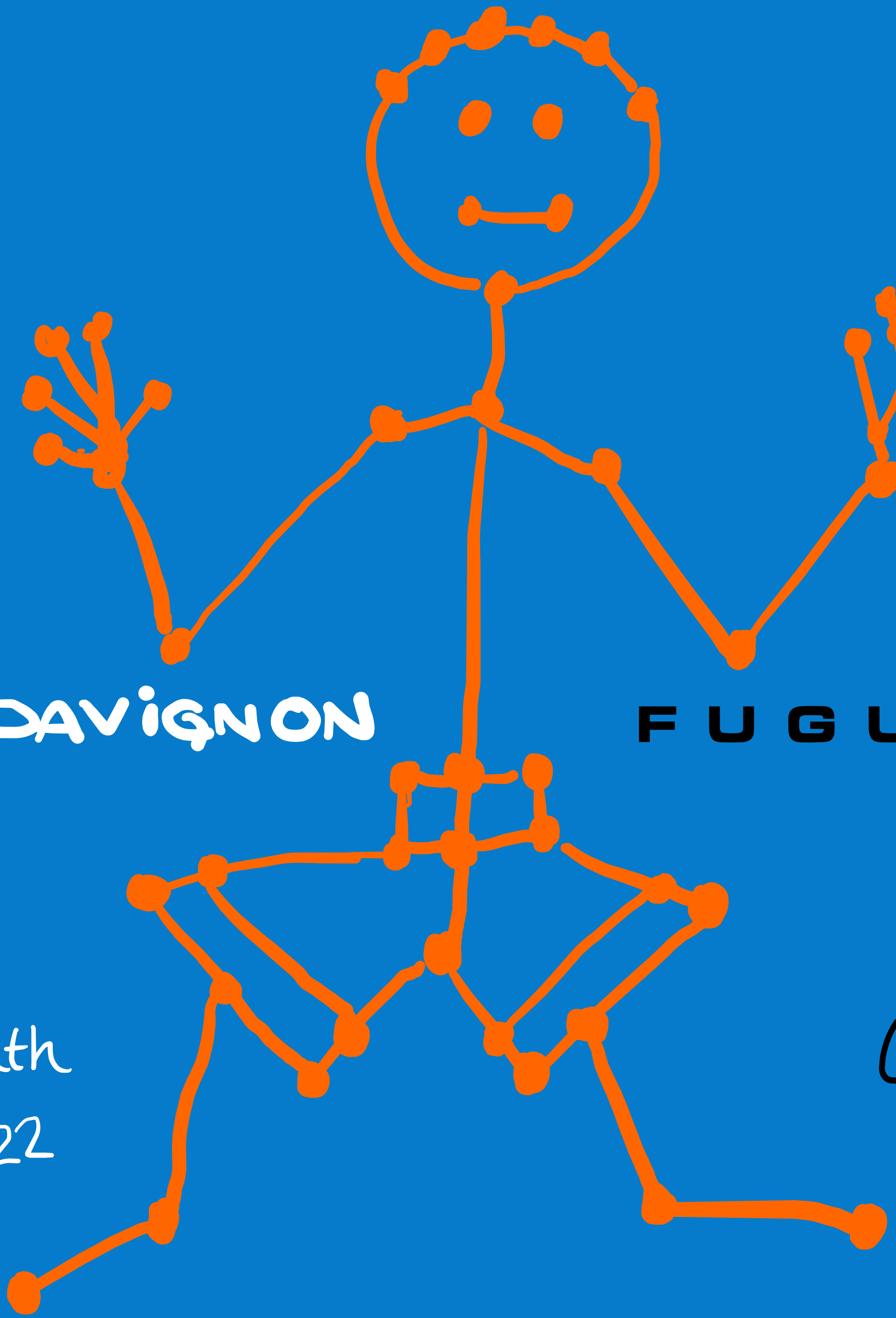


ÉLISE DAVIGNON

FUGUE EN SOL INCONNU

Introduction aux marches aléatoires en milieux aléatoires

@ clubmath
5-10-22

« »

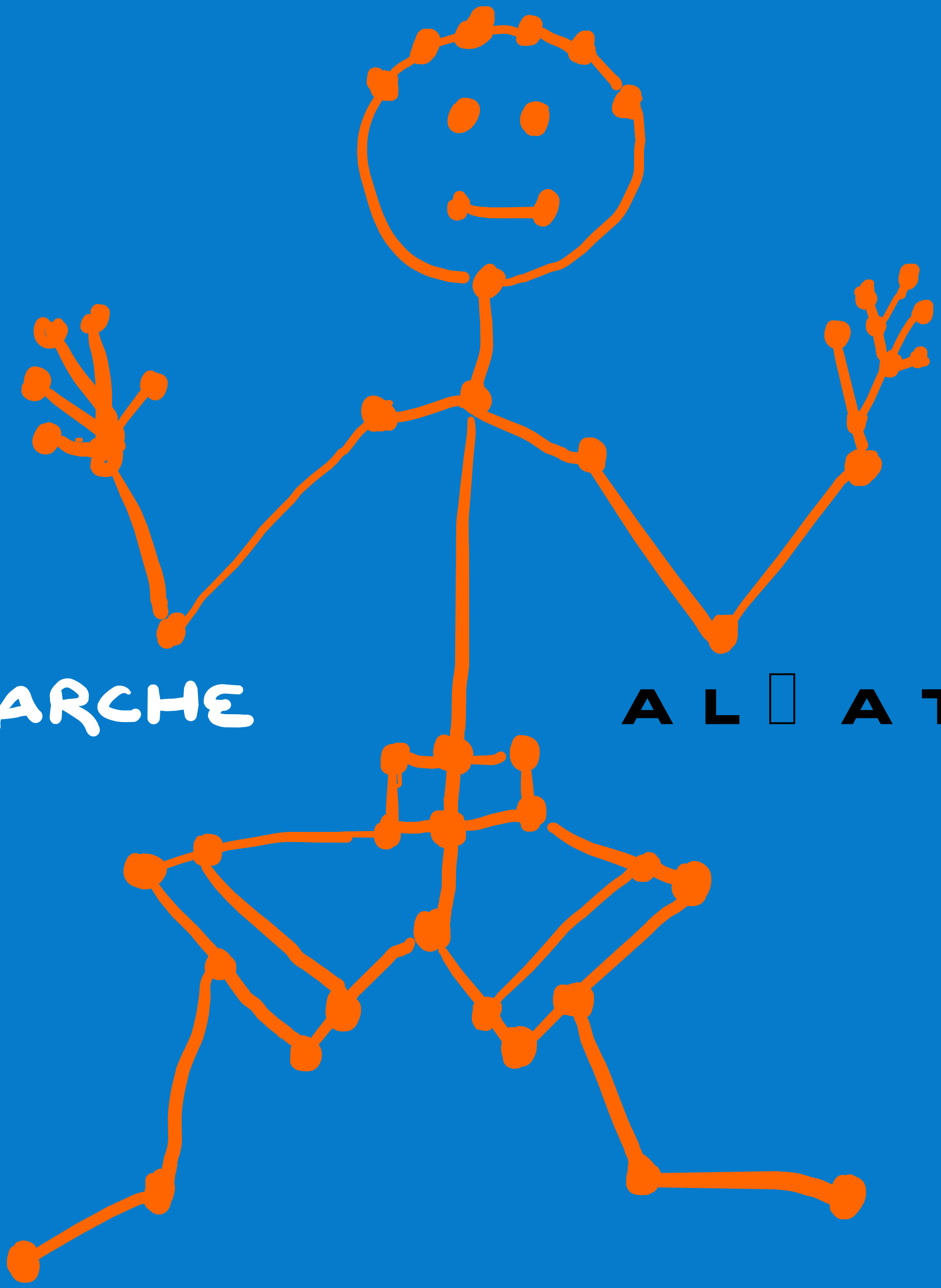
— DANIEL BÉLANGER

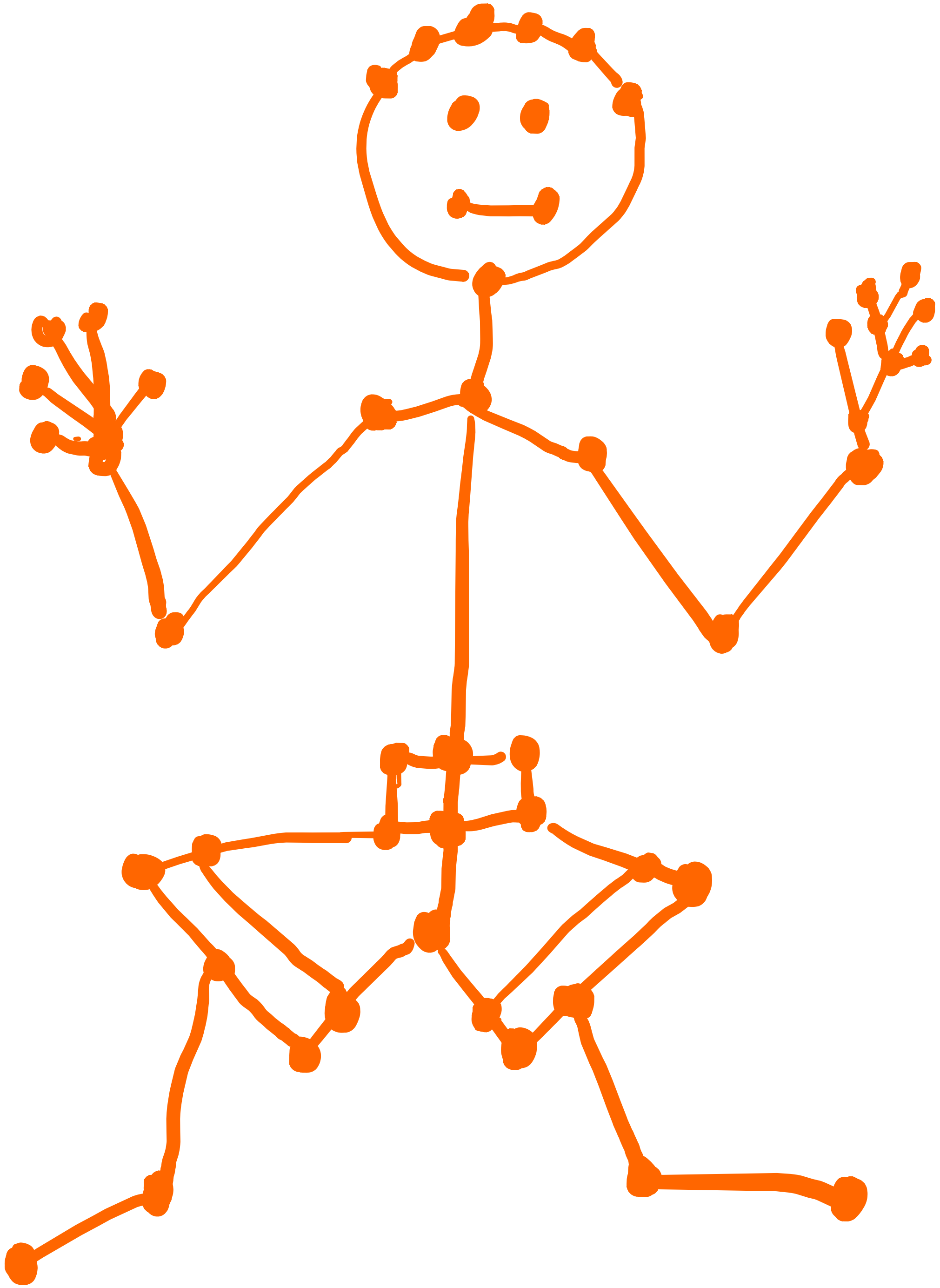
(FUGUE EN SOL INCONNU)

« Pour n'importe où
je m'en fous »

— Daniel Bélanger
(Fous n'importe où)

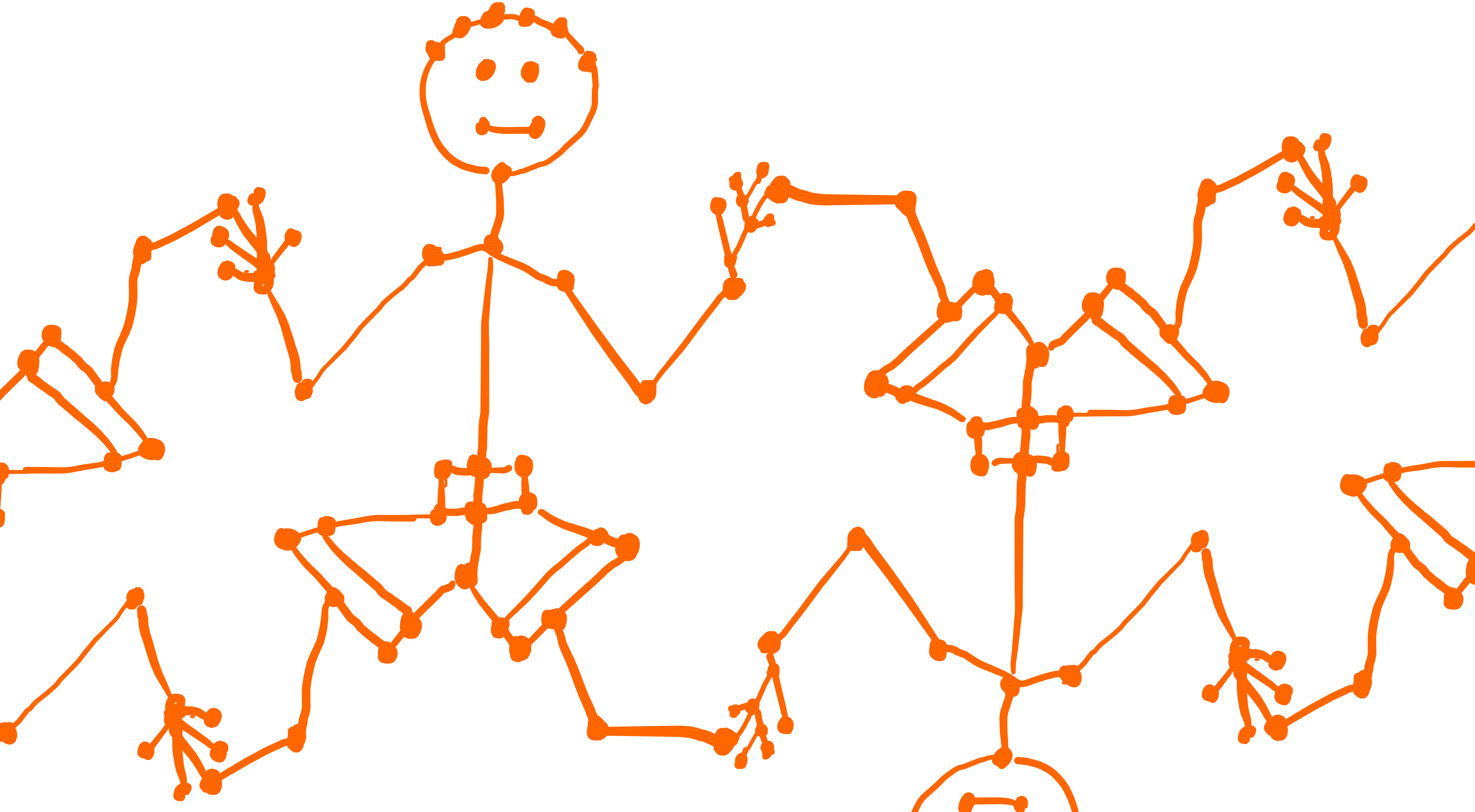
MARCHE AL□ATOIRE

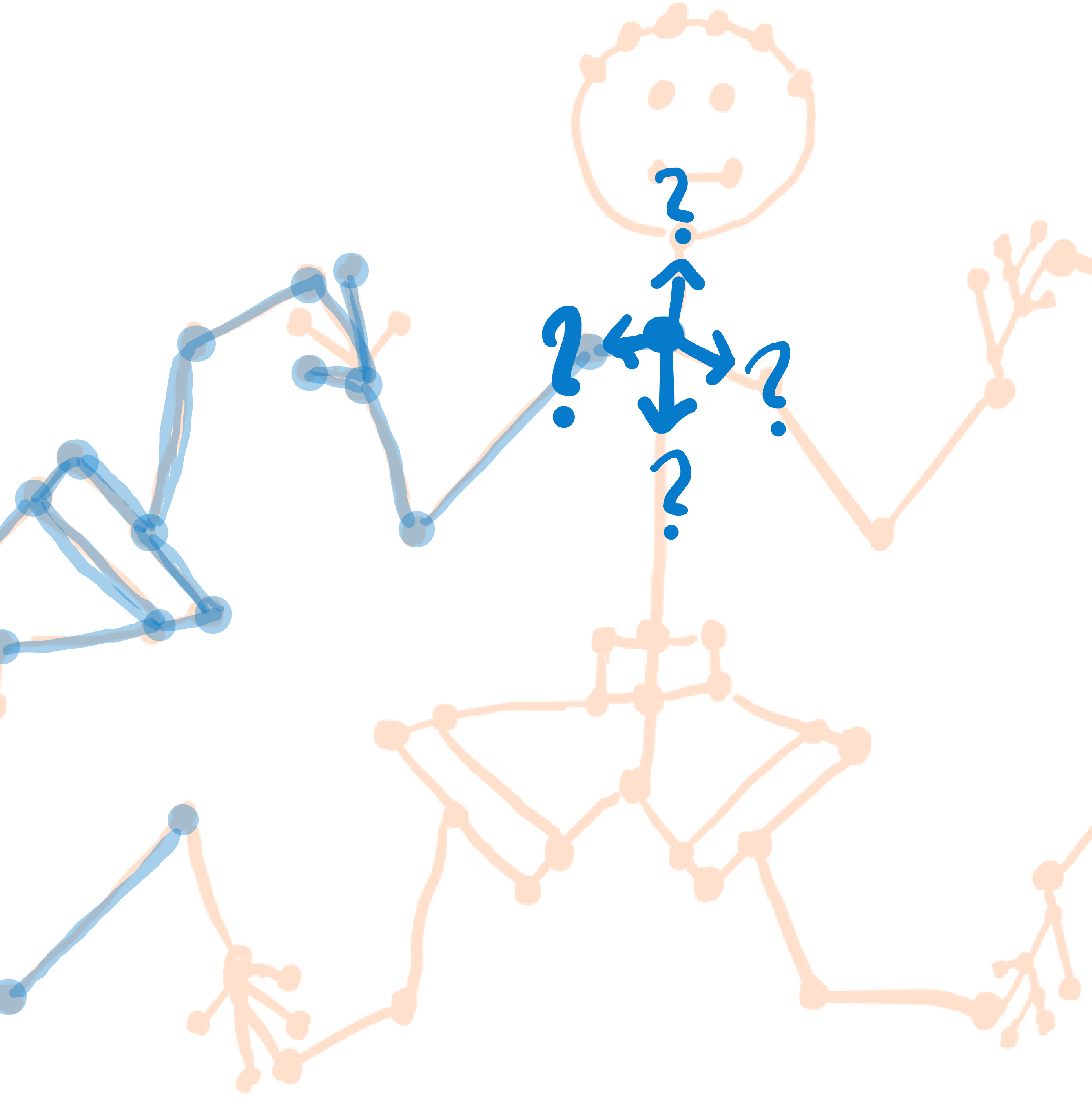




LE TERRAIN DE JEU:

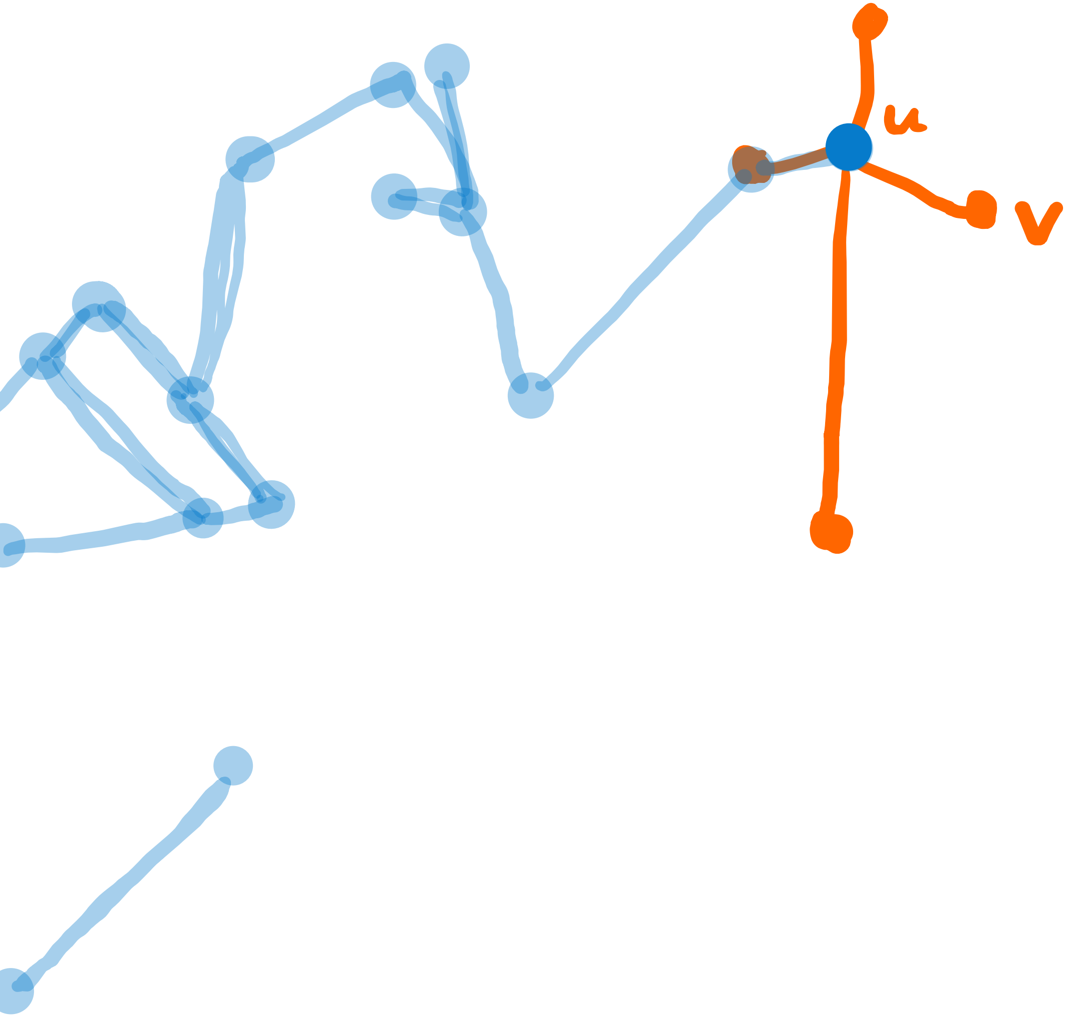
UN GRAPHE





LE JEU :

UNE MARCHE ALÉATOIRE

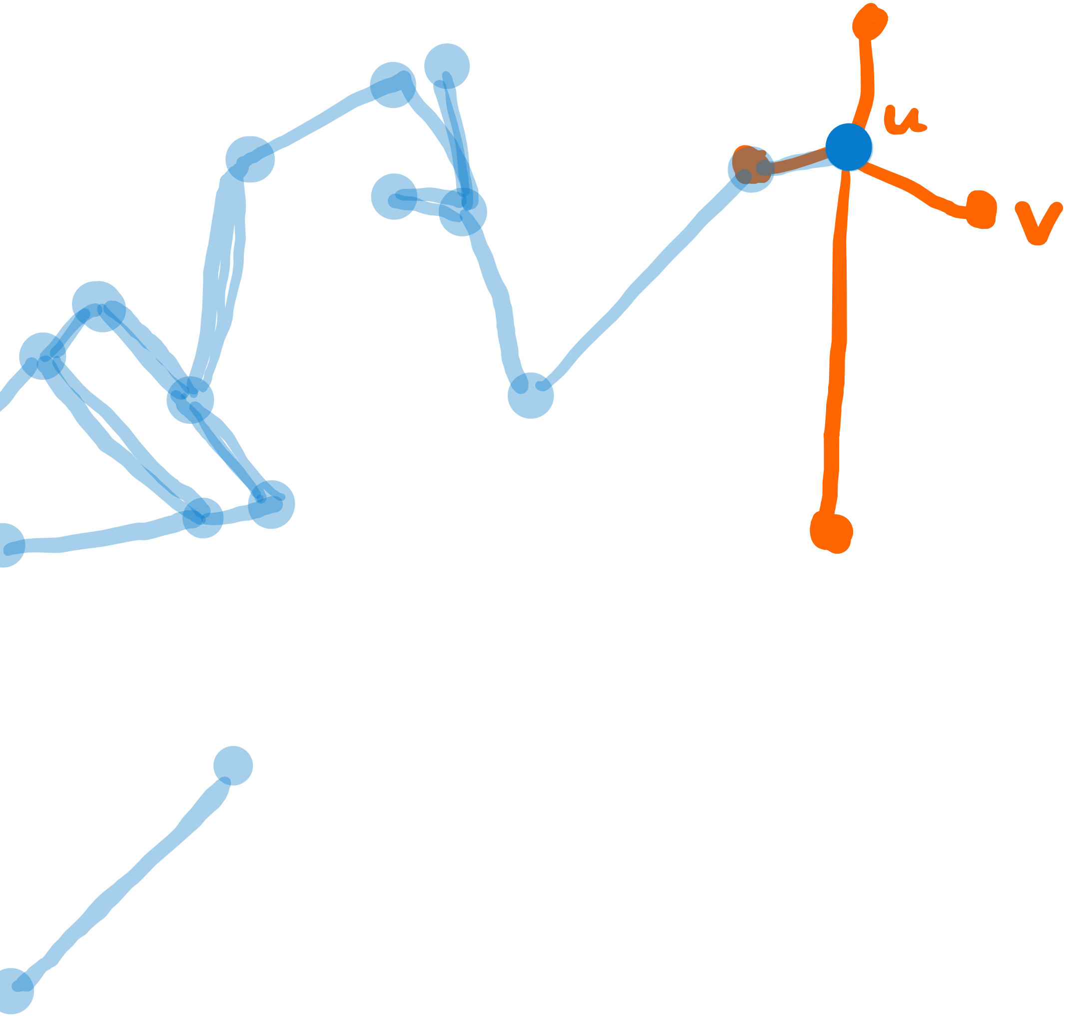


$$X_t = u$$

LA POSITION DE LA MARCHE AU TEMPS t

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = v \mid X_t = u\}$$

LA PROBABILITÉ DE TRANSITION DE u VERS v



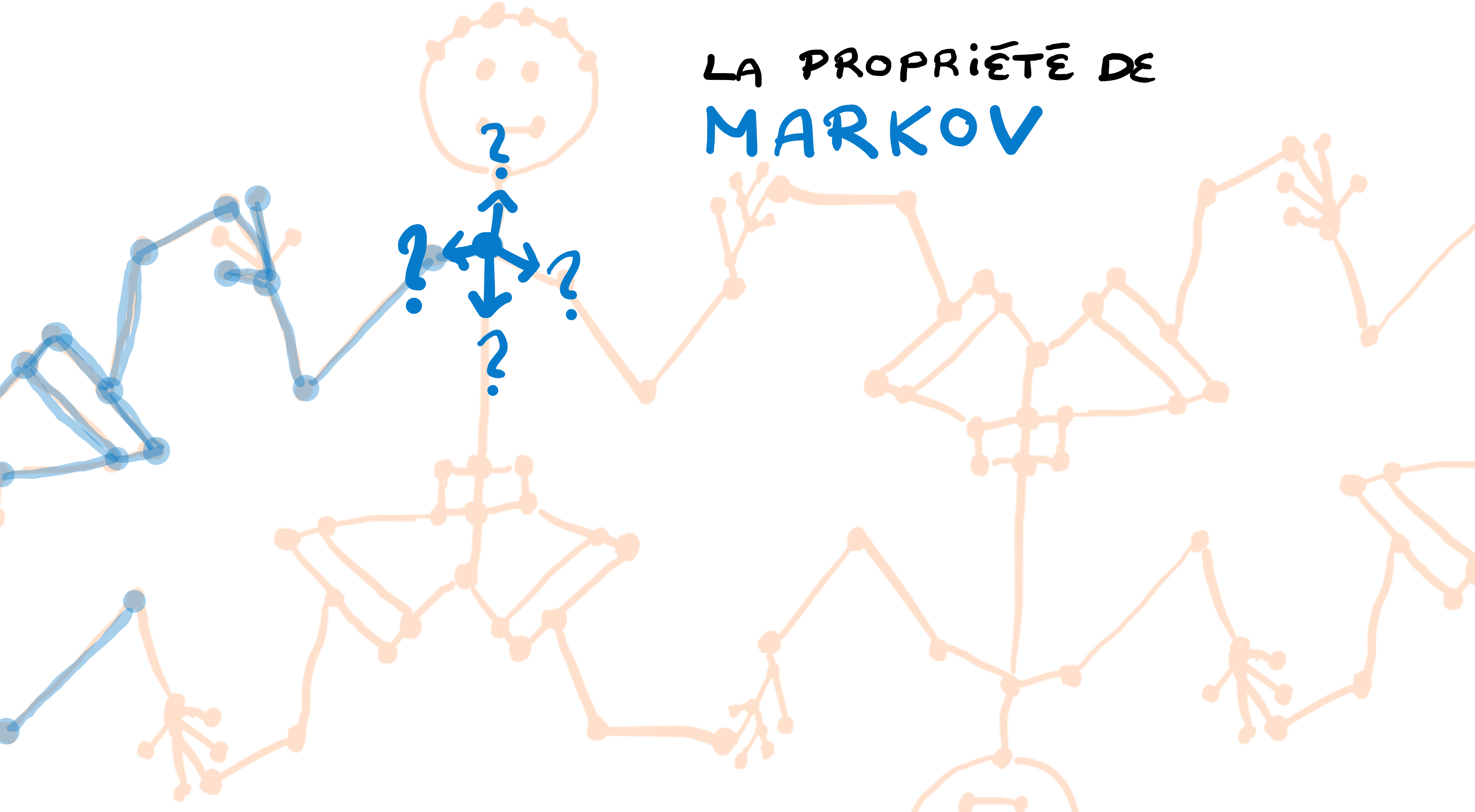
$$X_t = u$$

LA POSITION DE LA MARCHE
AU TEMPS t

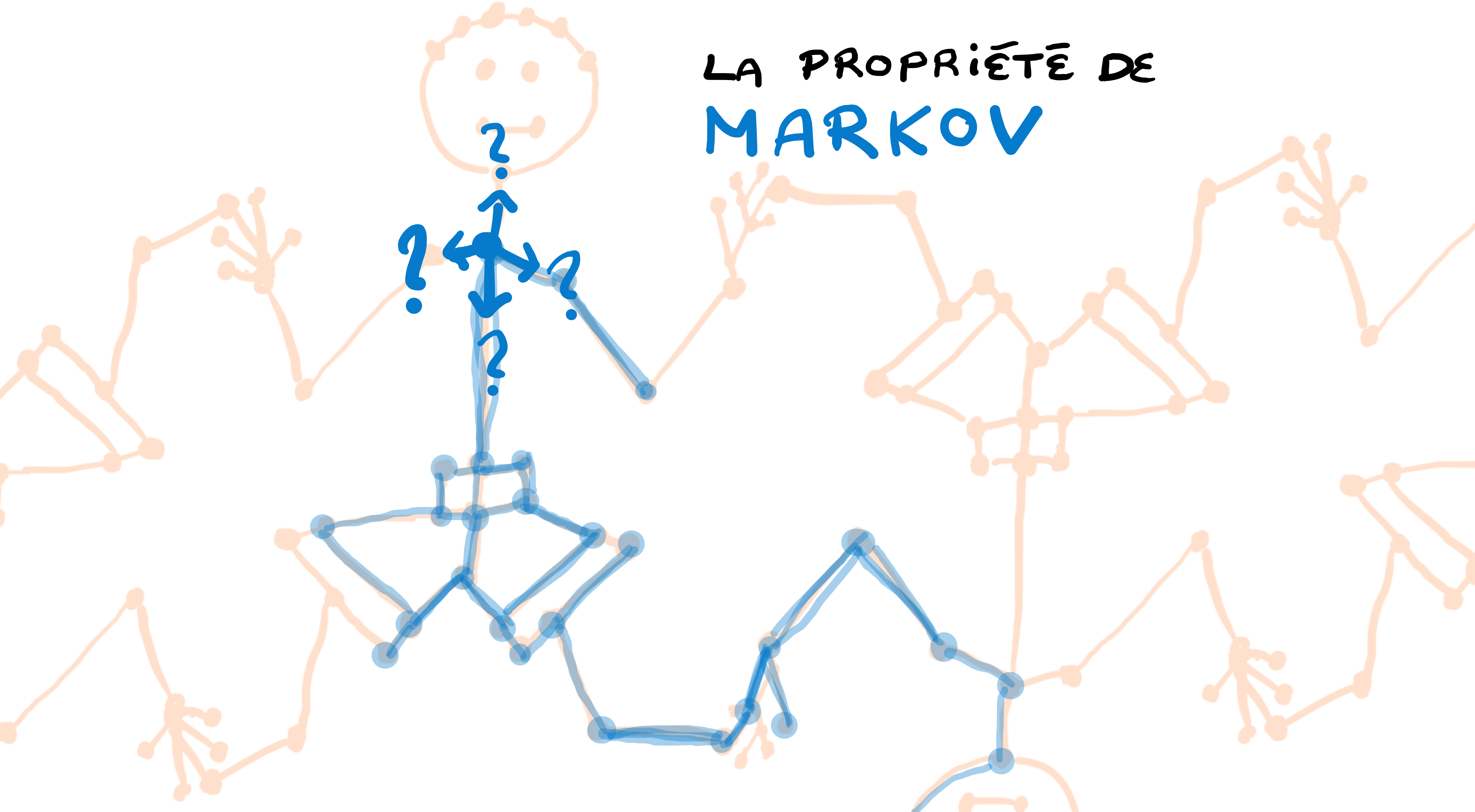
$$p(u, v)$$

LA PROBABILITÉ DE TRANSITION
DE u VERS v
(ne dépend que de u et v)

LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV

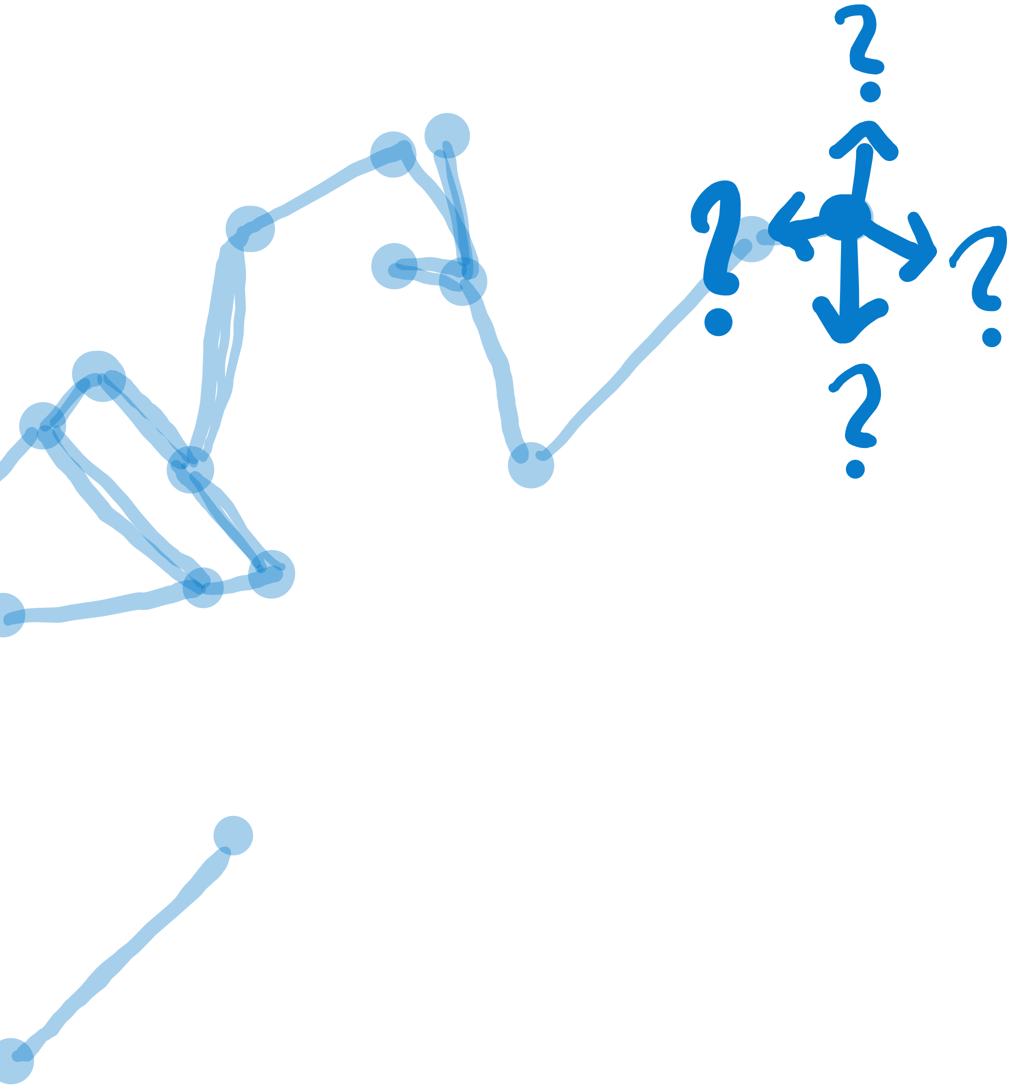


LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV



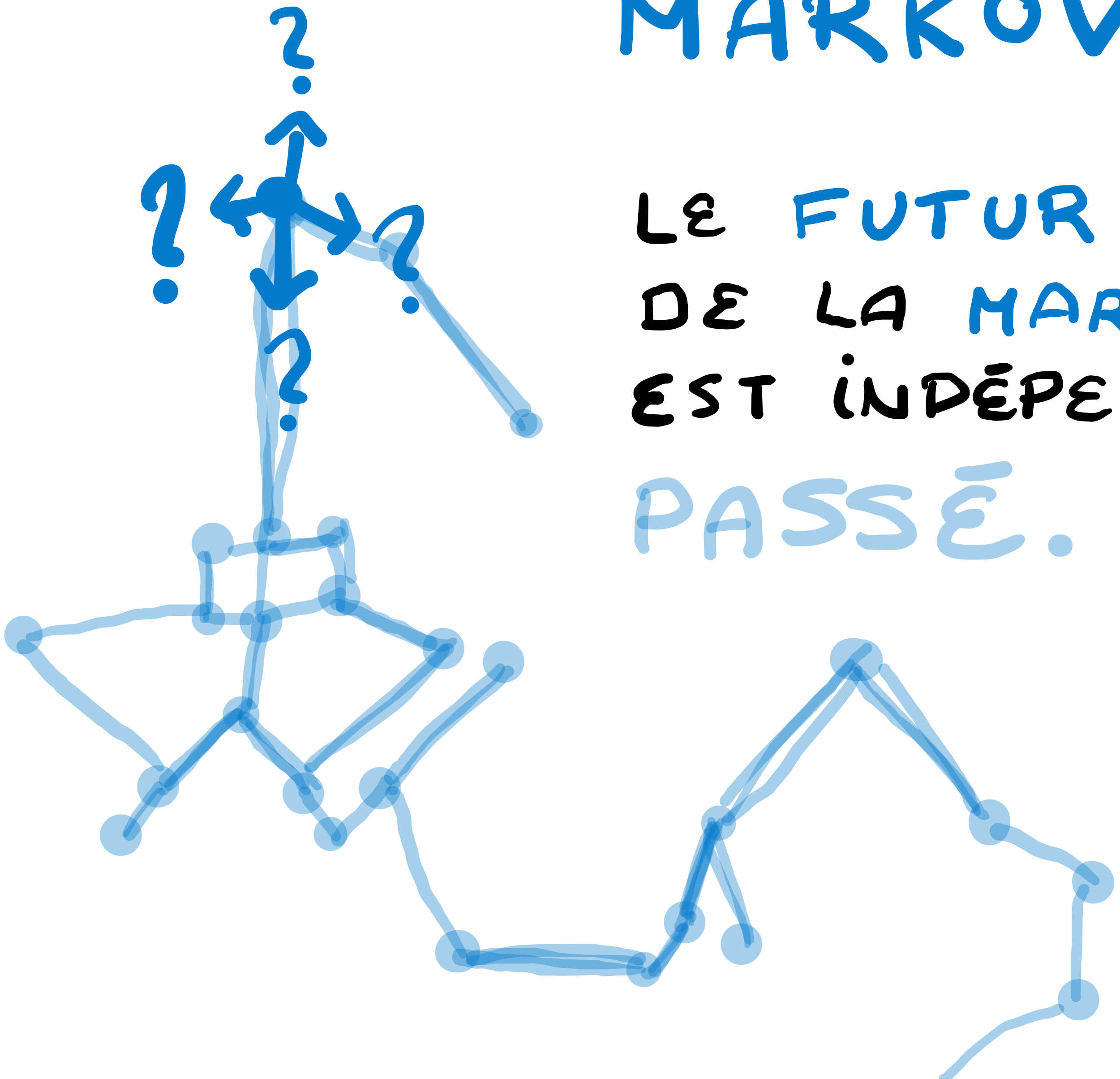
LA PROPRIÉTÉ DE

MARKOV



LE FUTUR
DE LA MARCHE

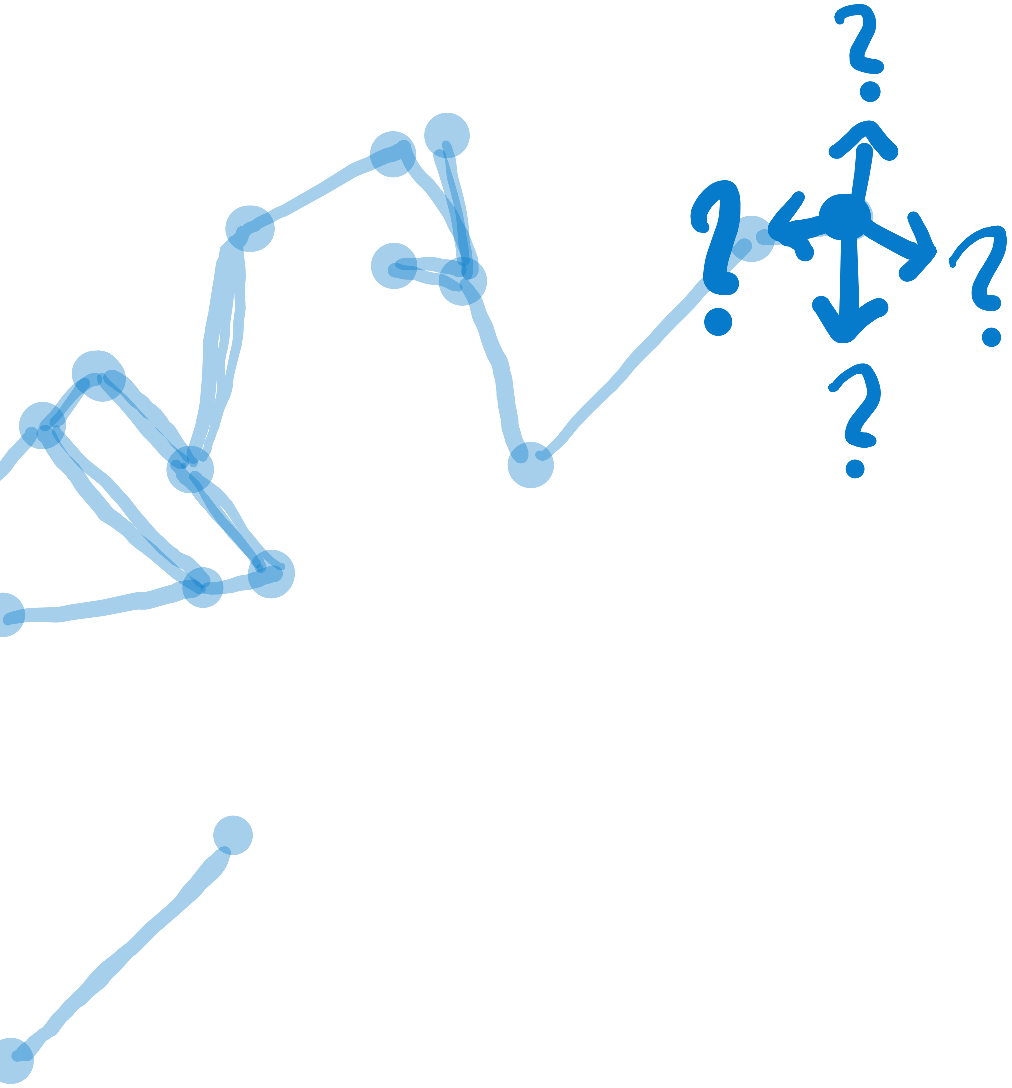
LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV



LE FUTUR DE LA MARCHE EST INDÉPENDANT DE SON PASSÉ.

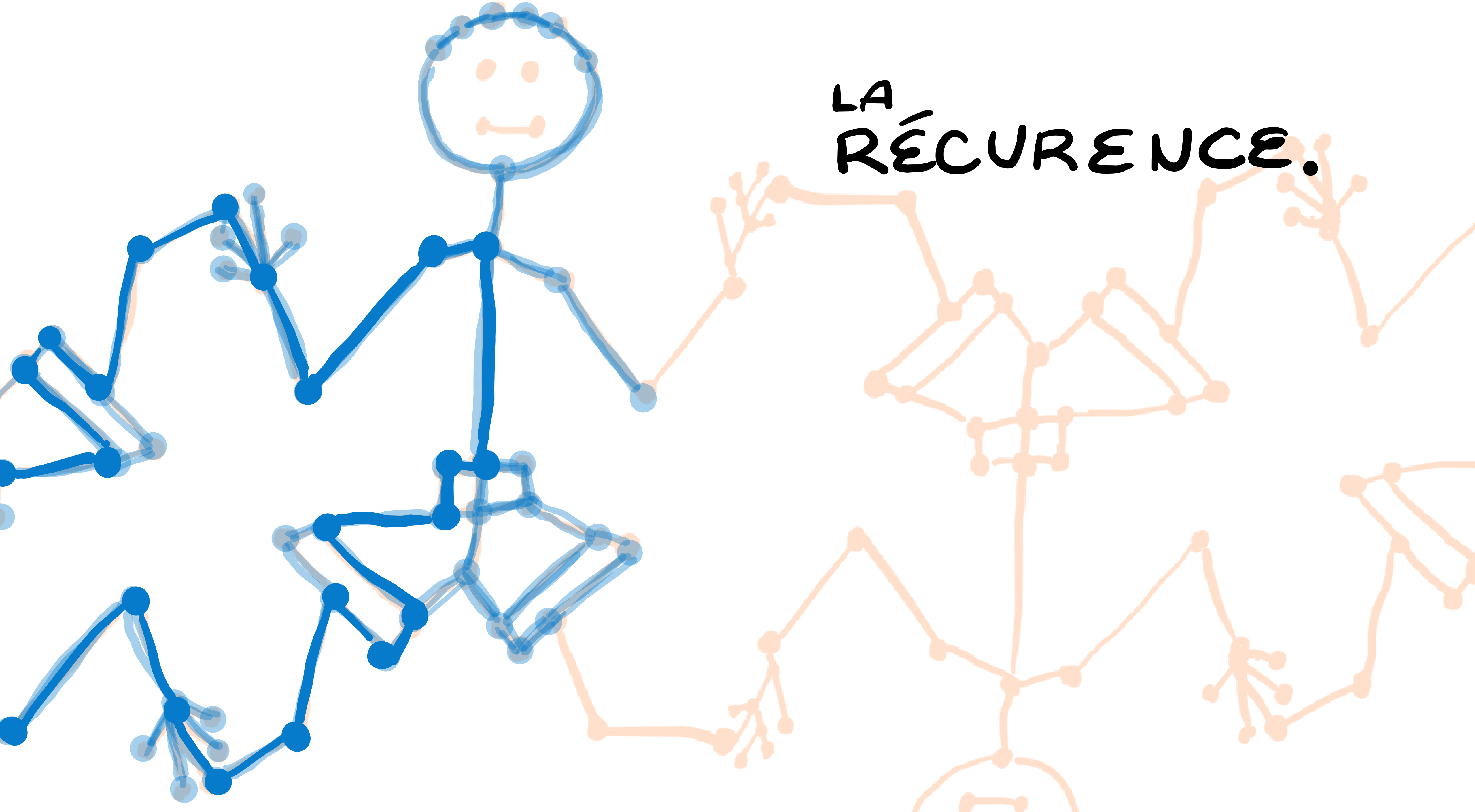
LA PROPRIÉTÉ DE

MARKOV



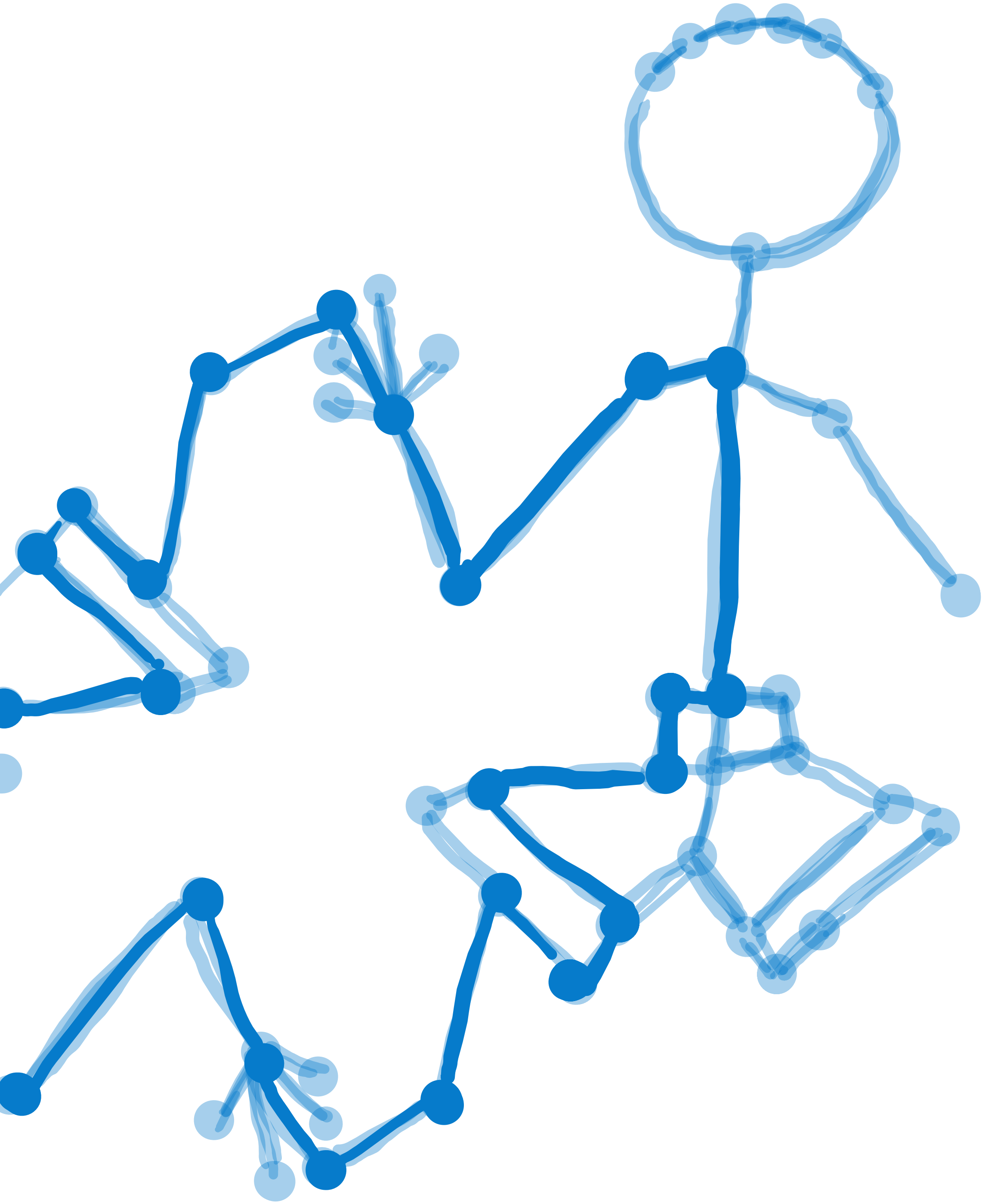
LE FUTUR
DE LA MARCHE
EST INDÉPENDANT DE SON
PASSÉ.

LA RÉCURENCE.



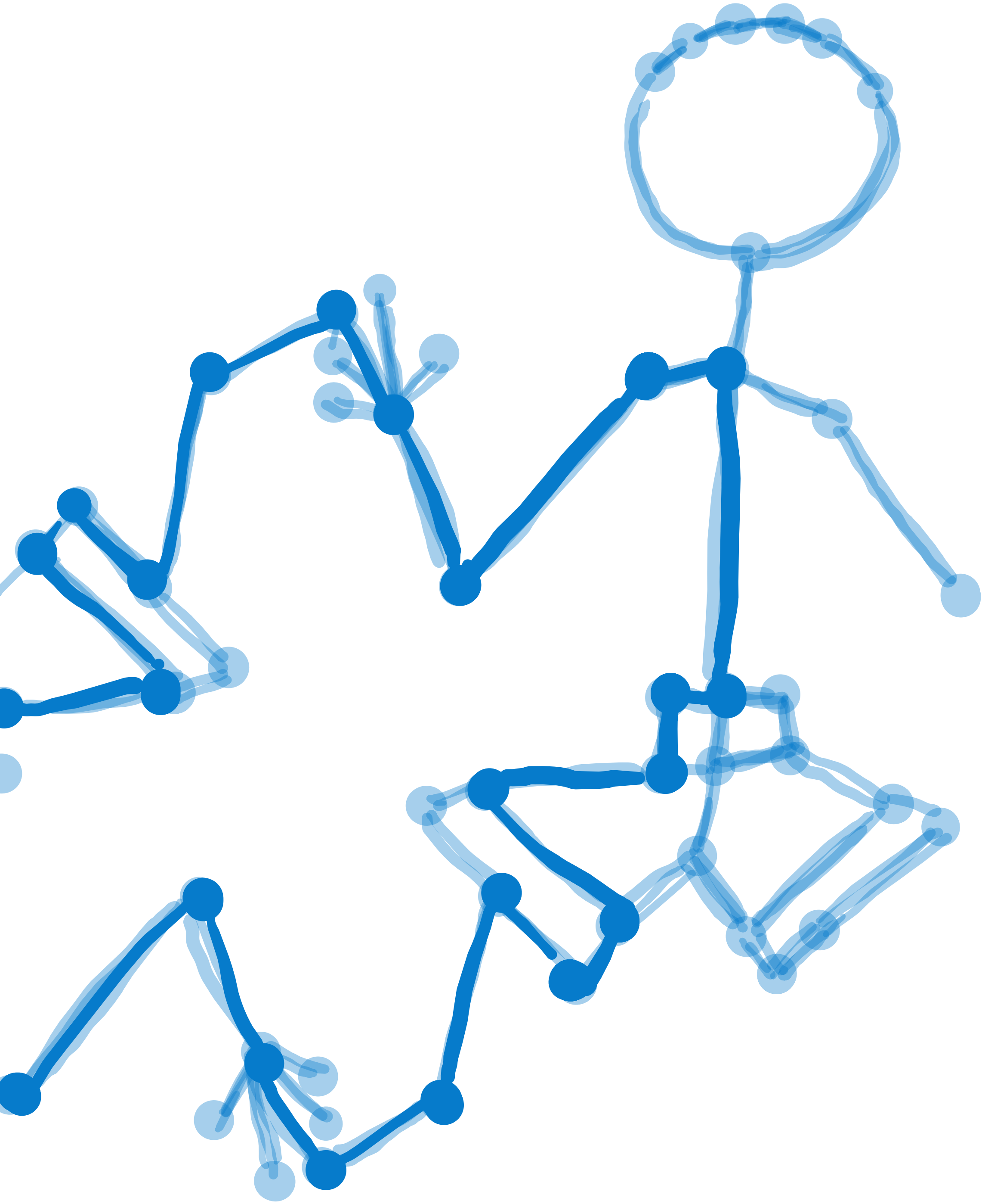
LA

RÉCURENCE.



LA PROBABILITÉ DE REVENIR AU POINT DE DÉPART EST 1.

(On y reviendra toujours à un moment donné)



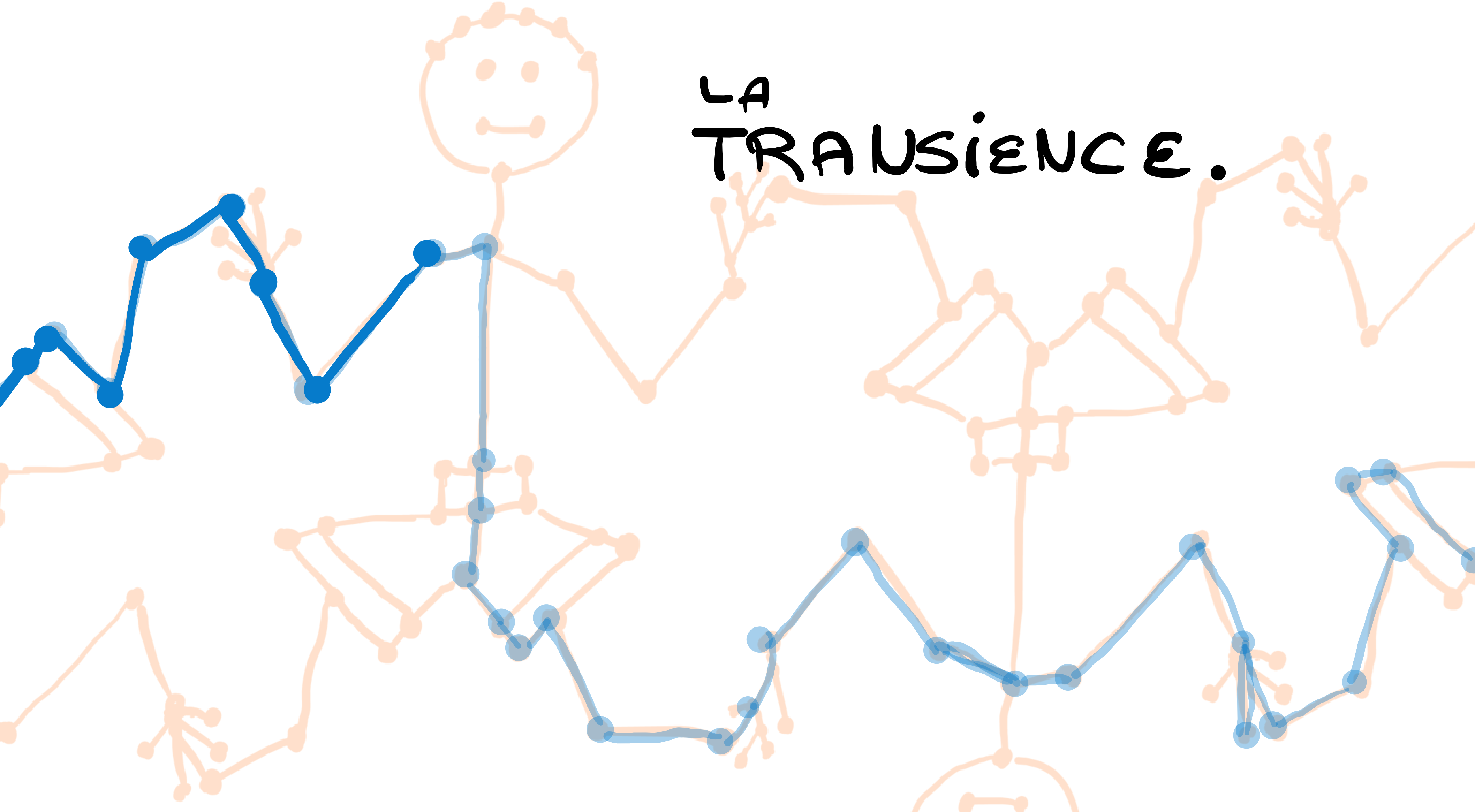
LA RÉCURENCE.

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\{X_t = u\} = ?$$

DISTRIBUTION LIMITE ?

TEMPS DE RETOUR ?

LA TRANSIENCE.



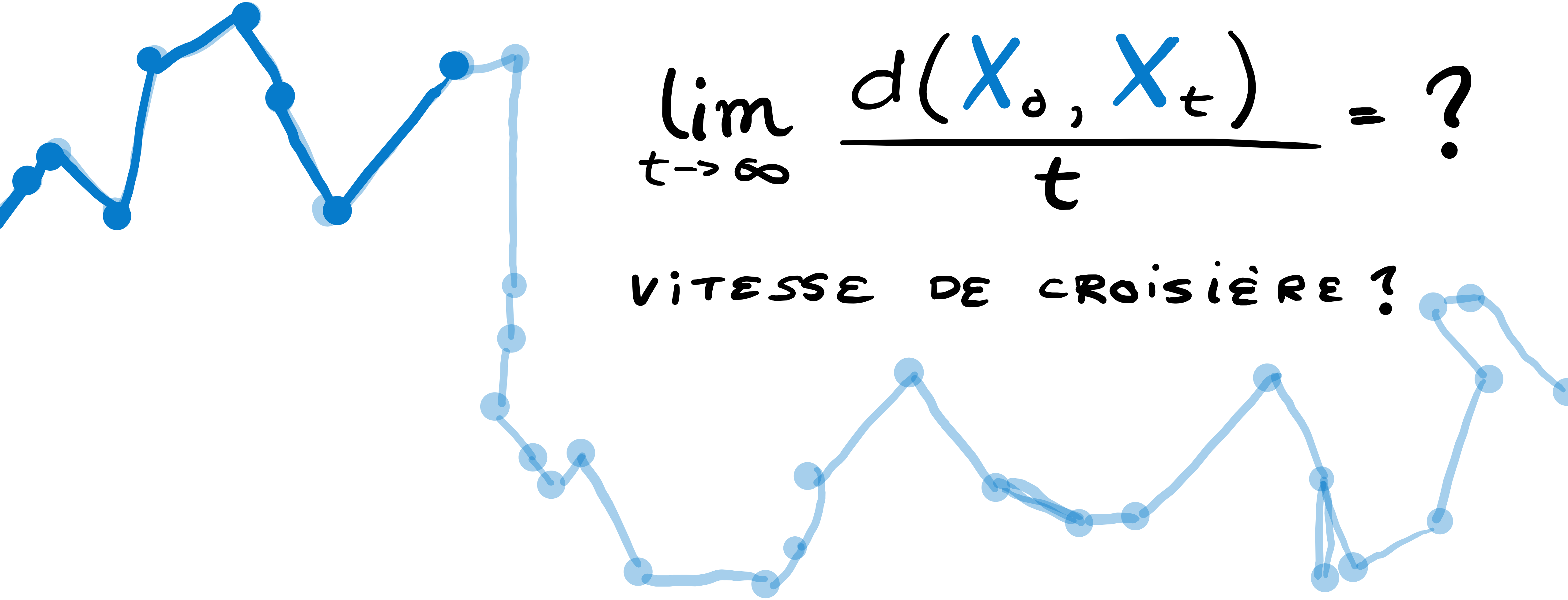
LA TRANSIENCE.

LA PROBABILITÉ DE NE JAMAIS REVENIR AU POINT DE DÉPART EST **POSITIVE**.

LA TRANSIENCE.

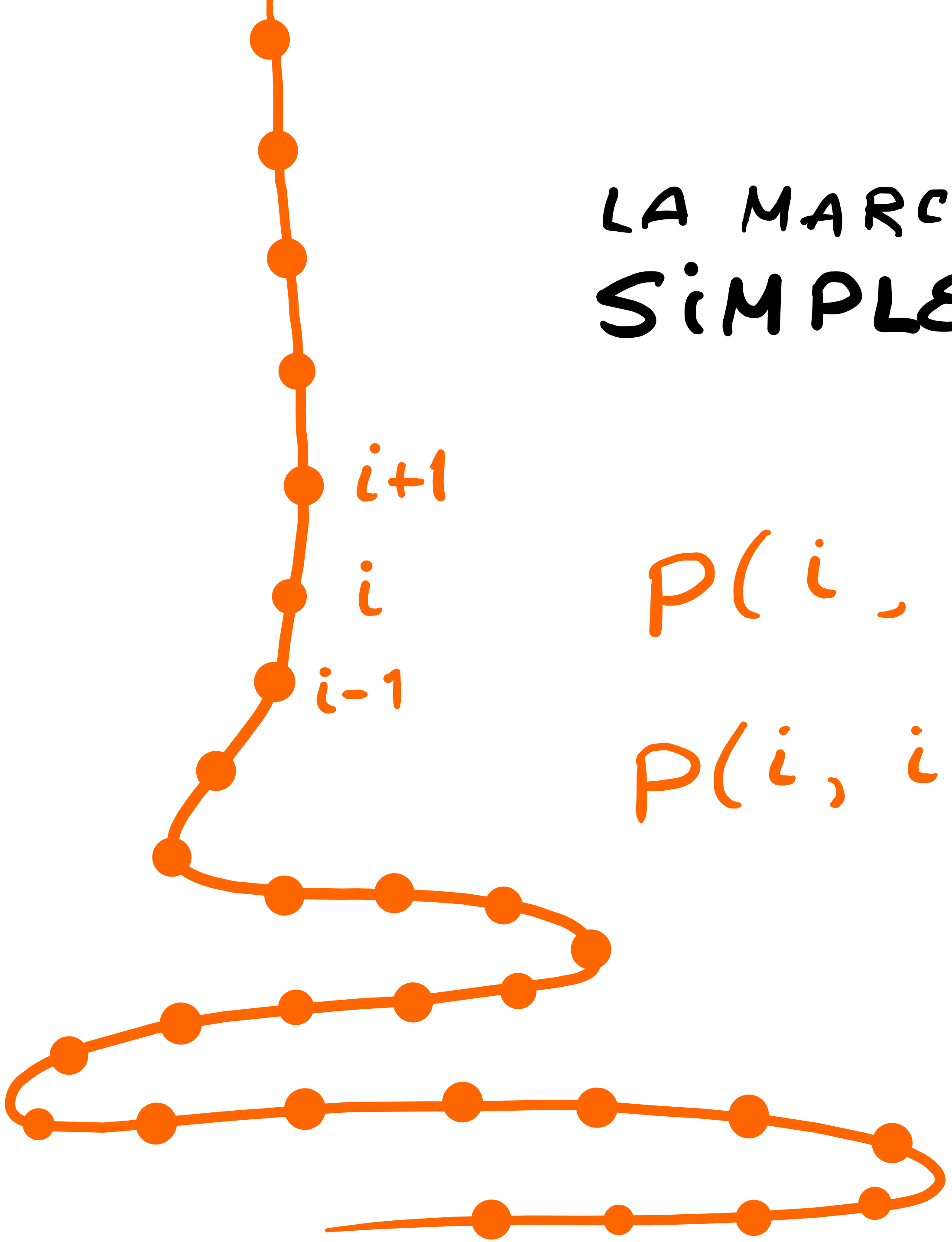
$$\lim_{t \to \infty} \frac{d(X_0, X_t)}{t} = ?$$

VITESSE DE CROISIÈRE ?



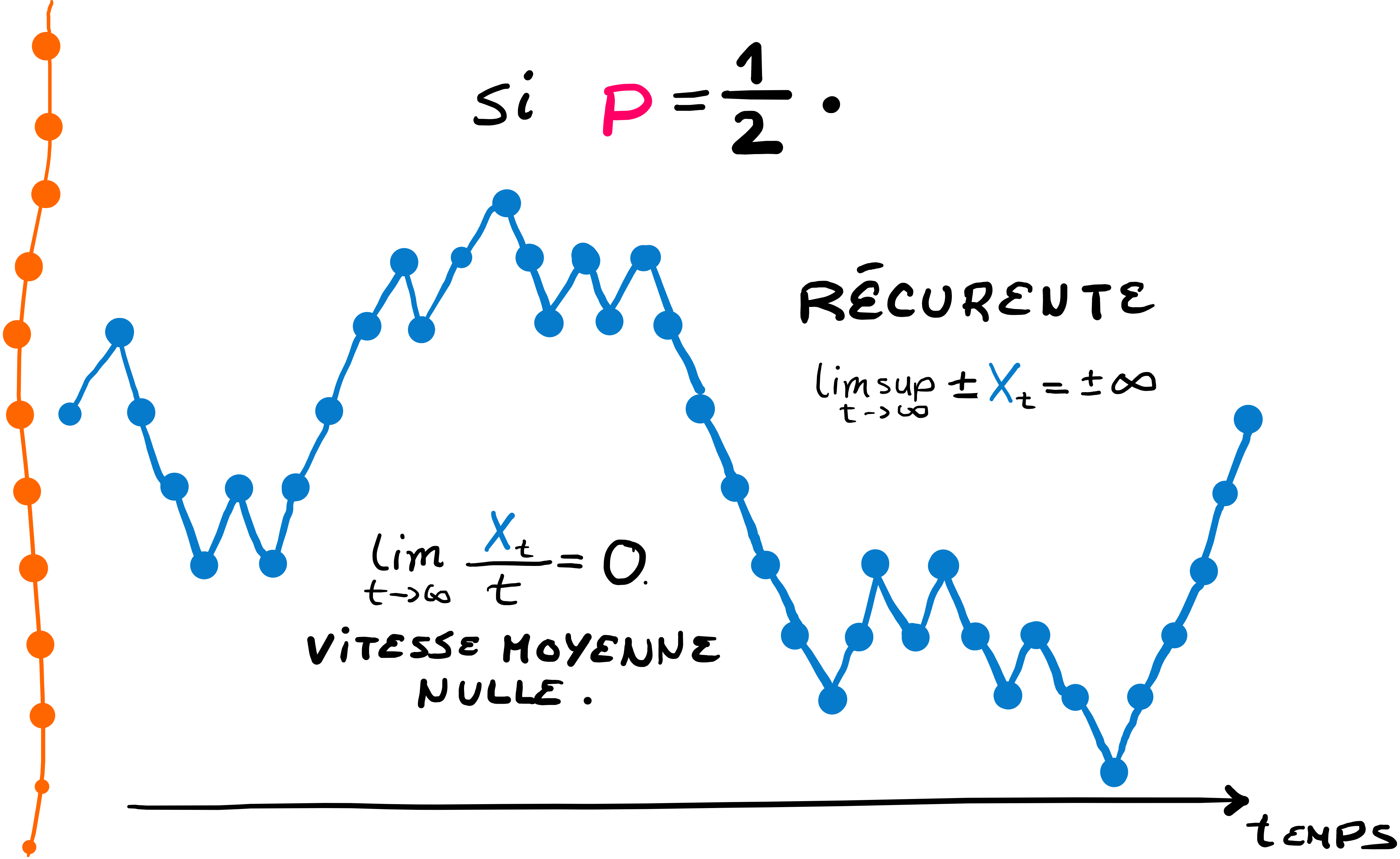
UN EXEMPLE

LA MARCHE ALÉATOIRE SIMPLE SUR $\mathbb{Z}$



$$p(i, i+1) = p$$

$$p(i, i-1) = 1 - p =: q$$

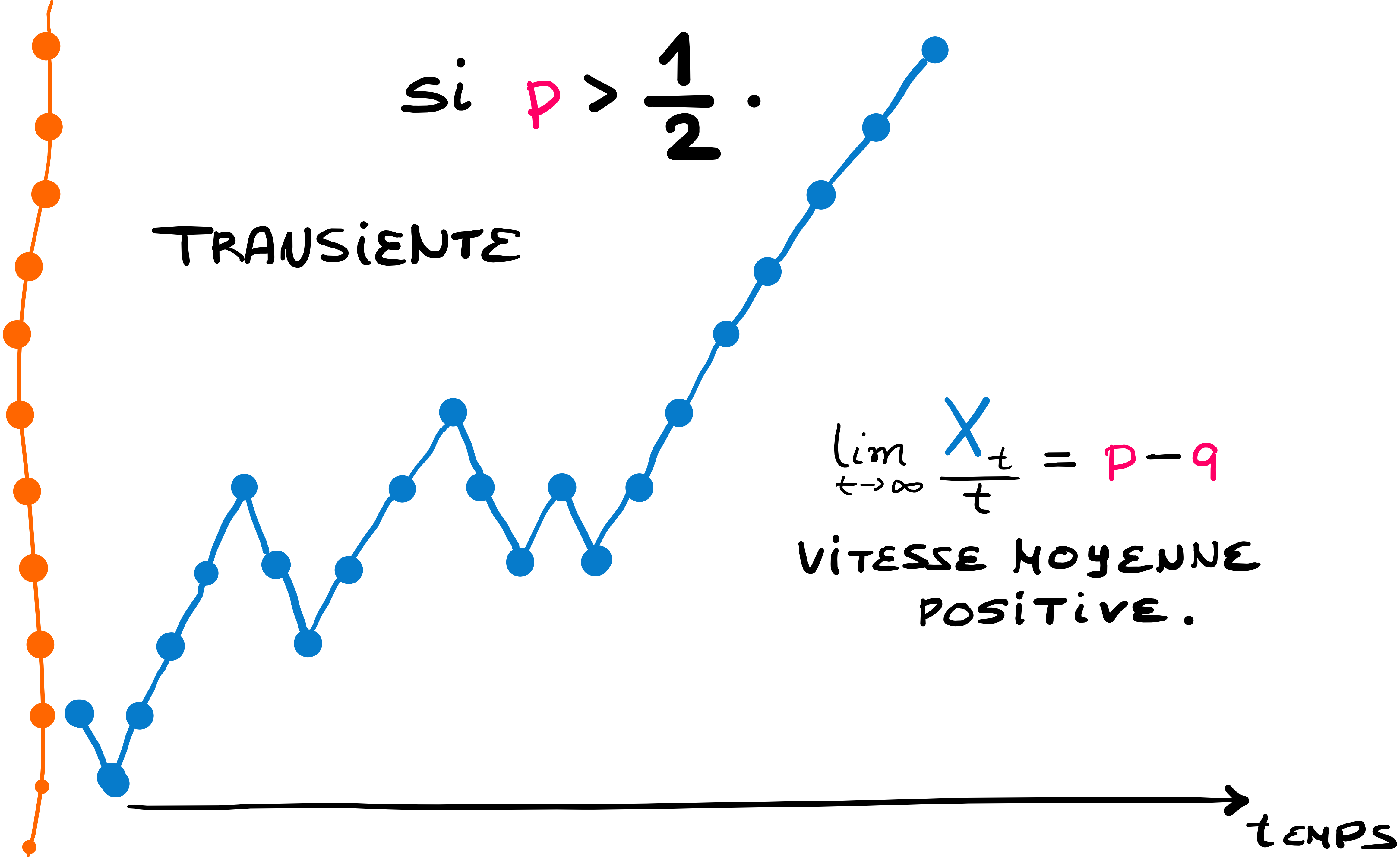

Si $p = \frac{1}{2}$.
RÉCURENTE
$\limsup_{t \to \infty} \pm X_t = \pm\infty$
$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = 0.$
VITESSE MOYENNE NULLE.
TEMPS

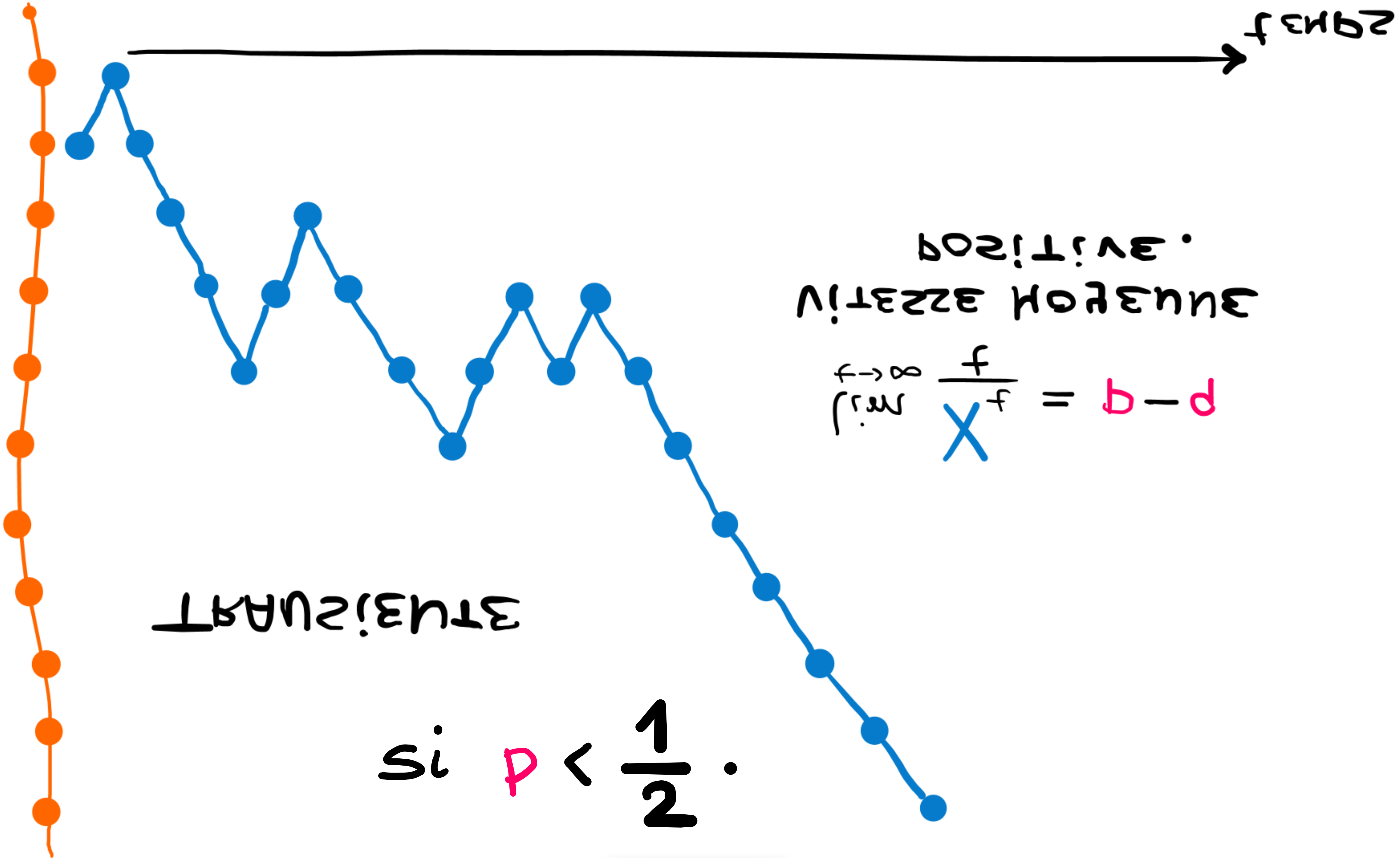
si $p > \frac{1}{2}$.

TRANSIENTE

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = p - q$$

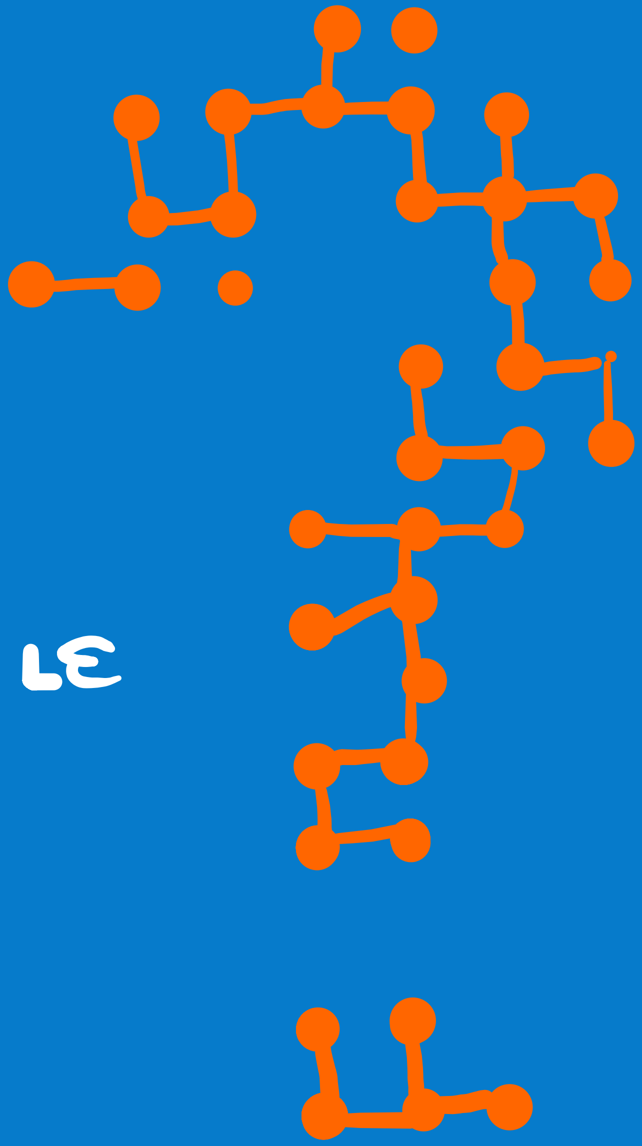
VITESSE MOYENNE POSITIVE.



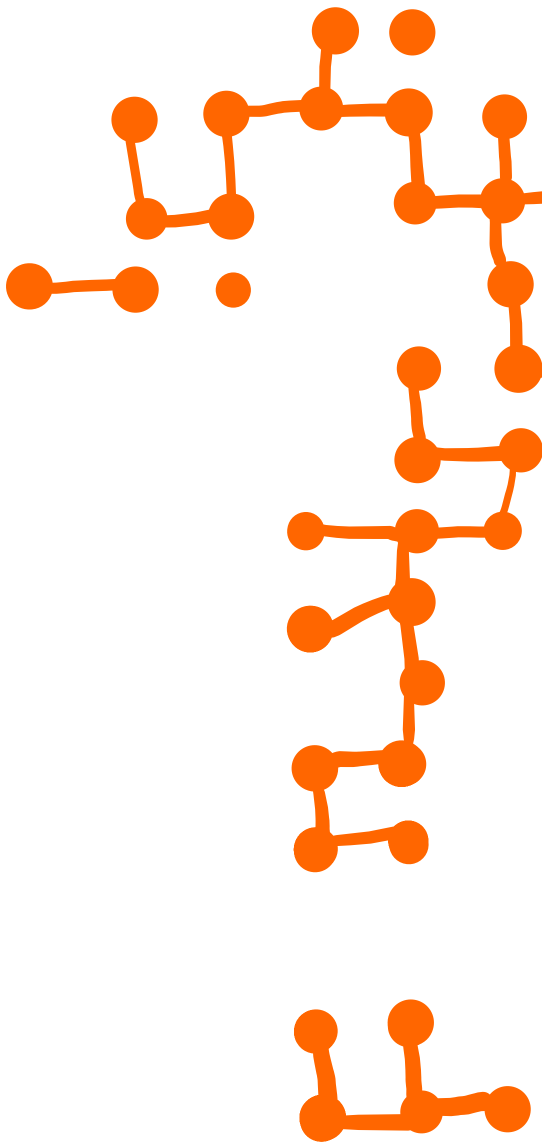

temps
vitesse moyenne positive.
$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = p - q$
transiente

si $p < \frac{1}{2}$.

LE

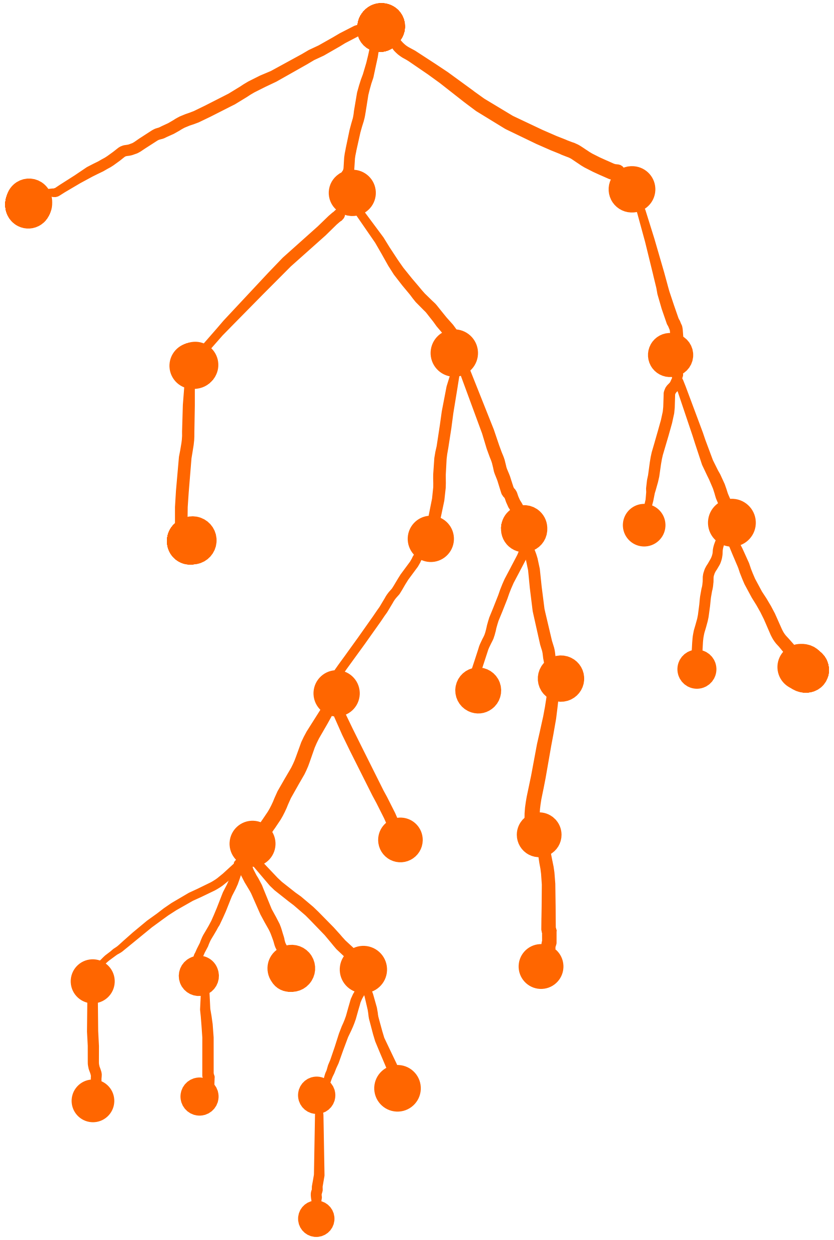


MILIEU ALÉATOIRE



UN GRAPHE
ALÉATOIRE

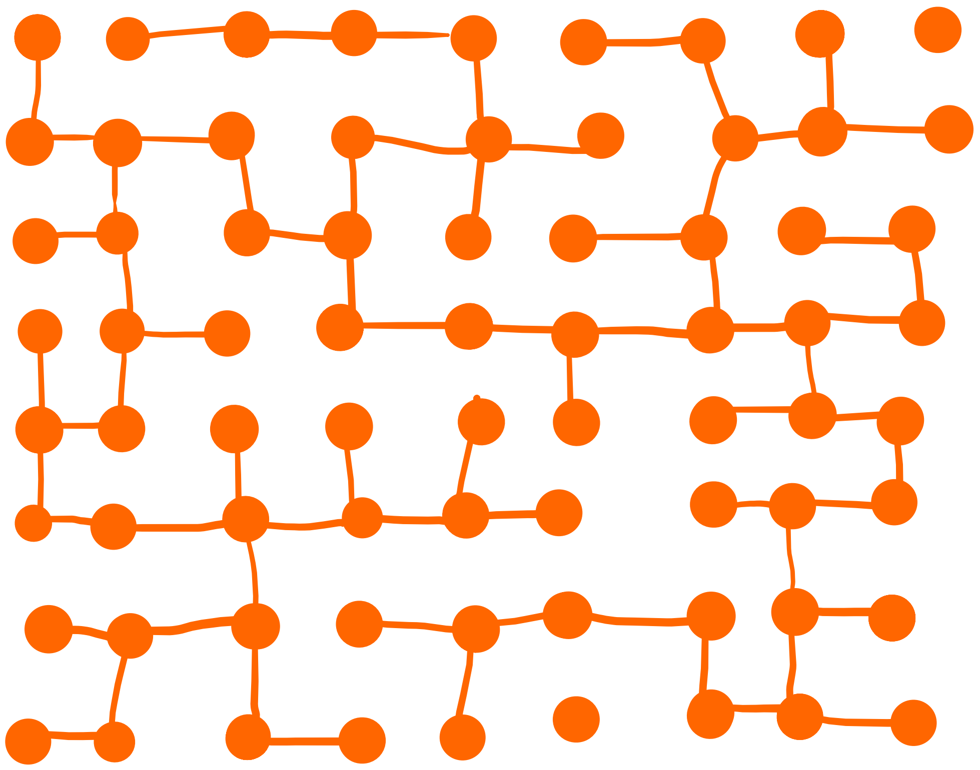
PERCOLATION



UN GRAPHE
ALÉATOIRE

PERCOLATION

ARBRE DE
GALTON-WATSON



UN GRAPHE ALÉATOIRE

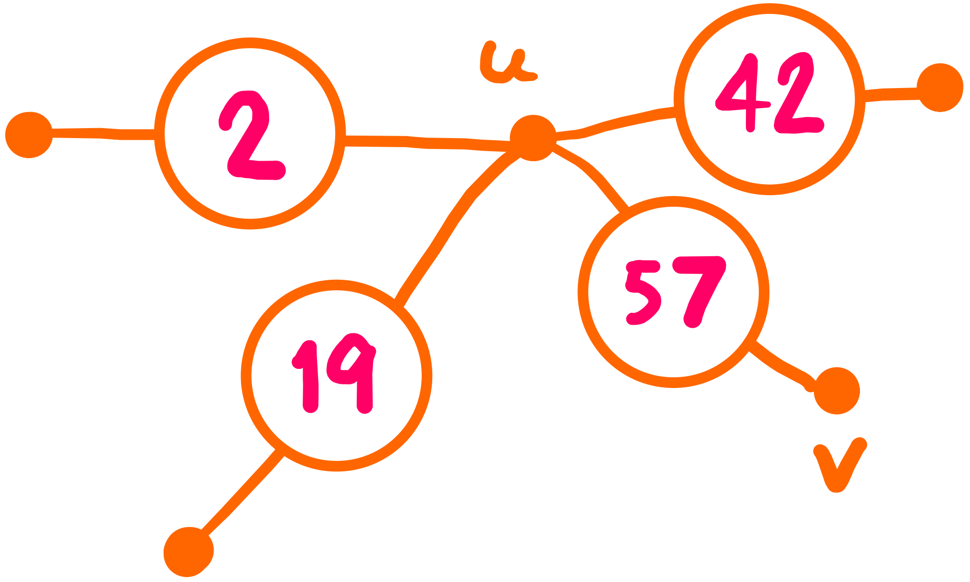
PERCOLATION

ARBRE DE GALTON-WATSON

FORÊT COUVRANTE UNIFORME

...

DES PROBABILITÉS DE TRANSITION ALÉATOIRES

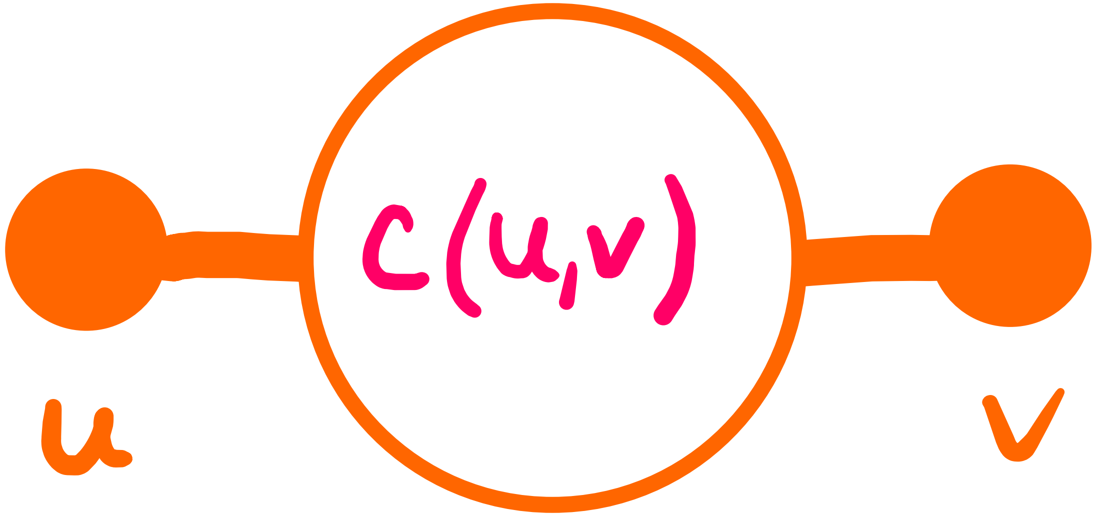


ON MET UN POIDS SUR CHAQUE ARÊTE.

$$p(u,v) = \frac{57}{2+19+57+42}$$

PROBA. PROPORTIONELLES AUX POIDS.

DES PROBABILITÉS DE TRANSITION ALÉATOIRES



SI ON CHOISIT CES POIDS ALÉATOIREMENT,

$$P(u,v) = \frac{c(u,v)}{\sum_{u' \sim u} c(u,u')}$$

LES PROBABILITÉS DE TRANSITION SONT ALÉATOIRES.

DEUX « ÉTAPES » D'ALÉATOIRE.

$\mathbb{P}$ → P^{ω}

LA MESURE DE PROBA. DE L'ENVIRONNEMENT NOTÉ ω

(ω représente le graphe et les proba. de transition associées.)

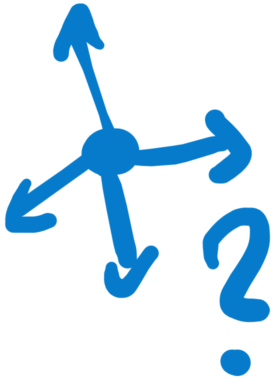
LOI TREMPÉE. LA MESURE POUR LA MARCHE, SACHANT L'ENVIRONNEMENT.

LOI
RECUITE

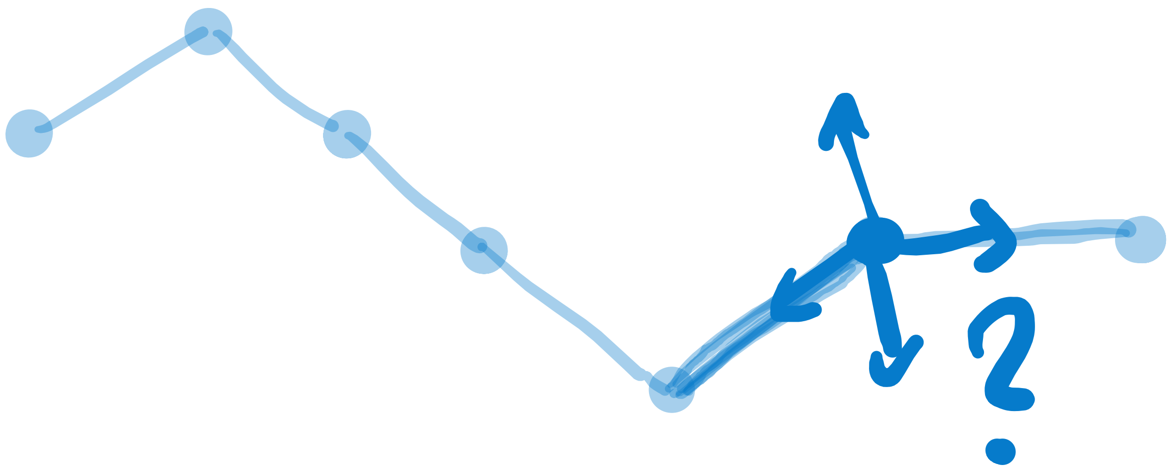
$$\mathbb{P}\{X \in \dots, \omega \in \dots\}$$

$$= \mathbb{E}\left[P^{\omega}\{X \in \dots\} \cdot \mathbb{1}\{\omega \in \dots\}\right]$$

LA MESURE PRODUIT POUR L'ENVIRONNEMENT
ET LA MARCHE.



X N'A PAS LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV SOUS $\mathbb{P}$.



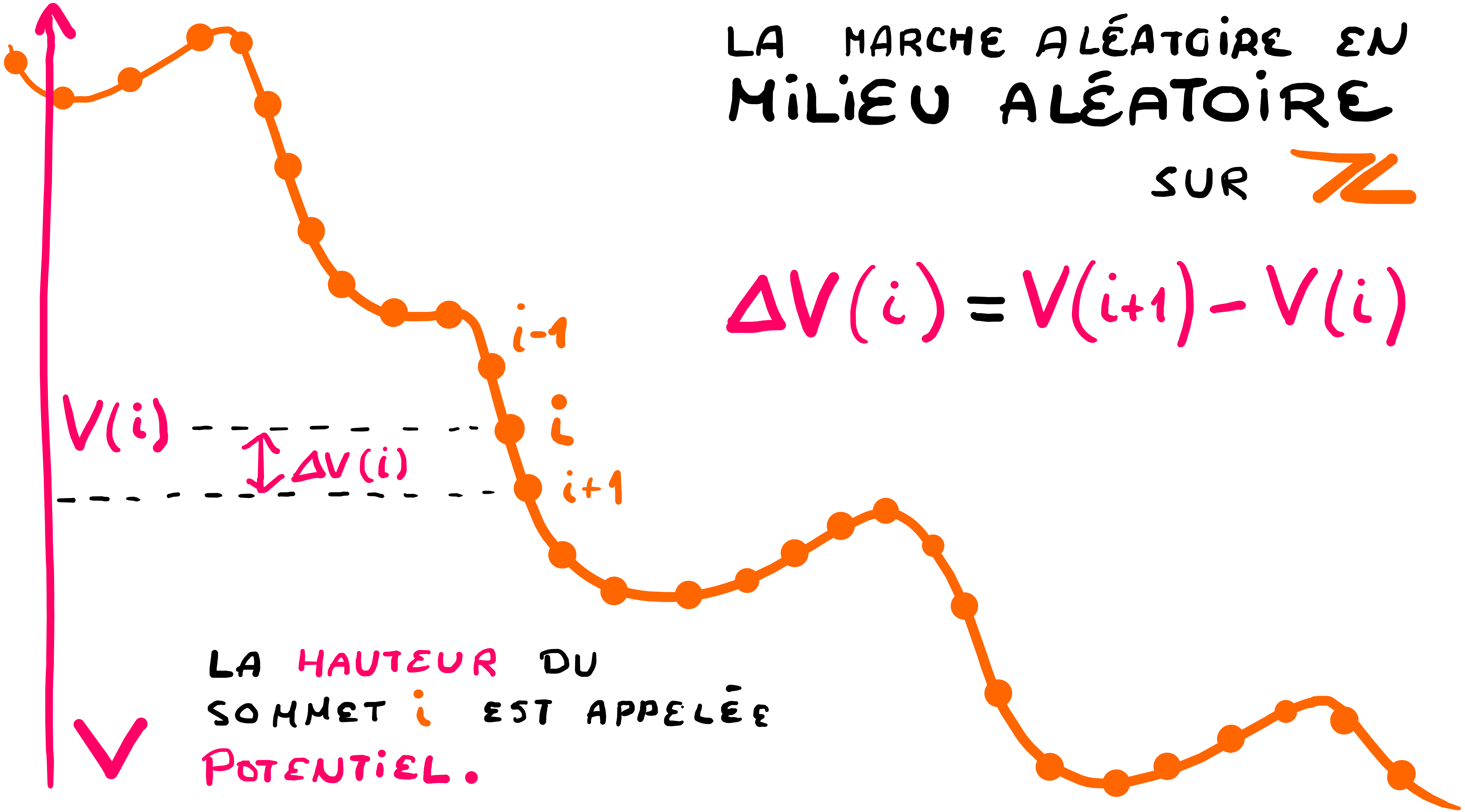
⚠ X n'a pas la propriété de Markov sous $\mathbb{P}$.

UN AUTRE EXEMPLE

LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$

LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$

$$\Delta V(i) = V(i+1) - V(i)$$



LA HAUTEUR DU SOMMET i EST APPELÉE POTENTIEL.

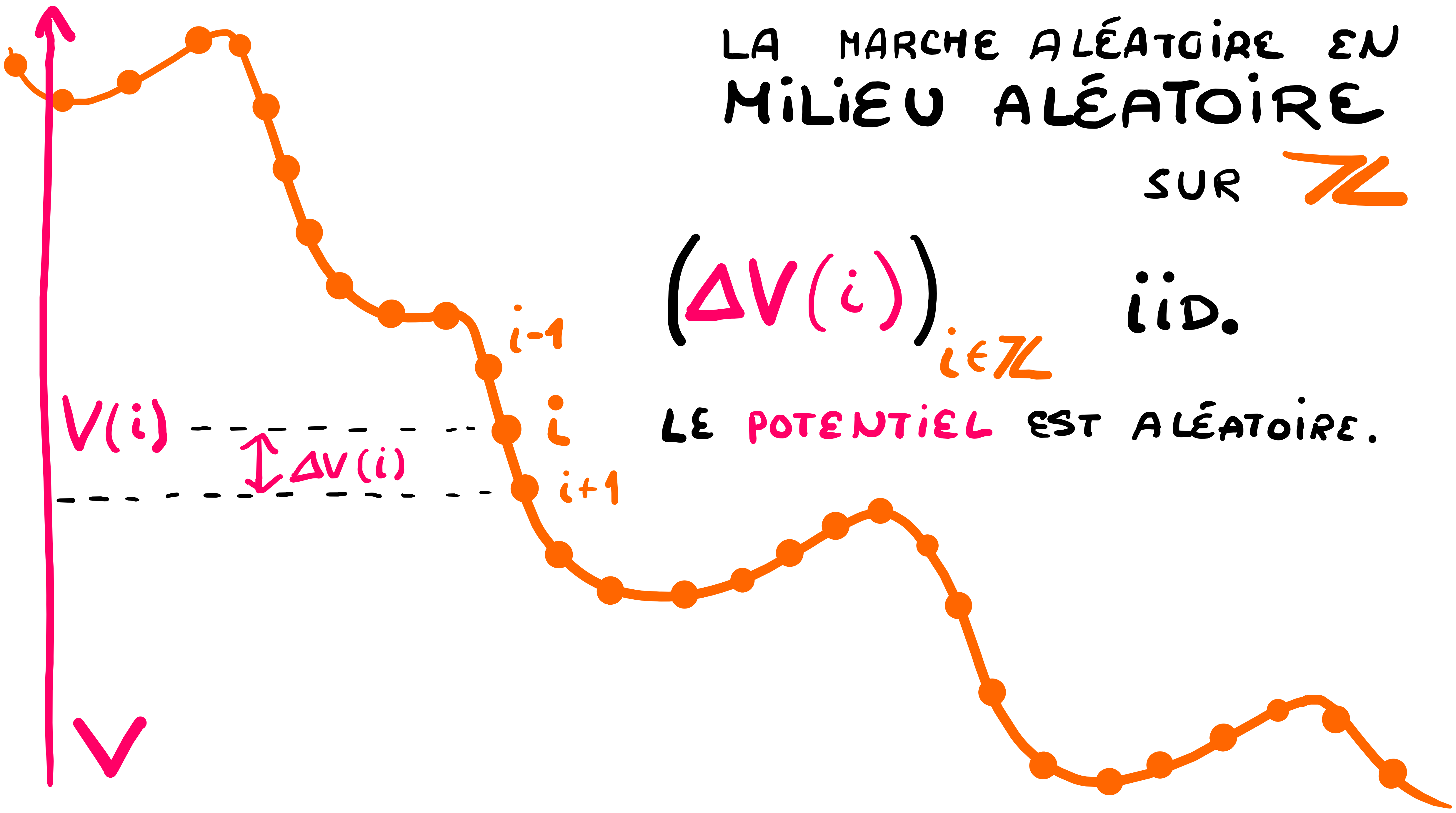
LA MARCHE ALÉATOIRE EN

MILIEU ALÉATOIRE

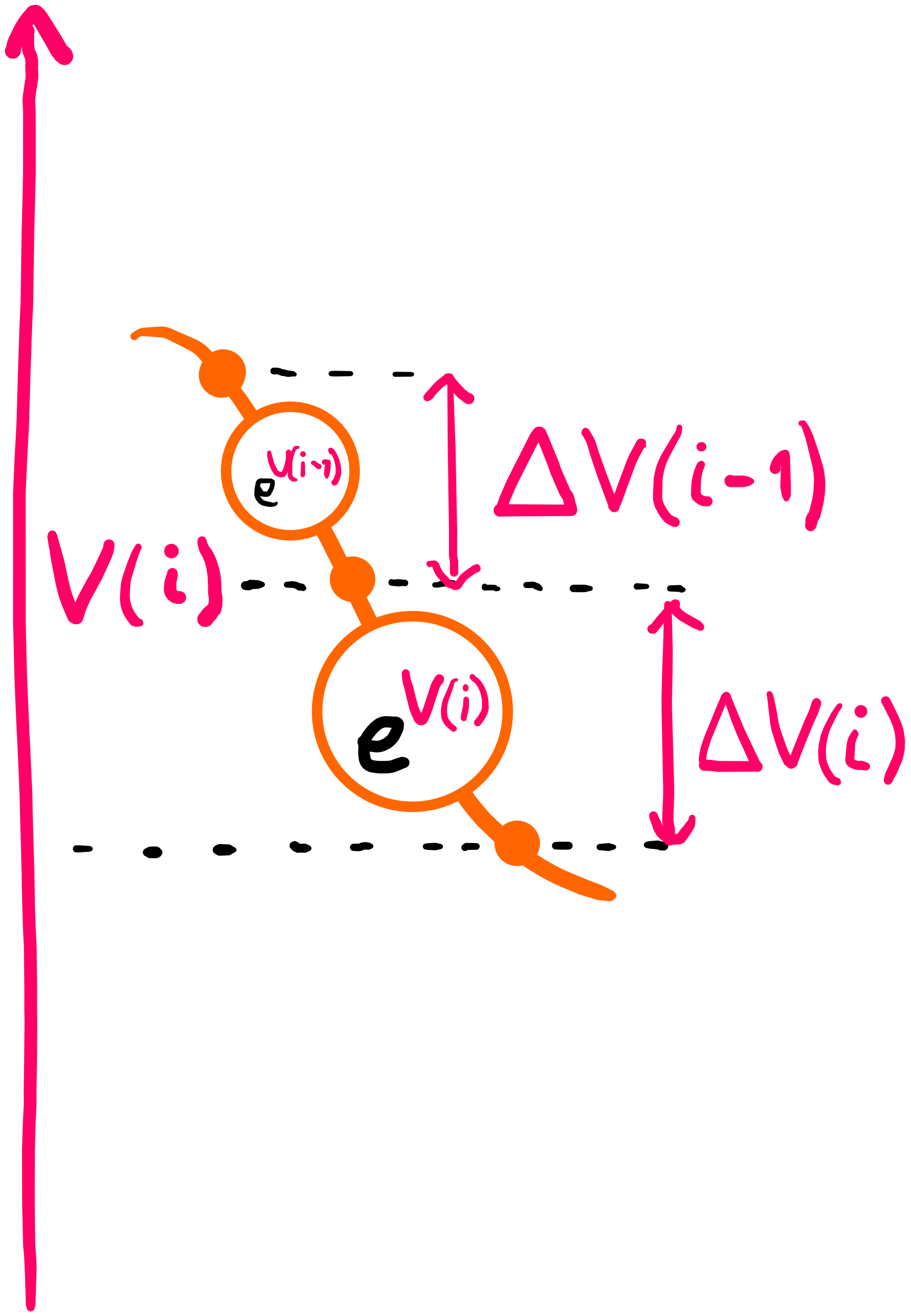
SUR $\mathbb{Z}$

$$\left(\Delta V(i)\right)_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{iid.}$$

LE POTENTIEL EST ALÉATOIRE.



LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$

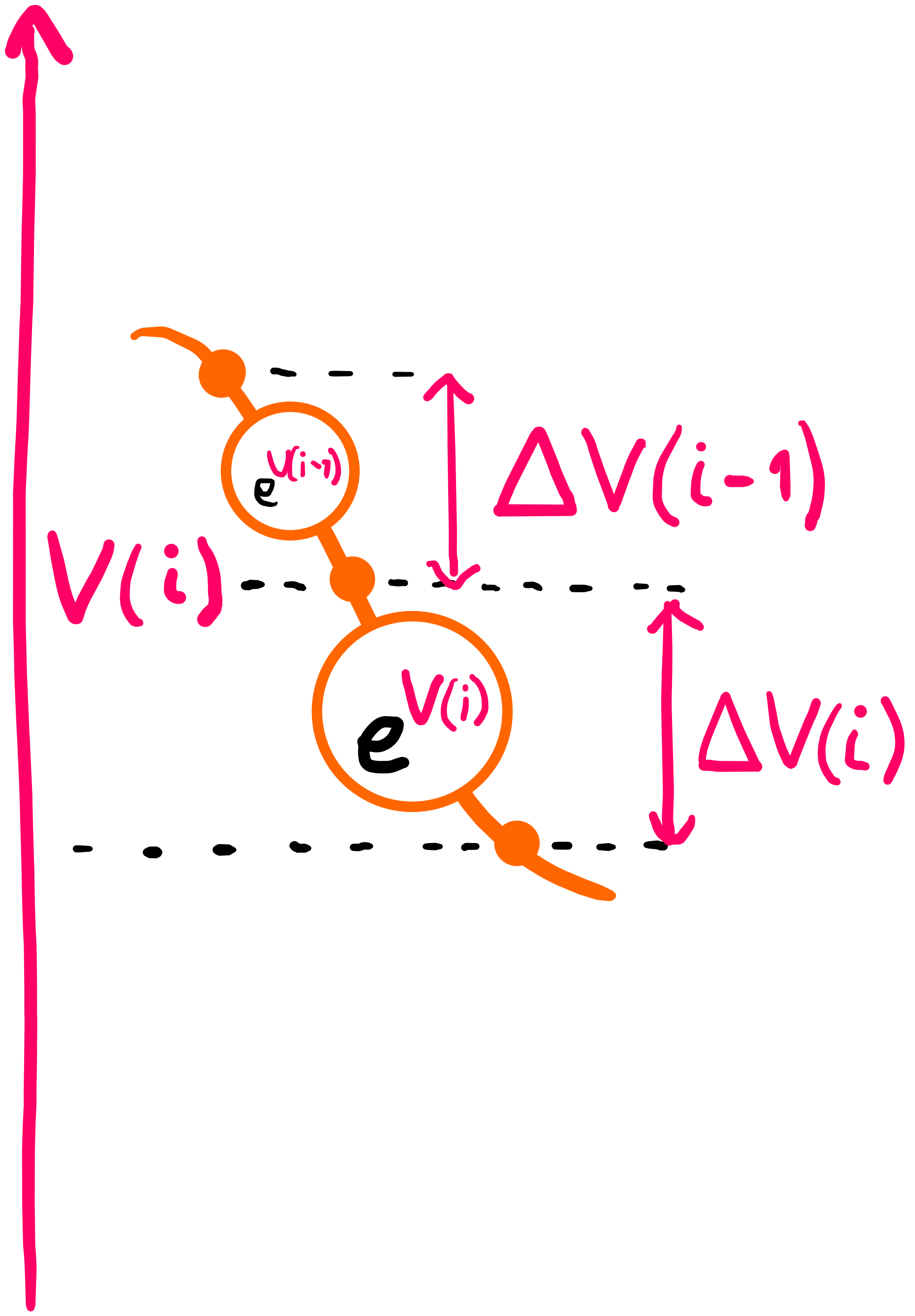


$$c(i,i+1) = e^{V(i)}$$

LES POIDS.

$$p(i,i+1) = \frac{c(i,i+1)}{c(i-1,i) + c(i,i+1)}$$

LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$



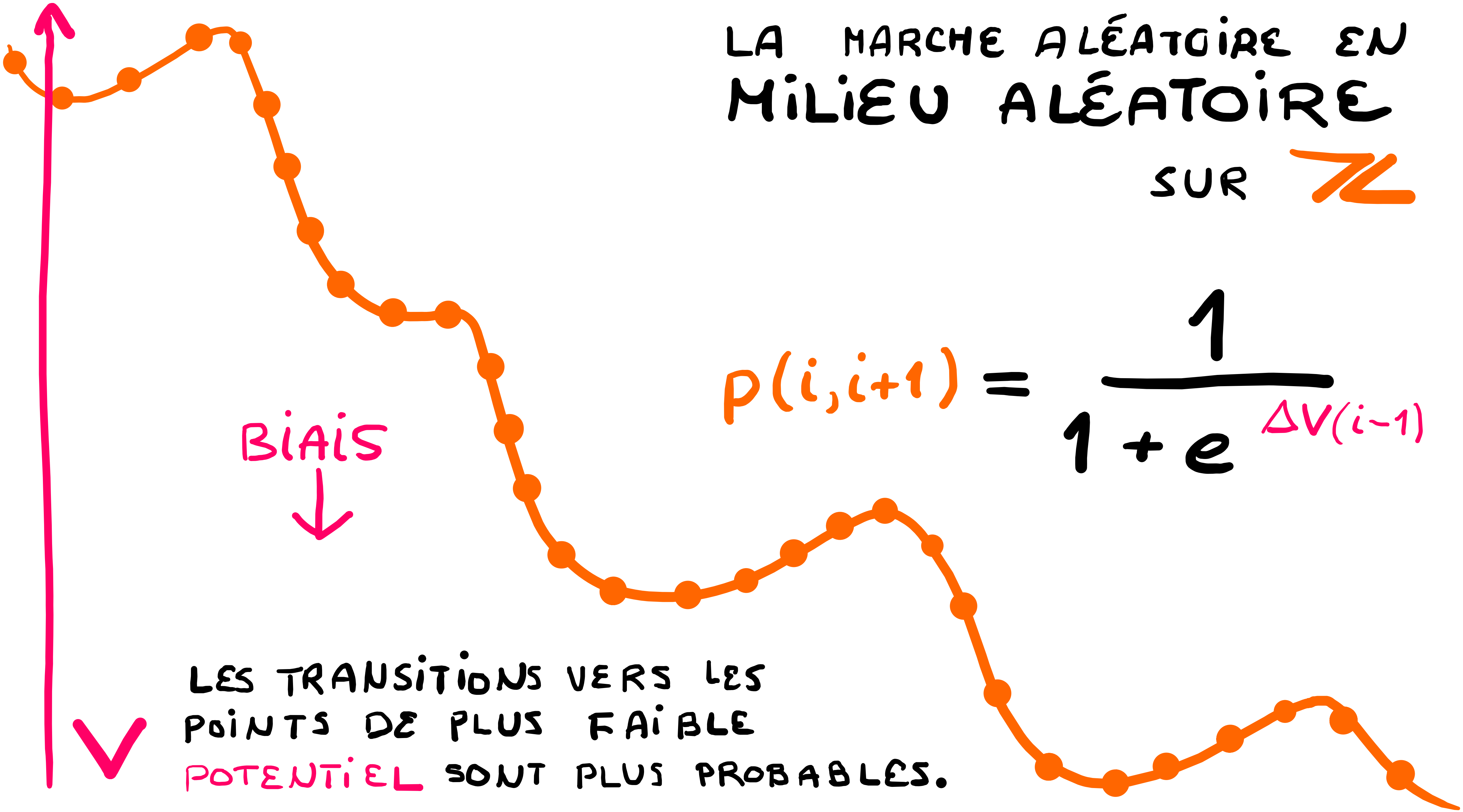
$$p(i,i+1) = \frac{1}{1+e^{\Delta V(i-1)}}$$

$$p(i,i-1) = 1 - p(i,i+1).$$

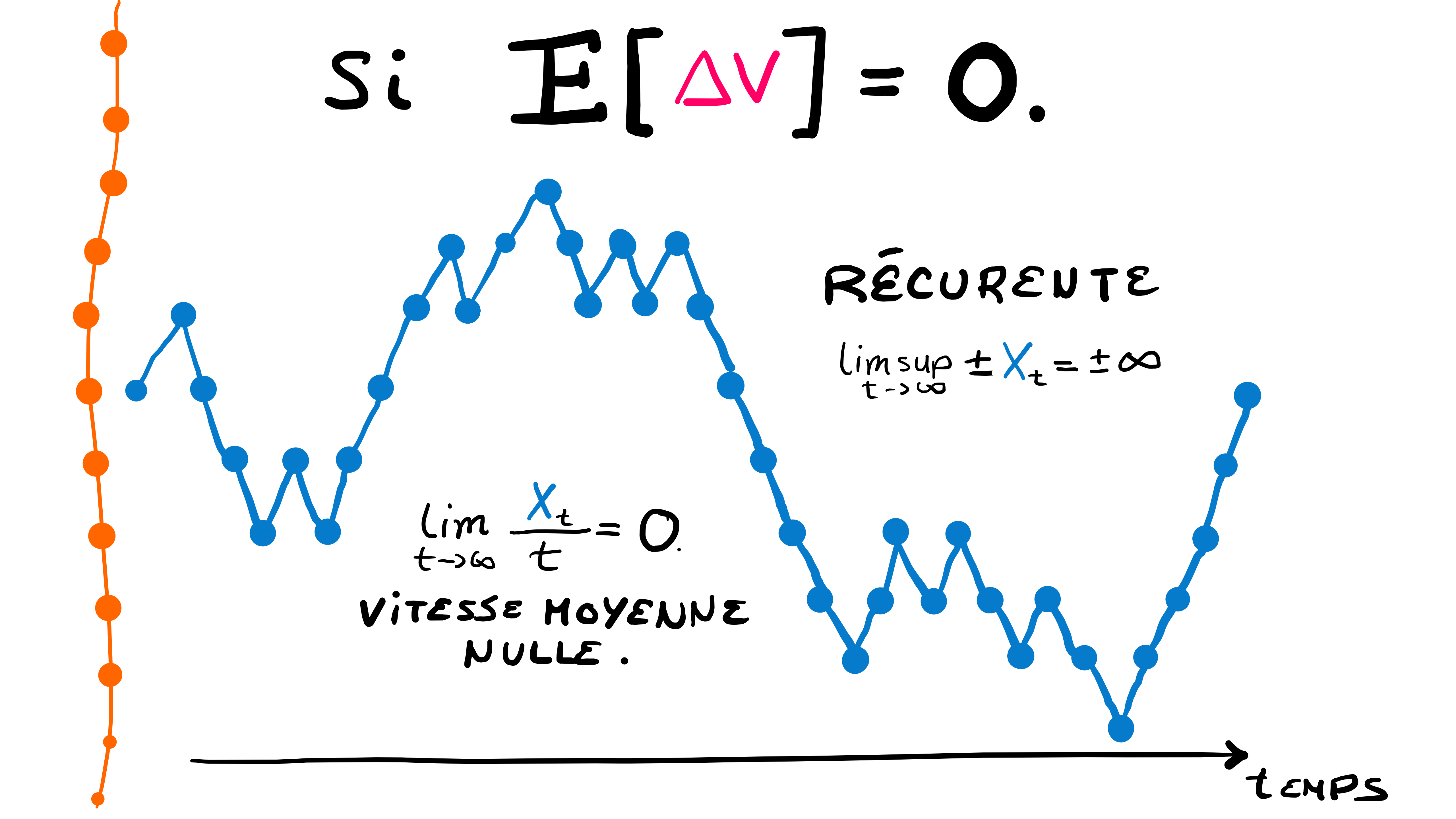
LES PROBABILITÉS DE TRANSITION SONT IID. ET NE DÉPENDENT QUE DES $\Delta V(i)$.

LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$

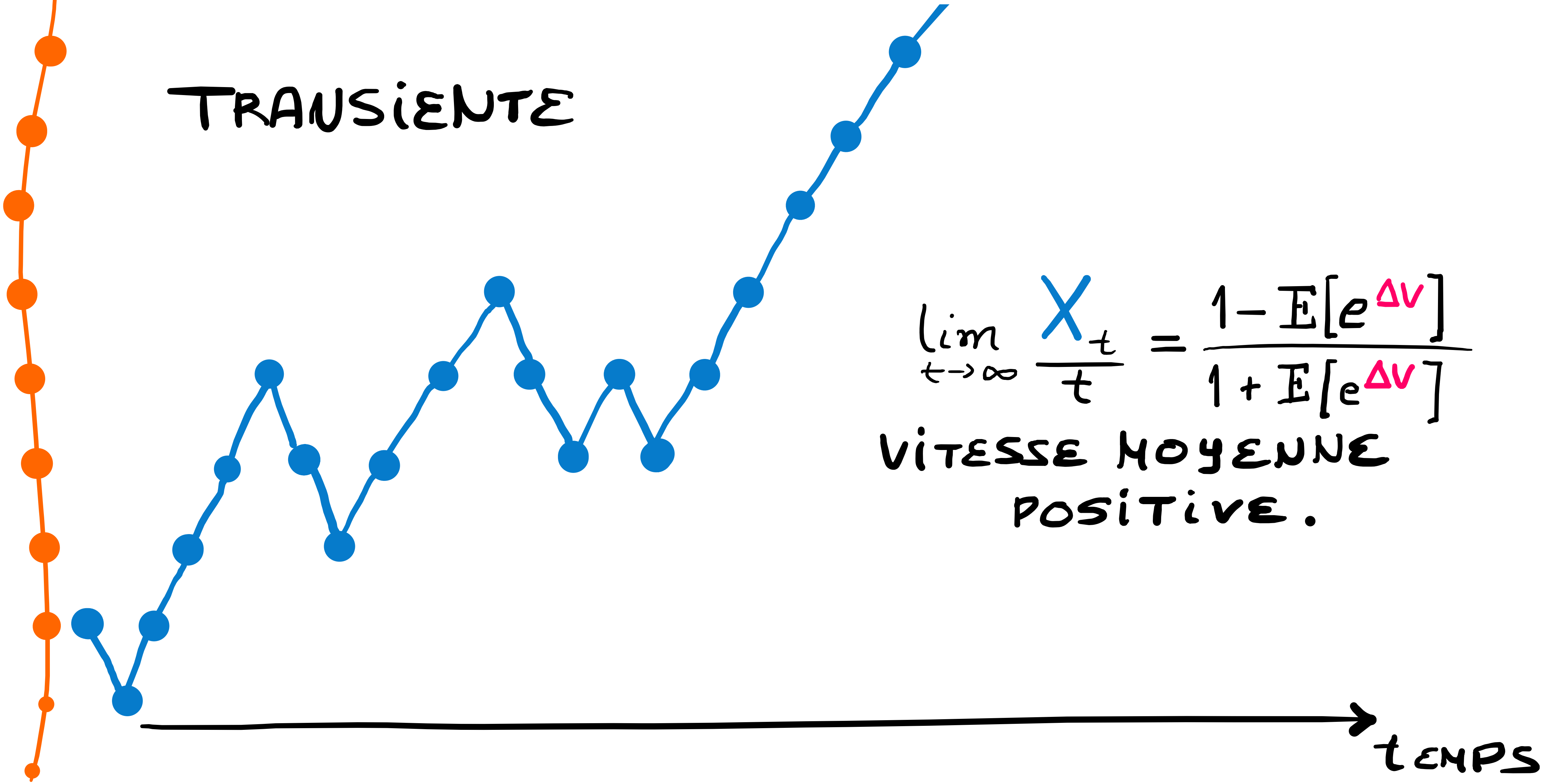
$$p(i,i+1) = \frac{1}{1+e^{\Delta V(i-1)}}$$



LES TRANSITIONS VERS LES POINTS DE PLUS FAIBLE POTENTIEL SONT PLUS PROBABLES.


Si $\mathbb{E}[\Delta V] = 0.$
RÉCURENTE
$\limsup_{t \to \infty} \pm X_t = \pm\infty$
$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = 0.$
VITESSE MOYENNE NULLE.
TEMPS

$$\text{Si } \mathbb{E}[\Delta V] < 0, \; \mathbb{E}[e^{\Delta V}] < 1$$

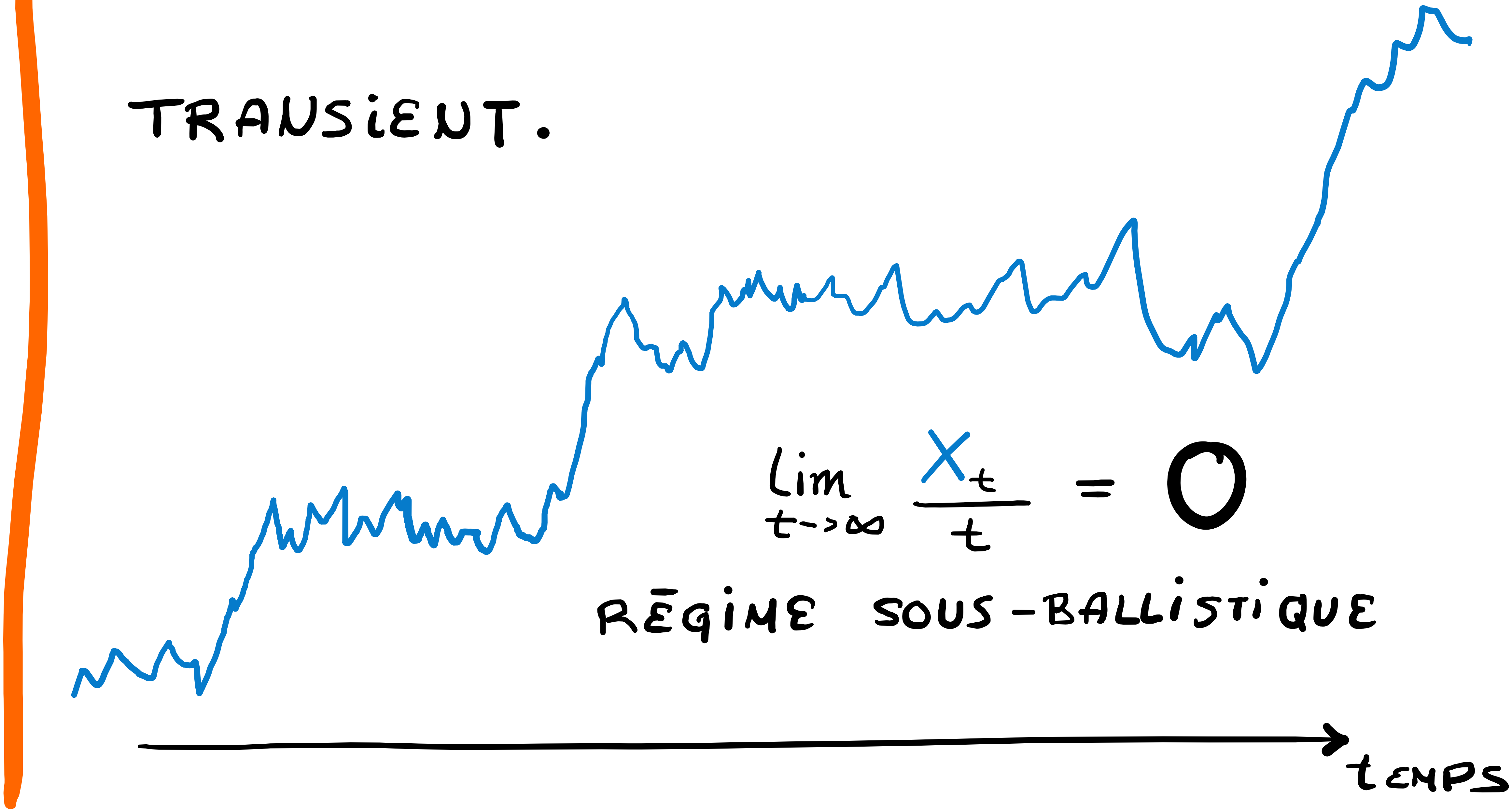


$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = \frac{1 - \mathbb{E}[e^{\Delta V}]}{1 + \mathbb{E}[e^{\Delta V}]}$$

VITESSE MOYENNE POSITIVE.

Si $\mathbb{E}[\Delta V] < 0$, $\mathbb{E}[e^{\Delta V}] \geq 1$

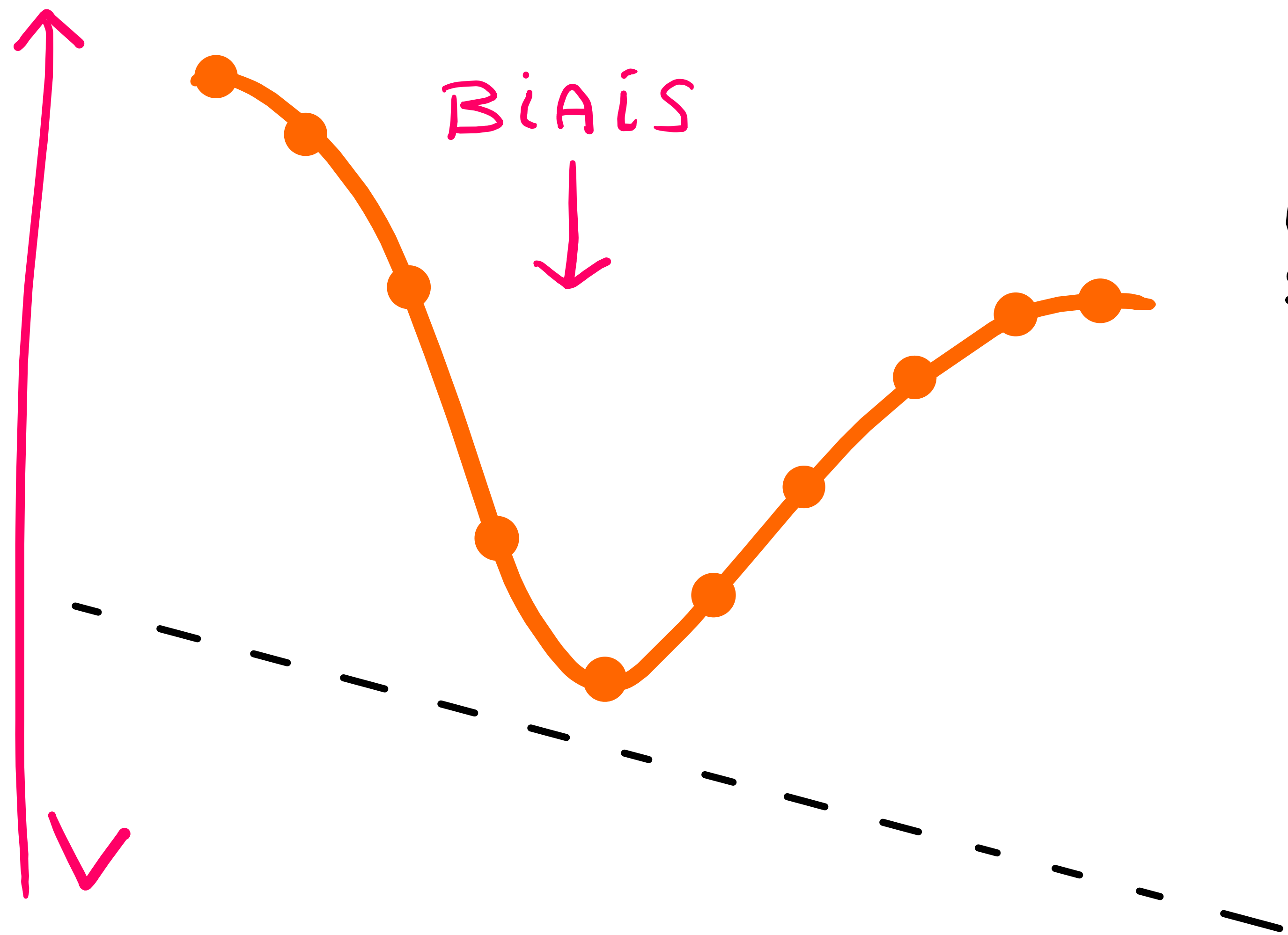
TRANSIENT.



$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = 0$$

RÉGIME SOUS-BALLISTIQUE

LES PIÈGES

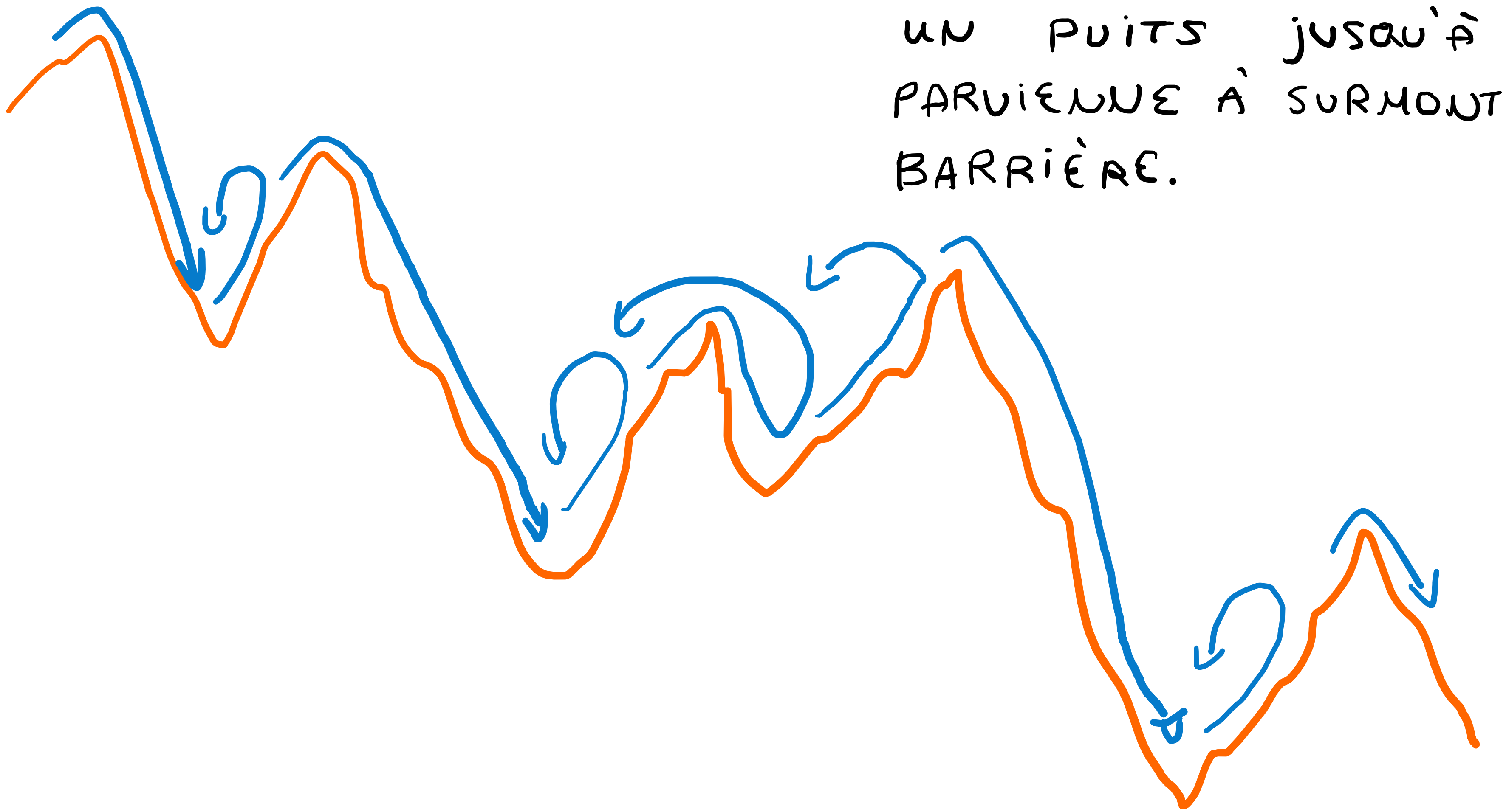


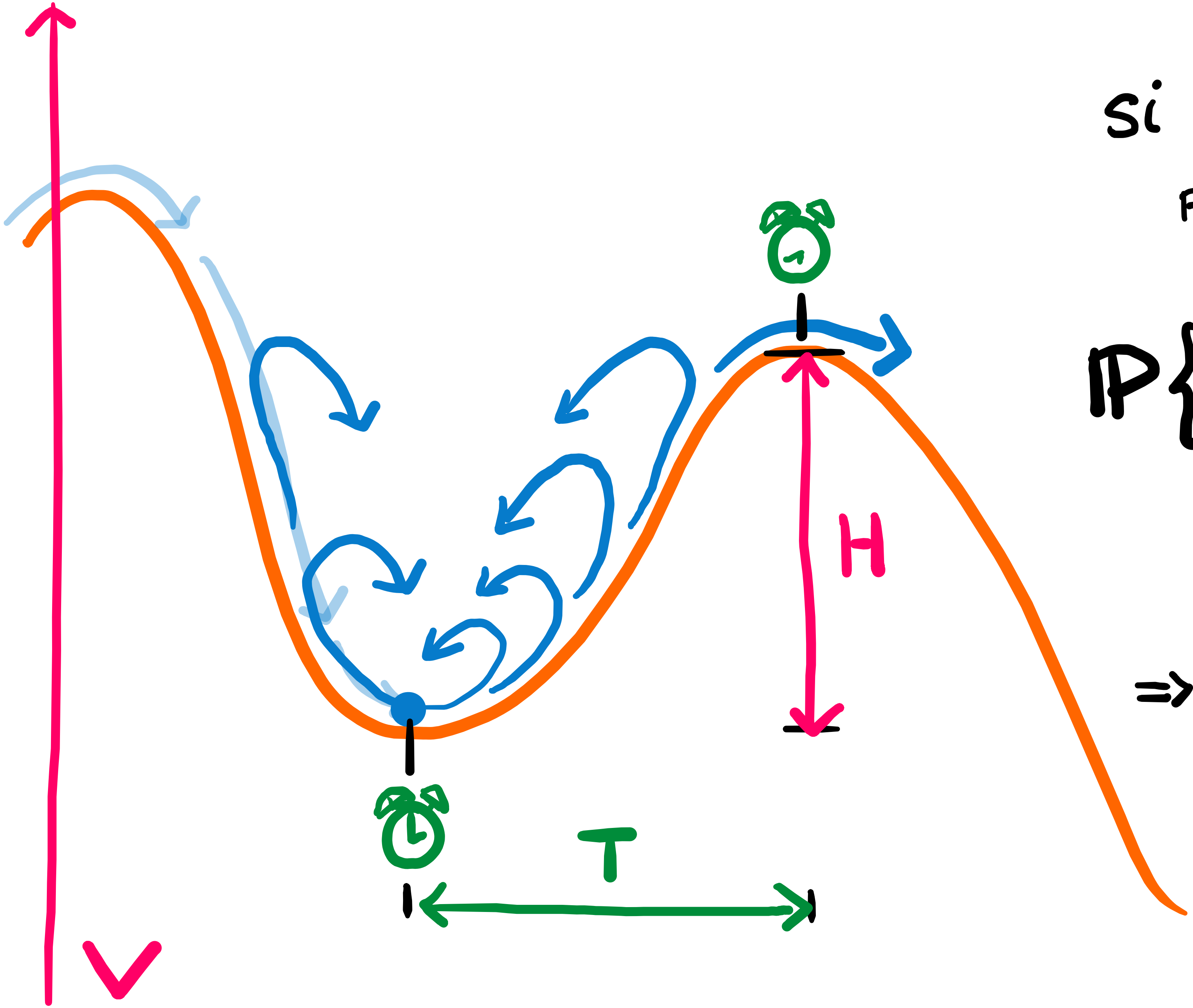
PIÈGES

DANS LE RÉGIME SOUS-BALLISTIQUE.

LES FLUCTUATIONS DU POTENTIEL AUTOUR DE SON ESPÉRANCE CRÉENT DES «PUITS» DANS L'ENVIRONNEMENT.

LA MARCHE RESTE PIÉGÉE DANS UN PUITS JUSQU'À CE QU'ELLE PARVIENNE À SURMONTER LA PROCHAINE BARRIÈRE.





si $\mathbb{E}[e^{\Delta V \cdot \alpha}] = 1$

POUR $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{P}\{H > u\} \propto e^{-\alpha u}$$

$$T \propto e^{H}$$

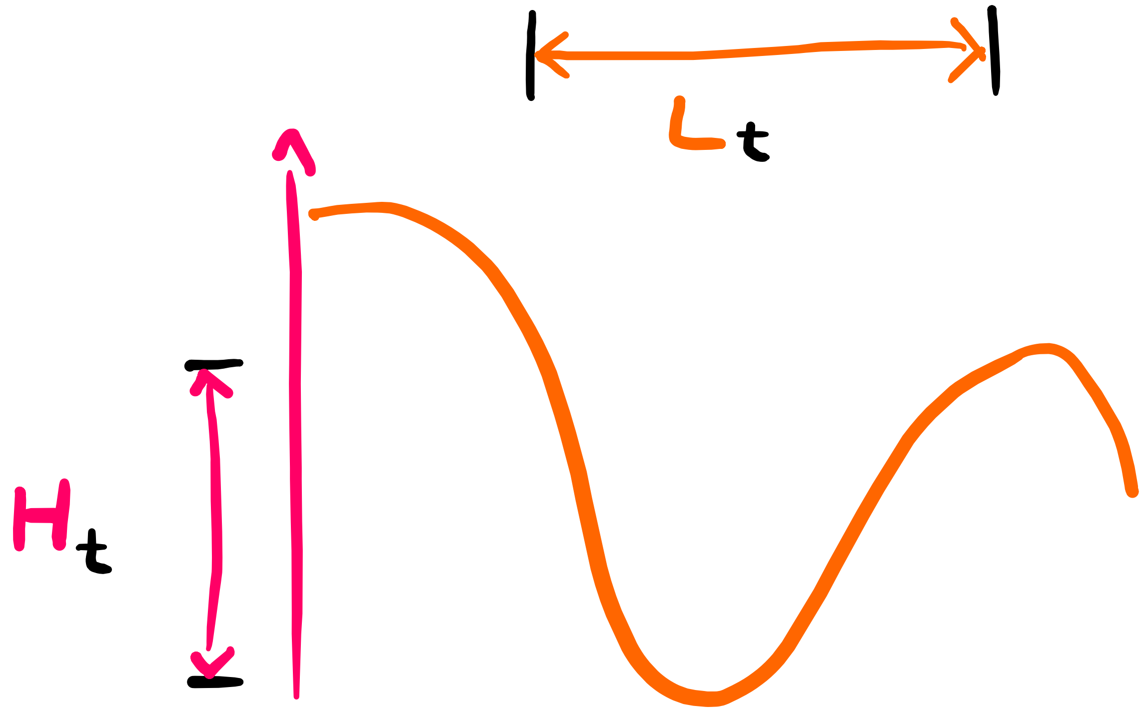
$$\Rightarrow \mathbb{P}\{T > u\} \propto u^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = +\infty$$

VIEILLISSEMENT

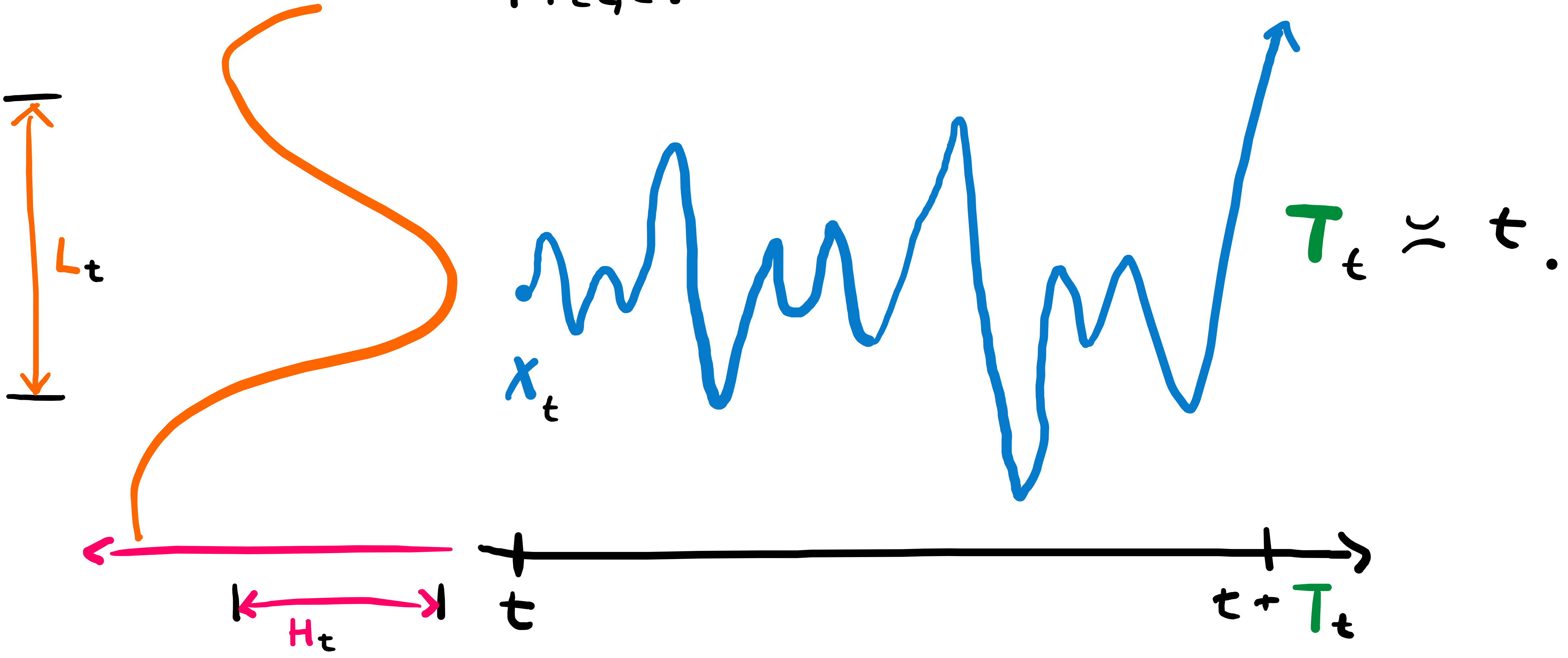
EN RÉGIME SOUS-BALLISTIQUE

SUPPOSONS QU'AU TEMPS t ON SE TROUVE DANS CE PIÈGE.



$H_t = O(\log t)$ $\qquad$ $L_t = O(\log t)$

ON DÉNOTE PAR T_t LE TEPS REQUIS POUR SORTIR DU PIÈGE.



VIEILLISSEMENT

EN RÉGIME SOUS-BALLISTIQUE

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left\{ |X_t - X_{at}| < \eta \log t \right\} = F(a)$$

APRÈS UN TEMPS t LE TEMPS QU'IL FAUT POUR S'ÉCARTER D'UNE DISTANCE $\log t$ EST D'ORDRE t.

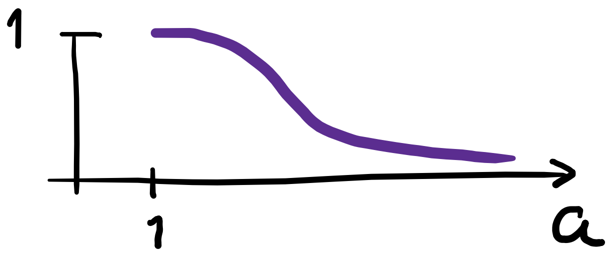
OÙ $F(a) = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \displaystyle\int_{1/a}^{1} y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} \, dy$

POUR $a > 1$.

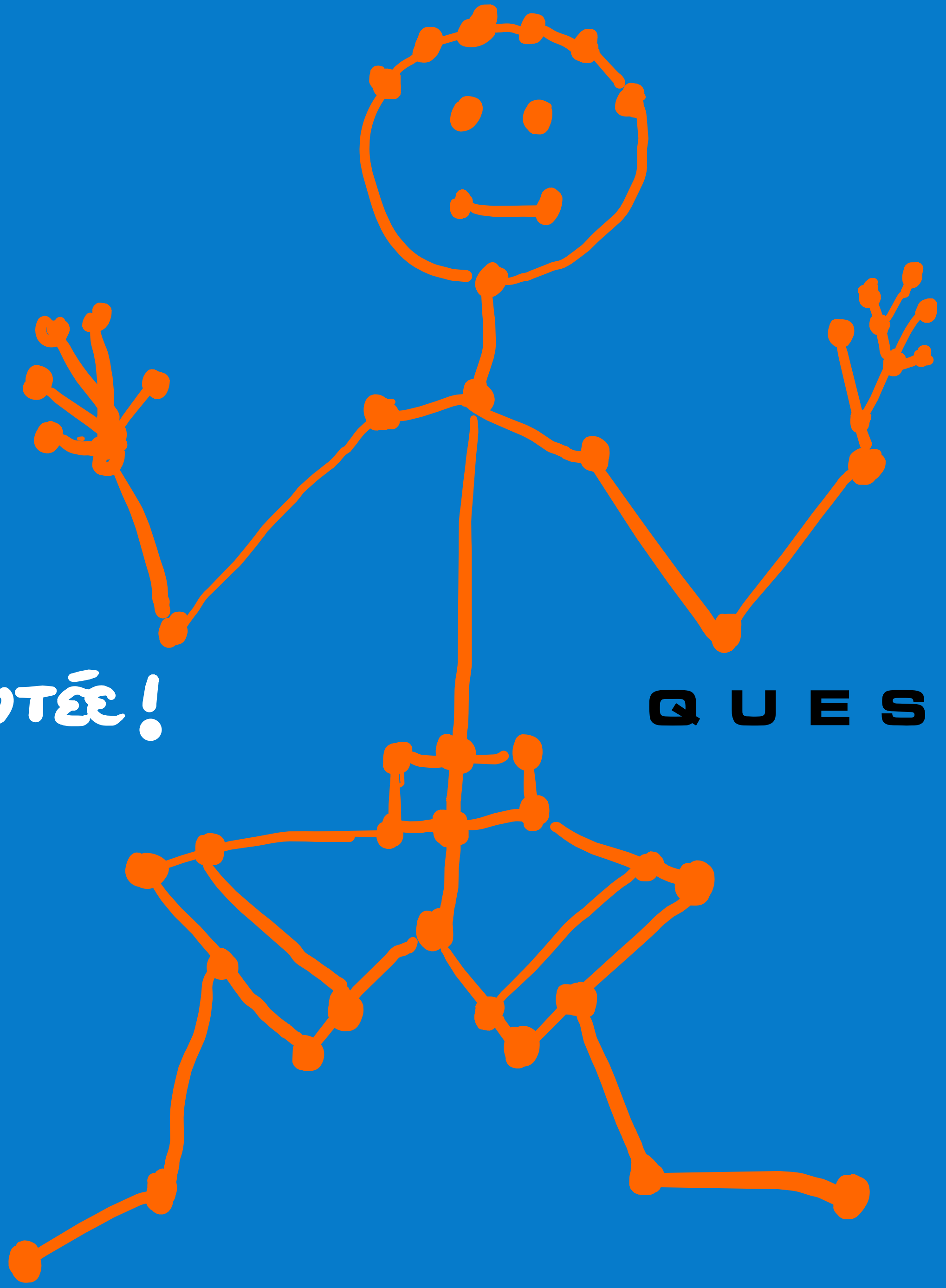
VIEILLISSEMENT

EN RÉGIME SOUS-BALLISTIQUE

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \underbrace{|X_t - X_{at}|}_{\text{DANS LE MÊME PUITS AUX TEMPS } t \text{ ET } at} < \underbrace{\eta \log t}_{\text{PARCE QUE } L_t = O(\log t)} \right\} = \underbrace{F(a)}$$



Merci de m'avoir écoutée !



QUESTIONS ?