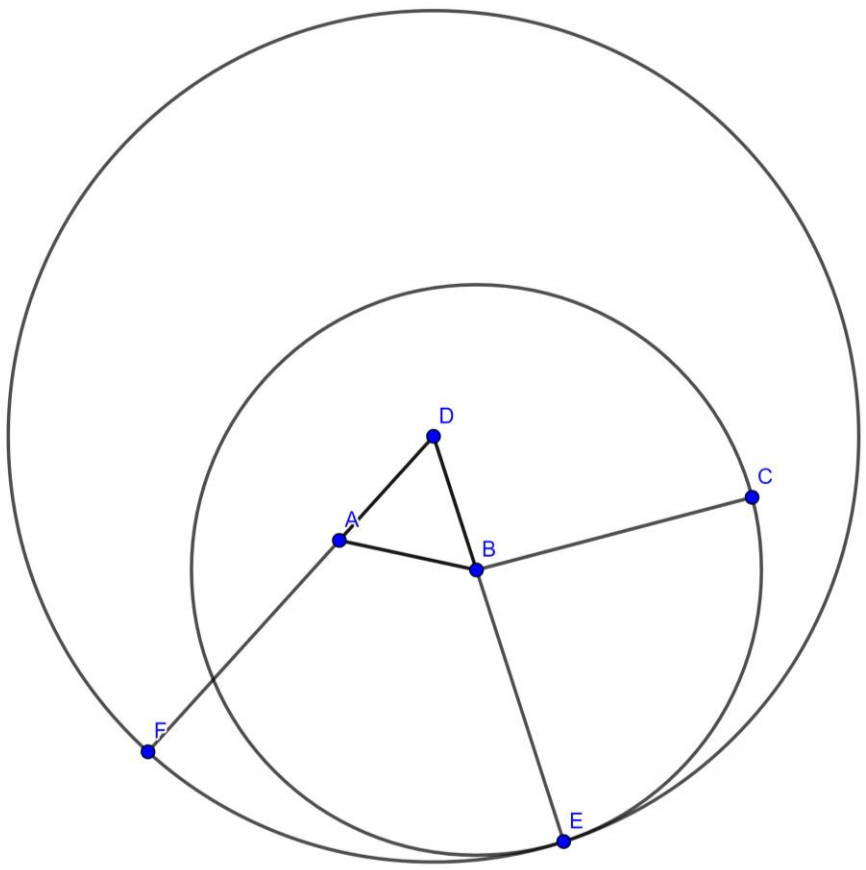
Puisque BC et BE sont deux rayons du même cercle, ils sont égaux. (Déf. 15)

Puisque DE et DF sont deux rayons du même cercle, ils sont aussi égaux. (Déf. 15)

Puisque DA et DB sont deux côtés d'un triangle équilatéral, ils sont égaux. (Déf. 20).

En retranchant DA à DF et DB à DE, on voit que AF et BE sont égaux (N.C. 3)

Mais BE est égal à AF et BC, donc AF et BC sont égaux (N.C. 1), ce qu'il fallait faire.



Proposition I.3

De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Proposition I.3

Solution :

1) Placer le segment C au point A. (Proposition 2)
Appeler la nouvelle extrémité D.

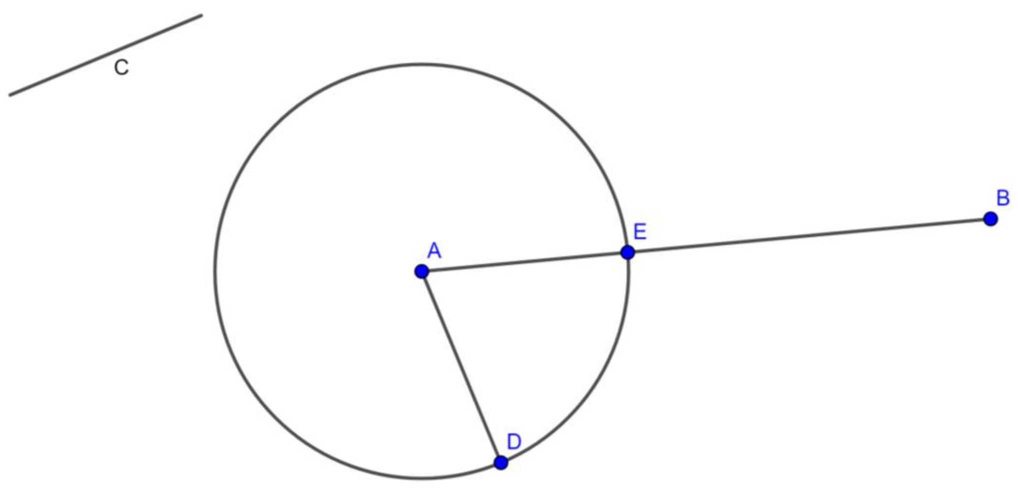
2) Tracer un cercle de centre A et de rayon AD. (Demande 3)
Placer le point E à l'intersection du cercle et du segment AB.

Le segment AE a été retranché à AB, et il est égal au segment C.

En effet, AE est sur AB par construction. AE et AD sont des rayons du même cercles, donc égaux (Déf. 15)

AD est égal à C par construction (Proposition 2)

AD est égal à AE et à C, donc AE est égal à C (N. C. 1), et AE est sur AB. Ce qu'il fallait faire.



Livre I

GÉOMÉTRIE DE BASE

Contenu des livres : Problèmes, Théorèmes, Lemmes, etc.

Type	Problème « Construire une figure avec telles propriétés. »	Théorème (au sens ancien) « La figure donnée a telles propriétés. »
Lemme Résultat intermédiaire relativement évident, pratique et utile	Constructions «de base» : perpendiculaires, parallèles, bissections. Ex. : Props. I.1-3, 9-12, 22, 23, 31, 42, 46. III.1, 17, …	Outils déductifs simples permettant de progresser plus rapidement dans des arguments. Congruence d’angles, de triangles. Théorie des parallèles. Ex. : Props. I.4-8, 13-21, 24-30, 33-41, 43, 45, …
«Théorème» au sens moderne Résultat important, intéressant en soi, ayant des applications.	Constructions ayant des applications pratiques ou une importance théorique significative : Quadrature des figures, inscriptions/circonscriptions Ex. Props. I.44, II.14, IV.11, IV.15, IV.16, …	Résultats théoriques de grande importance, peu évidents, «surprenants», souvent très généraux : Somme des angles intérieurs d’un triangle, Théorèmes de Pythagore, de Thalès. Ex. Props. I.32, 47, 48, …

NB : Égalité, congruence, équivalence en grandeur.

Égalité : notion vague. Euclide l'emploie pour

Congruence : deux figures sont congruentes si leurs angles et leurs dimensions sont les mêmes.

En termes modernes, on dit que deux figures sont congruentes si l'une peut s'obtenir de l'autre par une **isométrie** (translation, rotation, réflexion)

Équivalence en grandeur : deux figures sont équivalentes en grandeur si elles ont la même grandeur.

Trois « genres » de grandeurs:

La **longueur** (pour les lignes)
L'**aire** (pour les surfaces et les figures planes)
Le **volume** (pour les solides)

Nous allons faire attention de distinguer le « type » d'égalité dont il est question.

Constructions de base

Propositions 1 à 3: Triangle équilatéral; déplacer, aligner un segment sur un autre segment.

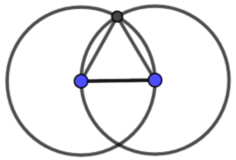
Proposition 9, 10 : Bissections d’angles, segments.

Proposition 11, 12: Perpendiculaires à partir d’un point sur la droite, ailleurs.

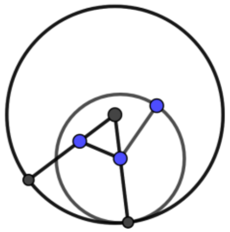
Proposition 22: Triangle quelconque à partir des côtés.

Proposition 23: Déplacer un angle rectiligne sur un point quelconque

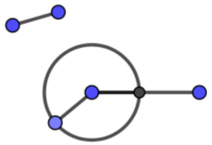
Proposition 31: Par un point donné, monter une droite parallèle à une droite donnée.



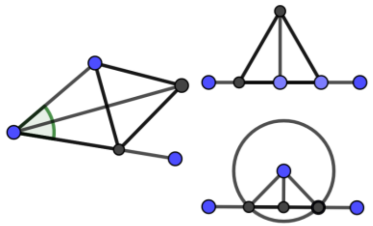
Triangle équilatéral (prop. 1)



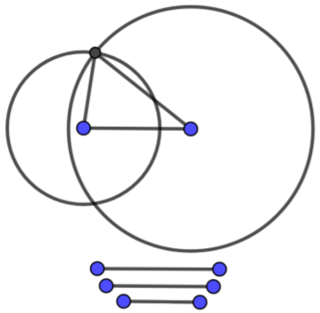
Déplacement de segment (prop. 2)



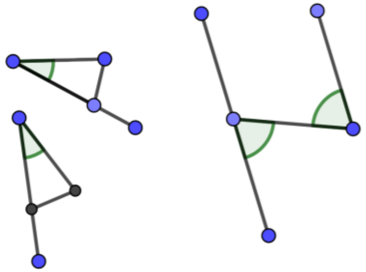
Alignement de segment. (prop. 3)



Bissections, perpendiculaires (props. 9 à 12)



Construction d’un triangle à partir des côtés (prop 22)



Déplacement d’angle, construction d’une droite parallèle. (props. 23, 31)

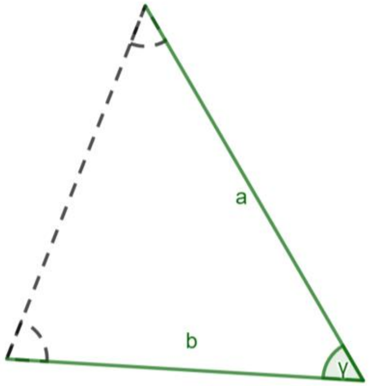
Congruence des triangles

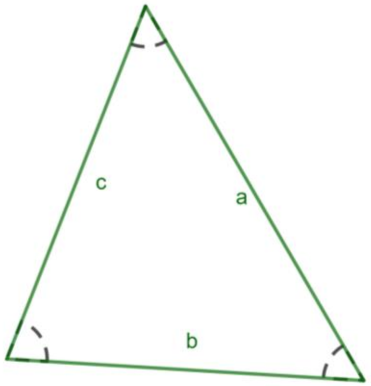
Deux triangles sont congruents si:

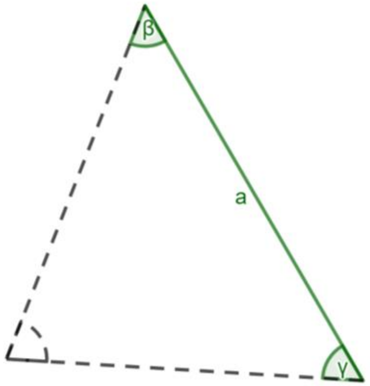
a) Ils ont deux côtés et l'angle entre eux égaux chacun à chacun (prop. I.4) (CAC)

b) Ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (prop. I.7, 8) (CCC)

c) Ils ont deux angles et le côté entre eux égaux chacun à chacun (prop I.26) (ACA)





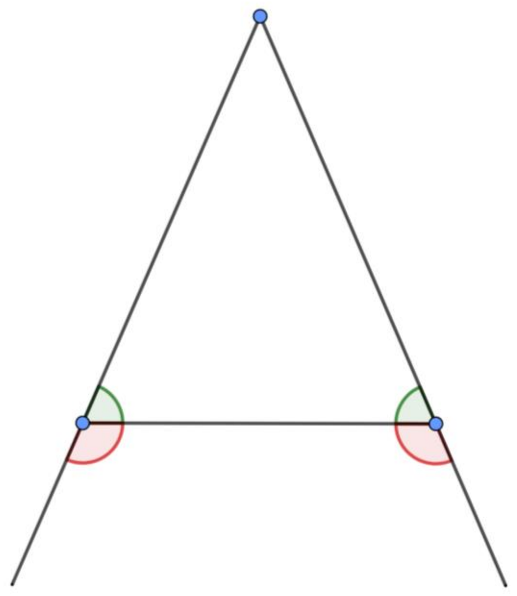


Dans chaque cas, les informations suffisent à décrire un triangle (à isométrie près)

Congruence des angles

Dans un triangle isocèle, les angles qui sous-tendent les côtés égaux sont égaux entre eux, et si les côtés égaux sont prolongés, les angles sous la base sont égaux entre eux. (prop. I.5)

Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qu'ils sous-tendent sont égaux entre eux. (prop. I.6)



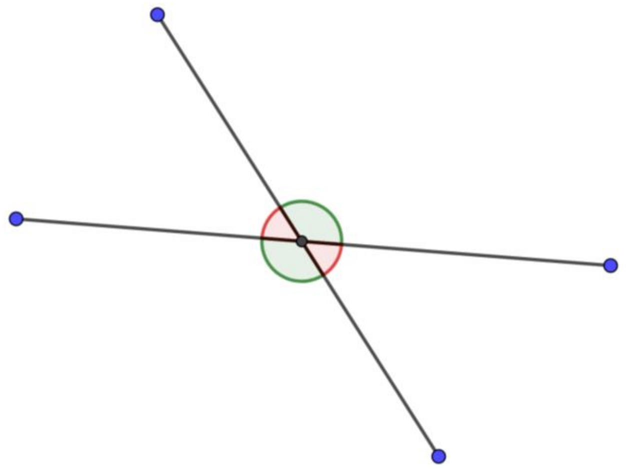
En particulier, on se sert de ce lemme pour prouver qu'un triangle équilatéral est également équiangle…

Congruence des angles

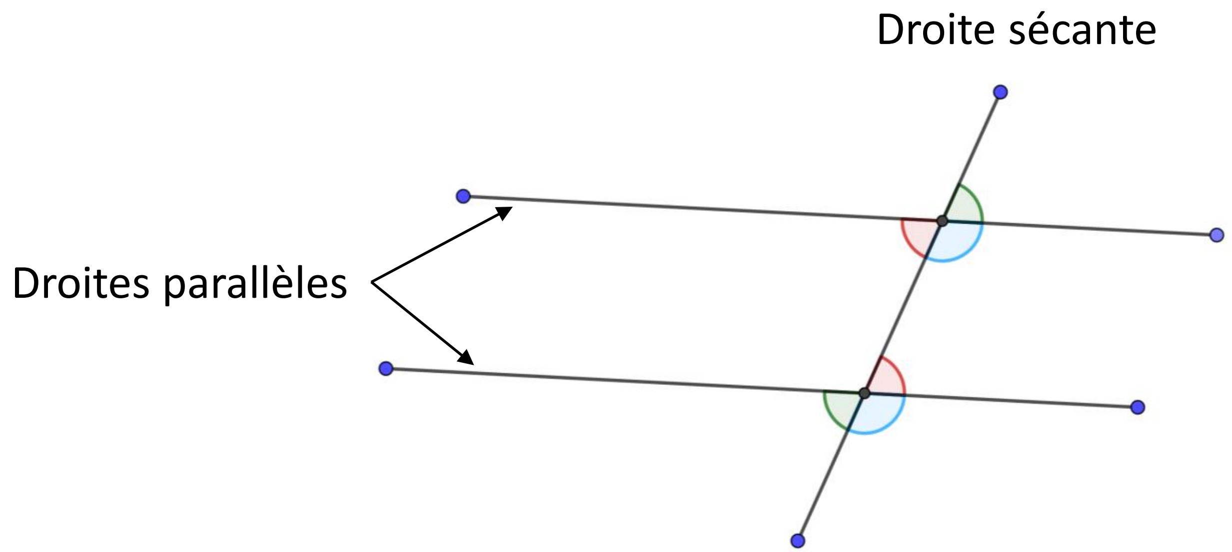
Lorsque deux droites se croisent, les angles adjacents sont égaux à deux droits (prop. I.13)

et si deux angles adjacents forment deux droits si et seulement si les côtés extérieurs de ces angles sont en alignement (prop. I.14)

Les angles opposés sont égaux entre eux. (prop. I.15)



Théorie des parallèles : vocabulaire



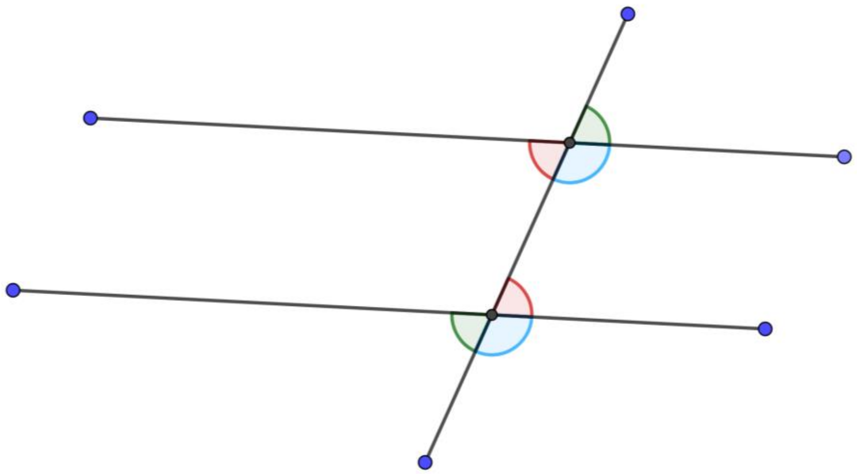
Angles
Alternes internes
Alternes externes
Correspondants

Théorie des parallèles : congruence des angles

(Props. I.27, 28, 29) Une ligne droite tombe sur deux lignes parallèles si et seulement si

a) les angles alternes (internes ou externes) sont égaux;

b) les angles correspondants sont égaux.



Théorème:
Somme des angles intérieurs d’un triangle

Proposition I.32
Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l’angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

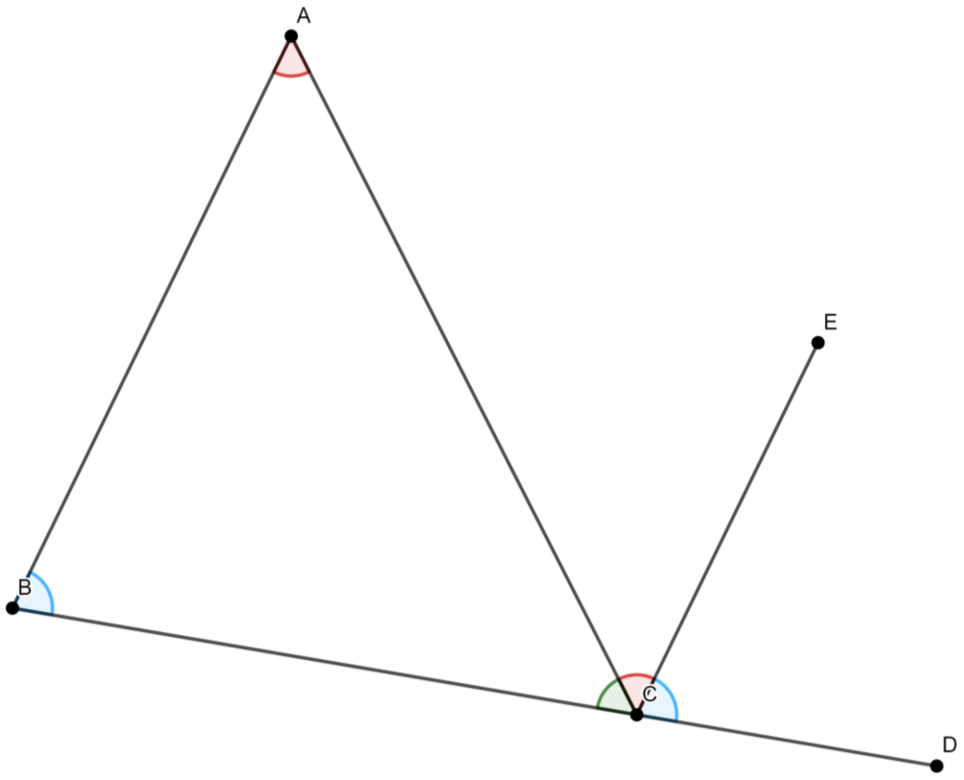
Théorème:
Somme des angles intérieurs d’un triangle

Preuve :

Soit ABC notre triangle, et on prolonge BC jusqu’à D. (Dem. I.1)
On place en C une droite CE parallèle à AB (prop. I.31)

AB est parallèle à CE et BC est sécante. Donc, les angles correspondants ABC et ECD sont égaux (prop. I.29)
AB est parallèle à CE et AC est sécante. Donc, les angles alternes BAC et ACE sont égaux (prop I.29)

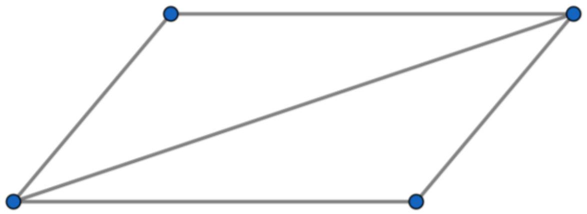
L’angle ACD est égal aux angles ACE et ECD, donc aux angles BAC et ABC. Mais d’autre part, ACD et ACB font deux droits. Ainsi, puisque ACD est égal à BAC et ABC, alors BAC, ABC et ACB font ensemble deux droits, ce qu’il fallait démontrer.



Théorie des parallèles : parallélogrammes

Les droites qui relient du même côté des droites égales et parallèles sont elles aussi égales et parallèles (prop. I.33)

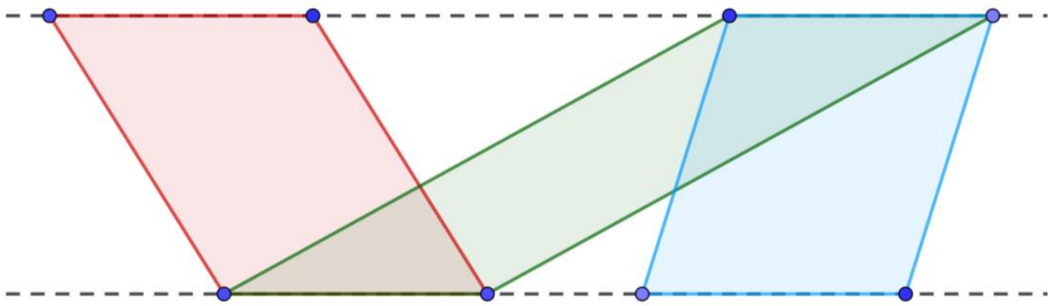
Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties congrues. (prop. I.34)



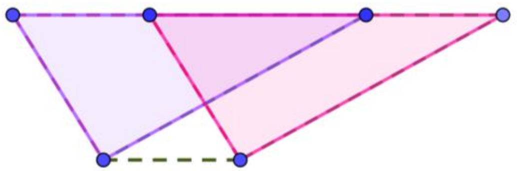
La preuve utilise des arguments de droites sécantes, d'angles alternes et correspondants, ainsi que les résultats de congruences pour les triangles que nous avons vus.

Théorie des parallèles: parallélogrammes

Deux parallélogrammes sur la même base et dans les mêmes parallèles sont équivalents en aire. (prop. I.35)
Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont équivalents en aire. (prop. I.36)

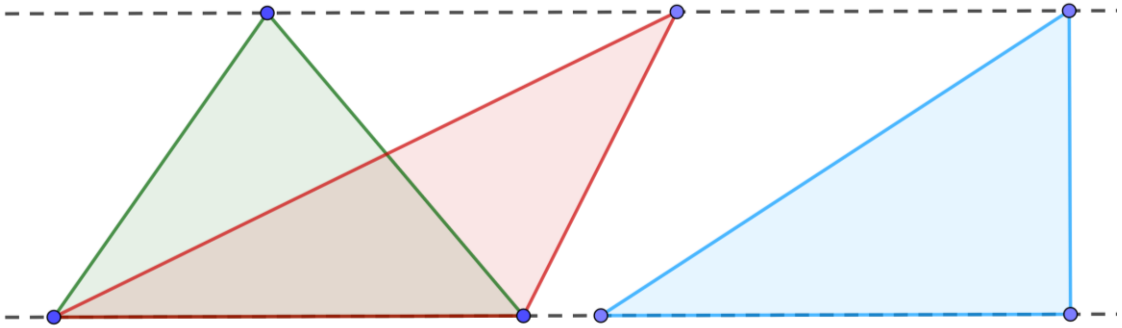


La preuve de I.35 procède par congruence de deux triangles. La preuve de I.36 procède en appliquant I.35 deux fois.



Théorie des parallèles: triangles

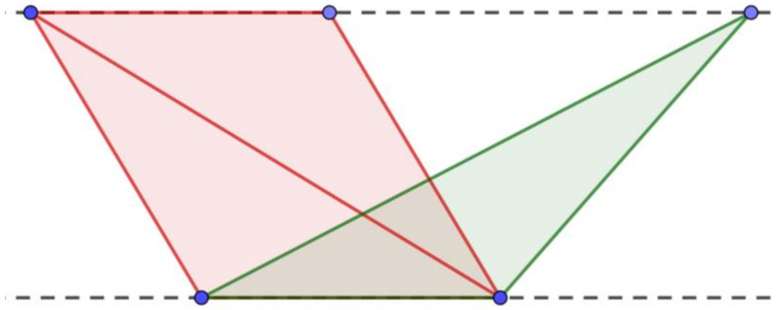
Les triangles qui sont sur la même base (I.37) ou sur des bases égales (I.38) et dans les mêmes parallèles sont équivalents en aire.
Deux triangles équivalents en aire, sur la même base et du même côté sont aussi dans les mêmes parallèles. (prop. I.39) (Même chose avec des bases égales, I.40)



I.37 n’est pas nécessaire – c’est un corollaire de I.38. I.38 peut être démontrée en utilisant ensemble I.36 et I.34. I.39 (ou I.40) est montrée par contradiction: en supposant que les sommets ne soient pas sur une parallèle à la base, on montre qu’un triangle doit être plus petit que l’autre en aire.

Théorie des parallèles: triangles et parallélogrammes

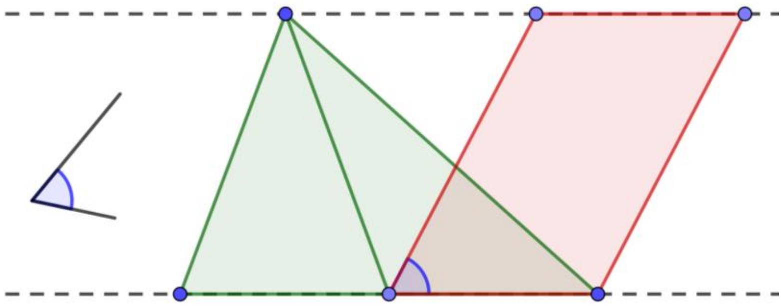
Si un parallélogramme a la même base (ou une base égale) qu’un triangle, et est entre les mêmes parallèles, l’aire du parallélogramme est le double de celle du triangle (prop. I.41)



La preuve suit de I.34 et I.37, 38.

Théorie des parallèles: Constructions !

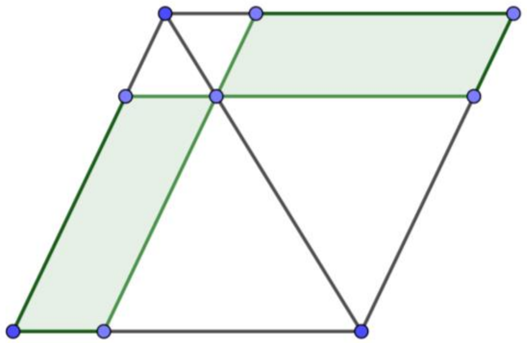
Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné (prop. I.42)



La preuve nécessite les propositions I.38 et I.41 pour la preuve (avec I.23 pour placer l'angle là où il faut).

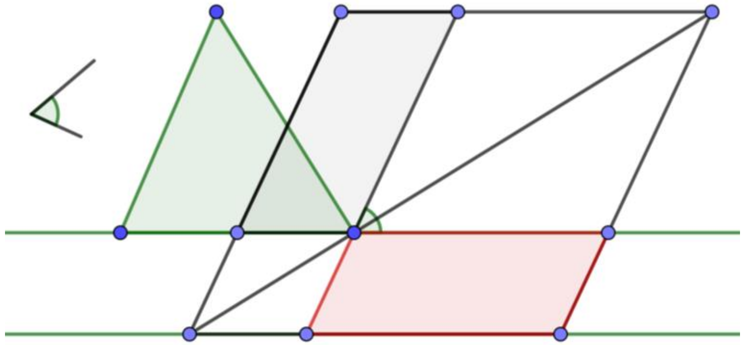
Théorie des parallèles: Constructions!

Dans tout parallélogramme les compléments de parallélogrammes qui entourent la diagonale sont équivalents en aire. (prop. I.43)



Pour le prouver, il suffit d'utiliser I.34 à répétition en soustrayant des triangles égaux à des triangles égaux.

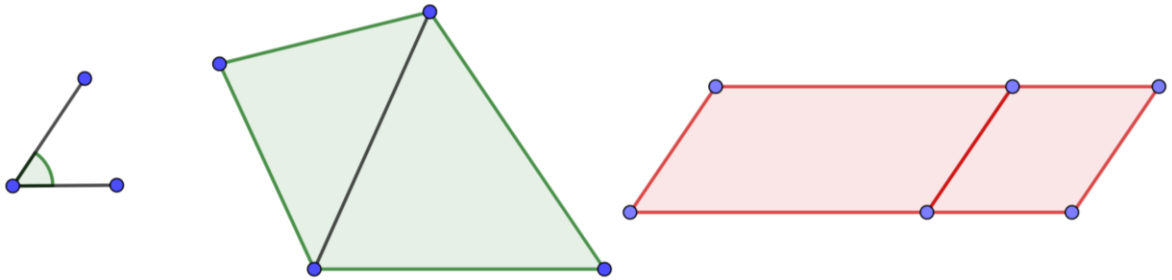
Entre deux parallèles données et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme équivalent en aire à un triangle donné. (prop. I.44)



Si l'angle, le triangle et les parallèles verts sont donnés, on utilise I.42 pour construire le parallélogramme gris, on prolonge les droites qui manquent pour former le grand parallélogramme noir, et le parallélogramme rouge est celui qu'on cherche par I.43.

Théorie des parallèles: Constructions!

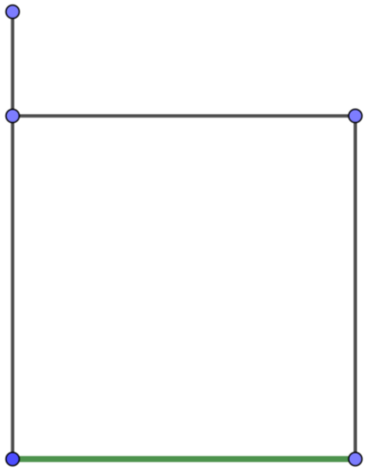
Construire dans un angle rectiligne donné un parallélogramme équivalent en aire à une figure rectiligne donnée (prop. I.45)



Il suffit de découper notre figure en triangles, puis d'appliquer I.44, en collant les parallélogrammes les uns aux autres. Comme l'angle donné peut être un angle droit, cela signifie qu'on peut créer un rectangle d'aire égale à n'importe quelle figure rectiligne. Ce problème a des applications pratiques, puisqu'il permet de calculer l'aire de figures très irrégulières en construisant d'abord un rectangle de même aire, puis en calculant l'aire de ce rectangle.

Construction d’un carré

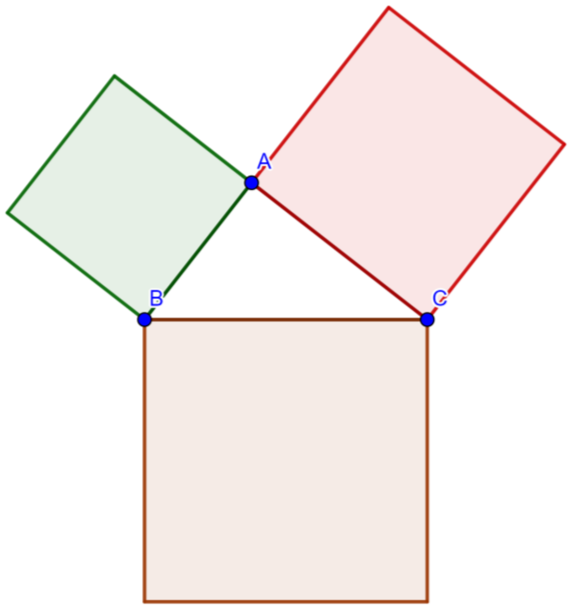
Décrire un carré sur une droite donnée. (prop. I.46)



Construction simple dont on n’a pas eu besoin jusqu’à maintenant – elle ne requiert que la possibilité de construire des perpendiculaires et des parallèles, ainsi que l’usage du compas (props. I.3, I.11, I.31)

Théorème
de Pythagore

Proposition I.47
Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est [équivalent en aire] aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.



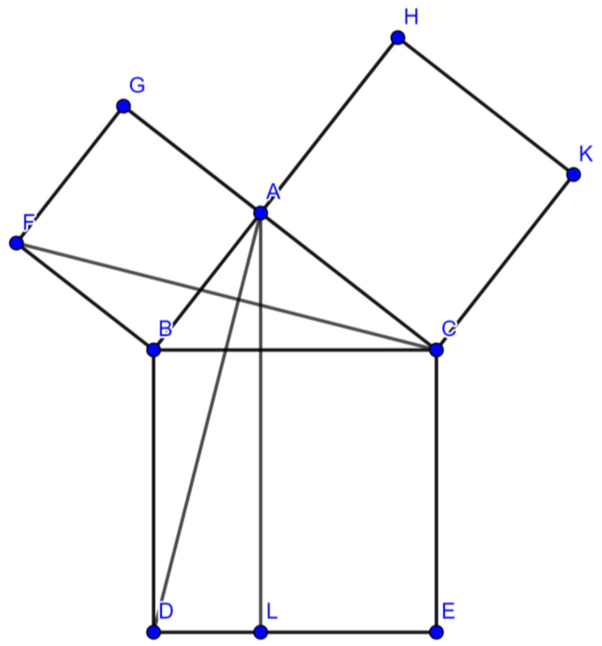
Théorème
de Pythagore

Preuve:

1) Décrire les carrés ABFG, ACKH et BCED (Proposition I.46)

2) Mener une droite par A une droite AL parallèle à BD (Proposition I.31)

3) Joindre AD et FC (Demande 1)



Théorème de Pythagore

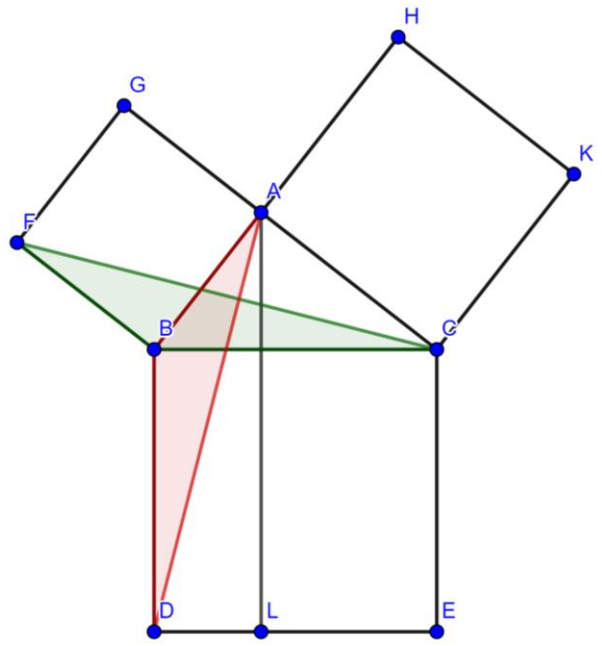
Les triangles FBC et ABD sont congruents.

En effet, les angles ABF et CBD étant droits, ils sont égaux (Demande 4)

En ajoutant à chacun l’angle ABC, on obtient que les angles FBC et ABD sont égaux (N.C. 2)

FB et AB étant deux côté d’un carré, ils sont égaux (Déf. 22). De même, BC et BD sont égaux également.

Puisque FB et BC sont égaux à AB et BD respectivement, et que l’angle FBC est égal à l’angle ABD, alors les triangles FBC et ABD sont congruents (Proposition I.4)



Théorème de Pythagore

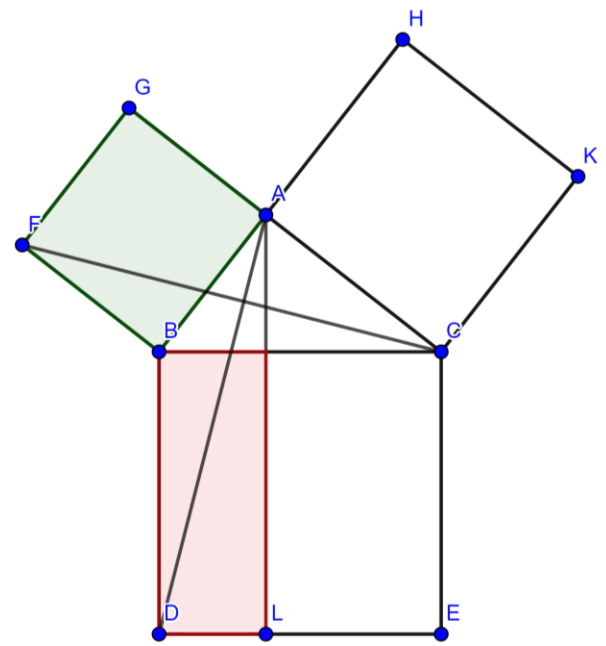
Le carré ABFG et le rectangle BL sont équivalents en aire.

En effet, le rectangle BL et le triangle ABD ont la même base et sont entre les mêmes parallèles (BD et AL), et donc le rectangle BL est le double de l’aire du triangle ABD. (Proposition I.41)

Le carré ABFG et le triangle FBC ont la même base et sont entre les mêmes parallèles (FB et GC), donc le carré ABFG est le double de l’aire du triangle FBC. (Proposition I.41)

Mais les triangles FBC et ABD sont congruents, donc égaux en aire, et donc leurs doubles sont égaux en aire. (N. C. 2)

Donc le carré ABFG et le rectangle BL sont égaux en aire.



Théorème de Pythagore

4) Joindre KB et AE. (Demande 1)

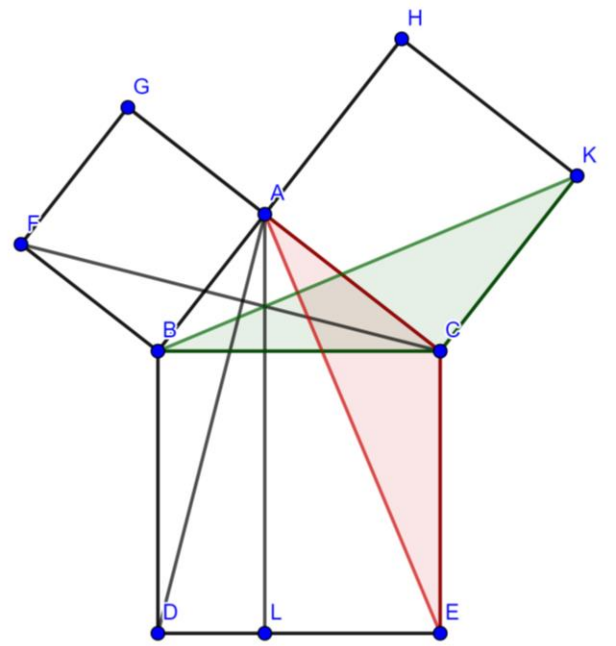
Les triangles KBC et AEC sont congruents.

En effet, les angles KCA et BCE étant droits, ils sont égaux (Demande 4)

En ajoutant à chacun l'angle ACB, on obtient que les angles KCB et ACE sont égaux (N.C. 2)

AC et CK étant deux côtés d'un carré, ils sont égaux (Déf. 22). De même, BC et CE sont égaux également.

Puisque KC et BC sont égaux à AC et CE respectivement, et que l'angle KCB est égal à l'angle ACE, alors les triangles KBC et AEC sont congruents (Proposition I.4)



Théorème de Pythagore

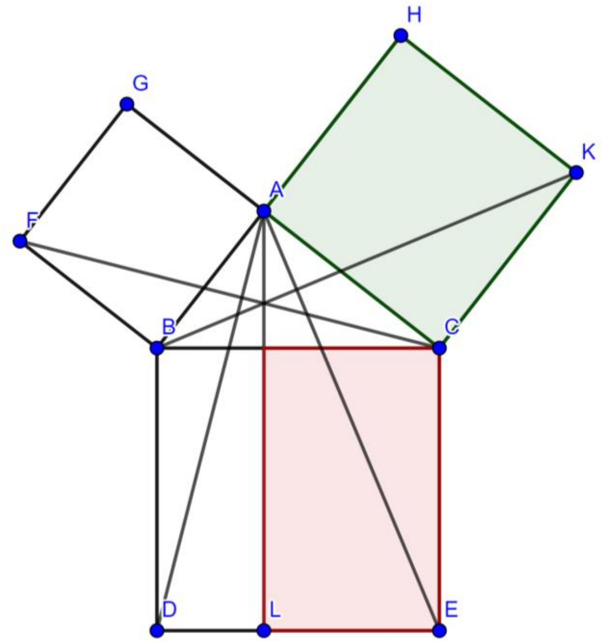
Le carré ACKH et le rectangle LC sont équivalents en aire.

En effet, le rectangle LC et le triangle AEC ont la même base et sont entre les mêmes parallèles (CE et AL), et donc le rectangle LC est le double de l'aire du triangle AEC. (Proposition I.41)

Le carré ACKH et le triangle KBC ont la même base et sont entre les mêmes parallèles (BH et CK), donc le carré ACKH est le double de l'aire du triangle KBC. (Proposition I.41)

Mais les triangles KBC et AEC sont congruents, donc égaux en aire, et donc leurs doubles sont égaux en aire. (N. C. 2)

Donc le carré ACKH et le rectangle LC sont égaux en aire.



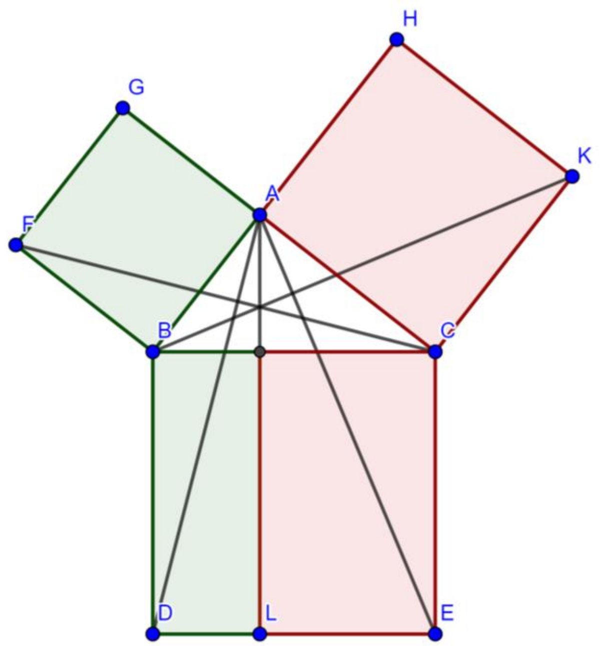
Théorème de Pythagore

Le carré BCED est égal en aire aux carrés ABFG et ACKH ensemble.

En effet, le carré BCED est égal en aire aux rectangles BL et LC ensemble (N.C. 2, 3)

Mais les rectangles BL et LC sont égaux en aire aux carrés ABFG et ACKH respectivement.

Ainsi, les carrés ABFG et ACKH ensemble sont égaux en aire au carré BCED (N. C. 1), ce qu’il fallait démontrer.



Théorème (réciproque) de Pythagore

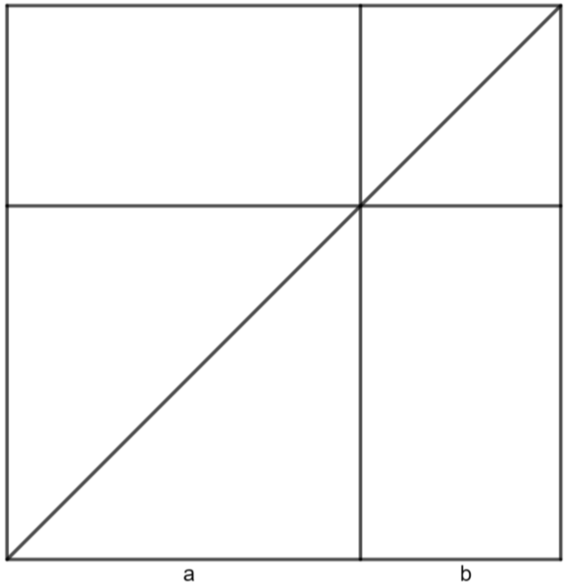
Proposition I.48
Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit.

Livres II, III, IV

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE (GENRE)
CERCLES
INSCRIPTION DE POLYGONES DANS DES CERCLES

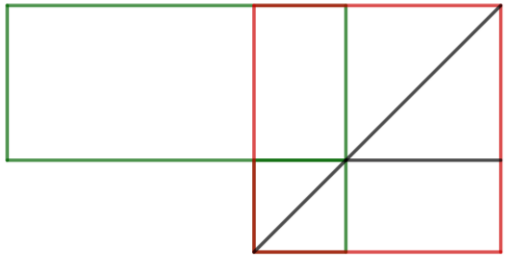
Livre II : Égalités algébriques simples

Si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments. (prop. II.4)



Ceci est l'équivalent géométrique de la formule du carré du binôme : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite (prop. II.5)

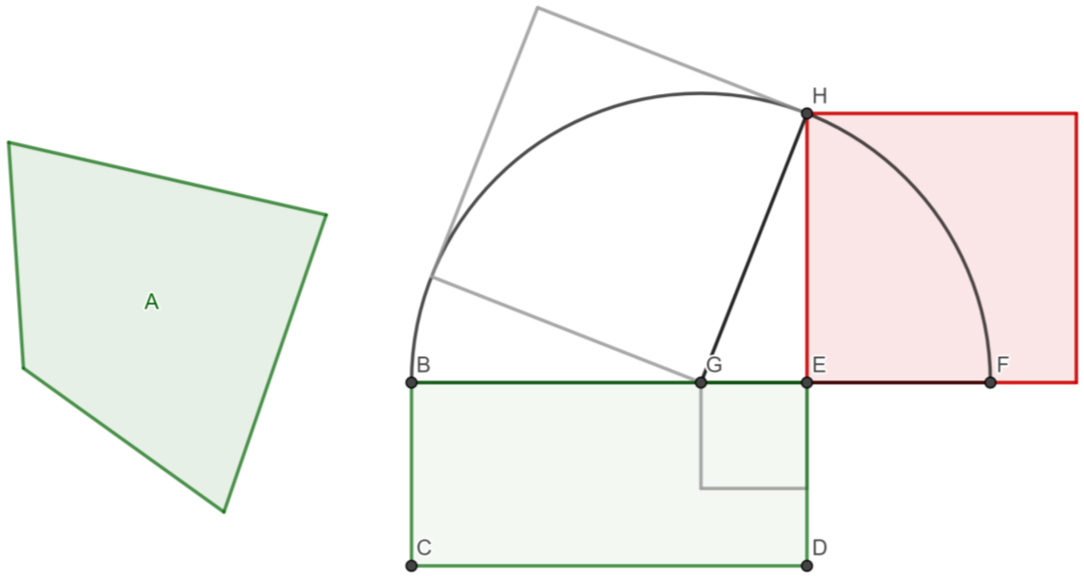


L'aire des rectangles verts est égale à l'aire du carré rouge. Il s'agit de l'équivalent de l'équation

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Livre II : Construction !

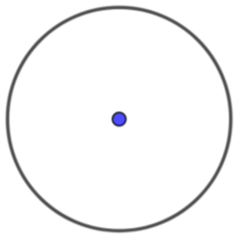
Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée (prop. II.14)



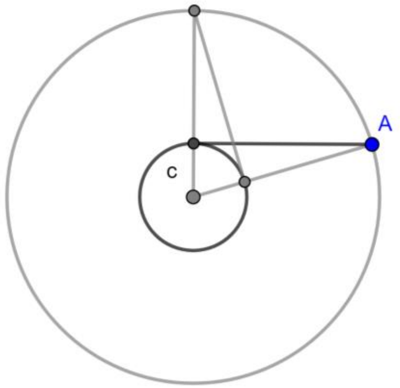
On commence par construire un rectangle BCDE qui a la même aire que la figure A (I.45). On prolonge BE jusqu’en F avec EF = ED, et on décrit le demi-cercle BHF (de centre G) sur le diamètre BF. On prolonge DE jusqu’en H sur le demi-cercle. Puis on utilise II.5 et Pythagore (I.47) pour montrer que le carré construit sur EH (le rouge) a la même aire que le rectangle BCDE (donc que la figure A).

Livre III : Nouveaux outils !

III.1 : Trouver le centre d’un cercle donné.*****



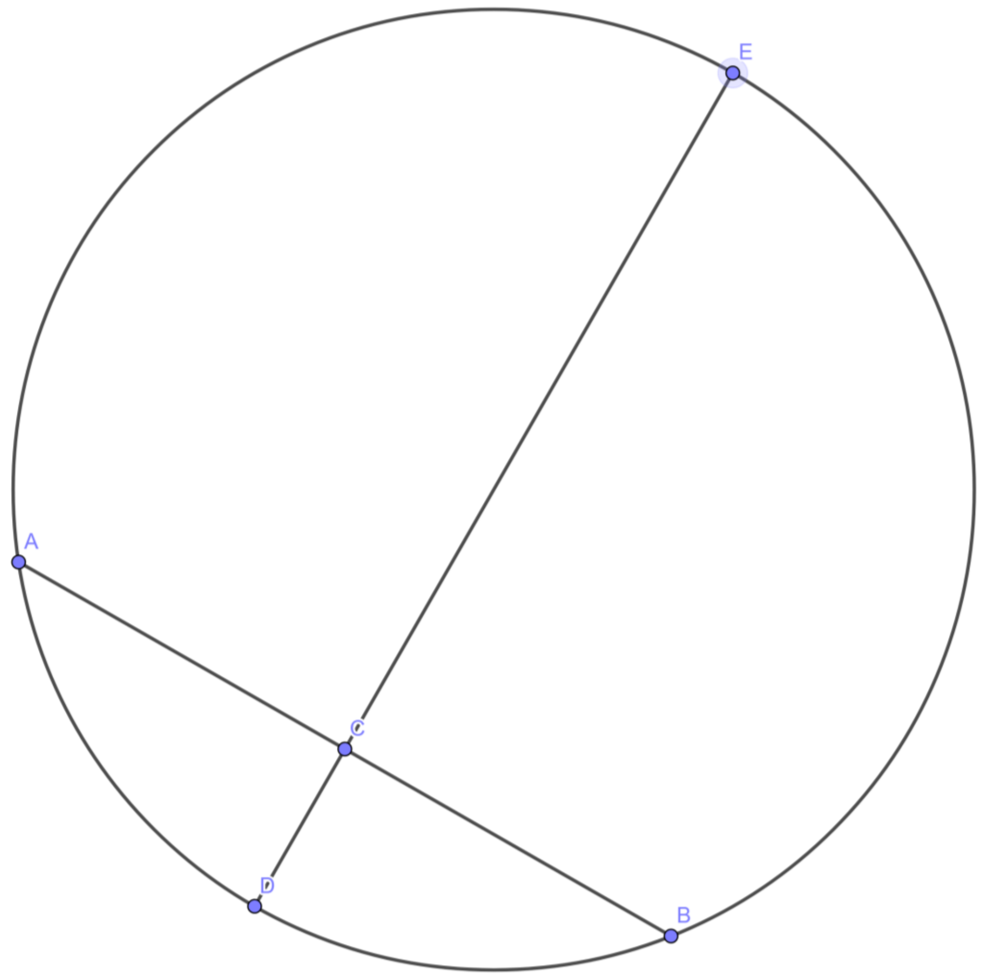
III.17 : À partir d’un point donné, mener une ligne droite tangente à un cercle donné.



Livre III : Centre

Porisme* III.1

Si une perpendiculaire est dressée sur le milieu d’une corde, le segment de cette perpendiculaire contenue dans le cercle est un diamètre.



Livre III : Centre

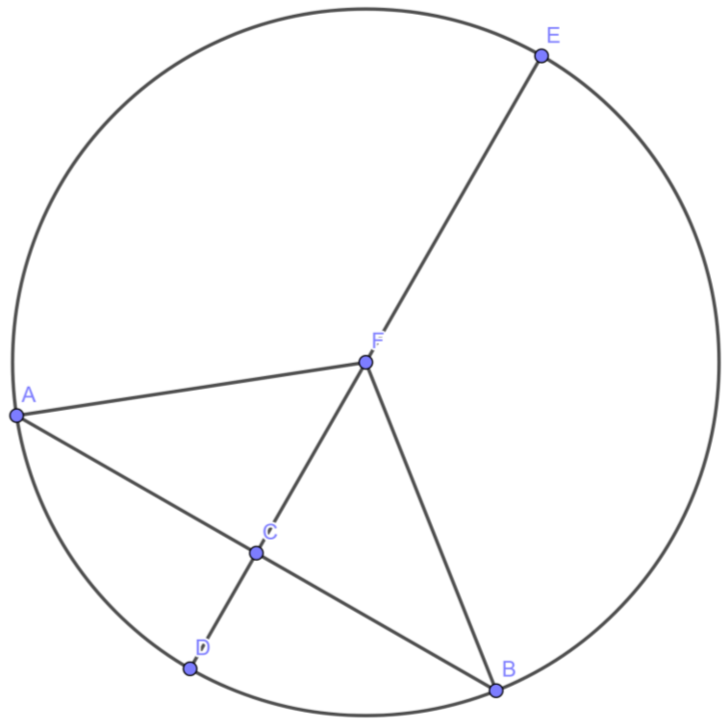
Preuve :

Soit AB la corde du cercle, C le centre et DE le segment de la perpendiculaire contenu dans le cercle.

DE est un diamètre.

En effet, supposons que F soit le centre du cercle. AF et BF sont égaux (Déf. I.15), AC et CB sont égaux par construction et CF est commune, donc les triangles ACF et BCF sont égaux, mais puisque les angles les angles ACF et FCB sont égaux et font deux droits, ils sont deux droits (Déf. I.10), et F est sur la perpendiculaire DE.

Donc, DE passe par le centre F et DE est un diamètre (Déf. I.17), ce qu'il fallait démontrer.

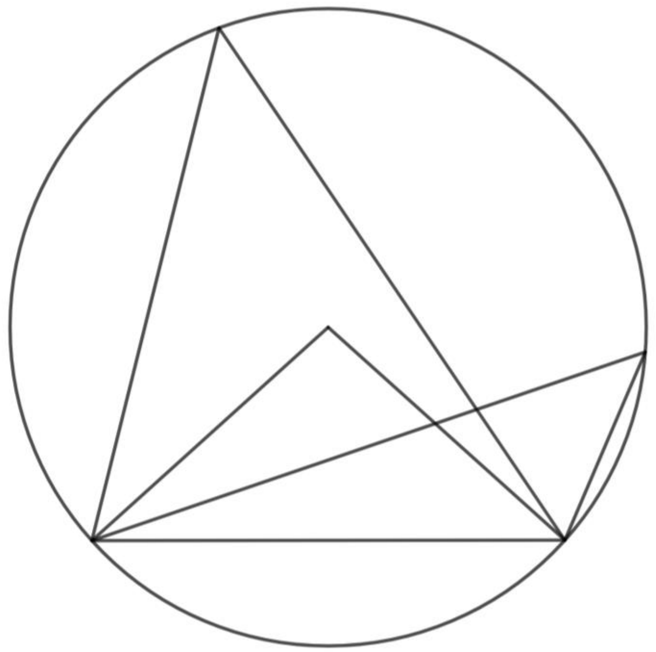


Livre III : Théorèmes

Inégalités sur les cordes, angles, arcs, etc.

Lemmes sur les cercles

Énoncé intéressant dans la prop. III.16*



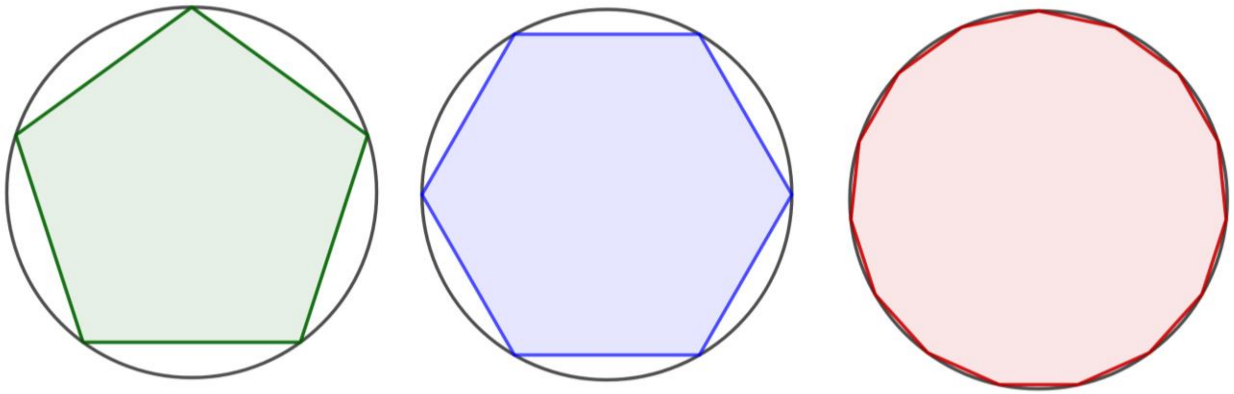
Livre IV : Polygones réguliers.

Les 16 propositions du livre IV sont toutes des problèmes qui traitent de l'inscription et de la circonscription de polygones dans des cercles et de cercles dans des polygones.

IV.11 : Inscrire un pentagone régulier dans un cercle;

IV.15 : Inscrire un hexagone régulier dans un cercle;

IV.16 : Inscrire un pentadécagone régulier dans un cercle;



Questions?

SI IL N’Y A PAS DE QUESTIONS ON PEUT ALLER PLUS LOIN…

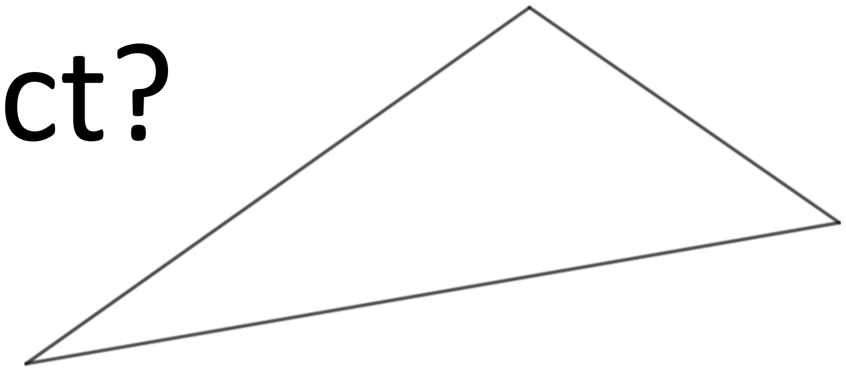
Discussion

L'INÉGALITÉ DU TRIANGLE
LES ANGLES NON-LINÉAIRES

L'inégalité du triangle

Proposition I.20
Dans tout triangle, deux côtés, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant.

Quel impact?



L’inégalité du triangle

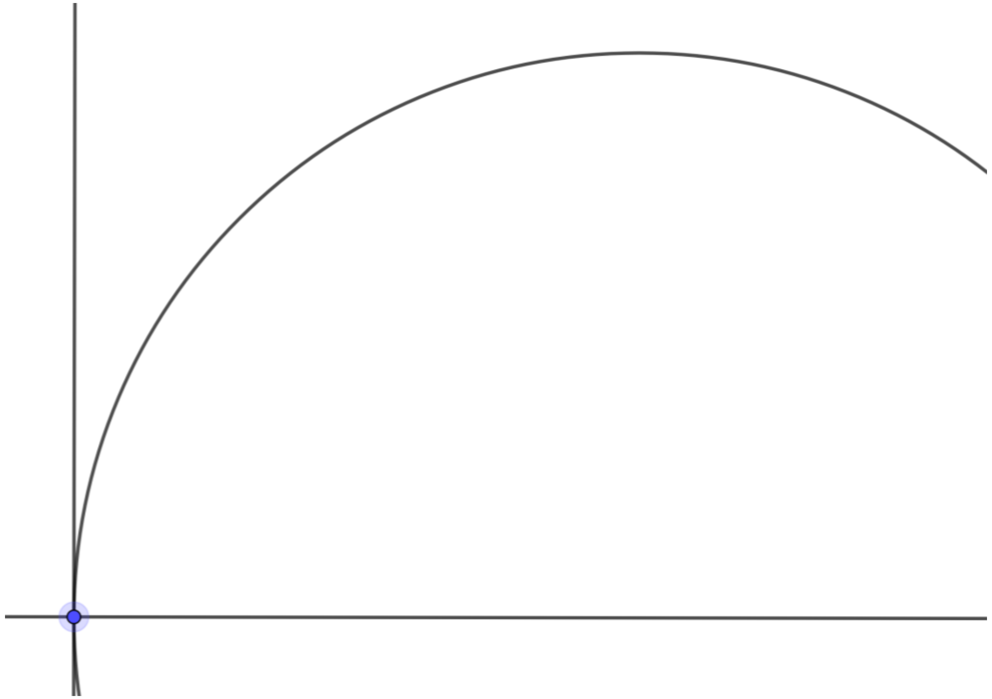
Absolument vitale pour la notion de distance. Est prise comme axiome dans la définition d’un **espace métrique :**

Si X est un ensemble quelconque et qu’on veut définir une distance d(x, y) entre deux objets x, y dans X, il faut impérativement que :

- d(x, x) = 0 pour tout x dans X
- d(x, y) = d(y, x) pour toute paire x, y dans X
- d(x, y) = 0 si et seulement si x = y
- d(x, y) > 0 si et seulement si x est différent de y
- pour tout x, y, z différents les uns des autres, d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)

Les angles non-rectilignes

Proposition III.16:
La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée; en outre, d'une part l'angle du demi-cercle [avec le diamètre] est plus grand, d'autre part l'angle restant [entre la circonférence et la droite] plus petit, que tout angle rectiligne aigu.



Peut-on dire que l'angle entre le demi-cercle et le diamètre est droit?
Peut-on dire que l'angle entre la circonférence et la droite verticale est nul?

Les angles non-rectilignes

Notion de limite : Euclide peut dire que l'angle entre la circonférence et le diamètre est plus grand que tout angle aigu.

On peut aussi raisonnablement affirmer que l'angle est plus petit qu'un angle droit puisque la circonférence se retrouverait à l'intérieur d'un angle droit… mais…

Aujourd'hui, la définition la plus utile de l'angle nous informe que l'angle est bien droit. Il s'agit d'une définition d'analyse sophistiquée qui tient compte de la limite approchée par l'angle rectiligne qui approxime la courbe réelle.

MAIS ! En **analyse non-standard**, on admet des nombres qui sont plus petits que tout nombre réel positif, mais plus grand que zéro. On les appelle des infinitésimaux.

Exercice 2

ASSEZ FACILES : 2.1, 2.2, 2.3, 2.4

DÉFIS : 2.5, 2.6

1) Les phases des planètes


La lune, le 18 juillet 2018.
Je suis un peu show-off…

Les corps célestes de notre système solaire sont éclairés par le Soleil, et nous les voyons à différent angles, ce qui produit ce que les astronomes appellent une **phase**.

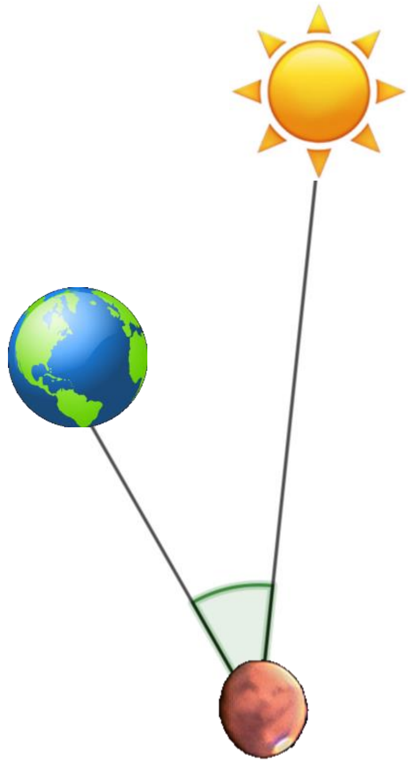

Vénus, le 4 août 2018,
à son dernier quartier.


Mars, le 13 septembre 2018

1) Les phases des planètes

Pour caractériser précisément la phase d'un corps céleste, les astronomes utilisent **l'angle de phase**.

Il s'agit de l'angle entre le Soleil et la Terre, vus depuis le corps céleste en question.



1) Les phases des planètes

Lorsqu’un corps céleste a un angle de phase aigu, on voit presque tout le disque. Lorsque l’angle de phase est droit, on voit un quartier. Lorsque l’angle de phase est obtus, on voit un croissant.

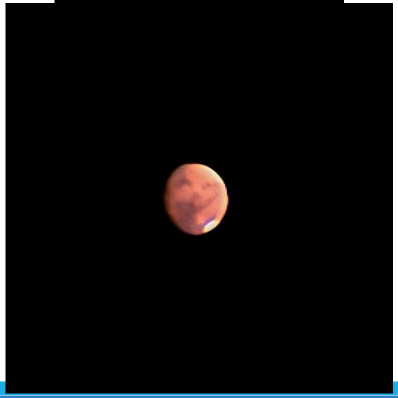
Exercice : Montrer qu’il est impossible pour un objet plus éloigné du Soleil que la Terre de nous apparaître comme un croissant ou un quartier.

Indice : Considérer le Triangle Soleil-Terre-Planète.

Angle de phase > 90°

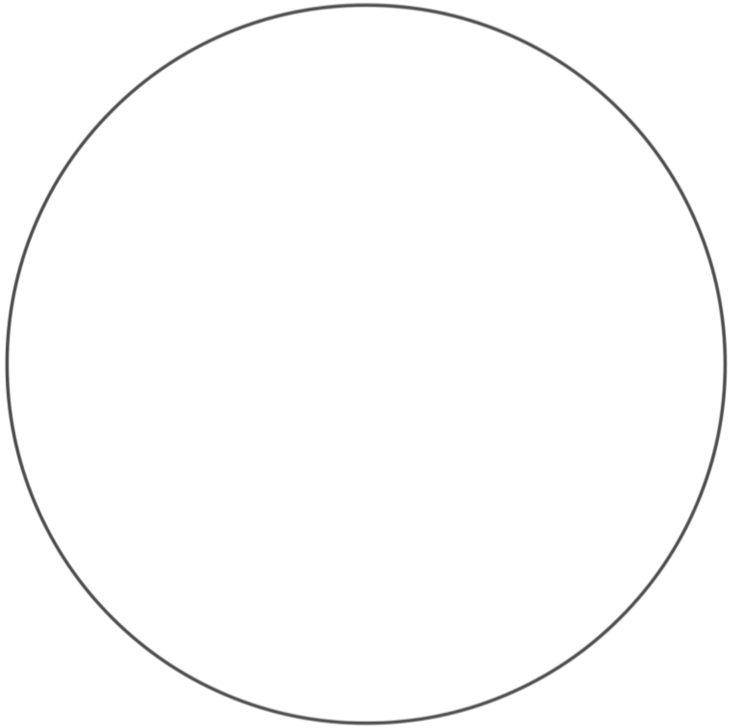
Angle de phase = 90°

Angle de phase < 90°



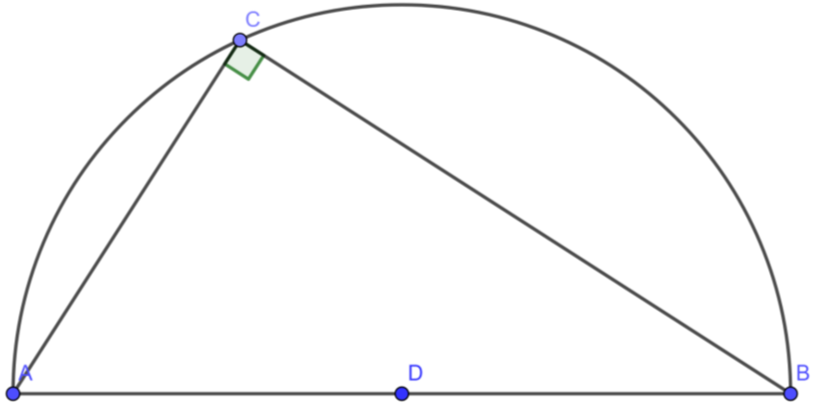
2) Proposition III.1

Trouver le centre d’un cercle donné.



3) Proposition III.31 :
Théorème de Thalès

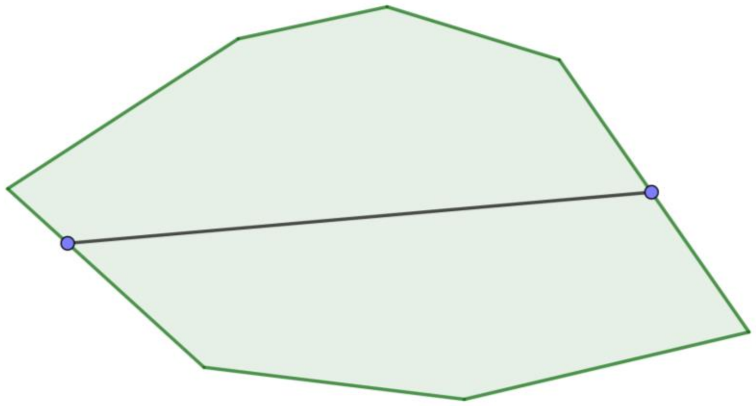
Dans un cercle, tout triangle construit sur un diamètre et dont le sommet se trouve sur la circonférence du cercle est un triangle rectangle.



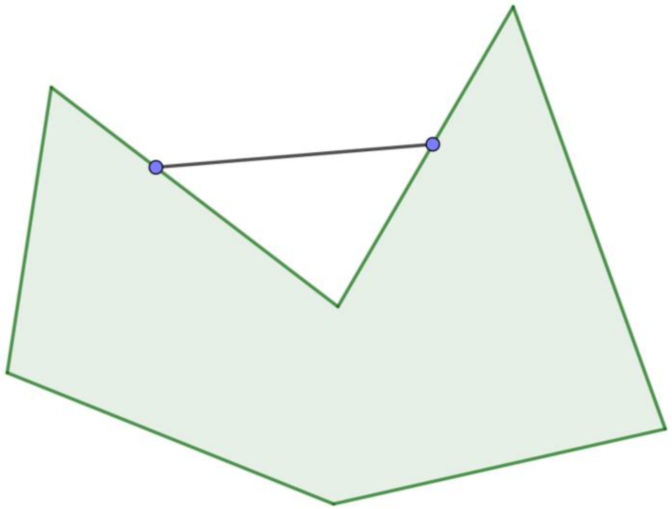
Indice : triangles isocèles.

4) Sommes d’angles intérieurs

Définition :
Une figure plane est dite **convexe** si tout droite joignant deux points sur sa frontière se trouve contenue dans celle-ci. Une figure qui n’est pas convexe est **concave**.



convexe

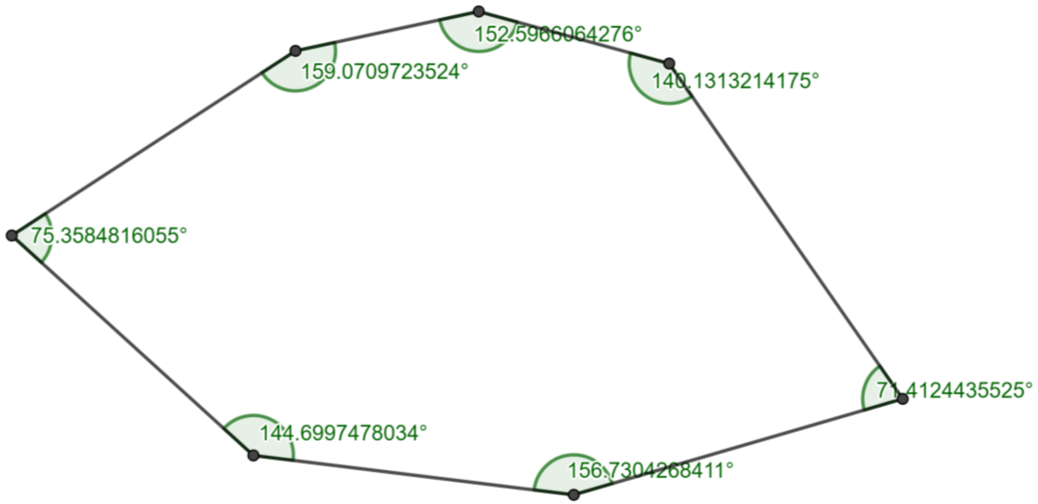


concave

4) Sommes d’angles intérieurs

Montrer que les angles intérieurs d’une figure rectiligne convexe* ensembles sont égaux à autant d’angles droits que le double du nombre de côtés, moins quatre.

[Si n est le nombre de côtés, alors la somme des angles intérieurs d’un polygone convexe est $90° \times (2n-4) = 180° \times (n-2)$]



$$
\begin{array}{r}
75{,}36° \\
+\ 144{,}70° \\
+\ 156{,}73° \\
+\ 71{,}41° \\
+\ 140{,}13° \\
+\ 152{,}60° \\
+\ 159{,}07° \\
\hline
900{,}00°
\end{array}
$$

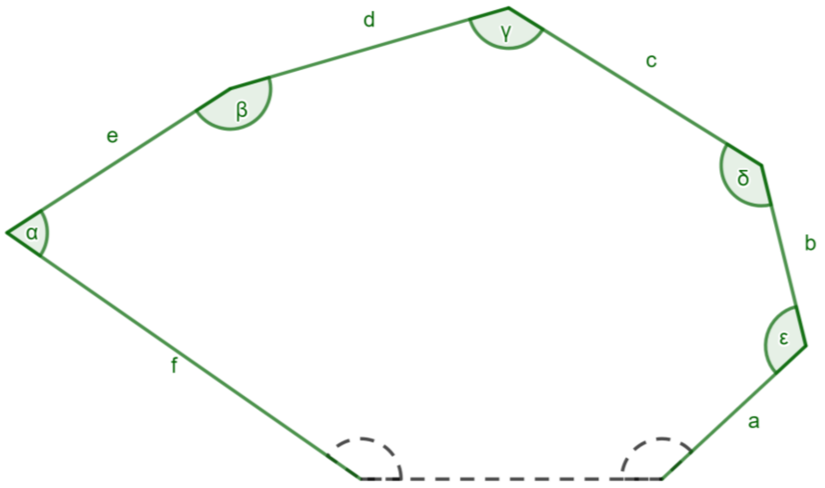
180° x (7-2) = 900,00°

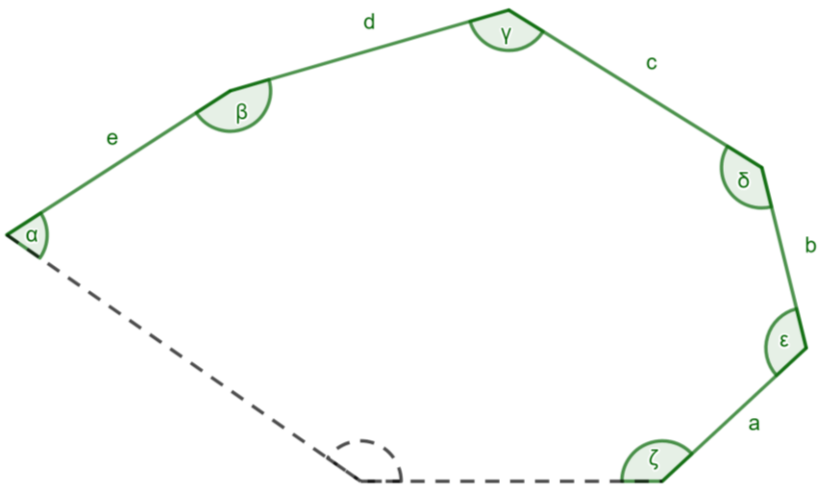
*C’est vrai sans la convexité, mais c’est plus facile à montrer avec la convexité.

5) Congruence des figures (défi)

(a) Montrer que si deux figures rectilignes planes ont les côtés sauf la base égaux chacun à chacun, et les angles contenus par les côtés adjacents égaux chacun à chacun, alors les bases sont égales et les figures sont congrues.

(b) Montrer que si deux figures rectilignes planes ont les côtés sauf deux égaux chacun à chacun, et tous les angles, sauf celui contenu par les deux côtés restants, égaux, alors les deux figures sont congrues.





5) Égalité des figures (défi) :
La preuve par induction

Quand on veut affirmer qu'une propriété est vraie pour tout entier n,

1) On montre que c'est vrai pour $n = 1$.

2) On montre que, si c'est vrai pour n, c'est vrai pour $n + 1$.

Puisque c'est vrai pour 1, alors c'est vrai pour $1 + 1 = 2$. Alors c'est aussi vrai pour $2 + 1 = 3$. Alors c'est aussi vrai pour $3 + 1 = 4$, …

Donc c'est vrai pour tout $n \geq 1$.

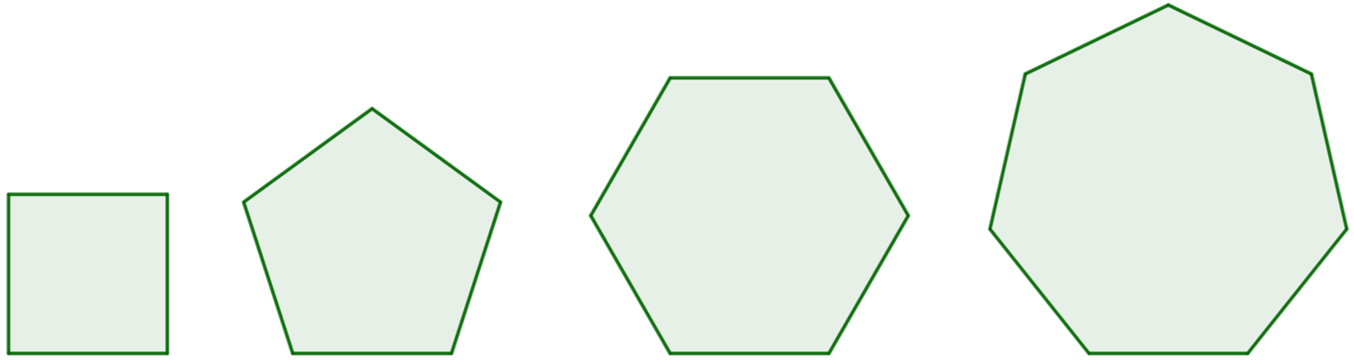
Ici, en l'occurrence, ce sera pratique de procéder par induction sur le nombre de côtés de la figure rectiligne. On le prouve pour toutes les figures à 3 côtés (Props. I.4, I.26). Puis, on prouve que si c'est vrai pour une figure à n côtés, c'est vrai pour une figure à $n + 1$ côtés.

6) Polygones réguliers (défi)

Un polygone est une figure plane rectiligne dont tous les côtés sont égaux entre eux, et tous les angles intérieurs égaux entre eux.

(a) Montrer qu'un polygone régulier avec un nombre impair de côtés n'a aucune paire de côtés parallèles.

(b) Montrer qu'un polygone régulier avec un nombre pair de côtés est contenu par des paires de droites parallèles.



Prochain cours

Arithmétique et théorie des nombres.

Notions de grandeur, de quantité, de rapports.
Similitude des figures, proportions.
Nombres entiers, grandeurs mesurables, incommensurables.
Nombres premiers (infinité, factorisation).

Mardi 23 octobre 2018, 19h à la Station Ho.st