

Introduction aux livres des Éléments

Séance 1

Les mathématiques dans l'antiquité



Cours de mathématiques
Automne 2018

Élise Davignon
elise.davignon@umontreal.ca

«Ô mon roi, en votre pays il y a des routes royales et des chemins pour les paysans, mais en mathématiques il n'y a qu'une voie pour tous!»

- Un vieux bonhomme grec dans un quelconque récit

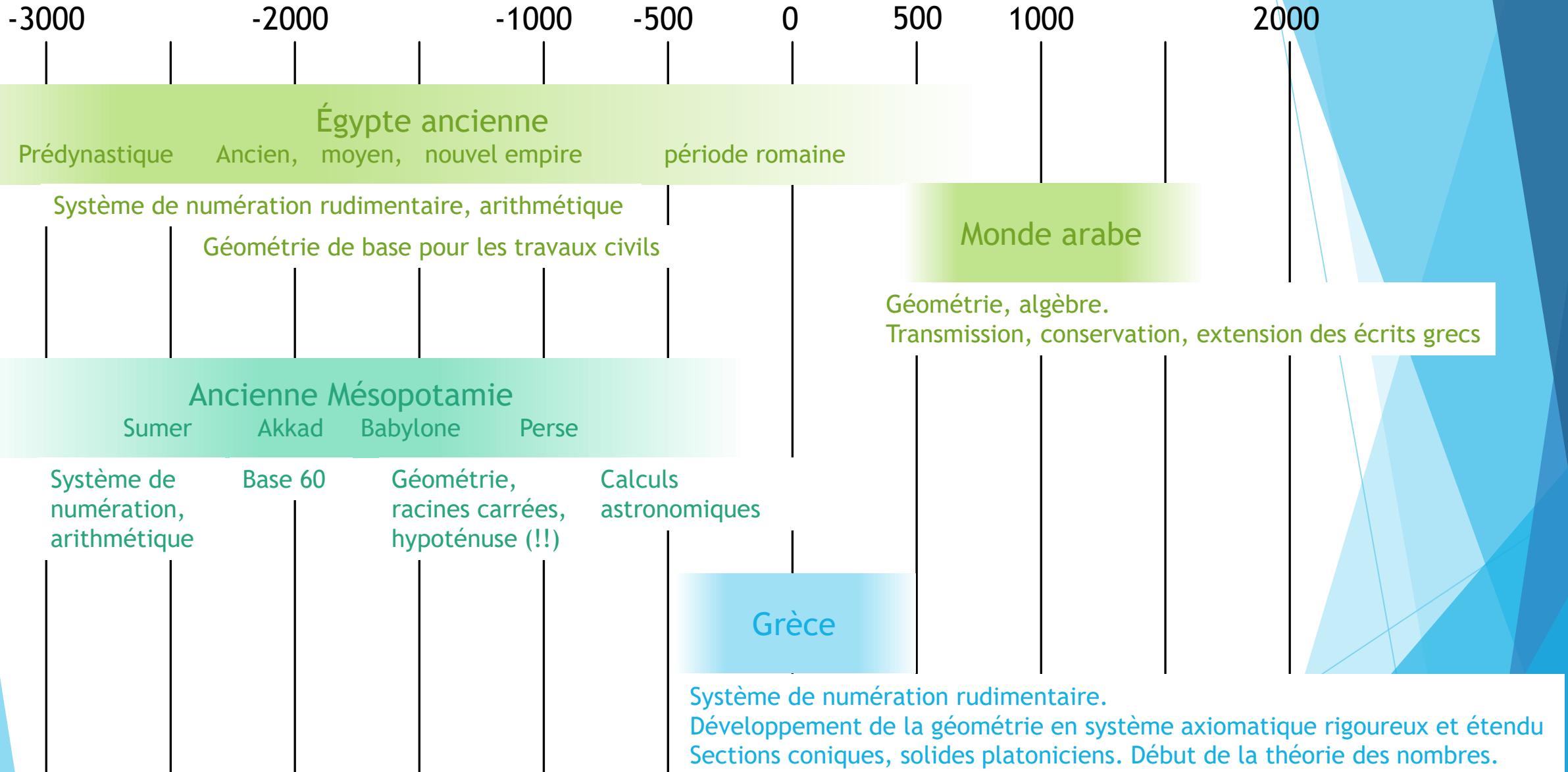
Objectifs du cours

- ▶ Se familiariser avec les bases de la pensée mathématique
- ▶ Apprendre les rudiments de la géométrie plane
- ▶ Présenter le contexte historique à la racine des développements mathématiques modernes

Au programme ce soir :

- ▶ Les mathématiques dans l'antiquité
- ▶ Les Éléments
- ▶ Définitions, postulats, notions communes
- ▶ Exercices/discussion :
 - ▶ La droite
 - ▶ Le cercle
 - ▶ Quelques propositions

Ligne du temps approximative

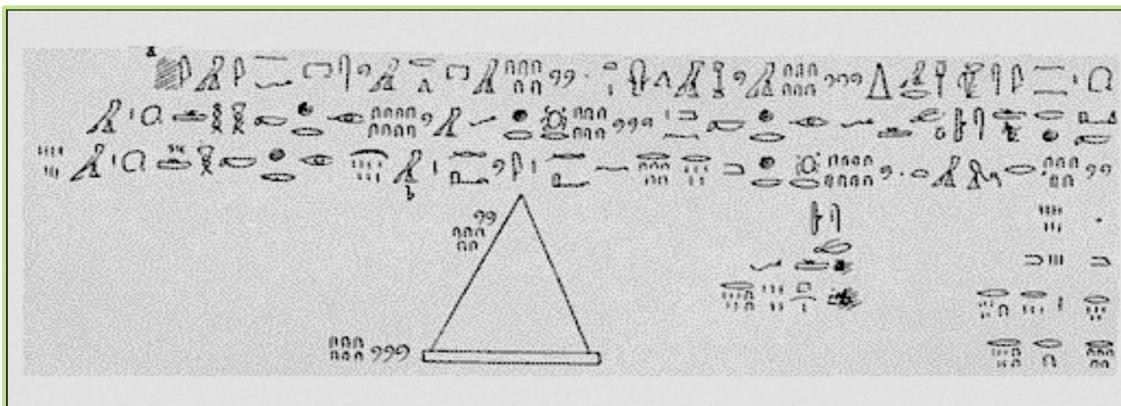


Méditerranée, moyen orient

Système de numération des anciens égyptiens :

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
	□	ꝝ	ꝝ	ꝝ	ꝝ	ꝝ

Système «additif» : on trace le symbole autant de fois qu'il faut pour obtenir la valeur désirée



Reproduction d'un extrait du Papyrus de Moscou
~ -1700 (XIIIe dynastie)

Les anciens égyptiens avaient un système de numération et une connaissance pratique de la géométrie.



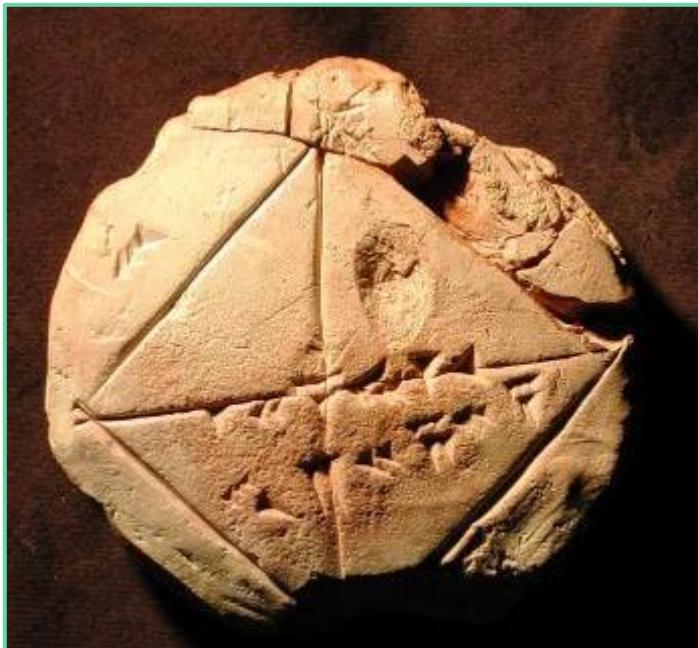
Début du Papyrus Rhind
~ -1600 (Xve dynastie)

Système sexagésimal babylonien

Tablette YBC 7289 :

Entre -1900 et -1600

Un carré, des diagonales et des nombres...



$$\text{U} = 1$$

$$\text{L} = 10$$

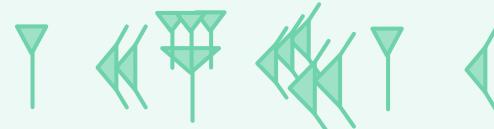
Notation «additive» pour les chiffres de 1 à 59

$$\text{U} \text{ L} = 70 \text{ (ou } 70/60, \text{ ou } 70 \times 60, \text{ ou...)}$$

Valeurs par positionnement
Chaque chiffre vaut 60 fois plus que la position à sa droite.
Ambiguité !



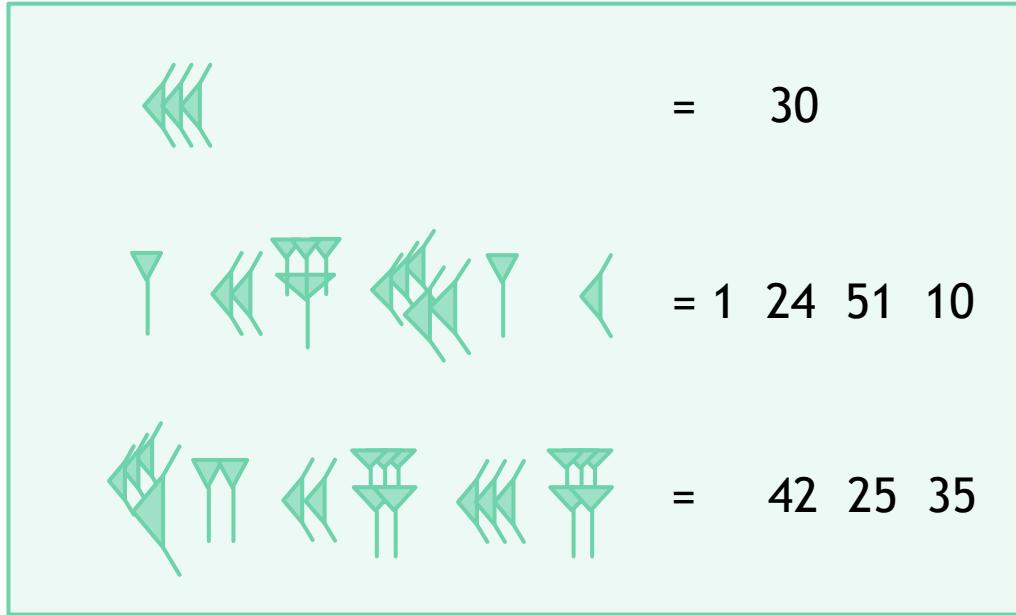
$$= 30$$



$$= 1 \ 24 \ 51 \ 10$$



$$= 42 \ 25 \ 35$$



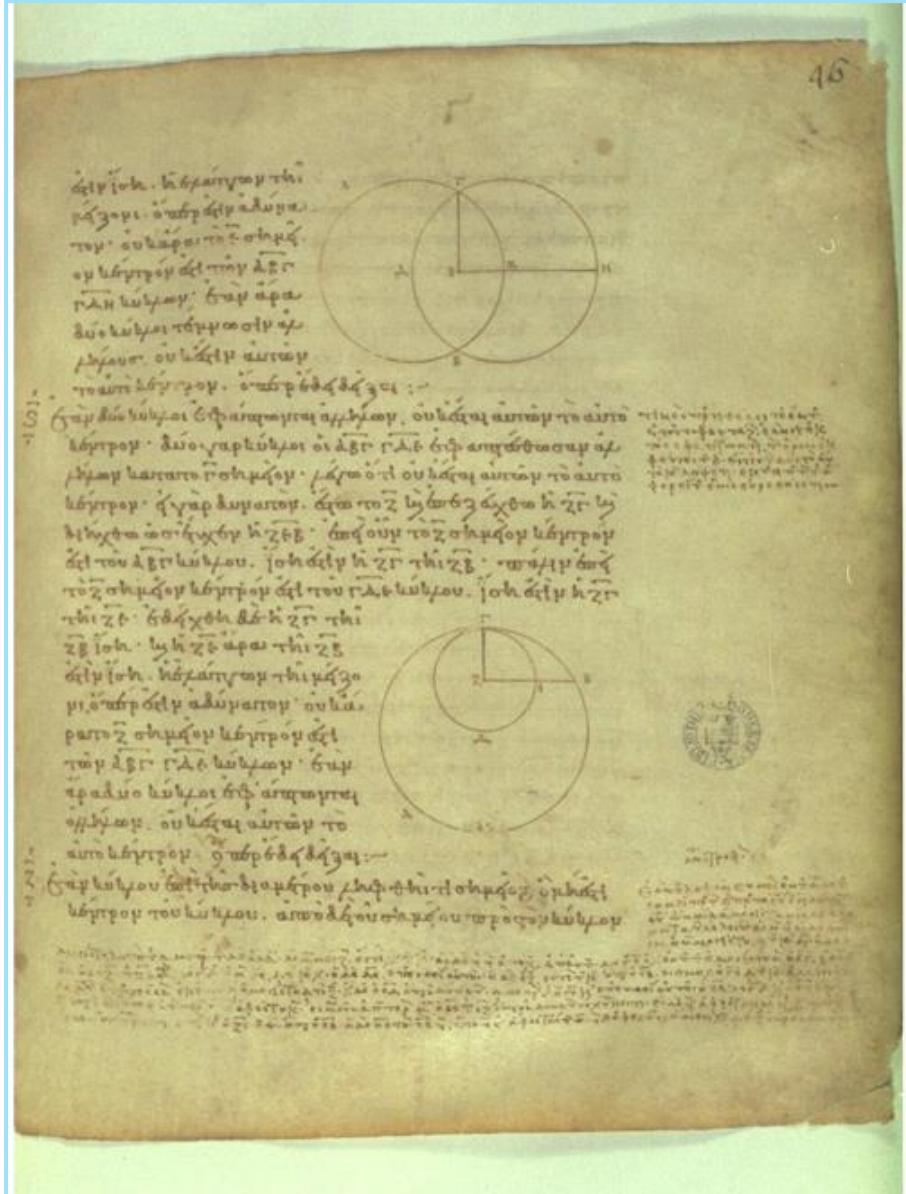
Conversion en notation décimale moderne

$$1 \ 24 \ 51 \ 10 = 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000 = 1,41421296$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356$$

$$42 \ 25 \ 35 = 42 + 25/60 + 35/3600 = 42,4263889$$

$$30 \times \sqrt{2} = 42,4264069$$

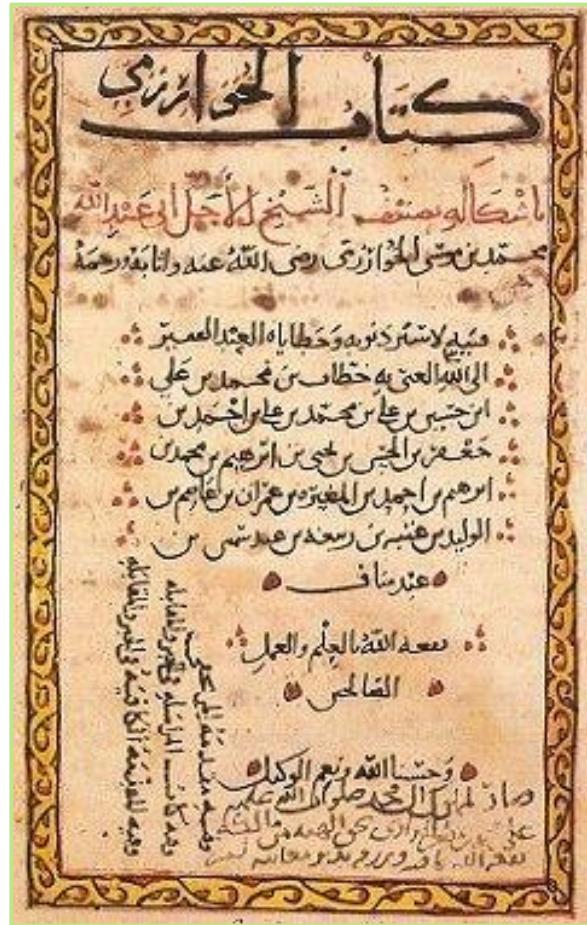


Mathématiques en grèce

Système de numération similaire à celui des romains
(I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, etc.)

Géométrie très développée

Manuscrit D'Orville
Constantinople, 888
Aujourd'hui à la Bodleian Library
Propositions 5 à 7 du Livre III
Les treize livres des Éléments d'Euclide

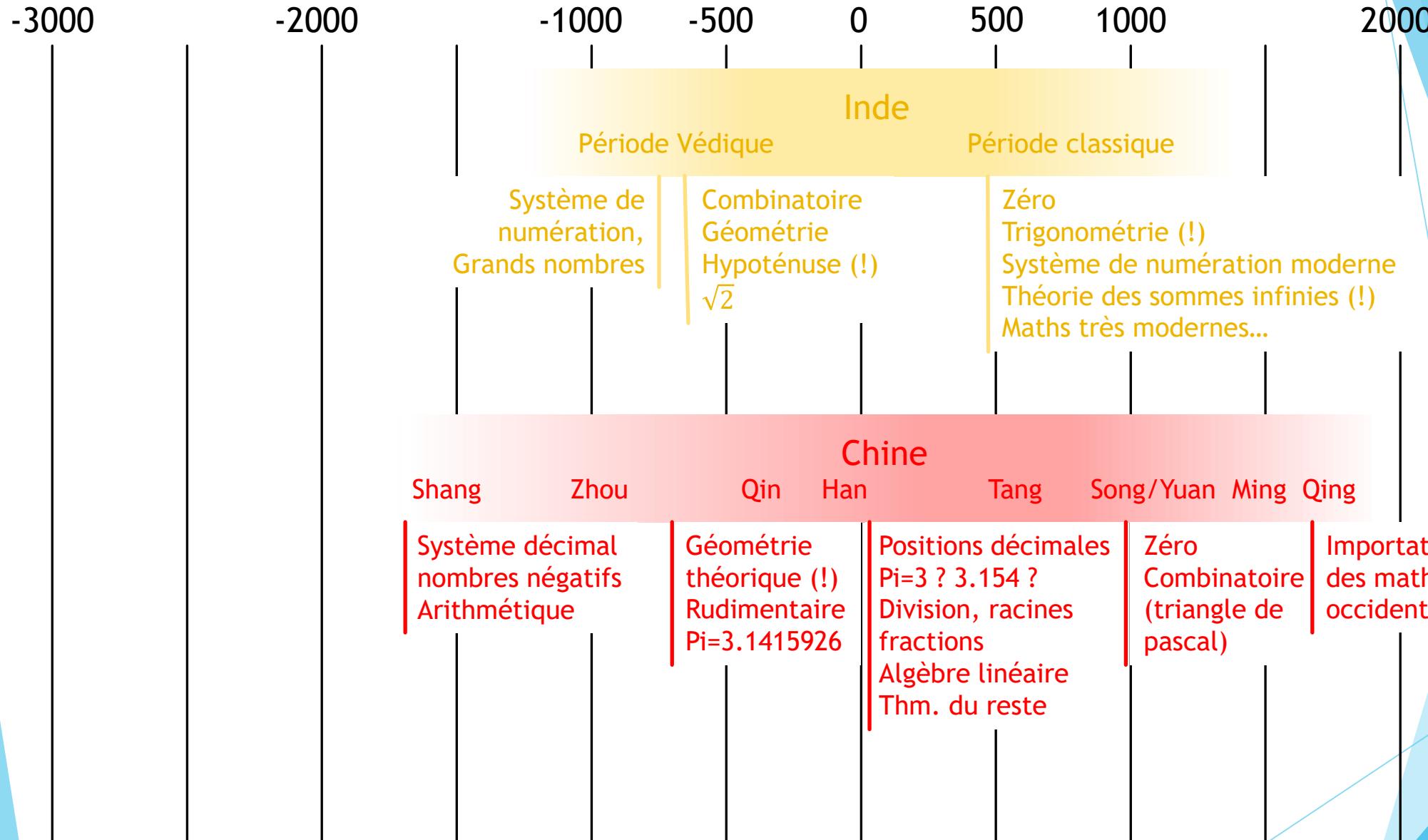


Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison
Bagdad, IXe siècle, Al-Khwarizmi

Progrès des mathématiques dans le monde Arabe

Conservation et traduction en arabe des œuvres grecques

Développements importants de l'Algèbre (Al-Jabr)



Asie

Les mathématiques en Inde

-800 à -200 : Śulba-Sūtras

règles pour la construction d'autels
Certaines connaissances géométriques
(Pythagore, par exemple)

IIe siècle av. J.C. : Pingala

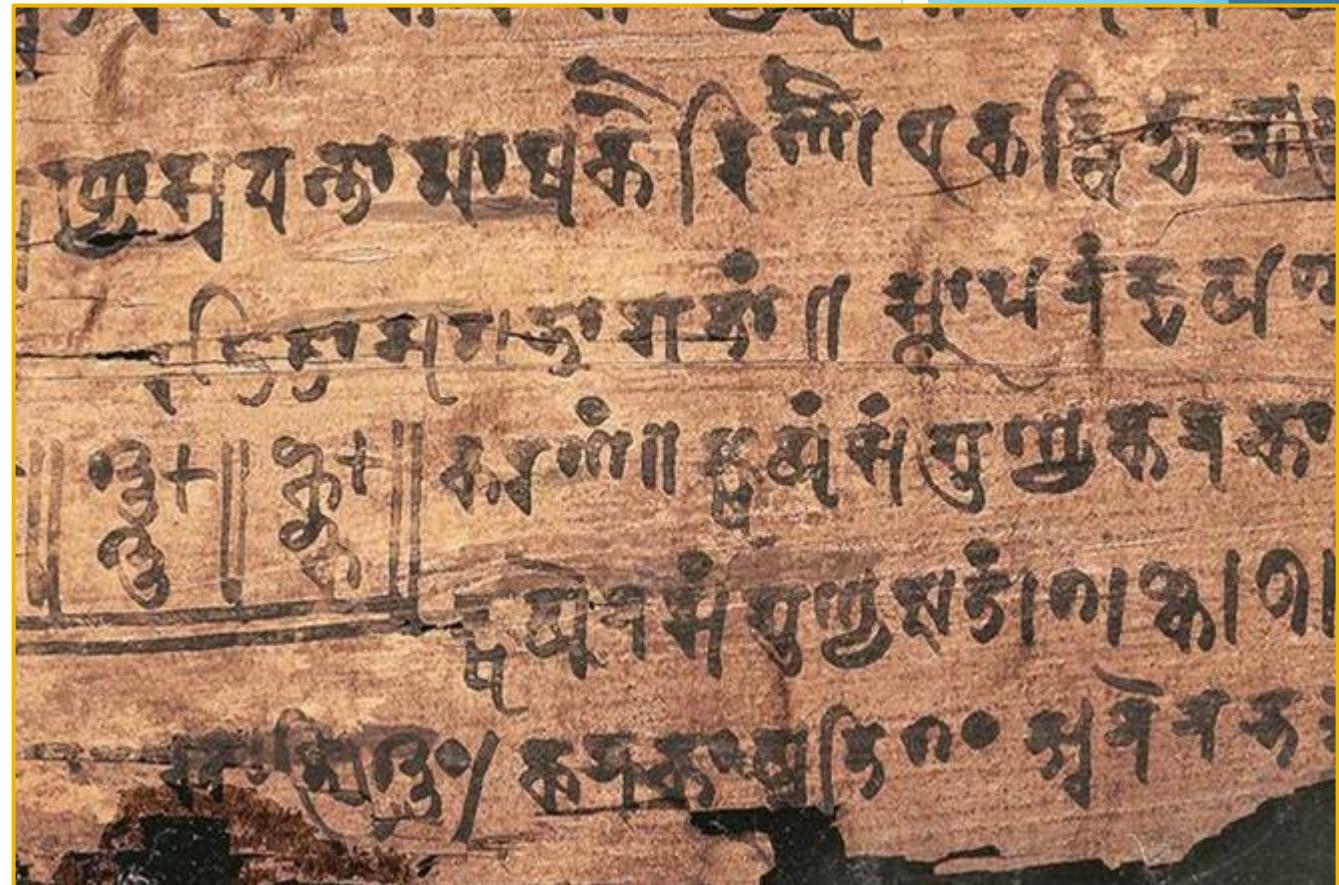
Mathématicien qui découvre des notions
d'analyse combinatoire.

De 400 à 1600 : Période classique

Développement de la trigonométrie

Développement du système de numération
moderne (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

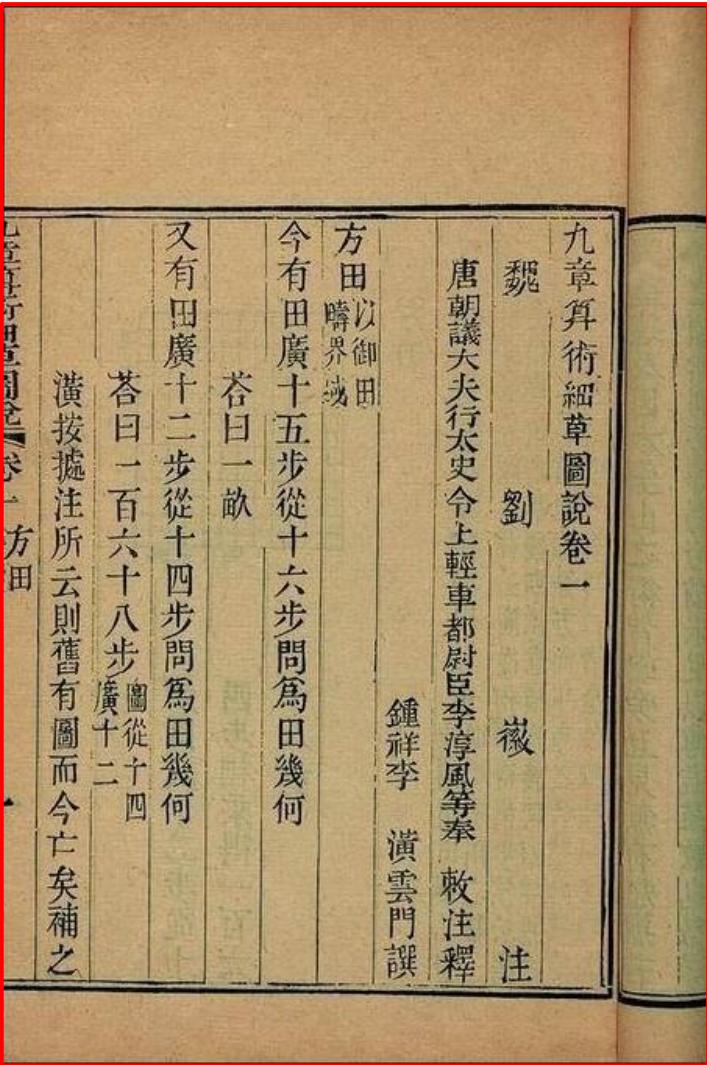
Début de calcul différentiel !



Manuscript Bakhshali

III-IV^e siècles, Pakistan

Première apparition connue du zéro en Inde



Les Neuf Chapitres sur l'art Mathématique
IIe-Ier siècles av. J.-C.
Traité mathématique de la dynastie Han

Les mathématiques en Chine

Ca. -200 : Le tyran Qin ordonne de brûler plusieurs livres
On ne sait donc pas grand-chose des maths avant ça.

Dynastie Han (environ -200 à 200)
Les Neuf Chapitres contiennent des problèmes d'arithmétique, géométrie, proportions, etc.
Début de l'algèbre linéaire

Xe-XIIIe siècles : progrès en trigonométrie, géométrie algébrique, théorie des nombres

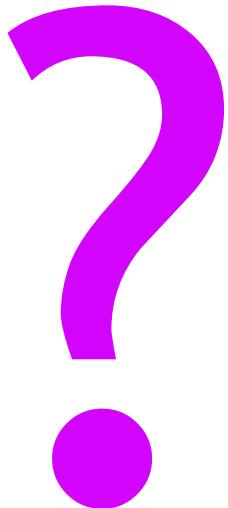
-3000 -2000 -1000 -500 0 500 1000 2000

Civilisations d'amérique centrale

Olmèques Teotihuacan, Maya Aztèques

Géométrie solide
Calendrier précis
Système de numération vicésimal
Zéro !

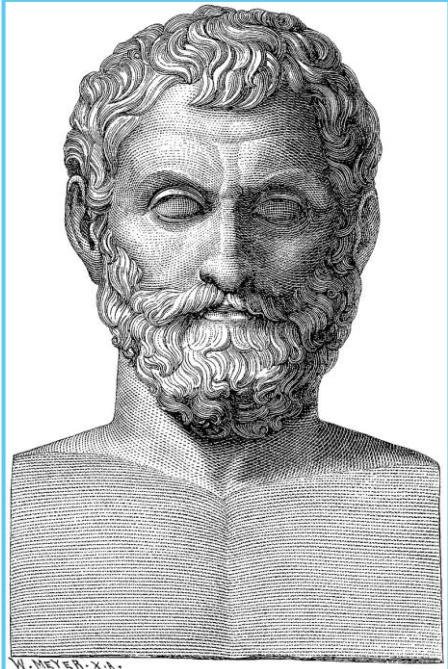
Amérique



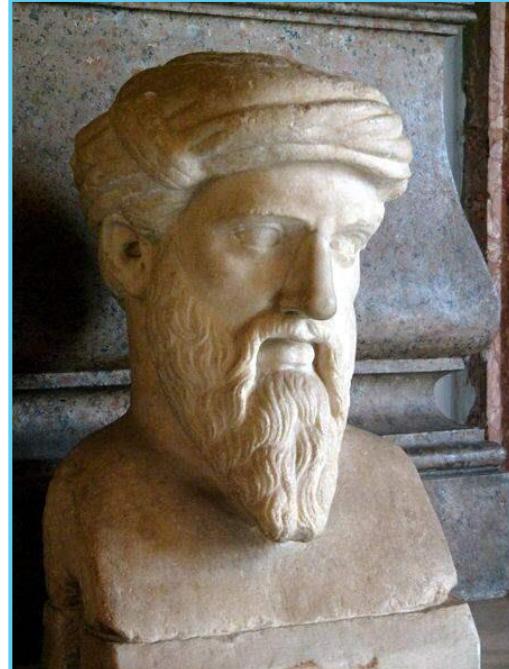
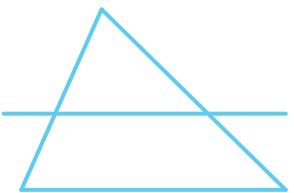
Les Européens n'ont pas fait attention de préserver les traces et c'est très dur de savoir de quoi ça avait l'air...

La géométrie dans l'antiquité grecque

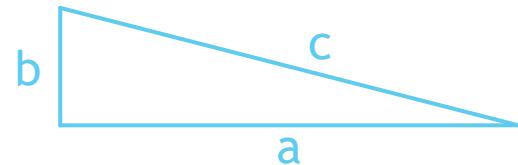
Avant Euclide



Thalès de Milet
~ -625 à ~ -547
Théorème de Thalès



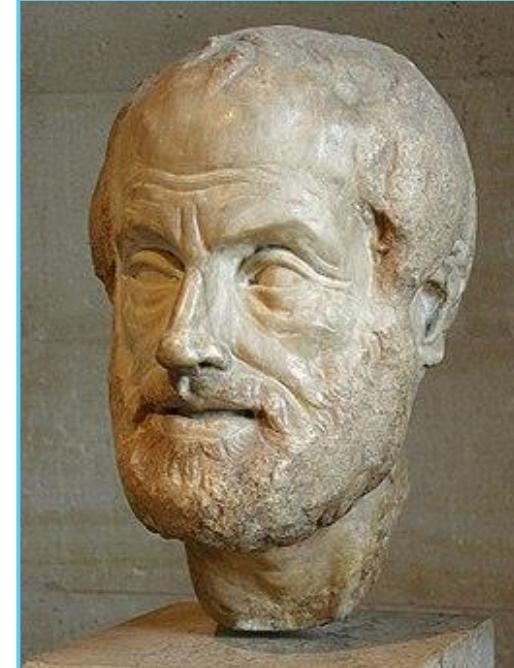
Pythagore
~ -580 à ~ -495
« $a^2 + b^2 = c^2$ »



Théétète d'Athènes

c. -417 à c. -391 ou -369
(incertain)

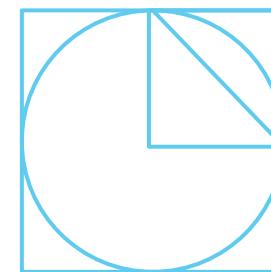
Théorèmes et constructions
de nombres irrationnels.
Ami de Platon et Socrate
(Platon a écrit un dialogue
sur lui !)



Eudoxe de Cnide

c. -380 à c. -337

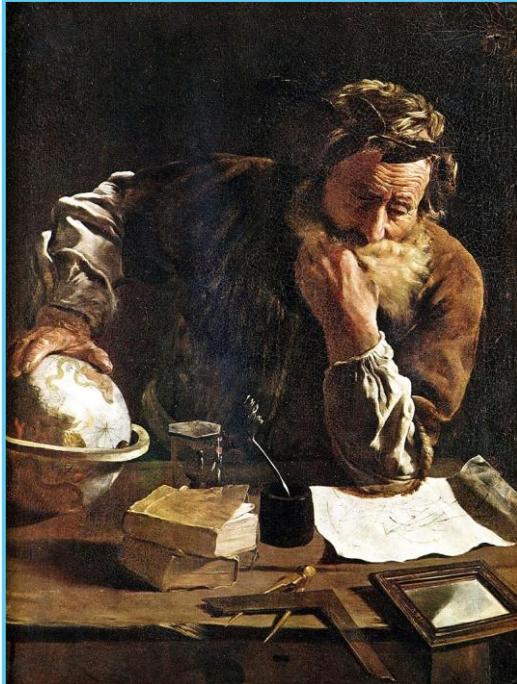
Plusieurs théorèmes sur les
aires, les volumes et les
proportions



Aristote
-384 à -322
Déduction logique

$$\begin{aligned} p &\supset q \\ q &\supset r \\ \Rightarrow p &\supset r \end{aligned}$$

Après Euclide



Archimède

-287 à -212

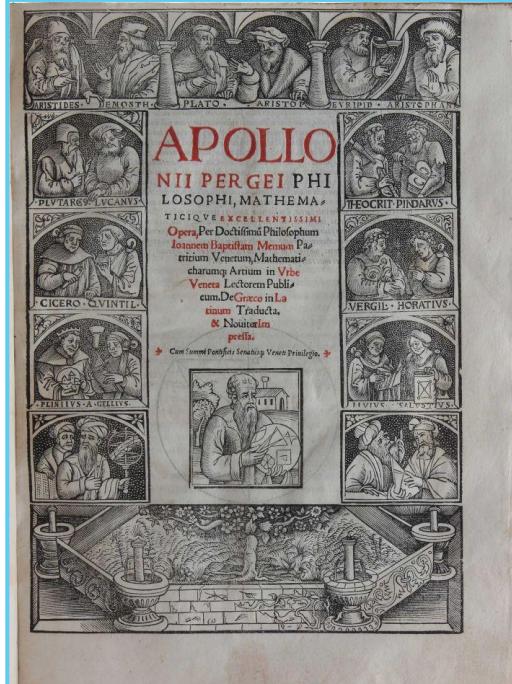
Spirale d'Archimède

Méthode d'exhaustion

Approximation de pi

Eurêka!

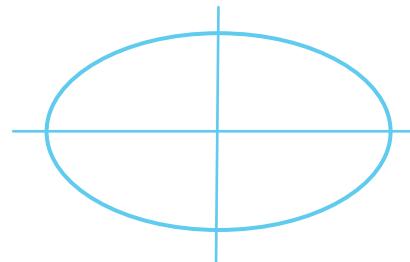
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$



Apollonios de Perga

fl. -200

Étudie les sections coniques



Euclide

Fl. ~ -300

Ce qu'on connaît nous vient principalement du commentaire de Proclus (Ve siècle).

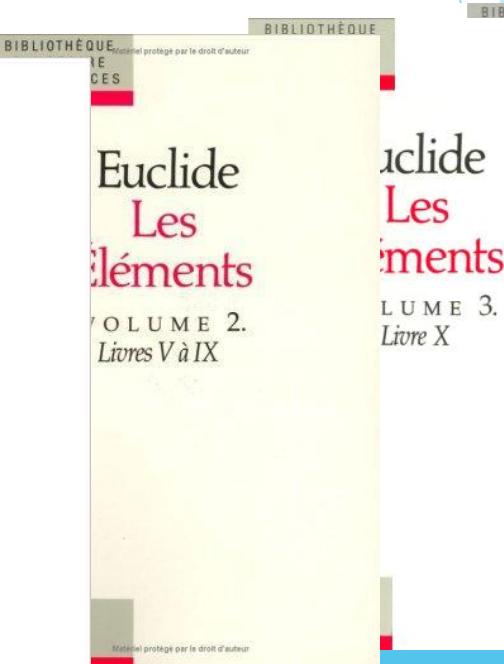
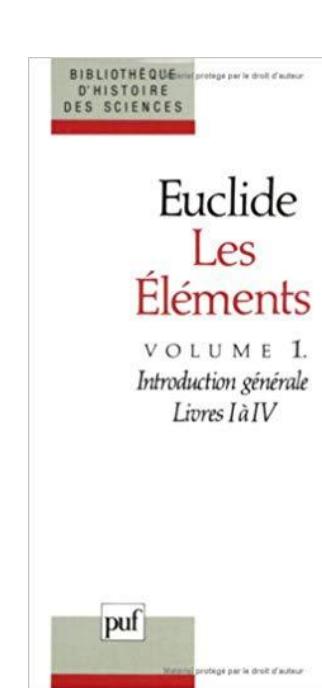
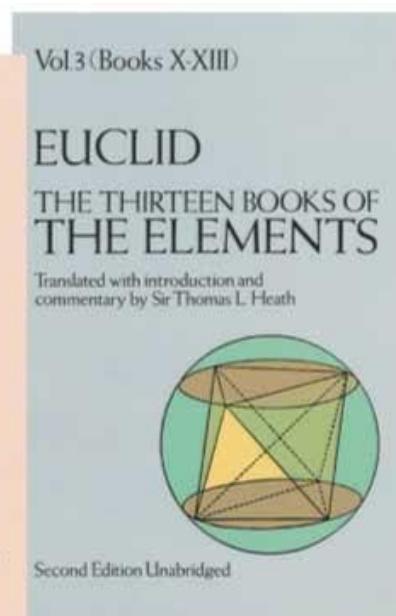
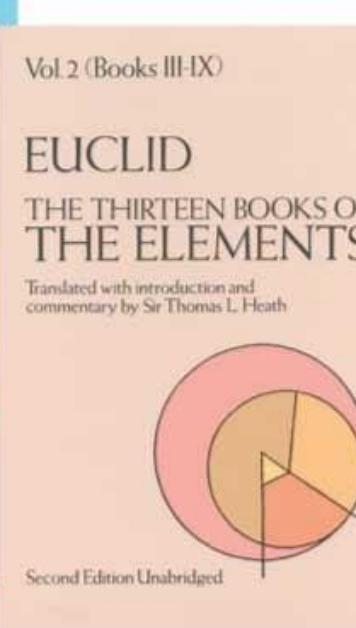
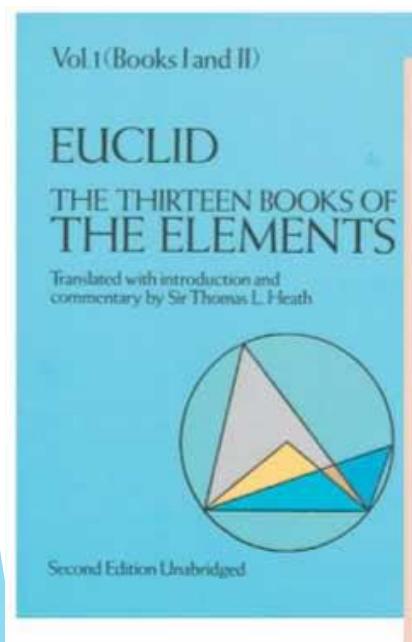
« Donnez-lui trois sous, puisqu'il doit faire gain de ce qu'il apprend !»



Les treize livres des Éléments - Livre I

Traductions

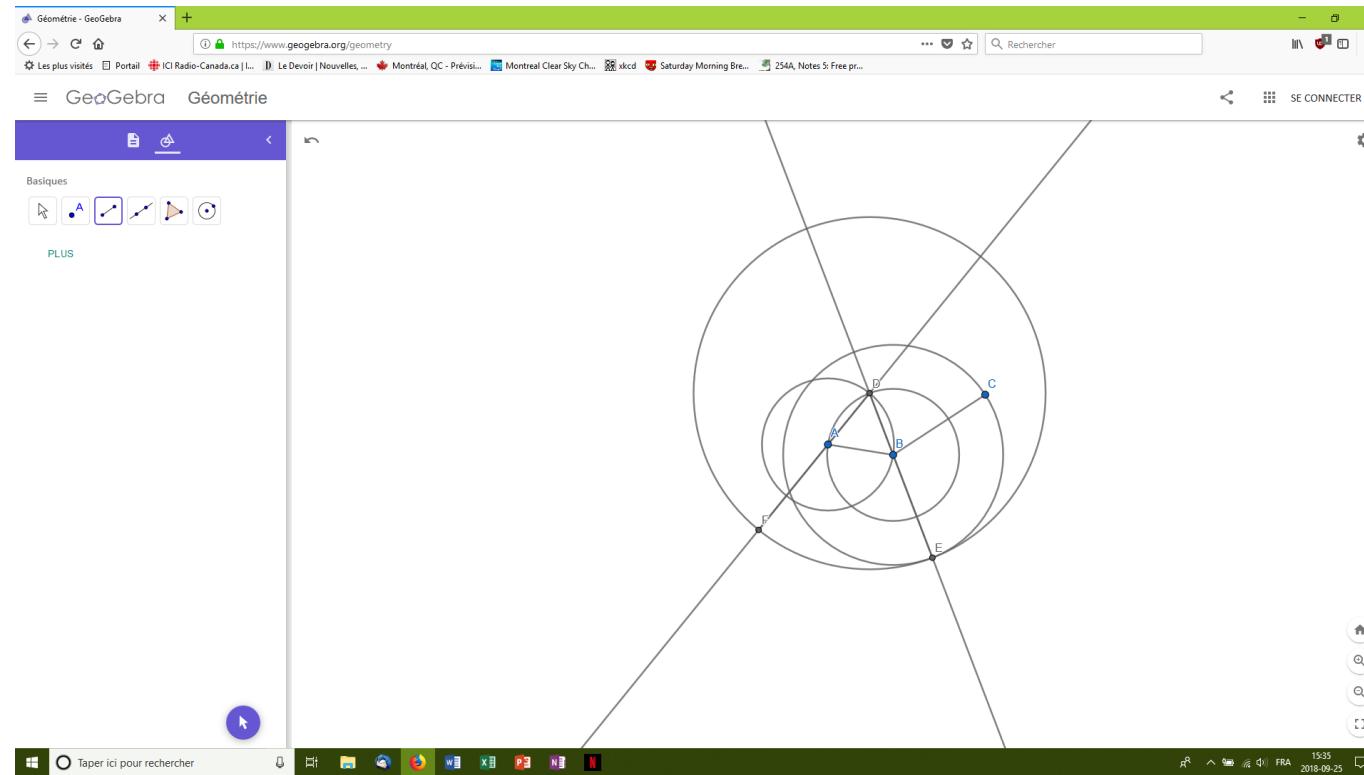
- ▶ En anglais : Thomas L. Heath (1908, seconde édition en 1925, re-publié chez Dover en 1956)
- ▶ En français : Bernard Vitrac (1990), aux presses universitaires de France.



lide
es
ments
ME 4.
XI-XIII

Pour faire les constructions...

- ▶ Crayon, règle, compas, ou...
- ▶ GéoGebra! <https://www.geogebra.org/geometry>



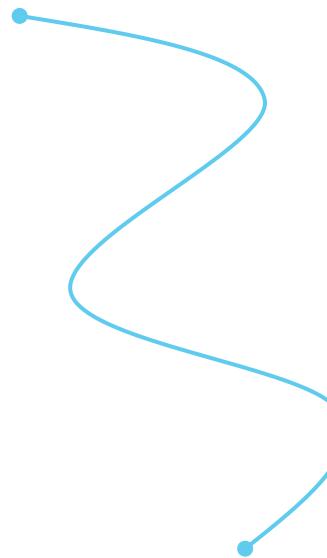
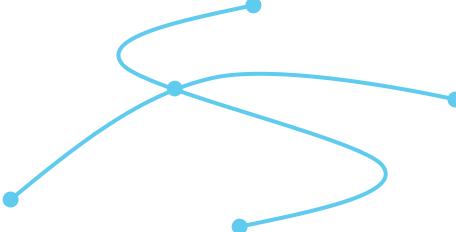
Définitions

1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.



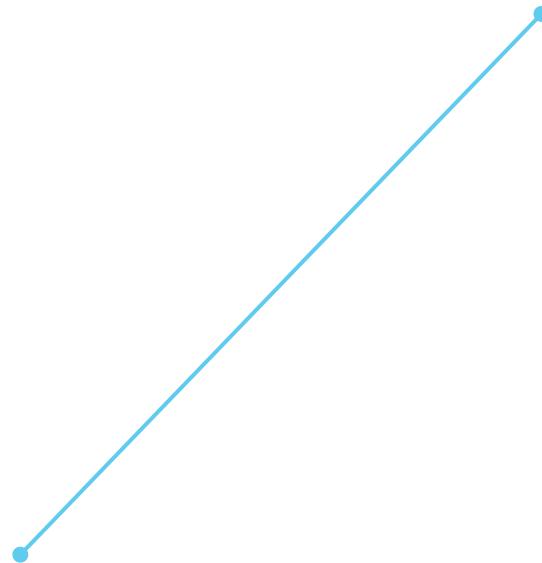
Définitions

2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.
 3. Les limites d'une ligne sont des points.
- 3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.



Définitions

4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.*



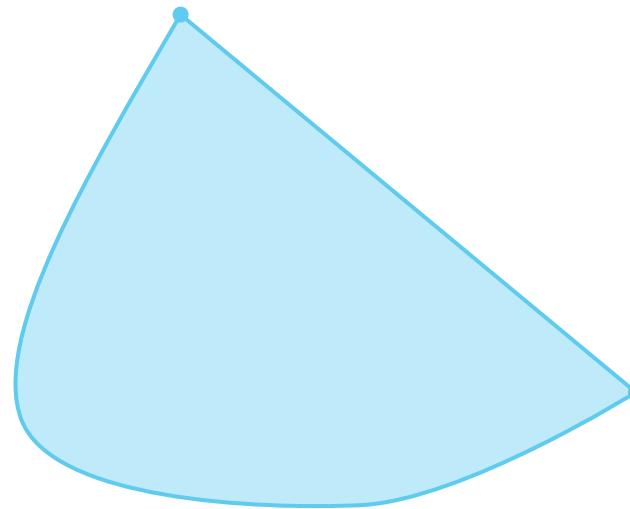
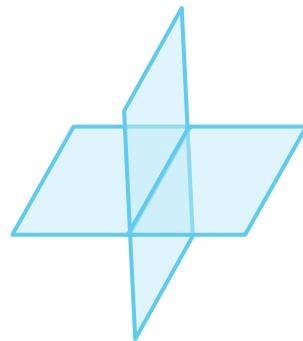
* Ouin... On en reparlera...

Définitions

5. Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les **limites d'une surface** sont des lignes.
7. Une **surface plane** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles.*

6'. L'intersection de deux surfaces qui n'ont aucune partie commune est une ligne.

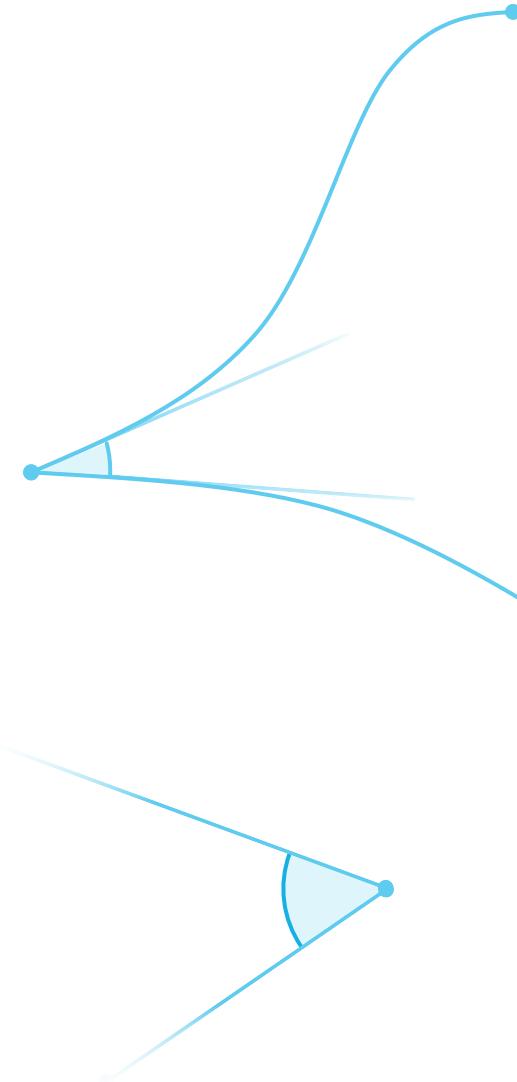
Ça n'a pas d'importance en 2D...



Définitions

8. Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.

9. Et quand ces lignes sont droites, l'angle est appelé **rectiligne**.

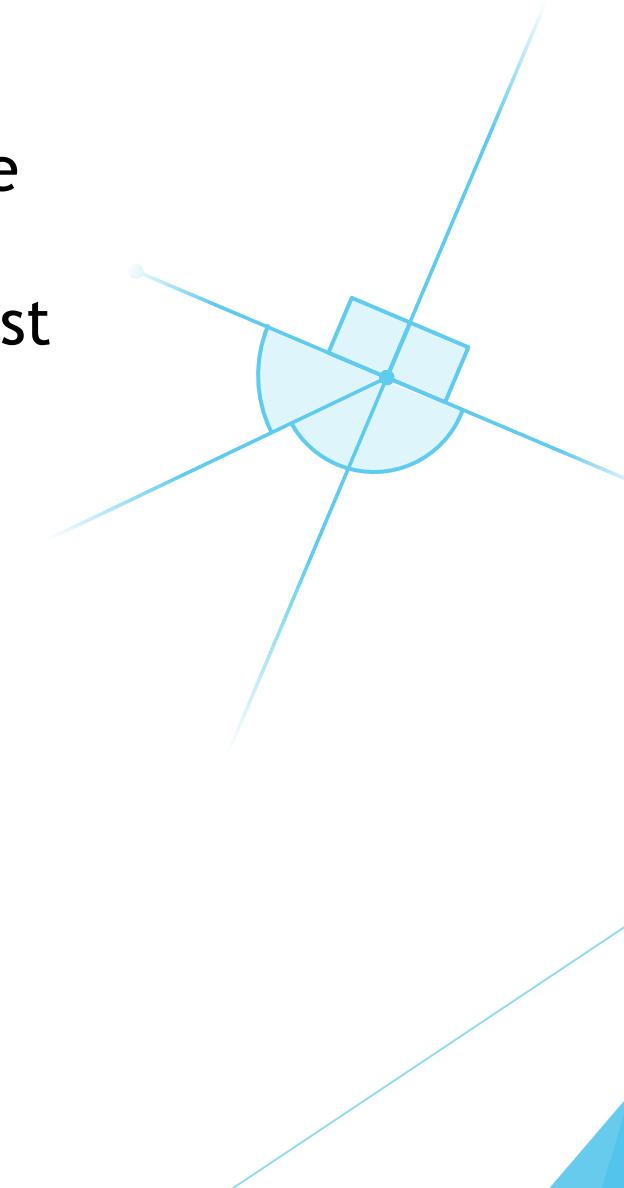


Définitions

10. Et quand une droite ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles est **droit** et la droite qui a été élevée est appelée **perpendiculaire** à celle sur laquelle elle a été élevée

11. Un angle **obtus** est celui qui est plus grand qu'un droit.

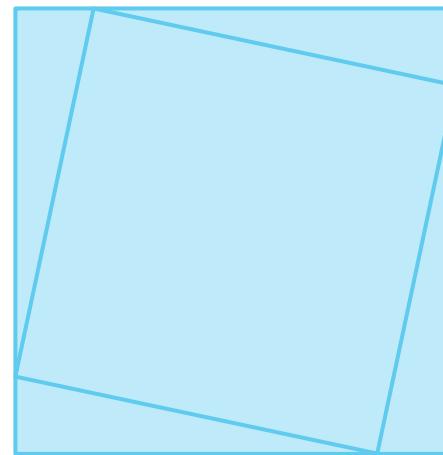
12. Un angle **aigu** est celui qui est plus petit qu'un droit.



Définitions

13. Une **frontière** est ce qui est limite de quelque chose

14. Une **figure** est ce qui est contenu par quelque(s) frontière(s).



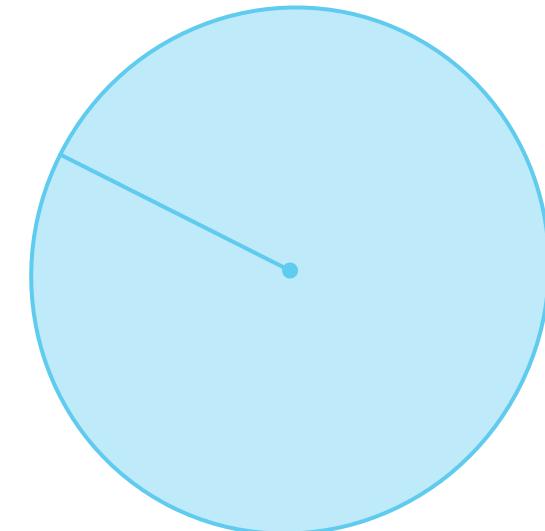
Définitions

15. Un **cercle** est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée **circonférence**) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

16. Et le point est appelé **centre** du cercle.

17. Et un **diamètre** du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

18. Un **demi-cercle** est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.



Définitions

19. Les **figures rectilignes** sont les figures contenues par des droites;

trilatères : celles qui sont contenues par trois droites;

quadrilatères : celles qui sont contenues par quatre droites;

multilatères : par plus de quatre.

20. Parmi les figures trilatères est

un **triangle équilatéral** celle qui a les trois côtés égaux;

isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement;

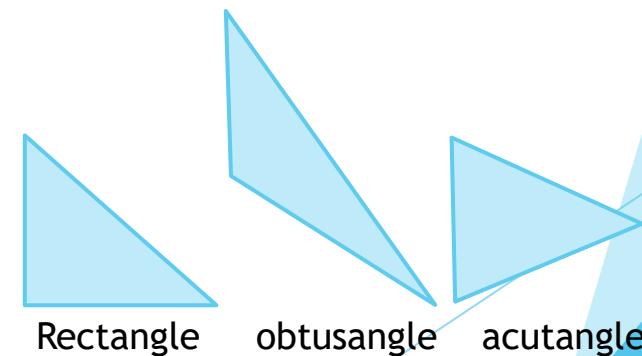
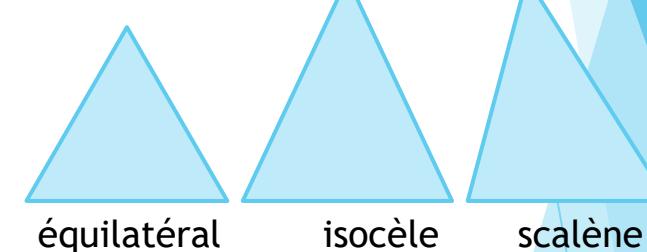
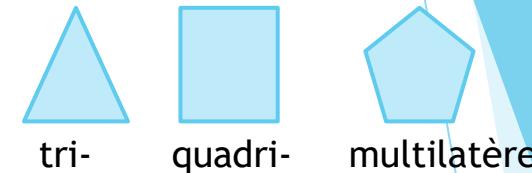
scalène celle qui a les trois côtés inégaux.

21. De plus, parmi les figures trilatères est

un **triangle rectangle** celle qui a un angle droit;

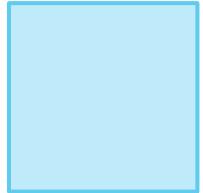
obtusangle celle qui a un angle obtus;

acutangle celle qui a les trois angles aigus.

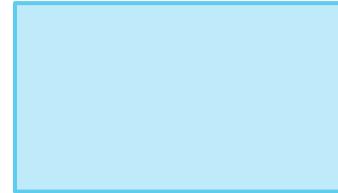


Définitions

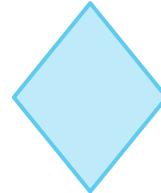
22. Parmi les figures quadrilatères, est
un **carré** celle qui est à la fois équilatérale et rectangle;
est **oblongue** celle qui est rectangle mais non équilatérale;
un **losange** celle qui est équilatérale mais non rectangle;
un **rhomboïde**, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale, ni rectangle;
et que l'on appelle **trapèze** les quadrilatères autres que ceux-là.



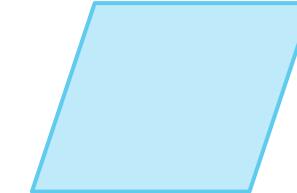
carré



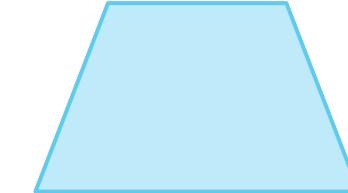
oblong
(rectangle)



losange



rhomboïde
(parallélogramme)



trapèze

Définitions

23. Des droites **parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontre pas, ni d'un côté ni de l'autre.

Demandes (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.



Demandes (postulats)

4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droits indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

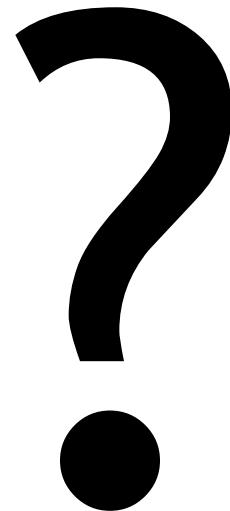
Notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
5. Et le tout est plus grand que la partie.

Discussions et commentaires

Définition d'une ligne droite ?

Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.



Définition d'une ligne droite ?

- ▶ Une ligne dont les parties s'ajustent semblablement sur toutes. (Algèbre linéaire)
- ▶ Une ligne qui ne peut former une figure avec une seule autre ligne droite.
(non convexe, non concave)

Définition du cercle ?

15. Un **cercle** est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée **circonférence**) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

16. Et le point est appelé **centre** du cercle.

Peut-on
Faire mieux ?

Définition du cercle ?

- ▶ Avec les définitions qu'on a, non.
- ▶ Pour le cercle, Isométries = translations.

Exercice 1

Utiliser les définitions, les demandes et les notions communes pour tenter de compléter les démonstrations de ces propositions.

Attention ! Chaque étape doit être justifiée par un énoncé déjà vu!
Vous aurez avantage à vous servir d'une règle (non graduée) et d'un compas, et à essayer des choses !

Proposition 1 : Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.



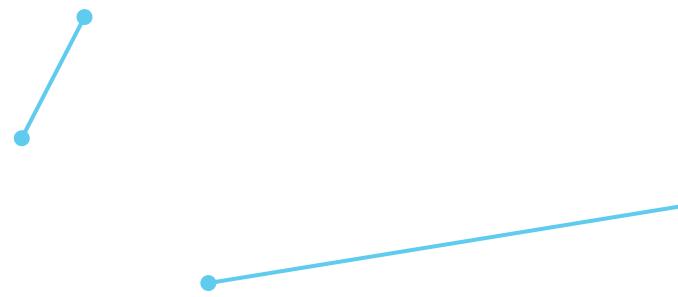
Exercice 1

Proposition 2 : Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée.



Exercice 1

Proposition 3 : De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.



Quelques références

- ▶ *Plofker, Kim (2009), Mathematics in India: 500 BCE-1800 CE, Princeton, NJ: Princeton University Press*
- ▶ *Katz, Victor (2007), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam : A Sourcebook, Princeton, NJ : Princeton University Press*
- ▶ *Boyer, Carl B. (1968). A History of Mathematics. New York, United States: John Wiley & Sons.*