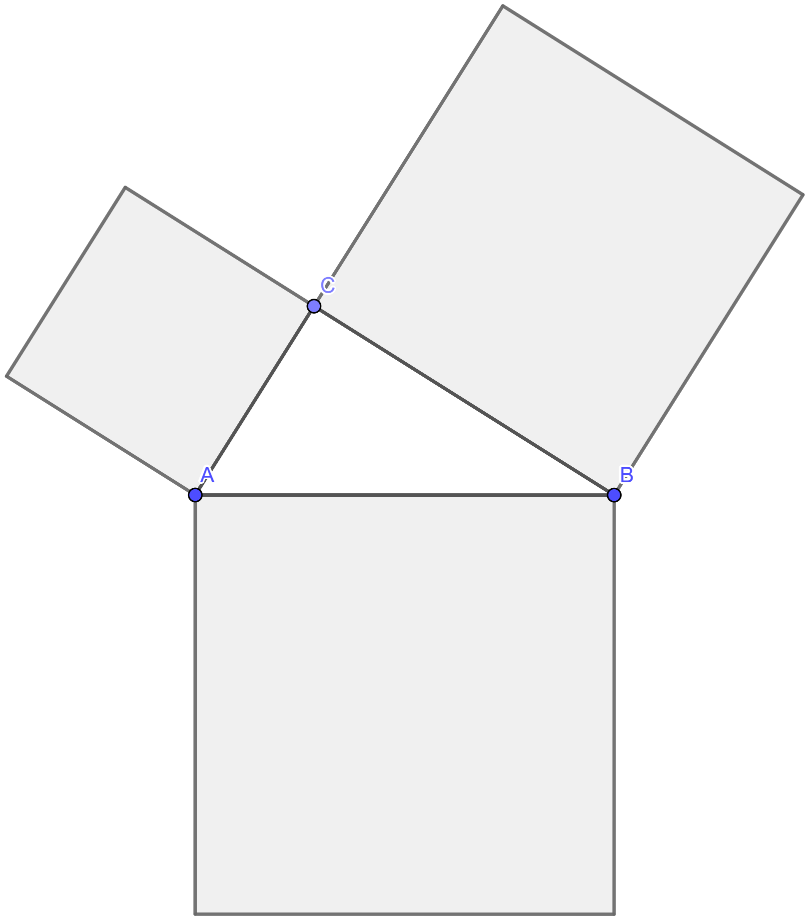
Les treize livres des éléments

L'œuvre d'Euclide à l'origine des mathématiques modernes

le 18 avril 2024
@ UTA Élise Davignon
https://dms.umontreal.ca/~davignon/
elise.davignon@umontreal.ca



À propos de moi...

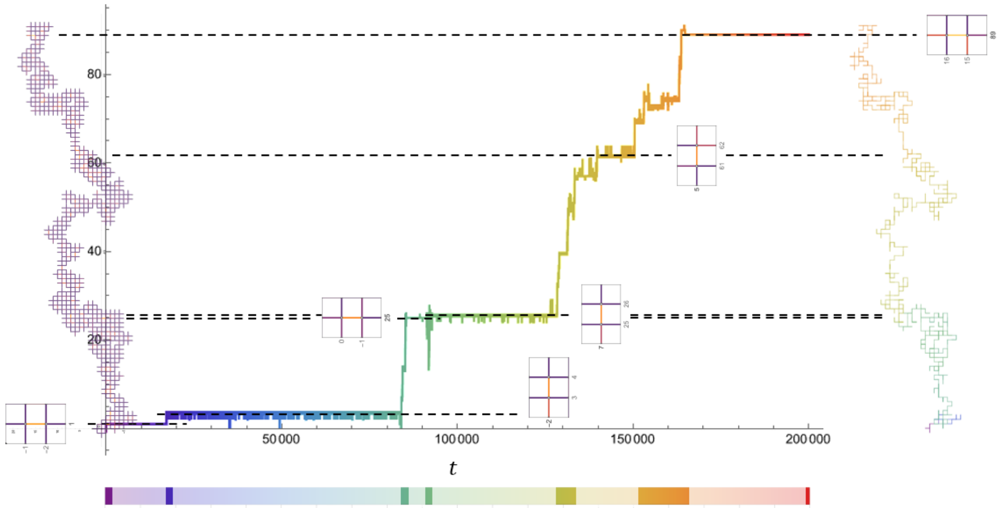
Élise Davignon

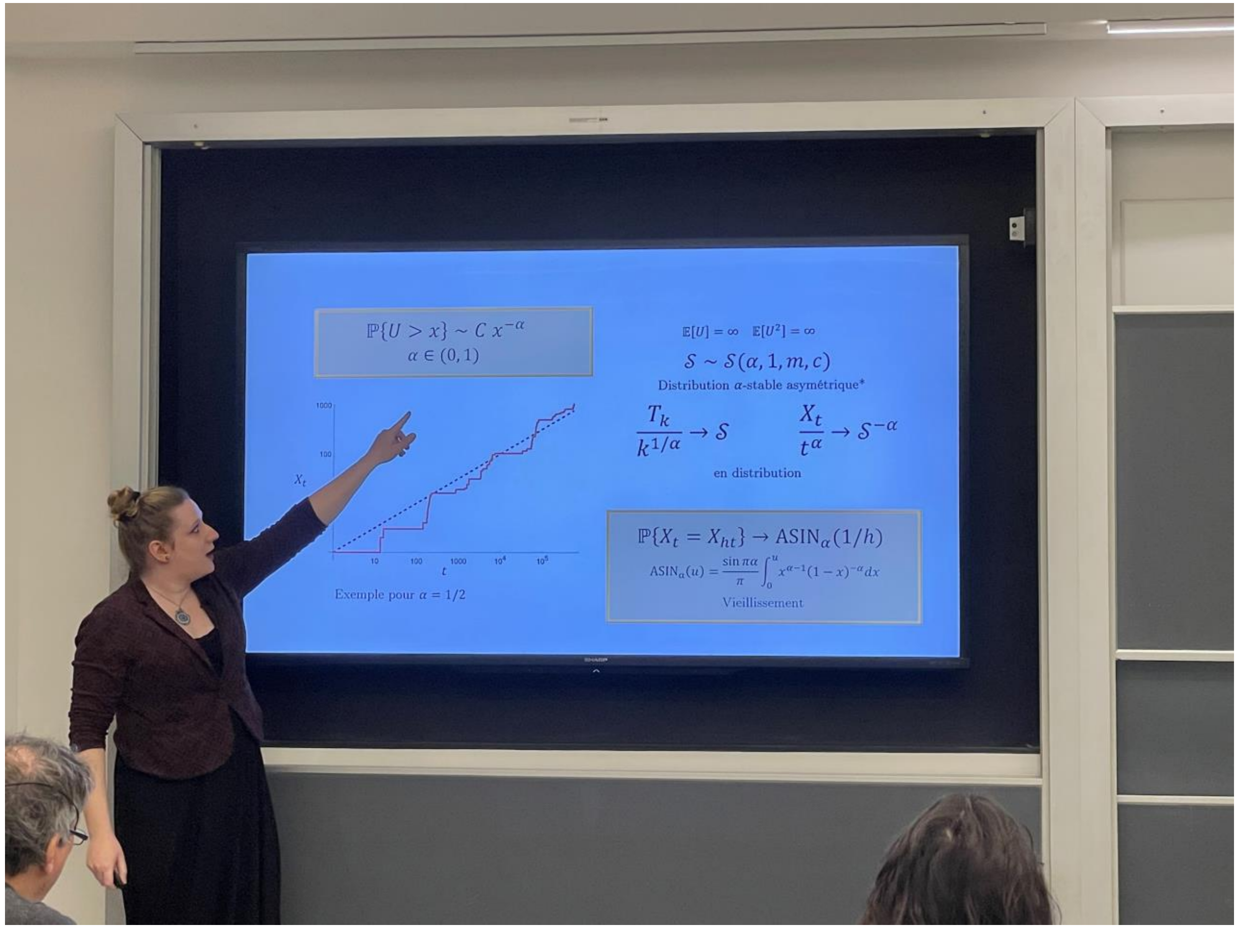
https://dms.umontreal.ca/~davignon/
elise.davignon@umontreal.ca

Aux pommes en octobre 2023

(Ouin scusez j'ai pas de portrait professionnel alors je suis obligée de trouver les photos les plus présentables parmi celles que prennent mes ami·e·s...)

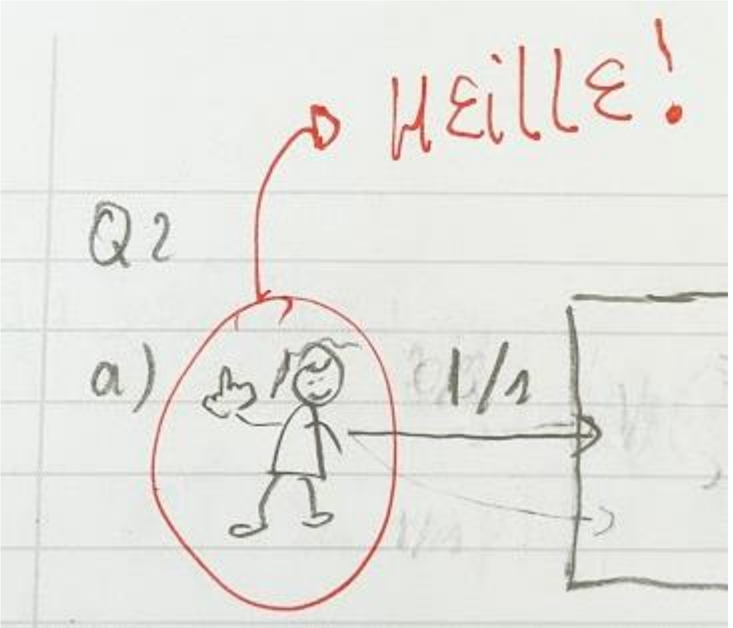
- Ph. D. Mathématiques (2024, UdeM)
  - Probabilités
  - Graphes, réseaux
  - Analyse

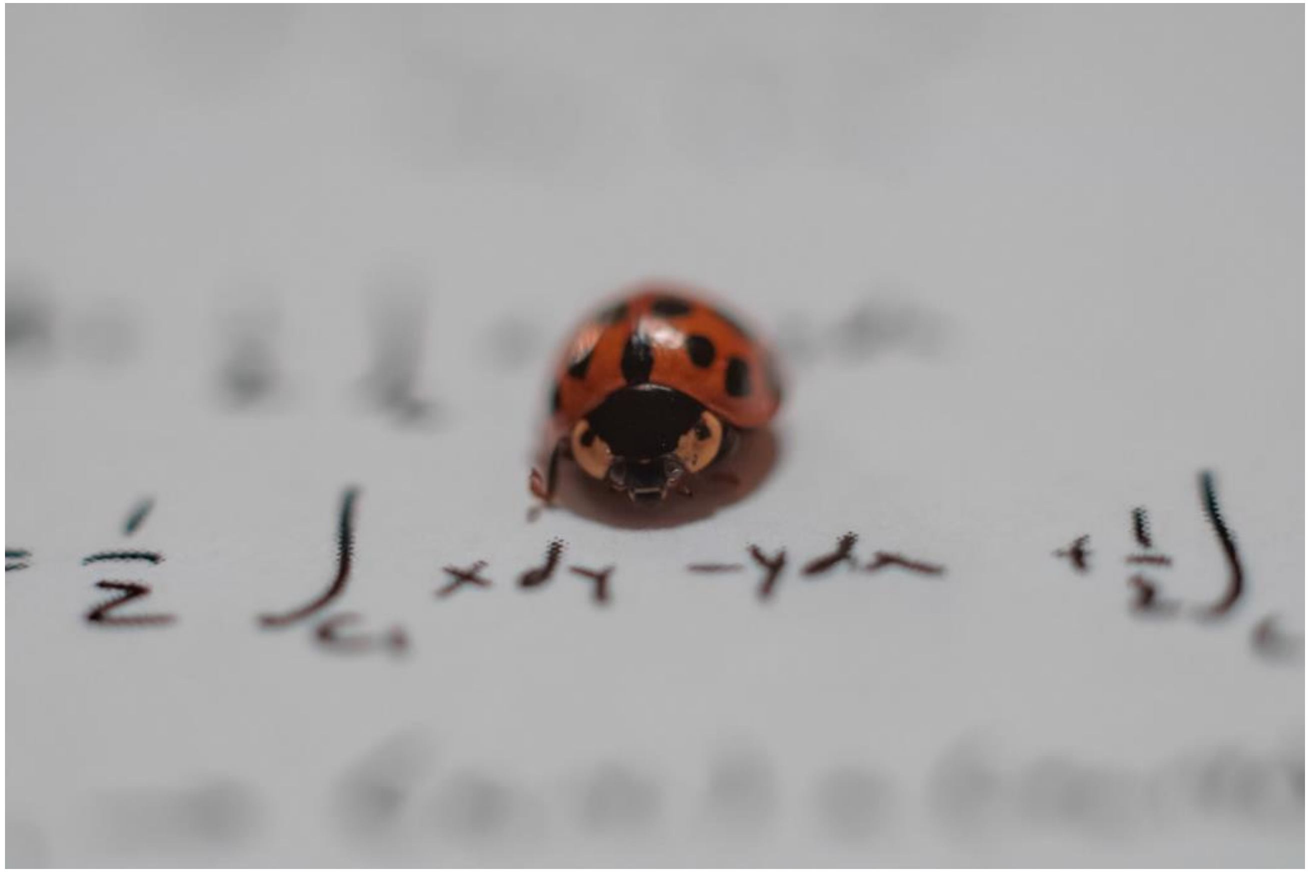




ma soutenance de thèse; 25 mars 2024

- Enseignante depuis 2020
  - Chargée de cours à l'UdeM.
  - Beaucoup de correction !

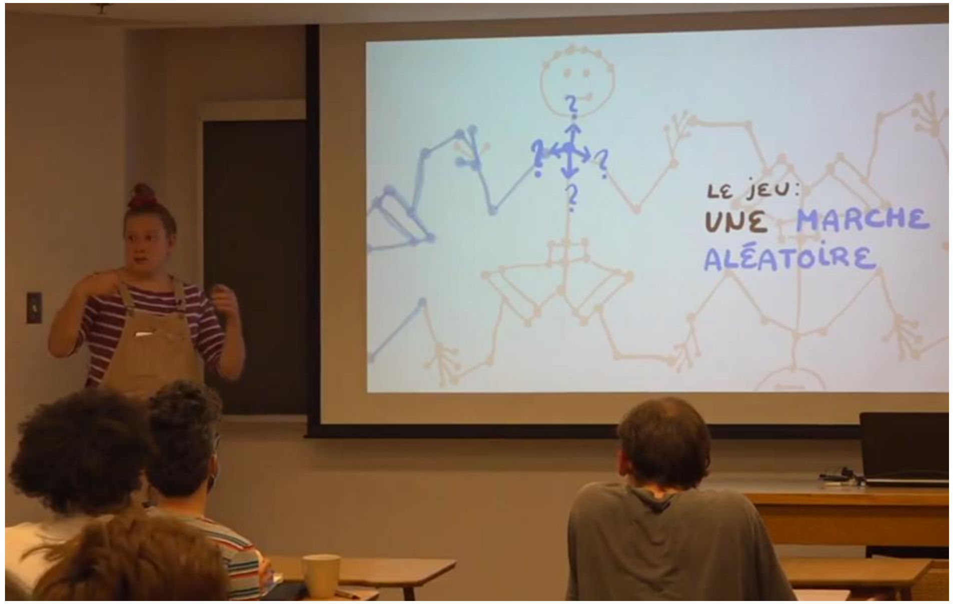




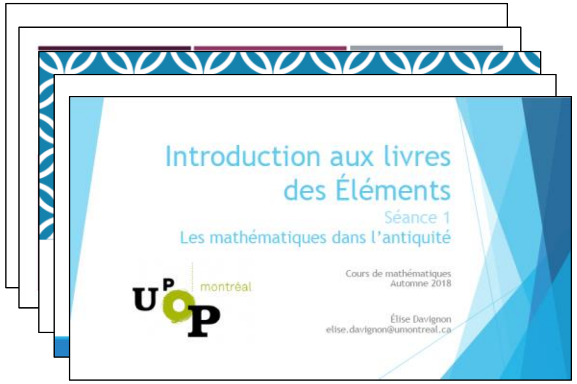
Après avoir fait poser la coccinelle, j'ai intitulé cette photo:
« TON DEVOIR DE MATHS EST ÉCRIT TROP PETIT, KEVIN! »

- Vulgarisatrice
  - CCÉM, ISM, SÉM, Clubmath, SAMARI.
  - Upop Montréal
  - UTA !

SÉM, Clubmath, SAMARI, etc.



Au *Clubmath* en 2022



UPop Montréal – 2018, 2022

UTA !

- Astronome amateure
  - Ça c'est juste pour vous montrer ma belle photo d'éclipse

Avec mes trois télescopes (et aussi des ami·e·s)

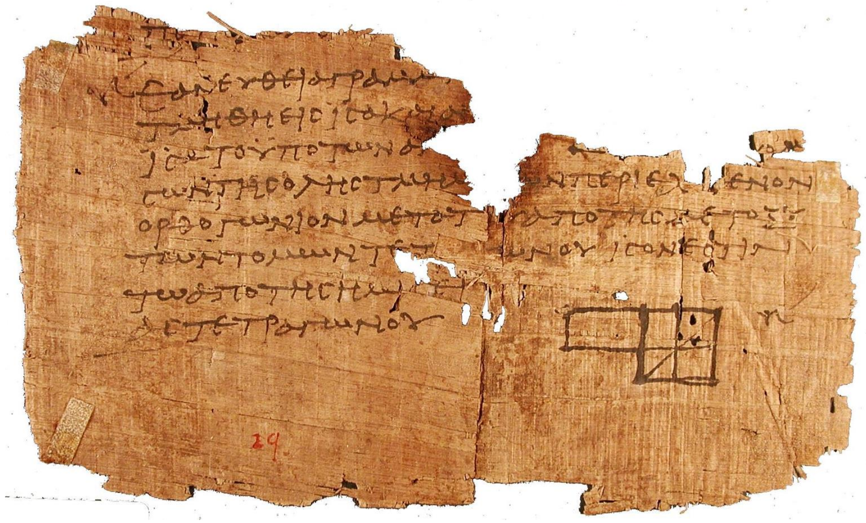
La couronne du soleil à 15h 29 le 8 avril 2024, depuis West Brome

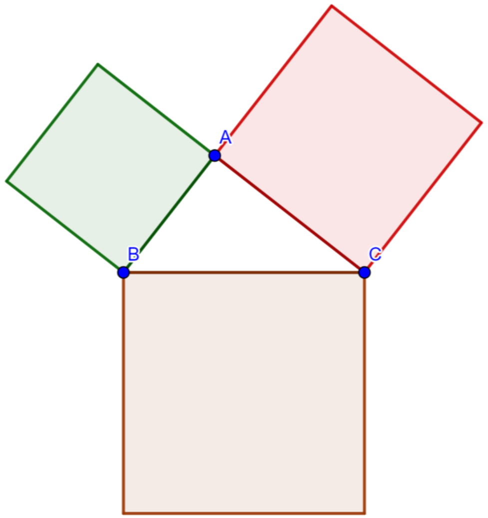
Aujourd'hui :

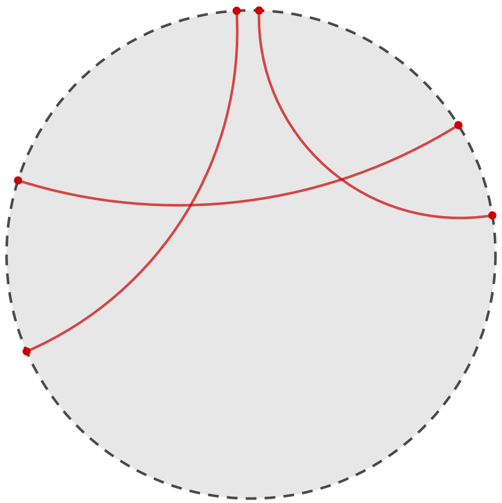
- Les mathématiques,
  de l'antiquité à nos jours.

- *Les Éléments*
  - Structure
  - Contenu
  - Extraits!

- Résonnances modernes







Mais avant ...

Les mathématiques, ça vous fait sentir comment?

SUSAN H. PICKER and JOHN S. BERRY

INVESTIGATING PUPILS' IMAGES OF MATHEMATICIANS

ABSTRACT. This paper describes a research project that had two goals: (1) to design and develop a tool with which to investigate pupils' images of mathematicians; and (2) to use the device to compare those images held by lower secondary pupils (ages 12–13) in five countries. We report that with small cultural differences certain stereotypical images of mathematicians are common to pupils in all of these countries and these images indicate that for pupils of this age mathematicians and the work that they do are, for all practical purposes, invisible.

KEY WORDS: draw a mathematician, pupils' images of mathematicians

Educational Studies in Mathematics **43:** 65–94, 2000.

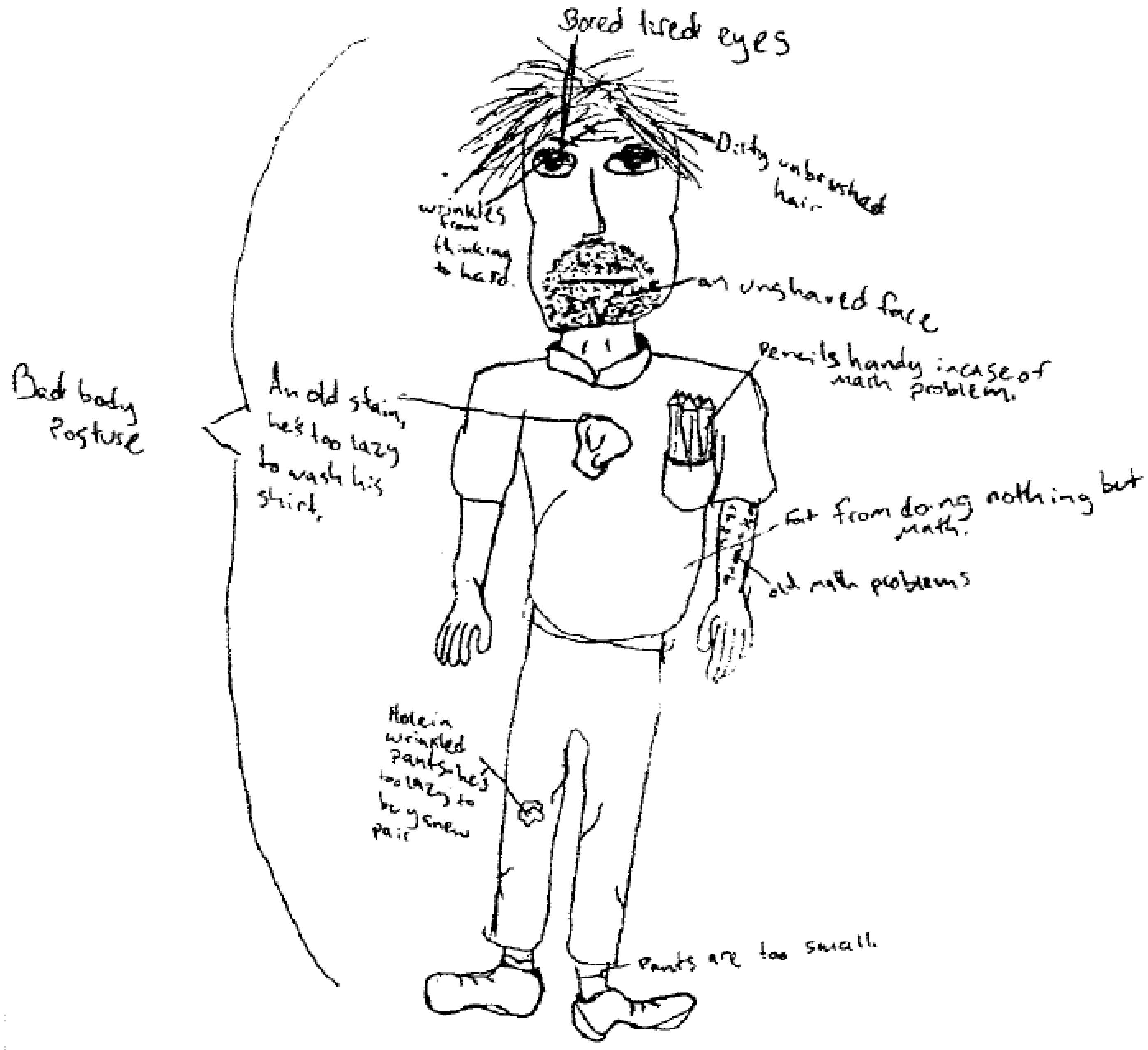


Figure 1. Male 7th Grade (UK Year 8) Pupil.

- Yeux ennuyés (*bored*), fatigués
- Cheveux sales, pas brossés
- Visage pas rasé
- Visage ridé d'avoir pensé trop fort
- Une vieille tache; il est trop paresseux pour laver sa chemise.
- Mauvaise posture du corps
- Les crayons à mine dans la poche de chemise, prêts pour des problèmes de mathématiques.
- Gros car il ne fait que des mathématiques
- [Sur son bras] Un vieux problème de mathématiques
- Un trou dans son pantalon froissé; il est trop paresseux pour s'acheter un nouveau pantalon.
- Son pantalon est trop court.

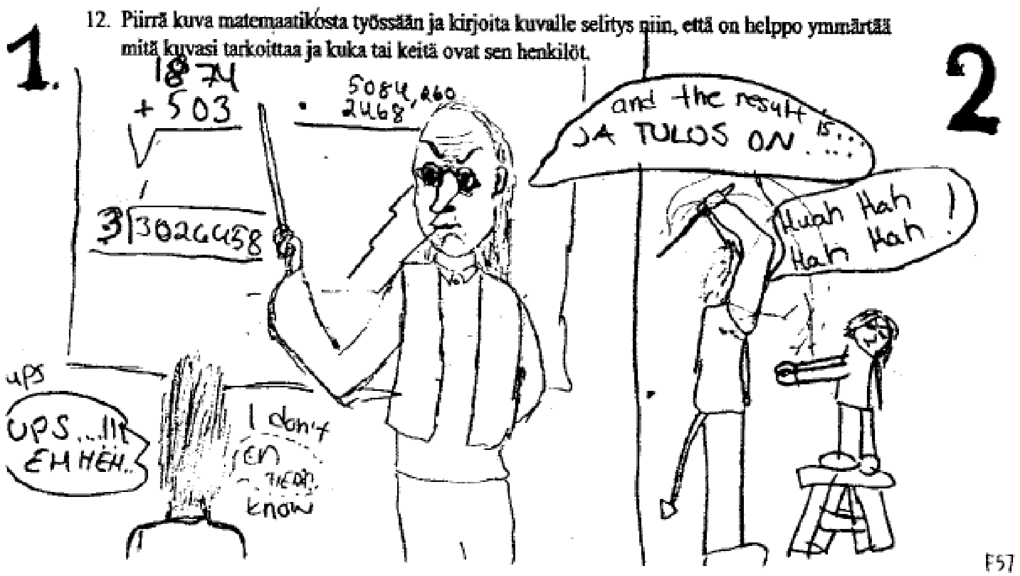


Figure 2. Finland – Female pupil.

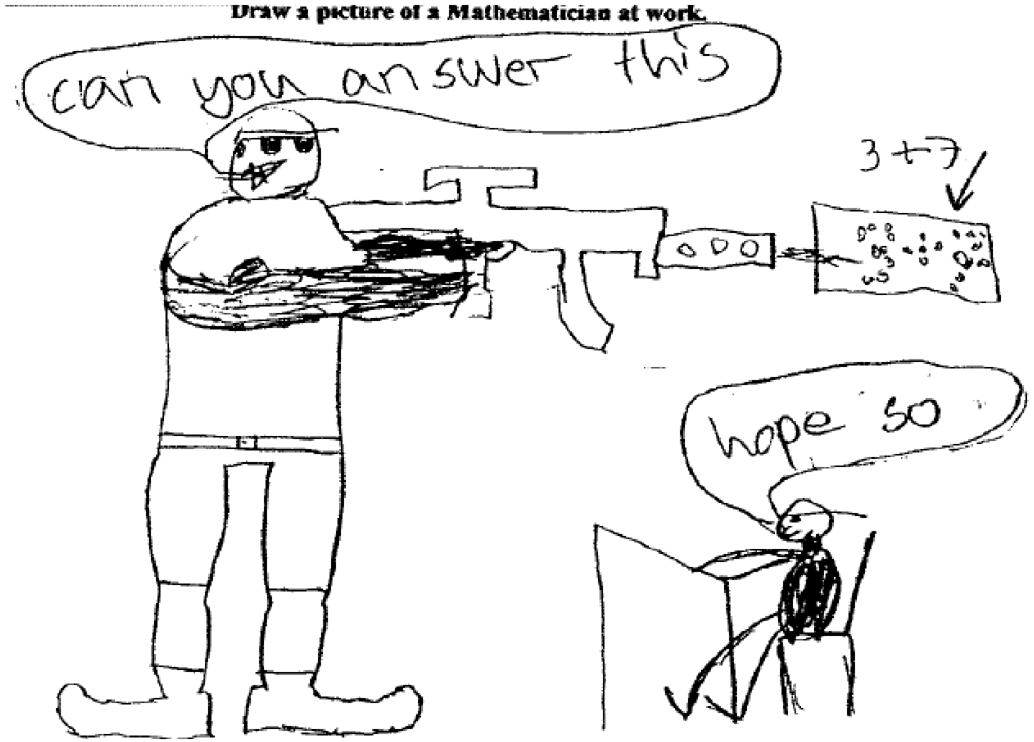


Figure 4. Sweden – male pupil.

Figure 3. Finland – male pupil.

5.1.1. *Mathematics as coercion*

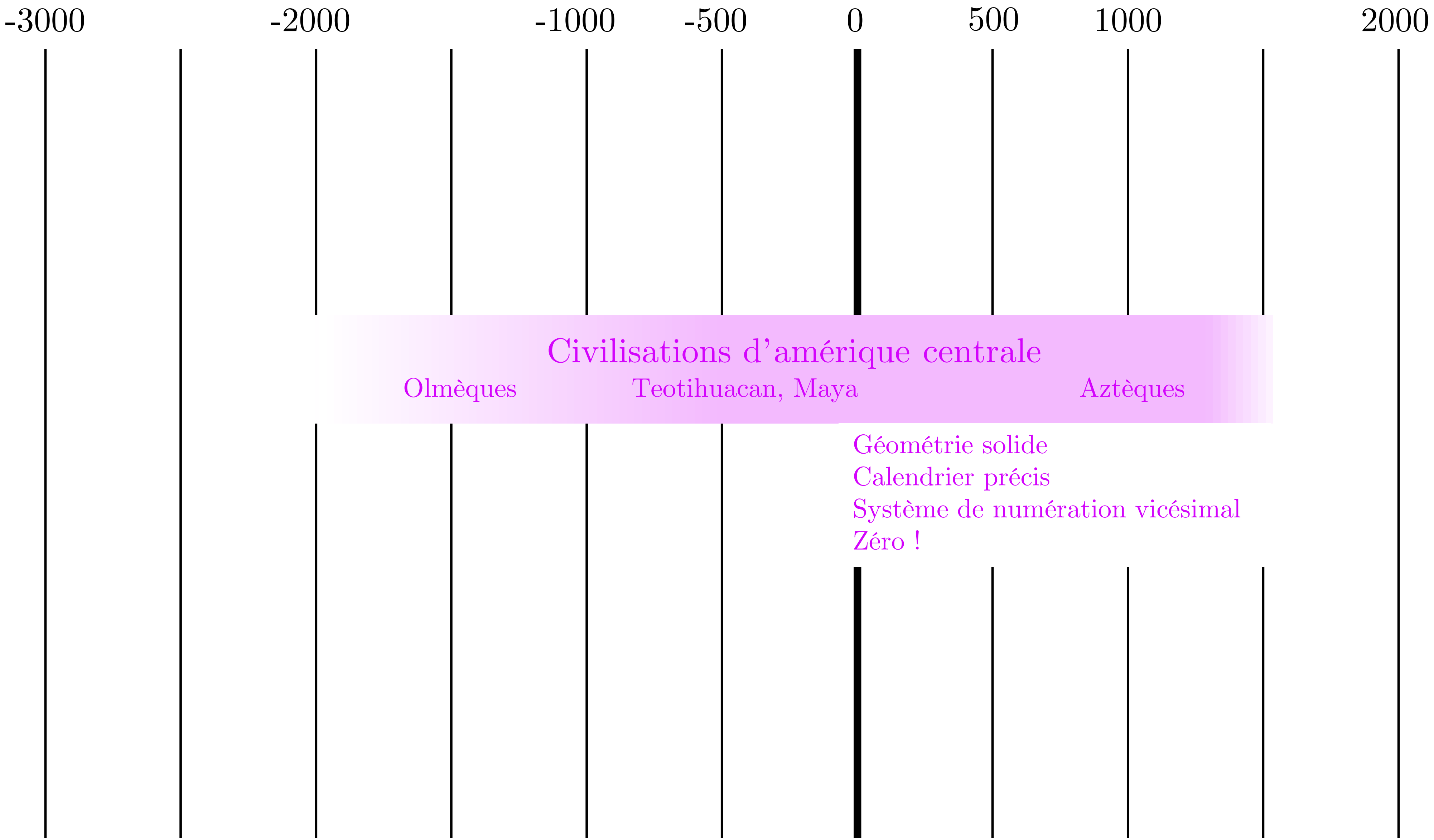
This first sub theme can be seen in two drawings from a school in Finland, and in drawings from Sweden, the United Stated and the United Kingdom. In each, the pupil has drawn a situation in which a large authority figure tries to intimidate someone smaller, sometimes with violence or threats of it.

Davis and Hersh (1981, p. 282) have illuminated the origin of this perception of powerlessness in the minds of students:

> Mathematical presentations, whether in books or in the classrooms, are often perceived as authoritarian and this may arouse resentment on the part of the student. Ideally, mathematical instruction says, "Come, let us reason together." But what comes from the mouth of the lecturer is often, "Look, I tell you this is the way it is." This is proof by coercion.

Les mathématiques, de l'antiquité à nos jours

- Je suis mathématicienne, pas historienne!
- Tout ceci est vu par le prisme de la culture occidentale – on a perdu beaucoup de choses sur l'histoire des mathématiques des autres civilisations.

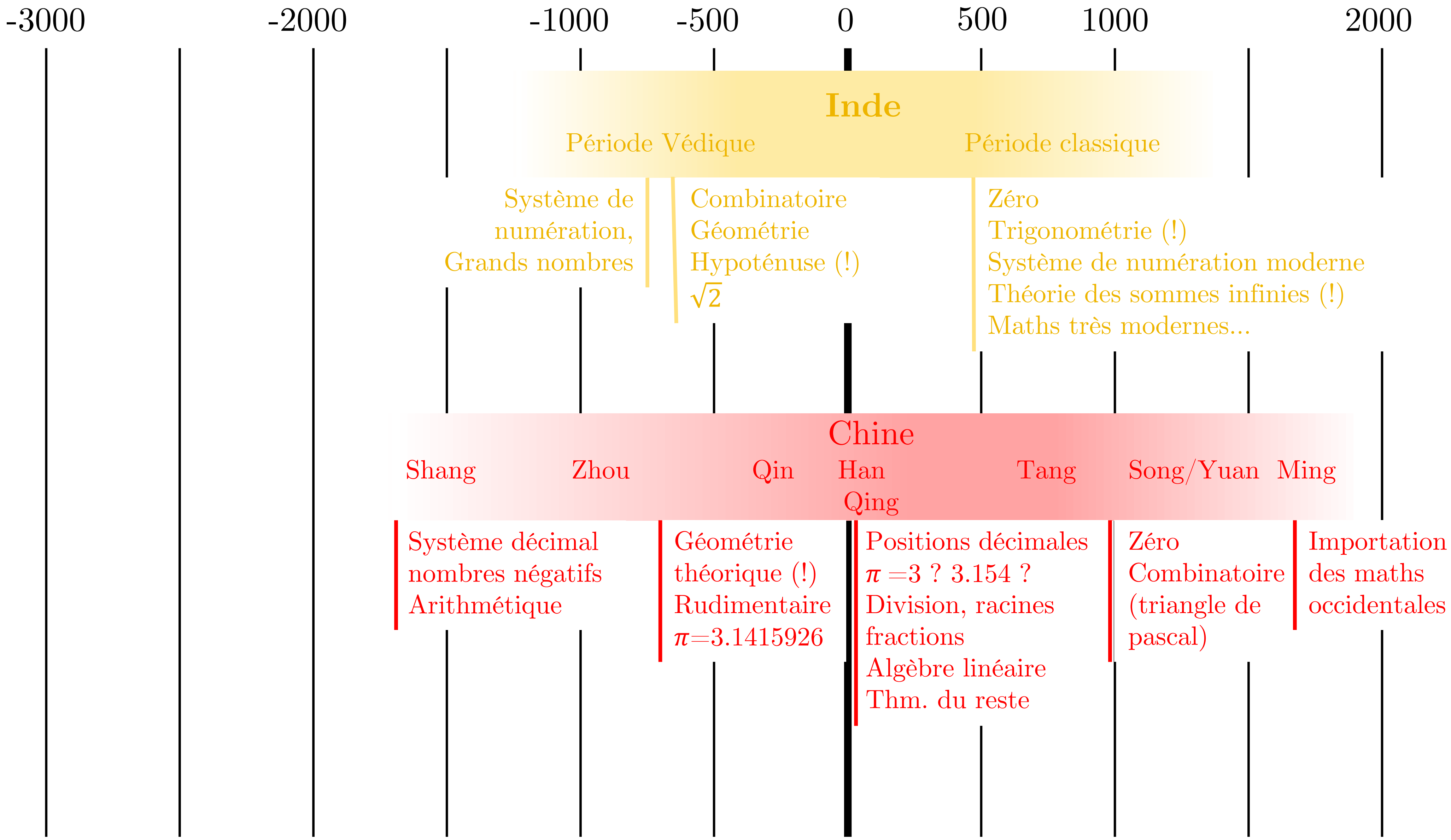

-3000
-2000
-1000
-500
0
500
1000
2000
Civilisations d'amérique centrale
Olmèques
Teotihuacan, Maya
Aztèques
Géométrie solide
Calendrier précis
Système de numération vicésimal
Zéro !

Amérique

?

Les Européens n'ont pas fait attention de préserver les traces et c'est très dur de savoir de quoi ça avait l'air...

Asie

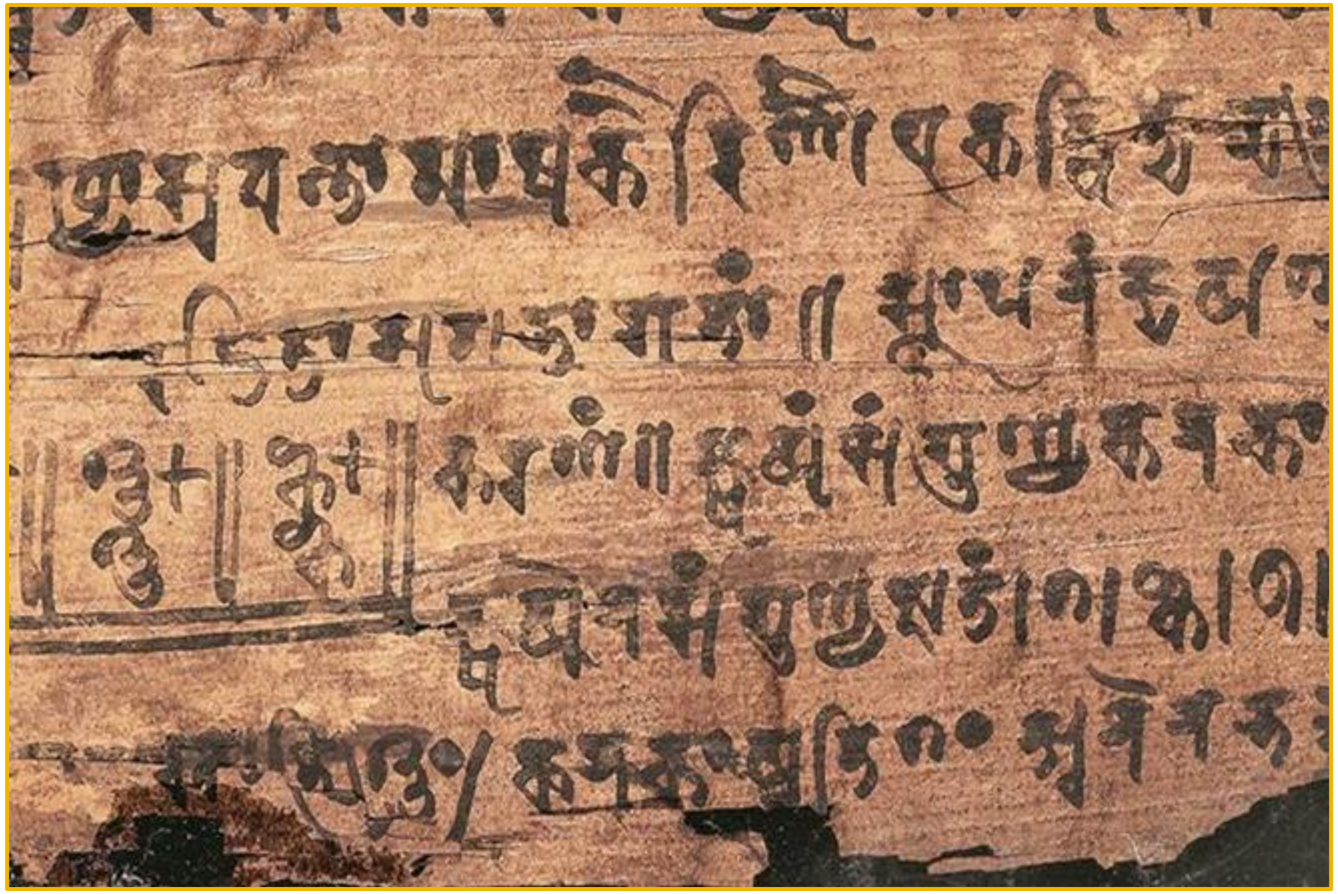

-3000
-2000
-1000
-500
0
500
1000
2000
Inde
Période Védique
Période classique
Système de numération, Grands nombres
Combinatoire
Géométrie
Hypoténuse (!)
√2
Zéro
Trigonométrie (!)
Système de numération moderne
Théorie des sommes infinies (!)
Maths très modernes...
Chine
Shang
Zhou
Qin
Han
Qing
Tang
Song/Yuan
Ming
Système décimal
nombres négatifs
Arithmétique
Géométrie théorique (!)
Rudimentaire
π=3.1415926
Positions décimales
π =3 ? 3.154 ?
Division, racines
fractions
Algèbre linéaire
Thm. du reste
Zéro
Combinatoire
(triangle de pascal)
Importation des maths occidentales

Les mathématiques en Inde

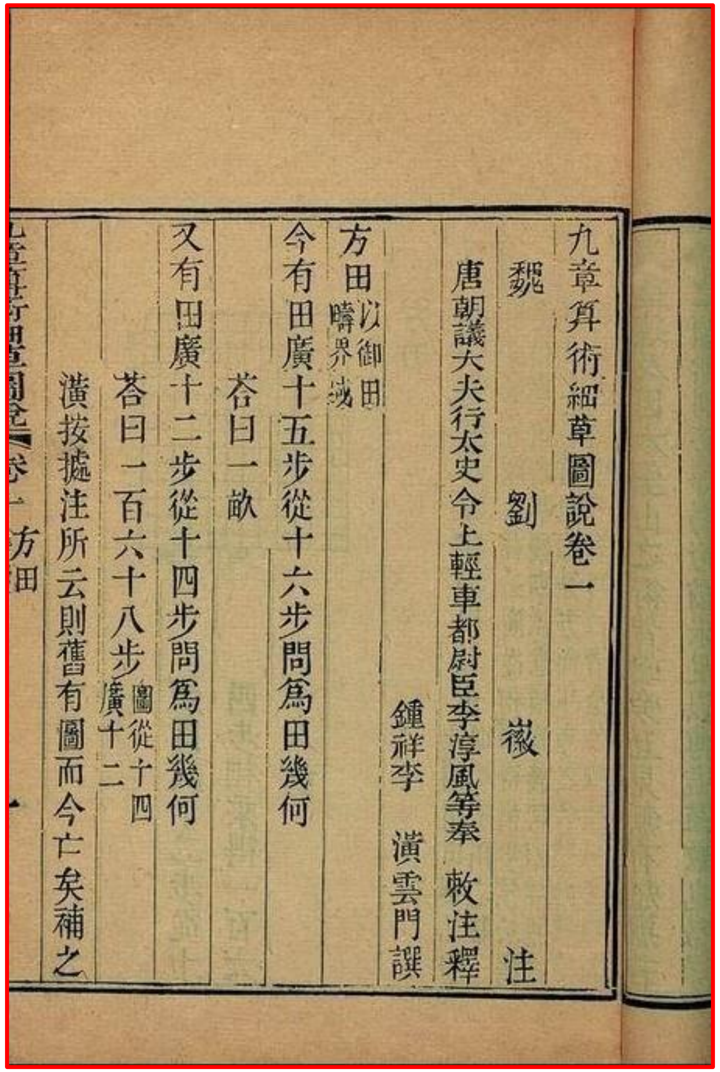
-800 à -200 : **Śulba-Sūtras**
règles pour la construction d'autels
Certaines connaissances géométriques
(Pythagore, par exemple)

IIe siècle av. J.C. : Pingala
Mathématicien qui découvre des notions d'analyse combinatoire.

De 400 à 1600 : Période classique
Développement de la trigonométrie
Développement du système de numération moderne (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
Début de calcul différentiel !



Manuscript Bakhshali
III-IVe siècles, Pakistan
Première apparition connue du zéro en Inde


九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問為田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問為田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

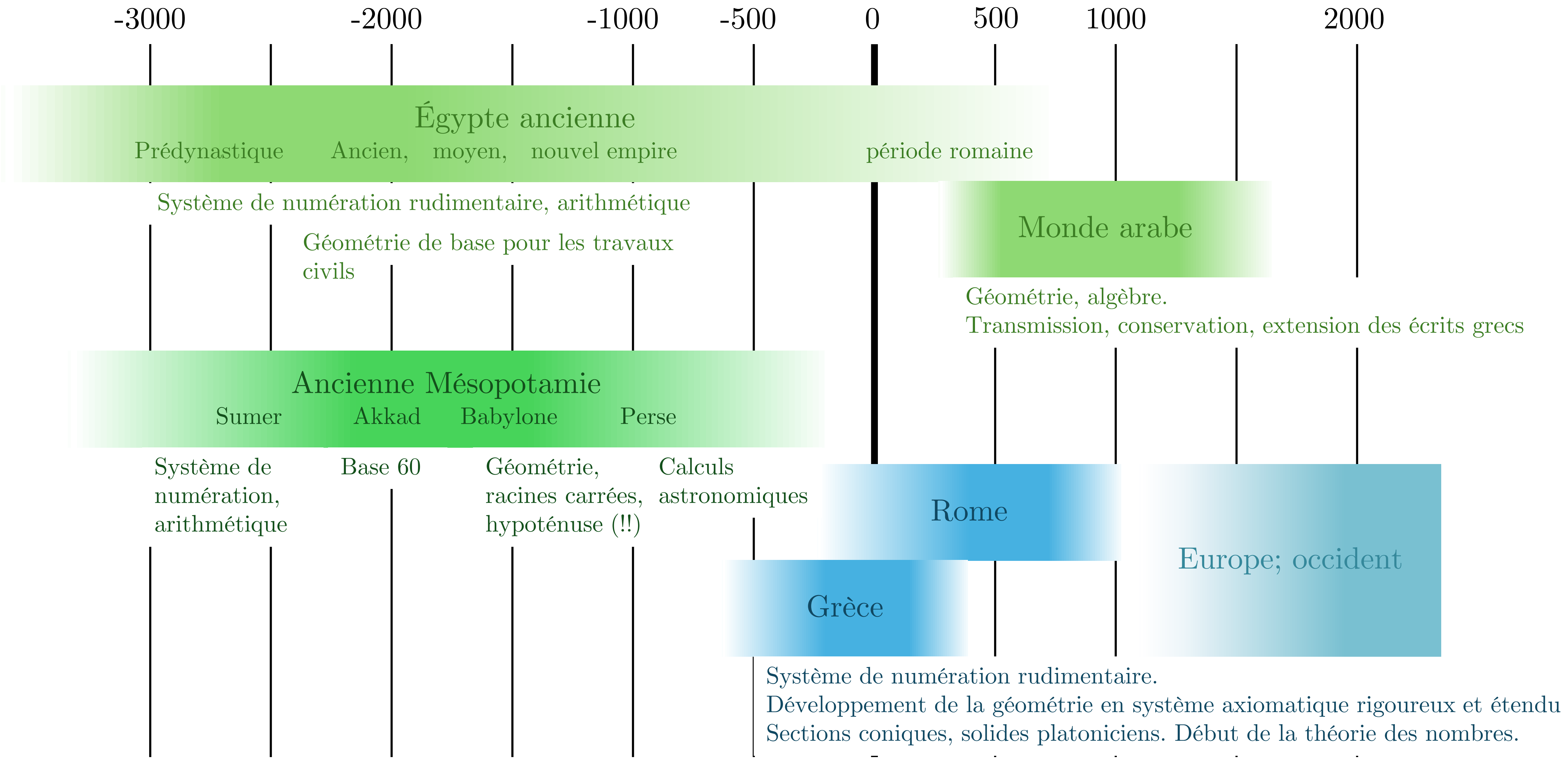
Les Neuf Chapitres sur l'art Mathématique
IIe-Ier siècles av. J.-C.
Traité mathématique de la dynastie Han

Les mathématiques en Chine

Ca. -200 : Le tyran Qin ordonne de brûler plusieurs livres
On ne sait donc pas grand-chose des maths avant ça.

Dynastie Han (environ -200 à 200)
Les Neuf Chapitres contiennent des problèmes d'arithmétique, géométrie, proportions, etc.
Début de l'algèbre linéaire

Xe-XIIIe siècles : progrès en trigonométrie, géométrie algébrique, théorie des nombres

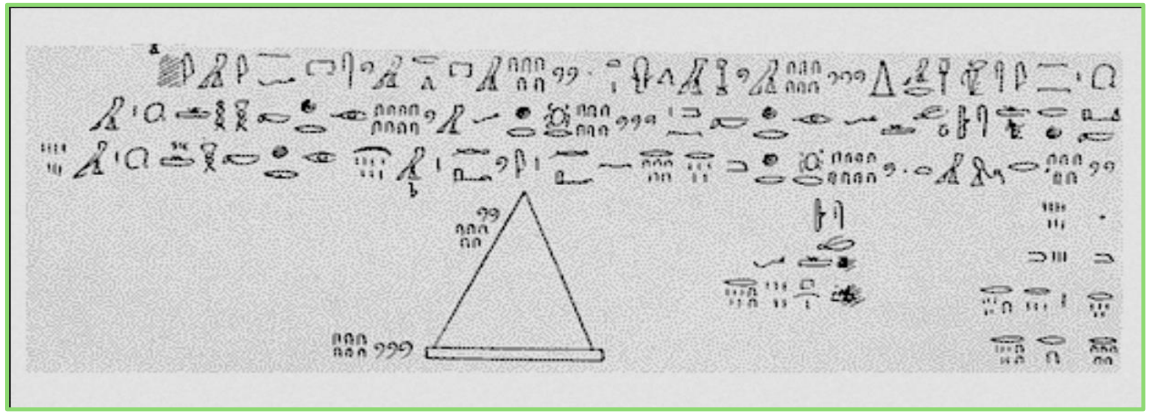


Europe, Méditerranée, moyen orient

Système de numération des anciens égyptiens :

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

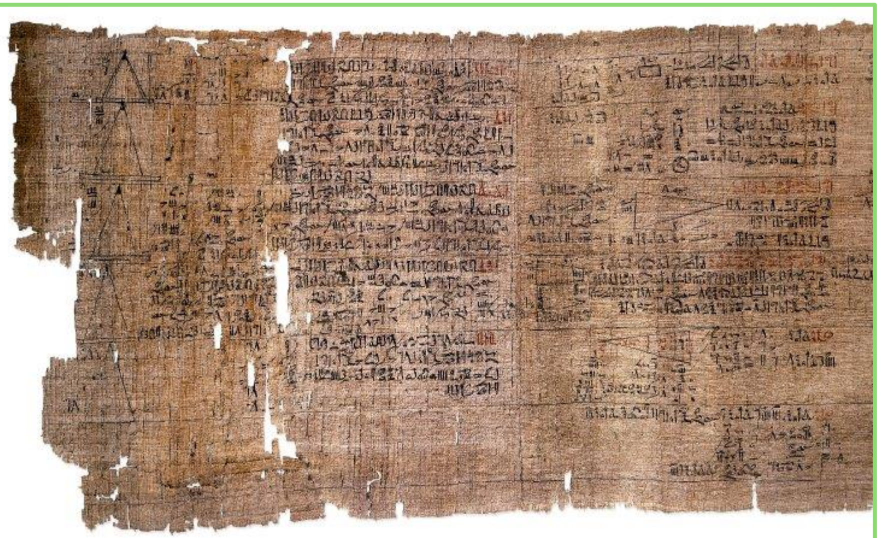
Système «additif» : on trace le symbole autant de fois qu'il faut pour obtenir la valeur désirée



Reproduction d'un extrait du Papyrus de Moscou

~ -1700 (XIIIe dynastie)

Les anciens égyptiens avaient un système de numération et une connaissance pratique de la géométrie.



Début du Papyrus Rhind

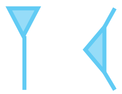
~ -1600 (Xve dynastie)

Système sexagésimal babylonien

 = 1

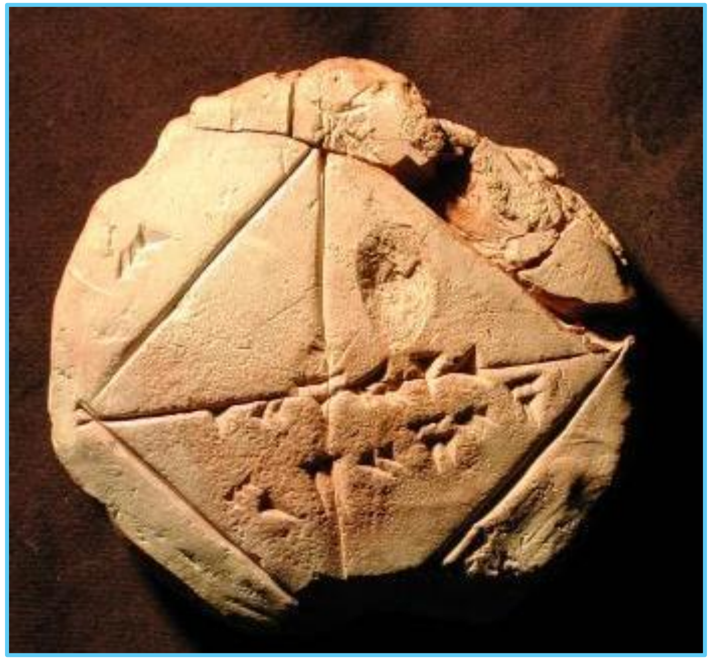
 = 10

Notation «additive» pour les chiffres de 1 à 59

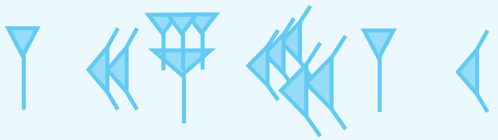
 = 70 (ou 70/60, ou 70 x 60, ou...)

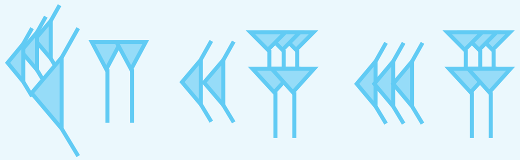
Valeurs par positionnement
Chaque chiffre vaut 60 fois plus que la position à sa droite.
Ambiguïté !

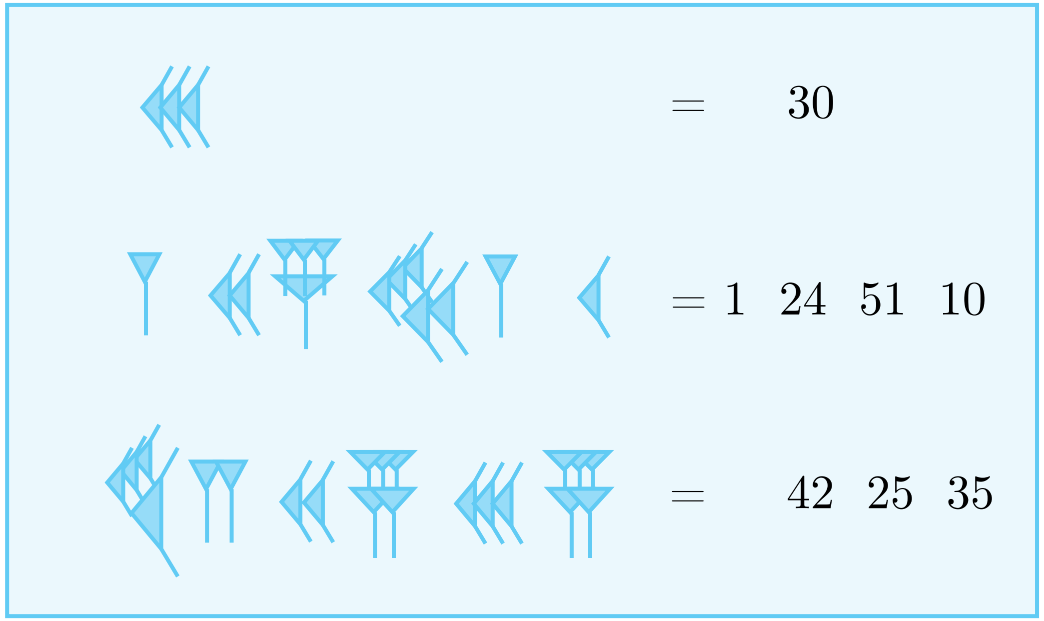
Tablette YBC 7289 :
Entre -1900 et -1600
Un carré, des diagonales et des nombres...



 = 30

 = 1 24 51 10

 = 42 25 35



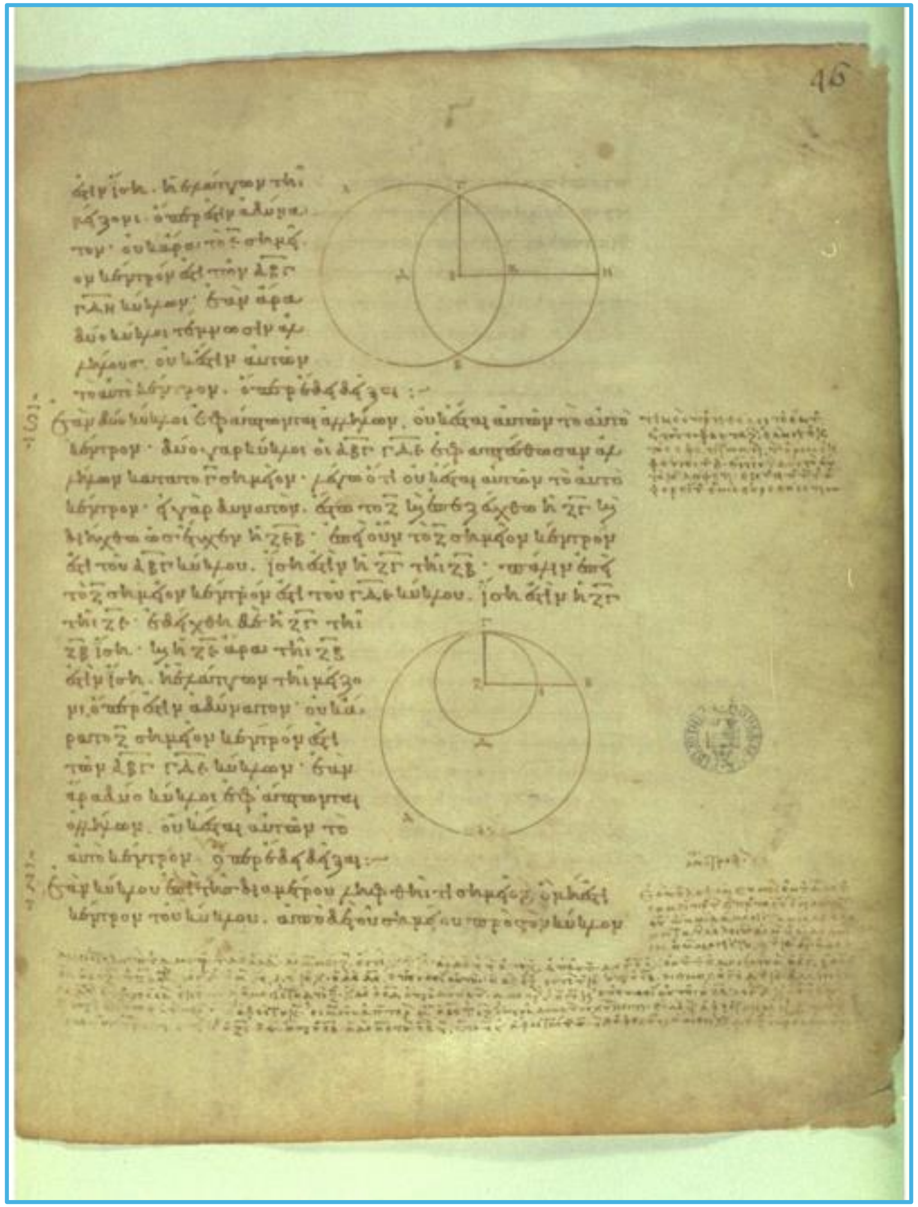
Conversion en notation décimale moderne

$$\boxed{1 \;\; 24 \;\; 51 \;\; 10 = 1 + 24/60 + 51/3\,600 + 10/216\,000 = 1{,}41421296}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356$$

$$\boxed{42 \;\; 25 \;\; 35 = 42 + 25/60 + 35/3\,600 = 42{,}4263889}$$

$$30 \text{ x } \sqrt{2} = 42{,}4264069$$

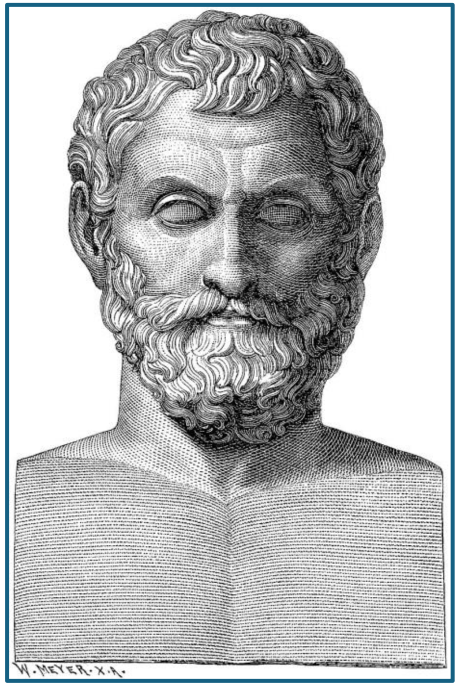


Mathématiques en grèce

Système de numération similaire à celui des romains (I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, etc.)

Géométrie très développée

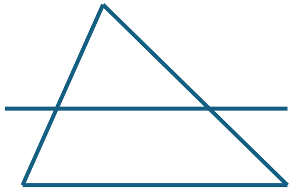
Manuscrit D'Orville
Constantinople, 888
Aujourd'hui à la Bodleian Library
Propositions 5 à 7 du Livre III
Les treize livres des Éléments d'Euclide

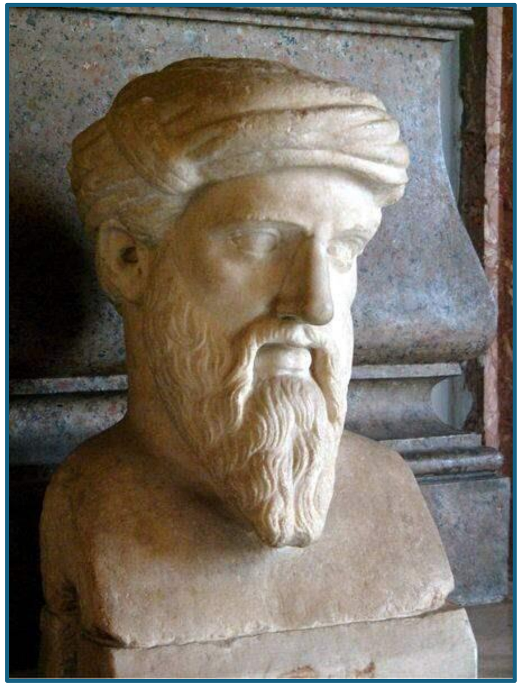


Thalès de Milet

~-625 à ~-547

Théorème de Thalès

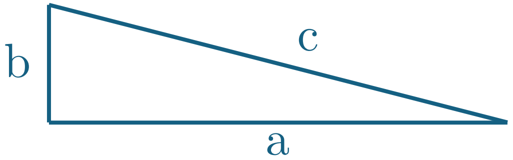




Pythagore

~ -580 à ~ -495

« $a^2 + b^2 = c^2$ »



Théétète d'Athènes

c. -417 à c. -391 ou -369 (incertain)

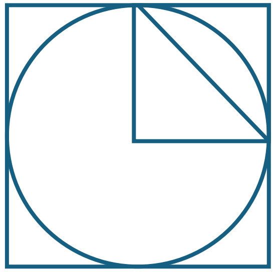
Théorèmes et constructions de nombres irrationnels.

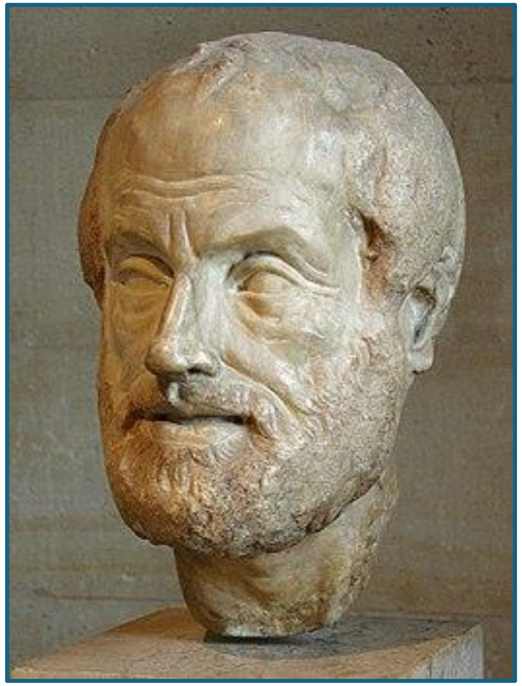
Ami de Platon et Socrate (Platon a écrit un dialogue sur lui !)

Eudoxe de Cnide

c. -380 à c. -337

Plusieurs théorèmes sur les aires, les volumes et les proportions





Aristote

-384 à -322

Déduction logique

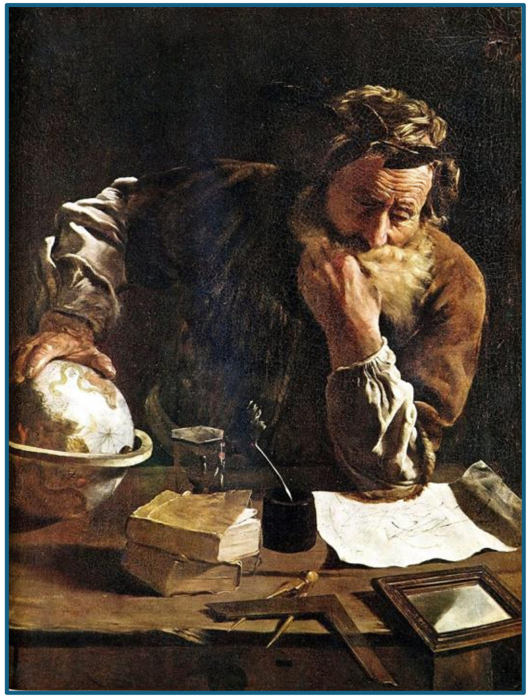
$$p \supset q$$
$$q \supset r$$
$$\Rightarrow p \supset r$$

?

Euclide

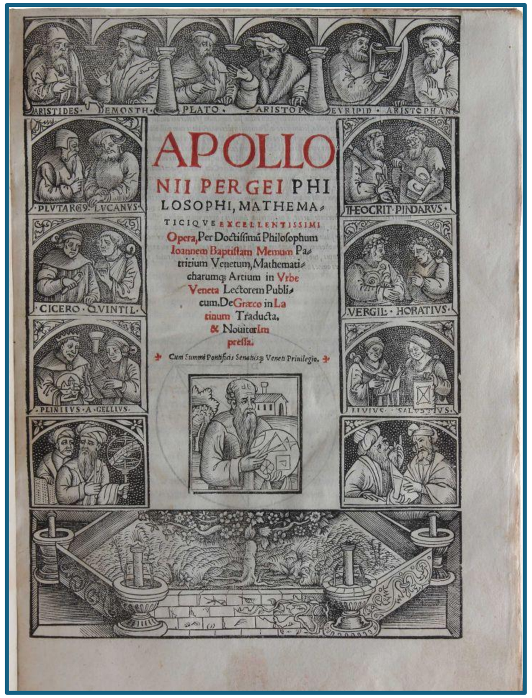
~ - 300 ?????

Les Éléments

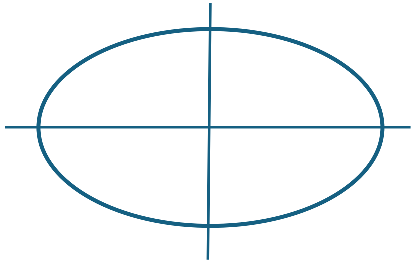


Archimède
-287 à -212
Spirale d'Archimède
Méthode d'exhaustion
Approximation de pi
Eurêka!

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$


APOLLO
NII PERGEI PHI
LOSOPHI, MATHEMA-
TICIQVE EXCELLENTISSIMI
Opera, Per Doctissimū Philosophum
Ioannem Baptistam Memum Pa-
tritium Venetum, Mathemati-
charumq; Artium in Vrbe
Veneta Lectorem Publi-
cum. De Græco in La
tinum Traducta.
& Nouiter Im
pressa.
Cum Summi Pontificis Senatusq; Veneti Priuilegio.

Apollonios de Perga
Fl. -200
Étudie les sections coniques



• • •

Progrès des mathématiques dans le monde arabe

Conservation et traduction en arabe des œuvres grecques

Développements importants de **l'Algèbre** (Al-Jabr)

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison
Bagdad, IXe siècle, Al-Khwarizmi

Quelques références

- *Plofker, Kim (2009), Mathematics in India: 500 BCE–1800 CE, Princeton, NJ: Princeton University Press*
- *Katz, Victor (2007), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam : A Sourcebook*, Princeton, NJ : Princeton University Press
- *Boyer, Carl B. (1968). A History of Mathematics. New York, United States: John Wiley & Sons.*

La renaissance, les lumières et le retour aux grecs

Grand regain d'intérêt pour l'antiquité en Europe

Utilisation des sources arabes et de sources anciennes préservées.

Les Éléments deviennent le manuel scolaire de géométrie par excellence partout à travers l'occident pendant plusieurs siècles.

RENATI DES CARTES

PRINCIPIORUM PHILOSOPHIÆ

Pars I, & II,

More Geometrico demonstratæ

PER

BENEDICTUM de SPINOZA *Amstelodamensem.*

Accesserunt Ejusdem

COGITATA METAPHYSICA,

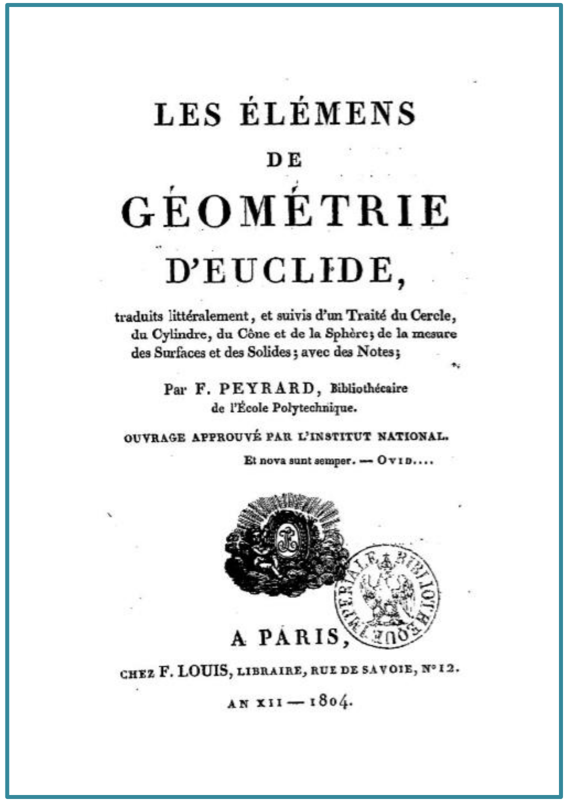
In quibus difficiliores, quæ tam in parte Metaphysices generali, quàm speciali occurrunt, quæstiones breviter explicantur.

C A

AMSTELODAMI,

Apud JOHANNEM RIEWERTS, *in vico vulgò dicto*, de Dirk van Assen-steeg, *sub signo Martyrologii.* 1663.

Principiorum philosophiæ
Par Baruch Spinoza



LES ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE

D'EUCLIDE,

traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides; avec des Notes;

Par F. PEYRARD, Bibliothécaire de l'École Polytechnique.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT NATIONAL.

Et nova sunt semper. — OVID....

A PARIS,

CHEZ F. LOUIS, LIBRAIRE, RUE DE SAVOIE, N° 12.

AN XII — 1804.

Les Éléments de géométrie d'Euclide
XIXe siècle – via *Gallica.*

L'influence d'Euclide sur les mathématiques modernes

L'approche **systématique** d'Euclide est très appréciée par les penseurs des Lumières (Newton, Voltaire, Gauss, Euler, Riemann, etc.)

Cette méthode se perpétue encore aujourd'hui; c'est **la seule** façon de faire des mathématiques dans le monde académique contemporain.

$*54{\cdot}43$. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

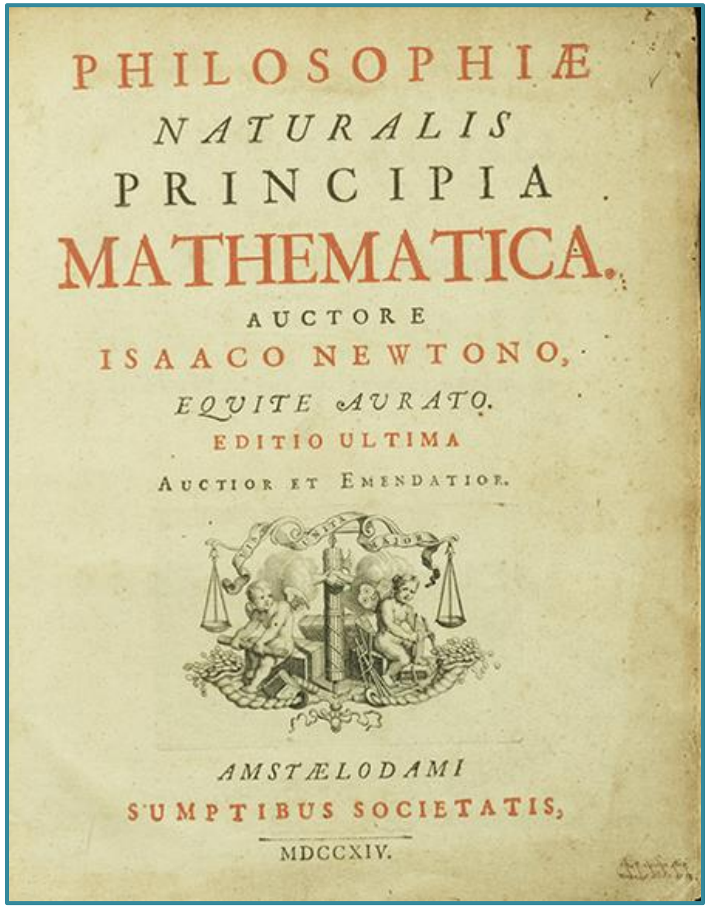
$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Principia mathematica
L'œuvre phare de Whitehead et Russel (1910, Londres)



Philosophiæ naturalis principia mathematica
L'œuvre phare de Sir Isaac Newton (1686, Londres)

We also introduce the variable $l(n,t)$ for the last n-long regeneration period started before time t :

$$l(n,t) = \max\left\{i \in \mathbb{N} : \tau_{\delta_i(n)-1} \leq t\right\}. \tag{4.1.3}$$

Again, at the scale of elapsed time t, we will mostly be concerned with $l(u) := l(t^{\alpha}, u)$, and specifically $l(t) = l(t^{\alpha}, t)$.

Questions of interest will now be to determine :

- how big is $\delta_{l(t)}$?
- how big is $l(t)$?

We will begin by providing an important estimate for $\delta_{l(t)}$: that in probability under $\mathbb{P}_0^K$ as t tends to infinity, $\delta_{l(t)} \ll t^{\gamma+\zeta}$ for any $\zeta > 0$.

Lemma 4.1. *As t goes to infinity, for all K larger than some K_0, we must have that for any $\zeta > 0$, $\delta_{l(t)} \ll t^{\gamma+\zeta}$ in probability under $\mathbb{P}_0^K$, and $\delta_{l(t)+1} \gg t^{\gamma-\zeta}$; specifically, for any $\eta > 0$:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\delta_{l(t)} > \eta t^{\gamma+\zeta}\right\} = 0. \tag{4.1.4}$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\delta_{l(t)+1} > \eta t^{\gamma-\zeta}\right\} = 1. \tag{4.1.5}$$

Proof. For some $\zeta, \eta > 0$, we choose $\eta_0 = \eta/2$ and $n(t) = \eta_0 t^{\gamma+\zeta}$; then, we know from Lemma 3.7 that :

$$\mathrm{Inv}(n(t)) = \eta_0^{\frac{1}{\gamma}} f(\eta_0 t^{\gamma+\zeta}) t^{1+r},$$

where $r = \zeta/\gamma$ and f is a slowly varying function.

From this, we have :

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\tau_{n(t)} > t\right\} &= \liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\frac{\tau_{n(t)}}{\mathrm{Inv}(n(t))} > \frac{t}{\mathrm{Inv}(n(t))}\right\} \\
&= \liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{C_\infty S_\gamma > \frac{\eta_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{f(\eta_0 t^{\gamma+\zeta}) t^r}\right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

But by definition of $l(t)$, we must always have $\tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t$; hence we have

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t < \tau_{n(t)}\right\} = 1,$$

which must guarantee

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0^K\left\{\delta_{l(t)} - 1 < n(t)\right\} = 1,$$

because the (τ_t) are a strictly increasing sequence. This is simply

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_o^K\left\{\delta_{l(t)} < (\eta_0 + t^{-\gamma-\zeta}) t^{\gamma+\zeta} < \eta t^{-\gamma-\zeta}\right\} = 1,$$

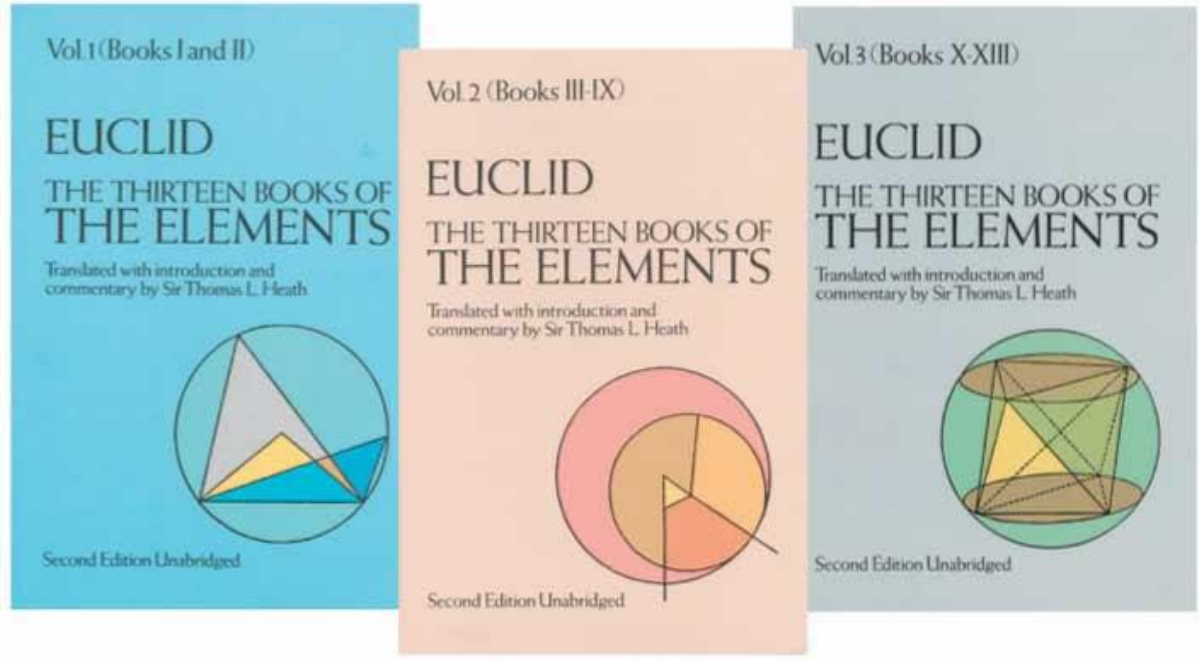
Vieillissement pour les marches aléatoires en milieux aléatoires : phénoménologie et étude de cas

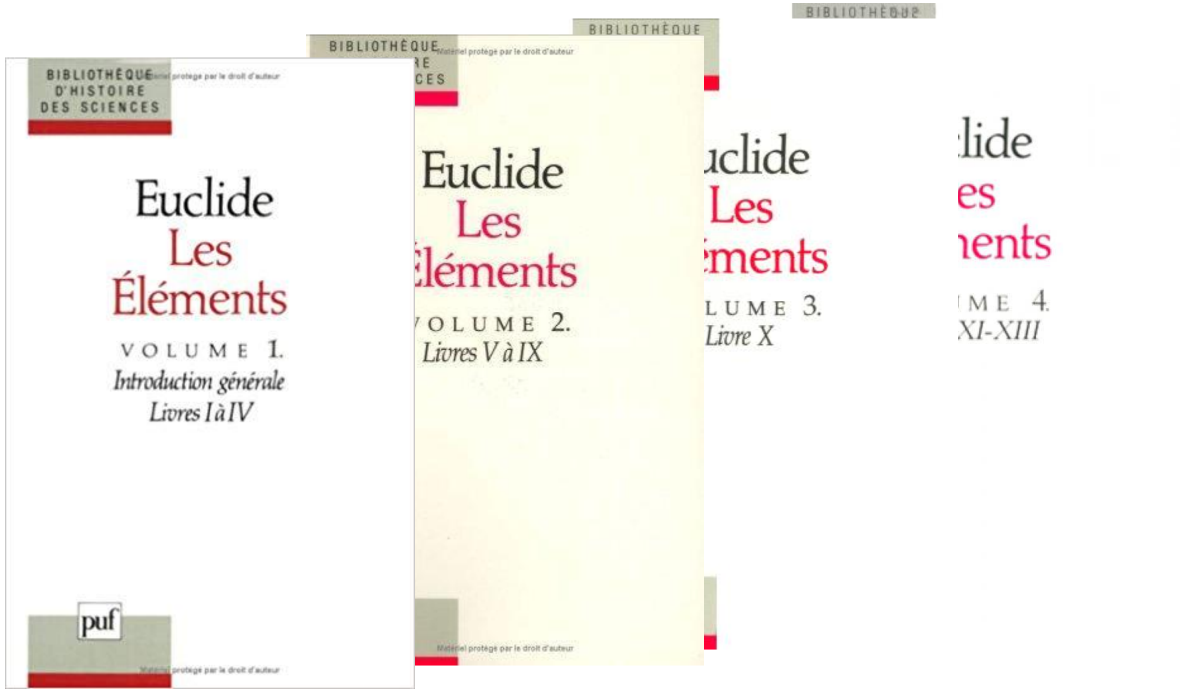
Élise Davignon, 2023

Les Éléments

Traductions

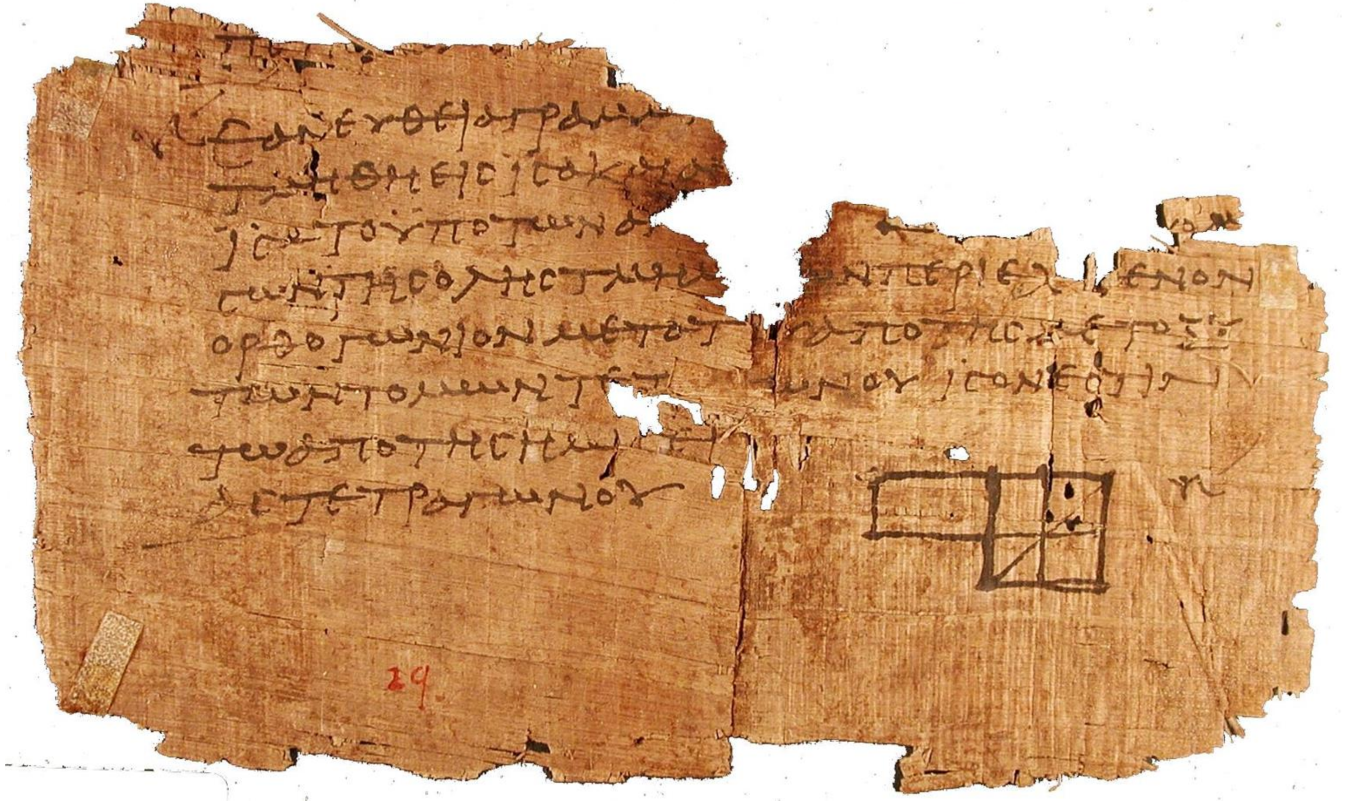
- **En anglais :** Thomas L. Heath (1908, seconde édition en 1925, republié chez Dover en 1956)
- **En français :** Bernard Vitrac (1990), aux presses universitaires de France.





Sources

- Manuscrits
  - Bas moyen-âge (500-1000);
  - Traductions en latin, en arabe.
  - Traductions plus récentes (renaissance) en allemand, anglais, français, etc.
- Commentaires
  - Principalement par Proclus (IIe siècle A. D.)



Le papyrus d'Oxyrhynque no. 29 – un extrait des *Éléments* (Livre II, prop. 5). ~ 100 A.D. Découvert en 1897

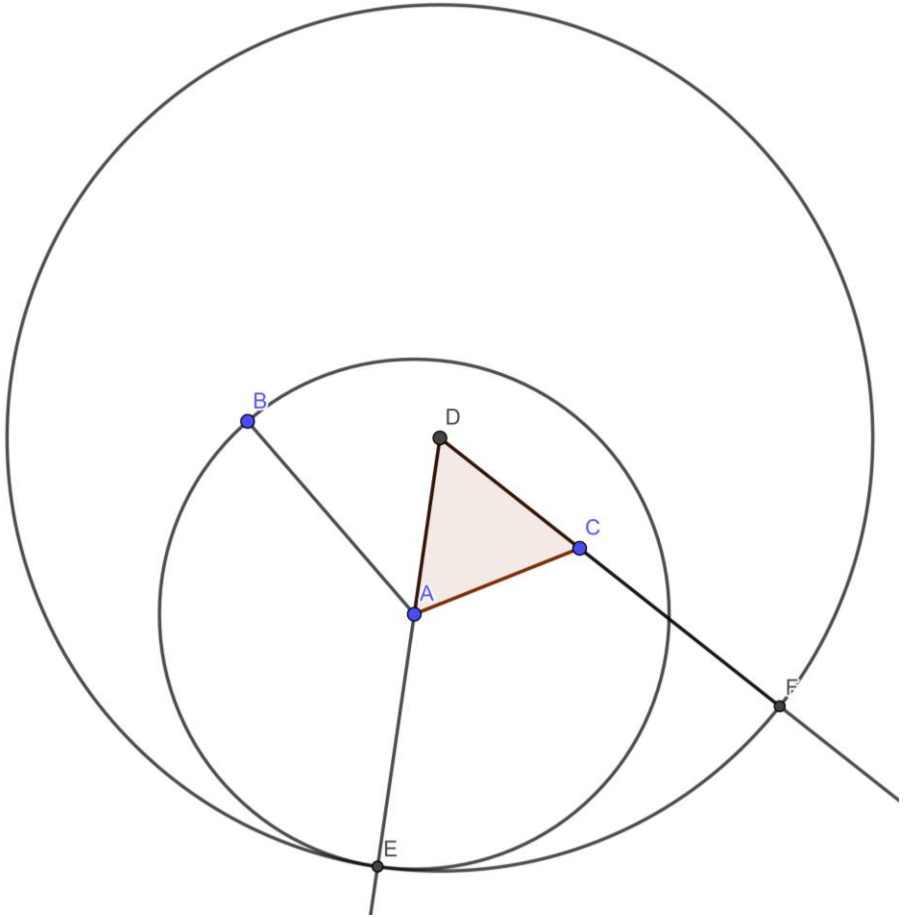
Ce que *Les Éléments* ont de spécial

- L'approche pratique

  Résoudre des problèmes

- L'approche philosophique

  Développer un système de raisonnement déductif



structure des *Éléments*

livres

préambule

contenu

définitions

demandes

notions communes

propositions

les demandes seraient aujourd'hui appelées « postulats » ou « axiomes ».

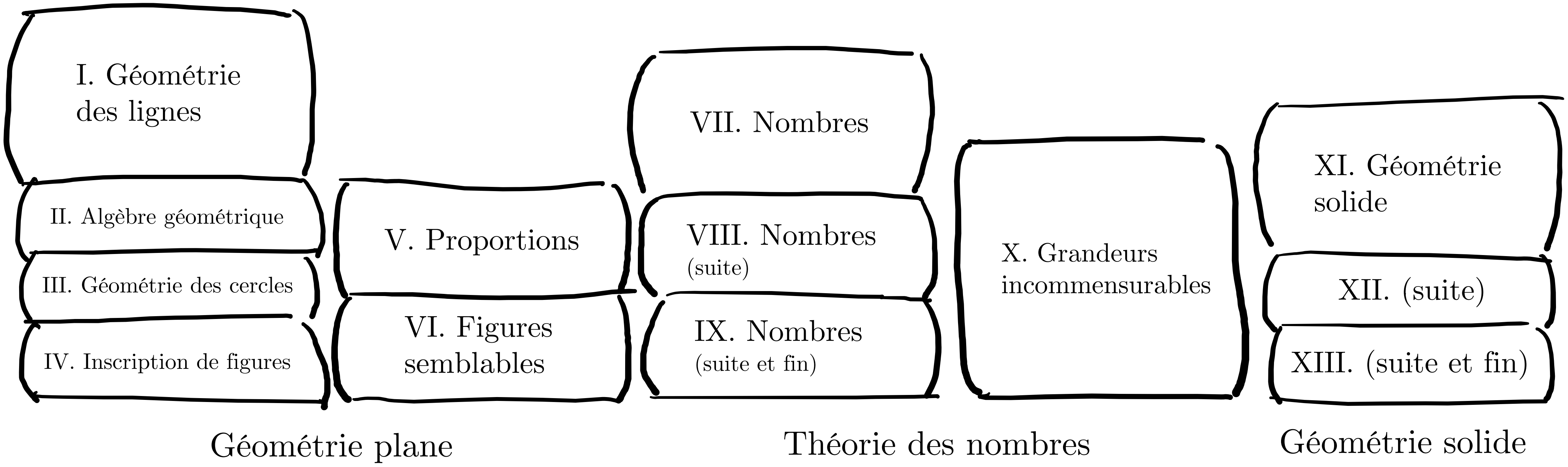
les notions communes sont des postulats d'ordre général.

énoncé

démonstration

les démonstrations sont conduites rigoureusement par la logique d'Aristote.

Les livres et leurs contenus



Là on va se salir les mains un peu ! ...

Livre I

livre I – Définitions

I.1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.

livre I – Définitions

I.1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.

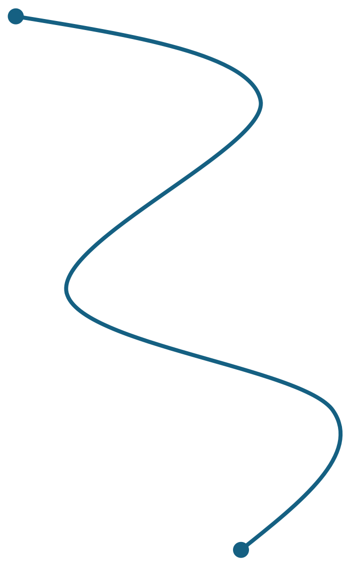
Quel est l'objet d'étude ici ?

(a) Le monde matériel.

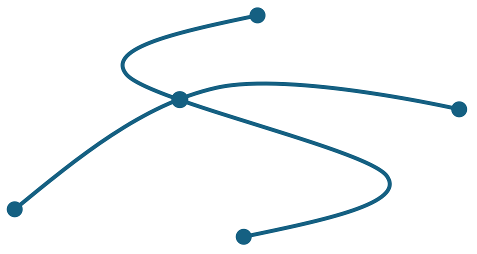
(b) Un espace géométrique abstrait

livre I – Définitions

I.2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.
I.3. Les limites d'une ligne sont des points.

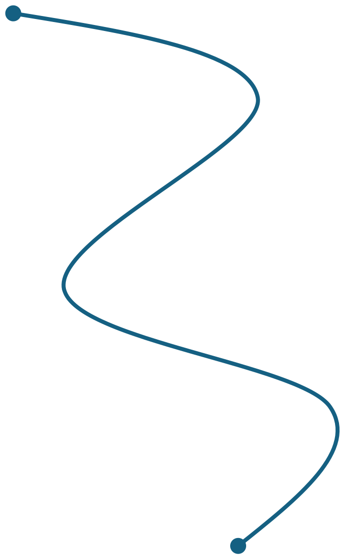


3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.



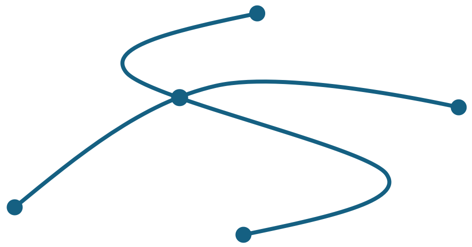
livre I – Définitions

Ça veut dire quoi ?



I.2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.
I.3. Les limites d'une ligne sont des points.

3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.



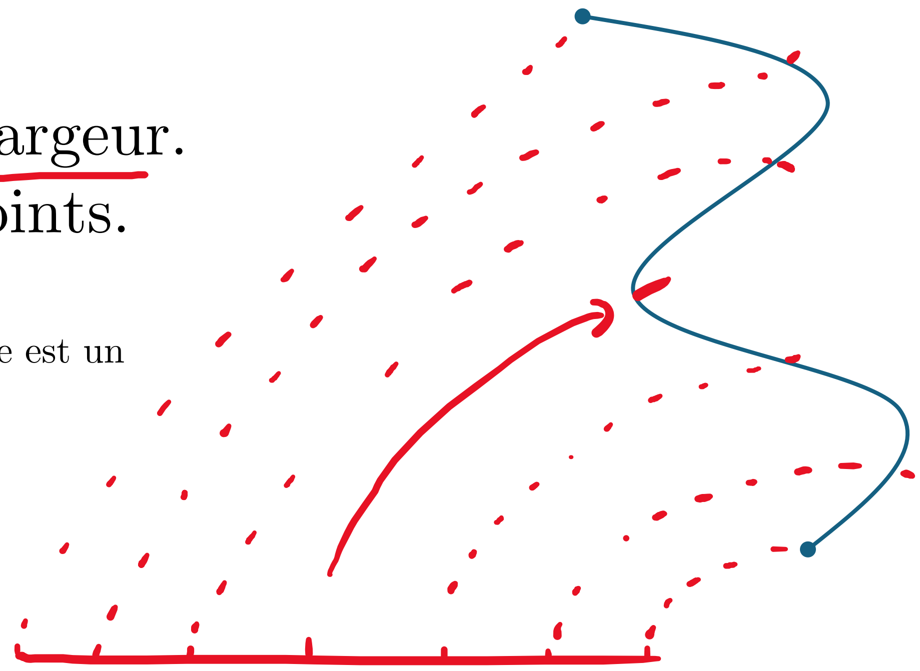
livre I – Définitions modernes.

courbe

variété de dimension 1

I.2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.

I.3. Les limites d'une ligne sont des points.

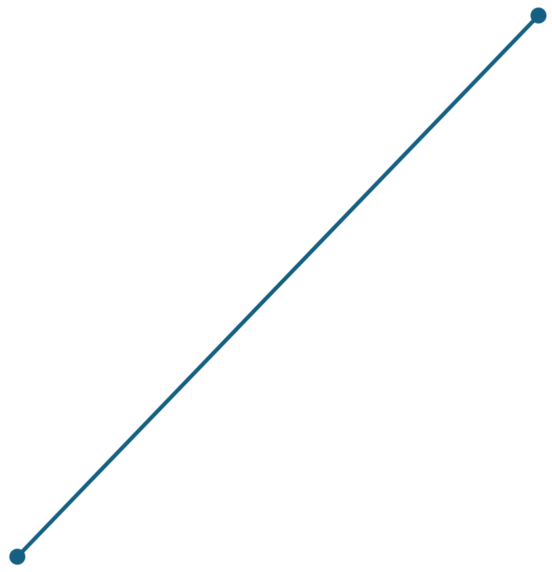


carte : 1 dimension

3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.

livre I – Définitions

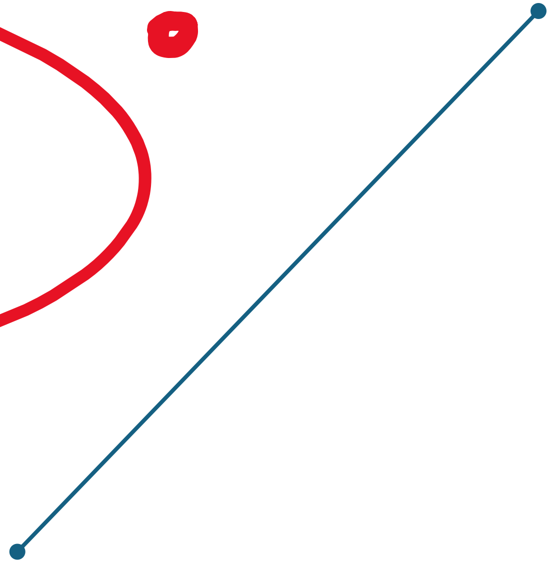
I.4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.



livre I – Définitions

?

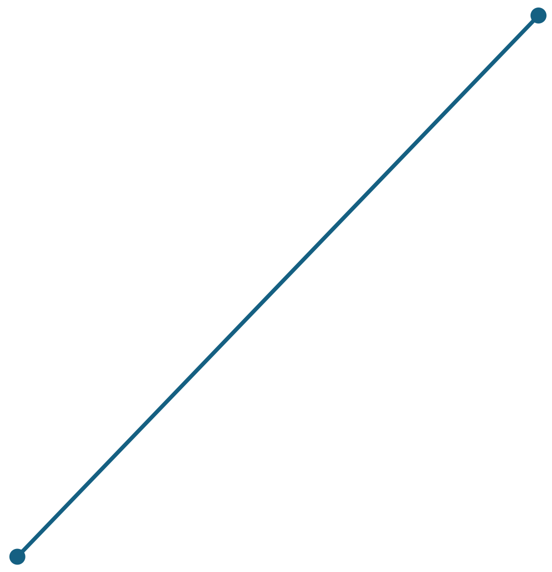
I.4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.



faites mieux, voir !

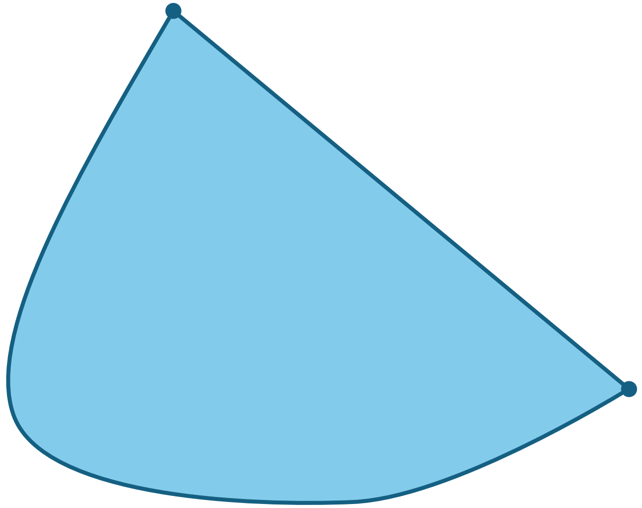
livre I – Définitions

I.4. Une **ligne droite** est celle ~~qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle~~. que si t'en as deux tu peux pas faire une figure fermée avec (????)



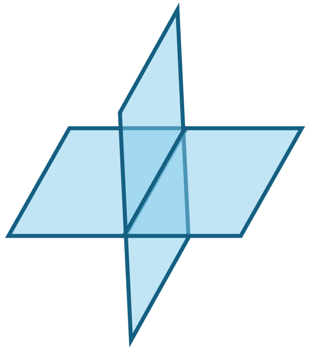
livre I – Définitions

I.5. Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur.
I.6. Les **limites d'une surface** sont des lignes.
I.7. Une **surface plane** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles.*



6'. L'intersection de deux surfaces qui n'ont aucune partie commune est une ligne.

Ça n'a pas d'importance en 2D...



livre I – Définitions

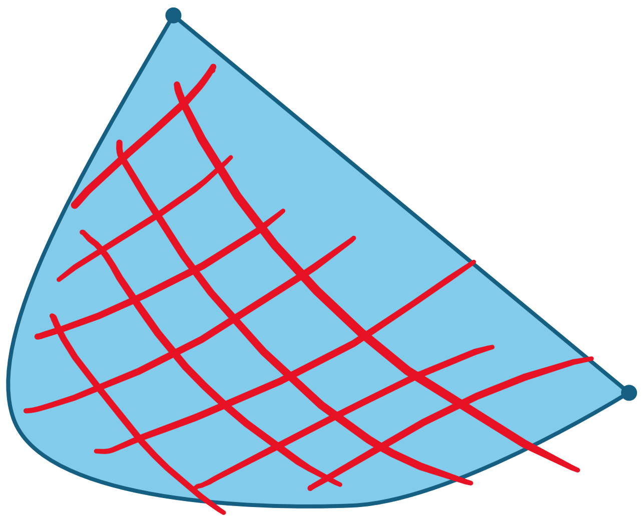
Variété de dim. 2 !

I.5. Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur.

I.6. Les **limites d'une surface** sont des lignes.

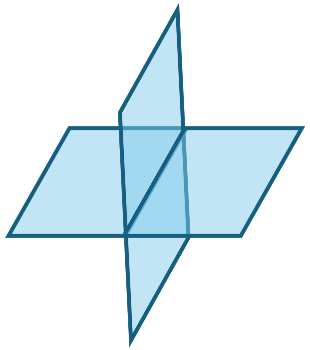
I.7. Une **surface plane** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles.*

carte (2 d.)



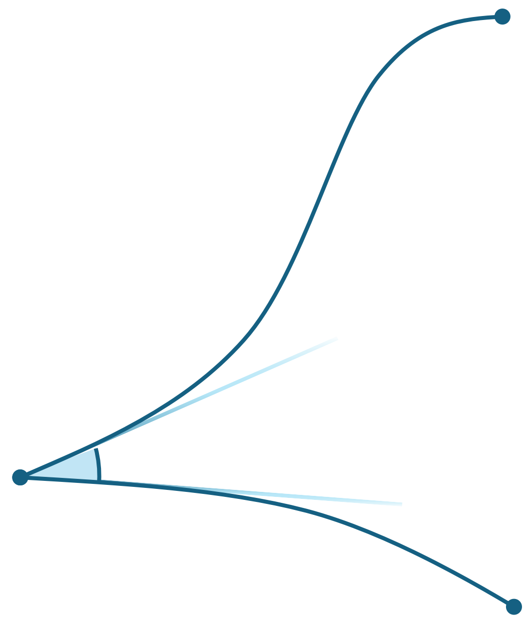
6'. L'intersection de deux surfaces qui n'ont aucune partie commune est une ligne.

Ça n'a pas d'importance en 2D...

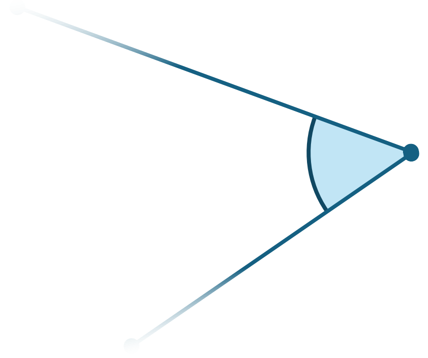


livre I – Définitions

I.8. Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.

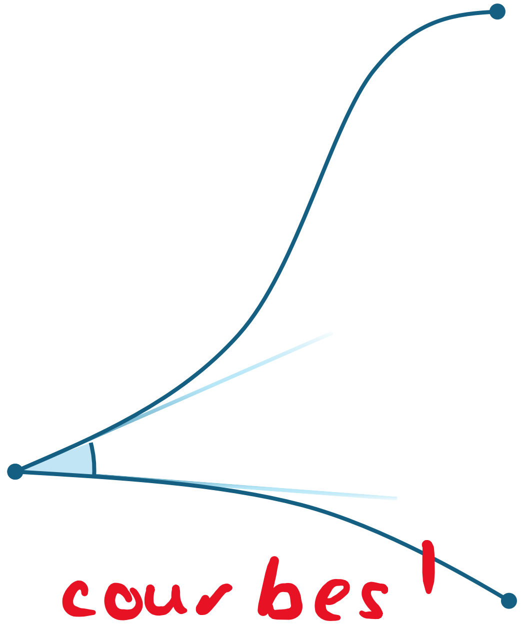


I.9. Et quand ces lignes sont droites, l'angle est appelé **rectiligne**.

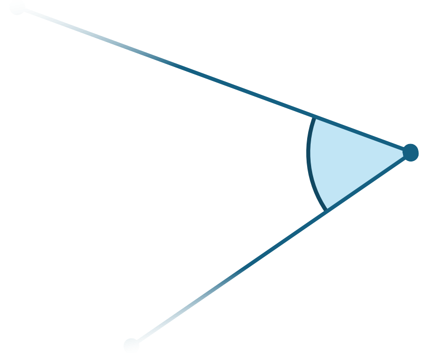


livre I – Définitions

I.8. Un **angle plan** est l’inclinaison, l’une sur l’autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l’une l’autre et ne sont pas placées en ligne droite.
I.9. Et quand ces lignes sont droites, l’angle est appelé **rectiligne**.



Angles courbes !

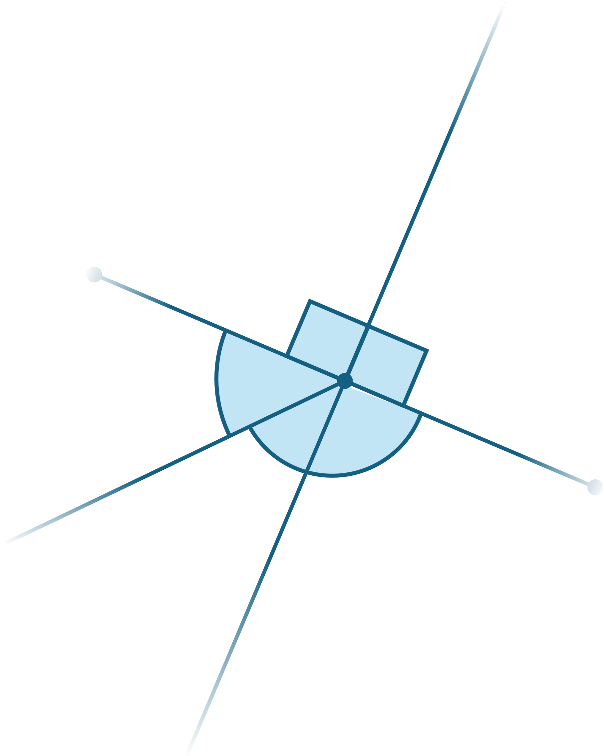


livre I – Définitions

I.10. Et quand une droite ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles est **droit** et la droite qui a été élevée est appelée **perpendiculaire** à celle sur laquelle elle a été élevée

I.11. Un angle **obtus** est celui qui est plus grand qu'un droit.

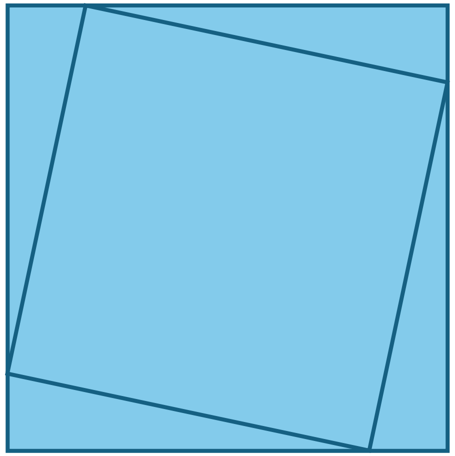
I.12. Un angle **aigu** est celui qui est plus petit qu'un droit.



livre I – Définitions

I.13. Une **frontière** est ce qui est limite de quelque chose

I.14. Une **figure** est ce qui est contenu par quelque(s) frontière(s).



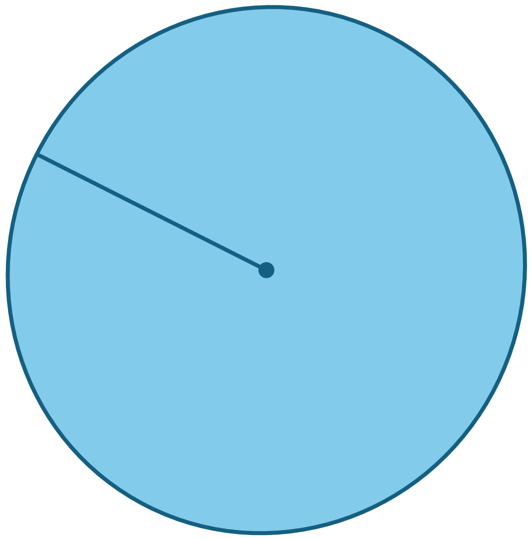
livre I – Définitions

I.15. Un **cercle** est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée **circonférence**) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

I.16. Et le point est appelé **centre** du cercle.

I.17. Et un **diamètre** du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

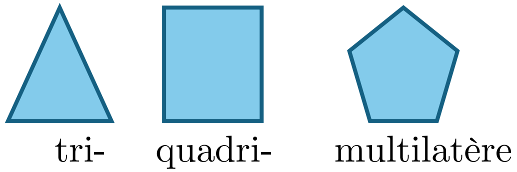
I.18. Un **demi-cercle** est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.



livre I – Définitions

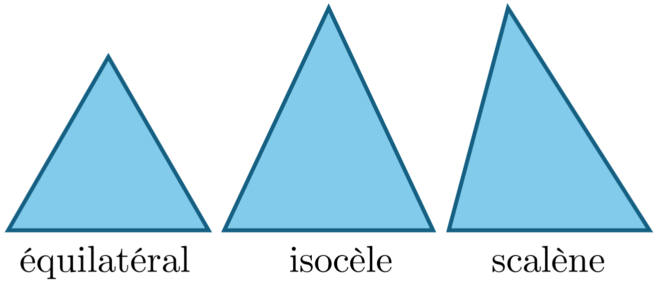
I.19. Les **figures rectilignes** sont les figures contenues par des droites;

trilatères : celles qui sont contenues par trois droites;
quadrilatères : celles qui sont contenues par quatre droites;
multilatères : par plus de quatre.



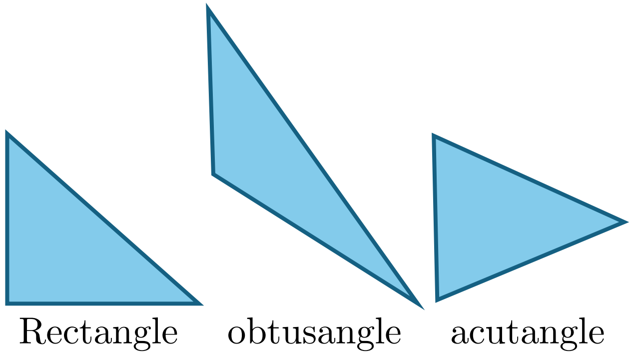
I.20. Parmi les figures trilatères est

un **triangle équilatéral** celle qui a les trois côtés égaux;
isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement;
scalène celle qui a les trois côtés inégaux.



I.21. De plus, parmi les figures trilatères est

un **triangle rectangle** celle qui a un angle droit;
obtusangle celle qui a un angle obtus;
acutangle celle qui a les trois angles aigus.



livre I – Définitions

I.22. Parmi les figures quadrilatères, est

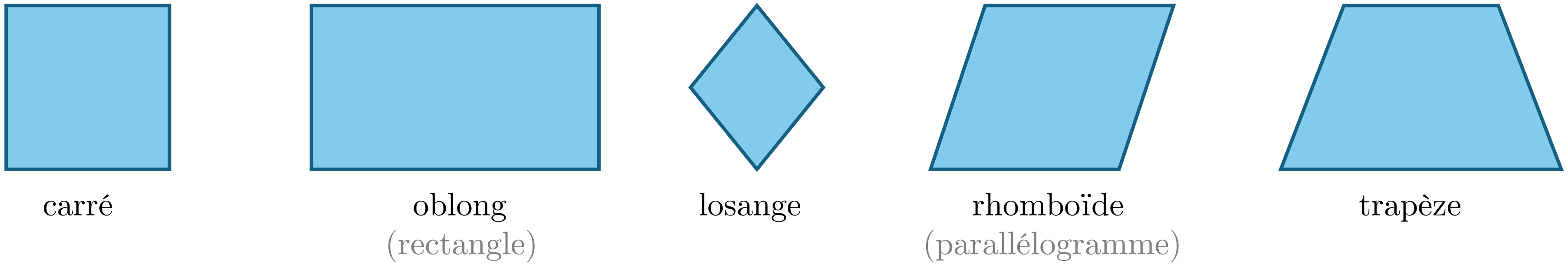
un **carré** celle qui est à la fois équilatérale et rectangle;

est **oblongue** celle qui est rectangle mais non équilatérale;

un **losange** celle qui est équilatérale mais non rectangle;

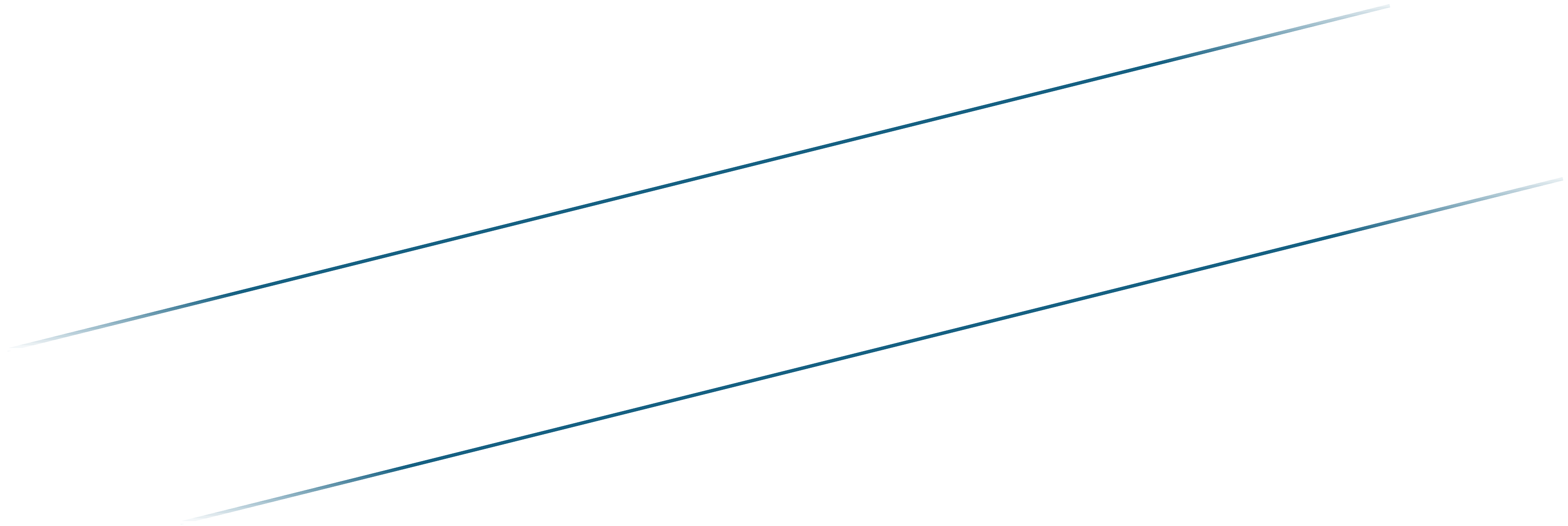
un **rhomboïde,** celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale, ni rectangle;

et que l'on appelle **trapèze** les quadrilatères autres que ceux-là.



livre I – Définitions

I.23. Des droites **parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

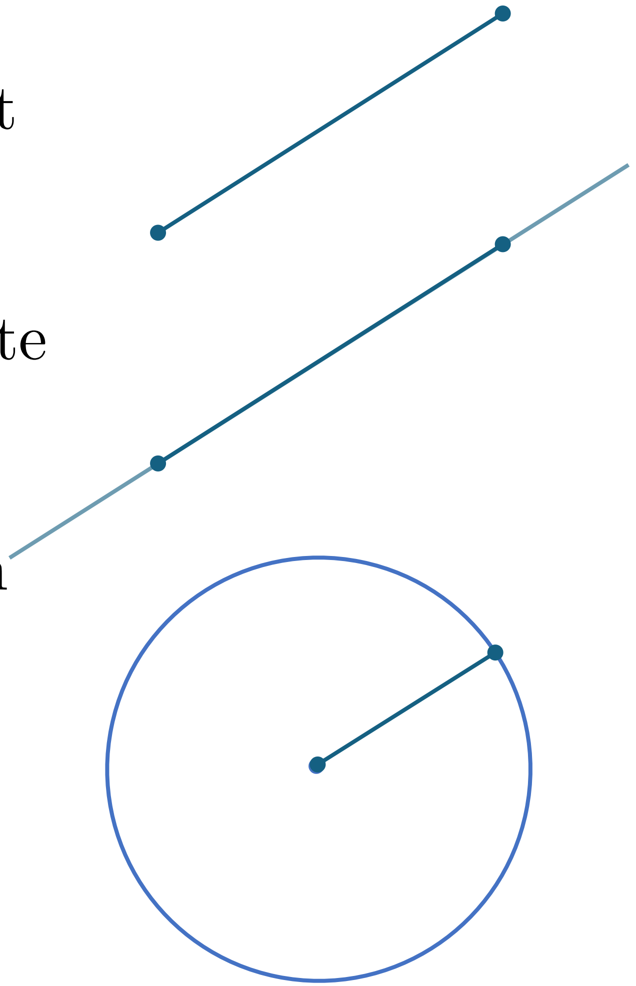


livre I – Demandes (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.

2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.



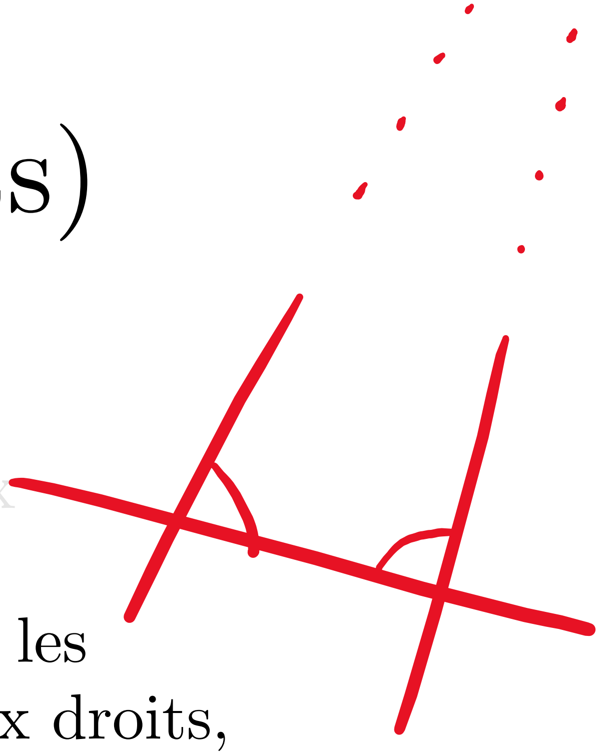

STAEDTLER

livre I – Demandes (postulats)

4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux

5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droits indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

livre I – Demandes (postulats)



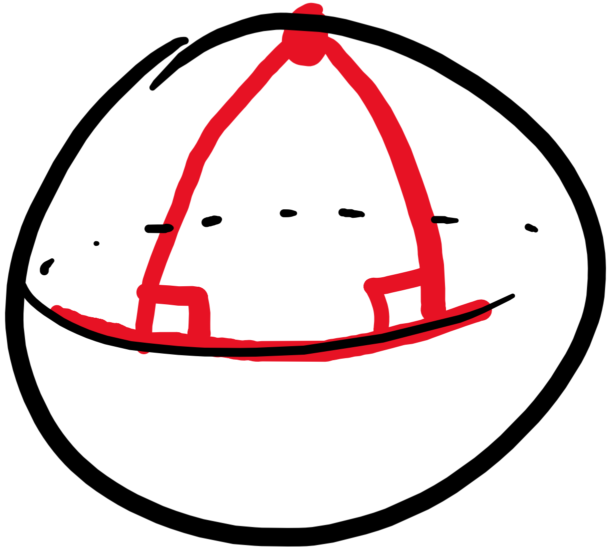
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux

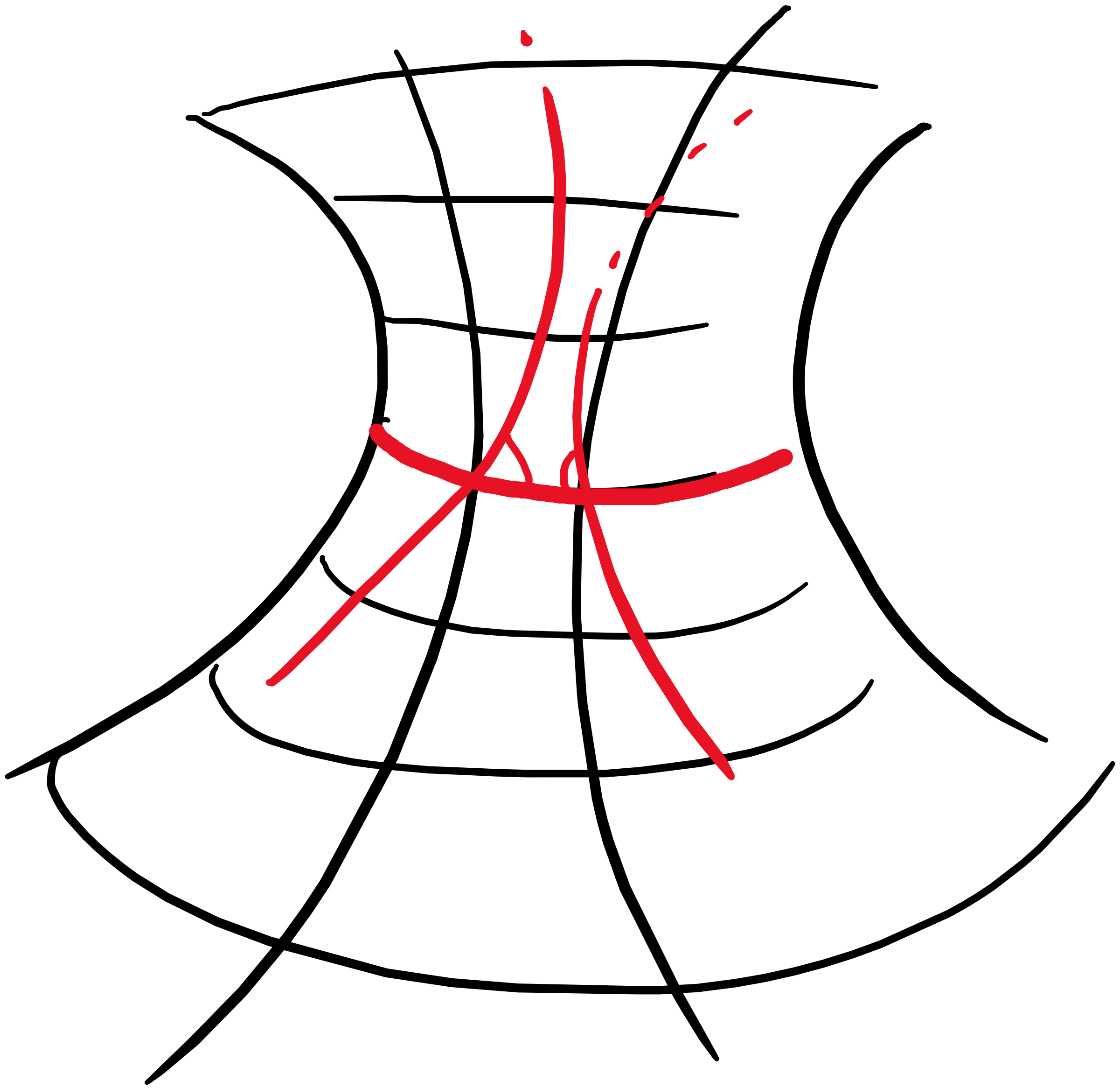
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droits indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

Est-ce qu'on peut le prouver?

On dirait que ça doit se prouver!

NON! (XIXe siècle!)



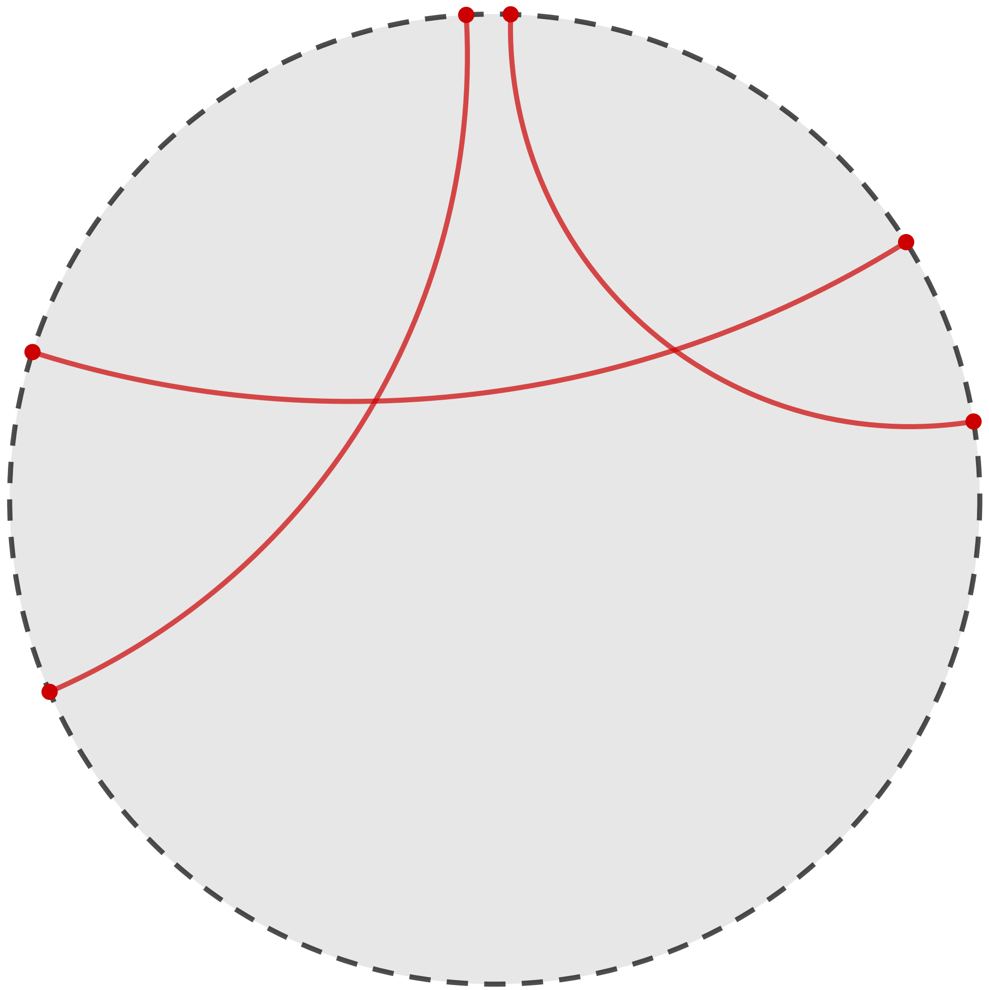


Géométries

non-planes!

Le disque de Poincaré

- Les droites sont les arcs de cercle qui touchent le bord du disque à angles droits.



livre I – Notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.

5. Et le tout est plus grand que la partie.

livre I – Notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles. $a = b\,,\; b = c \Rightarrow a = c.$ (transitivité).

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux. $a = b \Rightarrow a - c = b - c$

On peut faire les mêmes choses des deux côtés de l'éq$^{\underline{n}}$.

4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles. $\hookrightarrow$ isométries ($\rightarrow$, $\circlearrowleft$, $\leftrightarrow$)

5. Et le tout est plus grand que la partie. $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Théorie de la mesure!

les propositions

typologie des propositions

typologie « ancienne »

typologie moderne

Type	**Problème** « Construire une figure avec telles propriétés. »	**Théorème (au sens ancien)** « La figure donnée a telles propriétés. »
Lemme Résultat intermédiaire relativement évident, pratique et utile	Constructions «de base» : perpendiculaires, parallèles, bissections. Ex. : Props. I.1-3, 9-12, 22, 23, 31, 42, 46. III.1, 17, ...	Outils déductifs simples permettant de progresser plus rapidement dans des arguments. Congruence d'angles, de triangles. Théorie des parallèles. Ex. : Props. I.4-8, 13-21, 24-30, 33-41, 43, 45, ...
«Théorème» au sens moderne Résultat important, intéressant en soi, ayant des applications.	Constructions ayant des applications pratiques ou une importance théorique significative : Quadrature des figures, inscriptions/circonscriptions Ex. Props. I.44, II.14, IV.11, IV.15, IV.16, ...	Résultats théoriques de grande importance, peu évidents, «surprenants», souvent très généraux : Somme des angles intérieurs d'un triangle, Théorèmes de Pythagore, de Thalès. Ex. Props. I.32, 47, 48, ...

livre I – propositions

I.1. *Sur une droite donnée, de construire un triangle équilatéral.*

Soit AB la droite donnée.

Il est demandé de construire un triangle équilatéral sur la droite AB.

De centre A et de rayon AB, décrire le cercle BCD; [post. 3]

de centre B et de rayon BA, le cercle ACE; [post. 3]

et du point C où se coupent les cercles BCD et ACE, joindre les lignes CA et CB. [post. 1]

Puisque le point A est le centre du cercle BCD, AC est égal à AB; [déf. 15]

Et puisque le point B est le centre du cercle ACE, BC et égal à BA. [déf. 15]

Mais AC est aussi égal à AB; alors, chacune des lignes CA, CB est égale à AB.

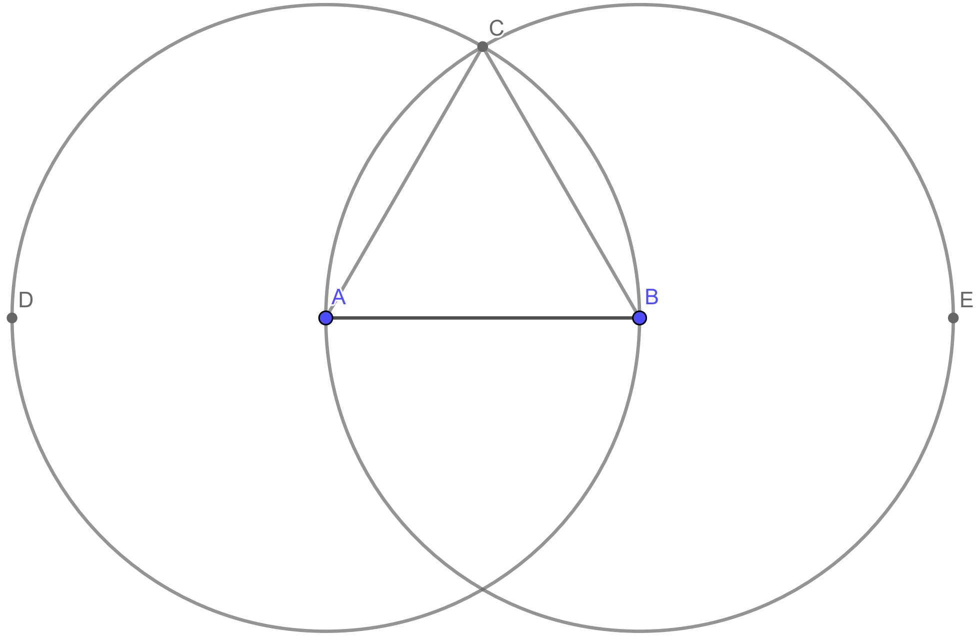
Et les choses qui sont égales à la même chose sont égales entre elles; [N.C. 1]

donc CA est aussi égal à CB.

Ainsi les trois lignes CA, AB, BC sont égales.

Ainsi le triangle ABC est équilatéral; il a été construit sur la ligne AB.

Ce qui était demandé.



constructions de base (livre I)

Propositions I.1 à I.3: Triangle équilatéral; déplacer, aligner un segment sur un autre segment.

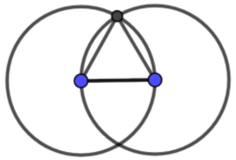
Proposition I.9, 10 : Bissections d'angles, segments.

Proposition I.11, 12: Perpendiculaires à partir d'un point sur la droite, ailleurs.

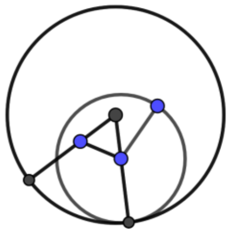
Proposition I.22: Triangle quelconque à partir des côtés.

Proposition I.23: Déplacer un angle rectiligne sur un point quelconque

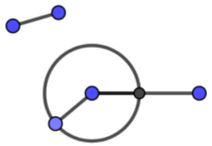
Proposition I.31: Par un point donné, monter une droite parallèle à une droite donnée.



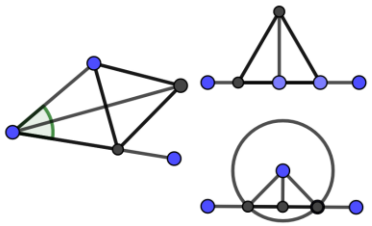
Triangle équilatéral (prop. 1)



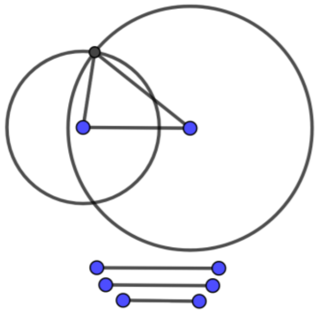
Déplacement de segment (prop. 2)



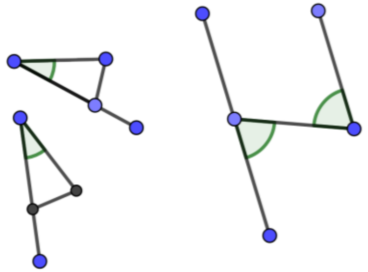
Alignement de segment. (prop. 3)



Bissections, perpendiculaires (props. 9 à 12)



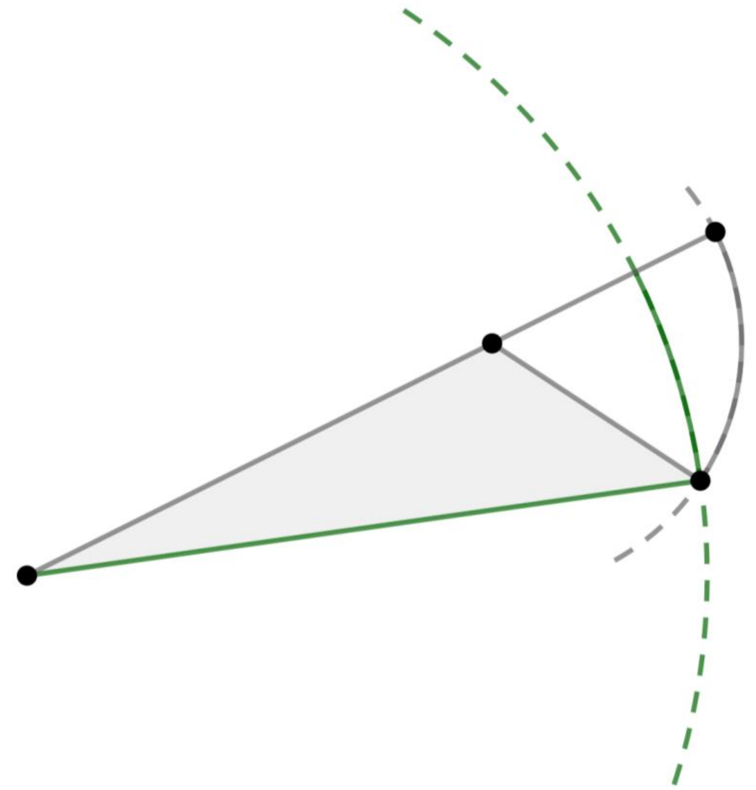
Construction d'un triangle à partir des côtés (prop 22)



Déplacement d'angle, construction d'une droite parallèle. (props. 23, 31)

théorème:
inégalité du triangle

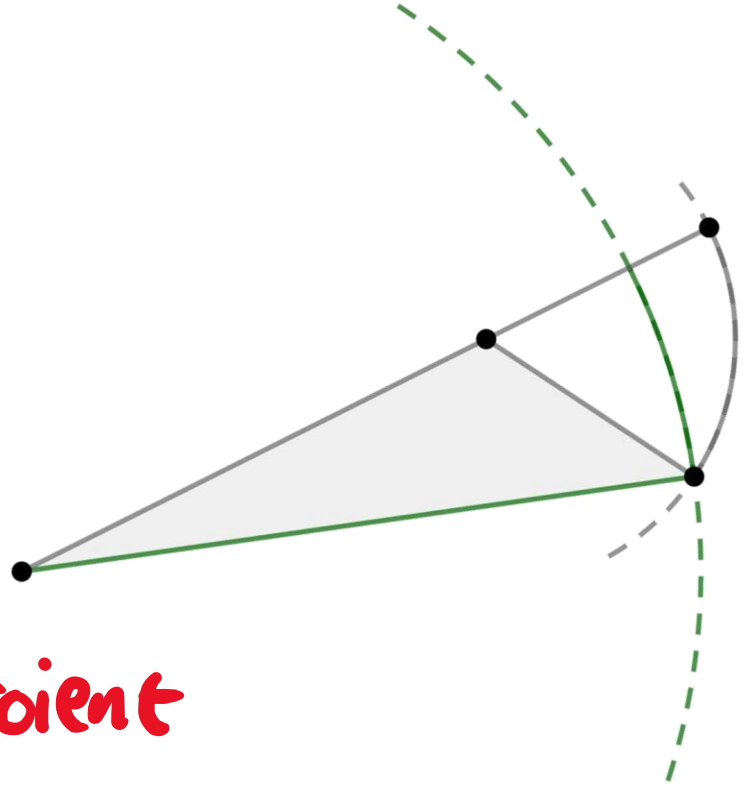
Proposition I.20
Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble de quelque façon que ce soit sont plus grands que le côté restant.



théorème:

inégalité du triangle

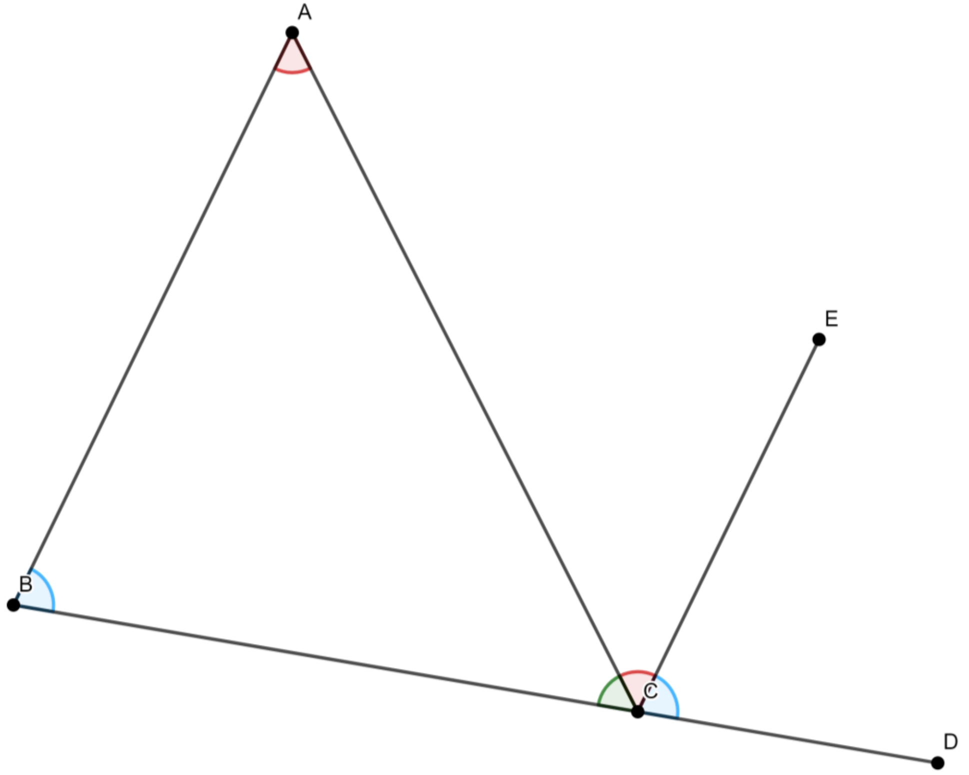
Proposition I.20
Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble de quelque façon que ce soit sont plus grands que le côté restant.



Nécessaire? Les sophistes croient que non!

théorème:
somme des angles intérieurs d'un triangle

Proposition I.32
Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

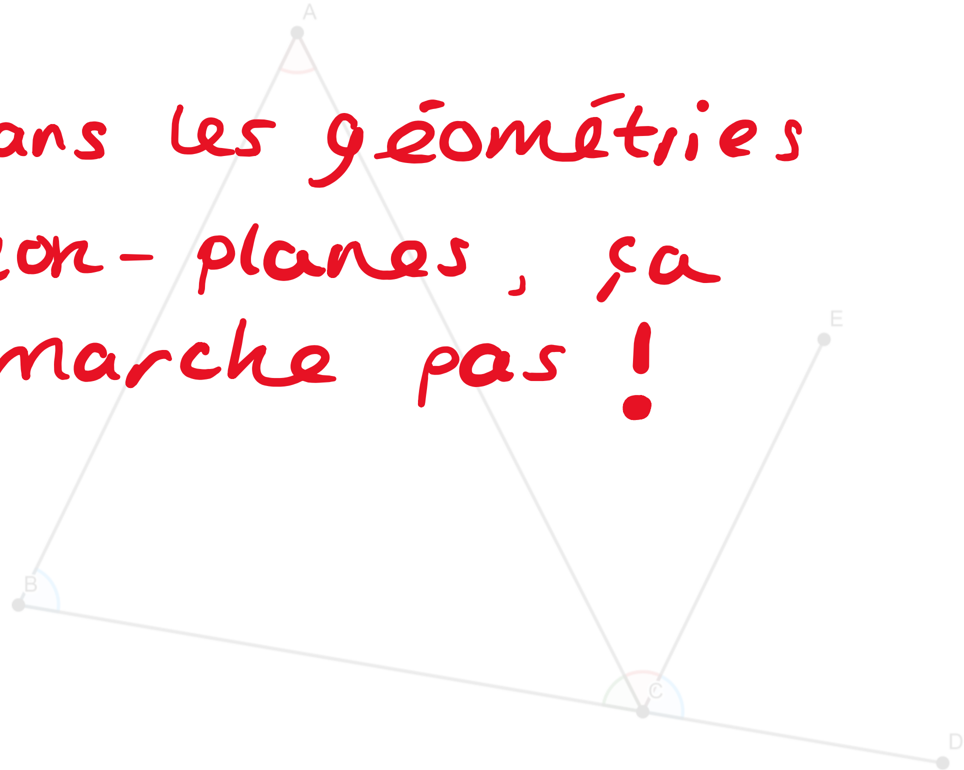


théorème:

somme des angles intérieurs d'un triangle

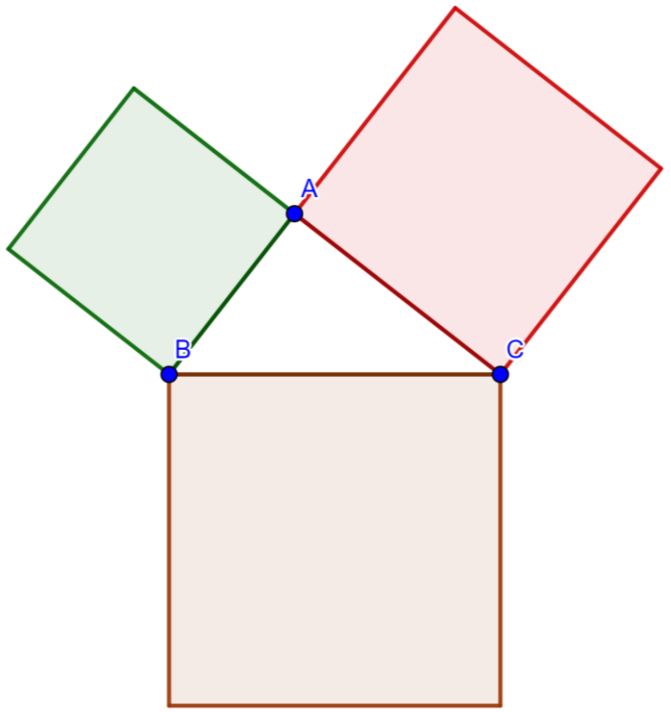
Proposition I.32
Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Dans les géométries non-planes, ça marche pas !



théorème
de Pythagore

Proposition I.47
Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est [équivalent en aire] aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.



théorème
de Pythagore

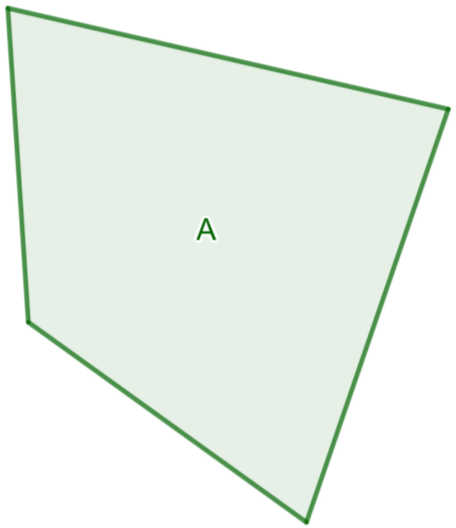
Proposition I.47
Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est [équivalent en aire] aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

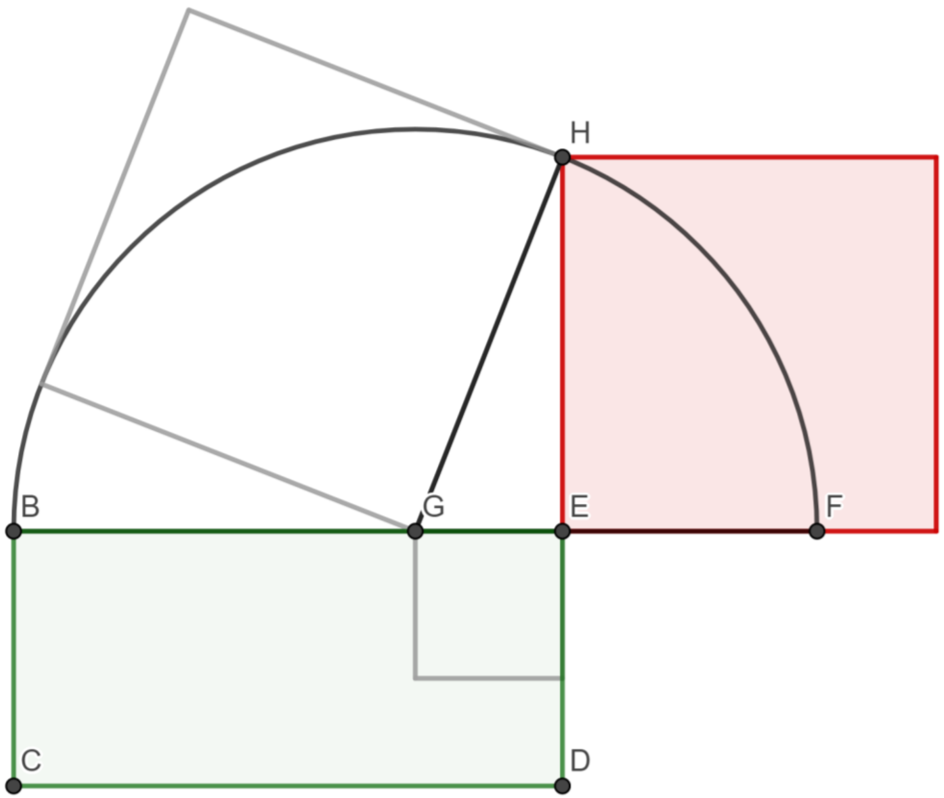
Dans les géométries non-planes, ça marche pas !

Livres II, III et IV

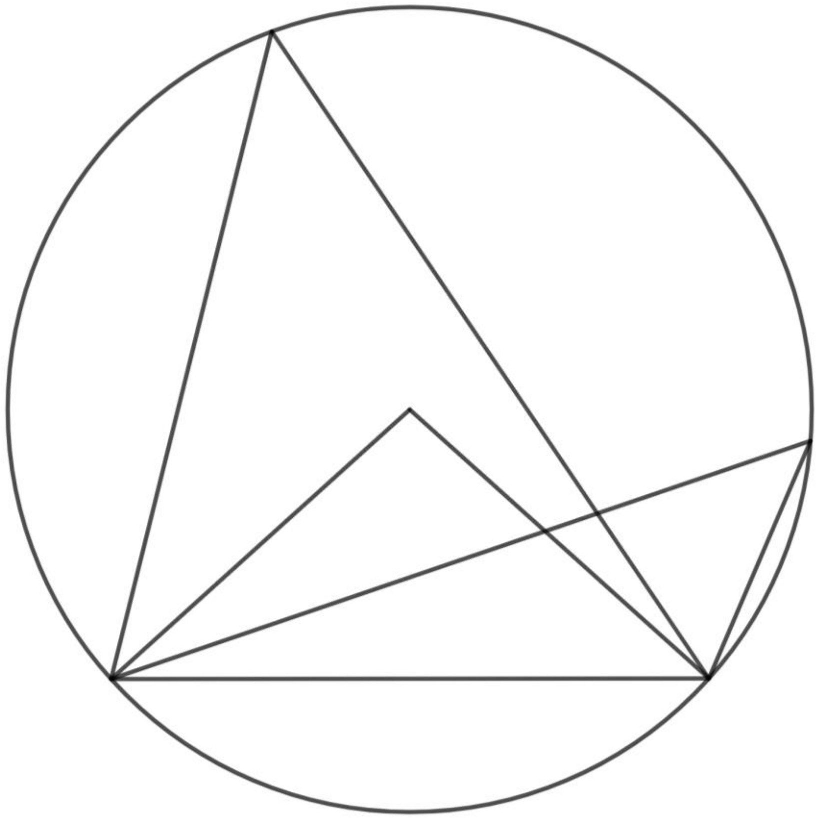
le livre II

- Constructions pour résoudre des équations quadratiques.
- Quadrature des polygones !





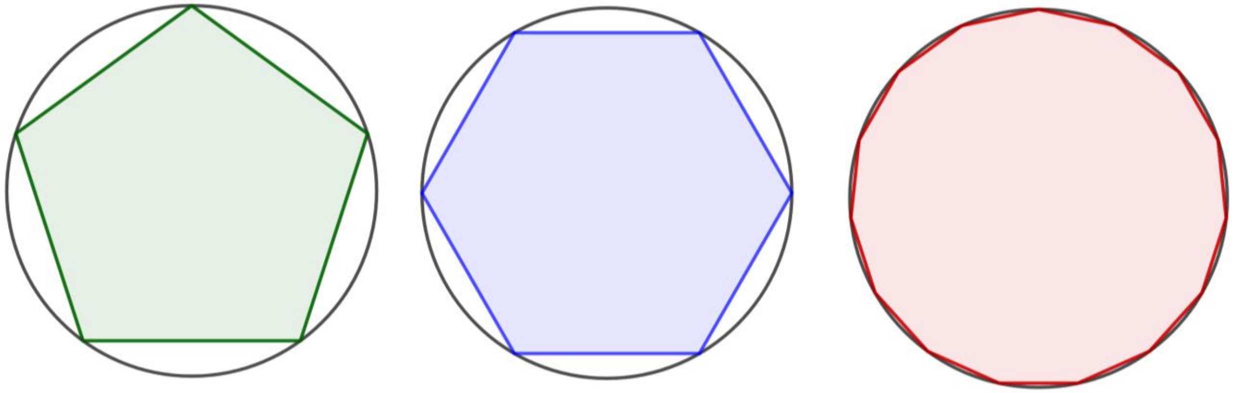
le livre III



- Constructions, théorèmes sur les cercles

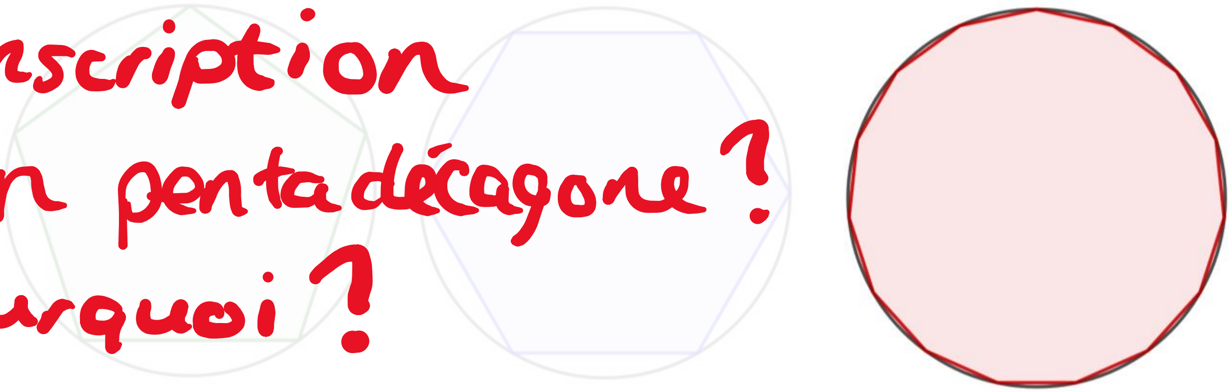
le livre IV

- Constructions de polygones inscrits/circonscrits dans des cercles

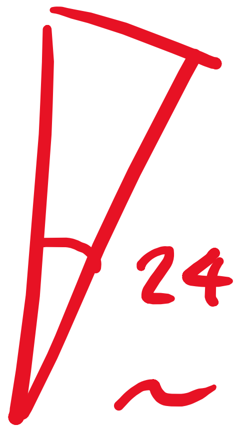


le livre IV

- Constructions de polygones inscrits/circonscrits dans des cercles



Inscription d'un pentadécagone ? Pourquoi ?

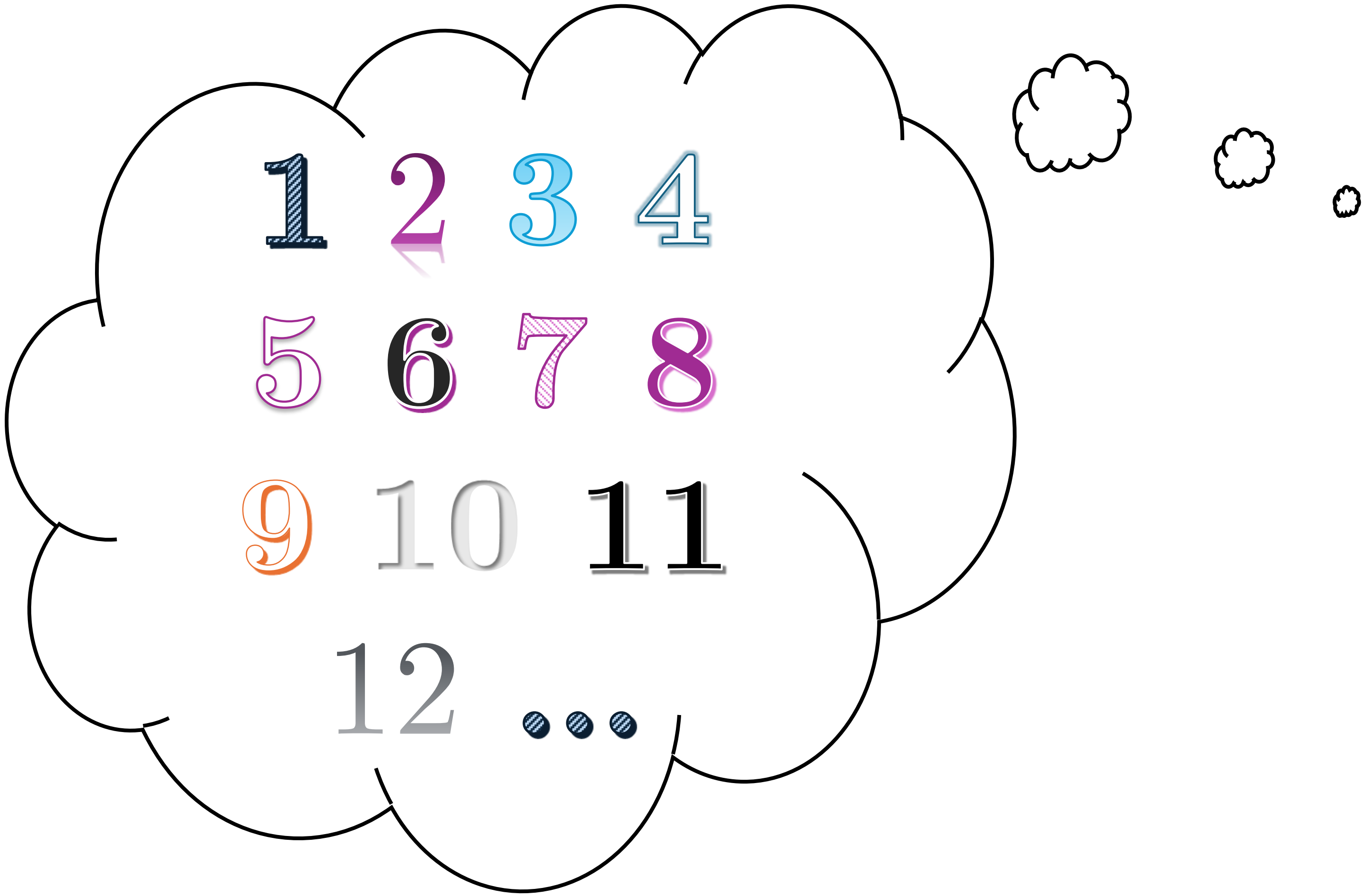


24°
~
Obliquité de la Terre ! (Astronomie).

Livres V à IX (dans le désordre)

Les nombres et les ratios

Les nombres (entiers) (positifs)



On connait les nombres...

Des problèmes ?

... 2476 2477 ...

Une infinité de nombres?

Un ordre particulier pour les nombres?

?*

... 1

Un plus petit nombre?

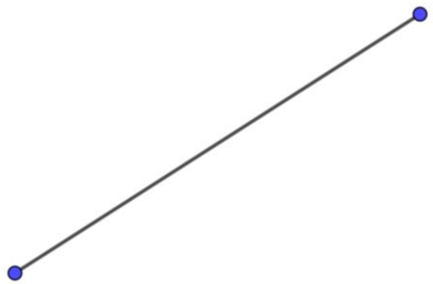
Des problèmes ?

« C't'ivident ! »

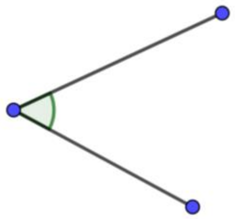
-- Euclide, c.a. 300 av. J.-C.

Pas d'axiomes, pas de postulats, pas de demandes...

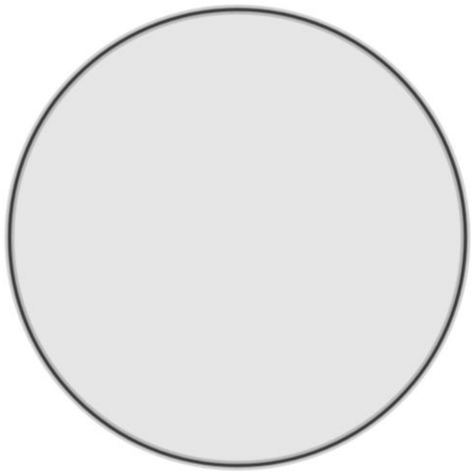
Les grandeurs



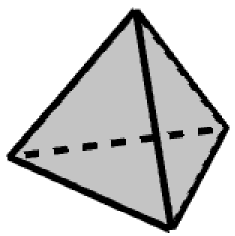
Longueur d'un segment



Mesure d'un angle



Aire d'une figure



Volume d'un solide

Nombres réels ?

Les grandeurs

NON !

- On donne toujours une grandeur comme un certain **ratio** par rapport à une grandeur-étalon
- qu'on appelle **unité**
- et c'est pas pour rien.
- Les ratios sont les nombres réels. Les grandeurs ne sont pas des nombres (au sens moderne) !

Pensez-y : L'instruction « Coupe-moi un morceau de bois de longueur 2 » n'a pas de sens à moins qu'on sous entende « mètres » ou « pieds »…

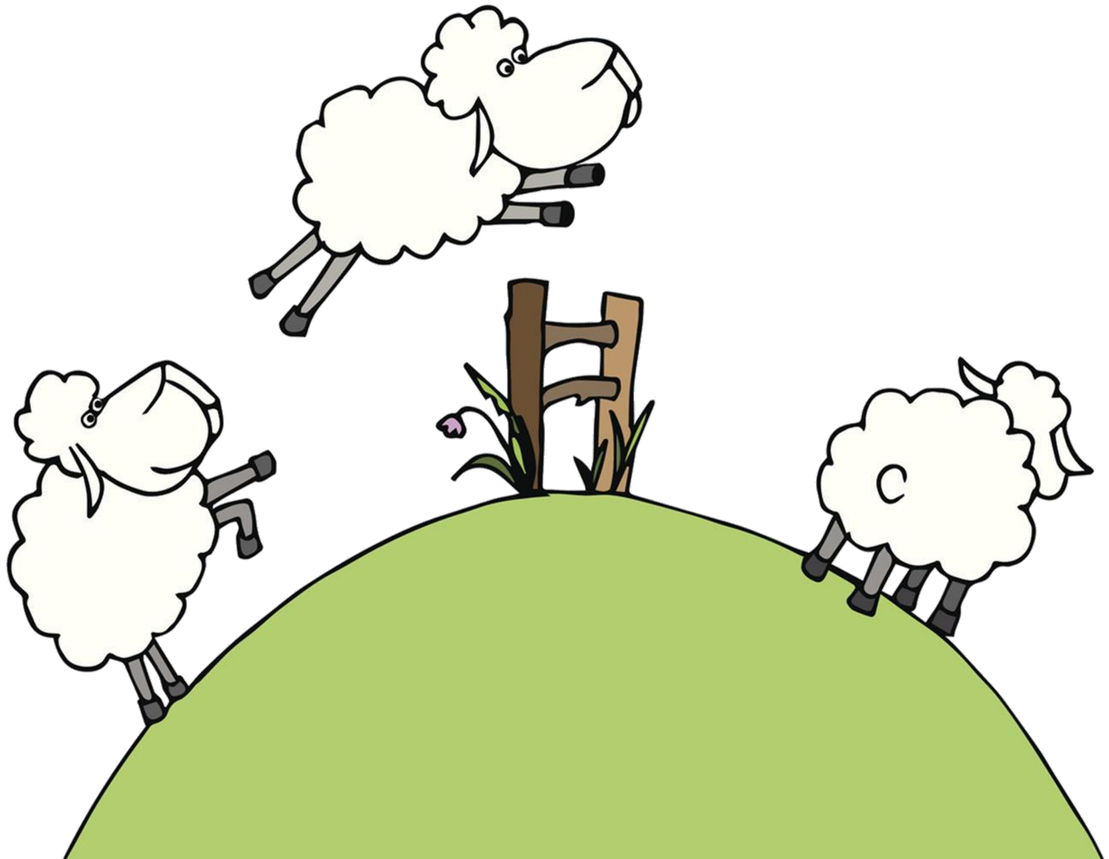
les entiers

Livres VII, VIII, IX

livre VII – Définitions

VII.1 Est **unité** ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

VII.2 Et un **nombre** est la multitude composée d'unités.



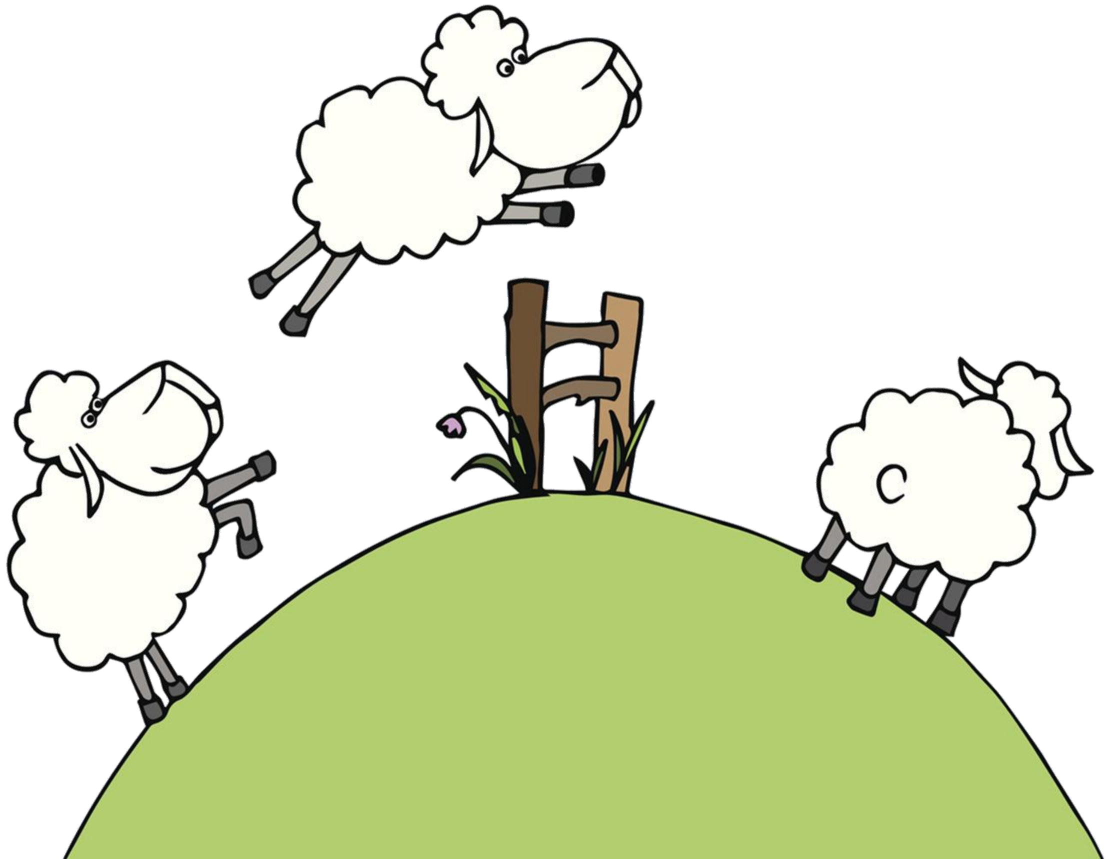
livre VII – Définitions

??

VII.1 Est **unité** ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

VII.2 Et un **nombre** est la multitude composée d'unités.

entiers positifs



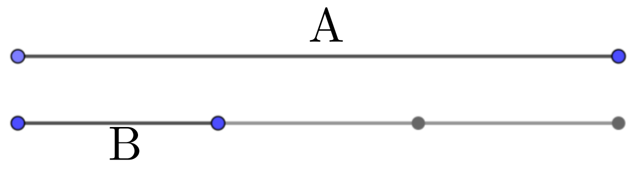
livre VII – Définitions

VII.3 Un nombre est une **partie** d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure* le plus grand.

VII.4 Et **des parties**, quand il ne le mesure pas.

VII.5 Et un **multiple**, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

*mesurer : diviser exactement



A est un multiple de B; B est une partie de A.

Attention ! Ici, comme dans tout Euclide, les nombres sont représentés par des segments, même si la longueur d'un segment n'est pas considérée comme un « nombre » au sens moderne.

livre IV – Définitions

VII.12 Un nombre **premier** est celui qui est mesuré par une seule unité.

Voici par exemple 23, nombre premier de choix

livre VII – Définitions

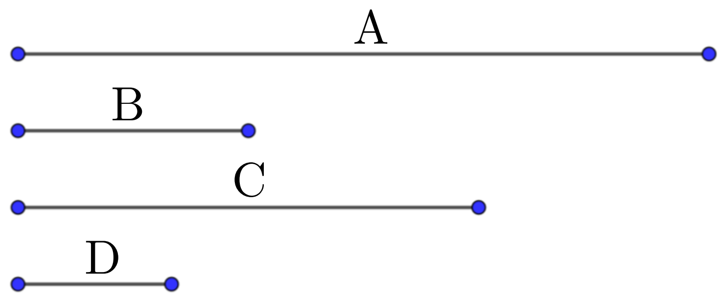
VII.16 Un nombre est dit **multiplier** un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté à lui-même, et qu'il est produit un certain nombre.

VII.17 Et quand deux nombres s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain nombre, le produit est appelé **(nombre) plan**, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses **côtés**.

$7 \times 4 = 28$

livre VII – Définition

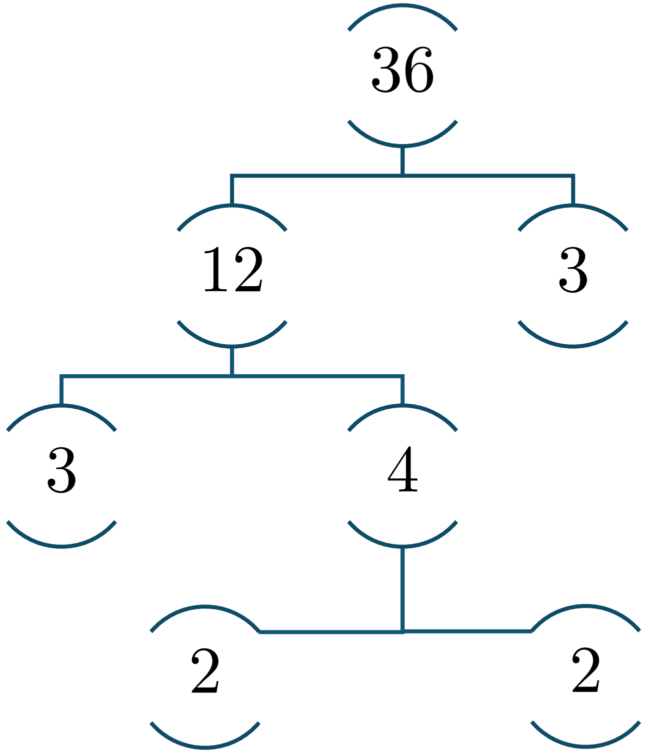
VII.21 Des nombres sont en **proportion** quand le premier du deuxième, et le troisième du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties.



A, B, C et D sont en proportion car A est le triple de B et C est le triple de D. On dit que « A est à B comme C est à D ».

théorème fondamental de l'arithmétique
(props. VIII.31 et IX.14)

Tout nombre peut être décomposé de façon unique en un produit de facteurs premiers dont il est le plus petit commun multiple.



infinité des nombres premiers (Prop. IX.20)

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.

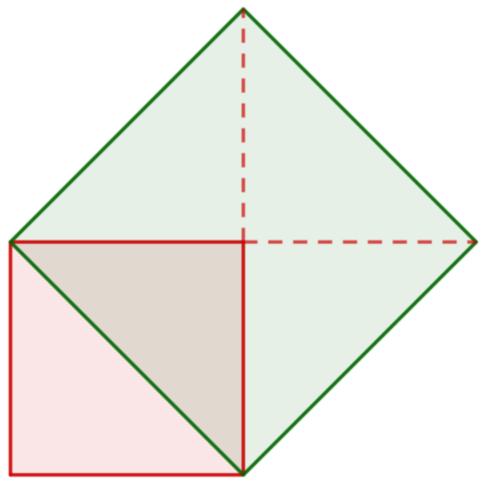
∞

Livre V

Les nombres réels

Pourquoi on a besoin de plus ?

Quel ratio entre le côté du carré vert et celui du carré rouge ? Peut-on l'exprimer par un ratio d'entiers ?



Ben non !

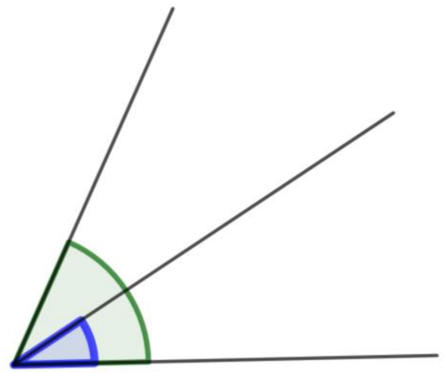
On doit avoir une définition du ratio plus générale, qui permette de comprendre le rapport entre, par exemple, le côté d'un carré et sa diagonale. Ou entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence...

Livre V – Définitions

V.1 Une grandeur est une **partie** d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.

V.2 Et **multiple**, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.

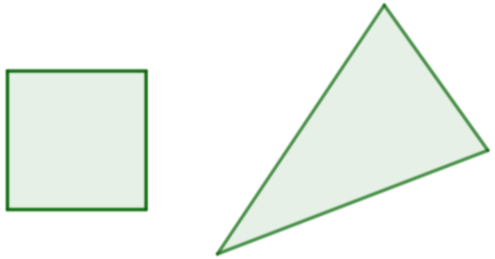
V.3 Un **rapport** est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre.



Ici l'angle bleu mesure l'angle vert.

livre V – Définitions

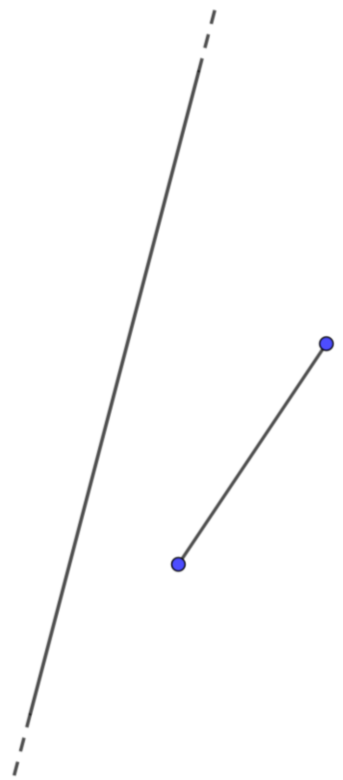
V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



On peut couvrir le triangle avec plusieurs copies du carré. On peut couvrir le carré avec plusieurs copies du triangle. Les aires du carré et du triangle ont un rapport entre elles.

livre V – Définitions

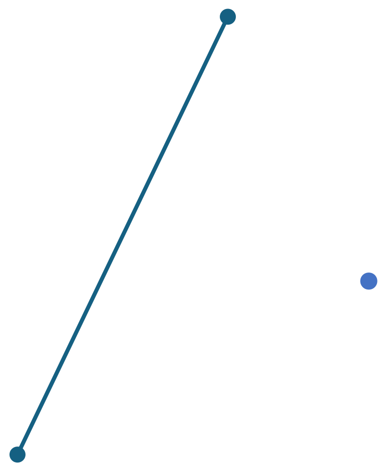
V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



Même multiplié, le segment ne dépassera jamais la droite infinie. Les deux grandeurs n'ont pas de rapport.

livre V – Définitions

V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



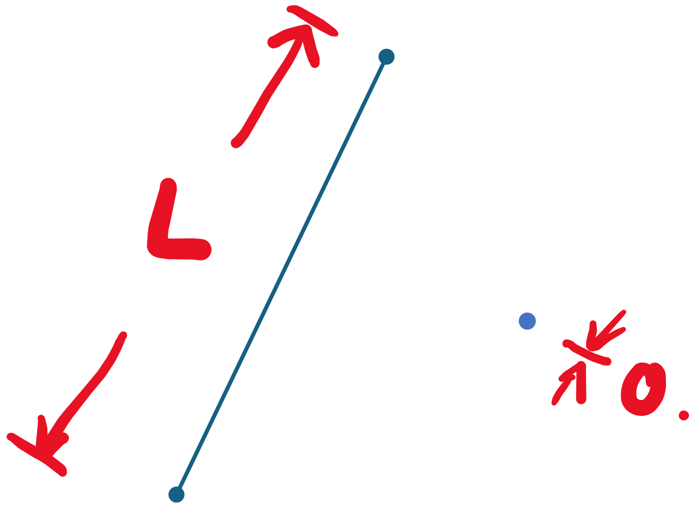
Même multiplié, le point ne pourra jamais dépasser le segment. Le segment et le point n'ont donc pas de rapport.

livre V – Définitions

V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

Le ratio serait $L/0$!

Impossible...



Même multiplié, le point ne pourra jamais dépasser le segment. Le segment et le point n'ont donc pas de rapport.

livre V – Définitions

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième

quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.

$$A : B = C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n choisis

$$mA > nB, mC > nD$$

OU

$$mA = nB, mC = nD$$

OU

$$mA < nB, mC < nD$$

Remarquez que lorsque les grandeurs sont des nombres, cette définition revient exactement à celle qu'on a vue plus tôt.

livre V – Définitions

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième

quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.

$$A : B = C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n choisis

$$mA > nB, \mathrm{m}C > \mathrm{n}D$$

OU

$$mA = nB, mC = nD$$

OU

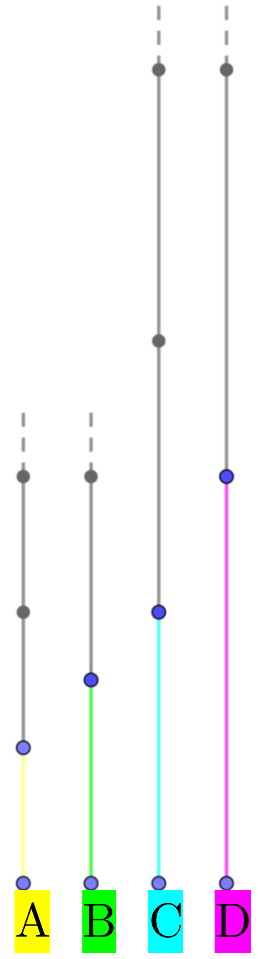
$$mA < nB, mC < nD$$

Remarquez que lorsque les grandeurs sont des nombres, cette définition revient exactement à celle qu'on a vue plus tôt.

livre V – Définitions

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième

quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.



livre V – Définitions

V.7 Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.

$$A : B > C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n tels que

$$mA > nB,$$

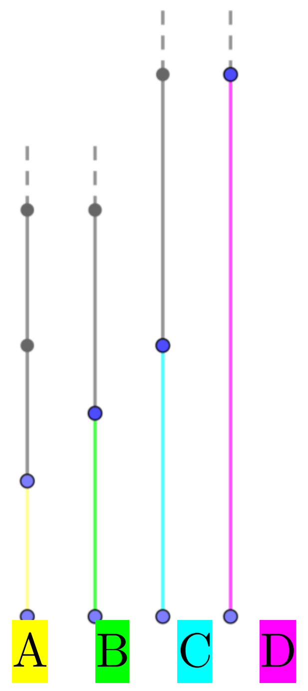
on a

$$mC \leq nD$$

Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !

livre V – Définitions

V.7 Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.



Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !
Ici, A:B $= 2/3 > 1/2 =$ C:D

ouf...

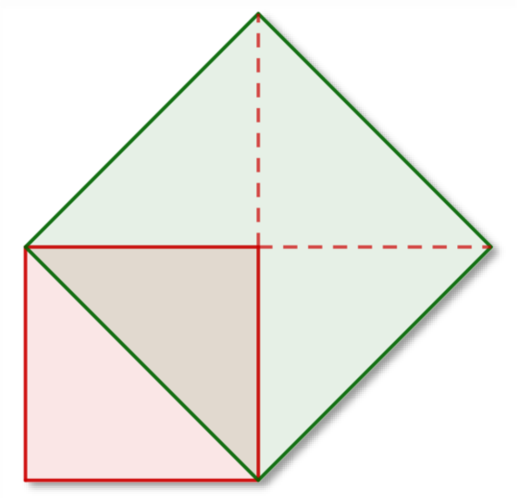
plus d’explications sur les rapports

sur les ratios : explications supplémentaires

- La définition la plus importante (V.5) concerne **l'égalité entre deux ratios.**
- Dans le livre VII, on définit l'égalité entre ratios de nombres (entiers positifs), en termes de « parties d'entiers ».
- Pour des grandeurs générales, cette définition n'est pas suffisante – il existe des ratios qu'on ne peut exprimer ainsi.
- L'astuce brillante dans la définition V.5 consiste à considérer **des suites de multiples entiers de deux grandeurs**, et à regarder comment ces suites « s'intercalent ».
- On définit alors que deux paires de grandeurs sont dans le même ratio si les paires de suites correspondantes s'intercalent de la même façon.

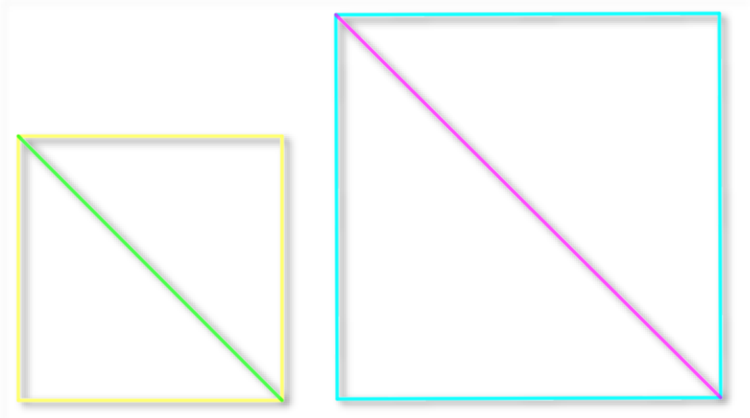
sur les ratios : exemple

- La diagonale d'un carré est proportionnelle à son côté.



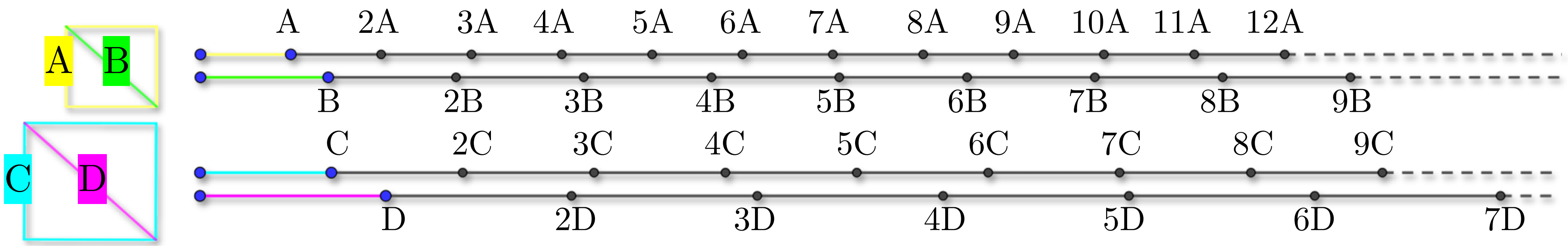
sur les ratios : exemple

- Autrement dit, étant donnés deux carrés, le côté de l'un est à la diagonale de l'un comme le côté de l'autre est à la diagonale de l'autre.



sur les ratios : exemple

- Pour le prouver, il suffit de constater que si on intercale les suites de multiples entiers d'un côté de carré (A ou C) et de sa diagonale (B ou D), alors
- les suites s'intercalent toujours de sorte que
- $A < B < 2A < 2B < 3A < 4A < 3B < 5A < 4B < 6A < 7A < 5B < 8A < 6B < \cdots$
- Les alternances sont les mêmes pour C et D, et ce jusqu'à l'infini.



les coupures de Dedekin

$$A : B = C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n choisis

$$mA > nB, mC > nD$$

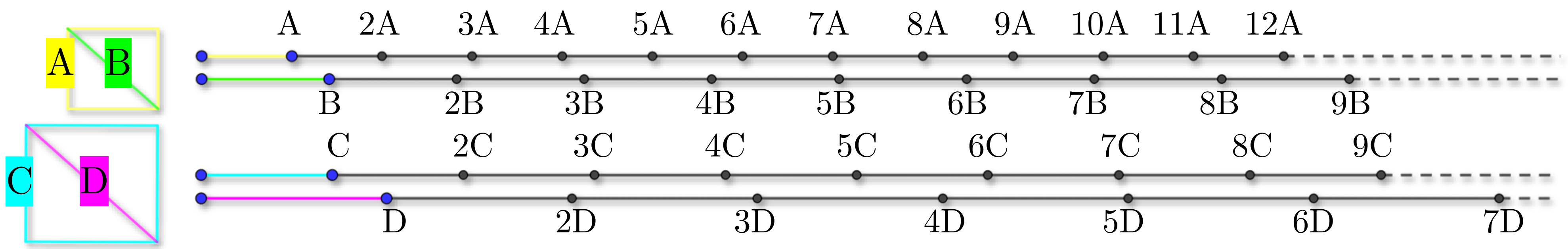
OU

$$mA = nB, mC = nD$$

OU

$$mA < nB, mC < nD$$

- On identifie les nombres réels à l'ensemble des façons de « couper » les nombres rationnels en deux parties.



$$m\,A > n\,B \Leftrightarrow \frac{A}{B} > \frac{n}{m}$$

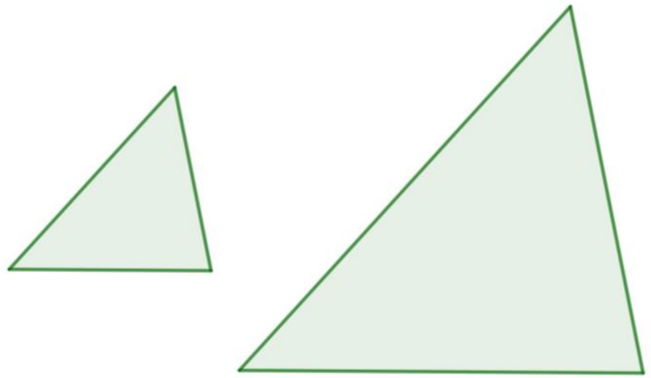
Pour toute paire m, n, on détermine si $\frac{n}{m}$ est plus petit ou plus grand que $\frac{A}{B}$. On dit que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ si ils séparent les rationnels au même endroit. C'est EXACTEMENT ce que fait Euclide !

Livre VI

Proportions géométriques

Livre IV – Définitions

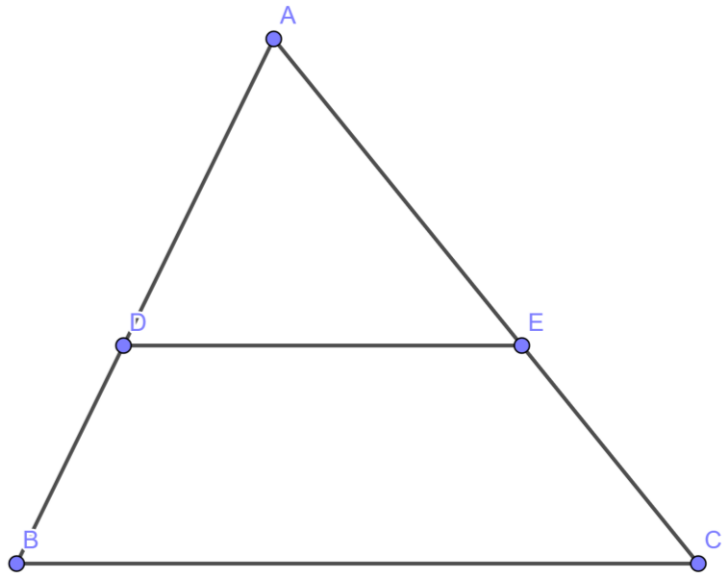
VI.1 Des figures rectilignes **semblables** sont celles qui ont les angles égaux un par un et dont les côtés autour des angles égaux sont en proportion.



théorème de Thalès

Proposition VI.2

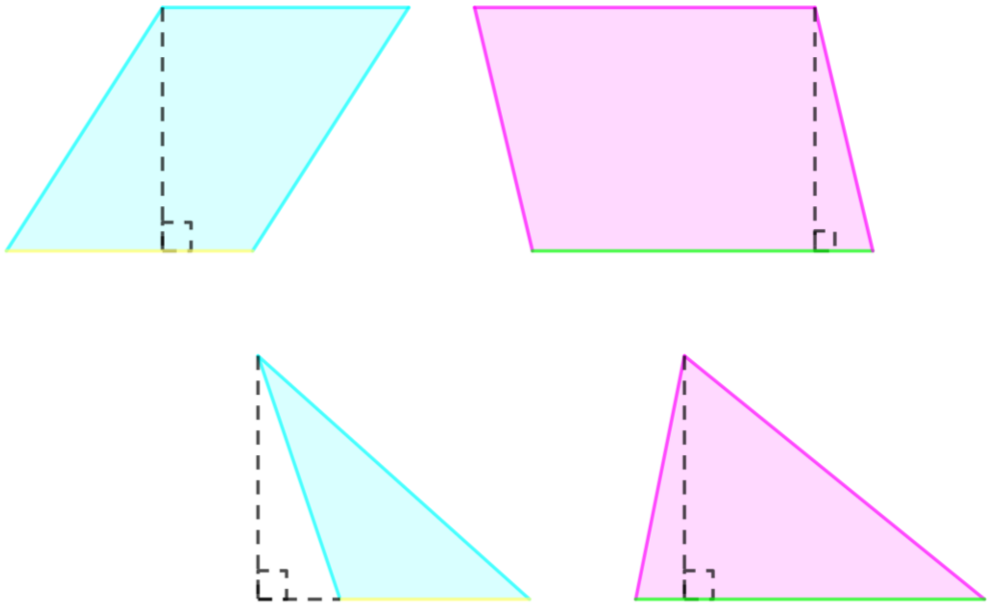
Si une droite coupe un triangle parallèlement à la base, le plus petit triangle est semblable au plus grand.



proportionnalité d'aires

Proposition VI.1

Les aires de triangles ou de parallélogrammes ayant la même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.

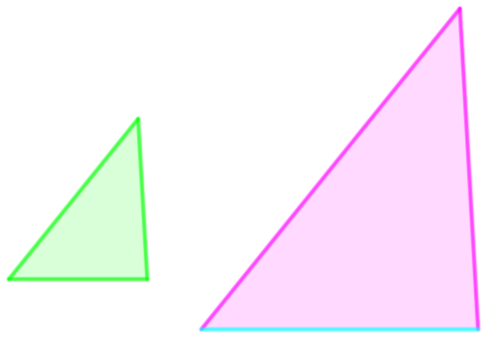


proportionnalité d'Aires

Proposition VI.19

Les aires de triangles semblables sont entre elles comme le rapport doublé* entre les côtés homologues des triangles.

*le carré

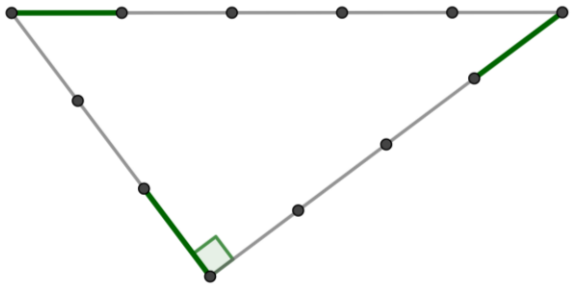


Livres X à XIII

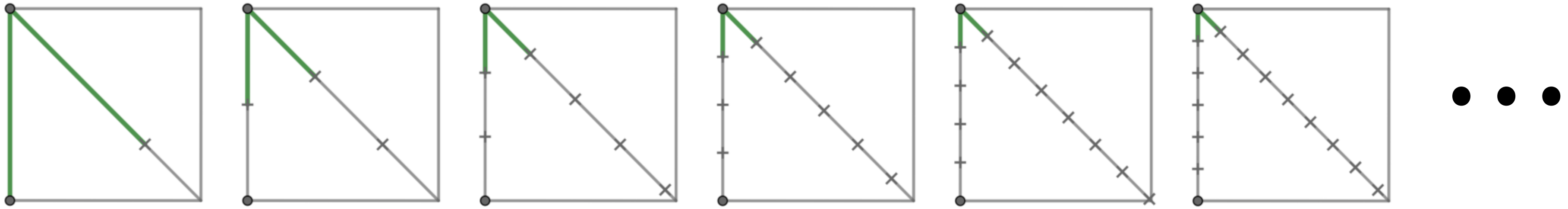
Nombres irrationnels; géométrie solide.

(In)commensurabilité : Définition

X.1 Les grandeurs **commensurables** sont celles qui sont mesurées par la même grandeur, et sont **incommensurables** celles qui n'ont aucune commune mesure.



Les trois côtés de ce triangle rectangle sont commensurables.



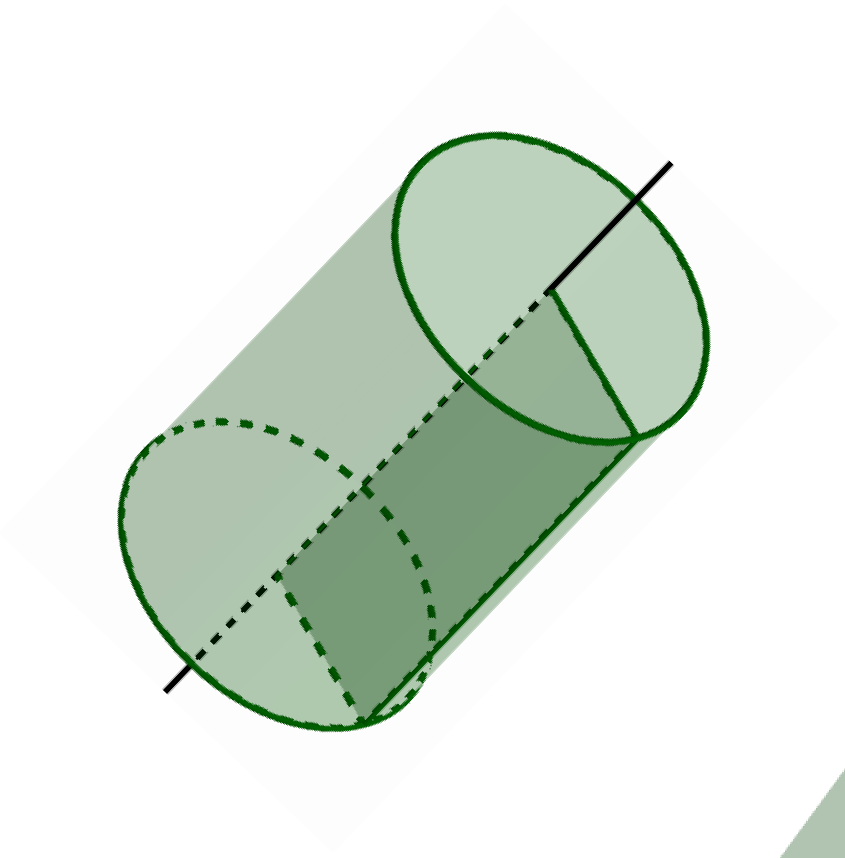
Ici ça passe proche, mais c'est pas tout à fait ça!

Le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables.

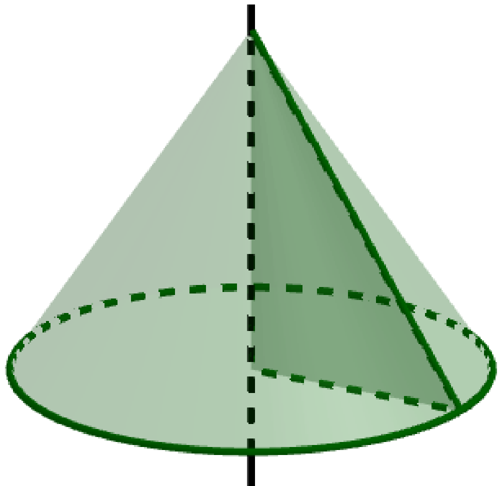
livre X : classification des irrationnels

- À l'époque, on connaît mal les nombres irrationnels.
- Le livre X (presque 25% de tous les livres des Éléments) est consacré à tenter de donner une classification des nombres irrationnels.
- Il s'agit d'un exercice qui aujourd'hui paraît entièrement futile...

livres XI à XIII : géométrie solide



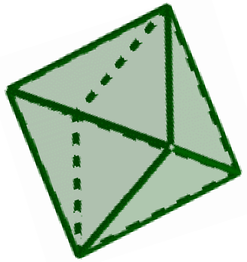
- Le livre XI fait introduit des notions de base de géométrie en 3D.
- Le livre XII donne des propositions concernant les proportions entre les volumes et les surfaces de solides.



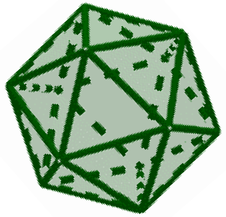
$$V = \frac{B \times h}{3}$$

livres XI à XIII : la géométrie solide

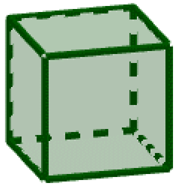
- Le livre XIII se consacre presque exclusivement à la construction des cinq solides platoniciens.



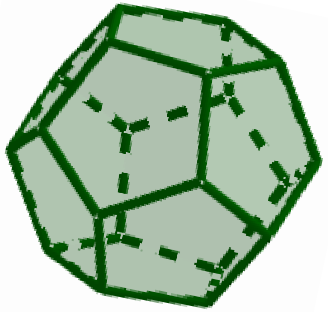
Octaèdre



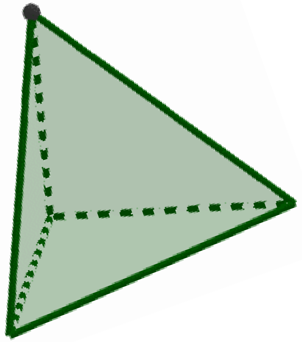
Icosaèdre



Cube



Dodécaèdre



Tétraèdre

résonnances modernes

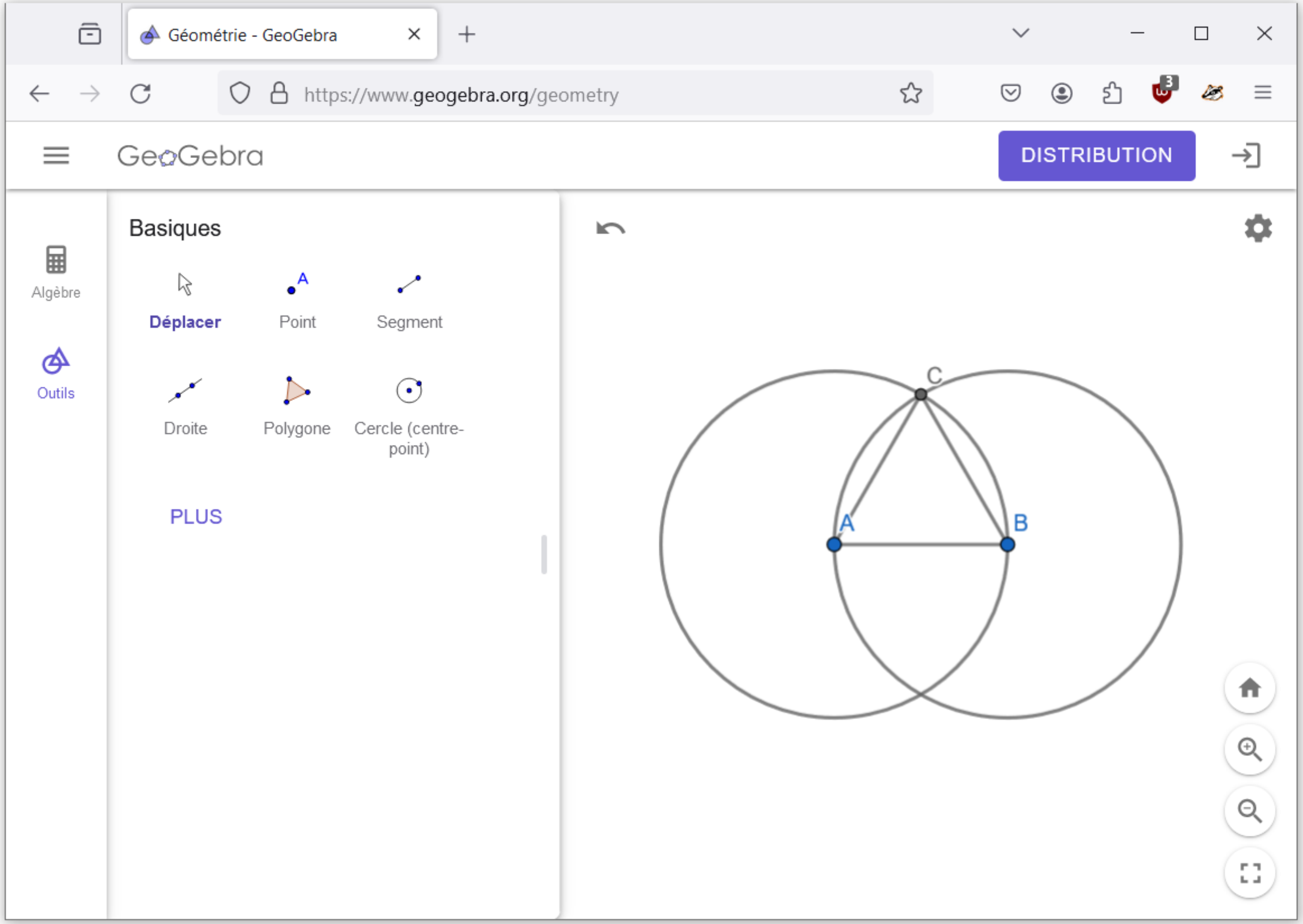
- Euclide jette les bases de plusieurs disciplines modernes :
    - la géométrie, bien sûr, mais aussi
    - L'algèbre
    - La théorie des nombres
    - L'analyse
- plusieurs de ses idées sont des formes primitives des notions qui, encore aujourd'hui, sont au cœur de notre compréhension des mathématiques.

« En lisant Euclide, j'ai rencontré plein de formulations étranges, et d'autres qui m'étaient étrangement familières. Les bizarreries anachroniques côtoient des sursauts presque prophétiques, et sur fond de jolies figures tracées par erreur au marqueur permanent sur mon tableau blanc, ce sont les racines, profondes mais connectées, des mathématiques que j'aime, qui ressortent en filigrane. Un peu comme les premières esquisses de poulet qu'un paléontologue découvrirait avec émotion dans le fossile d'un tyrannosaure. »

Quelques ressources additionnelles

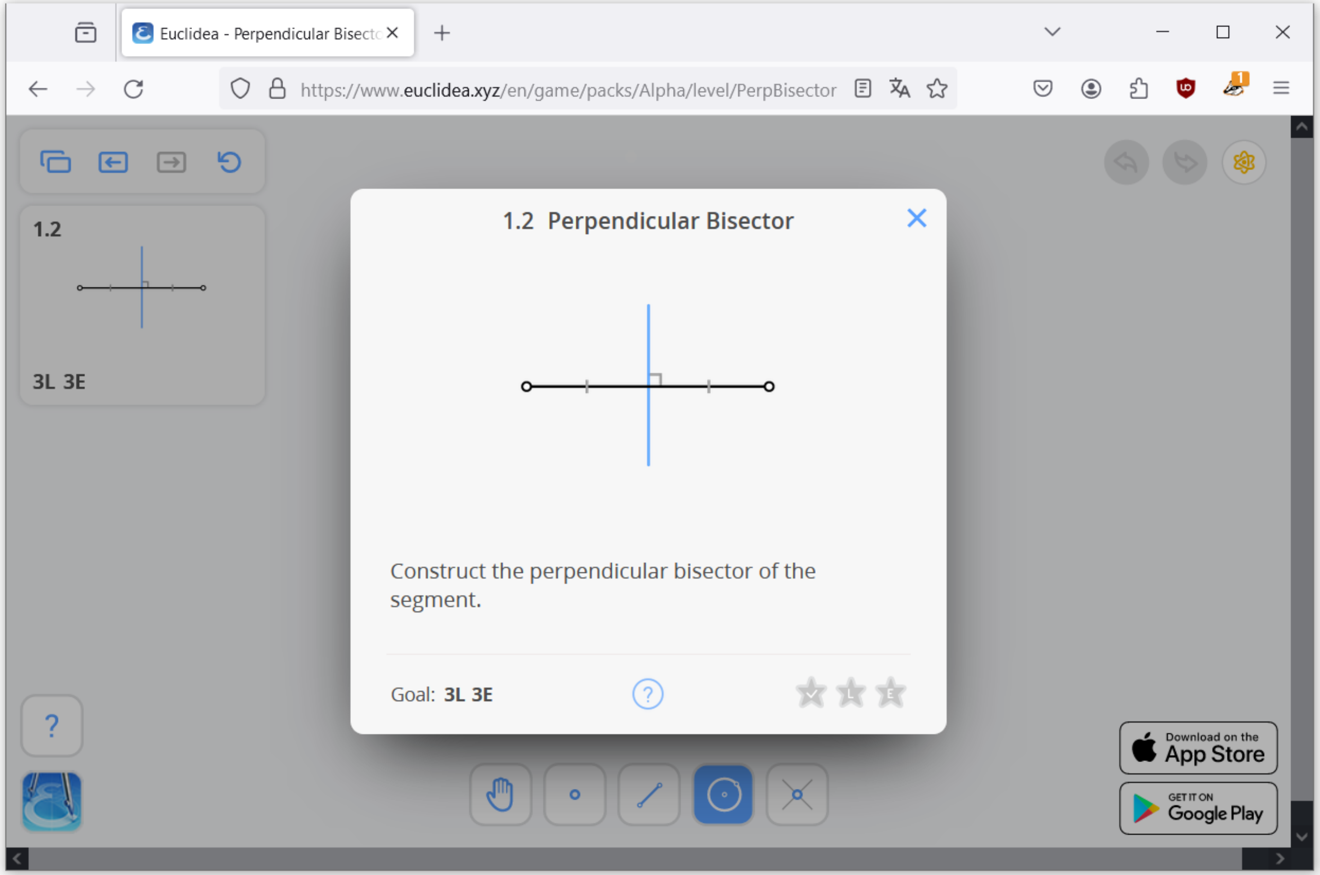
Geogebra

- Outil pour faire des constructions géométriques
- Disponible en ligne : https://www.geogebra.org/geometry
- Disponible en Français!

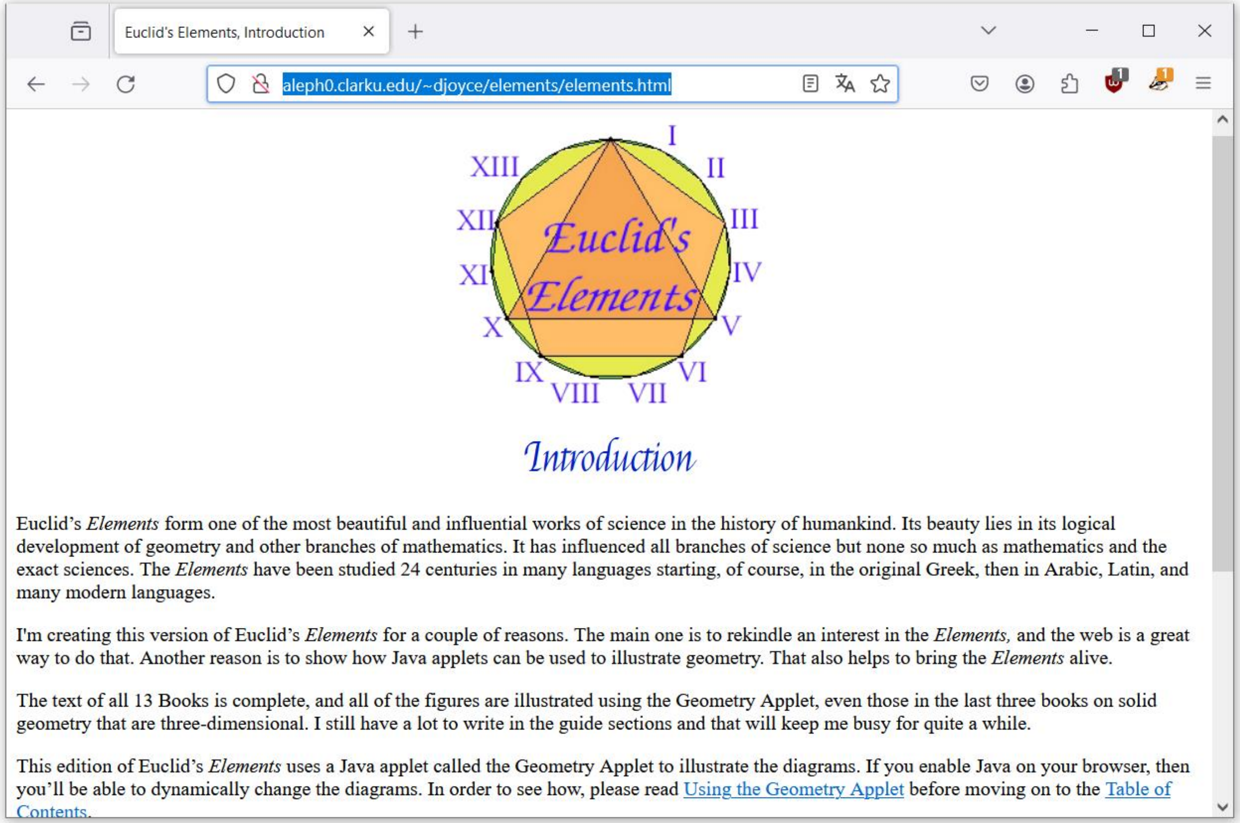


Euclidea

- Réaliser des constructions géométriques sous formes de casse-têtes ludique!
- Disponible en ligne : https://www.euclidea.xyz/
- En anglais seulement.
- Aussi disponible sous iOS et Android, pour appareils mobiles (tablettes, etc.)



Les Éléments d'Euclide en ligne



- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html
- Traduction de Heath (1908)
- Pas beaucoup commenté, mais facile à naviguer et accessible gratuitement!