Analyse Fonctionnelle I

Élise Davignon

Email address: `elise.davignon@umontreal.ca`

Résumé. Ce document compile les notes de cours données par la professeur Marlène Frigon, du département de mathématiques et statistiques de l'Université de Montréal dans le cours MAT6112 - Analyse Fonctionnelle I, à la session d'automne 2015. Les sujets couverts sont les espaces de Hilbert et de Banach, les topologies faibles et faibles-étoile, les opérateurs adjoints et compacts ainsi que la théorie spectrale d'opérateurs compacts et/ou autoadjoints. Comme il s'agit de notes de cours, aucune référence bibliographique ne sera citée explicitement. De plus, parce que l'on aime tou-te-s un peu ça, le style sera super formel.

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels topologiques

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Ce chapitre traitera des propriétés des espaces de Hilbert. Nous débutons le chapitre par un rappel d'éléments de topologie que seront importants tout au long de ces notes de cours.

1.1. Espaces topologiques et espaces métriques

Ici nous listons les définitions de base avec lesquelles nous travaillerons tout au long de ces notes. Commençons d'emblée par l'introduction d'une notation pratique. On commence par introduire les notions d'espace topologique, de topologie-produit, de fonction continue, de convergence, d'espace métrique, de suites de Cauchy et de complétude. On termine avec le théorème du point fixe de Banach.

Notation (Tribu discrète). Soit X un ensemble. Nous noterons $\mathcal{P}(X)$ la **tribu discrète** sur X, c'est à dire l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1.1 (Topologie). Soit X un ensemble et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ est une **topologie** sur X si et seulement si

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(2) $X \in \mathcal{T}$

(3) Soit Λ un ensemble d'indices et $(U_\lambda \in \mathcal{P}(X))_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties de X telles que $U_\lambda \in \mathcal{T}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$,
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

(4) Si $|\Lambda| < +\infty$, alors
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

Définition 1.1.2 (Ouvert, fermé). Soient X un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur X. Soit U une partie de X.
— U est un **ouvert** de X si et seulement si $U \in \mathcal{T}$.
— U est un **fermé** de X si et seulement si U^{c} est un ouvert.

DÉFINITION 1.1.3 (Espace topologique). Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur X. Le couplet $(X, \mathcal{T})$ est un **espace topologique**.

DÉFINITION 1.1.4 (Espace séparé (ou de Hausdorf)). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. $(X, \mathcal{T})$ est **séparé** si $\forall x, y \in X,\ \exists U, V \in \mathcal{T}$ t.q.

(1) $x \in U$
(2) $y \in V$
(3) $U \cap V = \emptyset$

DÉFINITION 1.1.5 (Fermeture). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$ une partie de X. La **fermeture** de A, notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés qui incluent A.

DÉFINITION 1.1.6 (Intérieur). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$ une partie de X. L'**intérieur** de A, noté $\mathrm{Int}A$, est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

DÉFINITION 1.1.7 (Densité). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$ une partie de X. A est **dense** dans X si et seulement si $\overline{A} = X$.

DÉFINITION 1.1.8 (Espace séparable). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. $(X, \mathcal{T})$ est **séparable** si il existe $A \subset X$ tel que A est dénombrable et A est dense dans X.

EXEMPLE 1.1.1. Soit $\mathbb{R}$ un espace topologique avec la topologie usuelle. $\mathbb{R}$ est séparable, car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Par un raisonnement analogue, on constate que les espaces vectoriels de dimension finie $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) sont aussi séparables.

REMARQUE. Il ne faut pas confonre **séparable** et **séparé**.

DÉFINITION 1.1.9 (Continuité). Soient $(X, \mathcal{T}_1)$ et $(Y, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. f est **$(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-continue** si pour tout $V \in \mathcal{T}_2$,

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{T}_1$$

Si le contexte n'est pas ambigu, on peut simplement dire que f est continue.

DÉFINITION 1.1.10 (Topologie induite). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $Y \subseteq X$ une partie de X. La **topologie induite** sur Y par $\mathcal{T}$ est

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

Dorénavant, si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $Y \subseteq X$, Y sera sous-entendu topologique avec la topologie induite sur Y par $\mathcal{T}$.

Définition 1.1.11 (Topologie produit). Soit Λ un ensemble d'indices et soit $((X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'espaces topologiques. De plus, soit $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

La **topologie-produit** sur X est définie comme la plus petite topologie sur X qui contient

$$\left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda,\ |\{\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \neq X_\lambda\}| < \infty \right\} \cup \{\emptyset\}$$

Proposition 1.1.1. *Soit Λ un ensemble d'indices, $((X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'espaces dopologiques et $(X, \mathcal{T})$ l'espace produit. Soit $(Y, \mathcal{T}_0)$ un espace topologique et $f : Y \longrightarrow X$ une fonction. Soient finalement $(p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille de fonctions où $p_\lambda((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = x_\lambda$.*

Alors, f est continue si et seulement si $p_\lambda \circ f$ est continue pour tout λ.

Définition 1.1.12 (Compact). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$ une partie de X. A est **compact** si de tout recouvrement de A par des ouverts de $\mathcal{T}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Autrement dit, si Λ est un ensemble d'indices et $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouverts telle que $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, alors il existe $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tel que Λ_0 est fini et $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$

Proposition 1.1.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

X est compact si pour toute famille $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ avec ensemble d'indices Λ telle que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$, il existe $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tel que Λ_0 est fini et $\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0} F_\lambda = \emptyset$.

Démonstration. La preuve découle de la définition de fermé, avec les identités de De Morgan. $\square$

Théorème 1.1.1 (de Tychonov). *Soit un ensemble d'indices Λ et une famille d'espaces topologiques $((X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ compacts.*

L'espace produit muni de la topologie produit est également compact.

Définition 1.1.13 (Point d'accumulation). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Soit $x \in X$. x est un **point d'accumulation** de la suite si et seulement si

$$\forall U \in \mathcal{T},\ \text{t.q. } x \in U,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ t.q. } x_n \in U$$

Définition 1.1.14 (Convergence, limite). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Soit $x \in X$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers x si et seulement si

$$\forall U \in \mathcal{T},\ \text{t.q. } x \in U,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N,\ x_n \in U$$

Si un tel x existe, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On dit alors que x est une **limite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la limite est unique, on la note $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. On note aussi $x_n \to x$.

Le résultat suivant ne figure pas dans le cours original. Il a été ajouté par souci d'exhaustivité

PROPOSITION 1.1.3. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. Soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ une fonction.*

Si f est continue, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente,

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. Alors il existe un ouvert U de X_2 contenant $f(x)$ et tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n > N$ tel que $f(x_n) \notin U$. Puisque f est continue, $f^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X_1 et il contient x. Si $n > N$, $x_n \notin V$. Donc $x_n \not\to x$, ce qui contredit l'hypothèse que x_n converge vers x. $\square$

THÉORÈME 1.1.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact.*

Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X admet un point d'accumulation.

DÉFINITION 1.1.15 (Compacité séquentielle). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. $(X, \mathcal{T})$ est **séquentiellement compact** si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X admet une sous-suite convergente.

DÉFINITION 1.1.16 (Finesse d'une topologie). Soit X un ensemble et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X. $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** ou **plus faible** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

REMARQUE. Dans une topologie plus faible, il y a «plus de compacts», mais «moins de fonctions continues».

DÉFINITION 1.1.17 (Métrique). Soit X un ensemble. Une **métrique** sur X est une fonction $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) (positivité) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$
(2) (identité) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
(3) (symétrie) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
(4) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X$,
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

DÉFINITION 1.1.18 (Espace métrique). Soit X un ensemble et $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une métrique sur X. Alors, le couplet (X, d) est un **espace métrique**.

PROPOSITION 1.1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*
La métrique d *induit la topologie* $\mathcal{T}_d$ *engendrée par les boules* $(U_{x,r})_{x \in X, r \in \mathbb{R}^+}$ *:*

$$U_{x,r} = \{y \in X \ t.q. \ d(y, x) < r\}$$

Dorénavant, un espace métrique (X, d) sera sous-entendu topologique, et la topologie usuelle sera la topologie induite par d.

Les deux propositions qui suivent et leurs preuves ne figurent pas dans le cours original. Elles ont été ajoutées par souci d'exhaustivité.

PROPOSITION 1.1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*
d *est continue pour la topologie produit sur* X^2.

DÉMONSTRATION. Si $0 < a < b$, les intervalles $[0, a[$, $]a, b[$ et $]b, \infty[$ forment une base de voisinages de $\mathbb{R}^+$. Fixons $x \in X$.

Si $U = [0, a[$ pour un certain $a > 0$, le préimage de U par d est l'ensemble des paires $(x, y) \in X^2$ telles que $d(x, y) < a$. Appelons cet ensemble V. Alors, V est ouvert, car si $(x, y) \in V$, $d(x, y) = \delta < a$. Si $(z, w) \in X^2$ sont tels que $d(z, x) < \frac{a-\delta}{2}$ et $d(y, w) < \frac{a-\delta}{2}$, alors $d(z, w) \leq d(z, x) + d(x, y) + d(y, w) < a$. Ce qui revient à dire que, si $r = \frac{a-\delta}{2}$, alors $U_{x,r} \times U_{y,r} \subset V$.

Si $U =]b, \infty[$ pour un certain $b > 0$, le préimage de U par d est l'ensemble des paires $(x, y) \in X^2$ telles que $d(x, y) > b$. Appelons cet ensemble V. Alors, V est aussi ouvert, car si $(x, y) \in V$, $d(x, y) = \delta > b$. Si $(z, w) \in X^2$ sont tels que $d(z, x) < \frac{\delta-b}{2}$ et $d(w, y) < \frac{\delta-b}{2}$, alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$ et par conséquent, $d(z, w) > b$. Autrement dit, si $r = \frac{\delta-b}{2}$, Alors $U_{x,r} \times U_{y,r} \subset V$. Donc V est ouvert.

Si $U =]a, b[$ pour $0 < a < b$, le préimage de U par d est l'ensemble des paires $(x, y) \in X^2$ telles que $a < d(x, y) < b$. C'est l'intersection des préimages de $[0, b[$ (un ouvert) et de $]a, \infty[$ (aussi un ouvert). C'est donc l'intersection de deux ouverts, et c'est un ouvert. $\square$

PROPOSITION 1.1.6. *Soient* $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ *deux espaces métriques et soit* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *une fonction.*
f *est continue si et seulement si*

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, x \in X_1 \ \exists \delta > 0 \ t.q. \\ \forall y \in X_1 \ d_1(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

DÉMONSTRATION. $(\Rightarrow)$ Si f est continue, alors pour tout $U \subseteq X_2$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est un ouvert. En particulier, si $U = U_{f(x),\varepsilon}$ est une boule ouverte centrée en $f(x)$ et de rayon ε, alors $V = f^{-1}(U)$ est aussi un ouvert, qui contient x, et il existe donc autour de x un voisinage ouvert $U_{x,\delta} \subset V$. Puisque $U_{x,\delta} \subset V$, $f(U_{x,\delta}) \subset U_{f(x)\varepsilon}$, ce qui est exactement 1.1.1.

($\Leftarrow$) Si f remplit la condition 1.1.1, alors il suffit de montrer que pour toute boule ouverte $U \subset X_2$, le préimage est ouvert. Si U est une boule ouverte de rayon ε qui n'intersecte pas $f(X_1)$, le préimage de U est $\emptyset$, qui est ouvert.

Si $V = f^{-1}(U)$ est non-vide, on suppose $x \in f^{-1}(U)$. U est une boule, disons centrée en z, de rayon ε. On peut donc noter $r = d_2(f(x), z)$. Il est évident que $U_{f(x),\varepsilon-r} \subset U$ par l'inégalité du triangle. La boule centrée en $f(x)$ de rayon $\varepsilon - r$ est donc une boule ouverte entièrement contenue dans U et centrée en $f(x)$. Par 1.1.1, il existe un $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, y) < \delta$, alors, $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon - r$. Donc, $f(U_{x,\delta}) \subset U$, et pour tout $x \in V$, il existe une boule ouverte incluse dans V qui contient x, donc V est ouvert. □

PROPOSITION 1.1.7. *Soit (X, d) un espace métrique séparable. Soit $Y \subseteq X$.*

Y est séparable.

THÉORÈME 1.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique.*

X est compact si et seulement si X est séquentiellement compact.

La proposition suivante ne figure pas dans le cours original. Elle est présentée car elle servira à compléter certaines preuves plus loin - néanmoins, elle est présentée ici en vertu de sa formulation générale.

PROPOSITION 1.1.8. *Soit (X, d) un espace métrique séparable. soit $Y \subseteq X$.*

Si Y est compact dans la topologie induite par d, alors Y est bornée.

DÉMONSTRATION. Supposons que Y ne soit pas borné. Soit $y \in Y$. On prend le recouvrement $(U_n = B(y, n))_{n\in\mathbb{N}}$ de Y par des ouverts. Puisque Y est compact, il existe un N tel que $(U_n)_{n\leq N}$ recouvre Y, mais alors U_N recouvre Y et U_N est borné, ce qui est absurde si Y n'est pas borné. □

DÉFINITION 1.1.19 (Suite de Cauchy). Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N,\ d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

DÉFINITION 1.1.20 (Complétude). Soit (X, d) un espace métrique. X est complet si toutes ses suites de Cauchy convergent dans X.

DÉFINITION 1.1.21 (Première et seconde catégories). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. X est de **seconde catégorie** si pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés recouvrant X, il existe au moins un n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non-vide. X est de **première catégorie** s'il n'est pas de seconde catégorie.

Exemple 1.1.2. $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ est une union dénombrable de fermés dont aucun n'est d'intérieur non-vide. Donc, $\mathbb{Q}$ est de première catégorie.

Théorème 1.1.4. *Soit (X, d) un espace métrique complet.*
X est de seconde catégorie.

Définition 1.1.22 (Contraction). Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques complets et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. f est une **contraction** si et seulement si il existe un $k \in [0, 1[$ tel que pour toute paire $x_1, x_2 \in X$,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2)$$

Définition 1.1.23 (Point fixe). Soit X un ensemble et $f : X \longrightarrow X$ une fonction de X sur lui-même. $x \in X$ est un **point fixe** de X si $f(x) = x$.

Théorème 1.1.5 (Principe de contraction de Banach). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une contraction.*

f a un unique point fixe. Notons le x. La suite caractérisée par $x_0 \in X$, $x_{i+1} = f(x_i)$ converge vers x et

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x) \tag{1.1.2}$$

1.2. Espaces de Hilbert

Dans ce qui suit, on travaillera dans des espaces vectoriels, potentiellement de dimension infinie indénombrable. On introduit les notions de norme, d'espace vectoriel normé, d'espace de Banach, d'espace dual, de produit scalaire, d'espace préhilbertien et on termine avec la définition d'un espace de Hilbert.

Définition 1.2.1 (Semi-norme). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **semi-norme** sur X est une fonction $p : X \longrightarrow R$ qui satisfait

(1) $p(x) \geq 0 \ \forall x \in X$
(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X$
(3) $p(x) + p(y) \geq p(x + y) \ \forall x, y \in X$

Définition 1.2.2 (Norme). Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\|\cdot\|$ une semi-norme sur X. $\|\cdot\|$ est une **norme** sur X si et seulement si

$$\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$$

Définition 1.2.3 (Espace normé). Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\|\cdot\|$ une norme sur X. Le couplet $(X, \|\cdot\|)$ est un **espace normé**.

Exemple 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ avec la norme usuelle $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

$\mathbb{R}^n$ avec la norme «1» (Manhattan) : $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

$\mathbb{R}^n$ avec la norme ∞ (max) : $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

L'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $C([0,1], \mathbb{K})$ avec la norme usuelle : $\|f\| = \max\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$

$C([0,1], \mathbb{K})$ avec la norme 1 : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$

Proposition 1.2.1. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. La norme induit une métrique d sur X :*

$$\forall x, y \in X \qquad d(x,y) = \|x - y\|$$

Démonstration. Il suffit de montrer que d est bel et bien une métrique. On vérifie les propriétés de la définition 1.1.17.

(1) suit directement de la définition d'une semi-norme.

(2) Si $\|x - y\| = 0$, alors $x - y = 0$ et $x = y$. L'autre sens est trivial.

(3) $d(x,y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \, \|y - x\| = d(y,x)$

(4) $d(x,y) + d(y,z) = \|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - y + y - z\| = \|x - z\| = d(x,z)$

$\square$

Dorénavant, si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, X sera sous-entendu métrique, donc topologique. Pour faire plus simple,

(1) «X est un espace topologique» sous-entend une topologie $\mathcal{T}$.

(2) «X est un espace métrique» sous-entend une métrique d.

(3) «X est un espace normé» sous-entend une norme $\|\cdot\|$.

(4) Dans un contexte où il y a plusieurs espaces, on notera en indice l'espace auquel une métrique ou une norme s'applique.

Définition 1.2.4 (Espace de Banach). X est un **espace de Banach** si X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.

Définition 1.2.5 (Espace dual). Soit X un espace de Banach. L'**espace dual** de X, noté X' est

$$X' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \text{f est linéaire et continue}\}$$

Remarque. Si X est un espace de Banach, on peut munir X' de la norme duale :

$$\begin{aligned}\|f\|_{X'} &= \sup\{|f(x)| \mid x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| \mid x \in X,\ \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} \mid x \in X\right\}\end{aligned}$$

Définition 1.2.6 (Produit de dualité). Soit X un espace de banach. Le **produit de dualité** de X' et X, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ est défini par

$$\langle f, x \rangle = f(x)$$

Exemple 1.2.2. $C([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme usuelle est bel et bien un espace de Banach. Par contre, avece la norme $\|\cdot\|_1$, cet espace n'est pas complet.

Définition 1.2.7 (Produit scalaire). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un **produit scalaire** sur X est une fonction $(\cdot, \cdot) : X^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que

(1) $(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$
(2) $(x, x) \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in X$
(3) $(x, y) = \overline{(y, x)} \ \forall x, y \in X$
(4) $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y) \ \ \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$
(5) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\,(x, y) \ \ \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$
(6) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$

Définition 1.2.8 (Espace préhilbertien). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire sur X. Le couplet $(X, (\cdot, \cdot))$ est un **espace préhilbertien**.

Pour faire plus court, «X est un préhilbertien» sous-entendra un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit X un espace préhilbertien.*
$\forall x, y \in X$,

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y) \tag{1.2.1}$$

Démonstration. Si x ou $y = 0$, l'inégalité est triviale. Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $(x - \alpha y, x - \alpha y) \geq 0$. Par conséquent,

$$(x, x) - \alpha\,(y, x) - \overline{\alpha}\,(x, y) + |\alpha|^2\,(y, y) \geq 0$$

On choisit $\alpha = \frac{(x,y)}{(y,y)}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0 \\
\Rightarrow\ &(x, x) \geq \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.2. *Soit X un préhilbertien.*
Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ induit la norme $\|\cdot\|$ par

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Démonstration. On commence par montrer que cette définition vérifie les propriétés d'une semi-norme (définition 1.2.1).

(1) suit directement de la définition du produit scalaire.

(2) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\sqrt{(x, x)} = |\alpha|\,\|x\|$

(3)

$$\begin{aligned}
(\|x\| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| \\
&= (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)\,(y, y)} \\
&\geq (x, x) + (y, y) + 2|(x, y)| \\
&\geq (x, x) + (y, y) + 2\Re\,(x, y) \\
&= (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) \\
&= (x + y, x + y) = \|x + y\|^2
\end{aligned}$$

De plus, par définition, $x = 0$ entraîne que $\|x\|^2 = (x, x) = 0$ et à l'inverse, $\|x\| = 0$ entraîne $(x, x) = 0$. Par définition du produit scalaire, cela implique $x = 0$. □

La proposition suivante ne figurait pas dans le cours. Elle a été incluse car sa conclusion n'était pas immédiatement évidente à l'auteur.

Proposition 1.2.3. *Soit X un préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Le produit scalaire induit une norme, donc une métrique, donc une topologie sur X.*

Le produit scalaire est continu pour la topologie qu'il engendre sur X^2 et la topologie usuelle sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Si U est un ouvert de $\mathbb{K}$, alors $\{\overline{u} \mid u \in U\}$ est aussi un ouvert de $\mathbb{K}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $y \in X$, $f_y : X \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $f_y(x) = (x, y)$ est une fonction continue.

f_y est clairement linéaire pour tout y, puisque le produit scalaire est linéaire sur la première entrée. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, on peut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|} > 0$ et alors, lorsque $\|x - z\| < \delta$, on a que

$$|(x, y) - (z, y)| = |(x - z, y)| \leq \|y\| \, \|x - z\| < \varepsilon$$

Ainsi, on sait que $(x, \cdot)$ est continue pour tout x et que $(\cdot, y)$ est continue pour tout y. Donc $(\cdot, \cdot)$ est une fonction continue. $\square$

DÉFINITION 1.2.9 (Espace de Hilbert). Soit X un préhilbertien. X est un **espace de Hilbert** si et seulement si X est complet.

EXEMPLE 1.2.3. $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire $((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace de Hilbert.

$C([0, 1], \mathbb{K})$ avec $(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace préhilbertien, mais pas un espace de Hilbert.

$\ell^2(\mathbb{K}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ avec le produit scalaire $((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}$ est un espace préhilbertien mais il n'est pas complet.

L'espace $L^2([0, 1], \mathbb{K}) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K} \mid \int_0^1 |f(t)|dt < \infty\}$ avec le produit scalaire $(f, g, =) \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert.

La figure 1 illustre les inclusions des différents types d'espaces couverts jusqu'ici.

1.3. Projection sur un convexe

Nous nous intéressons aux propriétés particulières des espaces de Hilbert. On peut se demander si, étant donnée une norme $\|\cdot\|$, il existe un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ qui induit cette norme. On commence par examiner une identité pratique : l'identité du parallélogramme. Cette identité est importante car elle assure que dans l'espace de Hilbert, les boules sont «rondes».

Cette section sera dédiée à la caractérisation de la projection d'un point sur un convexe.

PROPOSITION 1.3.1 (Identité du parallélogramme). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$.*

Alors,

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\ &= 2\,(x, x) + 2\,(y, y) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

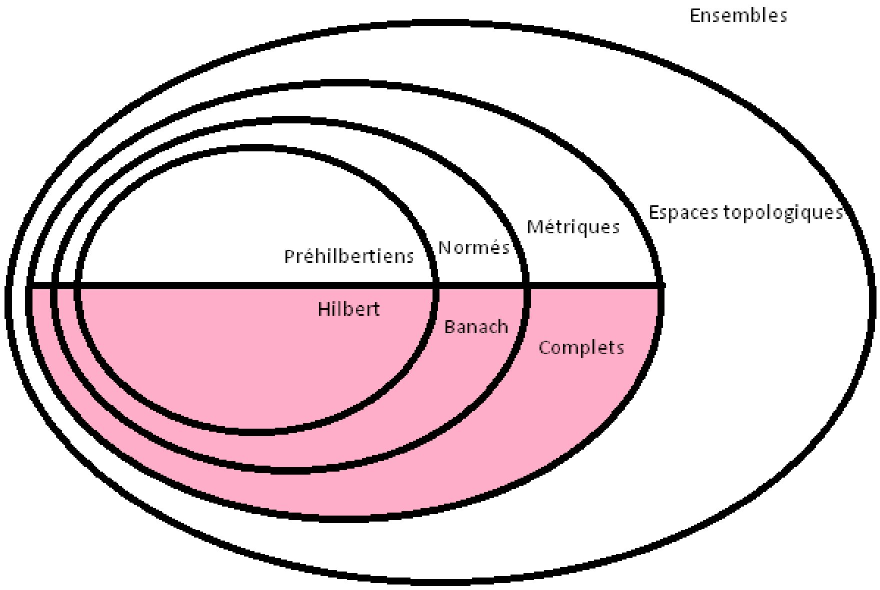

FIGURE 1. Inclusions des différent types d'espaces. En rose, les espaces complets.

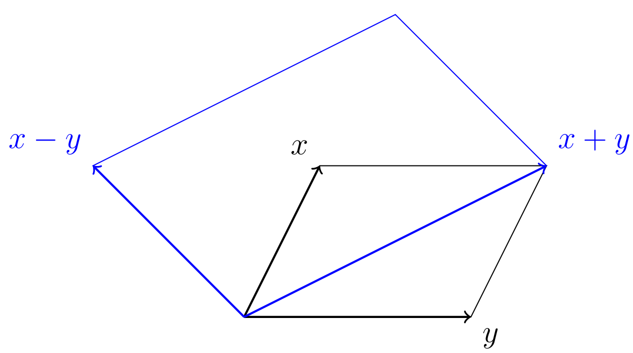

FIGURE 2. Ici, le nom de cette identité prend tout son sens : elle dit que la somme des carrés des côtés d'un paralléllogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales, ce qui est un fait géométtrique bien connu.

$\square$

La figure 2 donne une intuition de cette inégalité pour $\mathbb{R}^2$. Cependant, la preuve tient pour n'importe quel espace de Hilbert. Par contre, la preuve repose sur le produit scalaire. L'exemple 1.3.1 montre l'inégalité dans un cas où la norme ne provient pas d'un produit scalaire.

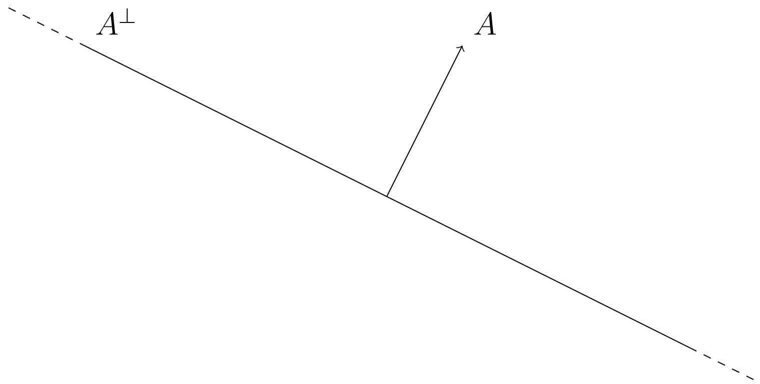

FIGURE 3. Une illustration de l'exemple 1.3.2

EXEMPLE 1.3.1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ telle que définie à l'exemple 1.2.1. On prend $x = (1, 2)$ et $y = (2, 1)$.

$\|x + y\|^2 = 36$. $\|x - y\|^2 = 4$. $\|x\|^2 = \|y\|^2 = 9$. Or, $36 \neq 40$, et ici, l'inégalité est donc manifestement fausse.

Le produit scalaire permet de définir la notion d'angle, donc d'angle droit.

DÉFINITION 1.3.1 (Orthogonalité). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

(1) Soient $x, y \in \mathcal{H}$. x et y sont **orthogonaux** (noté $x \perp y$) si et seulement si $(x, y) = 0$.
(2) Soient $A, B \subseteq \mathcal{H}$. A et B sont **orthogonaux** si et seulement si pour tout $x \in A$, $y \in B$, $x \perp y$. On note $A \perp B$.
(3) Soit $A \subseteq \mathcal{H}$. Le **complément orthogonal** de A est noté $A^\perp$ et est donné par

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid x \perp y \ \forall y \in A\}$$

EXEMPLE 1.3.2. Dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \{(1, 2)\}$, $A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 0\}$. On obtient alors $A^\perp = \{(-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (figure 3).

Si $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $B^\perp = \{0\}$.

PROPOSITION 1.3.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $A \subseteq \mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{H}$.*

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

DÉMONSTRATION. $A^\perp$ muni du produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien. On voit que c'est un sous-espace vectoriel par linéarité du produit scalaire : toute combinaison linéaire d'éléments orthogonaux à A est aussi orthogonale à A.

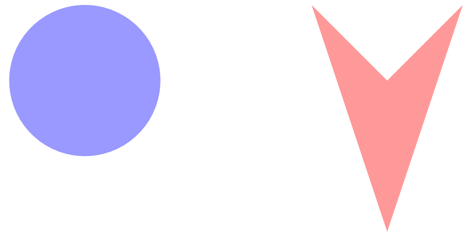

FIGURE 4. À gauche, une partie convexe du plan, et à droite, une partie non-convexe.

Il suffit donc de montrer que $A^\perp$ est fermé. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A^\perp$ qui converge vers $y \in \mathcal{H}$, et si $x \in A$, alors, par bicontinuité du produit scalaire,

$$y_n \to y \;\Rightarrow\; (y_n - y, x) \to 0 \;\Rightarrow\; (y_n, x) \to (y, x)$$

Or, $y_n \in A^\perp$, donc pour tout n, $(y_n, x) = 0$, et donc $(y, x) = 0$ et $y \in A^\perp$. □

PROPOSITION 1.3.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $A \subseteq \mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$.*

$$A^\perp = \{0\}$$

DÉMONSTRATION. Si $x \in A^\perp$, puisque A est dense, il exuste une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $y_n \to x$. Or, $y_n \to x \;\Rightarrow\; (y_n - x, x) \to 0$. Par conséquent,

$$(y_n, x) \to (x, x) = \|x\|^2$$

Mais puisque $y_n \in A$ pour tout n, $(y_n, x) = 0$ pour tout n, on a $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. Donc $A^\perp = \{0\}$. □

On se penche maintenant sur la projection sur des convexes. Commençons par une définition.

DÉFINITION 1.3.2 (Convexité). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $A \subseteq X$. A est **convexe** si et seulement si pour toute paire $x, y \in A$,

$$tx + (1-t)y \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

La figure 4 illustre bien ce qu'est la convexité.

DÉFINITION 1.3.3 (Projection sur un convexe). Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et C une partie convexe de X. Soit $x \in X$ un point quelconque de X. On appelle **projection** sur C tout point $y \in C$ tel que

$$(*) \qquad \forall z \in C \qquad \|x - y\| \leq \|x - z\|$$

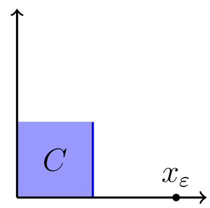

FIGURE 5. Tous les points sur le côté droit de C sont des projections de x_ε.

REMARQUE. La projection sur un convexe n'existe pas toujours, et elle n'est pas forcément unique si il en existe une.

EXEMPLE 1.3.3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ muni de la norme usuelle, et tel que $\|x\| > 1$. On prend le convexe $C = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1\}$. C est un ouvert, et il n'existe pas de point dans C qui satisfait la condition *.

EXEMPLE 1.3.4. Soit maintenant $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ décrite à l'exemple 1.2.1. Considérons aussi le convexe $C = [0,1]^2$ et le point $x_\varepsilon = (2+\varepsilon, 0)$. Pour tout $z \in C$ et $\varepsilon > 0$,

$$\|x_\varepsilon - z\|_\infty = \max\{2+\varepsilon - z_1, z_2\}$$

et puisque $0 \leq z_1, z_2 \leq 1$, il est clair que peu importe z_2, $\|x_\varepsilon - z\|_\infty = 2 + \varepsilon - z_1$. Par conséquent, pour n'importe quel $y = (1, z_2)$ avec $z_2 \in [0,1]$, y satisfait *.

La figure 5 illustre l'exemple 1.3.4.

Si C est fermé et que X est en fait un espace de Hilbert, le théorème suivant garantit l'existence et l'unicité d'une projection.

THÉORÈME 1.3.1 (Projection sur un convexe). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subseteq \mathcal{H}$ une partie convexe fermée non-vide de $\mathcal{H}$.*

Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \qquad \forall z \in C \tag{*}$$

De plus, y est caractérisé par

$$(x-y, z-y) + (z-y, x-y) \leq 0 \qquad \forall z \in C \tag{**}$$

REMARQUE. Dans $\mathbb{R}^n$, ** correspond à l'intuition que «par rapport à x, tous les éléments de C se retrouvent derrière y».

DÉMONSTRATION. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C telle que

$$\|y_n - x\| = d_n \to d = \inf\{\|z - x\| \mid z \in C\}$$

.

On peut créer une telle suite aisément en prenant $B_n = \{y \in \mathcal{H} \mid \|y - x\| < d + 1/n\}$. On a $\partial B_n \cap C \neq \emptyset$ par définition de d. Si on choisit $y_n \in \partial B_n \cap C$, on obtient la suite désirée.

Or, $y_n - y_m = (x - y_m) - (x - y_n)$ et $(x - y_m) + (x - y_n) = 2\left(x - \frac{y_m + y_n}{2}\right)$. Par l'identité du parallélogramme,

$$\|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 + \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 = 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2\right)$$

$$\Rightarrow 4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(d_m^2 + d_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y_n - y_m\|^2 = (d_m^2 + d_n^2) - 2\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

Or, bien sûr, $\frac{y_m + y_n}{2} \in C$ car $y_n, y_m \in C$ et C est convexe. Donc $\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 \geq d^2$. En conséquence

$$\frac{1}{2}\|y_n - y_m\|^2 \leq (d_m^2 - d^2) + (d_n^2 - d^2)$$

Or, $d_n^2 \to d^2$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n^2 - d^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Mais alors, ceci signifie que, pour $m, n > N$, $\|y_n - y_m\|^2 \leq \varepsilon^2$, donc que $\|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$ Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par complétude, la limite existe et par fermeture de C, elle est dans C.

On note $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ et on montre que * est vraie pour y.

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \lim_{n\to\infty} d_n = d = \inf\{\|x - z\| \mid z \in C\}$$

Supposons maintenant $\hat{y} \neq y$ t.q. $\|x - \hat{y}\| \leq \|x - z\| \ \forall z \in C$. Alors, $\hat{y} - y = (x - y) - (x - \hat{y})$. et $2\left(x - \frac{\hat{y} + y}{2}\right) = (x - y) + (x - \hat{y})$

Par l'identité du parallélogramme,

$$\|(x - y) + (x - \hat{y})\|^2 + \|(x - y) - (x - \hat{y})\|^2 = 2\left(\|x - y\|^2 + \|x - \hat{y}\|^2\right)$$

$$\Rightarrow 4\left\|x - \frac{y + \hat{y}}{2}\right\|^2 + \|\hat{y} - y\|^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|x - \hat{y}\|^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 = \|x - \hat{y}\|^1 + \|x - y\|^2 - 2\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

Puisque $y, \hat{y} \in C$, $\frac{y + \hat{y}}{2} \in C$ car C est convexe. Ainsi, $\left\|x - \frac{y + \hat{y}}{2}\right\|^2 \geq d^2$ et

$$\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|x - \hat{y}\|^2 - 2d^2$$

Mais $\|x-y\| = \|x-\hat{y}\| = d$ et par conséquent $0 \leq \|y-\hat{y}\| \leq 0$, donc $y = \hat{y}$.

On montre maintenant que * $\Rightarrow$ **. $\forall z \in C, t \in [0,1]$ $(1-t)y+tz \in C$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &\leq \|x-(1-t)y-tz\|^2 \\
&= \|(x-y)+t(y-z)\|^2 \\
&= ((x-y)+t(y-z),(x-y)+t(y-z)) \\
&= \|x-y\|^2 + t\,(y-z,x-y) + t\,(x-y,y-z) + t^2\,\|y-z\|^2
\end{aligned}$$

En conséquence, on obtient que

$$\begin{aligned}
& t\,((y-z,x-y)+(x-y,y-z)) \geq -t^2\,\|y-z\|^2 \\
\Rightarrow\ & -((y-z,x-y)+(x-y,y-z)) \leq t\,\|y-z\|^2 \\
\Rightarrow\ & (z-y,x-y)+(x-y,z-y) \leq t\,\|y-z\|^2
\end{aligned}$$

Cette inéquation est vraie pour toute valeur de $t \in [0,1]$, et en particulier, on en déduit **

On montre aussi que ** $\Rightarrow$ *. Pour $z \in C$,

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 - \|x-z\|^2 &= \|x-y\|^2 - (((x-y)+(y-z),(x-y)+(y-z))) \\
&= \|x-y\|^2 - \left(\|x-y\|^2 - ((z-y,x-y)+(x-y,z-y)) + \|y-z\|^2\right) \\
&= (z-y,x-y)+(x-y,z-y) - \|y-z\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Donc, $\|x-y\|^2 \leq \|x-z\|^2$ pour tout $z \in C$. □

Le théorème 1.3.1 nous donne l'existence et l'unicité de la projection pour chaque x. On peut donc introduire une notation pratique.

Notation. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $C \subseteq \mathcal{H}$ une partie convexe fermée non-vide de $\mathcal{H}$. On introduit $p_C : \mathcal{H} \longrightarrow C$ l'application qui envoie x vers sa projection convexe sur C.

Il est évident que pour tout C, p_C est surjective – il suffit de remarquer que p_C restreinte à C est l'identité sur C.

En vue de la prochaine proposition, il convient d'introduire quelques notions d'ordre général.

Définition 1.3.4 (Fonction lipschitzienne). Soient (X,d_1) et (Y,d_2) deux espaces métriques, et soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. f est **k-lipschitzienne** ($k \in \mathbb{R}$) si et seulement si pour tous $x, y \in X$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leq kd_1(x, y)$$

DÉFINITION 1.3.5 (Fonction non-expansive). Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques, et soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. f est **non-expansive** si et seulement si elle est 1-lipschitzienne.

PROPOSITION 1.3.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexe fermé non-vide dans $\mathcal{H}$, et $p_C : \mathcal{H} \longrightarrow C$ l'application «projection sur C».*

p_C est une application non-expansive.

DÉMONSTRATION. On sait que pour tout $x \in \mathcal{H}, z \in C$, on a

(a) $$(x - p_C(x), z - p_C(x)) + (z - p_C(x), x - p_C(x)) \leq 0$$

Ceci est obtenu par définition de p_C et par la caractérisation de la projection sur C. De même, pour $y \in \mathcal{H}$,

(b) $$(y - p_C(y), z - p_C(y)) + (z - p_C(y), y - p_C(y)) \leq 0$$

En choisissant $z = p_C(y)$ dans l'équation a et $z = p_C(x)$ dans l'équation b, et en additionnant les deux, on a

$$\begin{aligned} &(x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)) + (p_C(y) - p_C(x), x - p_C(x)) \\ &+ (y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)) + (p_C(x) - p_C(y), y - p_C(x)) \leq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. Donc

$$\begin{aligned} &(x - y + p_C(y) - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)) + (p_C(y) - p_C(x), x - y + p_C(y) - p_C(x)) \leq 0 \\ \Rightarrow\ &(x - y, p_C(y) - p_C(x)) + (p_C(y) - p_C(x), x - y) + 2\left\|p_C(y) - p_C(x)\right\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow\ &\left\|p_C(y) - p_C(x)\right\|^2 \leq \Re\left((y - x, p_C(y) - p_C(x))\right) \leq \left|(y - x, p_C(y) - p_C(x))\right| \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz (théorème 1.2.1),

$$\left\|p_C(y) - p_C(x)\right\|^2 \leq \|y - x\| \left\|p_C(y) - p_C(x)\right\|$$

ce qui prouve le résultat. □

On remarque en particulier que les combinaisons linéaires convexes sont des combinaisons linéaires, et que par conséquent, tout sous-espace vectoriel est convexe. Cela dit, les sous-espaces vectoriels ont des propriétés additionnelles qui les rendent particuliers au regard des projections. Le théorème suivant est un «théorème omnibus» qui décrit le lien entre projection convexe, orthogonalité et sous-espaces vectoriels.

Avant de procéder au théorème cependant, nous introduisons deux définitions

DÉFINITION 1.3.6 (Noyau). Soient X un ensemble et Y un groupe. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. On appelle **noyau** de f et on note $\mathrm{N}(f)$ l'ensemble des éléments de X envoyés par f sur l'élément neutre de Y.

$$\mathrm{N}(f) = \{x \in X \mid f(x) = e \in Y\}$$

DÉFINITION 1.3.7 (Image). Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. On appelle **image** de f et on note $\mathrm{R}(f)$ l'ensemble des images d'éléments de x par f.

$$\mathrm{R}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Nous utiliserons sans les montrer plusieurs théorèmes et résultats d'algèbre linéaire en lien avec ces notions.

THÉORÈME 1.3.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, soit $M \subseteq \mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.*

M est convexe.

Si p_M est définie comme précédemment, alors

(1) *Si $h \in M$, alors $x - h \perp M \;\Leftrightarrow\; p_M(x) = h$.*
(2) *p_M est une application linéaire.*
(3) *$\|p_M(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.*
(4) *p_M est idempotente (c'est à dire que $p_M \circ p_M = p_M$.*
(5) *$\mathrm{N}(p_M) = M^{\perp}$.*

DÉMONSTRATION. Ainsi que mentionné, puisque les combinaisons linéaires convexes sont des combinaisons linéaires, si M est un sous-espace vectoriel, forcément si $x, y \in M$, on a que pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in M$.

(1) On montre d'abord ($\Rightarrow$). Si $h \in M$, alors si $x - h \perp M$, pour tout $y \in M$,

$$(x - h, y) = 0$$

Donc, pour tout $z \in M$, puisque $h \in M$, $z - h$ est aussi dans M et

$$(x - h, z - h) + (z - h, x - h) = 0 \leq 0$$

h correspond au critère ** de la projection convexe. Par conséquent, $h = p_M(x)$.

($\Leftarrow$) Par la caractérisation de $p_M(x)$, si $h = p_M(x)$, alors pour tout $z \in M$,

$$(x - h, z - h) + (z - h, x - h) \leq 0$$

Puisque M est un sous-espace vectoriel, pour tout $y \in M$, $h \pm y \in M$. Donc $(x-h, y) + (y, x-h) \leq 0$. Mais $-y \in M$ aussi, et donc $(x-h, -y) + (-y, x-h) \leq 0$ aussi. Cela donne donc finalement

$$\mathfrak{R}\left((x-h, y)\right) = 0 \qquad \forall y \in M.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère aussi que $h \pm iy \in M$, d'où on obtient que $(x-h, iy) + (iy, x-h) \leq 0$ et $(x-h, -iy) + (-iy, x-h) \leq 0$ ce qui résulte en

$$\mathfrak{I}\left((x-h, y)\right) = 0 \qquad \forall y \in M.$$

Donc finalement, pour tout $y \in M$, $(x-h, y) = 0$ et $x - h \perp M$.

(2) Soit $a \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathcal{H}$. On montre que $p_M(ax+y) = ap_M(x) + p_M(y)$.

On écrit d'abord $h = ap_M(x) + p_M(y)$ et $w = ax + y$. $h \in M$ puisque c'est une combinaison linéaire d'éléments de M. On prend $z \in M$.

$$\begin{aligned}
(w-h, z) &= (ax+y, z) - (ap_M(x) + p_M(y), z) \\
&= (a(x - p_M(x)) + (y - p_M(y)), z) \\
&= a\,(x - p_M(x), z) + (y - p_M(y), z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie car par la propriété précédente, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $v - p_M(v) \perp M$, et $z \in M$.

Ainsi, $w - h \perp z$ pour tout $z \in M$. Donc $w - h \perp M$ et par la propriété précédente, encore une fois, $p_M(w) = h$, ce qui implique que

$$p_M(ax+y) = ap_M(x) + p_M(y)$$

(3) Par la proposition 1.3.4, p_M est non-expansive. Le résultat suit immédiatement par linéarité de p_M : $p_M(0) = 0$ et

$$\|p_M(y)\| \leq \|y\|$$

(4) Ce résultat s'applique pour n'importe quel C convexe fermé non-vide, et suit de la définition de norme : Soit $x \in C$. alors $\|x - x\| = 0 \leq \|x - z\|$ pour tout $z \in C$ et donc $p_M(x) = x$ si $x \in C$.

Cependant, pour M un sous-espace vectoriel, il existe une preuve différente. Pour tout $h \in M$, $y \in M$, $(h-h, y) = 0$. Par la première propriété on en conclue $p_M(h) = h$ si $h \in M$.

Le résultat est alors démontré, car pour tout $x \in \mathcal{H}$, $p_M(x) \in M$ et

$$p_M(p_M(x)) = p_M(x) \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

(5) Pour tout $x \in M \perp$, $(x, y) = 0$ pour tout $y \in M$. En prenant $h = 0$, $(x - h, y) = 0$ pour tout $y \in M$ et $h = p_M(x) = 0$. Donc

$$M^{\perp} \subseteq \mathrm{N}\,(p_M)\,.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathrm{N}\,(p_M)$, on a $p_M(x) = 0$. Or, par la première propriété, $(x - p_M(x), y) = 0$ pour tout $y \in M$, et on a donc $(x, y) = 0$ pour tout $y \in M$, donc $x \in M^{\perp}$. Donc

$$\mathrm{N}\,(p_M) \subseteq M^{\perp}.$$

$\square$

1.4. Théorème de représentation de Riesz

Dans cette section nous amorçons l'étdue des liens entre l'espace de Hilbert et son espace dual. Nous verrons que ces liens sont très étroits.

Pour rappel, si X est n'importe quel espace de Banach sur $\mathbb{K}$, nous avons défini le **dual** X' de X comme l'espace vectoriel des fonctionnelles linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$. Nous l'avons garni d'une norme $\|\cdot\|_{X'}$ donnée par $\|f\|_{X'} = \sup\{|f(x)| \mid x \in X, \|x\| = 1\}$ et nous avons introduit le **produit de dualité** $\langle\cdot,\cdot\rangle : X' \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ défini par $\langle f, x\rangle = f(x)$.

Remarque. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On définit $f_y : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ par $f_y(x) = (x, y)$ pour tout $y \in \mathcal{H}$. Puisque le produit scalaire est linéaire sur la première entrée (définition 1.2.7), f_y est linéaire, et puisque le produit scalaire est bicontinu, f_y est un élément du dual.

En fait, on peut définir $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ par $y \mapsto f_y$ Il est évident que ϕ est une application linéaire. ϕ est injective, car clairement, $\mathrm{N}\,(\phi) = \{0\}$.

On peut se demander si en fait, ce ϕ n'est pas même surjective. Le théorème de représentation de Riesz apportera une réponse à cette question. Cependant, avant de l'énoncer, nous aurons besoin d'un lemme pratique.

Lemme 1.4.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et soit A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$.*

Alors, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(1) A est dense dans $\mathcal{H}$.

(2) $A^{\perp} = \{0\}$

Démonstration. Par la proposition 1.3.3, le sens ($\Rightarrow$) est trivial. Montrons que c'est également vrai dans l'autre sens.

Si $x \in \mathcal{H} \backslash A$, alors $p_A(x) \in A$ et $x - p_A(x) \in A^\perp$. Mais puisque $A^\perp = \{0\}$, on doit avoir que $x = p_A(x)$. Or, si $\mathcal{H} \neq \overline{A}$, il existe $y \in \mathcal{H}$ t.q. $y - p_A(y) \neq 0$, ce qui contredit le raisonnement que nous venons de faire. Donc, $\mathcal{H} = \overline{A}$ et A est dense dans $\mathcal{H}$. $\square$

Il faut bien le distinguer de la proposition 1.3.3 : la réciproque n'est pas vraie en général, mais seulement dans les cas où A est un sous-espace vectoriel.

Nous allons maintenant énoncer le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.4.1 (Représentation de Riesz). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.*

Pour tout $f \in \mathcal{H}'$, il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que

$$\langle f, x \rangle = (x, y) \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

De plus, $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|y\|_{\mathcal{H}}$.

Autrement dit, ϕ est en fait une isométrie, et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}'$. Si $f = 0$, alors il suffit de prendre $y = 0$, et le tour est joué.

On s'intéresse au cas où $\mathrm{N}(f) \neq \mathcal{H}$. $\mathrm{N}(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé puisque f est continue, et que par conséquent si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathrm{N}(f)$ convergeant vers x, alors $f(x_n) \to f(x)$ et puisque $f(x_n) = 0$ pour tout n, $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{N}(f)$.

Puisque $\mathrm{N}(f)$ est fermé et n'est pas égal à $\mathcal{H}$, par le lemme 1.4.1, $\mathrm{N}(f)^\perp$ n'est pas trivial. On choisit alors $z \in \mathrm{N}(f)^\perp$ non nul et tel que $\langle f, z \rangle = 1$. C'est toujours possible car si $w \in \mathrm{N}(f)^\perp$, puisqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, $\frac{w}{\langle f, w \rangle} \in \mathrm{N}(f)^\perp$ aussi, et si $z = \frac{w}{\langle f, w \rangle}$, z vérifie bien la propriété désirée.

On cherche alors y de la forme $y = \alpha z$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Si un tel α existe, on doit avoir

$$\langle f, z \rangle = (z, y) = (z, \alpha z) = \overline{\alpha} \|z\|^2 = 1$$

Il suffit alors de choisir $\alpha = \frac{1}{\|z\|^2}$, de sorte que

$$y = \frac{z}{\|z\|^2}$$

On vérifie maintenant que y remplit les conditions que l'on souhaite.

$$\begin{aligned}
& (x,y)(z,z) = (x,z) && \text{par définition de } z \\
\Rightarrow\ & (x-(x,y)z, z) = 0 && \\
\Rightarrow\ & x-(x,y)z \in \mathrm{N}(f) && \text{car } z \in \mathrm{N}(f)^{\perp} \\
\Rightarrow\ & \langle f, x-(x,y)z\rangle = 0 && \\
\Rightarrow\ & \langle f,x\rangle - (x,y)\langle f,z\rangle = 0 && \text{par linéarité} \\
\Rightarrow\ & \langle f,x\rangle = (x,y) && \text{car } \langle f,z\rangle = 1
\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $\hat{y}$ tel que $\langle f,x\rangle = (x,\hat{y})$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Alors, $(x,y) = (x,\hat{y})$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ et par conséquent,

$$(x, y-\hat{y}) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

En particulier, $\|y-\hat{y}\|^2 = 0$ et $y = \hat{y}$. Donc y est bien unique, et on sait qu'il existe toujours.

$\|f\|_{\mathcal{H}'} = \sup\{|\langle f,x\rangle| \mid \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ Donc, $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \sup\{|(x,y)| \mid \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$

Par Cauchy-Schwarz (théorème 1.2.1),

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| \leq \|y\|$$

si $\|x\| \leq 1$, et $\sup\{|(x,y)| \mid \|x\| \leq 1\} = \|y\|$ puisque lorsque $x = \frac{y}{\|y\|}$, on a que $|(x,y)| = \|y\|$.

Donc,

$$\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|y\|_{\mathcal{H}}$$

□

1.5. Ensembles orthonormaux et bases Hilbertiennes

Nous poursuivons notre description des espaces de Hilbert. Nous introduisons les notions d'ensembles orthogonaux, orthonormaux, de bases hilbertiennes.

Ces notions peuvent paraître triviales dans des espaces vectoriels de dimension finie, mais en dimension infinie, il y a du travail à faire.

Pour certaines preuves, il sera peut-être utile de consulter l'annexe A.

DÉFINITION 1.5.1 (Ensemble orthogonal). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\xi \subseteq \mathcal{H}$ ξ est un **ensemble orthogonal** si

$$\forall x, y \in \xi \text{ t.q. } x \neq y \qquad (x,y) = 0$$

Définition 1.5.2 (Ensemble orthonormal). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\xi \subseteq \mathcal{H}$ un ensemble orthogonal. ξ est **orthonormal** si ξ est normalisé, c'est à dire que

$$\|x\| = 1 \qquad \forall x \in \xi$$

Définition 1.5.3 (Base hilbertienne). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\xi \subseteq \mathcal{H}$ un ensemble orthonormal. ξ est une **base hilbertienne** si ξ est maximal (au sens de A.0.2) pour la relation d'ordre partiel $\subseteq$ sur l'ensemble des parties orthonormales de $\mathcal{H}$ qui incluent ξ. En d'autres termes, ξ est une base hilbertienne si et seulement si

$$\nexists x \in \mathcal{H} \backslash \xi \text{ t.q. } \xi \cup \{x\} \text{ est orthonormal}$$

Proposition 1.5.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\xi \subseteq \mathcal{H}$ une partie orthonormale de $\mathcal{H}$.*

Il existe une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ qui inclue ξ.

Démonstration. On va appliquer le lemme de Zorn (lemme A.0.1). Soit $O \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ défini comme ceci :

$$O = \{\hat{\xi} \subseteq \mathcal{H} \mid \xi \subseteq \hat{\xi} \text{ et } \hat{\xi} \text{ est orthonormal}\}$$

O est non-vide car $\xi \in O$. Soit $P \subseteq O$ une partie totalement ordonnée de O. Alors on prend $\tilde{\xi} = \bigcup_{\hat{\xi} \in P} \hat{\xi}$. On a que pour tout $\hat{\xi} \in P$, $\hat{\xi} \subseteq \tilde{\xi}$ Donc, $\tilde{\xi}$ est un majorant de P. On a trouvé un majorant pour toute partie totalement ordonnée de O, donc O est inductif.

Par le lemme de Zorn, O admet un élément maximal. Appelons-en un B. Si B n'est pas une base hilbertienne, alors il existe $x \in \mathcal{H} \backslash B$ tel que $\{x\} \cup B$ est orthonormal. Appelons cet ensemble B'. Puisque $\xi \subseteq B$, $\xi \subseteq B'$ et $B' \in O$. Mais $B \subseteq B'$ et $B \neq B'$ ce qui contredit le fait que B est un élément maximal de O. On doit donc conclure que B est une base hilbertienne. $\square$

Notation. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $S \subseteq E$ une partie de E, et $\mathcal{P}^*(S)$ l'ensemble des parties finies non-vides de S. On notera

$$\operatorname{Eng}\{S\} = \left\{ \sum_{x \in P} \lambda_x x \mid P \in \mathcal{P}^*(S), \lambda_x \in \mathbb{K} \ \forall x \in P \right\}$$

l'**espace engendré** par S. Il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de S. Le sous-espace fermé engendré par S sera noté $\overline{\operatorname{Eng}\{S\}}$.

Proposition 1.5.2 (Processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $S = \{x_i \in H \mid i \in I\}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{H}$ linéairement indépendants avec $I \subseteq \mathbb{N}$.*

Alors il existe un ensemble orthonormal $\hat{S} = \{e_i \in \mathcal{H} \mid i \in I\}$ tel que

$$\forall n \in I, \qquad \operatorname{Eng}\{\{\} x_i \in S \mid i \leq n\} = \operatorname{Eng}\{\{\} e_i \in \hat{S} \mid i \leq n\}$$

Démonstration. Sans perdre de généralité, on prend $I = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

On prend $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Évidemment $\operatorname{Eng}\{e_1\} = \operatorname{Eng}\{x_1\}$

On prend ensuite pour tout $n > 1$,

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i)\, e_i$$

Puis $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Supposons que $\operatorname{Eng}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \operatorname{Eng}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\operatorname{Eng}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\} &= \left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{n+1} e_{n+1} \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}\end{aligned}$$

Si $\alpha_i = \frac{1}{\|y_i\|}$ pour tout i, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Eng}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\} &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\left(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (x_{n+1}, e_i)\, e_i\right) \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_{n+1}} (x_{n+1}, e_i)\right) e_i + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_{n+1}} x_{n+1} \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}\end{aligned}$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_{n+1}} (x_{n+1}, e_i)\right) e_i \in \operatorname{Eng}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ par l'hypothèse d'induction, et par conséquent, $\operatorname{Eng}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\} = \operatorname{Eng}\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$.

$\square$

Remarque. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Si $\mathcal{H}$ est séparable, on déduit directement qu'une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$ est au plus dénombrable.

Cela suit car si il existe un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{H}$, forcément cet ensemble contient une base Hilbertienne.

Proposition 1.5.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq \mathcal{H}$ un ensemble orthonormal dans $\mathcal{H}$. Soit $E_n = \overline{\operatorname{Eng}\{e_1, \ldots, e_n\}}$. E_n est un convexe fermé, et on définit $p_{E_n} : \mathcal{H} \longrightarrow E_n$ la projection.*

Alors p_{E_n} vérifie

$$p_{E_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\, e_i \qquad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1.5.1}$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \mathcal{H}$ et $h_x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\, e_i$. On a que pour tout $e \in E_n$, il existe $(\lambda_i)_{i \leq n}$ tels que $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et

$$\begin{aligned}(x - h_x, e) &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\,, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \left[(x, e_i) - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)\,(e_j, e_i) \right]\end{aligned}$$

Mais $(e_j, e_i) = \delta_{ij}$, ce qui fait que finalement,

$$(x - h_x, e) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\, [(x, e_i) - (x, e_i)] = 0$$

Ainsi, pour tout $e \in E_n$, $x - h_x \perp e$ donc $x - h_x \perp E_n$ et (par le théorème 1.3.2) $h_x = p_{E_n}(x)$. □

REMARQUE. Nous savons par le théorème 1.3.2 que p_{E_n} est l'identité sur E_n. Par conséquent, nous savons que si $x \in E_n$ est tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, par indépendance linéaire, nous pouvons identifier les coefficients, et nous obtenons que $\alpha_i = (x, e_i)$

Il suit immédiatement que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$.

THÉORÈME 1.5.1 (Inégalité de Bessel). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\xi = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble orthonormal de $\mathcal{H}$ au plus dénombrable.*

Alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1.5.2}$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n = \overline{\mathrm{Eng}\,\{e_1, \ldots, e_n\}}$. Alors, on aura que $\|p_{E_n}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2$ On a aussi (proposition 1.3.4) que p_{E_n} est non-expansive pour tout n, donc pour tout n,

$$\|p_{E_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

On conclue en prenant la limite lorsque n tend à l'infini. □

Si on travaille avec un espace de Hilbert séparable, les ensembles orthonormaux sont au plus dénombrables. On peut se demander ce qui se passe si l'espace n'est pas séparable – peut-on considérer un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ainsi qu'un sous-ensemble orthonormal ξ qui ne serait pas dénombrable ? Pourrait-on même donner un sens à une expression comme

$$\sum_{e\in\xi}|(x,e)|^2 = \|x\|^2$$

si ξ était non-dénombrable ? De plus, l'inégalité de Bessel peut être employée pour montrer que $\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\,e_i$ converge. Si y est sa limite, est-ce que $y = x$?

Nous répondrons à toutes ces questions avec une proposition et un théorème.

PROPOSITION 1.5.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $\xi \subseteq \mathcal{H}$ une partie orthonormale possiblement non-dénombrable. soit $x \in \mathcal{H}$ un point quelconque de $\mathcal{H}$ et soit $\xi_x = \{e \in \xi \mid |(x,e)|^2 > 0\}$*

ξ_x est au plus dénombrable

DÉMONSTRATION. Prenons $h \in \mathbb{N}$ et posons $\xi_{x,h} = \left\{e \in \xi \mid |(x,e)|^2 \geq \frac{1}{h}\right\}$ Cet ensemble est fini ou vide. Autrement, on pourrait en extraire un sous-ensemble dénombrable pour lequel on pourrait appliquer l'inégalité de Bessel. Si ce sous-ensemble est $\zeta_{x,h}$, on aurait

$$\sum_{e\in\zeta_{x,h}}|(x,e)|^2 \leq \|x\|^2$$

et donc $\|x\| = \infty$, ce qui est impossible.

Donc $|\xi_{x,h}| < \infty$. Mais $\xi_x = \bigcup_{h\in\mathbb{N}}\xi_{x,h}$ est une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, et donc ξ_x est au plus dénombrable. □

Cette proposition répond à nos premières questions. En effet, si ξ est n'importe quel ensemble orthonormal, $\sum_{e\in\xi}|(x,e)|^2$ sous-entend $\sum_{e\in\xi_x}|(x,e)|^2$ et cette somme comporte au plus un nombre dénombrable de termes, donc il n'y a pas de problèmes.

Le théorème suivant s'occupe de répondre aux questions telles que la dernière soulevée dans le paragraphe précédent.

THÉORÈME 1.5.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\xi \subseteq \mathcal{H}$ un sois-ensemble orthonormal de $\mathcal{H}$.*

Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) ξ est une base hilbertienne.

(2) $x \perp \xi \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(3) $\overline{\text{Eng}\,\{\xi\}} = \mathcal{H}$.

(4) $x = \sum_{e\in\xi} (x, e)\, e \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(5) $(x, y) = \sum_{e\in\xi} (x, e)\,(e, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

(6) Ce résultat est connu sous le nom d'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{e\in\xi} |(x, e)|^2 \tag{1.5.3}$$

Démonstration. — **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** Si $x \neq 0$ et $x \perp \xi$, alors $\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\} \cup \xi$ est orthonormal, et ξ n'est pas maximal, Or, ξ est une base hilbertienne. Donc $x \perp \xi \;\Rightarrow x = 0$. Bien sûr, l'autre sens est trivial.

— **(2)** $\Leftrightarrow$ **(3)** Si $\overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$, on sait par le lemme 1.4.1 que $\overline{\text{Eng}\,\{\xi\}} = \mathcal{H}$ est équivalent à montrer que $\overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}^{\perp} = \{0\}$. Or, $\overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}^{\perp} = \xi^{\perp}$, et par **(2)**, $\xi^{\perp} = \{0\}$.

— **(2)** $\Rightarrow$ **(4)** $x \perp \xi \;\Rightarrow\; x \perp \overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}$, et donc si $x \perp \overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}$, $x = 0$. Or, par le théorème 1.3.2, avec **(2)** cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $x - x \perp \overline{\text{Eng}\,\{\xi\}}$ et donc que x est sa propre projection convexe. Par la proposition 1.5.3, on obtient immédiatement le résultat.

— **(4)** $\Rightarrow$ **(5)** Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a que

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left(\sum_{e\in\xi} (x, e)\, e, \sum_{f\in\xi} (y, f)\, f\right)\\ &= \sum_{e,f\in\xi} (x, e)\,(f, y)\,(e, f)\end{aligned}$$

et (e, f) est non-nul et égal à 1 si et seulement si $e = f$.

— **(5)** $\Rightarrow$ **(6)** s'obtient directement de la définition de la norme.

— **(6)** $\Rightarrow$ **(1)** Si ξ n'est pas une base hilbertienne, mais que ξ est orthonormal, ξ n'est pas maximal et il existe $e_0 \in \mathcal{H}\backslash\xi$ tel que $\{e_0\} \cup \xi$ est orthonormal. Par **(6)**, on a que

$$1 = \|e_0\|^2 = \sum_{e\in\xi} |(e_0, e)|^2 = 0$$

puisque $e_0 \perp \xi$.

□

Ce théorème conclue le chapitre sur les espaces de Hilbert. Il donne un résultat satisfaisant, et nous indique qu'il est possible de manipuler même des bases hilbertiennes non-dénombrables.

Chapitre 2

Espaces de Banach

Dans ce chapitre, l'exploration sera généralisée aux espaces vectoriels de Banach, sans les propriétés pratiques obtenues grâce au produit scalaire. Bien sûr, pour les espaces de dimension finie, cette étude est de peu d'intérêt. Nous verrons pourquoi, puis nous nous intéresserons aux espaces de dimension infinie. On couvrira les applications linéaires ainsi que leurs propriétés particulières, notamment sur le plan de la continuité. On couvrira aussi les théorèmes de Hahn-Banach, ainsi que le principes de la borne uniforme et le théorème de l'application ouverte.

2.1. Applications linéaires continues

Nous commençons par une proposition fort pratique.

PROPOSITION 2.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, respectivement munis de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

Les énoncés suivants sont équivalents.

(1) T est continue.

(2) T est continue en 0.

(3) T est continue en un point.

(4) Il existe un $c \geq 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq c$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$.

(5) Il existe un $c \geq 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq c\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

DÉMONSTRATION. **(5)** $\Rightarrow$ **(1)** Pour tout $x, y \in E$, on choisit $z = y - x \in E$. Par **(5)**,

$$\|T(y-x)\|_F \leq c\,\|y-x\|_E$$

Mais T est linéaire, et pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir $\delta = \varepsilon/c$ pour que si $\|y-x\|_E < \delta$, on ait que $\|T(y) - T(x)\|_F = \|T(y-x)\|_F < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** est trivial, ainsi que **(1)** $\Rightarrow$ **(3)**

(3) $\Rightarrow$ **(2)** est aussi évident. En effet, supposons que T soit continue en x_0. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ tel que $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon$ si $\|x - x_0\|_E < \delta$. Par linéarité, dans ce cas, on a simplement que

$\|T(x-x_0)\|_F < \varepsilon$ si $\|x-x_0\|_E < \delta$. Mais pour tout $z \in E$, il existe x tel que $z = x - x_0$, et alors, pour tout $z \in E$ on a que $\|T(z)\|_F < \varepsilon$ si $\|z\|_E < \delta$, donc T est continue en 0.

(2) $\Rightarrow$ **(4)** Puisque T est continue en 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq \varepsilon$. En particulier, on peut prendre $\varepsilon = 1$.

Si $\|x\|_E \leq 1$, on a que $\frac{1}{\delta}\|x\|_E \leq \frac{1}{\delta}$. Par linéarité puis par continuité en 0, on a alors que

$$\left\|T\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\|_F = \frac{1}{\delta}\|T(x)\|_F \leq 1$$

et on prend $c = \delta$.

(4) $\Rightarrow$ **(5)** Si $\|T(x)\|_F \leq c$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, alors il suffit de constater que pour tout $y \in E$, on a que

$$\|T(y)\|_F = \|y\|_E \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right)\right\|_F \leq c\|y\|_E$$

□

Exemple 2.1.1. On considère l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $T : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $(f \mapsto f(0))$. T est évidemment linéaire puisque $(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0)$.

Avec la norme usuelle, T est continue. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, prenons $\delta = \varepsilon$. Alors,

$$\|f-g\| = \max\{|f(t)-g(t)| \mid t \in [0,1]\} \leq \delta$$

implique directement que $|f(0)-g(0)| \leq \|f-g\| \leq \delta = \varepsilon$.

Par contre, si on munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ telle que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, on peut considérer la suite de fonctions $f_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ -nx+2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

La figure 2.1.1 illustre la suite des f_n.

Bien sûr $\|f_n\|_1 \to 0$, cependant, $T(f_n) = 1$ pour tout n, et pour cette norme, T n'est pas continue.

Notation. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \longrightarrow F \mid T \text{ est linéaire et continue}\}$$

On abrège $\mathcal{L}(E,E)$ par $\mathcal{L}(E)$, sans ambiguïté.

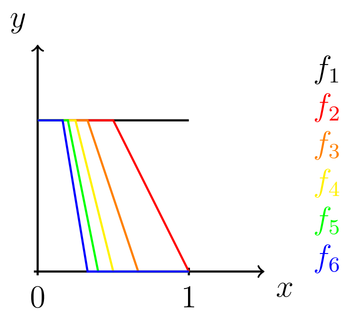

FIGURE 1. La suite des f_n telle que décrite à l'exemple 2.1.1

REMARQUE. Si E est un espace de Banach, et $F = \mathbb{K}$ avec la norme $|\cdot|$, alors

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$$

On peut munir $\mathcal{L}(E, F)$ de la norme

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\|_F \mid \|x\|_E \leq 1\}$$

Ces notations nous permettent d'introduire et de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.2. *Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach, tous deux sur $\mathbb{K}$.*
Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION. On sait déja que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Prenons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}, x \in E$, on a que $\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|_E$.

Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, pour tout $x \in E$, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N_x$,

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_E}$$

On en déduit que pour tout $x \in E, \varepsilon > 0$, il existe un $N_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n > N_x$.

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon$$

et $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Puisque F est un espace de Banach,

$$x_T = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \in F$$

On introduit donc $T : E \longrightarrow F$ tel que $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. T est linéaire car pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) + T_n(y) \\
&= \alpha T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

T est également continue. En effet, puisque T_n est de Cauchy, pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_n - T_N\| \leq 1$ pour tout $n > N$. On a donc que pour tout $x \in E$, $n > N$,

$$\begin{aligned}
\|T_n(x)\|_F &\leq \|T_n(x) - T_N(x)\|_F + \|T_N(x)\|_F \\
&\leq (\|T_n - T_N\| + \|T_N\|)\, \|x\|_E \\
&\leq (1 + \|T_N\|)\, \|x\|_E
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|T(x)\|_F = \left\| \lim_{n\to\infty} T_n(x) \right\|_F \leq (1 + \|T_N\|)\, \|x\|_E$$

Par la proposition 2.1.1, avec $c = 1 + \|T_N\|$, on a que T est continue. Donc, $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Ainsi, il existe N tel que $\|T_m - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $m, n > N$. Si $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, alors $\lim_{m\to\infty} T_m(x) = T(x)$. On peut donc trouver $m > N$ tel que $\|T_m(x) - T(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Bien sûr, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et en prenant $n > N$, on a

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \|T_n(x) - T_m(x)\|_F + \|T_m(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$.

Par conséquent, on a que

$$\sup \left\{ \|T_n(x) - T(x)\|_F \mid \|x\|_E \leq 1 \right\} = \|T_n - T\| \leq \varepsilon$$

et $\lim_{n\to\infty} T_n = T$

On conclue que si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ans $\mathcal{L}(E, F)$, $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ existe et est dans $\mathcal{L}(E, F)$. Donc, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. □

La topologie usuelle sur un espace de Banach est celle induite par la norme. On peut se demander quelle influence les détails de la définition d'une norme ou d'une autre ont réellement sur la topologie que cette norme induit.

DÉFINITION 2.1.1 (Normes équivalentes). Soit E un espace vectoriel. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont **équivalentes** si elles engendrent la même topologie sur E.

REMARQUE. On peut donc introduire la relation d'équivalence entre les normes, et identifier les classes d'équivalence aux topologies qu'elles engendrent.

PROPOSITION 2.1.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E.*

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes c_1 et c_2 positives telles que pour tout $x \in E$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \tag{2.1.1}$$

DÉMONSTRATION. ($\Rightarrow$) Si $B_i(x, r)$ est une boule de rayon r centrée en x pour la norme $\|\cdot\|_i$, avec $i = 1, 2$.

Puisque $B_2(0, 1)$ est un ouvert pour la topologie engendrée par $\|\cdot\|_1$, on sait qu'il existe un $R > 0$ tel que $B_1(0, R) \subseteq B_2(0, 1)$. En conséquence, $\overline{B_1(0, R)} \subseteq \overline{B_2(0, 1)}$ et

$$\|x\|_1 \leq R \ \Rightarrow \|x\|_2 \leq 1$$

Pour tout $y \in E$, $\|y\|_1 \leq 1$ entraîne $\|Ry\|_1 \leq R$, donc $\|Ry\|_2 \leq 1$ et finalement $\|y\|_2 \leq \frac{1}{R}$. Si on choisit $y = \frac{x}{\|x\|_1}$ pour n'importe quel $x \in E$, on a finalement $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 \leq 1$, donc finalement

$$\frac{\|x\|_2}{\|x_1\|} \leq \frac{1}{R}$$

De façon similaire, $B_1(0, 1)$ est un ouvert dans la topologie induite par $\|\cdot\|_2$, et on trouve $r > 0$ tel que $B_2(0, r) \subseteq B_1(0, 1)$. On a alors $\overline{B_2(0, r)} \subseteq \overline{B_1(0, 1)}$ et donc

$$\|x\|_2 \leq r \ \Rightarrow \|x\|_1 \leq 1$$

, ce qui permet finalement de conclure que

$$r \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{R} \|x\|_1$$

($\Leftarrow$) On note $\mathcal{T}_i$ la topologie engendrée par la norme $\|\cdot\|_i$ ($i = 1, 2$). $\|\cdot\|_i$ engendre $\mathcal{T}_i$ si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{T}_i$, on a que pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_i(x, r) \subseteq U$, car alors, on peut écrire U comme la réunion des boules ouvertes contenues dans U.

Puisque E est un espace vectoriel, la translation de tout ouvert est un ouvert. Pour montrer que $\|\cdot\|_1$ engendre $\mathcal{T}_2$, il suffira de montrer que peour un voisinage U de 0 dans $\mathcal{T}_2$, on peut trouver $r > 0$ tel que U inclue $B_1(0, r)$.

Si $U \in \mathcal{T}_2$ est un voisinage de l'origine, on peut trouver $R > 0$ tel que $B_2(0, R)$ est inclus dans U. Dans ce cas, $\|x\|_2 < R \Rightarrow x \in U$. Mais $\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$. Donc, si $\|x\|_1 < \frac{R}{c_2}$, forcément $\|x\|_2 < R$ et $x \in U$.

Par conséquent, $B_1\left(0, \frac{R}{c_2}\right) \subseteq U$. Donc $U \in \mathcal{T}_1$, et $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

Si $U \in \mathcal{T}_1$ est un voisinage de 0, on trouve $\tilde{R}$ tel que $B_1(0, \tilde{R}) \subseteq U$. Dans ce cas, $\|x\|_1 \leq \tilde{R} \Rightarrow x \in U$. Mais $\|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_2$ et si $\|x\|_2 < \tilde{R}c_1$, alors $\|x\|_1 < \tilde{R}$, donc $x \in U$. Donc $B_2(0, \tilde{R}c_1) \subseteq U$. $U \in \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

On conclue que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Corollaire 2.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. On considère $i : E \longrightarrow E$ l'identité ($i(x) = x$).*

Si $\mathcal{T}_1$ est la topologie engendrée par $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{T}_2$ est la topologie engendrée par $\|\cdot\|_2$, alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si i est $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$-continue et $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1$-continue.

Le résultat suivant justifie en partie le peu d'égard que nous ferons aux espaces de Banach de dimensions finies.

Proposition 2.1.4. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.*

Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. Soit $B \subseteq E$ un ensemble linéairement indépendant dans E et qui engendre E. Si $n = \dim E$, alors nous noterons $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

Pour tout $x \in E$, il existe $(\alpha_i)_{i \leq n}$ un vecteur de coordonnées dans $\mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$. Considérons la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|x\|_\infty = \max \{|\alpha_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$

On considère également une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur E. On va vérifier que i est $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|$-continue. i est linéaire, bien entendu.

Par les propriétés des normes, on a que, si $C = n \max \{\|b_i\| \mid 1 \leq i \leq n\}$,

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|b_i\| \leq C \|x\|_\infty$$

i est donc $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|$-continue.

Il est évident que $\|b_i\|_\infty = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc $\|x\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Or, on note $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.

On se restreint à $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Cet ensemble est compact, et par conséquent, f, qui est continue, y atteint un maximum fini. Écrivons $c = \max\{f(x) \mid \|x\| \leq 1\}$. Ainsi, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, on a $\|x\|_\infty \leq c$.

Par la proposition 2.1.1, nous avons donc que i est $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|$-continue. En conséquence, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Donc, toutes les normes sont équivalentes. □

COROLLAIRE 2.1.2. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est un espace de Banach*

DÉMONSTRATION. Pour un espace vectoriel E de dimension finie, on prend la base B et la norme $\|\cdot\|_\infty$. Toute suite de Cauchy converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc toute suite converge pour toutes les normes. □

COROLLAIRE 2.1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et l'application linéaire $T : E \longrightarrow F$*

Si E est de dimension finie, T est continue.

DÉMONSTRATION. Similairement, T est continue pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc T est continue pour toutes les normes si E est de dimension finie. □

2.2. Théorèmes de Hahn-Banach

Nous allons maintenant à la recherche d'un hyper-plan qui sépare deux parties convexes d'un espace de Banach. Pour ce faire, nous introduisons d'abord la notion d'un prolongement linéaire.

DÉFINITION 2.2.1 (Prolongement linéaire). Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $D \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E et soit $g : D \longrightarrow F$ une application linéaire. $f : E \longrightarrow F$ est un **prolongement linéaire** de g si

(1) f est linéaire

(2) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$.

La première question naturelle est de savoir si l'on peut trouver un prolongement linéaire, et à quelle conditions.

THÉORÈME 2.2.1 (Hahn-Banach (version analytique)). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire sur F. Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

(1) Pour tout $\alpha > 0$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

(3) $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$.

Alors il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un prolongement linéaire de g tel que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. On considère

$$\begin{aligned} O = \{h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R} \mid F \subseteq D(h),\\ h \text{ est linéaire, prolonge } g \text{ et } h(x) \leq p(x) \text{ pour tout } x \in E\} \end{aligned}$$

Et on définit la relation d'ordre $h \leq \hat{h} \;\Leftrightarrow\; D(h) \subseteq D(\hat{h})$ et $\hat{h}$ prolonge h.

O est non-vide car $g \in O$. O est inductif. Si $P \subseteq O$ est un sous-ensemble totalement ordonné de O, on écrit $D(\tilde{h}) = \bigcup_{h \in P} D(h)$ et $\tilde{h}(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$. $\tilde{h}$ est bien définie, puisque pour tout $h, \hat{h}$ dans P, soit $\hat{h}$ prolonge h, soit h prolonge $\hat{h}$. Dans tous les cas, si $x \in D(h) \cap D(\hat{h})$, alors $h(x) = \hat{h}(x)$. On a bien sûr que $\tilde{h} \in O$. Pour tout $h \in P$, $D(\tilde{h}) \supseteq D(h)$ et $\tilde{h}$ prolonge h. Donc $h \leq \tilde{h}$. $\tilde{h}$ est donc un majorant de P.

Puisque O est inductif et non-vide, par le lemme de Zorn (lemme A.0.1), O admet un élément maximal, que nous noterons f.

Supposons que $D(f) \neq E$. Alors il existe un $x_0 \in E \backslash D(f)$. $x_0 \neq 0$, car $0 \in D(f)$.

On définit $h : D(f) + \mathbb{R}x_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ de telle façon que si $\hat{x} = x + \alpha x_0$ pour $x \in D(f)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $h(\hat{x}) = f(x) + \alpha c$, où $c = h(x_0)$. On veut maintenant s'assurer que $h(x + \alpha x_0) \leq p(x + \alpha x_0)$ pour tout $x \in D(f), \alpha \in \mathbb{R}$.

Puisque p est positivement homogène, on vérifie simplement que, pour tout $x, y \in D(f)$,

$$\begin{aligned} f(x) + c &\leq p(x + x_0) \\ f(y) - c &\leq p(y - x_0) \end{aligned}$$

Pour vérifier ces deux inégalités simultanément, on doit trouver un c tel que $f(y) - p(y - x_0) \leq c \leq p(x + x_0) - f(x)$ pour tout $x, y \in D(f)$. Cela sera possible si et seulement si $p(x + x_0) - f(x) \geq f(y) - p(y - x_0)$. Mais $f \in O$, et par conséquent, $f(x+y) \leq p(x+y) = p(x+x_0+y-x_0) \leq p(x+x_0) + p(y-x_0)$ et il suit que $f(x)+f(y) \leq p(x+x_0)+p(y-x_0)$. En réarrangeant, on obtient finalement $f(y) - p(y-x_0) \leq p(x+x_0) - f(x)$, et donc on peut trouver un c qui respecte les deux inégalités obtenues plus haut.

Avec un tel c, la fonctionnelle h que nous avons définie est dans O. $D(f) \subseteq D(h)$, et h prolonge f, donc $f \leq h$, ce qui contredit que f est un élément maximal.

On doit donc conclure que $D(f) = E$. □

REMARQUE. Ce résultat est en fait plus algébrique qu'autre chose. On n'a supposé ni utilisé aucune topologie sur E, malgré qu'on utilise beaucoup la notion d'ordre.

REMARQUE. Il peut être amusant de constater que si p est une semi-norme, p satisfait d'emblée toutes les conditions requises par les hypothèses du théorème de Hahn-Banach.

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on ne peut pas transposer ce résultat directement. Par contre, on remarque que E est tout de même un espace vectoriel dont on peut restreindre le corps à $\mathbb{R}$. si $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire pour tout $\mathbb{C}$, en particulier, f est linéaire pour tout $\mathbb{R}$, et $\mathfrak{R}(f)$ est linéaire sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Cependant on peut faire mieux.

LEMME 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit $\hat{f} : E \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.*

Si $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est telle que $f(x) = \hat{f}(x) - i\hat{f}(ix)$, alors

(1) f est $\mathbb{C}$-linéaire. $\mathfrak{R}(f) = \hat{f}$.

(2) Si $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire telle que $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(g)$, alors $g = f$.

(3) Si $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme,

$$|\hat{f}(x)| \leq p(x) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \leq p(x) \qquad \forall x \in E$$

(4) Si E est normé, $\|f\| = \left\|\hat{f}\right\|$.

DÉMONSTRATION. (1) Prenons $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Prenons également $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y) &= \hat{f}((a+ib)x + y) - i\hat{f}(i(a+ib)x + iy) \\ &= a\hat{f}(x) + b\hat{f}(ix) + \hat{f}(y) - i\left(a\hat{f}(ix) - b\hat{f}(x) + \hat{f}(iy)\right) \\ &= (a+ib)\left(\hat{f}(x) - i\hat{f}(ix)\right) + \left(\hat{f}(y) - i\hat{f}(iy)\right) \\ &= \alpha f(x) + f(y) \end{aligned}$$

(2) Trivial par hypothèse.

(3) Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire et telle que $\mathfrak{R}(g) = \mathfrak{R}(f)$. Alors,

$$\begin{aligned} g(ix) &= \mathfrak{R}(g(ix)) + i\mathfrak{I}(g(ix)) \\ &= \hat{f}(ix) + i\mathfrak{I}(g(ix)) \end{aligned}$$

Mais

$$g(ix) = ig(x) = i\mathfrak{R}\,(g(x)) - \mathfrak{I}\,(g(x)) = i\hat{f}(x) - \mathfrak{I}\,(g(x))$$

donc $\mathfrak{I}\,(g(x)) = -\hat{f}(ix)$. On en déduit que $g(x) = \hat{f}(x) - i\hat{f}(ix) = f(x)$.

(4) ($\Rightarrow$). Soit $x \neq 0$ tel que $|f(x)| \neq 0$. On prend $\alpha = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. Alors, $|f(x)| = \frac{f(x)}{\alpha} = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$|f\left(\frac{x}{\alpha}\right)| = |\hat{f}\left(\frac{x}{\alpha}\right)| \leq p\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|}p(x) = p(x)$$

Donc $|f(x)| \leq p(x)$.

($\Leftarrow$). On a bien sûr que $|f(x)| \geq |\hat{f}(x)|$.

(5) Si E est normé, $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. On a alors que

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x)| \mid \|x\|_E = 1\} \\ &\geq \sup\left\{|\hat{f}(x)| \mid \|x\|_E = 1\right\}\end{aligned}$$

Mais si on prend la semi-norme $p(x) = \left\|\hat{f}\right\| \|x\|_E$, forcément, pour tout $x \in E$ tels que $\|x\|_E = 1$, on a que $|\hat{f}(x)| \leq \left\|\hat{f}\right\| = p(x)$ Donc $|f(x)| \leq p(x) = \left\|\hat{f}\right\|$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$. Donc, $\|f\| \leq \left\|\hat{f}\right\|$ et finalement, $\|f\| = \left\|\hat{f}\right\|$.

□

Armés de ce lemme, nous pouvons énoncer une généralisation du théorème de Hahn-Banach pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 2.2.2 (Bohnenblust-Sobczyk). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel, soit $g : F \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une semi-norme sur E. telle que pour tout $x \in F$, $|g(x)| \leq p(x)$.*

Alors il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linéaire qui prolonge g et telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

DÉMONSTRATION. Soit $\hat{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linéaire et qui prolonge $\mathfrak{R}\,(g)$. On peut l'obtenir par le (premier) théorème de Hahn-Banach (théorème 2.2.1). On prend $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire et telle que $\mathfrak{R}\,(f) = \hat{f}$. Le lemme 2.2.1 termine la preuve. □

COROLLAIRE 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, F un sous-espace vectoriel de E et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire.*

Alors, il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire qui prolonge g et telle que $\|f\| = \|g\|$.

COROLLAIRE 2.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, et soit $x_0 \in E$.*

Alors, $\|x_0\| = \sup\{|\langle f, x_0\rangle| \mid \|f\| \leq 1\}$ et ce suprémum est atteint (c'est un maximum).

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre $g : \mathbb{R}x_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ défini par $(\alpha x_0 \mapsto \alpha \|x_0\|)$. g est linéaire, et $\|g\| = 1$. Par Hahn-Banach (ou Bohnenblust-Sobczyk), on trouve $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ qui prolonge g et telle que $\|f\| = 1$. $\square$

On va maintenant aborder l'aspect d'avantage géométrique de la question posée au début de cette section, à savoir de trouver un hyperplan qui sépare deux régions.

On introduit d'abord quelques définitions.

DÉFINITION 2.2.2 (Séparation aux sens large et strict). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soient $A, B \subseteq E$. Soit $f \in E \backslash \{0\}$ un élément non-trivial du dual de E.

L'hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ **sépare** A et B

— **au sens large** si

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \qquad \forall x \in A, y \in B \tag{2.2.1}$$

— **au sens strict** si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \leq f(y) \qquad \forall x \in A, y \in B \tag{2.2.2}$$

DÉFINITION 2.2.3 (Jauge convexe). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $C \subseteq E$ un convexe ouvert contenant l'origine. On définit la **jauge convexe** de C (aussi parfois appelée la **fonction de Minkowski**) par

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \tag{2.2.3}$$

LEMME 2.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $C \subseteq E$ un convexe ouvert contenant l'origine.*

La jauge convexe p de C vérifie

(1) $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$

(2) Il existe $M > 0$ tel que $0 \leq p(x) \leq M \|x\|$ pour tout $x \in E$.

(3) Pour tout $\alpha > 0, x \in E$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

(4) Pour tout $x, y \in E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

DÉMONSTRATION. (1) Si $x \in C$, puisque C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule centrée en x de rayon ε est incluse dans C. On peut alors trouver β tel que $\beta > 1$ et $\beta x \in C$. Par conséquent, $p(x) \leq \beta^{-1} < 1$. Donc $C \subseteq \{x \mid p(x) < 1\}$.

Si $p(x) < 1$, alors il existe $\alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$. Or, $x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0$ et puisque $\frac{x}{\alpha}$ et 0 sont dans C, $x \in C$. Par conséquent, $\{x \mid p(x) < 1\} \subseteq C$.

(2) Puisque $0 \in C$, et que C est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\{x \in E \mid \|x\| < r\} \subseteq C$. Donc pour tout $x \neq 0$, $s\frac{x}{\|x\|}$ est dans la boule de rayon r centrée en 0 pour tout $s \in [0, r[$.

Si on prend $\alpha = \frac{\|x\|}{s} \geq \frac{\|x\|}{r}$, on a que $\frac{x}{\alpha} \in C$. Par conséquent, $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$ et $M = \frac{1}{r}$ fait l'affaire.

(3)

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \inf\left\{a > 0 \mid \frac{\alpha x}{a} \in C\right\} \\ &= \alpha \inf\left\{a > 0 \mid \frac{x}{a} \in C\right\} \\ &= \alpha p(x) \end{aligned}$$

(4) Soient $x, y \in E$. Si on combine les deux premières propriétés, on a qu'étant donné $\varepsilon > 0$,

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \ , \qquad \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

On pose $\lambda = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$. Alors, on a que

$$\lambda\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

par convexité. Donc, on obtient en faisant le calcul, que

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

Ce qui signifie bien sûr que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

□

PROPOSITION 2.2.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et C un convexe ouvert non-vide. Soit $x_0 \notin C$.*

Alors, il existe un hyper-plan fermé qui sépare C et $\{x_0\}$ au sens large.

DÉMONSTRATION. Sans predre de généralité, on choisit $0 \in C$. Autrement, il suffit de translater C.

Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la jauge convexe de C. On prend $F = \text{Eng}\{x_0\}$, et on introduit $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(\alpha x_0) = \alpha$. g est linéaire. Pour tout $\alpha \leq 0$, on a $g(\alpha x_0) = \alpha \leq 0 \leq p(\alpha x_0)$. Pour tout $\alpha > 0$, on a que

$$g(\alpha x_0) = \alpha \leq \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$$

puisque p est la jauge convexe de C, et que $x_0 \notin C$.

Donc, $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Par la version analytique du théorème de Hahn-Banach (théorème 2.2.1), il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

f n'est pas identiquement nulle, car $f(x_0) = 1$. Par le second point du lemme précédent, $f(x) \leq p(x) \leq M \|x\|$ pour tout $x \in E$ et l'hyper-plan fermé $[f = 1]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large. □

Cette proposition peut être utilisée pour démontrer deux versions plus «géométriques» du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 2.2.3 (Théorème de Hahn-Banach, 1ère version géométrique). *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, soient A et B deux parties de E convexes non-vides disjointes, et soit A ouvert.*

Alors il existe un hyper-plan fermé qui sépare A et B au sens large.

DÉMONSTRATION. On doit trouver $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ pour tous $x \in A, y \in B$. Autrement dit, on cherche $f \in E'$ t.q. $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x \in A, y \in B$.

On introduit $C = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$. C peut être réécrit comme la réunion des translations de A par des éléments de B :

$$C = \bigcup_{y \in B} (A - y) = \bigcup_{y \in B} \{x - y \mid x \in A\}$$

C est convexe. En effet, soient $z_1, z_2 \in C$. Alors il existe x_1, y_1 et x_2, y_2 tels que $z_1 = x_1 - y_1$ et $z_2 = x_2 - y_2$, avec $x_i \in A, y_i \in B$ pour $i = 1, 2$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} tz_1 + (1-t)z_2 &= tx_1 - ty_1 + (1-t)x_2 - (1-t)y_2 \\ &= (tx_1 + (1-t)x_2) - (ty_1 + (1-t)y_2) \end{aligned}$$

Puisque A et B sont convexes, $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$ et $ty_1 + (1-t)y_2 \in B$. Leur différence est donc dans C, et ceci est vrai pour tout $z_1, z_2 \in C, t \in [0, 1]$. Par conséquent, C est convexe.

C est ouvert, car c'est une réunion de translatés de A et A est ouvert. $0 \notin C$, car A et B sont disjoints.

Par la proposition précédente (proposition 2.2.1), il existe un hyper-plan qui sépare 0 et C au sens large. Donc il exsite $f \in E'$ tel que $f(0) = 0 \leq f(x-y)$ pour tout $x \in A, y \in B$. f est linéaire, et on obtient finalement le résultat désiré. $\square$

La seconde version «géométrique» donne des conditions pour la séparation au sens strict.

THÉORÈME 2.2.4 (Théorème de Hahn-Banach, 2ème version géométrique). *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, soient $A, B \subseteq E$ deux convexes non-vides disjoints avec A fermé et B conpact.*

Alors il existe un hyper-plan fermé qui sépare A et B au sens strict.

DÉMONSTRATION. On va «gonfler» A et B pour qu'ils soient ouverts et disjoints. Pour $\varepsilon > 0$, notons

$$A + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon) = A_\varepsilon$$

où $B(y, r)$ est une boule ouverte centrée en y et de rayon r dans E.

Les hypothèses impliquent que l'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que A_ε soit disjoint de B_ε. Supposons que ce soit impossible. Puisque B est compact, par la proposition 1.1.8, B est borné, donc $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$ l'est aussi pour tout ε. On peut donc considérer

$$I = \cap_{\varepsilon > 0} (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) = A \cap B$$

. I est non-vide. puisque pour tout $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$ est borné et non-vide. Or cela est absurde, car A et B sont disjoints.

Ainsi, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que A_ε et B_ε sont des ouverts convexes non-vides disjoints. Par la première version «géométrique» du théorème de Hahn-Banach (théorème 2.2.3), on trouve $f \in E'$ telle que $f(x_\varepsilon) \leq \alpha \leq f(y_\varepsilon)$ pour tout $x_\varepsilon \in A_\varepsilon, y_\varepsilon \in B_\varepsilon$.

On peut écrire $x_\varepsilon = x + \varepsilon u$ pour $u \in B(0,1)$, et $y_\varepsilon = y + \varepsilon v$, pour $v \in B(0,1)$, avec $x \in A, y \in B$. Alors, $f(x) + \varepsilon f(u) \leq \alpha \leq f(y) + \varepsilon f(v)$, mais puisque $f \in E'$, f est continue, et par conséquent, on a que

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \|f\|$$

et $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict. $\square$

2.3. Principe de la borne uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues. Si cette suite converge ponctuellement pour tout x, la «limite» $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ peut-être discontinue. Dans cette section, nous introduisons un théorème qui donne une borne uniforme pour des applications linéaires continues.

Théorème 2.3.1 (Principe de la borne uniforme (théorème de Banach-Steinhaus)). *Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $T = (T_\lambda : E \longrightarrow F)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'applications linéaires telles que pour tout $x \in E$, $\sup\{\|T_\lambda(x)\| \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty$*

Alors,

$$\sup\{\|T_\lambda\| \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty$$

Plus précisément, il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E, \lambda \in \Lambda$,

$$\|T_\lambda(x)\| \leq c\,\|x\|$$

Démonstration. On note $X_n = \{x \in E \mid \|T_\lambda(x)\| \leq n \ \forall\lambda \in \Lambda\}$. Par hypothèse, on a que E est complet, et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Les X_n sont des fermés, puisque ce sont des intersections de pré-images de fermés. Par le théorème des catégories de Baer, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} est d'intérieur non-vide. On peut donc trouver $x_0 \in X_{n_0}$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r)$ (la boule ouverte centrée en x_0 de rayon r) est une partie de X_{n_0}.

On a alors $\|T_\lambda(x_0 + ru)\| \leq n_0 \ \forall\lambda \in \Lambda,\ u \in B(0, 1)$. et $r\,\|T_\lambda(u)\| - \|T_\lambda(x_0)\| \leq \|T_\lambda(x_0 + ru)\| \leq n_0$. Par conséquent, on a que

$$\sup\{\|T_\lambda(u)\| \mid \|u\| \leq 1\} \leq \frac{1}{r}\,(n_0 + \|T_\lambda(x_0)\|)$$

et finalement,

$$\|T_\lambda\| \leq \frac{1}{r}\,(n_0 + \sup\{\|T_\lambda(x_0)\| \mid \lambda \in \Lambda\}) = c$$

□

Ce théorème donne lieu à un bon nombre de corollaires.

Corollaire 2.3.1. *Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit $(T_n : E \longrightarrow F)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(E, F)$ convergeant vers T ponctuellement.*

(1) $\sup\{\|T_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$

(2) $T \in \mathcal{L}(E, F)$

(3) $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$

Remarque. On ne peut pas pour autant conclure que $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

COROLLAIRE 2.3.2. *Soit E un espace vectoriel normé et $A \subseteq E$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) A est borné ;

(2) Pour tout $f \in E'$, $\sup\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\} < \infty$;

(3) Pour tout $f \in E'$, $\bigcup_{a\in A}\{\langle f, a\rangle\}$ est borné ;

DÉMONSTRATION. **(1) ⇒ (2)**. Si A est borné, on a qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq r$. Mais alors pour tout $f \in E'$, f est continue et pour tout $a \in A$, par la borne uniforme,

$$|\langle f, a\rangle| \leq c\,\|a\| \leq cr < \infty$$

et donc $\sup\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\} < \infty$.

(2) ⇒ (3). Si $\sup\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\} = M < \infty$, alors, $|\langle f, a\rangle| \leq M$ et $\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\}$ est borné.

(3) ⇒ (2). Si $\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\}$ est borné, il existe M tel que $|\langle f, a\rangle| \leq M$ pour tout $a \in A$. Alors, $\sup\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\} \leq M < \infty$.

(2) ⇒ (1). On introduit $T_a : E' \longrightarrow \mathbb{K}$, pour $a \in A$, avec $f \mapsto \langle f, a\rangle$. T_a est linéaire et continue. E' est un espace de Banach, et pour tout $f \in E'$,

$$\sup\{\|T_a(f)\| \mid a \in A\} = \sup\{|\langle f, a\rangle| \mid a \in A\} < \infty$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus,

$$\begin{aligned}\infty &> \sup\{\|T_a\| \mid a \in A\}\\ &= \sup\{\sup\{\|T_a(f)\| \mid \|f\| \leq 1\} \mid a \in A\}\\ &= \sup\{\sup\{|\langle f, a\rangle| \mid \|f\| \leq 1\} \mid a \in A\}\\ &= \sup\{\|a\| \mid a \in A\}\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par un corollaire du théorème de Bohnenblust-Sobczyk (théorème 2.2.2). □

COROLLAIRE 2.3.3. *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} \subseteq E'$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) $\mathcal{A}$ est borné.

(2) $\forall x \in E\ \ \sup\{|\langle f, x\rangle| \mid f \in \mathcal{A}\} < \infty$

(3) $\forall x \in E\ \{\langle f, x\rangle \mid f \in \mathcal{A}\}$ est borné.

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent. □

2.4. Théorème de l'application ouverte

Dans cette section, nous nous intéressons à des propriétés de continuité générales. Par exemple, nous savons que, par définition, une fonction est continue si le préimage de tout ouvert est ouvert. Cela n'implique pas forcément que l'image d'un ouvert soit nécessairement ouvert. Par exemple, la fonction nulle sur un espace de Banach E est continue, malgré que l'image de E (un ouvert) soit $\{0\}$ (un fermé).

DÉFINITION 2.4.1 (Application ouverte). Soient $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \longrightarrow Y$ f est une **application ouverte** si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{T}_1$, il existe $V \in \mathcal{T}_2$ tel que $f(U) = V$.

THÉORÈME 2.4.1 (de l'application ouverte). *Soient E, F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ une application surjective.*

Alors $T(U)$ est ouvert dans F si et seulement si U est ouvert dans E.

DÉMONSTRATION. Puisque T est surjective, F est l'image de E par T.

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_E(0,n))} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{T(B_E(0,1))} \end{aligned}$$

F est complet. Donc, par le théorème des catégories de Baer, on doit avoir que $\overline{T(B_E(0,1))}$ est d'intérieur non-vide. On peut donc trouver $y_0 \in F$ et $r > 0$ tels que $B_F(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B_E(0,1))}$

Par conséquent, on a que $B_F(0, 4r) = -y_0 + B_F(y_0, 4r)$, et par conséquent,

$$B_F(0, 4r) \subseteq 2\overline{T(B_E(0,1))} = \overline{T(B_E(0,2))}$$

Par linéarité on obtient donc que $B_F(0, r) \subseteq \overline{T(B_E(0, 1/2))}$.

On prend maintenant $y \in B_F(0, r)$. Nous allons montrer que sa préimage est dans $B_E(0, 1)$. On vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in B_E(0, 1/2)$ tel que $\|T(u) - y\| < \varepsilon$. On prend en particulier $\varepsilon = r/2$. On trouve $u_1 \in B_E(0, 1/2)$ tel que $\|T(u_1) - y\| \leq r/2$. Ainsi, on a que $y_1 = T(u_1) - y \in B_F(0, r/2)$.

On répète l'argument pour trouver $u_2 \in B_E(0, 1/4)$ tel que $y_2 = T(u_2) + y_1 \in B_F(0, r/4)$. Et on répète encore l'argument, de manière à obtenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \in B_E(0, 2^{-n-1})$ et

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\right\| \leq \frac{r}{2^{n-1}}$$

Écrivons $x_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Par construction, $T(x_n) \to y$. Aussi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. E est complet, et donc $x_n \to x \in E$. De plus, $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\| \leq 1$. Ainsi, $x \in B_E(0,1)$ et par continuité de T, $T(x_n) \to T(x) = y$, par unicité des limites.

On conclue donc que $B(0,r) \subseteq T(B(0,1))$.

On prend maintenant un ouvert U dans E avec $y \in T(U)$. Alors, il existe $x \in U$ tel que $T(x) = y$. Bien sûr, U étant ouvert, il existe $s > 0$ tel que $B_E(x,s) \subseteq U$, mais, par l'argument que nous venons de faire, $B_F(y, sr) = y + B_F(0, sr) \subseteq T(x) + T(B_E(0,s)) = T(B_E(x,s)) \subseteq T(U)$.

Ainsi, pour tout U ouvert, $T(U)$ est ouvert, et T est une application ouverte. □

Remarque. Par le théorème de l'application ouverte, on constate que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et que T est surjective,

$$\exists c > 0 \text{ t.q. } \forall y \in F\ \exists x \in E\ :\ T(x) = y,\ \|x\| < \|y\|$$

Théorème 2.4.2 (de l'application inverse). *Soient E, F deux espaces de Banach avec $T \in \mathcal{L}(E,F)$ une application bijective.*

Alors $T^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire et continue.

Démonstration. Puisque T est bijective, T^{-1} existe. Soient $x, y \in F, \alpha \in \mathbb{K}$. Pour $z, w \in E$ tels que $T(z) = x, T(w) = y$, nous avons

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha x + y) &= T^{-1}(\alpha T(z) + T(w)) \\ &= T^{-1}(T(\alpha z + w)) \\ &= \alpha z + w \\ &= \alpha T^{-1}(x) + T^{-1}(w) \end{aligned}$$

donc T^{-1} est linéaire. Par le théorème de l'application ouverte, T est une application ouverte et pour tout U ouvert dans E, $T(U)$ est ouvert dans F, ce qui signifie, en fait que T^{-1} est une application continue. □

Nous terminons avec un dernier résultat de continuité, qui s'avérera pratique plus tard.

Définition 2.4.2 (Graphe). Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. Le **graphe** de f est noté $\mathfrak{G}(f)$ et est défini par

$$\mathfrak{G}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$$

THÉORÈME 2.4.3 (du graphe fermé). *Soient E, F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, avec $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

Si $\mathfrak{G}(T)$ est fermé, alors T est continue.

DÉMONSTRATION. On munit $E \times F$ de la norme $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$.

Avec cette norme, $E \times F$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Le graphe de T est fermé, et puisque T est linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Puisqu'il est fermé dans $E \times F$, $\mathfrak{G}(T)$ est donc aussi un espace de Banach.

On pose $g : \mathfrak{G}(T) \longrightarrow E$ définie par $(x, T(x)) \mapsto x$. g est linéaire : en effet, si $x, y \in E, \alpha in \mathbb{K}$. Alors,

$$\begin{aligned} g(\alpha(x,T(x)) + (y,T(y))) &= g((\alpha x + y, \alpha T(x) + T(y))) \\ &= g((\alpha x + y, T(\alpha x + y)) \\ &= \alpha x + y \\ &= \alpha g((x,T(x))) + g((y,T(y))) \end{aligned}$$

De plus, g est clairement bijective. Par le théorème de l'application ouverte, g^{-1} est continue. Donc, il existe $c > 0$ tel que $\|(x,T(x))\| \leq c\|x\|_E$. Mais alors, $\|T(x)\|_F \leq \|(x,T(x))\| \leq c\|x\|_E$ et T est continue. □

Nous terminons ce chapitre par un exemple

EXEMPLE 2.4.1. Soit $T : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ telle que $T(f) = f'$, la dérivée. T est linéaire. On munit $C^1[0,1]$ et $C[0,1]$ de la norme du suprémum :

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Montrons que $\mathfrak{G}(T)$ est fermé. On prend une suite dans $\mathfrak{G}(T)$, disons $((f_n, f_n'))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers (f,g). Montrons que $g = f'$.

$$\begin{aligned} f_n(t) - f_n(0) &= \int_0^t f_n'(s)ds \\ \Rightarrow f(t) - f(0) &= \int_0^t g(s)ds \end{aligned}$$

ce qui signifie que $g = f'$.

Cependant, nous savons que T n'est pas une application continue. Par le théorème du graphe fermé, on doit donc avoir la négation de l'une des hypothèses, et la seule possibilité est que $C^1[0,1]$ n'est pas un espace de Banach pour la norme du suprémum.

Chapitre 3

Topologies faible et faible-étoile

Jusqu'ici, nous avons travaillé uniquement dans la topologie forte. Cette topologie comporte un «grand nombre d'ouverts», et pour des espaces de dimension infinie, il y a «tellement d'ouverts» que les compacts deviennent «durs à trouver» Pour pallier ce problème, nous devrons définir une nouvelle topologie, plus faible, et dans laquelle les compacts seront plus «abondants».

Toutefois, nous devrons prendre garde à ne pas supprimer trop d'ouverts non plus, sans quoi nous perdrions «trop» de fonctions continues.

3.1. La topologie faible

DÉFINITION 3.1.1 (Topologie faible). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. La **topologie faible** sur E est la topologie la plus faible (la moins fine) telle que les éléments de E' demeurent continus. On la note $\sigma(E, E')$.

Essentiellement, nous nous arrangerons au moins pour «préserver la continuité» des éléments du dual. Ceux-là sont de bonnes fonctions à garder continues, mais, en même temps, la linéarité est une propriété suffisamment forte pour que nous puissions espérer obtenir «plus de compacts».

Dans la suite de ces notes, la topologie usuelle d'un espace de Banach E (engendrée par la métrique induite par la norme) sera appelée **topologie forte**, pour contraster avec la topologie faible.

REMARQUE. Si $U \in \sigma(E, E')$ est un ouvert faible et si $x_0 \in U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ un nombre fini d'éléments de E' tels que

$$x_0 \in V = \{x \in E \mid |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n\} \subseteq U$$

On peut donc s'imaginer les ouverts de la topologie faible comme étant les zones comprises entre un nombre fini de paires d'hyper-plans. En dimension infinie, les ouverts de cette base de voisinage ne peuvent donc pas être bornés.

Remarque. Si pour tout $f \in E'$, on définit $p_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $p_f(x) = |\langle f, x\rangle|$, alors p_f est une semi-norme. La famille des semi-normes $(p_f)_{f\in E'}$ engendre $\sigma(E, E')$ et sous $\sigma(E, E')$, E est un espace localement convexe. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la convexité locale.

Avec une nouvelle topologie, pratiquement tout est à refaire. En effet, cette topologie n'est peut-être même pas induite par une métrique, pour tout ce qu'on sait, elle n'est peut-être même pas séparée !

Proposition 3.1.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*
Alors, $(E, \sigma(E, E'))$ est un espace topologique séparé (de Hausdorf).

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On cherche deux ouverts de $\sigma(E, E')$ qui les séparent.

On définit $g : \operatorname{Eng}\{x_2 - x_1\} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\alpha(x_2 - x_1) \mapsto \alpha$.

g est linéaire et continue. Par la version analytique du théorème de Hahn-Banach (théorème 2.2.1) on prolonge g par un f dans le dual. On définit ensuite

$$V_i = \left\{x \in E \mid |\langle f, x - x_i\rangle| < \frac{1}{2}\right\} \quad \forall i = 1, 2$$

Les V_i sont des ouverts dans $\sigma(E, E')$ et $x_i \in V_i$. De plus, par construction, ils sont disjoints. □

Cette propriété nous donne l'unicité de la limite pour la convergence dans la topologie faible. Nous allons maintenant montrer que la topologie faible coïncide avec la topologie forte pour les espaces de Banach de dimension finie.

Proposition 3.1.2. *Soit E un espce de Banach de dimension $n < \infty$ sur $\mathbb{K}$.*
Alors, $\sigma(E, E')$ coïncide avec la topologie forte sur E.

Démonstration. Notons $\mathcal{T}$ la topologie forte. $\sigma(E, E') \subseteq \mathcal{T}$. Il suffit donc seulement de montrer l'inclusion dans l'autre sens. Soit U ouvert dans la topologie forte. Alors, pour $x_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq U$.

Soit $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ uen base de E normaliée. pour tout $x \in E$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. De même, il existe $\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2} \ldots, \alpha_{0,n}$ tels que $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_{0,i} b_i$. On définit $f_i \in E'$ par $f_i(x) = \alpha_i$.

On a bien sûr que

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \alpha_{0,i}| = \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle|$$

Il suffit de poser

$$V = \left\{x \in E \mid |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \frac{r}{n}, i = 1, \dots, n\right\}$$

et avec ce choix, pour tout $x \in V$, $x \in B(x_0, r) \subseteq U$. Donc $V \subseteq U$, et V est ouvert dans $\sigma(E, E')$.

Pour récapituler, on a montré que pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert faible inclus dans U et qui contient x_0. Donc U est un ouvert faible, et les topologies fortes et faibles coïncident. □

Cette proposition est une grande motivation pour considérer, à partir de maintenant, surtout des espaces de Banach de dimension infinie – autrement, leur structure est très simple, et, dans tous les cas, la topologie faible n'apporte rien de plus. Nous achevons de nous convaincre avec la proposition suivante :

Proposition 3.1.3. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie sur $\mathbb{K}$.*

Alors, la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte.

Démonstration. Nous allons en fait montrer que si E est de dimension infinie, $B(0,1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.

Supposons qu'il existe $x_0 \in B(0,1)$ et $V \in \sigma(E, E')$ tel que $x_0 \in V \subseteq B(0,1)$. Sans perdre de généralité, on peut prendre

$$V = \{x \in E \mid |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

On prend également $\bar{x} \in E$ tel que $\langle f_i, \bar{x}\rangle = 0$ pour tout i. Ce $\bar{x}$ existe bel et bien, car l'application $(x \mapsto (\langle f_i, x\rangle)_{i \leq n})$ n'est pas injective, puisque E est de dimension infinie. Mais alors, pour tout $t \in \mathbb{K}$, on a que

$$|\langle f_i, x_0 + t\bar{x}\rangle| \leq |\langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{K}$, $x_0 + t\bar{x} \in V$. Mais pour $|t|$ suffisamment grand, $x_0 + t\bar{x} \notin B(0,1)$

Ce que nous avons montré, c'est que pour tout $x_0 \in B(0,1)$, il n'existe aucun ouvert faible V qui contienne x_0 et tel que $V \subseteq B(0,1)$. Donc, pour tout $x_0 \in B(0,1)$, x_0 n'est pas un point intérieur. $B(0,1)$ est d'intérieur vide, même si c'est un ouvert dans la topologie forte. Donc, la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte. □

Remarque. On constate en fait que les ouverts de la topologie faible en dimension infinie ne sont pas bornés.

THÉORÈME 3.1.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $C \subseteq E$ convexe.*

Alors si C est fermé dans la topologie forte, C est fermé dans la topologie faible.

DÉMONSTRATION. Il est évident que si A est un fermé faible de E, A^c est un ouvert faible de E, donc A^c est un ouvert fort de E, donc A est un fermé fort de E.

On montre que si C est un fermé fort, C^c est un ouvert faible.

Prenons $x_0 \in C^c$. On va trouver $V \in \sigma(E, E')$ tel que $V \subseteq C^c$. Pour ce faire, on va utiliser le théorème de Hahn-Banach pour séparer C de x_0 par un hyper-plan. En effet, puisque E est Banach sur $\mathbb{K}$, E est Banach sur $\mathbb{R}$ au moins. C est convexe et fermé, x_0 est convexe et compact. Par la seconde version géométrique du théorème de Hahn-Banach (théorème 2.2.4), il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \hat{f} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telles que $C \subseteq \{x \in E \mid \hat{f}(x) \geq x\} = A$ De plus, $\hat{f}(x_0) < \alpha$. Par conséquent, A^c est un ouvert faible, il contient x_0 et $A^c \subseteq C^c$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^c = \hat{f}^{-1}(] - \infty, \alpha[) \in \sigma(E, E')$ car $\hat{f} \in E'$ et est donc continue, et $] - \infty, \alpha[$ est un ouvert.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on choisit $f \in E'$ telle que $\mathfrak{R}(f) = \hat{f}$. Alors, $A^c = f^{-1}(] - \infty, \alpha[) \in \sigma(E, E')$, car $f \in E'$ est continue et $] - \infty, \alpha[$ est un ouvert.

On prend $V = A^c$. V est un ouvert faible qui contient x_0 et qui est inclus dans C^c. On le construit pour tout $x_0 \in C^c$, donc C^c est un ouvert faible, et C est un fermé faible. $\square$

REMARQUE. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, considérer E vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ engendre la même topologie faible.

THÉORÈME 3.1.2. *Soient E, F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

Alors, T est continue dans la topologie forte si et seulement si T est $\sigma(E, E'), \sigma(F, F')$-continue.

DÉMONSTRATION. ($\Rightarrow$) Soit $V \in \sigma(F, F')$. On veut montrer que $T^{-1}(V) \in \sigma(E, E')$. Posons $\hat{x} \in T^{-1}(V)$. On cherche un $U \in \sigma(E, E')$ tel que $x \in U \subseteq T^{-1}(V)$.

On sait que $T(\hat{x}) \in V$. On peut donc trouver $\varepsilon > 0$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ des éléments de F' tels que

$$\{y \in F \mid |\langle g_i, y - T(\hat{x})\rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n\} \subseteq V$$

On prend maintenant $g_i \circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Puisque $g_i \in F'$ et T est linéaire et fortement continue, $g_i \circ T = f_i \in E'$. On considére donc

$$\begin{aligned} U &= \{x \in E \mid |\langle f_i, x - \hat{x}\rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n\} \quad (\in \sigma(E, E')) \\ &= \{x \in E \mid |\langle g_i, T(x) - T(\hat{x})\rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n\} \\ &\subseteq T^{-1}(V) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\hat{x} \in T^{-1}(V)$, on arrive à trouver un ouvert faible qui contient $\hat{x}$ et qui est inclus dans $T^{-1}(V)$. Donc, $T^{-1}(V)$ est un ouvert faible si V est un ouvert faible, et T est $\sigma(E, E'), \sigma(F, F')$- continue.

($\Leftarrow$) Puisque T est continue dans les topologies faibles de E et F, $\mathfrak{G}\,(T)$ est fermé dans $E \times F$ avec la topologie faible sur $E \times F$. Par conséquent $\mathfrak{G}\,(T)$ est fermé dans la topologie forte sur $E \times F$, et par le théorème du graphe fermé (théorème 2.4.3), T est continue pour les topologies usuelles (fortes) sur E et F. $\square$

Notation (Convergence faible). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $x \in E$ dans la topologie faible. On notera cela par $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 3.1.4. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E.*

(1) $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.
(2) $x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n \rightharpoonup x$
(3) $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$
(4) Si $x_n \rightharpoonup x$ et on a une suite $(f_n \in E')_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans E', alors, $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Démonstration. (1) Par construction, $f \in E'$ signifie que f est continue pour la topologie faible

($\Rightarrow$) Par continuité de f, clairement si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

($\Leftarrow$) Pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_f tel que pour tout $n > N_f$, $|\langle f, x_n - x\rangle| < \varepsilon$.

Soit $U \in \sigma(E, E')$ un voisinage de x dans la topologie faible. On peut trouver $\varepsilon > 0$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n \in E')$ telles que $V = \{y \in E \mid |\langle f_i, y - x\rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n\}$, et $V \subseteq U$ et $x \in V$.

Mais puisque pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, forcément il existe un N tel que pour tout $n > N$, $x_n \in V \subseteq U$.

Donc pour tout voisinage de x dans $\sigma(E, E')$, il existe un N tel que pour tout $n > N$, x_n est dans ce voisinage. Donc $x_n \rightharpoonup x$.

(2) Par continuité de f pour tout $f \in E'$, en utilisant le résultat précédent, celui-ci est direct.

(3) Par (1), $x_n \rightharpoonup x$, et par conséquent, pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$. En particulier, pour tout $f \in E'$, $\sup\{|\langle f, x_n \rangle| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

On prend la famille d'applications linéaires $T_n : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ et définies par $T_n(f) = \langle f, x_n \rangle$. On a alors $\sup\{\|T_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ par le principe de la borne uniforme (théorème 2.3.1).

Mais

$$\begin{aligned}
\|T_n\| &= \sup\{\|T_n(f)\| \mid \|f\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle f, x_n \rangle| \mid \|f\| \leq 1\} \\
&= \|x_n\|
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par le corollaire 2.2.2 du théorème de Bohnenblust-Sobczyk.

Ainsi, nous avons que $\sup\{\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$, d'où l'on déduit que la suite est bornée. De plus, on a que $|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \, \|x_n\|$ pour tout $f \in E', n \in \mathbb{N}$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\| \, \|x_n\| \\
\Rightarrow \; & \sup\{|\langle f, x \rangle| \mid \|f\| \leq 1\} \leq \sup\{\liminf_{n\to\infty} \|f\| \, \|x_n\| \mid \|f\| \leq 1\} \\
\Rightarrow \; & \|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|
\end{aligned}$$

(4) Nous allons montrer cela en utilisant la définition «ε, δ» de la convergence.

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \\
&\leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle|
\end{aligned}$$

Or, par (3), $\|x_n\| \leq M$ pour un certain M fini. On a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que pour tout $n > N_\varepsilon$, $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

D'autre part, par (1), on a aussi que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{N}_\varepsilon$ tel que pour tout $n > \tilde{N}_\varepsilon$, $|\langle f, x_n - x \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on prend $N = \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$. Pour tout $n > N$, nous avons donc que

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc, $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

□

3.2. La topologie faible-étoile

DÉFINITION 3.2.1 (Espace bidual). Soit E un espace de Banach. Le **bidual** de E (noté E'') est l'espace dual du dual de E. En d'autres termes,

$$E'' = (E')'.$$

Évidemment, puisque E' est un espace de Banach, E'' en est un aussi, et on peut définir une topologie faible sur E''. Mais on peut être plus restrictifs...

DÉFINITION 3.2.2 (Inclusion cannonique). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. L'**inclusion cannonique** $J : E \longrightarrow E''$ est définie par $J(x) = (f \mapsto \langle f, x\rangle)$, de sorte que

$$\langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in E'.$$

REMARQUE. Il est évident que $J(E) \subseteq E''$. Cependant, en général, $J(E) \neq E''$.

REMARQUE. Tous les éléments de $J(E)$ sont continus dans $\sigma(E', E'')$.

REMARQUE. J est une isométrie entre $J(E)$ et E. En effet, $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned}
\|J(x)\| &= \sup\{|\langle J(x), f\rangle| \ : \ \|f\| \leq 1\} && \text{(déf de } \|\cdot\|) \\
&= \sup\{|\langle f, x\rangle| \ : \ \|f\| \leq 1\} && \text{(déf. de } J) \\
&= \|x\| && \text{(Hahn-Banach)}
\end{aligned}$$

REMARQUE. Pour les espaces de Hilbert, Il est évident que $J(E) = E''$.

DÉFINITION 3.2.3 (Topologie faible-étoile). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. La **topologie faible-étoile** (ci-après « faible-$*$») sur E' est la plus faible topologie qui garde continues toutes les applications de $J(E)$. Elle est notée $\sigma(E', J(E))$ par analogie avec la topologie faible, ou, plus succintement, $*\sigma(E', E)$.

REMARQUE. (1) $*\sigma(E', E) \subseteq \sigma(E', E'')$. Autrement dit, $*\sigma(E', E)$ est plus faible que $\sigma(E', E'')$.

(2) Pour tout $U \in *\sigma(E', E)$, $f \in U$, on peut trouver $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in J(E))$ et $\varepsilon > 0$ t.q.

$$V = \{g \in E' \ : \ |\langle \xi_i, g - f\rangle| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

et clairement $f \in V \subseteq U$. Mais on peut aussi trouver $(x_1, \ldots, x_n \in E)$ t.q. $J(x_i) = \xi_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors,

$$V = \{g \in E' \ : \ |\langle g - f, x_i\rangle| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

(3) Pour $x \in E$, soit $p_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $p_x(f) = |\langle f, x\rangle|$. Alors p_x est une semi-norme sur E'.

(4) La topologie $*\sigma(E', E)$ est celle engendrée par la famille de semi-normes $(p_x)_{x\in E}$.

(5) Soit X un espace topologique. Soient
— $\phi : X \longrightarrow (E, \sigma(E, E'))$
— $\psi : X \longrightarrow (E', \sigma(E', E''))$
— $\hat{\psi} : X \longrightarrow (E', *\sigma(E', E))$

ϕ est continue si et seulement si $f \circ \phi$ est continue $\forall f \in E'$.

ψ est continue si et seulement si $\xi \circ \psi$ est continue $\forall \xi \in E''$.

$\hat{\psi}$ est continue si et seulement si $J(x)\circ\hat{\psi}$ est continue $\forall x \in E$.

Ces conditions sont avantageuses car elles permettent d'évaluer la continuité defonctions vers des topologies «étranges» en évaluant plutôt la continuité d'applicationsde $X \to \mathbb{K}$, ce qui est souvent plus simple.

Proposition 3.2.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*
L'espace topologique $(E', *\sigma(E', E))$ est séparé (de Hausdorf).

Démonstration. On choisit $f_1, f_2 \in E'$, avec $f_1 \neq f_2$. On cherche deux ouverts $V_1, V_2 \in *\sigma(E', E)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $f_i \in V_i$, $i = 1, 2$.

Puisque $f_1 \neq f_2$, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que

$$|\langle f_1, x\rangle - \langle f_2, x\rangle| = r > 0$$

pour un certain r.

On écrit

$$V_i = \left\{ f \in E' \ : \ |\langle f - f_i, x\rangle| < \frac{r}{2} \right\}.$$

Clairement, $f_i \in V_i$ pour $i = 1, 2$. On a également évidemment que $V_i \in *\sigma(E', E)$ pour $i = 1, 2$.

Présumons que $g \in V_i$ pour $i = 1, 2$. Alors, on aurait $|\langle g - f_1, x\rangle| < \frac{r}{2}$ et $|\langle g - f_2, x\rangle| < \frac{r}{2}$. Mais

$$\begin{aligned} r &= |\langle f_1 - f_2, x\rangle| \\ &= |\langle g - f_2, x\rangle - \langle g - f_1, x\rangle \ | \\ &\leq |\langle g - f_2, x\rangle| + |\langle g - f_1, x\rangle| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

ou $r < r$, ce quiest impossible. Donc $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, et $(E', *\sigma(E', E))$ est séparé. $\square$

NOTATION (Convergence faible-$*$). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $(f_n \in E')_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du dual de E convergeant vers $f \in E'$. On notera cela

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

PROPOSITION 3.2.2. *Soit E un espace de Banach, et soit $(f_n \in E')_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du dual de E.*

(1) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si et seulement si $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall x \in E$;

(2) $f_n \rightharpoonup f \;\Rightarrow\; f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(3) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \;\Rightarrow\; (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$;

(4) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et on a une suite $(x_n \in E)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration est en tout point analogue à cellesuggérée pour la Proposition 3.1.4 concernant la convergence de suites dans $\sigma(E, E')$. $\square$

NOTATION. Soit E un espace deBanach sur $\mathbb{K}$. Nous noterons

$$B_E = \{x \in E \;:\; \|x\| \leq 1\}$$

la boule fermée de rayon 1 centrée à l'origine.

THÉORÈME 3.2.1 (Alaoglu). *Soit E un espace de Banach. Alors, $B_{E'}$ est compacte dans $(E', *\sigma(E', E))$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que $B_{E'}$ est homéomorphe à un compact dans l'espace produit $\prod_{x\in E} \mathbb{K}$.

Tout d'abord, on introduit $\phi : (E', *\sigma(E', E)) \to \prod_{x\in E} \mathbb{K}$ définie par

$$\phi(f) = (\langle f, x\rangle)_{x\in E}$$

.

On souhaite montrer que la fonction $\tilde{\phi} = \phi|_{B_{E'}} : B_{E'} \to \phi(B_{E'})$ est un homéomorphisme et que $\phi(B_{E'})$ est compact dnas $\prod_{x\in E} \mathbb{K}$.

On remarque que

$$\phi(B_{E'}) \subseteq \prod_{x\in E} \overline{B(0, \|x\|)} \subseteq \prod_{x\in E} \mathbb{K}.$$

(En effet, $\|f\| \leq 1 \;\Rightarrow\; |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|$.)

Bien sûr, par le théorème de Tychonov, $\prod_{x\in E} \overline{B(0, \|x\|)}$ est un compact pour la topologie produit. Donc, si $\phi(B_{E'})$ est fermé, $\phi(B_{E'})$ est compact.

Soit $w \in \prod_{x\in E} \mathbb{K}$. On écrit $w = (w_x \in \mathbb{K})_{x\in E}$. Considérons

$$W = \left\{ w \in \prod_{x\in E} \overline{B(0, \|x\|)} \ : \ w_{x+y} = w_x + w_y, w_{\alpha x} = \alpha w_x \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in E \right\}.$$

Étant donné $f \in B_{E'}$, clairement il existe $w \in W$ t.q. $\phi(f) = w$. Donc $\phi(B_{E'}) \subseteq W$.

Mais étant donné $w \in W$, définissons $f_w : E \to \mathbb{K}$ t.q. $f_w(x) = w_x$. Alors, $f_w \in B_{E'}$ car $\|f_w\| \leq 1$. Et $\phi(f_w) = w$. Donc $W \subseteq \phi(B_{E'})$.

Donc $W = \phi(B_{E'})$.

Fixons maintenant $x_0, y_0 \in E$, $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, et définissons

$$C_{x_0,y_0} = \left\{ w \in \prod_{x\in E} \mathbb{K} \ : \ w_{x_0+y_0} - w_{x_0} - w_{y_0} = 0 \right\},$$

$$D_{\alpha_0,x_0} = \left\{ w \in \prod_{x\in E} \mathbb{K} \ : \ w_{\alpha_0 x_0} - \alpha_0 w_{x_0} = 0 \right\}.$$

Ces deux espaces sont fermés puisque les applications $p_{x_0,y_0}, p_{\alpha_0,x_0} : \prod_{x\in E} \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, définies respectivement par

$$p_{x_0,y_0}(w) = w_{x_0+y_0} - w_{x_0} - w_{y_0}$$

et

$$p_{\alpha_0,x_0}(w) = w_{\alpha_0 x_0} - \alpha_0 w_{x_0}$$

sont des applications continues (ce sont des combinaisons linéaires de projections sur des composantes, lesquelles sont continues), et les espaces C_{x_0,y_0} et D_{α_0,x_0} sont les préimages du fermé $\{0\}$ par ces applications.

On remarque aussi que

$$\phi(B_{E'}) = W = \left(\bigcap_{x,y\in E} C_{x,y} \right) \cap \left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{K}, x\in E} D_{\alpha,x} \right) \cap \left(\prod_{x\in E} \overline{B(0, \|x\|)} \right),$$

et $\phi(B_{E'})$ est un fermé, puisqu'il s'agit d'une intersection de fermés.

On a donc que $\phi(B_{E'})$ est un compact !

Montrons maintenant que $\phi(B_{E'})$ est homéomorphe à $B_{E'}$ (c'est à dire que $\tilde{\phi}$ est un homéomorphisme).

ϕ est continue. En effet, écrivons $p_{x_0} : \prod_{x\in E} \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ avec la définition $p_{x_0}(w) = w_{x_0}$.

On remarque à propos de $p_{x_0} \circ \phi$ que

- p_{x_0} est continue ;
- $p_{x_0} \circ \phi(f) = \langle f, x_0 \rangle = J(x_0)(f)$ pour tout $f \in E'$. Autrement dit, $p_{x_0} \circ \phi = J(x_0)$

Or, $J(x_0) \in J(E)$ et les éléments de $J(E)$ sont continus ; autrement dit, $p_{x_0} \circ \phi$ est continue pour tout x_0, et donc ϕ est continue, et en particulier $\tilde{\phi}$ est continue.

$\tilde{\phi}$ est bijective. En effet, pour tout $w \in \phi(B_{E'})$ il existe $f_w \in B_{E'}$ tel que $\tilde{\phi}(f_w) = w$; $\tilde{\phi}$ est donc surjective. Et pour tout $f, g \in B_{E'}$, $\tilde{\phi}(f) = \tilde{\phi}(g)$ si et seulement si f et g sont égales partout ; $\tilde{\phi}$ est injective.

On a donc un inverse $\tilde{\phi}^{-1} : \phi(B_{E'}) \to B_{E'}$.

On se penche maintenant sur la fonction $J(x_0) \circ \tilde{\phi}^{-1} : \phi(B_{E'}) \to \mathbb{K}$ définie pour tout $x_0 \in E$. Si $w = \phi(f_w)$,

$$J(x_0) \circ \tilde{\phi}^{-1}(w) = J(x_0)(f_w) = \langle f_w, x_0 \rangle = w_{x_0}$$

On remarque donc que $J(x_0) \circ \tilde{\phi}^{-1} = p_{x_0}$. Puisque $J(x_0)$ et p_{x_0} sont continues, forcément $\tilde{\phi}^{-1}$ est aussi continue.

Donc, $\tilde{\phi}$ est une fonction continue inversible dont l'inverse est continue ; c'est un homéomorphisme entre $B_{E'}$ et $\phi(B_{E'})$. Puisque nous avons déjà montré que $\phi(B_{E'})$ est compacte, il suit nécessairement que $B_{E'}$ est aussi compacte. $\square$

Exemple 3.2.1. On considère les espaces suivants :

$$c_0 = \{x = (x_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}} \ : \ x_n \to 0\}$$

$$\ell^\infty = \left\{x = (x_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}} \ : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\}$$

$$\ell^1 = \left\{x = (x_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}} \ : \ \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\}$$

On munit c_0 et ℓ^∞ de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

et ℓ^1 de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Ainsi équipés, c_0, ℓ^∞ et ℓ^1 sont des espaces de Banach. Prenons $y \in \ell^1$. On définit $f_y : c_0 \to \mathbb{R}$ par

$$f_y(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$$

. f_y est linéaire et continue ; $f_y \in c_0'$.

$$\begin{aligned}\|f_y\| &= \sup\{|f_y(x)| \ : \ \|x\|_\infty \leq 1\}\\ &\leq \sup\{\|x\|_\infty \|y\|_1 \ : \ \|x\|_\infty \leq 1\}\\ &\leq \|y\|_1\end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut considérer un $f \in c_0'$. On note e_n la suite où tous les termes sont nuls sauf le $n$ième qui vaut 1. Puis, on prend $y_n = f(e_n)$, et $s = (\mathrm{sgn}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des signes des y_i. Évidemment, $\|s\|_\infty = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x)| \ : \ \|x\| \leq 1\}\\ &\geq |f(s)|\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{sgn}(y_i) f(e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|\end{aligned}$$

En particulier, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de ℓ^1 et $\|y\|_1 \leq \|f\|$; de plus, f est en fait le f_y que avions déjà défini, et on a que $\|f_y\| = \|y\|_1$. En fait, l'application $f \mapsto (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une isométrie entre c_0' et ℓ^1, qui peuvent être identifiés par elle. Par le même type de raisonnement, on identifie $\ell^{1'}$ (donc c_0'') à ℓ^∞. Mais $J(c_0)$ est identifié à c_0, qui n'est pas égal à ℓ^∞.

On a donc un exemple d'un espace où $J(c_0) \neq c_0''$.

Remarque. Nous savons déjà que J est une isométrie. Cela implique que $J(B_E)$ est fermé dans la topologie forte (usuelle) de E'' et $J(B_E) \subseteq B_{E''}$.

Remarque. Le bidual E'' d'un espace de Banach E est également un espace de Banach, et en tant que tel il admet aussi un dual

$$(E'')' = E'''$$

.

Le «tridual» de E, le bidual de E'. On peut donc définir la topologie $*\sigma(E'', E')$, une topologie faible-$*$ sur E'', ainsi qu'une topologie faible $\sigma(E'', E''')$.

Proposition 3.2.3. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*
Alors, $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $*\sigma(E'', E')$.

Démonstration. Soit $\xi \in B_{E''}$ et $V \in *\sigma(E'', E')$ tels que $\xi \in V$. On souhaite montrer que $V \cap J(B_{E''})$ est non-vide.

Sans perdre de généralité, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $(f_1, \dots, f_n \in E')$ tels que

$$V = \{\eta \in E'' \ : \ |\langle \eta - \xi, f_i \rangle| < \ \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

On veut trouver $x \in B_E$ tel que $J(x) \in V$, ainsi on aurait $J(x) \in J(E) \cap V$.

En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} & J(x) \in V \\ \Rightarrow & |\langle J(x) - \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n \\ \Rightarrow & |\langle f_i, x \rangle - \langle \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \ \forall i \leq n \end{aligned}$$

On introduit la fonction $\phi : B_E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\phi(x) = (\langle f_i, x \rangle)_{i \leq n}$ et on note $p = (\langle \xi, f_i \rangle)_{i \leq n}$. Si $p \in \overline{\phi(B_E)}$, alors

$$(\langle \xi, f_i \rangle)_{i \leq n} \in \overline{\{\phi(x) \ : \ x \in B_E\}}$$

et alors il existe forcément un $x \in B_E$ tel que $|\langle \xi, f_i \rangle - \langle f_i, x \rangle| < \varepsilon$ pour tout $i \leq n$, et nous avons montré le résultat.

Nous allons donc devoir montrer que $p \in \overline{\phi(B_E)}$. Supposons par contradiction que $p \notin \overline{\phi(B_E)}$. $\overline{\phi(B_E)}$ est fermé et convexe. Si $z, w \in \phi(B_E)$, alors il existe $x, y \in B_E$ tels que $\phi(x) = z, \phi(y) = w$, et $tz + (1-t)w = t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$.

Puisque ϕ est linéaire, on a alors que $\phi(tx + (1-t)y) \in \phi(B_E)$ par convexité. $\overline{\phi(B_E)}$ est convexe car c'est la fermeture d'un convexe. $\{p\}$ est convexe et compact, puisque c'est un singleton. Par la seconde variante géométrique du théorème de Hahn-Banach (Théorème 2.2.4), on peut séparer $\{p\}$ et $\overline{\phi(B_E)}$ par un hyper-plan, et ce au sens strict. On a donc trouvé $\hat{g} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-linéaire et non-triviale, ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\hat{\varepsilon} > 0$ tels que

$$\hat{g}(\phi(x)) \leq \alpha - \hat{\varepsilon} \leq \alpha + \hat{\varepsilon} \leq \hat{g}(p) \qquad \forall x \in B_E.$$

On remarque que $x \in B_E \ \Leftrightarrow \ -x \in B_E$, d'où

$$\begin{aligned} & \hat{g}(\phi(x)) = -\hat{g}(\phi(-x)) \\ \Rightarrow & -\hat{g}(\phi(-x)) \leq \alpha - \hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

Mais on doit aussi avoir $\hat{g}(\phi(-x)) \leq \alpha - \hat{\varepsilon}$. Donc, $\alpha - \hat{\varepsilon} \geq 0$.

Par la version analytique du théorème de Hahn-Banach (Théorème 2.2.1) ou par le théorème de Bohnenblust-Sobczyk (Théorème 2.2.2), $\hat{g}$ possède un unique prolongement $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-linéaire tel que $\mathfrak{R}(()\, g) = \hat{g}$. Vu la linéarité de g, on sait qu'il existe $(\beta_i \in \mathbb{K})_{i \leq n}$ tels que

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i \leq n} \beta_i \lambda_i,$$

de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} g(\phi(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i, x \rangle \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $g \circ \phi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$, et

$$\langle \xi, g \circ \phi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle \xi, f_i \rangle = g(p).$$

On sait que $\alpha + \hat{\varepsilon} \leq \hat{g}(p)$. Puisque $\alpha - \hat{\varepsilon} \geq 0$, forcément,

$$\begin{aligned} \hat{g}(p) &= |\hat{g}(p)| = |g(p)| \\ &= |\langle \xi, g \circ \phi \rangle| \leq \|\xi\| \, \|g \circ \phi\| \\ &\leq \|g \circ \phi\| = \|\hat{g} \circ \phi\| && (\|\xi\| \leq 1) \\ &= \sup\{|\hat{g} \circ \phi(x)| \ : \ \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \alpha - \hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

et on trouve $\alpha + \hat{\varepsilon} \leq \alpha - \hat{\varepsilon}$, ce qui est forcément faux.
Donc, $p \in \overline{\phi(B_E)}$.
Donc, $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$. □

3.3. Espaces réflexifs

Définition 3.3.1 (Espace réflexif). Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. E est **réflexif** lorsque J est surjective.

Remarque. J est déjà une isométrie injective. Donc E est réflexif si J est une isométrie bijective, auquel cas E et E'' sont carrément homéomorphes.

Exemple 3.3.1. (1) Si E est de dimension finie, E est réflexif.

(2) Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, alors par Riesz, $\mathcal{H}$ est réflexif.

(3) Dans l'exemple précédent, c_0 n'est pas réflexif.

Théorème 3.3.1. *Soit E un espace de Banach.*
Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(1) E est réflexif ;

(2) B_E est compacte pour $\sigma(E, E')$;

(3) Les topologies $\sigma(E, E')$ coïncident ;

(4) E' est réflexif.

DÉMONSTRATION. **(1) $\Rightarrow$ (2)** E est réflexif. On montre que B_E est compacte dans $\sigma(E, E')$.

Clairement, $J(B_E) = B_{E''}$ puisque E est réflexif. Or, par Alaoglu (Théorème 3.2.1), $B_{E''}$ est compacte dans $*\sigma(E'', E')$.

Bien sûr, $J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', *\sigma(E'', E'))$ est continue. J est aussi bijective puisque E est réflexif. Or, pour tout $f \in E'$ et $\xi \in E''$, si on trouve $x \in E$ tel que $J(x) = \xi$,

$$f \circ J^{-1}(xi) = \langle f, x \rangle = \langle \xi, f \rangle$$

et si $J_{E'}$ désigne l'inclusion cannonique de E' dans E''', pour tout $f \in E'$, $f \circ J^{-1} = J_{E'}(f)$.

$J_{E'}(f)$ est continue et puisque f est continue pour $\sigma(E, E')$, alors forcément J^{-1} doit être continue. Alors, J est un homéomorphisme et B_E dans $\sigma(E, E')$ est homéomorphe à $B_{E''}$ dans $*\sigma(E'', E')$. Mais $B_{E''}$ est compacte pour la topologie faible-* par le théorème d'Alaoglu (Théorème 3.2.1).

Donc B_E est compacte dans $\sigma(E, E')$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Il est suffisant de montrer que $J(B_E) = B_{E''}$. Bien sûr, $J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', *\sigma(E'', E'))$ est une application continue. Si l'on prend $f \in E'$, alors

$$[J_{E'}(f) \circ J](x) = \langle J_{E'}(f), J(x) \rangle = \langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \qquad \forall x \in E$$

d'où $J_{E'}(f) \circ J = f$. Puisque f et $J_{E'}(f)$ sont continues, forcément J doit être continue pour $(E, \sigma(E, E'))$ et $(E'', *\sigma(E'', E'))$. On sait donc que $J(B_E)$ et B_E sont homéomorphes dans ces topologies, et que $J(B_E)$ est faiblement compact dans $B_{E''}$ puisque B_E est faiblement compact dans E. Mais $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ (Proposition 3.2.3). Donc, $J(B_E) = B_{E''}$, et E est réflexif.

(1) $\Rightarrow$ (3) Cela est évident par les définitions destopologies faibles et faibles-*.

(3) $\Rightarrow$ (4) Par Alaoglu (Théorème 3.2.1), $B_{E'}$ est compacte dans $*\sigma(E', E)$. Donc $B_{E'}$ est aussi compacte dans $\sigma(E', E'')$ est alors E' est réflexif par (2) $\Rightarrow$ (1).

(4) $\Rightarrow$ (1) On veut montrer que $J(B_E) = B_{E''}$. On sait que $J(B_E)$ est dense dans E'' avec $*\sigma(E'', E')$ (Prop. 3.2.3). E' est réflexif, et, par (1) $\Rightarrow$ (3), on a que $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ avec $\sigma(E'', E''')$. Mais $J(B_E)$ est un convexe fermé dans la topologie forte sur E''. Donc $J(B_E)$ est un fermé dans $\sigma(E'', E''')$ et $J(B_E) = B_E$ et E est réflexif. $\square$

PROPOSITION 3.3.1. *Si E est un espace de Banach réflexif, et M un sous-espace fermé de E,*
alors M est réflexif.

DÉMONSTRATION. E est réflexif, alors B_E est compacte dans E avec $\sigma(E, E')$ (Théorème 3.3.1).

$B_M = B_E \cap M$. M est fermé, B_E est compacte, donc B_M est compacte dans $\sigma(E, E')$. (M est un convexe fermé dans la topologie forte ; c'est donc un fermé dans $\sigma(E, E')$.)

Mais par le théorème de Hahn-Banach (Théorème 2.2.1), on peut montrer que $\sigma(M, M') = \{U \cap M \ : \ U \in \sigma(E, E')\}$. Par conséquent, B_M est compacte dans $\sigma(M, M')$ et M est réflexif (Théorème 3.3.1). □

La discussion qui suit, portant sur la complétude des espaces de Banach avec la topologie faible, a été un peu remaniée pour plus de lisibilité.

DÉFINITION 3.3.2 (Topologie engendrée par des semi-normes). Soit X un espace vectoriel, Λ un ensemble d'indices et $(p_\lambda : X \to \mathbb{R}^+)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes sur X. La **topologie engendrée par les semi-normes** $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est la plus faible topologie qui contient les ouverts de la forme

$$\{y \in X \ : \ p_{\lambda_i}(y - x) < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\},$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda)$ est un vecteur d'indices de dimension fini, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

DÉFINITION 3.3.3 (Espace vectoriel localement convexe). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. C'est un **espace vectoriel localement convexe** si $\mathcal{T}$ peut être engendrée par une famille de semi-normes.

EXEMPLE 3.3.2. Soit E un espace de Banach.

Avec la topologie forte, il est localement convexe, puisque la topologie forte est engendrée par sa norme (qui est évidemment une semi-norme).

Mais on constate aussi que si $f \in E'$, alors $|\langle f, \cdot \rangle|$ est une semi-norme pour E ; en fait, la topologie faible est exactement la topologie engendrée par les semi-normes $(|\langle f, \cdot \rangle|)_{f \in E'}$. Autrement dit, $(E, \sigma(E, E'))$ est un espace localement convexe.

De la même façon, $(E', *\sigma(E', E))$ est aussi un espace localement convexe.

Les espaces localement convexes sont une généralisation des espaces de Banach qui préserve une bonne partie des propriétés que nous aimons dans ces espaces. Plusieurs théorèmes que nous avons déjà vus peuvent leur être généralisés sans trop de difficulté, notamment les théorèmes de Hahn-Banach (Théorèmes 2.2.1, 2.2.3 2.2.4).

Une autre notion qui peut être généralisée aux espaces vectoriels localement convexes est celle de suite de Cauchy.

DÉFINITION 3.3.4 (Suite de Cauchy). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique localement convexe, et soit $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille de semi-normes indexées par Λ et qui engendre $\mathcal{T}$. Soit $(x_n \in X)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. C'est une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, pour tout $m, n > N$ on ait

$$p_\lambda(x_m - x_n) < \varepsilon \qquad \forall\lambda \in \Lambda.$$

REMARQUE. Si E est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, et que $(x_n \in E)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E, alors c'est une suite de Cauchy dans $(E, \sigma(E, E'))$ si et seulement si les suites $(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$ pour tout $f \in E'$.

Si $(f_n \in E')_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E', alors c'est une suite de Cauchy dans $(E', *\sigma(E', E))$ si et seulement si les suites $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$ pour tout $x \in E$.

REMARQUE. Avec cette définition pour les suites de Cauchy, la notion de complétude qui lui est associé demeure la même : on dira qu'un espace localement convexe est **complet** si toutes ses suites de Cauchy ont une limite dans l'espace.

La raison pour laquelle on introduit ces notions maintenant, c'est qu'on se demande : si on a une suite bornée, est-ce qu'on peut trouver une sous-suite qui converge faiblement ? L'intuition, c'est que ça devrait être possible puisque les boules sont faiblement compactes. On investigue.

PROPOSITION 3.3.2. *Soit E un espace de Banach réflexif sur $\mathbb{K}$. Alors E est complet avec $\sigma(E, E')$*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n \in E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \sigma(E, E'))$. Alors, pour tut $f \in E'$, $(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

Puisque $\mathbb{K}$ est complet, alors pour tout $f \in E'$, $(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; autrement dit, la suite de fonctions $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement. Par le corollaire 2.3.1 du principe de la Borne uniforme (Théorème de Banach-Steinhaus), il existe un $\xi \in E''$ tel que

$$\langle \xi, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle J(x_n), f\rangle$$

pour tout $f \in E'$.

Mais puisque E est réflexif, il existe donc un $x \in E$ tel que $J(x) = \xi$; par conséquent, on a que

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle J(x_n), f \rangle = \langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$$

et par la proposition 3.1.4, il suit que $x_n \rightharpoonup x$. □

C'est donc une première étape franchie : on a au moins la complétude. Pour aller plus loin, on va devoir étudier la séparabilité des espaces (Définition 1.1.8). C'est ce qu'on fait dans la prochaine section.

3.4. Espaces séparables

Pour rappel, la définition 1.1.8 stipule qu'un espace est séparable si il a une partie dénombrable dense.

Le lemme suivant est employé pour la preuve de la proposition qui suit, mais ne figurait pas dans le cours. Il a été ajouté ici par souci d'exhaustivité.

LEMME 3.4.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E.*

Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(1) A est dense dans E.

(2) Pour $f \in E'$, $\langle f, x \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ si et seulement si $f = 0$.

DÉMONSTRATION. **(1) ⇒ (2)** A est dense dans E, et on veut montrer qu'alors, pour $f \in E'$ non-nul, il existe $y \in A$ tel que $\langle f, y \rangle \neq 0$. Soit $f \neq 0$, alors $\|f\| \neq 0$. Mais $\|f\| = \sup\{|\langle f, x \rangle| \ : \|x\| \leq 1\}$. Forcément, on doit donc avoir $x \in E$ tel que $|\langle f, x \rangle| > \frac{\|f\|}{2}$, et puisque A est dense dans E et que $|\langle f, \cdot \rangle|$ est continue, forcément l'image de A par $|\langle f, \cdot \rangle|$ est dense dans $\mathbb{K}$ et il existe $y \in A$ tel que $|\langle f, y \rangle| > \frac{\|f\|}{2}$, d'où $|f|y \neq 0$.

¬ (1) ⇒ ¬ (2)

□

PROPOSITION 3.4.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*

Si E' est spéarable, alors E est séparable.

DÉMONSTRATION. Soit $D' = \{f_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de E'. On veut construire D, une partie dénombrable et dense de E, ou qui «sépare» E.

Par définition de $\|f_n\|$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$\|f_n\| \geq |\langle f_n, x_n \rangle| \geq \frac{\|f_n\|}{2}.$$

$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ est un ensemble dénombrable.

On choisit maintenant D un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) engendré par $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tel que précédemment défini.

Si F est le sou-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ engendré par $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, alors D est dense dans F, puisque $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) est dense dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Par Soit $f \in E'$ tel que $\langle f, x \rangle = 0$ pour tout $x \in F$. Par un $\square$

3.5. Les espaces L^p (de Lebesgue)

Deuxième partie

Théorie des Opérateurs

Chapitre 4

Opérateurs compacts et autoadjoints

Chapitre 5

Théorie spectrale d'opérateurs compacts et autoadjoints

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Le lemme de Zorn

Le Lemme de Zorn est un résultat d'ordre très général en théorie des ensembles partiellement ordonnés, et de façon plus globale en théorie des treillis.

Il est équivalent à l'axiome du choix. Nous l'utiliserons quelques fois, et malgré qu'il ne soit pas en lien direct avec le sujet du cours, un rappel peut être pertinent.

DÉFINITION A.0.1 (Ensemble partiellement ordonné). Soit O un ensemble. O est **partiellement ordonné** si il est muni d'une relation d'ordre $\leq$ satisfaisant

(1) $x \leq x \qquad \forall x \in O$

(2) $x \leq y, y \leq x \;\Rightarrow\; x = y \qquad \forall x, y \in O$

(3) $x \leq y, y \leq z \;\Rightarrow x \leq z \qquad \forall x, y, z \in O$

DÉFINITION A.0.2 (Élément maximal). Soit O un ensemble partiellement ordonné. $m \in O$ est un **élément maximal** de O si pour tout $x \in O$ tel que $m \leq x$, $m = x$.

DÉFINITION A.0.3 (Majorant). Soit O un ensemble partiellement ordonné et soit $P \subseteq O$ une partie de O. $z \in O$ est un **majorant** de P si $x \leq z \; \forall x \in P$.

DÉFINITION A.0.4 (Ensemble totalement ordonné). Soit O un ensemble partiellement ordonné, et $P \subseteq O$ une partie de O. P est **totalement ordonné** si $\forall x, y \in P$,

$$x \leq y \qquad \text{ou} \qquad y \leq x$$

DÉFINITION A.0.5 (Ensemble inductif). Soit O un ensemble partiellement ordonné. O est **inductif** si toute partie totalement ordonnée de O admet un majorant.

Et finalement

LEMME A.0.1 (Zorn). *Tout ensemble partiellement ordonné inductif non-vide admet un élément maximal*