

# INTRODUCTION AUX ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

SÉANCE 4 – GRANDEURS INCOMMENSURABLES, NOMBRES RÉELS, GÉOMÉTRIE SOLIDE

Élise Davignon

[elise.davignon@umontreal.ca](mailto:elise.davignon@umontreal.ca)

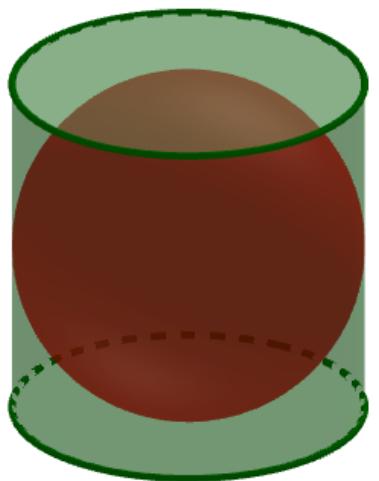
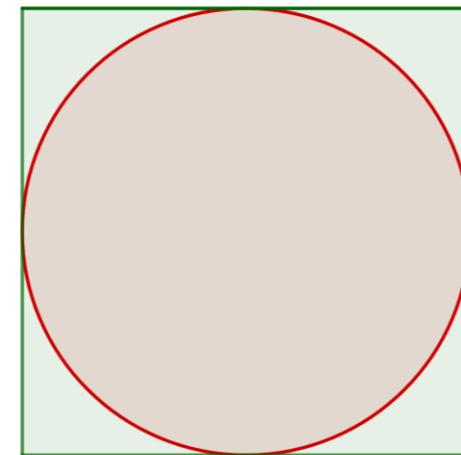
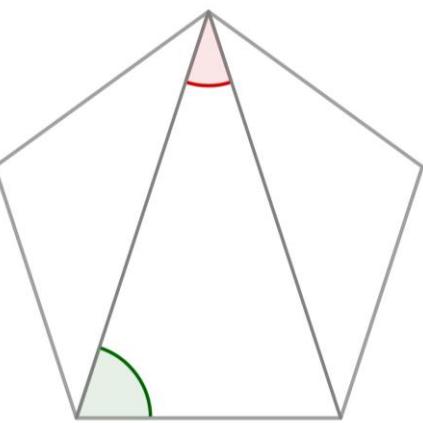
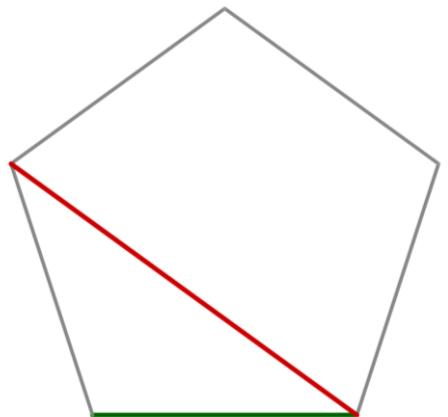
<http://dms.umontreal.ca/~davignon/>

# AU PROGRAMME CE SOIR

- Livres X à XIII dans le relatif désordre.
  - Grandeurs incommensurables (nombres irrationnels);
  - Principe d'exhaustion;
  - Aires, volumes de figures, de solides;
  - Solides platoniciens;
- Questions, discussions, exercices...

# RAPPEL : LES RAPPORTS

Le **rapport** entre deux grandeurs est la « relation entre les deux ».



## RAPPEL : RAPPORTS

On a une notion de **relation d'ordre total** entre les rapports ; si on a deux rapports, soit ils sont égaux, soit l'un est plus grand que l'autre. **Tous les rapports sont comparables entre eux.**



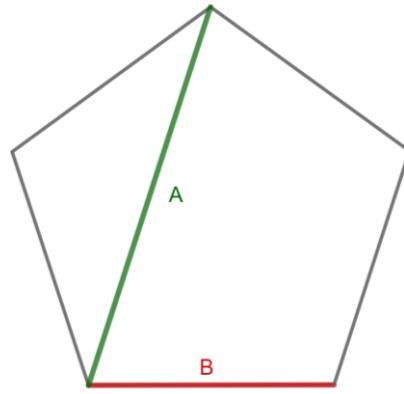
## RAPPEL : RATIOS

La **relation d'ordre** entre deux rapports est définie comme suit :

$$A:B > C:D$$

si et seulement si

pour toute paire de nombres (entiers positifs)  $m, n$  telle que  $mA > nB$   
 $mC \leq nD$ .

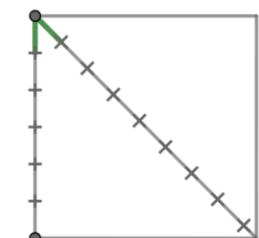
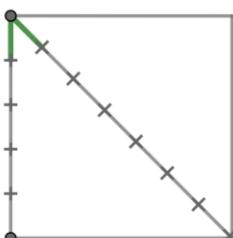
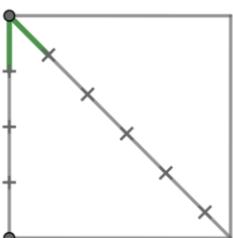
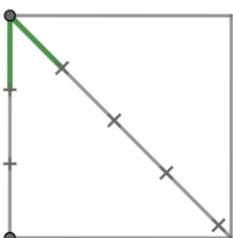
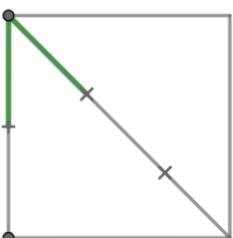
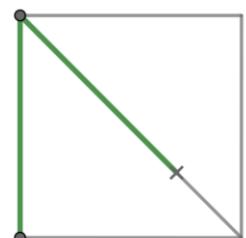


# LES GRANDEURS INCOMMENSURABLES

LIVRE X

# (IN)COMMENSURABILITÉ : DÉFINITIONS

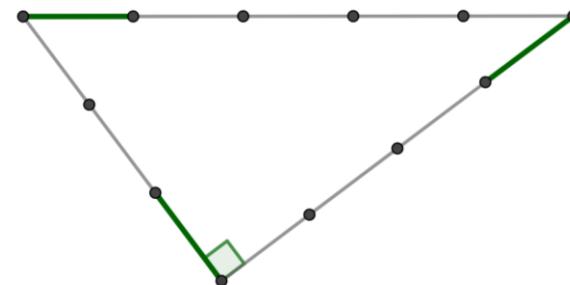
X.I Les grandeurs **commensurables** sont celles qui sont mesurées par la même grandeur, et sont **incommensurables** celles qui n'ont aucune commune mesure.



Ici ça passe proche,  
mais c'est pas tout à  
fait ça!



Le côté d'un carré  
et sa diagonale sont  
incommensurables.



Les trois côtés de ce triangle rectangle sont commensurables.

## RATIONALITÉ D'UN RAPPORT

On dit qu'un rapport entre deux grandeurs est **rationnel** si il est le rapport de deux grandeurs commensurables, **irrationnel** si il est le rapport de deux grandeurs incommensurables.

(À l'époque d'Euclide, la terminologie est différente. Mais notre terminologie moderne est bien meilleure...)

## SUR LE LIVRE X

À l'époque d'Euclide, l'incommensurabilité est mal connue.

Dans le livre X, Euclide fait une classification de différents types de ratios incommensurables; ces distinctions se révèlent plus tard de très peu d'intérêt.

C'est pourquoi malgré qu'il soit le plus volumineux (16 définitions et 115 propositions), on va sauter par-dessus une bonne grosse partie de ce livre.

Plus loin nous aborderons la seule distinction qui soit encore pertinente aujourd'hui : la différence entre ce que l'on appelle les nombres **algébriques** et les nombres **transcendantaux**.

# INCOMMENSURABILITÉ : UN PROBLÈME

Comment savoir si deux grandeurs sont incommensurables



# INCOMMENSURABILITÉ : UN PROBLÈME

(Cette solution est présentée dans les [propositions X.I-3.](#))

Si nos deux grandeurs  $A, B$  sont égales, elles sont commensurables. On suppose donc qu'elles ne sont pas égales, et que  $A < B$ .

On sait que si  $A$  et  $B$  sont commensurables si et seulement si  $A$  et  $B - A$  sont commensurables.

Alors on recommence avec  $A$  et  $B - A$  : on soustrait la plus petite de la plus grande, et ainsi de suite.

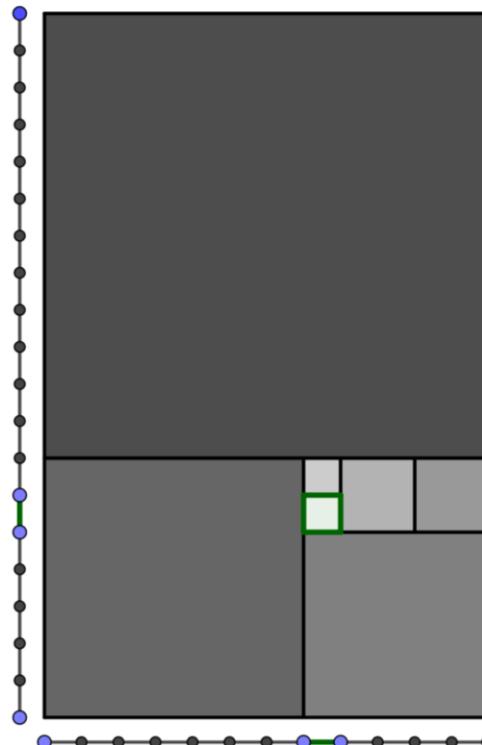
Si on arrive éventuellement à obtenir une égalité, alors les deux grandeurs initiales  $A$  et  $B$  étaient commensurables, et la plus grande commune mesure est celle obtenue à la fin de notre processus.

Si on n'arrive jamais à une égalité, les deux grandeurs initiales  $A$  et  $B$  ne sont pas commensurables.

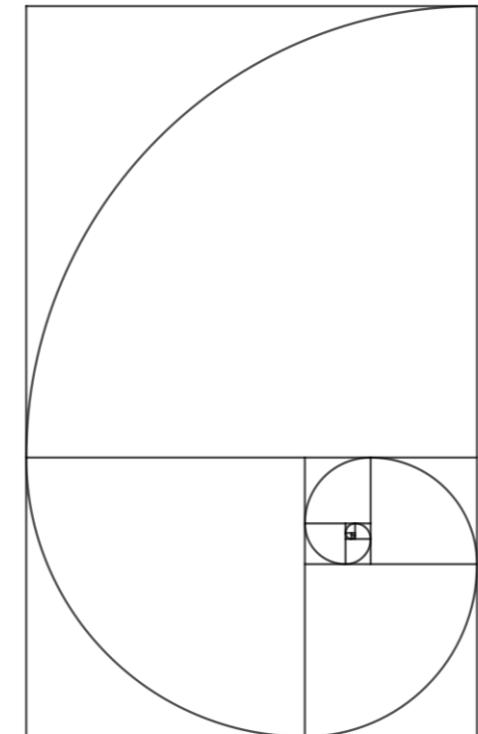
# INCOMMENSURABILITÉ : UN PROBLÈME

Cette procédure est exactement analogue  
**l'algorithme d'Euclide** pour les grandeurs  
« rectilignes » -- celles qui sont des longueurs de  
segments.

Sa formulation plus générale permet toutefois de  
l'appliquer à n'importe quel type de grandeurs.



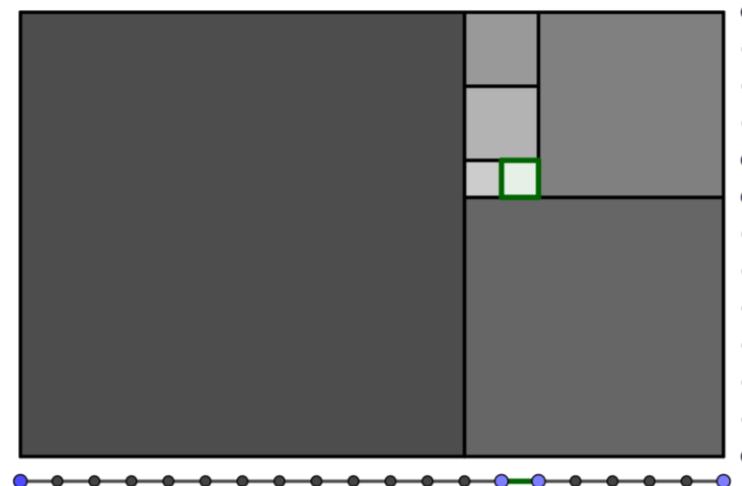
Ici la procédure a terminé;  
Les deux grandeurs étaient  
commensurables.



Ici, les côtés du rectangle sont  
en proportion du nombre d'or.  
La procédure n'arrête donc  
jamais, et les côtés sont  
incommensurables.

# COMMENSURABILITÉ ET NOMBRES ENTIERS

Proposition X.5 Deux grandeurs commensurables sont dans le même rapport que deux entiers.



=

$$\frac{12}{19}$$

# INCOMMENSURABILITÉ ET NOMBRES ENTIERS

**Proposition X.6** Si deux grandeurs sont dans le même rapport que deux entiers, elles sont commensurables.

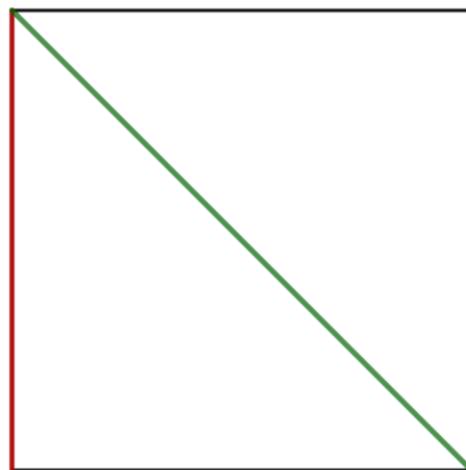
**Proposition X.7** Deux grandeurs incommensurables ne sont pas dans le même rapport que deux entiers.

**Proposition X.8** Si deux grandeurs ne sont pas dans le même rapport que deux entiers, elles sont incommensurables.

Autrement dit, les rapports rationnels sont exactement les rapports entre entiers.

# IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

On n'arrête pas de citer cet exemple :



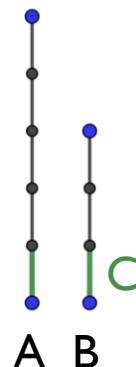
Mais comment fait-on la preuve ?

# IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

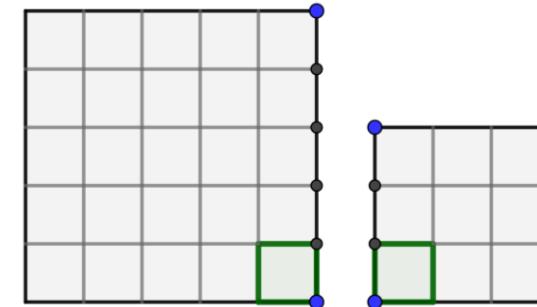
**1<sup>re</sup> étape :** Proposition X.9 Les carrés sur deux droites commensurables ont entre eux le même rapport que deux entiers carrés.

Pour rappel, un entier carré est un nombre entier qui est le carré produit par un nombre entier. Exemple, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, etc.

En effet, si  $A$  et  $B$  sont commensurables, il existe une plus grande mesure commune  $C$ , et des nombres  $m, n$  tels que  $A = mC$  et  $B = nC$ .



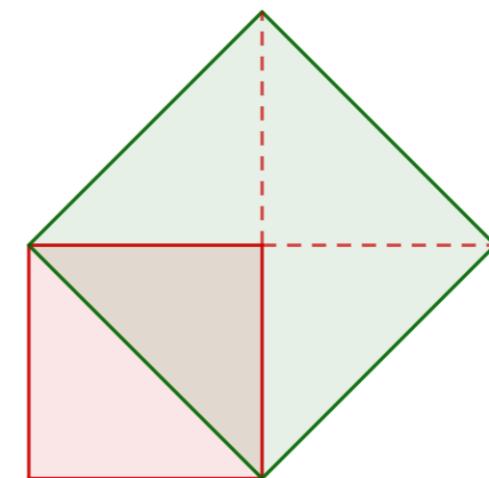
Le carré sur  $A$  sera donc  $m \times m$  fois le carré sur  $C$ , et le carré sur  $B$  sera  $n \times n$  fois le carré sur  $C$ ; leur rapport sera celui de deux nombres entiers carrés.



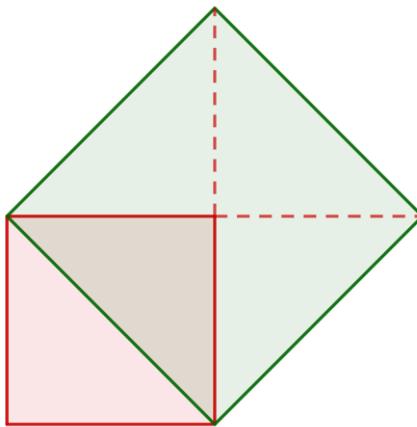
# IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

**2<sup>e</sup> étape :** Le **carré sur la diagonale** d'un **carré** est deux fois plus grand que le carré original.

Facilement vérifiable par des arguments simples...  
Ou avec le théorème de Pythagore (Prop. I.47)



# IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$



Ainsi, le carré sur la diagonale d'un carré est à ce carré dans le même rapport que le nombre 2 est à l'unité.

Mais 2 n'est pas un nombre carré. Par conséquent, il est impossible que la diagonale soit commensurable avec le côté d'un carré. Car si c'était le cas, les carrés correspondants seraient au rapport de deux nombres carrés, et 2 à la fois serait et ne serait pas un nombre carré, ce qui est absurde.

Donc le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables. Ce qu'il fallait démontrer.

## IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$ \*

Il existe une autre preuve qui repose sur le fait suivant :

Tout rapport d'entiers peut être simplifié comme un rapport entre deux entiers dont au moins un est impair.

En effet, deux entiers pairs sont au même rapport que leurs moitiés. Si leurs moitiés sont aussi paires, on divise encore par deux jusqu'à ce qu'un des deux nombres ne soit plus divisible par deux.

Si  $\sqrt{2}$  est exprimé comme le rapport de deux entiers  $p$  et  $q$ , alors on a que

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Et  $p^2 = 2q^2$ , donc  $p^2$  est divisible par 2 et  $p^2$  est pair.

Mais alors  $p$  est pair, puisque **si  $p$  n'est pas divisible par 2, alors  $p^2$  ne le sera pas** (exercice, voir les notes de la séance 3).

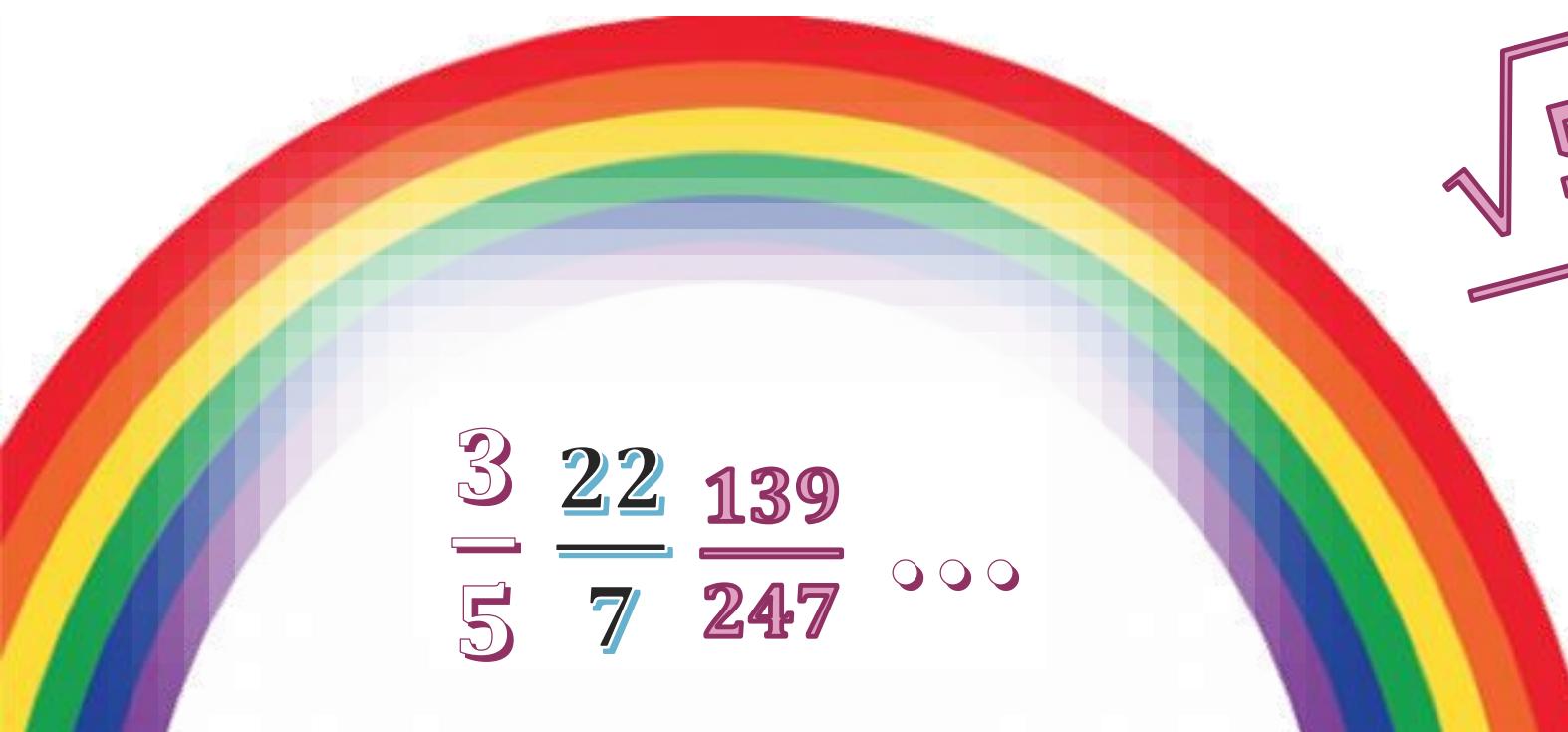
Mais puisque  $p$  est pair, écrivons  $p = 2r$ . Alors,  
 $p^2 = 2q^2 = 4r^2$

Et par conséquent on a que  $q^2 = 2r^2$ , donc que  $q^2$  – et donc  $q$  – est pair !

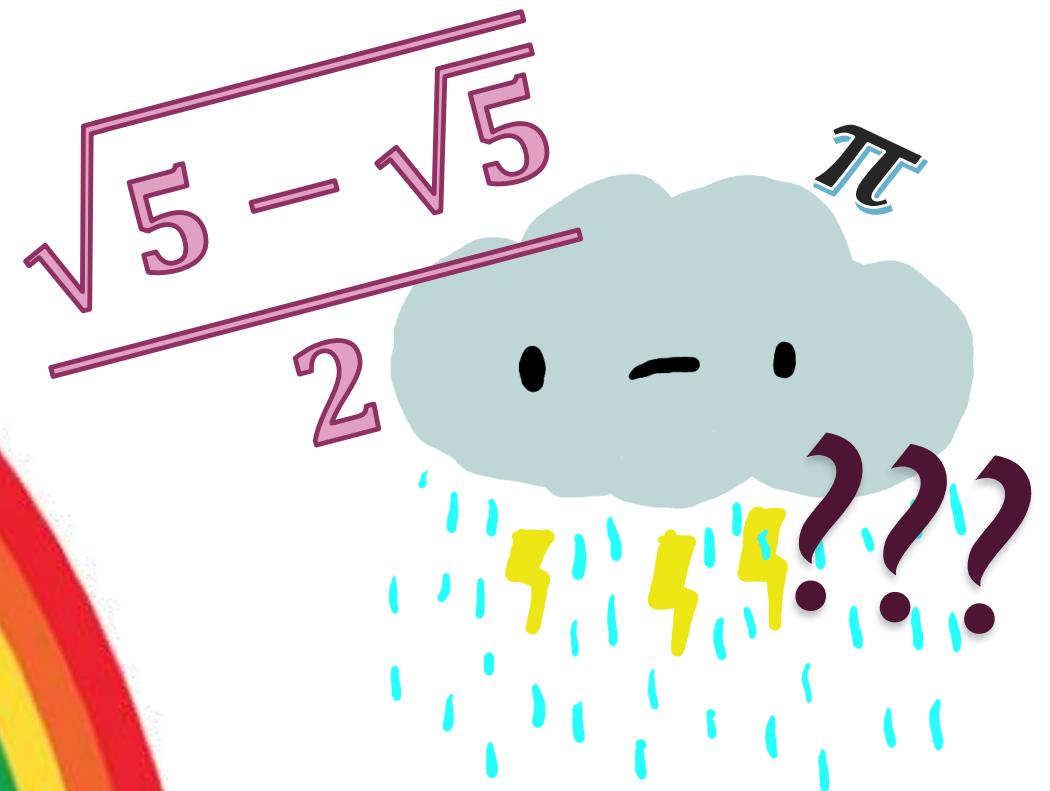
En supposant que  $\sqrt{2}$  pouvait être exprimé comme le rapport entre deux entiers, nous avons montré que ces deux entiers doivent être pairs. L'un d'eux doit être à la fois pair et impair, ce qui est absurde. CQFD.

# UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

Les nombres rationnels sont « beaux », faciles à manipuler.



Les irrationnels, c'est une autre histoire.



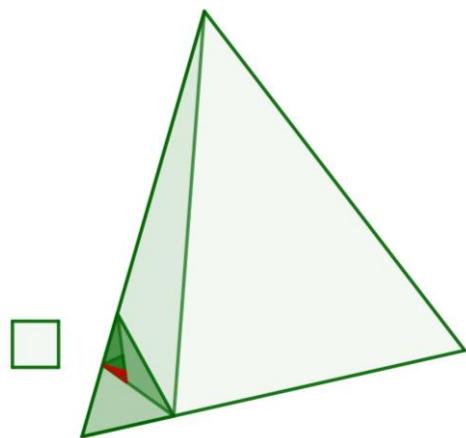
## UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

Question :

« Est-ce qu'on peut se débrouiller quand même avec les nombres rationnels ? »

# UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

**Proposition X.I** Étant données deux grandeurs inégales, si on retranche à la plus grande une quantité supérieur à sa moitié, et au reste une quantité supérieure à la moitié du reste, et ainsi de suite, il restera éventuellement une grandeur inférieure à la plus petite des deux grandeurs initiales.

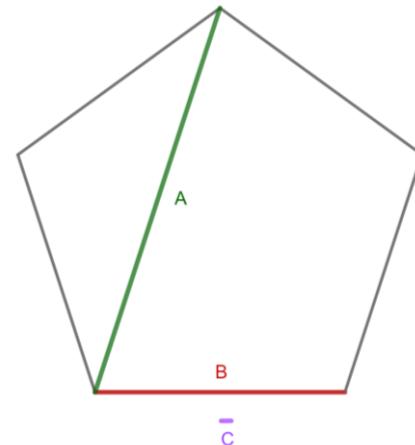


Ici, on a retranché du triangle vert des triangles chaque fois plus grands que la moitié, jusqu'à ce qu'il reste le petit triangle rouge, certainement plus petit que le carré vert.

# UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

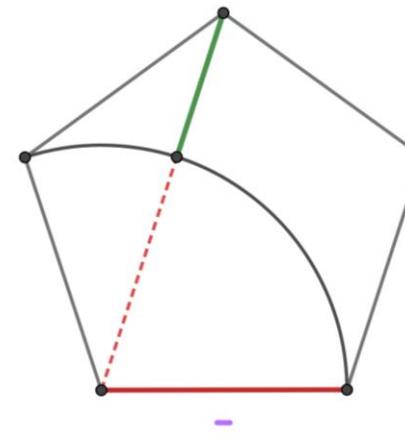
**Proposition :** On peut « approximer » n'importe quelle grandeur par une grandeur qui est dans un rapport rationnel avec une grandeur de référence, et ce avec une précision arbitraire.

Soient **A** la grandeur à approximer, **B** la grandeur de référence, et **C** la grandeur indiquant la précision souhaitée.



(L'objectif est de trouver une grandeur D qui est commensurable avec B, et dont la différence avec A est inférieure à C.)

I) Si B est plus de la moitié de A, on retranche B à A.  
Si B est moins de la moitié de A, on retranche à A un multiple de B supérieur à la moitié de A.

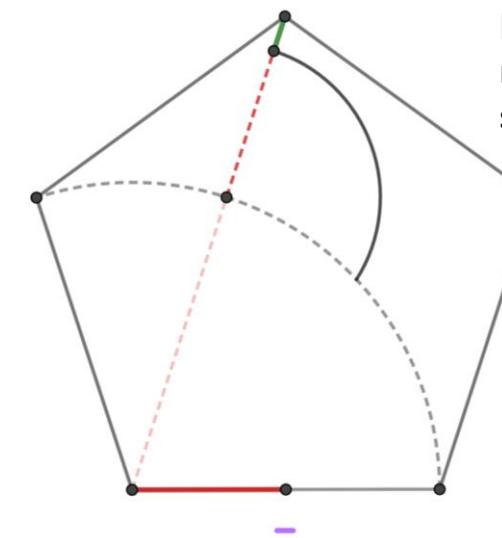


On va additionner les bouts qu'on « retranche », pour faire notre segment commensurable.

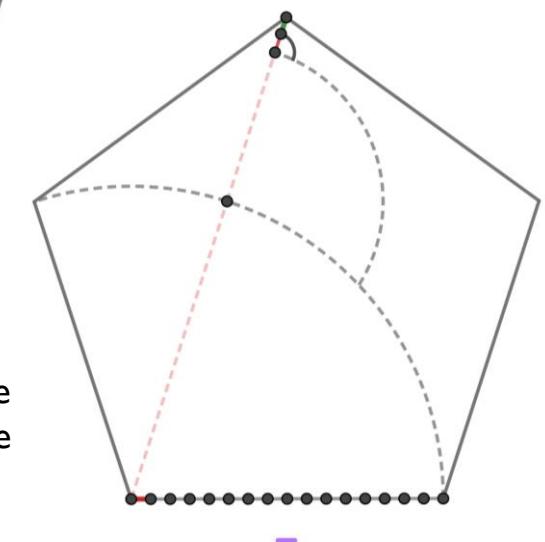
# UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

2) On considère maintenant le **reste**, avec la moitié de B comme **segment de référence**. Si le nouveau **segment de référence** est trop long, on divise encore en deux jusqu'à ce qu'il soit assez court. Le **nouveau segment de référence** sera plus grand que la moitié du **reste**, car sinon il n'aurait pas été nécessaire de le diviser en deux.

3) On retranche le **nouveau segment de référence** au **reste**. On recommence les étapes 2 et 3 tant que notre **reste** est plus grand que C.



Ici on peut directement retrancher la moitié du segment B.



Ici, le quart et le huitième sont trop grands. Il faut le seizième.

# UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

La somme des segments retranchés est commensurable avec le segment de référence initial.

En effet, chaque segment retranché est commensurable avec le segment de référence précédent, puisque c'est soit une partie de ce dernier, soit un multiple de ce dernier.

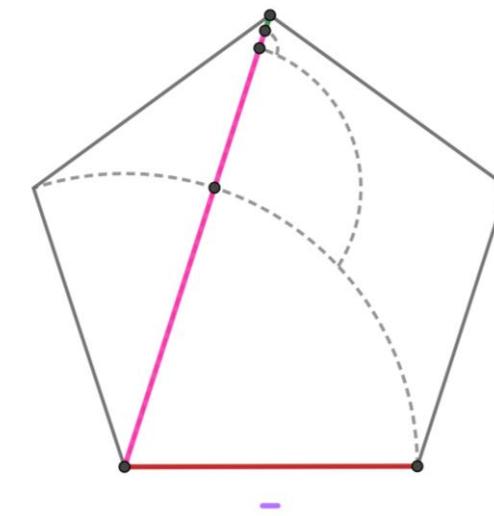
Par conséquent (proposition X.12) chaque segment retranché est commensurable avec **B**, le segment de référence initial.

Mais la somme de segments commensurables avec **B** est aussi commensurable avec **B**.

D'autre part, par le principe d'exhaustion (proposition X.1), nous savons qu'éventuellement, le reste sera plus petit que notre « tolérance à l'erreur », **C**.

On a donc construit un segment qui

- Est commensurable avec **B**
- Est environ égal à notre segment **A**, à une grandeur **C** près.



## UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

Le grand intérêt de cette démonstration, c'est de montrer que

n'importe quel rapport

peut être approximé

avec une précision **complètement arbitraire**

par un

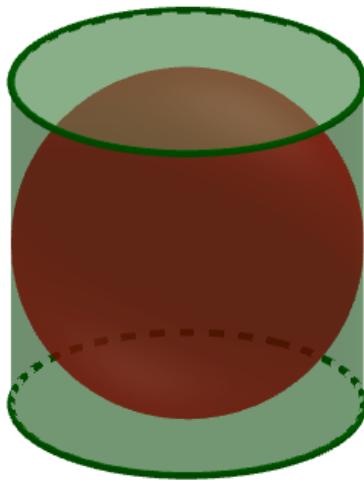
rapport **rationnel**.

## UN PRINCIPE « D'EXHAUSTION »

Autrement dit, nous venons de démontrer que les rapports qu'étudie Euclide, tels qu'il les a définis, correspondent à nos

# nombres réels positifs

Cette preuve ne figure pas dans Euclide. Mais tous les ingrédients y sont.

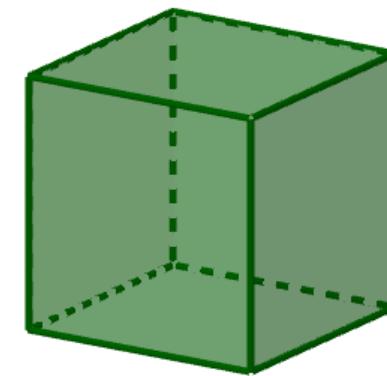


# INTRODUCTION DE LA GÉOMÉTRIE SOLIDE

LIVRE XI

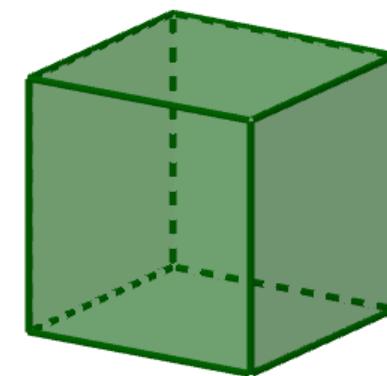
# LIVRE XI – DÉFINITIONS

XI.I Un **solide** est ce qui a longueur, largeur et profondeur.



# LIVRE XI – DÉFINITIONS

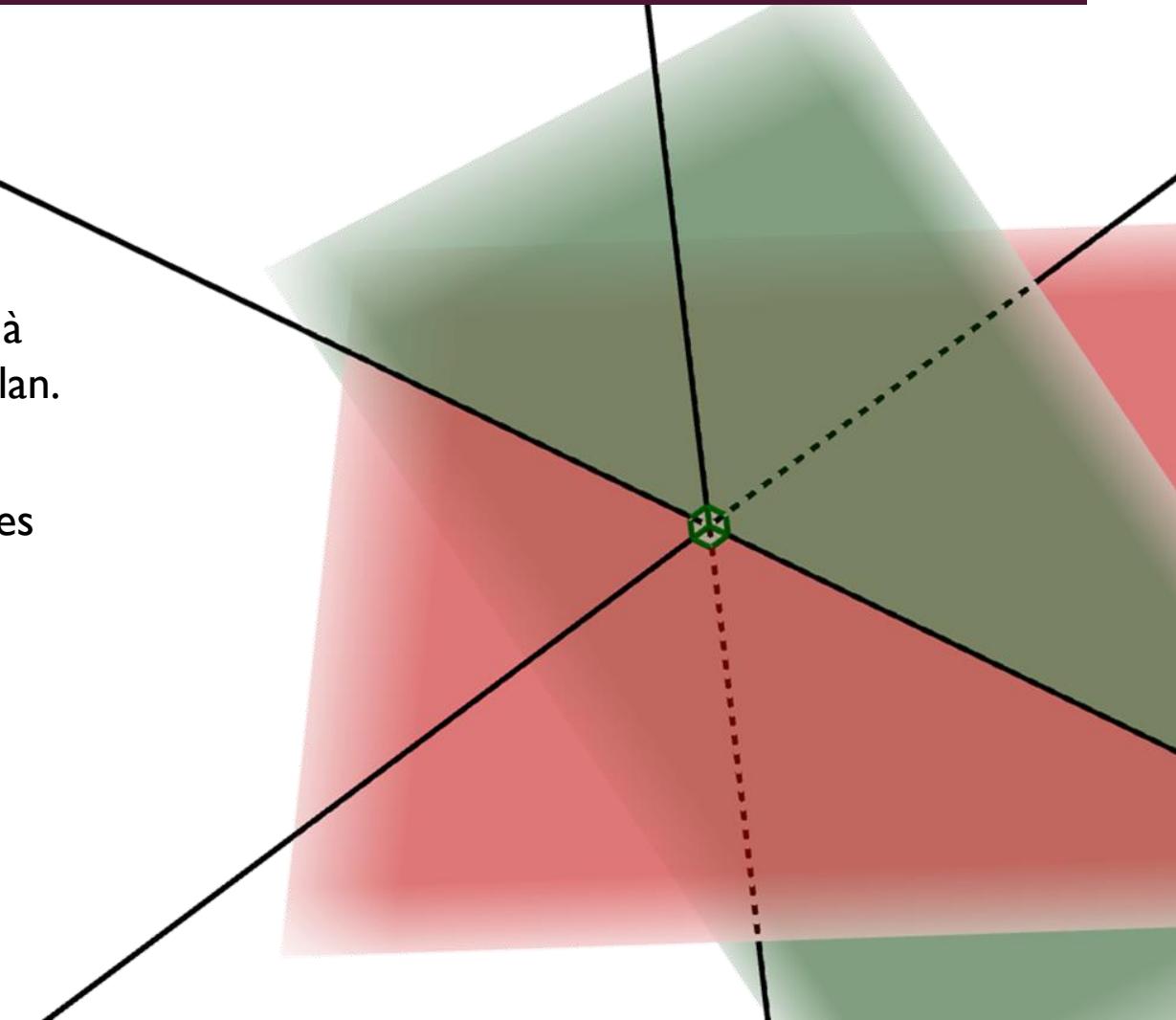
XI.2 Les faces des solides sont des surfaces.



## LIVRE XI – DÉFINITIONS

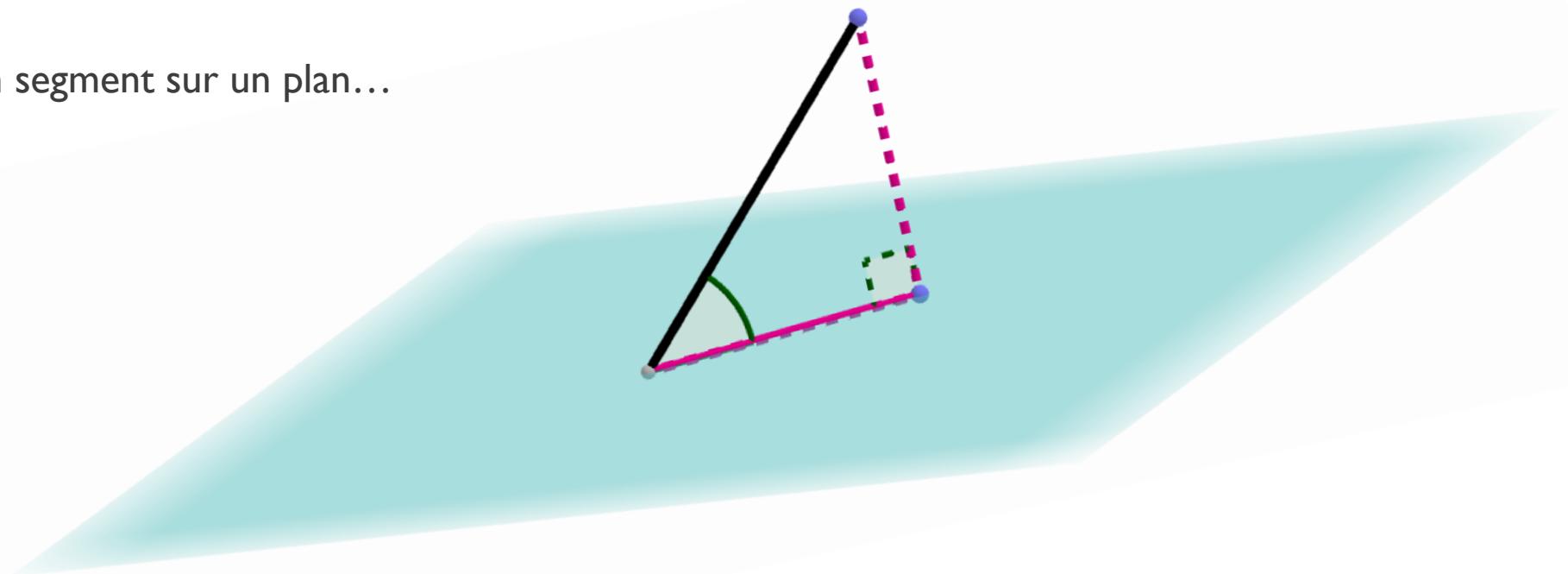
**X.3 Une droite est à angle droit avec un plan** si elle est à angles droits avec toutes les droites menées sur elles par le plan.

**XI.4 Deux plans sont à angles droits** si toutes les droites dans le premier plan menées à angles droits à l'intersection des deux plans sont aussi à angles droits du second plan.



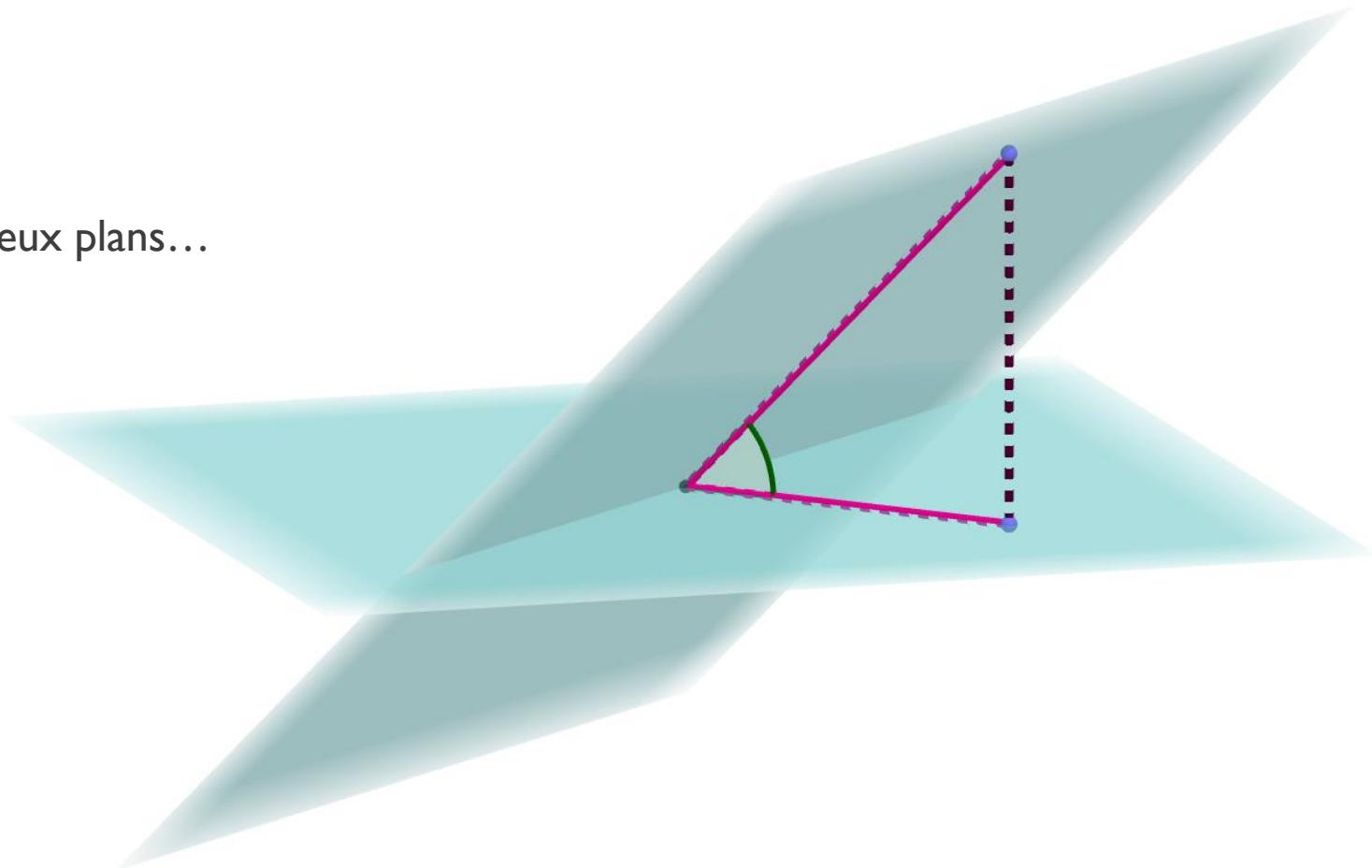
# LIVRE XI – DÉFINITIONS

XI.5 L'inclinaison d'un segment sur un plan...



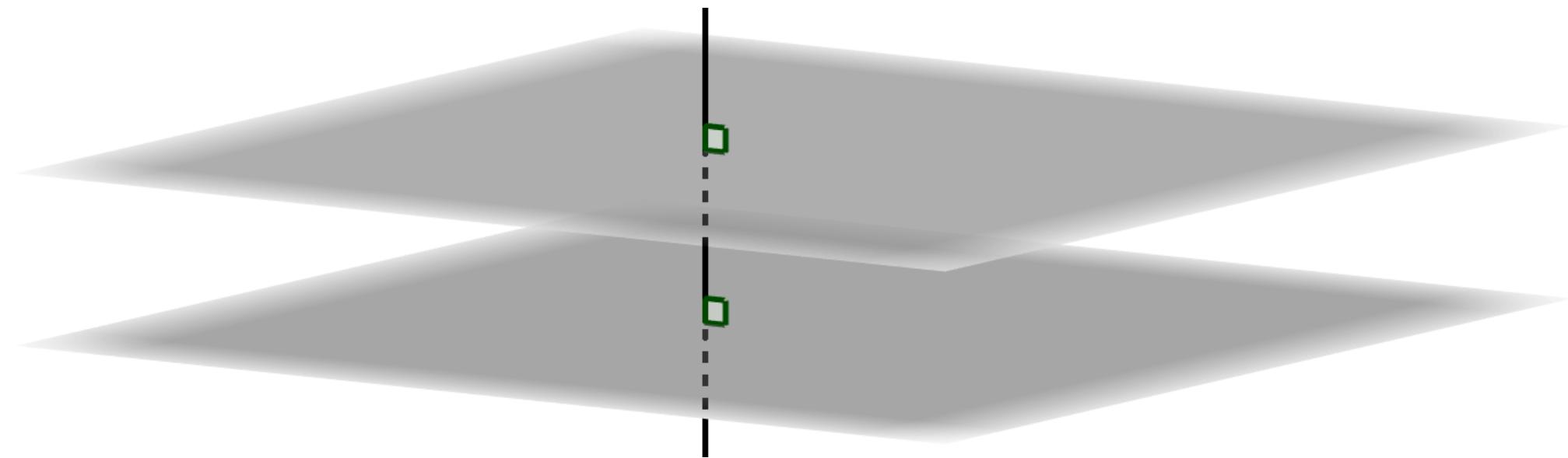
# LIVRE XI – DÉFINITIONS

XI.6 L'inclinaison entre deux plans...



# LIVRE XI – DÉFINITIONS

## XI.8 Des plans parallèles ...

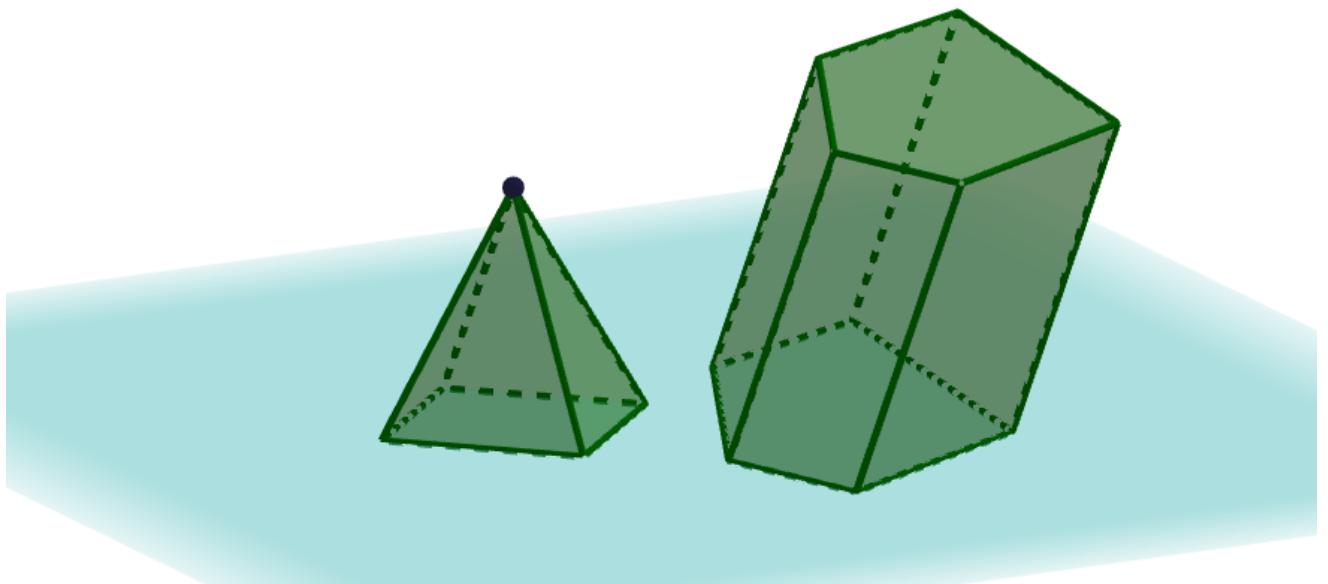


## LIVRE XI – DÉFINITIONS

...

**XI.12** Une **pyramide** est une figure solide contenue par des plans dressée d'une figure plane à un point.

**XI.13** Un **prisme** est une figure solide contenue par des plans, dont deux faces sont égales et parallèles.



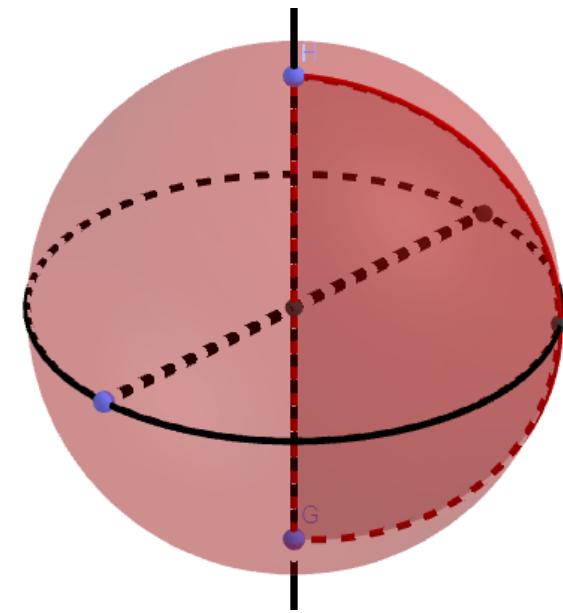
## LIVRE XI – DÉFINITIONS

**XI.14** Lorsqu'un demi-cercle avec un diamètre fixe est conduit autour de son diamètre et mené jusqu'à sa position originale, la figure ainsi décrite est une **sphère**.

**XI.15** L'axe d'une sphère est le diamètre fixe autour duquel le demi-cercle a été conduit.

**XI.16** Et le **centre de la sphère** est le même que celui du demi-cercle.

**XI.17** Un **diamètre d'une sphère** est toute ligne droite conduite à travers la sphère par son centre et contenue par la sphère.

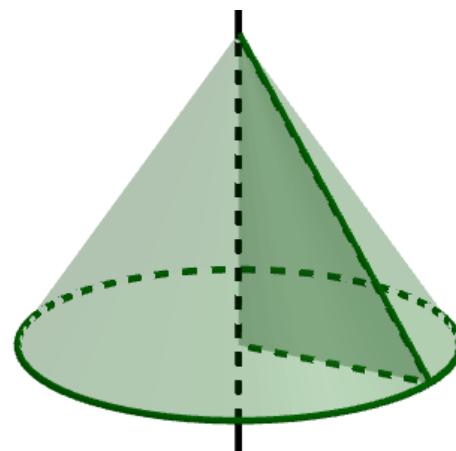


## LIVRE XI – DÉFINITIONS

**XI.18** Lorsqu'un triangle rectangle avec l'un des côtés adjacents à l'angle droit fixé est conduit autour de ce dernier et mené jusqu'à sa position d'origine, la figure ainsi décrite est un **cône** ...

**XI.19** L'**axe du cône** est le côté du triangle qui est demeuré fixe.

**XI.20** Et la **base du cône** est le cercle décrit par le côté qui est conduit autour de l'axe.

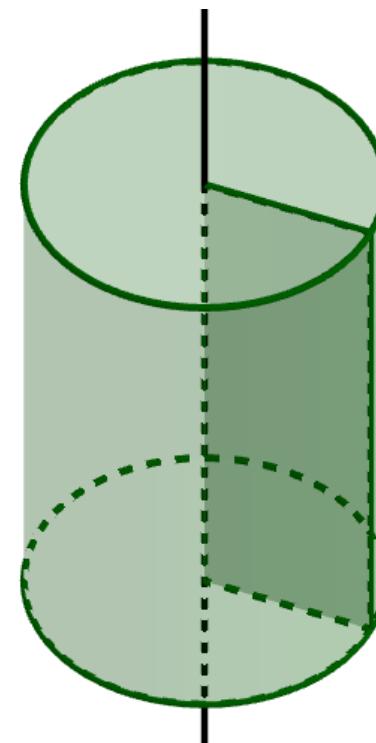


## LIVRE XI – DÉFINITIONS

**XI.21** Lorsqu'un rectangle avec un côté fixé est conduit autour de ce côté et mené jusqu'à sa position d'origine, la figure ainsi décrite est un **cylindre**.

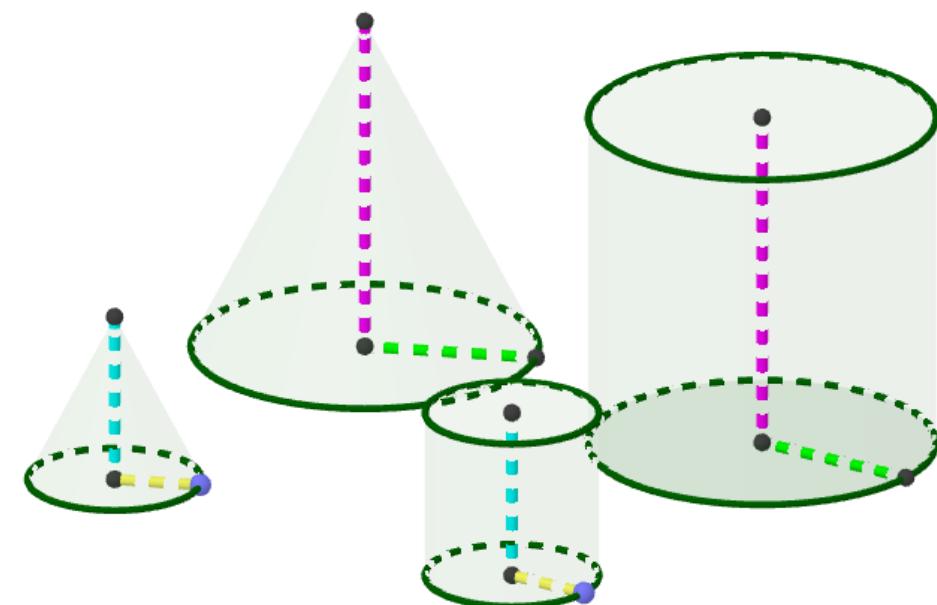
**XI.22** L'**axe du cylindre** est le côté du rectangle demeuré fixe.

**XI.23** Et les **bases du cylindre** sont les cercles décrits par les côtés opposés incidents à l'axe.



## LIVRE XI – DÉFINITIONS

**XI.24 Des cônes et des cylindres semblables** sont ceux dont les axes et les bases sont en proportion.



# LIVRE XI – DÉFINITIONS

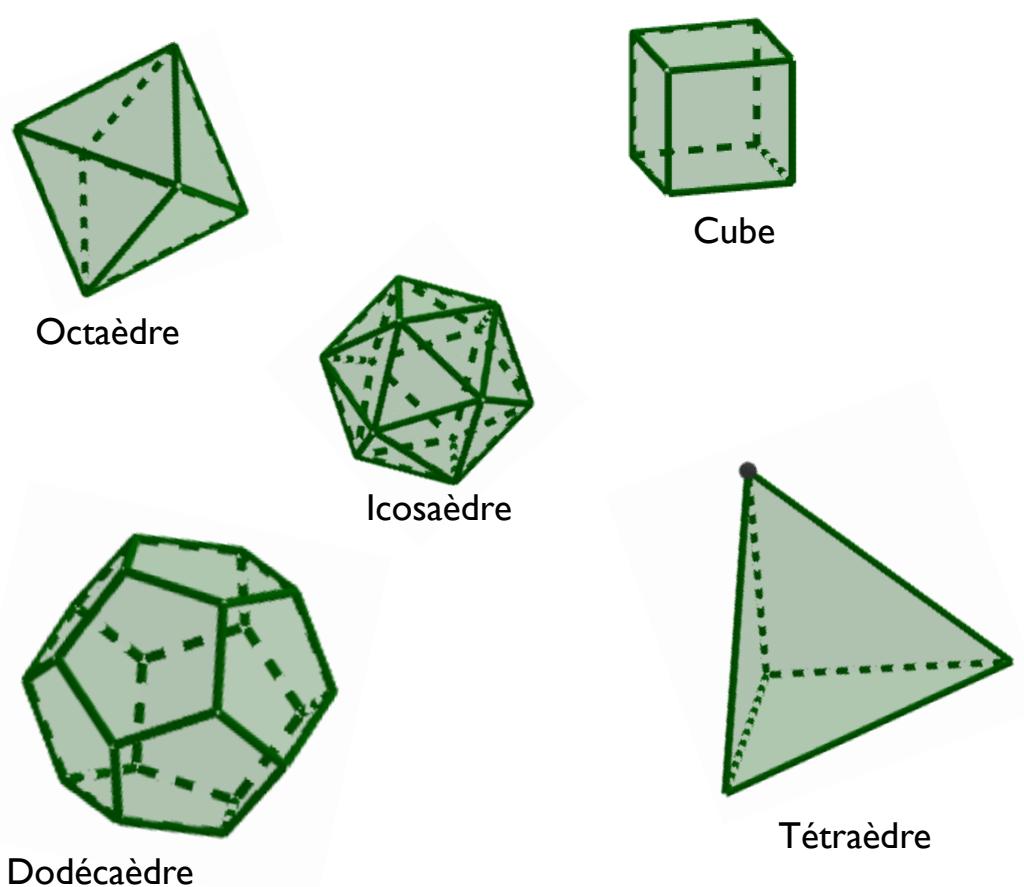
**XI.25** Un **cube** est un solide contenu par six carrés égaux.

(**XI.26'** Un **tétraèdre** est un solide contenu par quatre triangles équilatéraux égaux.)

**XI.26** Un **octaèdre** est un solide contenu par huit triangles équilatéraux égaux.

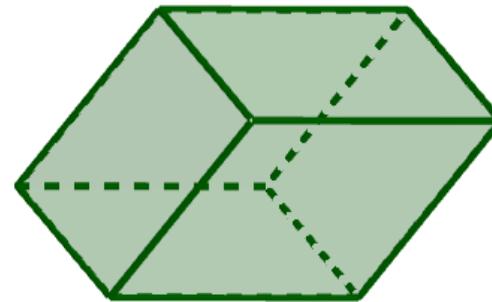
**XI.27** Un **icosaèdre** est un solide contenu par vingt triangle équilatéraux égaux.

**XI.28** Un **dodécaèdre** est un solide contenu par douze pentagones réguliers égaux.



## LIVRE XI – DÉFINITIONS

Un **parallélépipède** est un solide contenue par trois paires de plans parallèles.



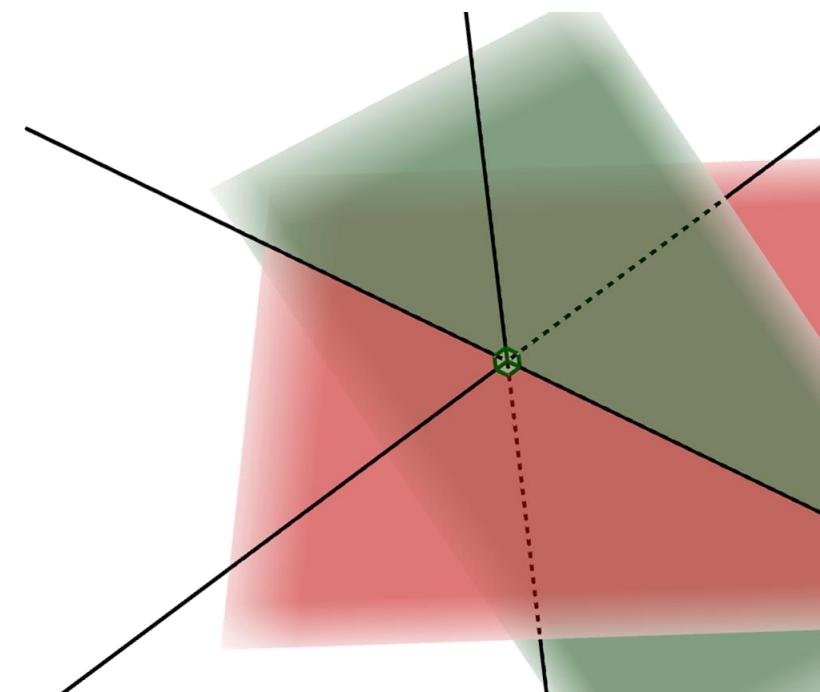
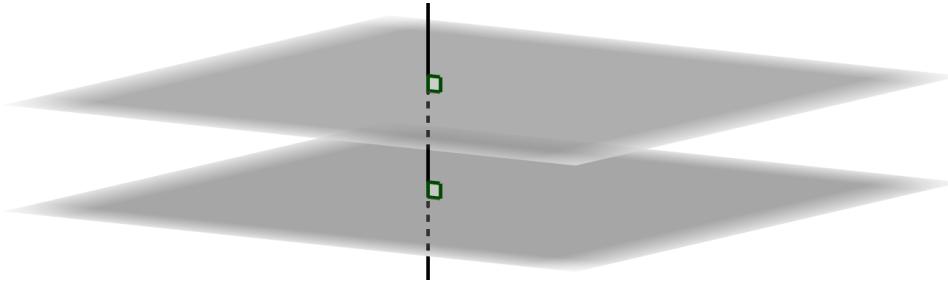
# QUELQUES PROPOSITIONS IMPORTANTES

XI.6 Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles.

XI.14 Deux plans perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

XI.11, XI.12 Construire des droites perpendiculaires à des plans.

...

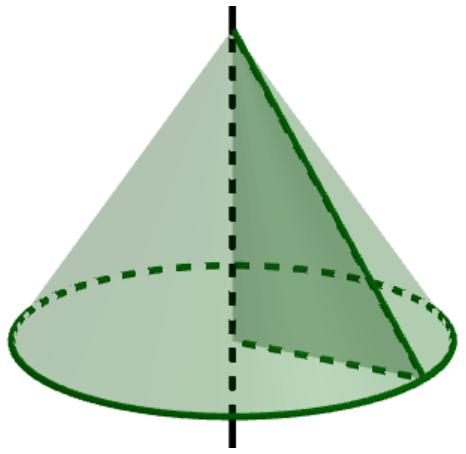


## QUELQUES PROPOSITIONS IMPORTANTES

X.31-34, 39 (essentiellement) Le volume d'un prisme (ou d'un parallélépipède) de base  $B$  et hauteur  $h$  est

$$V = B \times h$$

(ici,  $B$  est l'aire de la base)



$$V = \frac{B \times h}{3}$$

## SURFACE DE FIGURES ET VOLUME DE SOLIDES

LIVRE XII

## SUR LE LIVRE XII

Le livre XII ne contient pas de définitions.

Il contient seulement des théorèmes sur les aires et les volumes de figures complexes.

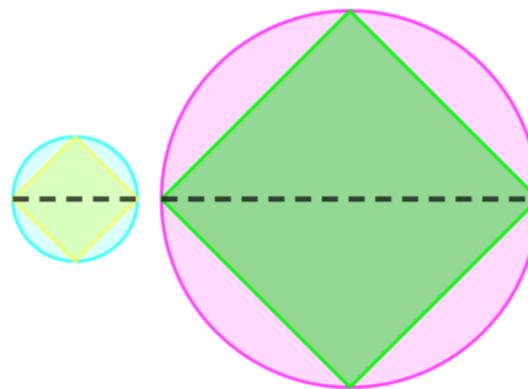
Jusqu'ici, nous avons vu une formule pour l'aire d'un rectangle (ou de n'importe quel parallélogramme), l'aire d'un triangle, et donc l'aire de n'importe quelle figure rectiligne plane.

Le livre XII traite de l'aire de cercles, et de volumes de prismes, de cylindres, de pyramides, de cônes et de sphères. Nous allons voir quelques unes de ces propositions.

# CERCLES ET CARRÉS

XII.1 Les polygones inscrits dans des cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres des cercles.

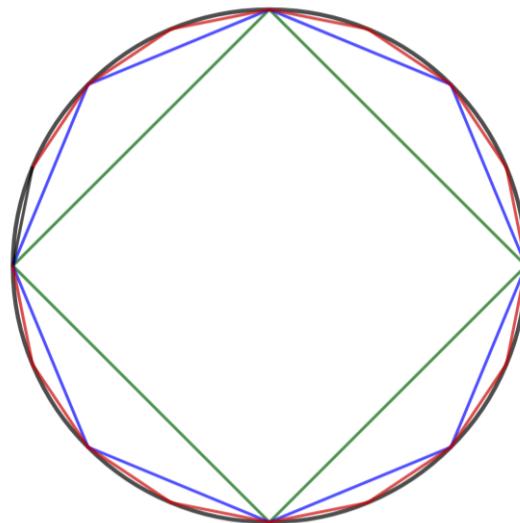
**XII.2 Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.**



## CERCLES ET CARRÉS

Pour prouver ce résultat, on va supposer le contraire : que le rapport d'un cercle à l'autre est plus petit que le rapport d'un carré à l'autre.

Puis, on utilise le principe d'exhaustion ([proposition X.I](#)) pour prouver que cela est impossible. On approxime le cercle par des polygones réguliers inscrits de plus en plus grands, desquels on sait qu'ils sont proportionnels aux carrés des diamètres ([proposition XII.I](#)). On finit par montrer que le rapport entre l'aire des cercles ne peut pas être plus petit que le rapport entre les carrés correspondants.



# CERCLES ET CARRÉS

Nous savons que si  $A:B = C:D$ , et que les grandeurs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont du même genre, on peut tout de suite dire que  $A:C = B:D$  – il s'agit de la règle des proportions alternes ([proposition V.16](#)).

Avec la proposition XII.2, ce que ça nous dit, c'est que **pour tout cercle,**  
**le rapport entre son aire et le carré de son diamètre**  
**est une**

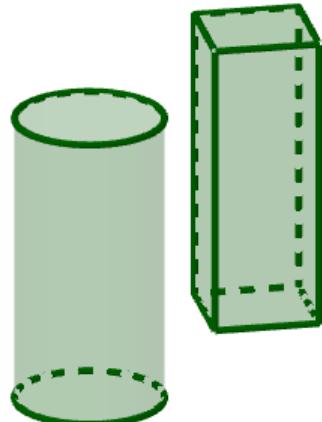
**constante**



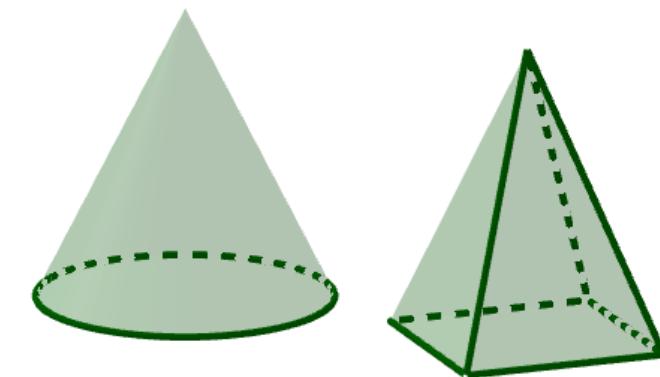
Psssst ! C'est  $\frac{\pi}{4}$  ...

# VOLUME DES SOLIDES

Les propositions du **livre XII** visent pour l'essentiel à montrer ces résultats

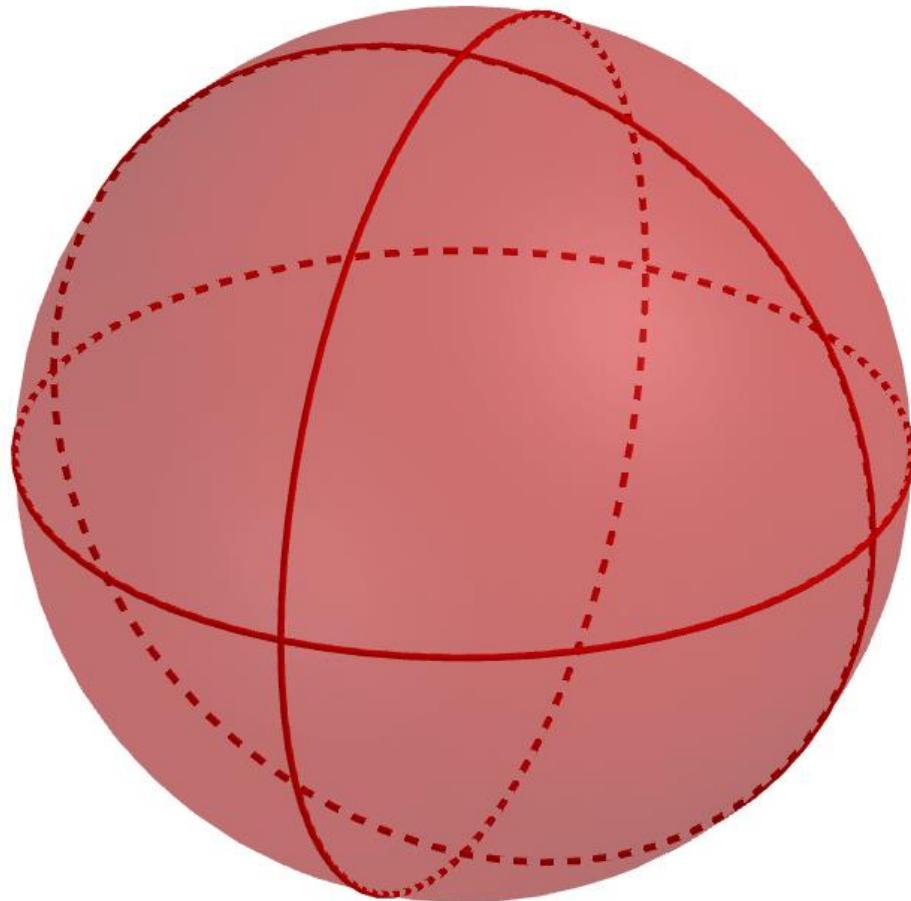


$$V = B \times h$$



$$V = \frac{B \times h}{3}$$

# VOLUME DES SOLIDES



Ici c'est plus difficile – encore une fois, on va obtenir un résultat partiel :

**XII.18** Les sphères sont l'une à l'autre comme les cubes de leurs diamètres (ou en rapport triplé de leurs diamètres).

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la [proposition XII.2](#) pour les cercles : on inscrit des polyèdres avec de plus en plus de faces, et on procède par la méthode d'exhaustion.

Un ensemble de dés souvent utilisés pour des jeux de rôle.  
Trouver les intrus !

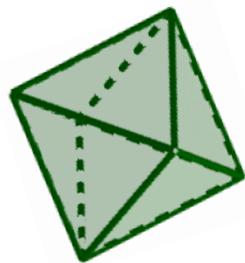


# LES SOLIDES PLATONICIENS

LIVRE XIII

# LES SOLIDES PLATONICIENS

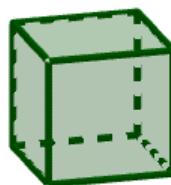
Le **livre XIII** traite presque exclusivement de la construction des cinq solides platoniciens.



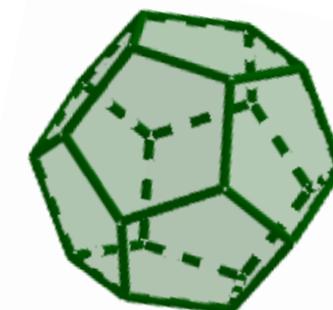
Octaèdre



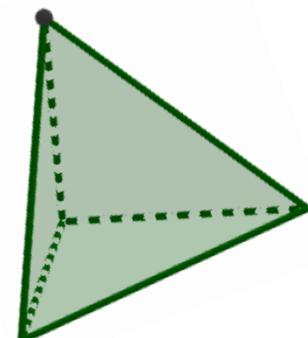
Icosaèdre



Cube



Dodécaèdre



Tétraèdre

## LE NOMBRE D'OR ET LES POLYGONES

En chemin, on passe cependant par de jolis résultats, notamment concernant le nombre d'or, certains polygones réguliers inscrits dans des cercles, etc.

En voici quelques uns rapidement.

# LE NOMBRE D'OR

On rappelle la [définition VI.3](#) :

« Une droite est dite coupée en **extrême et moyenne raison** si la droite entière est à la plus longue portion comme la plus longue portion est à la plus courte. »

Ce rapport unique est aujourd’hui connu sous le nom de nombre d’or, noté  $\phi$ , et il est caractérisé par l’équation

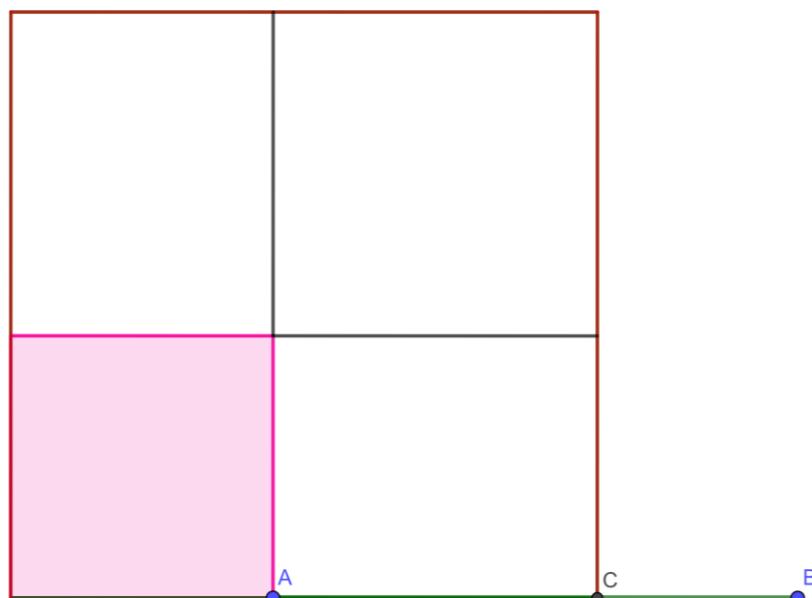
$$\phi = \frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}$$

Ou, avec  $B = 1$  et  $A = \phi$ ,

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

# NOMBRE D'OR ET POLYGONES

XIII. I Si un **segment** est coupé en extrême et moyenne raison, le **carré construit sur la somme de la plus grande portion et de la moitié du segment** est cinq fois comme le **carré sur la moitié du segment**.



Ici le segment AB a été coupé en extrême et moyenne raison au point C.

Cette proposition nous permet de calculer le nombre d'or. Si CB est notre unité, alors AC est de longueur  $\phi$ , et AB est de longueur  $\phi + 1$ . La proposition dit alors

$$\left(\frac{\phi+1}{2} + \phi\right)^2 = 5 \left(\frac{\phi+1}{2}\right)^2$$

En prenant la racine carrée de chaque côté, et en réarrangeant, on obtient

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## NOMBRE D'OR ET POLYGONES

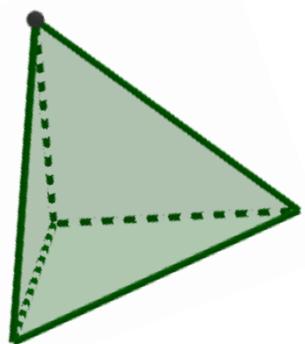
XIII.9 Les côtés d'un hexagone et d'un décagone réguliers inscrits dans le même cercle additionnés ensemble font une droite coupée en extrême et moyenne raison.

Autrement dit, le rapport entre le côté d'un hexagone et celui d'un décagone réguliers dans le même cercle est le nombre d'or.

XIII.10 Si un pentagone, un hexagone et un décagone réguliers sont inscrits dans le même cercle, le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés de l'hexagone et du décagone.  
(Il y a du Pythagore là-dessous).

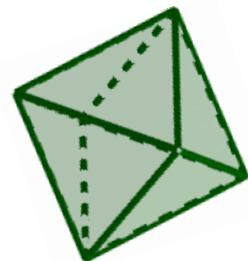
# SOLIDES PLATONICIENS

Le **livre XIII** s'achève avec les constructions des solides platoniciens, et l'expression de proportions. Si les solides sont de côté  $c$ , inscrits dans une sphère de diamètre  $d$ , alors



XIII.13 : **Tétraèdre**

$$d^2 = \frac{3c^2}{2}$$



XIII.14 : **Octaèdre**

$$d^2 = 2c^2$$



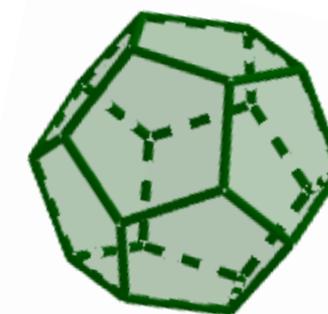
XIII.15 : **Cube**

$$d^2 = 3c^2$$



XIII.16 : **Icosaèdre**

Rapport irrationnel.



XIII.17 : **Dodécaèdre**

Le côté du cube et du dodécaèdre sont dans le rapport du nombre d'or.

XIII.18 : Ces cinq solides sont les seuls solides réguliers possibles.



# QUESTIONS ?

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

# DANS DEUX SEMAINES

**Dernière séance : 20 novembre 2018, à 19h à la Station Ho.st**

La géométrie à vapeur !

Ensembles

Fonctions

Variétés

Topologie

Comment on fait de la géométrie aujourd’hui !

Nous quitterons définitivement les explications plus rigoureuses, afin de se donner une idée très générale des méthodes employées aujourd’hui pour décrire des objets géométriques !