

Les mathématiques
toutes nues sur
la plage ...

Élise Davignon

@clubmath 29.09.21

A photograph of a sandy beach meeting the ocean. A small, dark-colored bird with orange and white markings on its wings and a long beak stands on the sand near the water's edge. The ocean waves are crashing onto the shore, creating white foam. The sky is clear and blue.

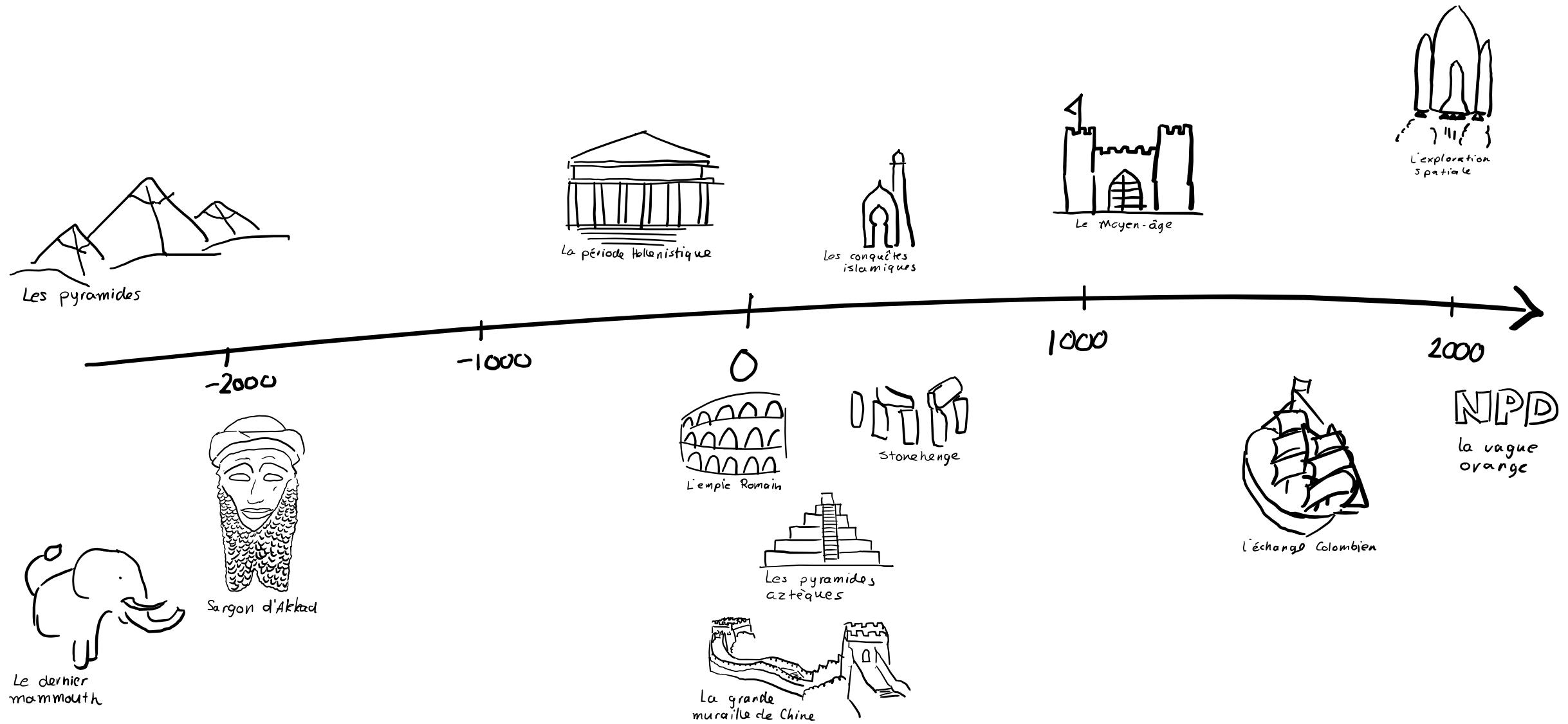
<<

Beach
day
every
day

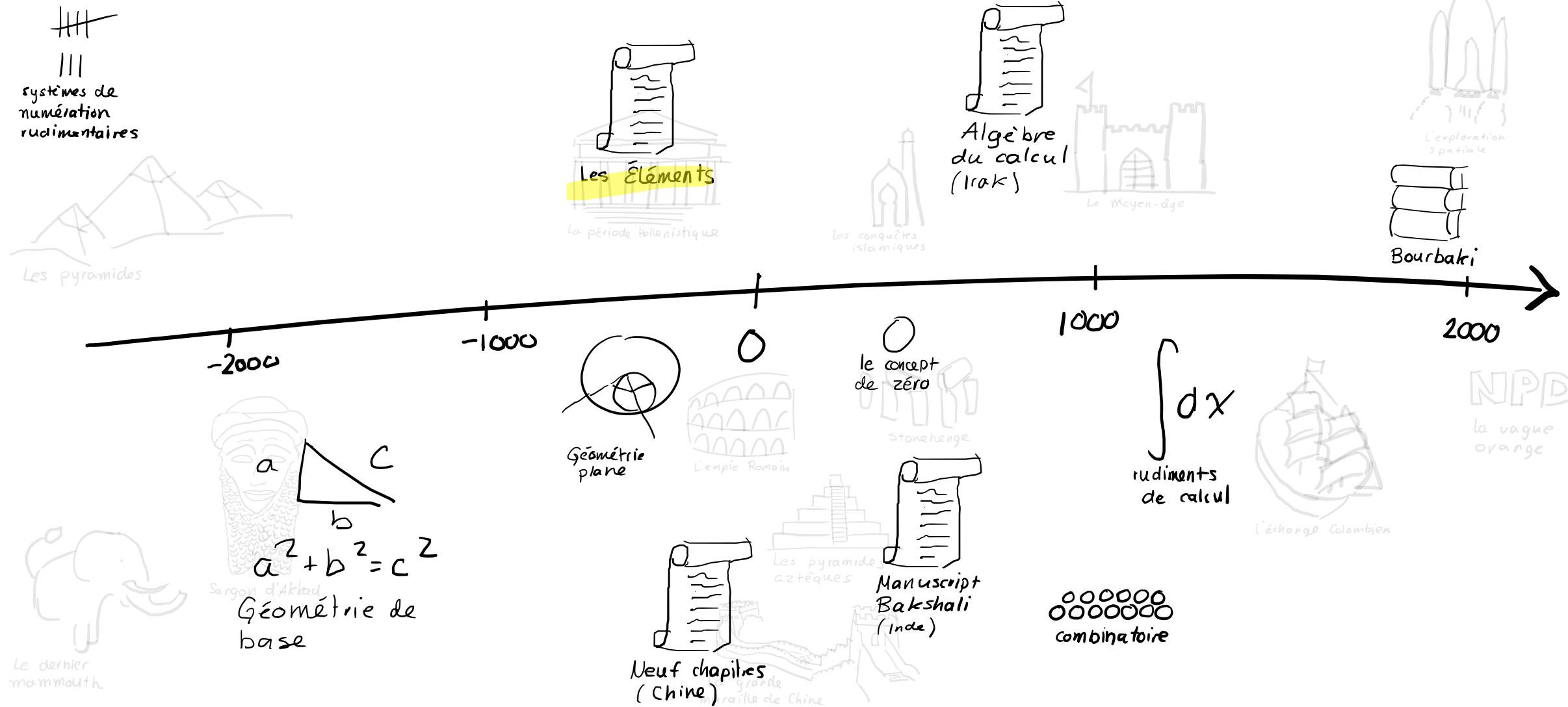
! >>

- Euclide

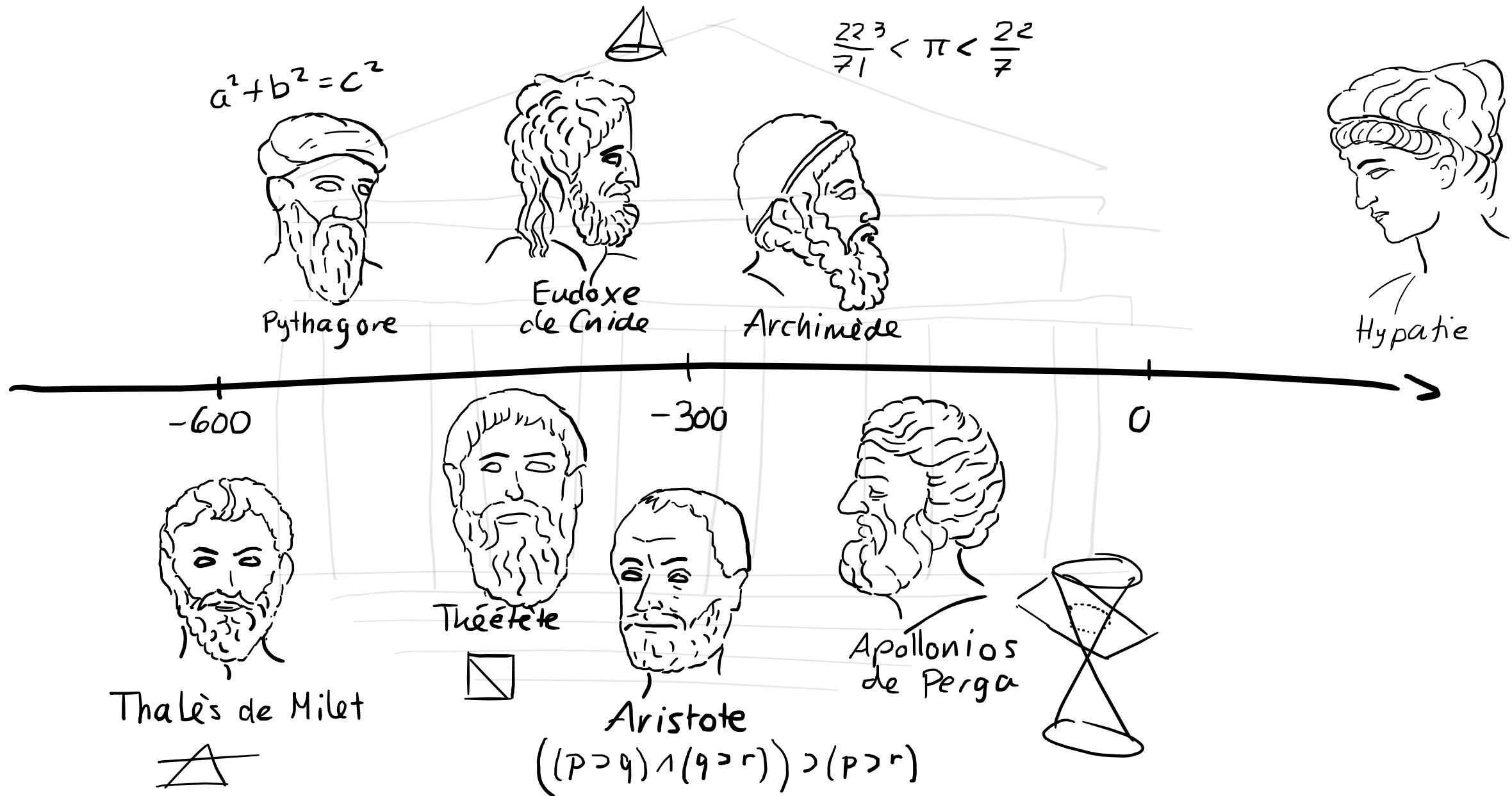
Une petite ligne du temps



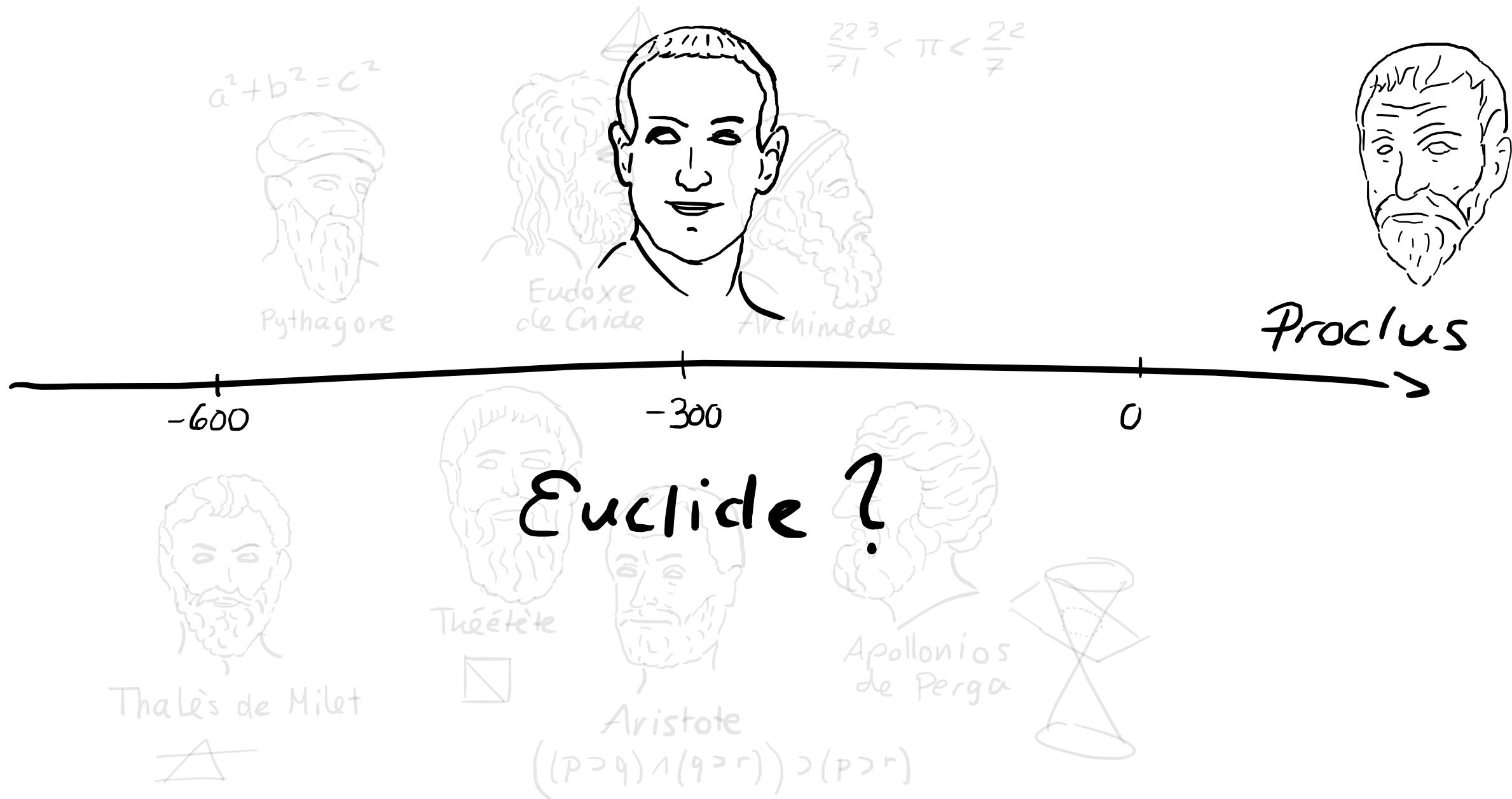
Une petite ligne du temps



ΥΝΗ ΤΗΤΙ ΤΗ ΛΙΓΝΗ ΔΥ ΤΕΜΤΣ



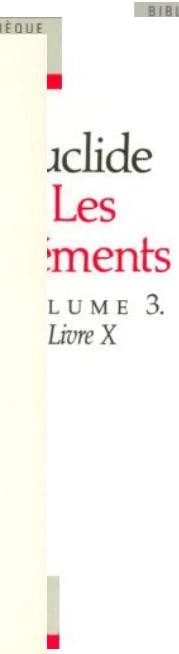
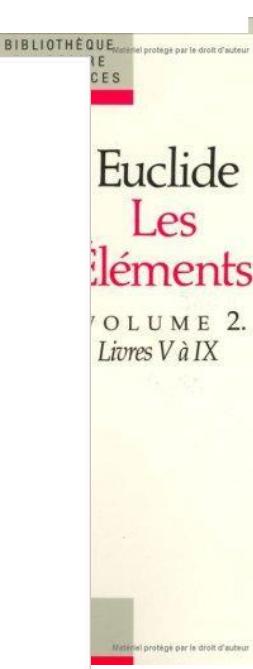
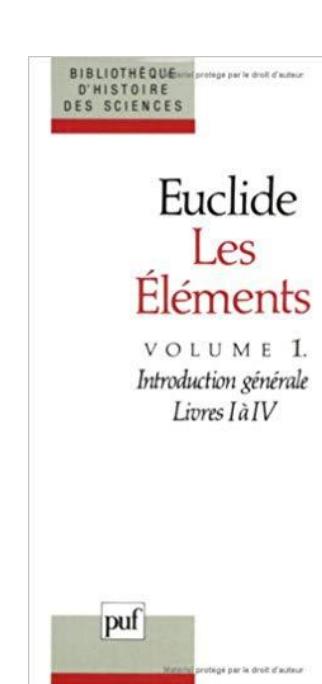
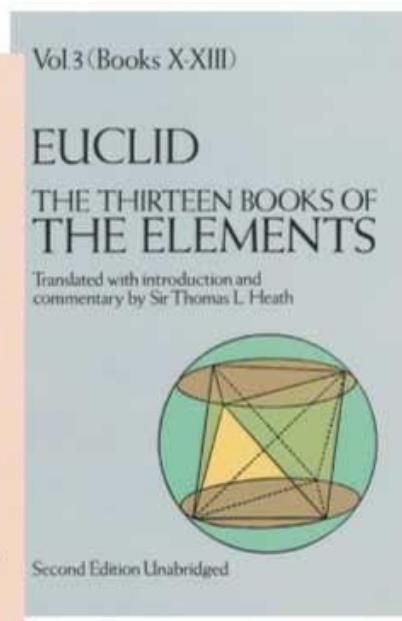
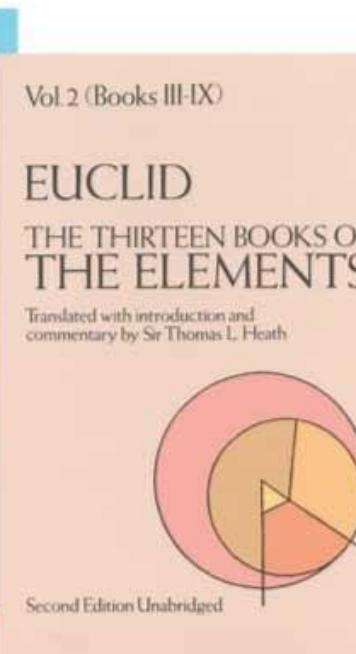
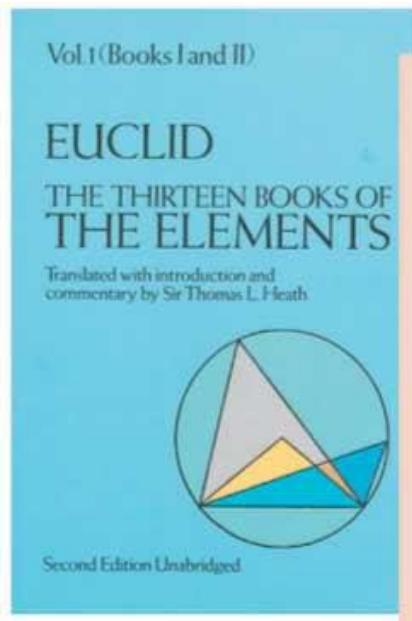
ΥΝΗ ΤΗΤΙ ΤΗ ΛΙΓΝΗ ΔΥ ΤΕΜΤΣ



Les treize livres des Éléments

En anglais : Thomas L. HEATH (1908)

En français : Bernard VITRAC (1990)



lide
es
ents
ME 4.
XI-XIII

La structure des Éléments

Préambule

Définitions

1. ~~~
2. ~~~
3. ~~~

Demandes

1. ~~~
2. ~~~
3. ~~~

Notions communes

1. ~~~
2. ~~~
3. ~~~

Propositions

1. preuve
~~~~~  
CQFD.

2. preuve  
~~~~~  
CQFD.

Livre III Quadratures

Livre IV Cercles

Inscriptions de Polygones

Ratios et Proportions

Figures semblables

Nombres

Nombres

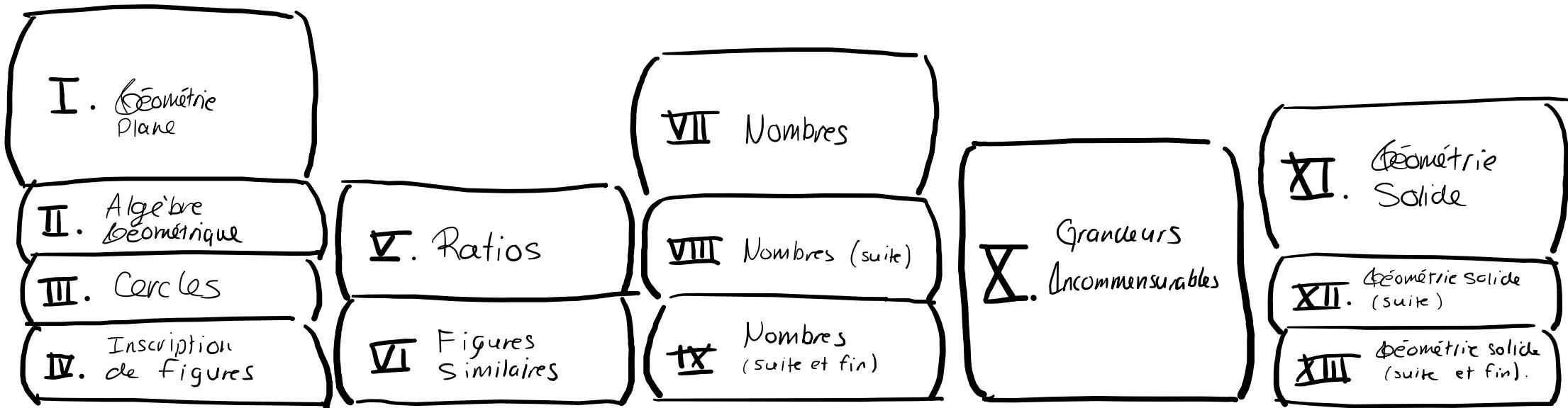
Nombres

Treatise

Treatise

13 Livres.

La structure des Éléments



Géométrie de base

Proportions

Théorie des nombres

Irrationnels

Géométrie solide.

Livre I

(Géométrie Plane)

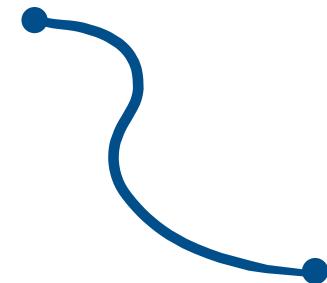
Définitions

1. Un **point** est ce dont
il n'y a aucune partie.



Définitions

2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.



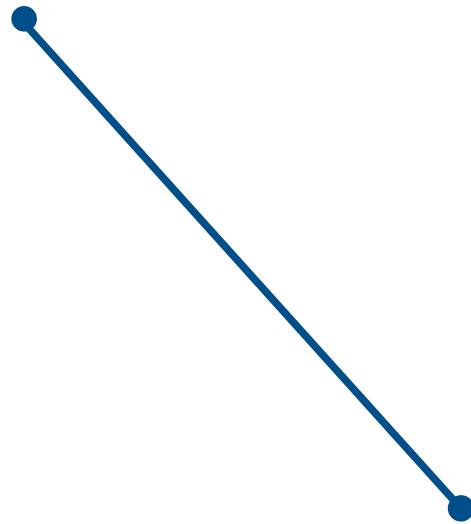
3. Les limites d'une ligne sont des points.

3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de parties communes est un point.



Définitions

4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

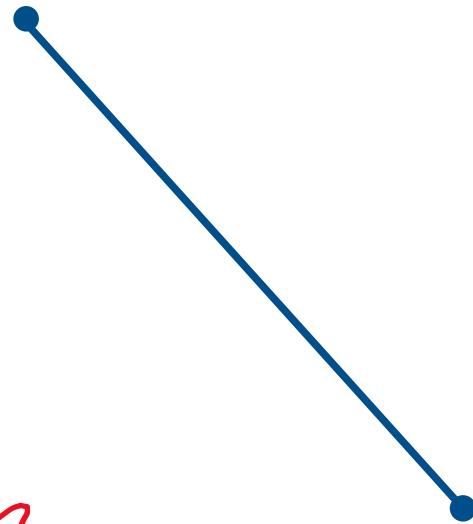


Définitions

4. Une ligne droite

est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

??? De kossé ?



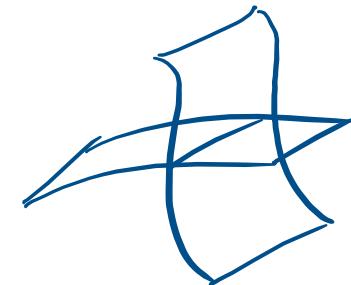
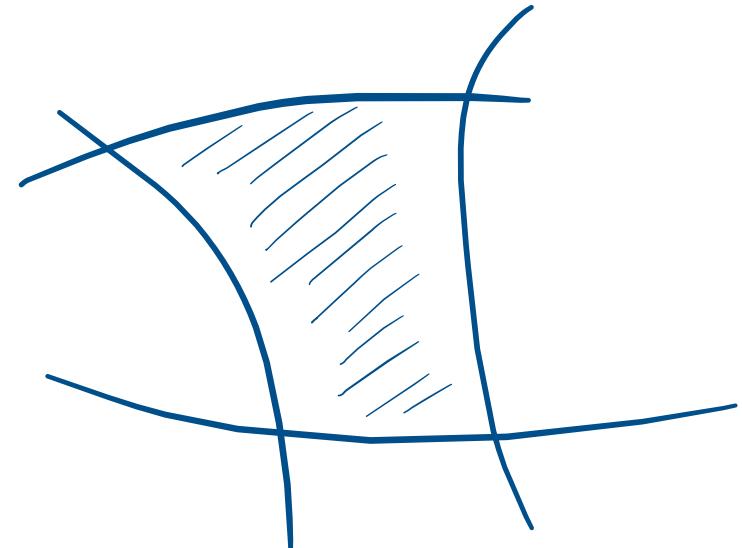
Interlude amusant

Faites mieux, voir !

Pas facile, n'est-ce pas ?

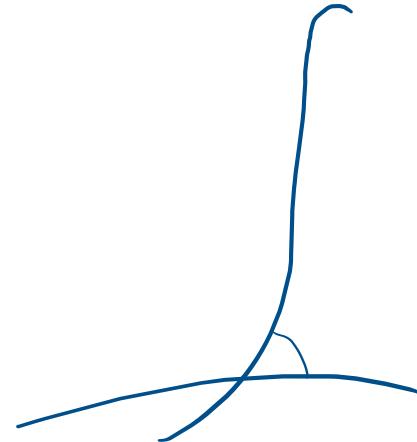
Définitions

5. Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les limites d'une surface sont des lignes
7. Une **surface plane** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
8. L'intersection de deux surfaces qui n'ont aucune partie commune est une ligne.

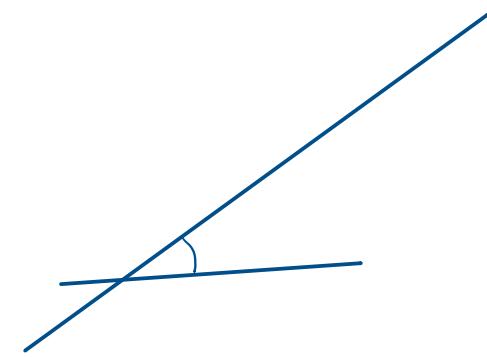


Définitions

8. Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.



9. Et quand ces lignes sont droites, l'angle est appelé **rectiligne**.

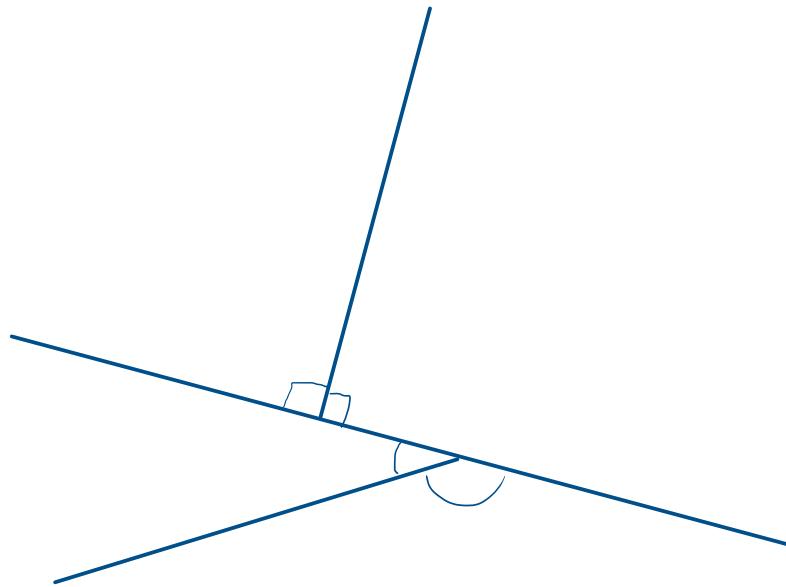


Définitions

10. Et quand une droite ayant été élevée sur une droite fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles est **droit** et la droite qui a été élevée est appelée **perpendiculaire** à celle sur laquelle elle a été élevée

11. Un angle **obtus** est celui qui est plus grand qu'un droit.

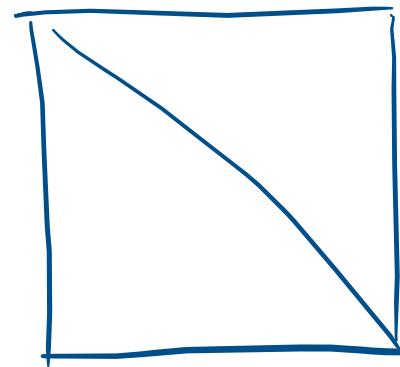
12. Un angle **aigu** est celui qui est plus petit qu'un droit.



Définitions

13. Une **frontière** est ce qui est limite de quelque chose.

14. Une **figure** est ce qui est contenu par quelques frontières.



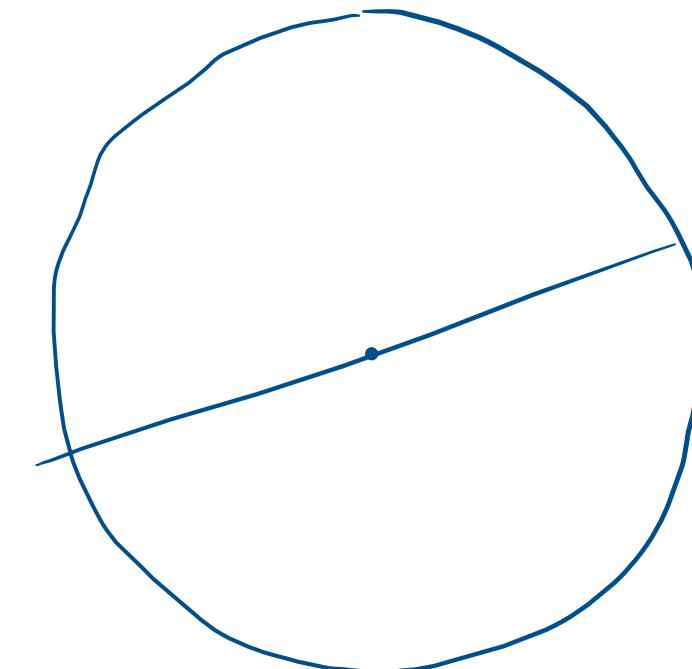
Définitions

15. Un **cercle** est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée **circonference**) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonference du cercle) égales entre elles.

16. Et ce point est appelé le **centre** du cercle

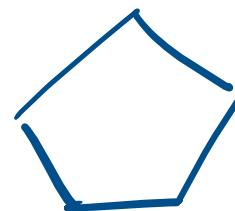
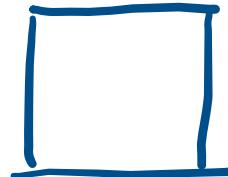
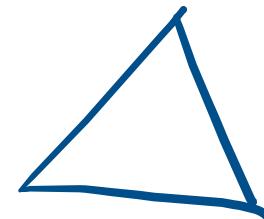
17. Et un **diamètre** du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonference du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

18. Un **demi-cercle** est la figure contenue par le diamètre et la circonference découpée par lui; le **centre** du demi-cercle est le même que celui du cercle.



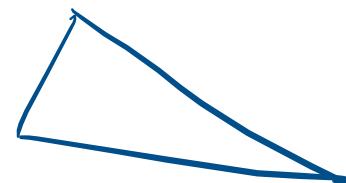
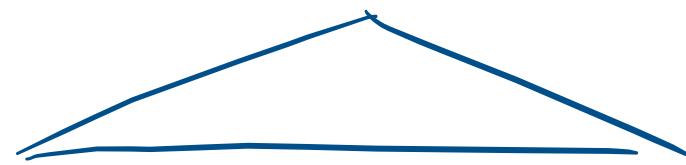
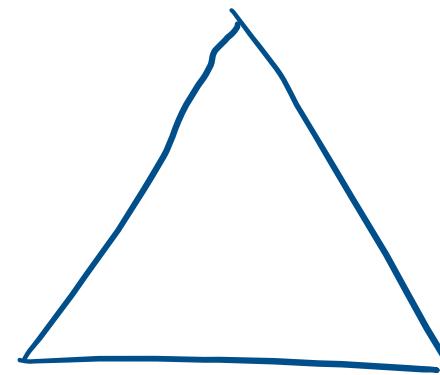
Définitions

19. Les **figures rectilignes** sont celles qui sont contenues par des droites;
trilatères: celles contenues par trois droites;
quadrilatères: celles contenues par quatre droites;
multilatères: par plus de quatre.



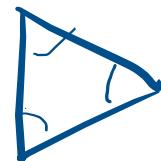
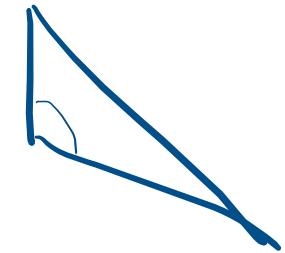
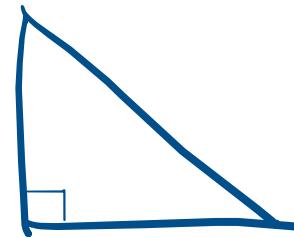
Définitions

20. Parmi les figures trilatères est
un triangle équilatéral celle
qui a les trois côtés égaux;
isocèle celle qui a deux côtés égaux
seulement;
scalène celle qui a trois côtés inégaux.



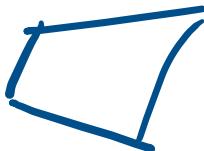
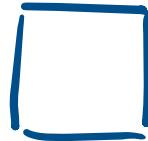
Définitions

21. De plus, parmi les figures trilatères .
est un **triangle rectangle** celle qui
a un angle droit;
obtusangle celle qui a un angle obtus;
acutangle celle qui a les trois angles aigus.



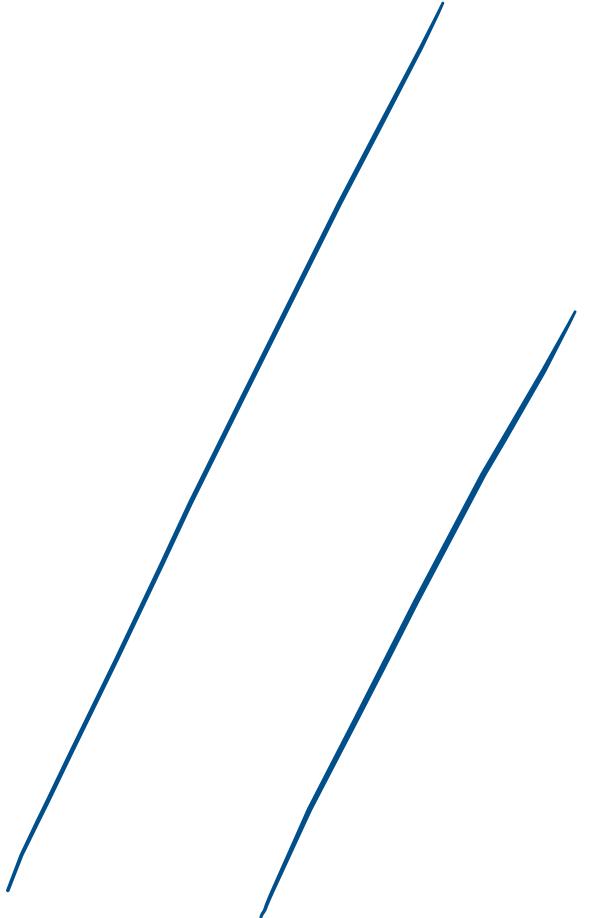
Définitions

22. Parmi les figures quadrilatères est un **carré** celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est **oblongue** celle qui est rectangle mais non-équilatérale ; un **losange** celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un **rhomboïde**, celle qui a les côtés égaux opposés égaux les uns aux autres qui n'est ni équilatérale, ni rectangle ; les et que l'on appelle **trapèze** les mais quadrilatères autres que ceux-là.



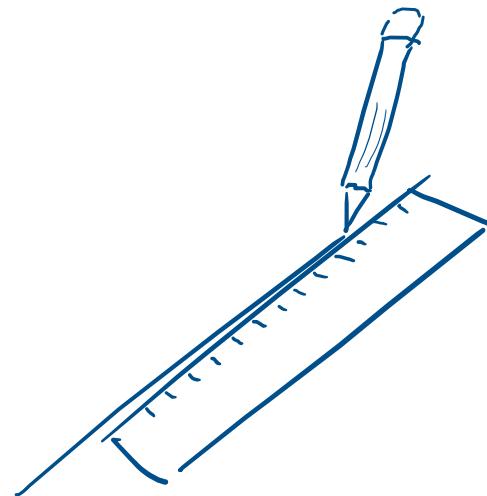
Définitions

23. Des droites **parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

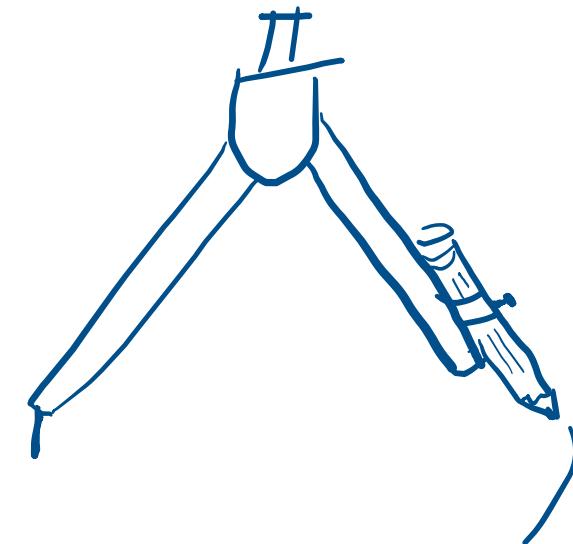


Demandes (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.



2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

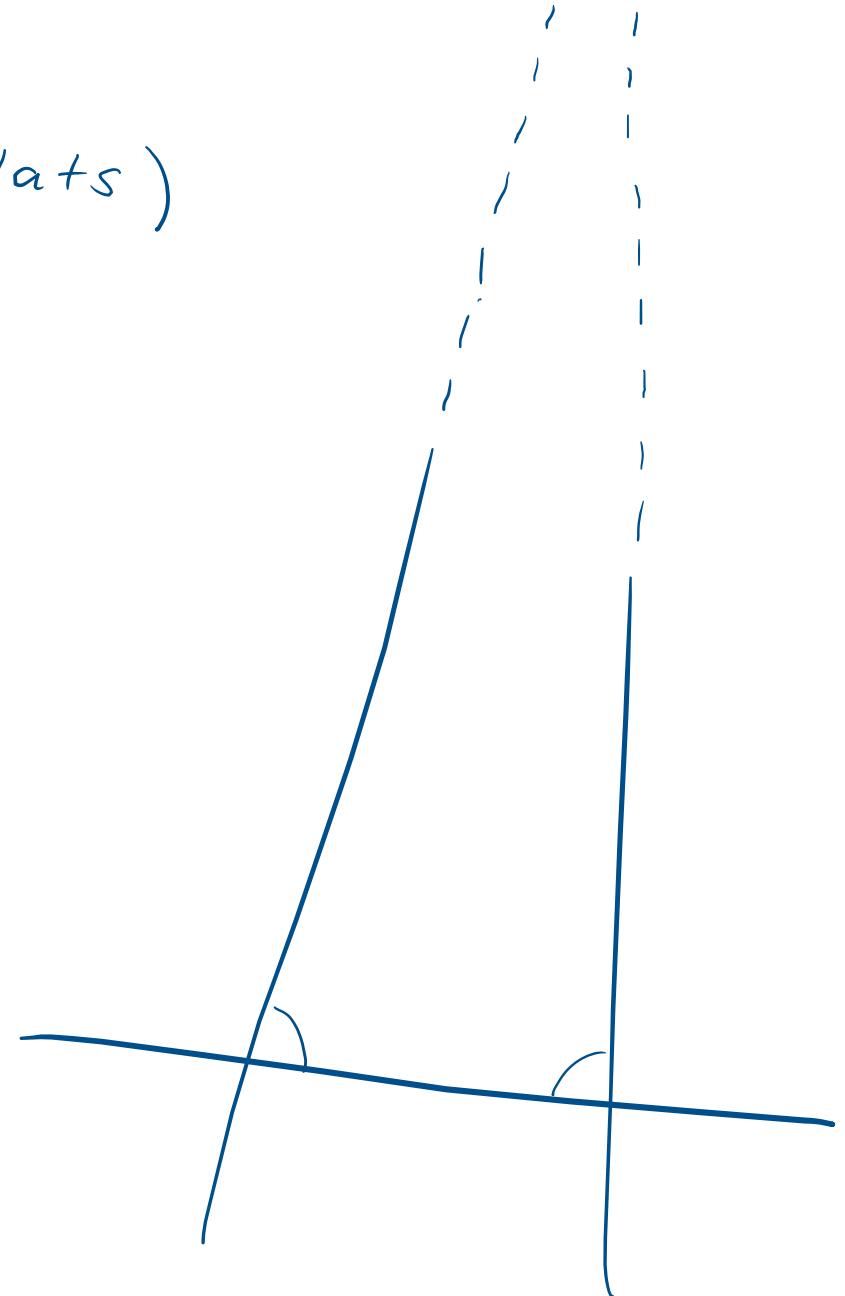


3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.

Demandes (postulats)

4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

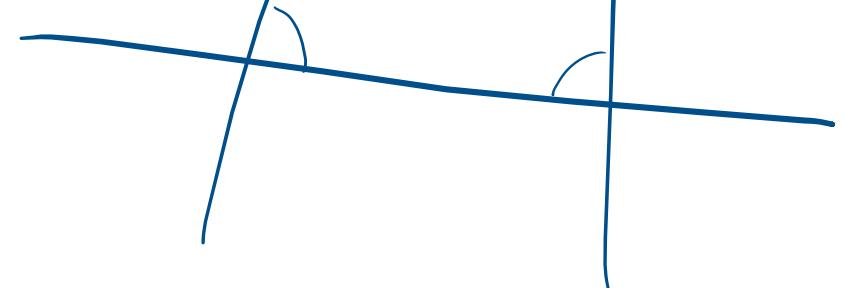


Demandes (postulats)

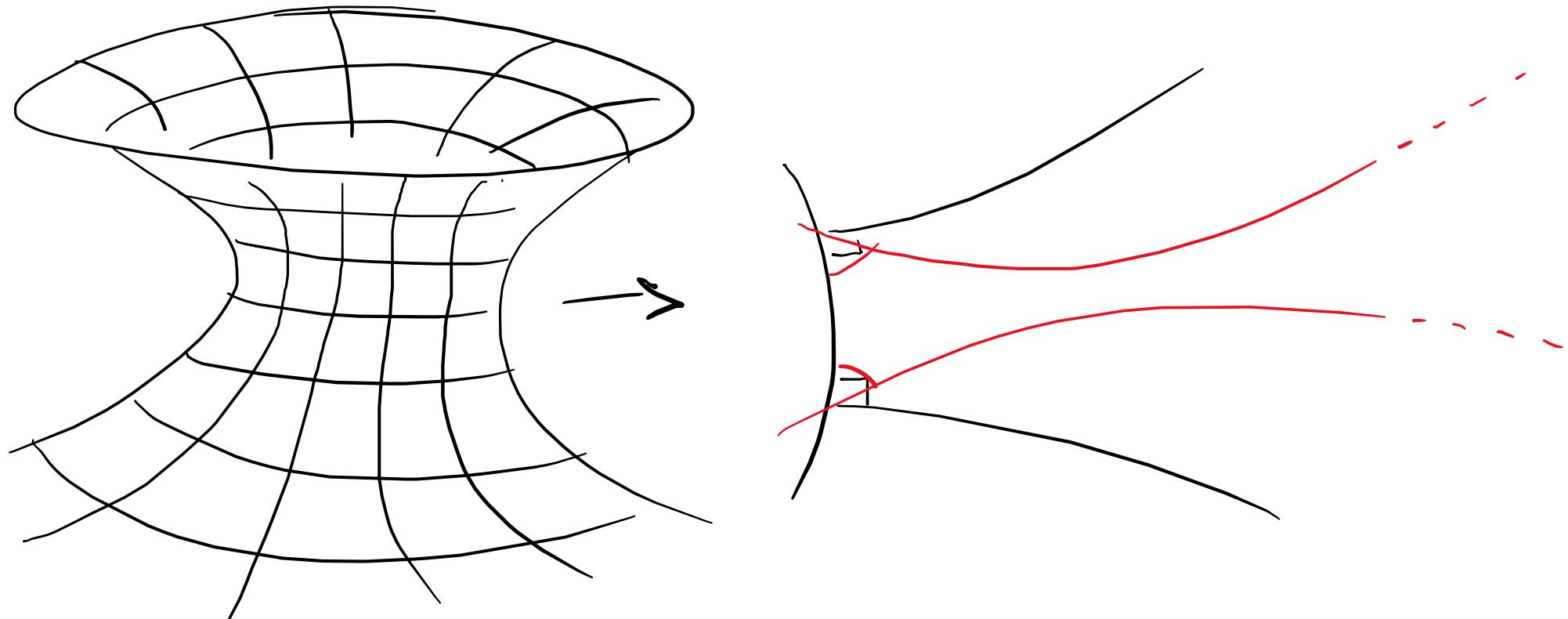
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Est-ce absolument nécessaire comme postulat?



Interlude : Les Géométries Hyperboliques.



Notions Communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si à des choses égales des choses égales sont ajoutées, les tots sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles
5. Et le tout est plus grand que la partie. $\therefore \mu(A) < \mu(B)$

$$\begin{aligned} a &= b \\ b &= c \\ \therefore a &= c \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} a &= b \\ c &= d \\ \therefore a+c &= b+d \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} a &= b \\ c &= d \\ \therefore a-c &= b-d \end{aligned}$$
$$\square = \square$$
$$A \subseteq B \quad \therefore \mu(A) < \mu(B)$$

Propositions

Au sens «ancien»

Théorème : m.q. cette figure a cette propriété.

$$\sum \angle \text{int } \Delta = \pi$$

Problème : construire une figure ayant cette propriété.

$$\square = \bigcirc ?$$

Au sens «moderne»

Lemme : résultat utile mais peu intéressant.

$$1 + 1 = 2$$

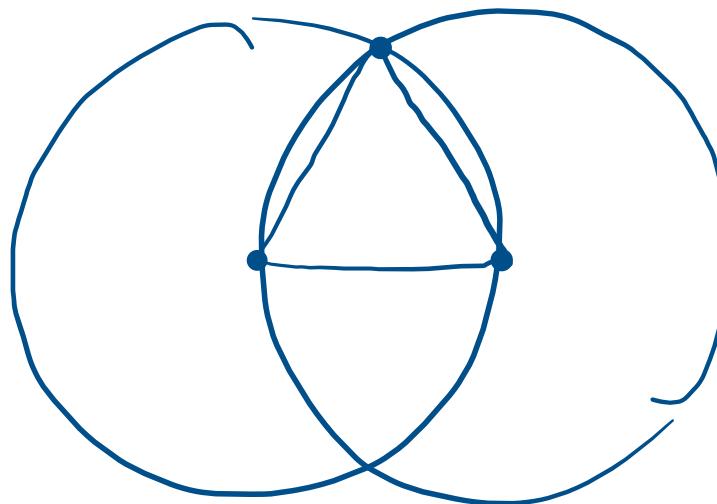
Théorème : résultat théorique d'intérêt.



Propositions

1. De construire un triangle équilatéral sur une droite finie donnée.

...

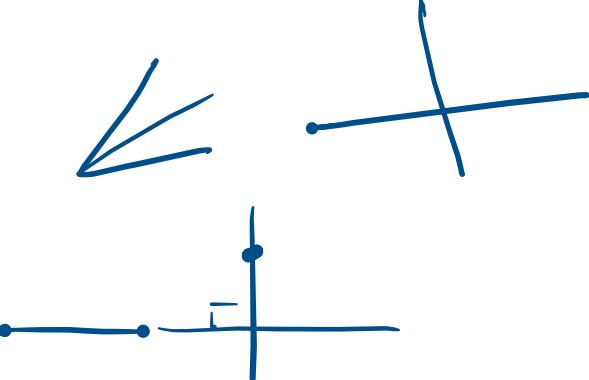


Constructions de base

2, 3 : Déplacer / aligner un segment sur un autre



9, 10 : Bissections d'angles, de segments.

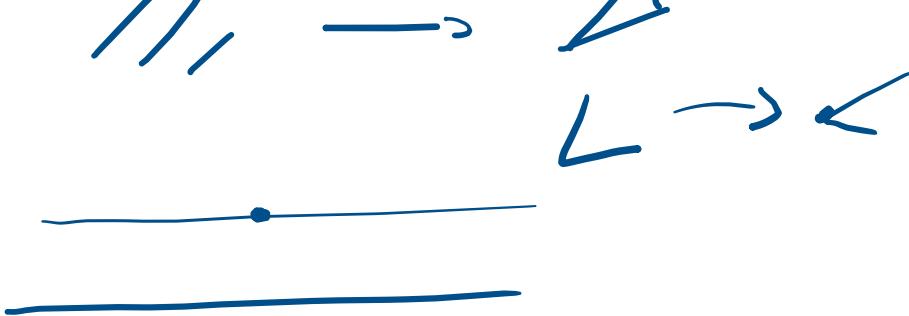


11, 12 : Perpendiculaires

22 : Triangle quelconque à partir des côtés.



23 : Déplacer un angle à un point

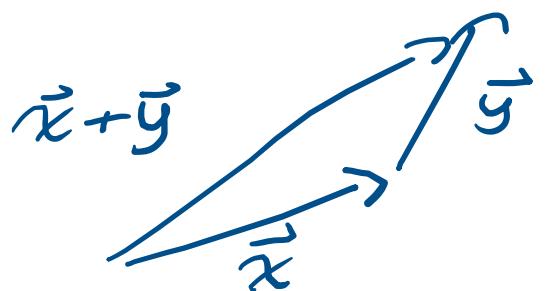


31 : Parallèle par un point.

Propositions d'intérêt.

...

20. Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble de quelque façon que ce soit sont plus grands que le côté restant



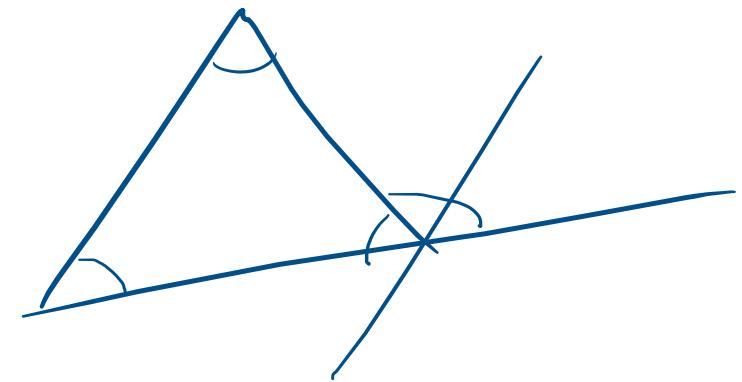
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

C'est l'inégalité du triangle !

Propositions d'intérêt.

...

32. Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits.

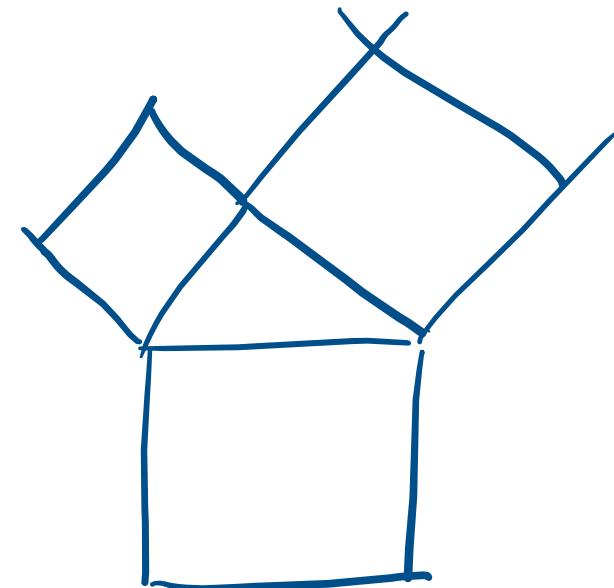


$$\sum \angle_{int} \Delta = \pi$$

Propositions d'intérêt.

• • •

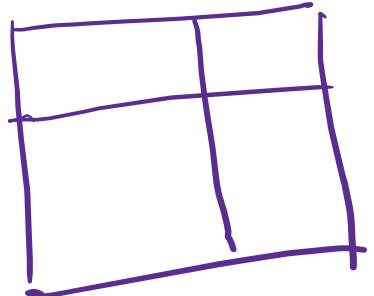
47. Dans les triangles rectangles,
le carré sur le côté sous-tendant
l'angle droit est égal aux carrés
sur les côtés contenant l'angle
droit.



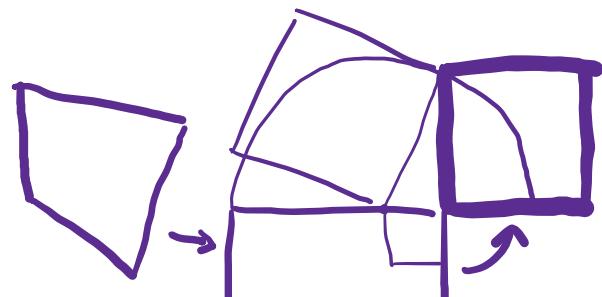
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Livre II

Algèbre Géométrique



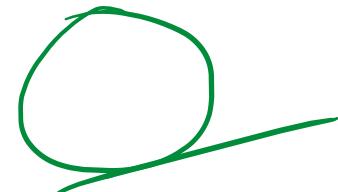
$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$



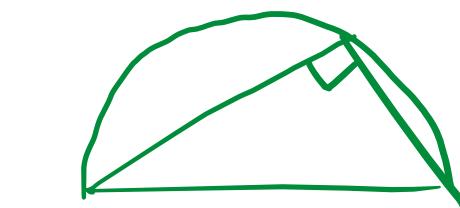
Quadrature des figures

Livre III

Cercles



tangente

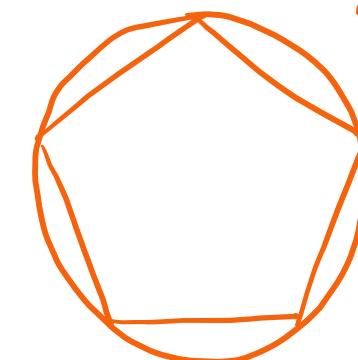


Théorème de Thalès

Livre IV

Inscriptions de figures dans des cercles.

triangle isocèle
avec angle au sommet de $\pi/10$.



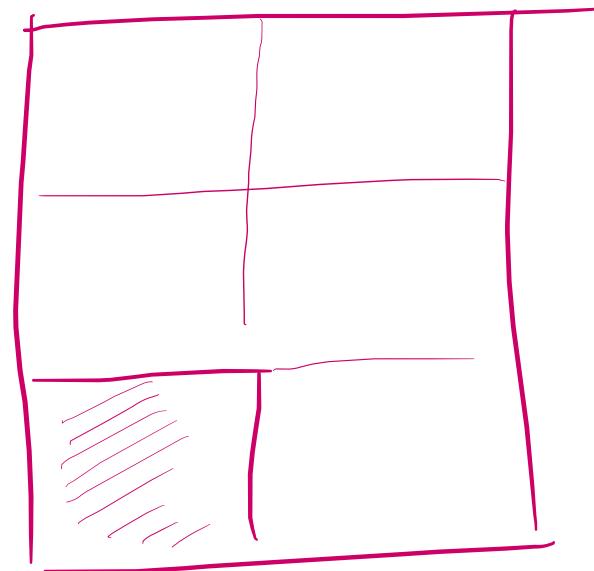
Pentagone régulier.

Livre V

Proportions

Définitions

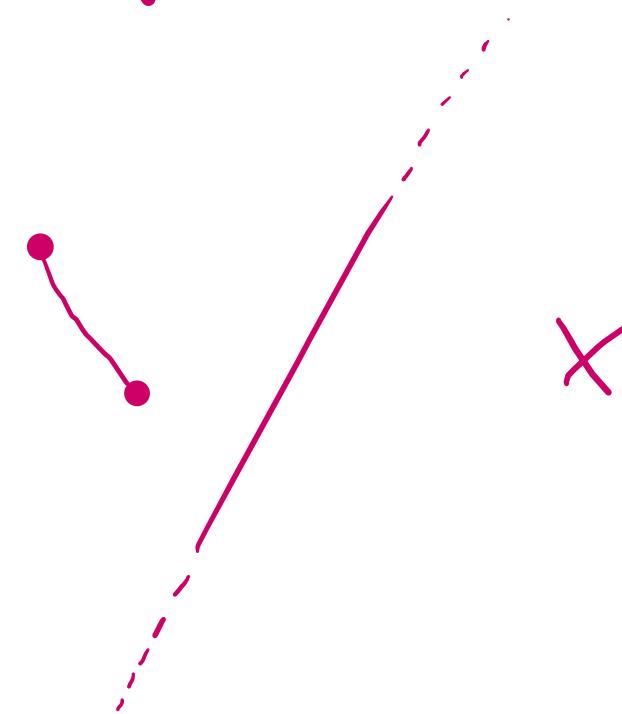
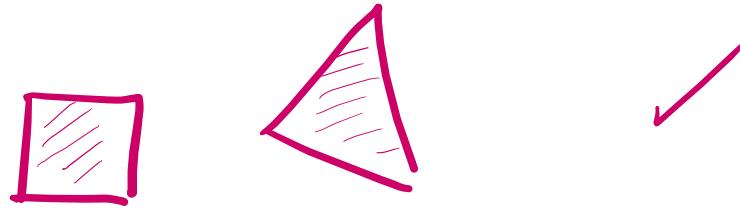
1. Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, lorsqu'elle mesure la plus grande
2. Et multiple la plus grande de la plus petite, lorsqu'elle est mesurée par la plus petite.



Définitions

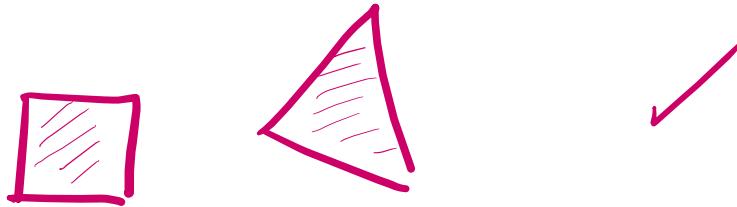
3. Un **rappor**t est la relation telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre grandeurs du même genre.

4. Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

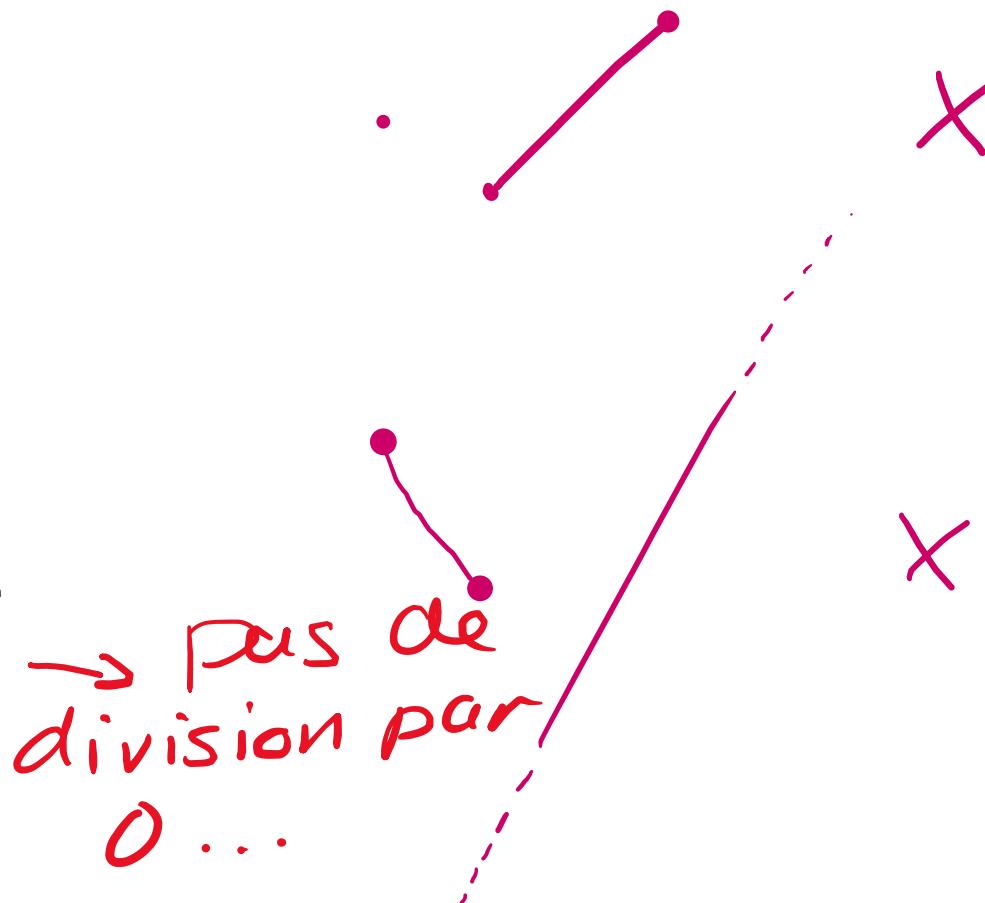


Définitions

3. Un **rappor**t est la relation telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre grandeurs du même genre.

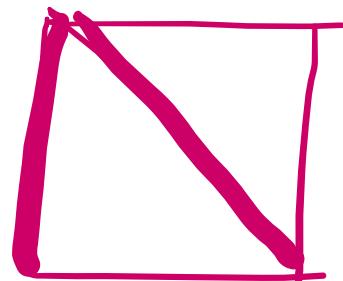


4. Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



Définitions

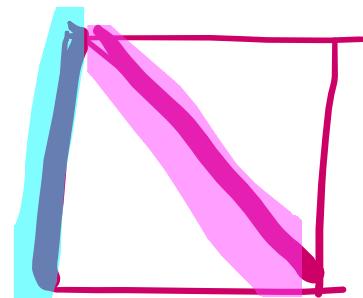
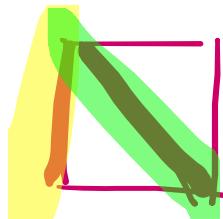
5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport une première à la deuxième et une troisième à la quatrième quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune et pris de manière correspondante.



... Ouf !

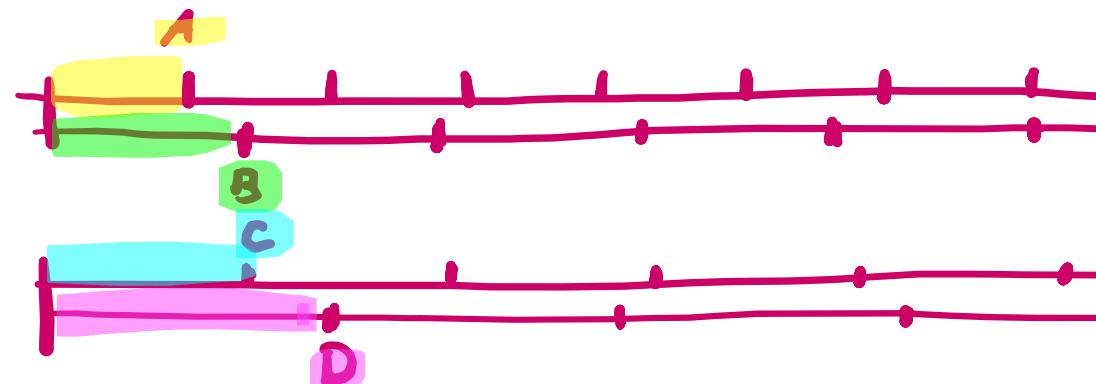
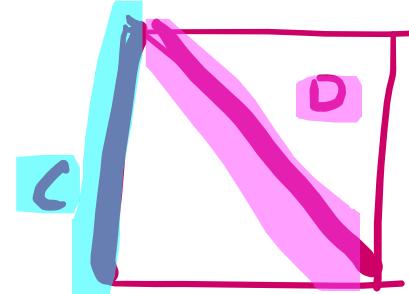
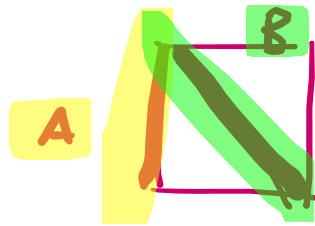
Définitions

5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport une première à la deuxième et une troisième à la quatrième quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune et pris de manière correspondante.



Définitions

5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport une première à la deuxième et une troisième à la quatrième quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune et pris de manière correspondante.



Ici, les équimultiples de A et C dépassent toujours en même temps les équimultiples de C + D.

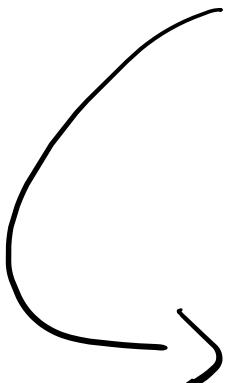
Interlude

Se l'on a déf. 5, $A:B = C:D$ si
pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$mA >_n B \Leftrightarrow mC >_n D$$

$$mA = nB \Leftrightarrow mC = nD$$

$$mA <_n B \Leftrightarrow mC <_n D$$

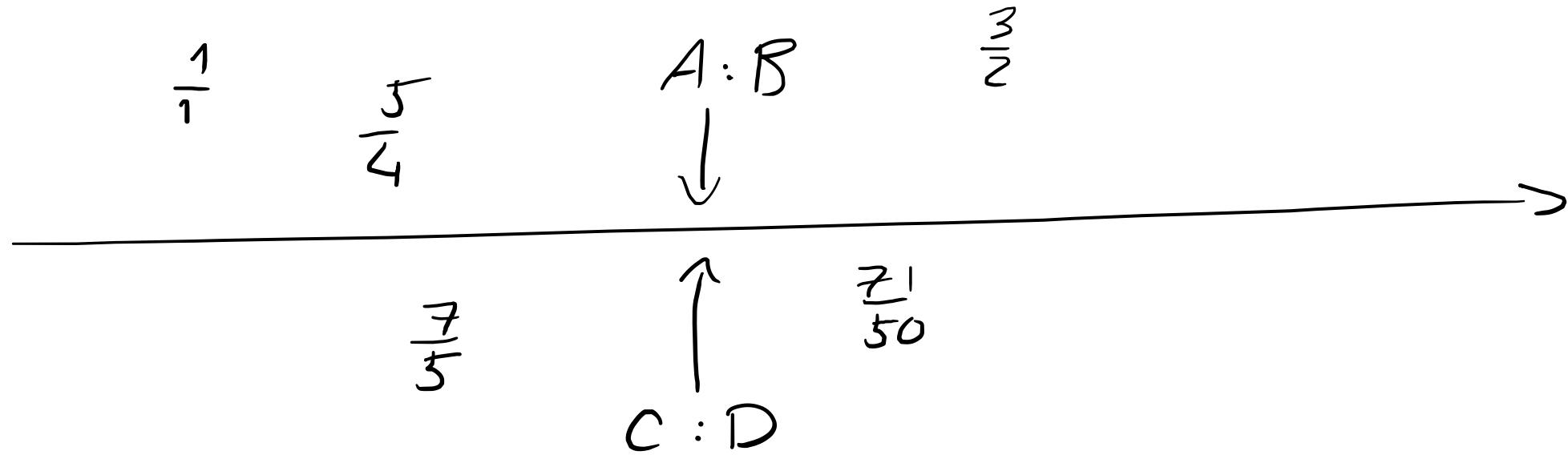


$$\frac{A}{B} > \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{C}{D} > \frac{n}{m}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{C}{D} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{A}{B} < \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{C}{D} < \frac{n}{m}$$

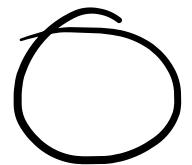
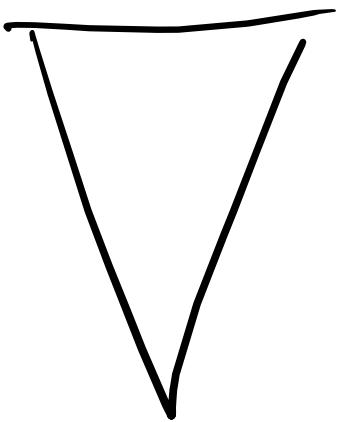
Interlude



$A:B$ et $C:D$ "coupent les rationnels au même endroit".

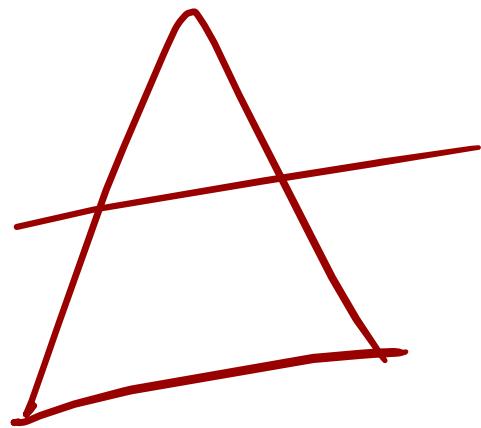
Il y a exactement autant de rapports possibles que de façons de séparer les rationnels...

Interlude

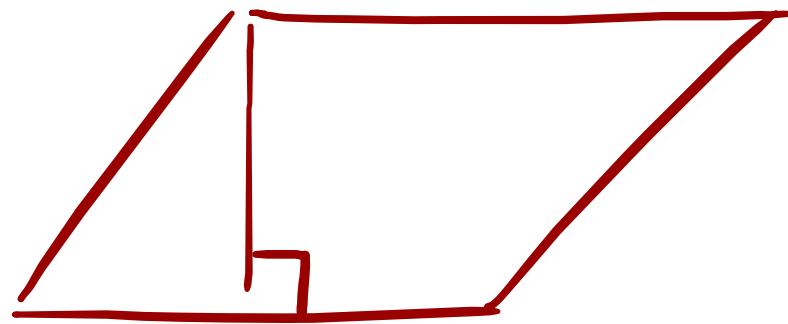


Coupures de
Dedekind
2 100 ans avant?

Livre VII : Les figures semblables.



Théorème
de Thalès



Aire des triangles
et des parallélogrammes
proportionnelles à
leurs hauteurs.

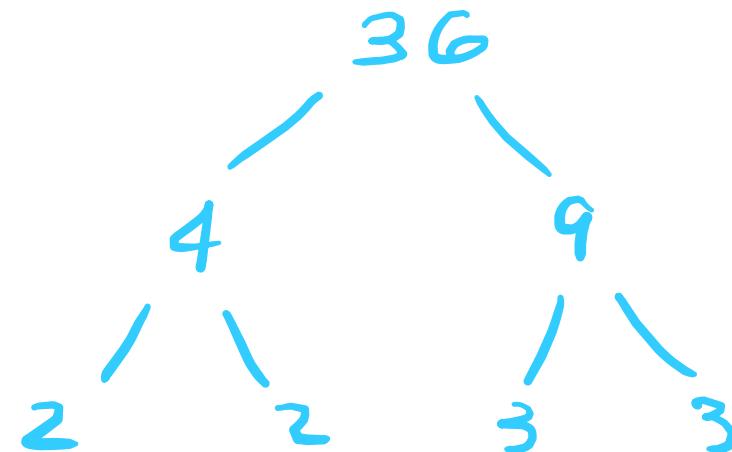
...

Livres VII, VIII, IX

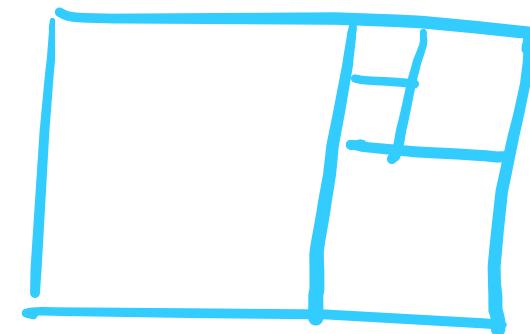
Théorie des nombres.

$$|P| = \infty$$

infinité des
nombres
premiers

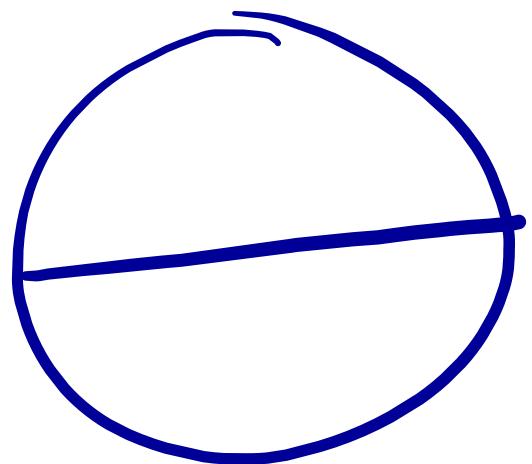
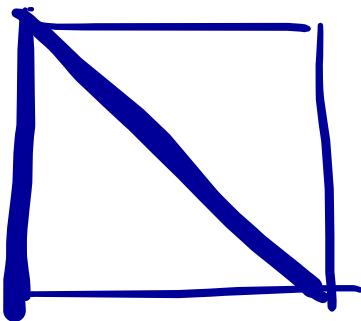


Décomposition en facteurs
premiers.



Algorithme
pour le
PGCD.

Livre X: Incommensurabilité.



+

Plusieurs résultats
de base sur les
"nombres irrationnels"
(grandeurs incommensurables)

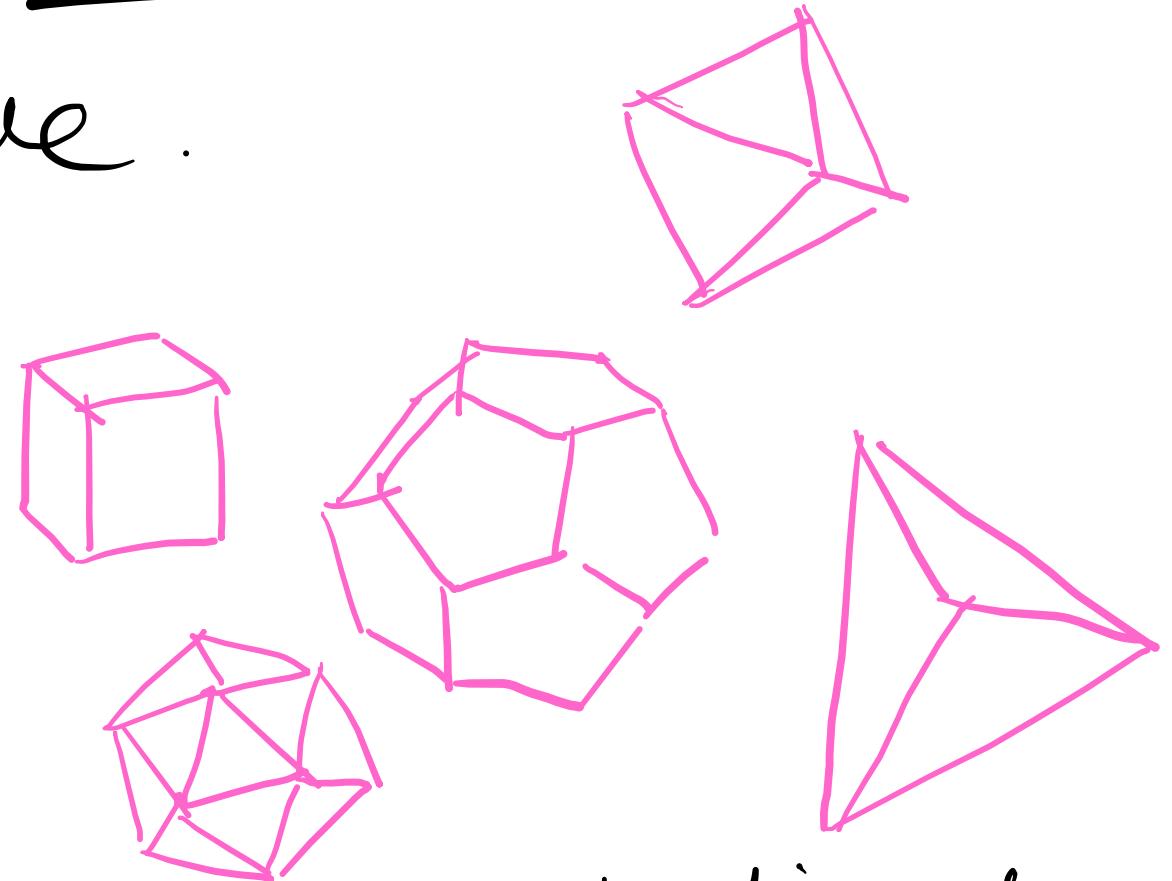
Tentative de classification
des irrationnels.

Livres XI, XII, XIII

Géométrie Solide.



Méthode
d'épuisement
(\hookrightarrow limites ! presque...)

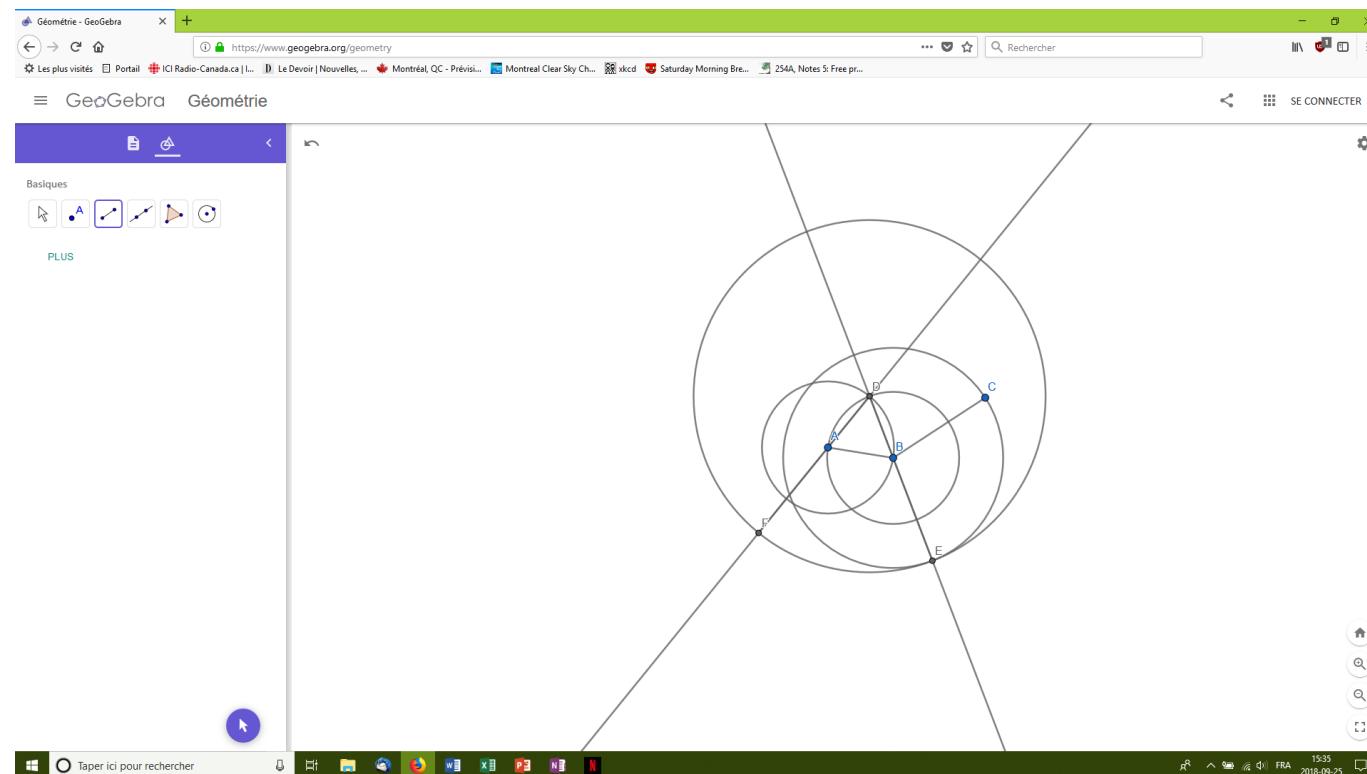


construction des
solides platoniciens

Pour faire les constructions

Crayon, règle, compas, papier...

Ou www.geogebra.org/geometry



Merci d'avoir
écouté !

Bonne fête P-A !