

Université de Montréal

Vieillissement pour la marche aléatoire biaisée sur des  
conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$

par

Élise Davignon

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

15 octobre 2017



# SOMMAIRE

---

Nous nous penchons sur la propriété de vieillissement exhibée par plusieurs modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires qui présentent une dynamique de pièges. Nous faisons en particulier la preuve de telles propriétés pour le modèle de la marche aléatoire biaisée sur des conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ , dans le cas où les conductances sont indépendantes et ont une queue lourde (c'est à dire qu'elles n'ont pas de premier moment). *Mots-clés : Marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA), vieillissement, processus de Lévy, subordonateurs stables, pièges ...*



# SUMMARY

---

We examine the property of ageing exhibited by several models of random walk on random environments that display trapping behavior. In particular we present a proof of such a property for the biased random walk on random conductances in  $\mathbb{Z}^d$ , when the conductances are independant and heavy-tailed (i.e. no first moment). *Key words : Random walks on random environments (RWRE), ageing, Lévy process, stable subordinator, traps ...*



# TABLE DES MATIÈRES

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>Sommaire</b> .....   | iii |
| <b>Summary</b> .....  | v   |
| <b>Liste des figures</b> .....  | xi  |
| <b>Remerciements</b> .....  | 1   |
| <b>Introduction</b> .....   | 3   |
| <b>Chapitre 1. Marches aléatoires en milieux aléatoires et pièges</b> .....       | 5   |
| 1.1. Cadre mathématique général .....   | 5   |
| 1.1.1. Marches aléatoires réversibles et réseaux .....                            | 6   |
| 1.2. Exemples de modèles .....  | 7   |
| 1.2.1. La marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson .....            | 8   |
| 1.2.2. La marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans $\mathbb{Z}$ ..... | 10  |
| 1.3. Pièges et modèle de Bouchaud .....   | 14  |
| 1.3.1. Le modèle de pièges de Bouchaud totalement dirigé .....                    | 14  |
| 1.3.2. Le modèle de Bouchaud biaisé .....   | 16  |
| 1.4. Transience directionnelle et régénération .....                              | 17  |
| 1.4.1. L'indépendance sans la propriété de Markov .....                           | 18  |
| 1.4.2. Dans le modèle de pièges de Bouchaud .....                                 | 19  |
| 1.4.3. Indépendance entre régions de l'environnement .....                        | 20  |
| 1.4.4. Les temps de régénération .....  | 21  |
| 1.4.5. Blocs de régénération .....  | 22  |
| 1.5. Les pièges profonds .....  | 23  |
| 1.5.1. Un seuil de profondeur .....   | 24  |
| 1.5.2. Séparation des pièges .....  | 26  |
| 1.5.3. Temps passé dans les pièges .....  | 26  |
| 1.5.4. Pièges et régénération .....   | 28  |

|   |    |
|---|----|
| <b>Chapitre 2. Le vieillissement</b>  | 31 |
| 2.1. Sommes de variables i.i.d. et lois stables   | 31 |
| 2.1.1. Lois stables   | 32 |
| 2.1.2. Queues à variation régulière   | 33 |
| 2.1.3. Généralisation du théorème de la limite centrale   | 34 |
| 2.2. Processus de Lévy et subordonateurs  | 35 |
| 2.3. Description des subordonateurs   | 36 |
| 2.3.1. Exposants caractéristiques et de Laplace   | 36 |
| 2.3.2. Discontinuités et processus de Poisson   | 36 |
| 2.3.3. Passage de seuils pour les subordonateurs  | 38 |
| 2.4. Lien avec le vieillissement  | 40 |
| 2.5. Un schéma de preuve  | 42 |
| <b>Chapitre 3. La marche aléatoire biaisée sur des conductances aléatoires dans <math>\mathbb{Z}^d</math></b>                               | 43 |
| 3.1. Description du modèle  | 43 |
| 3.2. «Bonnes» et «mauvaises» portions d'environnement   | 44 |
| 3.3. Temps de régénération  | 45 |
| 3.4. Les pièges   | 46 |
| 3.5. Le temps passé dans les pièges   | 48 |
| 3.6. Théorèmes-limites  | 49 |
| 3.7. Localisation   | 51 |
| <b>Chapitre 4. Preuve du vieillissement pour la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires dans <math>\mathbb{Z}^d</math></b> | 53 |
| 4.1. Énoncé du théorème   | 53 |
| 4.2. Résultats préliminaires sur les blocs de régénération  | 54 |
| 4.3. La probabilité que la marche soit dans le même bloc de régénération en $t$ et en $ht$  | 60 |
| 4.4. La distance entre la position de la marche aux temps $t$ et $ht$   | 65 |



|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 4.5. Conclusion de la preuve ..... | 67 |
| <b>Conclusion</b> .....            | 69 |
| <b>Bibliographie</b> .....         | 71 |



# LISTE DES FIGURES

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Arbre de Galton Watson.....   | 8  |
| 1.2 | Conductances pour l'arbre de Galton-Watson.....   | 9  |
| 1.3 | Probabilités de transition pour la marche aléatoire dans l'environnement aléatoire sur $\mathbb{Z}$ ..... | 10 |
| 1.4 | Potentiel pour une marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans $\mathbb{Z}$ .                    | 11 |
| 1.5 | Position en fonction du temps – modèle de Bouchaud totalement dirigé.....                                 | 15 |
| 1.6 | Temps de régénération.....  | 22 |



# REMERCIEMENTS

---

Nous remercions Alexander Fribergh pour sa supervision motivante, ainsi que pour son soutien financier. Nous remercions également le Fonds de Recherche du Québec-Nature et Technologies (FRQ-NT) pour son soutien financier.



# INTRODUCTION

---

Le terme «vieillissement» décrit, en physique statistique, la propension d'un système dynamique désordonné à «ralentir» à mesure que le temps s'écoule. On peut citer en exemples la dynamique de Glauber dans le modèle d'énergie aléatoire (*Random Energy Model*, ou REM), un modèle employé pour décrire l'évolution de verres de spin [5, 6], ou encore le modèle parabolique d'Anderson, dans lequel on cherche à résoudre le problème de Cauchy pour la diffusion de la chaleur dans un potentiel aléatoire [22]. Dans le modèle d'Anderson comme dans le REM, le choix d'un potentiel (ou d'énergies) aléatoires pour différentes configurations du système sert principalement à modéliser le «désordre». Cependant, les processus dynamiques étudiés (la diffusion sur un potentiel, ou l'évolution de la configuration de spins) peuvent eux-mêmes être modélisés par des processus stochastiques.

Les modèles résultants sont des objets avec deux «niveaux d'aléatoire» : d'abord un niveau d'aléatoire servant à modéliser la nature «désordonnée» de l'objet étudié, puis un autre pour modéliser la dynamique étudiée. Ce sont ces idées qui ont conduit à l'étude mathématique d'une vaste classe de modèles appelés «marches aléatoires en milieux aléatoires», souvent inspirés d'ailleurs de la physique statistique. On peut consulter [18, 27] à leur sujet. Comme pour la dynamique de Glauber sur le REM ou le modèle parabolique d'Anderson, plusieurs de ces modèles exhibent la propriété de vieillissement, vraisemblablement propre non pas à la nature des dynamiques étudiées, mais bien au «désordre», à l'irrégularité des environnements dans lesquels ces dynamiques opèrent. En particulier, la présence d'irrégularités extrêmes dans un environnement tend à créer des «pièges» ; ces pièges sont la cause du ralentissement que qualifie le vieillissement.

Nous entamerons le présent mémoire en discutant du lien entre certains modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires avec des modèles de pièges. Cette discussion s'accompagnera de l'introduction et la description plus ou moins précise de plusieurs notions et idées importantes liées en particulier aux marches aléatoires en milieux aléatoires. Nous introduirons également la notion de vieillissement, pour laquelle nous tenterons d'appuyer l'intuition à l'aide d'une discussion sur des processus stochastiques tels que les subordinateurs stables ainsi que les processus ponctuels de Poisson. Nous tâcherons de faire le lien

avec la propriété de vieillissement pour les modèles dont les processus-limites sont des subordonneurs stables. Nous dégagerons de cela les grandes étapes requises pour démontrer le vieillissement dans un contexte relativement général.

Nous passerons ensuite à l'étude approfondie d'un modèle en particulier : celui de la marche aléatoire biaisée sur des conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ . Nous présenterons une description du modèle, puis nous citerons des résultats connus sur ce modèle, avant de procéder à la démonstration du théorème 4.1.1, qui est une propriété de vieillissement pour le modèle, en employant les notions et les concepts introduits précédemment. Nous concluons par une brève discussion de points forts et moins forts de la méthode de preuve employée.



# Chapitre 1

---

## MARCHES ALÉATOIRES EN MILIEUX ALÉATOIRES ET PIÈGES

Le présent mémoire concerne principalement un modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA) ; nous prendrons donc le temps de suggérer un cadre théorique simple qui nous permettra par ailleurs d'illustrer les idées centrales de certaines méthodes appliquées de façons variées à l'étude de tels modèles. Nous introduirons aussi ici le modèle de pièges de Bouchaud [10], un «modèle-jouet» pratique pour l'étude de certains comportements de marches aléatoires sur des milieux aléatoires.

### 1.1. CADRE MATHÉMATIQUE GÉNÉRAL

La marche aléatoire sur un environnement aléatoire est typiquement une construction en deux «temps» : d'abord, on choisit un environnement au hasard ; ensuite, on fait évoluer un «marcheur» dessus.

Nous commencerons par proposer une caractérisation formelle très générale de l'environnement d'une marche aléatoire.

**Définition 1.1.1.** *Soit  $S$  non-vide, et soit  $\mathcal{F}$  une tribu sur  $S$ .*

*Un **environnement** ou **milieu** sur  $S$  est caractérisé par la fonction  $\mu$  où  $\mu : S \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$  est telle que pour tout  $x \in S$ , on ait que  $B \mapsto \mu(x, B)$  soit une mesure de probabilité.*

Ici,  $S$  est l'espace des états. Lorsque  $S$  est dénombrable, on peut choisir la tribu discrète pour  $\mathcal{F}$ . Dans ce cas, si  $x, y \in S$ , et même tout simplement en général, on se permettra l'abus de notation  $\mu(x, y) := \mu(x, \{y\})$ .

Intuitivement, «l'environnement» (que nous dénoterons par  $\omega$ ) est (pour nos besoins) complètement décrit par une famille de mesures de probabilité  $\mu^\omega(x, \cdot)$ . Étant donné  $\omega$ , et un  $x \in S$ , on peut très facilement définir une chaîne de Markov homogène. Par exemple, pour une chaîne de Markov à temps discret, on introduit la mesure de probabilité  $P_x^\omega$  sur les

suites  $(X_i)_{i \geq 0}$ , que l'on définit par les équations suivantes<sup>1</sup> :

$$\forall x, y \in S, B \in \mathcal{F}(S), \quad \mathbb{P}_x^\omega \{X_0 = x\} = 1, \quad \mathbb{P}_x^\omega \{X_{i+1} \in B \mid X_i = y\} = \mu^\omega(y, B)$$

Nous nommerons cette mesure de probabilité la **loi trempée** (*quenched law* en anglais). De façon similaire, pour des chaînes de Markov à temps continu, la famille de mesures  $\mu^\omega$  donnerait plutôt des taux de transition. On noterait de la même façon la loi trempée définie sur l'ensemble des trajectoires  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .

Soit maintenant  $\Omega(S)$  un ensemble d'environnements sur  $S$  et  $\mathbf{P}$  une mesure de probabilités sur  $\Omega(S)$ .  $\mathbf{P}$  est la **loi de l'environnement**, et nous permet de sélectionner aléatoirement un environnement. Une fois celui-ci sélectionné, la loi trempée définie plus haut nous donne directement une chaîne de Markov sur notre environnement. On parvient finalement à obtenir une nouvelle mesure sur les trajectoires (continues ou discrètes) dans  $S$  en définissant

$$\mathbb{P}_x \{ \cdot \} = \mathbf{E} [\mathbb{P}_x^\omega \{ \cdot \}]$$

Nous appellerons  $\mathbb{P}$  la **loi recuite** (*annealed law* en anglais). Sous cette mesure de probabilité, la trajectoire  $X = (X_i)_{i \geq 0}$  (ou  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ) a la loi de ce que nous appellerons une marche aléatoire en milieu aléatoire. (Dans certains contextes, on réfère également parfois à la loi trempée  $\mathbf{P}$  comme la loi d'une marche aléatoire en milieu aléatoire.)

**Remarque 1.1.1.** *Remarquons que, à l'encontre de notre intuition, les définitions que nous employons signifient que la loi trempée d'une marche aléatoire en milieu aléatoire caractérise également l'environnement aléatoire, puisque cette dernière est entièrement déterminée par  $\mu^\omega$ .*

### 1.1.1. Marches aléatoires réversibles et réseaux

Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur des environnements où l'espace des états est discret et où la marche aléatoire résultante (la loi trempée) est dite «réversible».

**Définition 1.1.2.** *Soit  $X_1, X_2, \dots$  une chaîne de Markov sur un ensemble d'états  $S$  dénombrable non-vide et  $P$  la mesure associée. Notons  $p(x, y) := P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\}$  pour toute paire  $x, y \in S$ .*

*Alors, la chaîne de Markov  $X_1, X_2, \dots$  est dite **réversible** si et seulement si il existe une mesure  $\pi$  strictement positive sur  $S$  telle que pour toute paire  $x, y \in S$ ,*

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$$

*(Encore une fois, nous nous permettons le raccourci  $\pi(x) := \pi(\{x\})$ .)*<sup>2</sup>

---

1. Dans tout ce qui suit, chaque fois qu'une mesure de probabilité (notée avec la lettre  $P$ ) apparaît, il sera sous-entendu une intégrale associée à cette mesure, dénotée par la lettre  $E$  avec les mêmes indices et exposants, et imprimé avec la même fonte. (Par exemple,  $E_x^\omega$  est l'espérance associée à  $P_x^\omega$ , etc.)

2. La mesure  $\pi$  est couramment appelée «mesure invariante» en vertu de son interprétation cruciale dans l'étude du comportement asymptotique des chaînes de Markov.

L'avantage provient de «l'isomorphisme» qui existe entre les marches aléatoires réversibles et les réseaux dénombrables localement finis. Avant d'introduire la notion de réseau, rappelons brièvement quelques notations utiles pour décrire les graphes.

Un graphe  $G$  est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble de sommets et  $E$  est un ensemble d'arêtes reliant chacune deux sommets de  $V$ . Pour nos besoins, nous considérerons que  $E \subseteq V \times V$ , et on notera  $e = (x, y)$  pour  $x, y \in V$  lorsque l'ordre importera, et  $xy$  lorsqu'on ne voudra pas distinguer l'ordre. On emploiera l'abus de notation  $xy \in E$  pour signifier  $\{(x, y), (y, x)\} \cap E \neq \emptyset$ , et si  $e = (x, y)$ , on notera définira  $-e = (y, x)$ . On exigera aussi que  $e \in E \Leftrightarrow -e \in E$ . Finalement si  $x, y \in V$ ,  $e \in E$ , on emploiera les raccourcis  $x \sim y$  et  $e \sim x$  (ou  $x \sim e$ ) pour signifier respectivement  $xy \in E$  et  $e \in \{(x, y), (y, x)\}$ .

**Définition 1.1.3.** Un **réseau** est un graphe  $G = (V, E)$  muni d'une fonction positive  $c : E \rightarrow (0, \infty)$  symétrique, au sens où pour tout  $e \in E$ ,  $c(e) = c(-e)$ .

Les valeurs de  $c$  sur les arêtes sont appelées **conductances** en référence à une puissante analogie avec la théorie physique des circuits électriques.

On dira que  $G$  est **localement fini** si  $\sum_{e:e \sim x} c(e) < \infty$  pour tout  $x \in V$ .

Étant donné une marche aléatoire réversible sur  $S$  avec probabilités de transition  $p(x, y)$  et mesure invariante  $\pi(x)$ , on peut créer le graphe  $G$  en choisissant  $V = S$  et  $(x, y) \in E$  si et seulement si  $p(x, y) > 0$ , auquel cas on définira  $c(x, y) = \pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x) = c(y, x)$ .

À l'inverse, si on a un réseau  $G$  dénombrable localement fini, on peut simplement définir  $S = V$  et pour tout  $x \in V$  la mesure invariante  $\pi(x) = \sum_{y:y \sim x} c(x, y)$ . On choisit ensuite les probabilités de transition  $p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}$  lorsque  $x \sim y$  et 0 autrement.

La plupart des modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires discrets sont formulés en termes de réseaux. La raison principale de ce choix est que cette formulation met en évidence l'analogie mentionnée plus haut avec les circuits électriques, ce qui permet de transférer beaucoup d'outils utiles d'un domaine à l'autre. (Pour plus de détails sur cette analogie étonnamment profonde, consulter l'ouvrage de Lyons et Peres [21].) En outre, la formulation est très flexible, ce qui permet de construire facilement plusieurs lois d'environnement aléatoires. Par exemple, on peut sélectionner un graphe aléatoire et mettre toutes les conductances à 1. On peut à l'inverse choisir un graphe déterminé, puis des conductances aléatoires. Ou on peut faire les deux à la fois...

## 1.2. EXEMPLES DE MODÈLES

Nous prendrons le temps de décrire ici quelques modèles en citant à l'occasion certaines propriétés remarquables ou d'intérêt, surtout dans le but de souligner les traits communs et les différents points de comparaison qui nous ont conduits aux définitions générales que nous avons proposées plus haut. Les descriptions qui suivent seront essentiellement qualitatives.

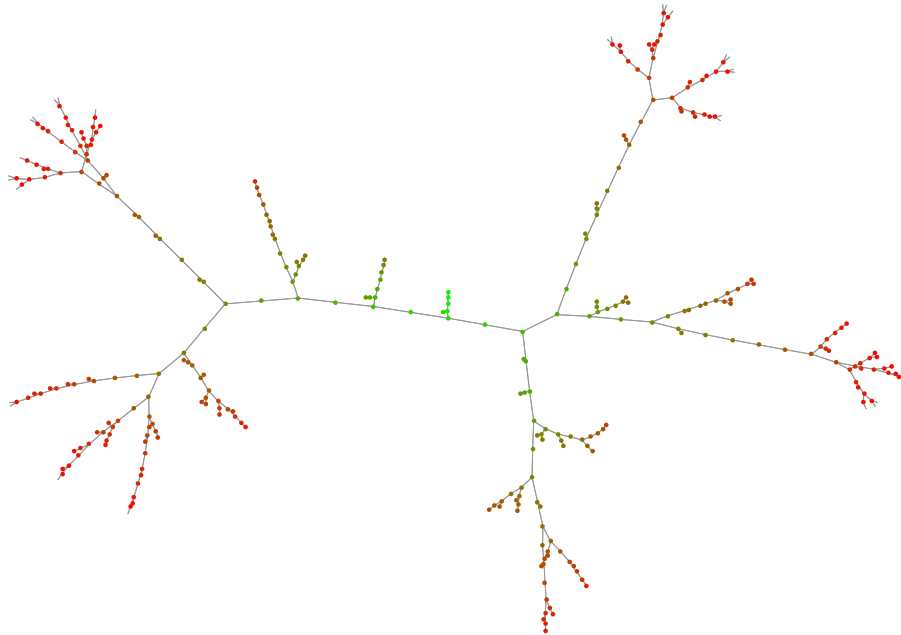


FIGURE 1.1. Un arbre de Galton-Watson

### 1.2.1. La marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Plus complexe que la marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , mais beaucoup moins que la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}^d$ , la marche aléatoire sur l'arbre aléatoire de Galton-Watson est un bon compromis pour apprivoiser les marches aléatoires en milieux aléatoires les moins triviales. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ce modèle a obtenu beaucoup d'attention. Pour une discussion détaillée, consulter [1, 2, 8].

Les arbres de Galton-Watson sont à l'origine une façon de modéliser la descendance. Considérons un individu qui aurait un nombre aléatoire d'enfants, qui à leur tour auraient chacun-e un nombre aléatoire d'enfants, et ainsi de suite. Si chaque individu est représenté par un sommet, relié au sommet de son parent par une arête, on obtient un arbre aléatoire. Si les nombres d'enfants engendrés par chaque individu sont indépendants et identiquement distribués, il s'agit d'un arbre de Galton-Watson. La figure 1.1 montre une réalisation d'un tel arbre, où chaque individu avait 30% de chances respectivement d'avoir aucun ou un enfant, et 40 % de chances d'en avoir deux. Nous n'avons conservé que les sommets des quelques vingt premières générations, en prenant le soin de laisser des arêtes accrochées à ces derniers sommets qui auraient eu des enfants dans la 21e génération, et nous avons coloré les sommets pour refléter la génération de laquelle ils sont issus, du premier (vert) aux derniers (rouges).

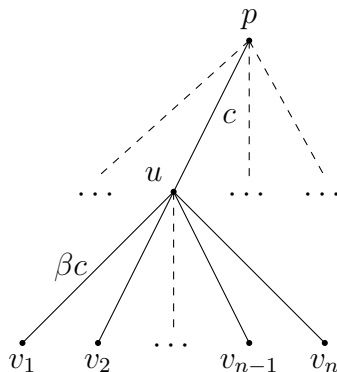


FIGURE 1.2. Conductances pour l'arbre de Galton-Watson

On remarque que certaines branches, quoique longues, s'éteignent définitivement lorsque tous les individus aux bouts n'ont eu aucun enfant. Nous allons conditionner l'arbre de Galton-Watson à être infini.

Pour faire une marche aléatoire biaisée sur l'arbre de Galton-Watson, nous fixerons d'abord un biais  $\beta > 1$ . Puis, pour une arête  $e$  reliant un sommet de la  $i$ ème génération à son enfant, nous donnerons la conductance  $c(e) = \beta^i$  (figure 1.2). Le résultat sera que, pour un sommet à  $n$  enfants, la probabilité de remonter vers le parent sera de  $1/(1 + n\beta)$  tandis que la probabilité de descendre vers n'importe lequel de ses enfants sera à chaque fois de  $\beta/(1 + n\beta)$ . Sur la figure 1.1, cela revient à dire que la marche aléatoire est «repoussée par le vert» (ou attirée par le rouge).

**Remarque 1.2.1.** *On peut aussi s'intéresser à des modèles de marches aléatoires sur des arbres de Galton-Watson avec différents paramètres, où le biais est plutôt vers la racine [20], où l'arbre est «critique» (c'est à dire que l'espérance du nombre d'enfants est 1) [11], etc.*

Un coup d'oeil rapide à ce modèle suggère qu'il doit exister une relation entre le biais  $\beta$  et la vitesse asymptotique du marcheur. Si  $d(\cdot, \cdot)$  est la distance usuelle sur un graphe, 0 est le sommet «patriarche» (la racine de l'arbre) et  $X_n$  est le sommet où se trouve la marche après  $n$  pas, on définit la vitesse asymptotique

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(0, X_n)}{n}$$

et évidemment  $v$  dépend de la loi de l'environnement – en particulier,  $v$  dépend de  $\beta$  (entre autres). L'intuition suggère la question suivante : est-ce que  $v$  est croissante en  $\beta$  ? On voudrait répondre «oui», pourtant, rappelons la remarque faite précédemment quant à certaines branches qui, quoique longues, constituent (au moins du point de vue du marcheur) d'aussi longs culs-de-sac. Le problème, c'est que quand le marcheur s'avance dans un tel cul-de-sac, le biais le pousse vers le fond d'autant plus fort que ce dernier est élevé. Puisque ces culs-de-sac sont finis (par définition d'un cul-de-sac), forcément le marcheur finira toujours par en sortir et rejoindre un sommet à la descendance ininterrompue pour continuer sa progression

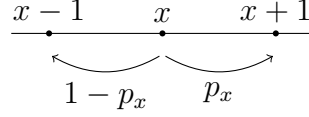


FIGURE 1.3. Probabilités de transition pour la marche aléatoire dans l'environnement aléatoire sur  $\mathbb{Z}$

vers le bas de l'arbre. Le biais fera en sorte que chaque site sera visité au plus un nombre fini de fois<sup>3</sup>; pourtant lorsque  $\beta$  est assez grand,  $v$  tendra vers 0.

### 1.2.2. La marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans $\mathbb{Z}$

Les culs-de-sac présents dans l'arbre de Galton-Watson agissent comme des «pièges» qui retiennent le marcheur sur de très longues périodes de temps – nous avons choisi de mentionner ce modèle en premier car malgré que la discussion que nous avons faite soit presque exclusivement qualitative, l'image des culs-de-sac (apparents sur la figure 1.1) rend plus ou moins évidente l'apparition de ces pièges.

Nous nous tournons maintenant vers un modèle plus simple, et que nous pourrions décrire et analyser un peu plus en détails. Sans toutefois entrer dans les démonstrations rigoureuses, nous présenterons certains résultats un peu plus précis afin d'amener tranquillement quelques idées-clé qui seront très importantes lors de la discussion du modèle auquel nous nous sommes intéressés plus particulièrement.

#### 1.2.2.1. Description du modèle

Contrairement à la marche sur l'arbre de Galton-Watson où la structure du graphe était aléatoire et les conductances, déterminées, ici la structure du graphe (sommets et arêtes) sera la même pour tous les environnements. L'aléatoire ne résidera que dans le choix des conductances.

Commençons par choisir  $(p_x)_{x \in \mathbb{Z}}$  un vecteur aléatoire où les  $p_x$  sont indépendants et identiquement distribués dans  $(0, 1)$ . Ces variables seront les probabilités de transition vers la droite pour chaque site  $x$ . Pour des fins pratiques, nous définirons les probabilités de transition vers la gauche  $q_x := 1 - p_x$  pour tout  $x$ . Enfin, nous définirons aussi  $\beta_x = p_x/q_x$ . Finalement, on peut choisir les conductances. Nous posons  $c(0, 1) = 1$  et exigeons

$$\frac{c(x, x+1)}{c(x, x-1)} = \beta_x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Évidemment, on a immédiatement que,

$$\forall x > 0 \quad c(x, x+1) = c(0, 1) \prod_{y=1}^x \frac{c(y, y+1)}{c(y, y-1)} = \prod_{y=1}^x \beta_y$$

3. Remarquons que si le nombre de visites est presque sûrement fini pour chaque site, il n'existe pas forcément pour autant une borne uniforme sur les nombres de visites pour tous les sites.

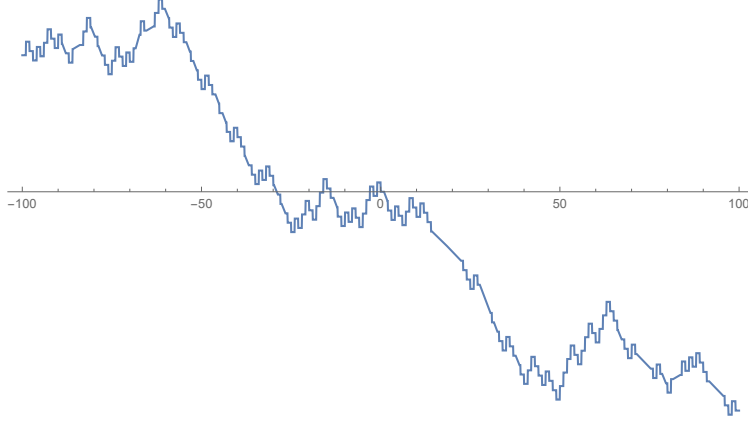


FIGURE 1.4. Le potentiel  $V(x)$  pour une marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ . Ici,  $\mathbf{P}\{p_x = 9/14\} = 3/4 = 1 - \mathbf{P}\{p_x = 3/10\}$ . On a alors  $\bar{\rho} > 0$  et  $\mathbf{E}[\beta_0^{-1}] = 1$

$$\forall x < 0 \quad c(x, x+1) = c(0, 1) \prod_{y=x}^{-1} \frac{c(y, y+1)}{c(y+1, y+2)} = \prod_{y=x+1}^0 \beta_y^{-1}$$

On recouvre ainsi la propriété désirée :  $\mathbf{P}_x^\omega\{X_1 = x+1\} = p_x = 1 - \mathbf{P}_x^\omega\{X_1 = x-1\}$

#### 1.2.2.2. Potentiel et transience

Si l'on écrit  $V(x) = -\log(c(x, x+1))$ , on obtient immédiatement que pour tout  $x > 0$ ,  $V(x) = -\sum_{i=1}^x \log \beta_y$  et  $V(-x) = \sum_{i=0}^{x-1} \log \beta_{-i}$ . Or, les  $\beta_x$  sont i.i.d., et par conséquent  $V(x)$  et  $V(-x)$  sont deux marches aléatoires sur  $\mathbb{R}$ , mesurables par rapport à l'environnement. On remarque que par la définition de  $V(x)$ , la marche aléatoire favorise toujours les sites à faibles valeurs de  $V(x)$ . Pour cette raison, par analogie avec plusieurs processus physiques, nous appellerons  $V$  le «potentiel». Nous avons reproduit un profil de  $V(x)$  à la figure 1.4.

La description du modèle telle qu'énoncée plus haut ne fait nulle part référence à un «biais» de façon explicite. Pourtant un coup d'oeil à la figure 1.4 suggère que pour cet environnement particulier, de façon globale, les conductances croissent à un rythme à peu près exponentiel (rappelons que  $V(x) = -\log(c(x, x+1))$ ). En fait, il paraît assez évident que si nous notons  $\bar{\rho} = \mathbf{E}[\log \beta_0]$ , alors  $\mathbf{E}\{V(x)\} = -x\bar{\rho}$ ; autrement dit, le potentiel  $V(x)$  est une marche aléatoire biaisée. Puisque la marche aléatoire est «attirée» par les zones de faible potentiel, il est naturel de penser que  $\bar{\rho}$  détermine en quelque sorte une forme de biais aussi pour le processus  $(X_i)_{i \geq 0}$ . Cela se confirme avec le résultat suivant, démontré dans [25] :

**Théorème 1.2.1.** *Si  $\bar{\rho} > 0$  (resp.  $< 0$ ), alors  $X_n$  est transient vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ). Si  $\bar{\rho} = 0$ , alors  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ .*

On peut comprendre grossièrement ce résultat en retournant au graphe de  $V(x)$  – si  $\bar{\rho} > 0$ , par exemple,  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = -\infty$ . Comme la marche aléatoire est «attirée» par les

sites de plus faible potentiel, si  $V(x)$  «descend» vers la droite, la marche aléatoire finira par aller dans ce sens. Dans ce qui suit, nous supposons  $\bar{\rho} > 0$ , car nous nous intéresserons surtout au cas transient.

### 1.2.2.3. *Ralentissement asymptotique et pièges*

On peut également obtenir un résultat sur la vitesse asymptotique  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n$ .

**Théorème 1.2.2.** *Si  $\bar{\rho} > 0$ , on aura*

$$v = \begin{cases} \frac{1 - \mathbf{E}[\beta_0^{-1}]}{1 + \mathbf{E}[\beta_0^{-1}]} & \text{si } \mathbf{E}[\beta_0^{-1}] < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distribution décrite à la figure 1.4 a une vitesse  $v = 0$ , car  $\mathbf{E}[\beta_0^{-1}] = 1$ . Remarquons que si  $\mathbf{E}[\beta_0^{-1}] \geq 1$  et que  $\bar{\rho} > 0$ , la marche aléatoire est transiente, mais la vitesse asymptotique est 0. Cela suggère que dans le cas où  $\mathbf{E}[\beta_0^{-1}] \geq 1$  et où  $\bar{\rho} > 0$ , comme pour la marche biaisée sur l'arbre de Galton-Watson, le marcheur «s'échappera» éventuellement, mais qu'il doit passer beaucoup de temps dans des «pièges». On doit donc se demander ce qui cause ces pièges.

Pour ce faire, reportons notre attention à nouveau sur le potentiel  $V(x)$ . De façon générale,  $V(x)$  ne décroît pas de façon monotone – la progression aléatoire de  $V(x)$  implique en certains endroits la formation de «creux» et de «bosses». Comme le marcheur est «attiré» vers les endroits de plus faible potentiel situés immédiatement autour de lui, il sera toujours «poussé» vers le minimum local le plus près de lui. Ce sont ces fluctuations autour de l'espérance de  $V(x)$  qui constituent les pièges. Une fois à un minimum local, la «bosse» devant le marcheur crée un obstacle que le marcheur devra tenter de franchir.

Pour estimer la hauteur des pièges, il faudra connaître d'avantage la loi de  $\beta_0$ , puisque  $-\log \beta_0$  donne la loi d'un pas de  $V(x)$ . Nous ferons donc l'hypothèse supplémentaire qu'il existe  $\alpha \in (0, 1)$  tel que  $\mathbf{E}[\beta_0^{-\alpha}] = 1$  et que  $\mathbf{E}[\beta_0^{-\alpha} \log \beta_0] < \infty$ . Pour des raisons techniques, nous exigerons aussi que le support de la loi de  $\log \beta_0$  soit tel que l'ensemble de ses translations par  $\mathbb{Z}$  soit dense dans les réels<sup>4</sup>.

Remarquons que puisque nous choisissons  $\alpha < 1$ , par l'inégalité de Jensen, on doit avoir  $\mathbf{E}[\beta_0^{-1}] \geq 1$ , donc que la vitesse asymptotique  $v = 0$  (par le théorème 1.2.2). En appliquant l'inégalité de Tchebychev/Markov, on obtient

$$\mathbf{P}\{\beta_0^{-1} \geq r\} \leq \frac{\mathbf{E}[\beta_0^{-\alpha}]}{r^\alpha}$$

Cela est un bon indice que plus  $\alpha$  est petit, plus il est probable que  $\beta_0$  soit relativement «petit» (puisque la borne est de plus en plus lâche). Par conséquent, les obstacles pourront être plus grands (car  $V(x)$  remonte lorsque  $\beta_x < 1$ ). Autrement dit, plus  $\alpha$  est petit, et plus

4. Cette condition est connue en anglais sous l'appellation *non-lattice distribution*.



les obstacles seront hauts. Dans [13, 19], on arrive à estimer que si  $H$  est la hauteur d'un obstacle, alors

$$\mathbf{P}\{H > n\} \sim Ce^{-\alpha n}$$

On souhaite maintenant estimer le temps  $T$  nécessaire pour franchir l'obstacle. Dans [7], on présente l'approximation suivante :  $T = e^H \mathbf{e}$  où  $\mathbf{e}$  est une variable de loi exponentielle standard<sup>5</sup>. Le premier facteur est une estimation du temps nécessaire pour franchir l'obstacle, et l'exponentielle fournit une approximation du nombre de tentatives à effectuer. En utilisant l'estimation de la hauteur de l'obstacle, on trouve finalement que

$$\mathbb{P}\{T > n\} \sim \mathbf{P}\{e^H > n\} \sim Cn^{-\alpha}$$

Ce qui signifie que  $\mathbb{E}[T]$  n'existe pas ;  $T$  est une variable aléatoire à queue lourde. Ceci renforce l'intuition que le marcheur passera un temps considérable à tenter de surmonter des obstacles.

#### 1.2.2.4. Un premier résultat de vieillissement

En utilisant de telles méthodes, Enriquez, Sabot et Zindy ([13]) obtiennent le résultat suivant :

**Théorème 1.2.3.** *Avec toutes les hypothèses précédentes, pour tout  $h > 1$ ,  $\eta > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\|X_{ht} - X_t\| \leq \eta \log t\} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy$$

C'est de ce type de résultat dont nous parlons lorsque nous mentionnons la propriété du vieillissement. Nous reviendrons plus en détails sur la notion de vieillissement plus loin – pour l'instant, nous nous contenterons simplement de fournir une intuition de la signification de ce théorème.

Grossièrement, ce que ce résultat annonce, c'est qu'au temps  $t$  (lorsque  $t$  est grand), il est somme toute assez probable qu'après un temps supplémentaire proportionnel à  $t$ , le marcheur soit demeuré relativement «près» de sa position au temps  $t$ . Autrement dit, si on marque la position du marcheur au temps  $t$ , une fois rendu au temps  $s > t$ , la probabilité que le marcheur soit relativement près de sa position au temps  $t$  ne dépend pas de  $s - t$  (comme on aurait pu s'y attendre lorsque le théorème de la limite centrale s'applique), mais plutôt de  $s/t$ . Ainsi, au temps  $t$ , le temps nécessaire pour observer un déplacement significatif du marcheur sera «de l'ordre de l'âge du système» – c'est à dire  $t$ . Plus le système sera «âgé», et plus le marcheur se déplacera lentement. Nous verrons plus loin que ce genre de propriété n'est pas du tout spécifique au modèle de la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire

---

5. Cette approximation est conditionnelle à ce que le piège ne soit pas «trop large». Elle apparaît sous une forme similaire lors de l'étude de la marche aléatoire sur l'arbre de Galton-Watson. Consulter [7] à ce sujet.

dans  $\mathbb{Z}$ . En effet, ce comportement est largement lié aux pièges, présents dans plusieurs modèles différents.

**Remarque 1.2.2.** *Nous avons choisi les deux exemples précédents en raison de la présence plus ou moins évidente de pièges pour les régimes de paramètres que nous avons mentionnés. Toutefois, il existe une panoplie d'autres modèles de marches aléatoires sur des environnements aléatoires. On pense entre autres à la marche aléatoire sur un amas de percolation [3] ou à la marche sur l'amas incipient infini (incipient infinite cluster) pour la percolation critique [26, 4]*

### 1.3. PIÈGES ET MODÈLE DE BOUCHAUD

Les deux modèles présentés plus haut illustrent bien l'émergence de pièges dans le contexte des marches aléatoires en milieux aléatoires. Ces pièges apparaissent comme des configurations particulières de l'environnement et ils n'ont pas forcément été placés là «express». D'ailleurs, ces pièges apparaissent dans des conditions précises, et leur influence sur le déplacement de la marche aléatoire dépend souvent de paramètres spécifiques. Par exemple, pour la marche biaisée sur l'arbre de Galton-Watson, la probabilité  $p_0$  qu'un sommet n'engendre aucune descendance est un paramètre-clé dans l'émergence de pièges. De même, pour la marche aléatoire sur un environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , la loi de  $\beta_0$  détermine la présence et la hauteur des obstacles que le marcheur devra franchir.

La présence de pièges n'est pas la signature des marches aléatoires en milieux aléatoires. Par exemple, une marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson «sans feuilles» (où la probabilité de n'avoir aucune descendance est nulle) ne présente pas de pièges. De même pour la marche aléatoire sur un milieu aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , si par exemple,  $\mathbf{P}\{p_x = 0.8\} = \frac{1}{2} = \mathbf{P}\{p_x = 0.9\}$ , il semble évident que la marche aléatoire en question ne restera jamais vraiment «prise au piège» nulle part. Pourtant ces pièges apparaissent dans plusieurs modèles et y jouent chaque fois un rôle déterminant. Pour cette raison, on choisit souvent d'étudier ces cas en employant un parallèle puissant avec un modèle en particulier : le modèle de pièges de Bouchaud.

#### 1.3.1. Le modèle de pièges de Bouchaud totalement dirigé

Le modèle de pièges de Bouchaud totalement dirigé (introduit dans [10]) est en fait simplement un autre modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire. La différence principale avec d'autres tels modèles, c'est qu'ici, on force la présence de pièges, et on néglige tout ce qui se passe en dehors des pièges.

Considérons un vecteur aléatoire  $\tau := (\tau_x)_{x \geq 0}$  où les  $\tau_x$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $(0, +\infty)$ . Ce vecteur aléatoire constituera pour nous l'environnement. Le processus sera alors le suivant : en commençant en  $x = 0$ , le marcheur y reste pour une durée

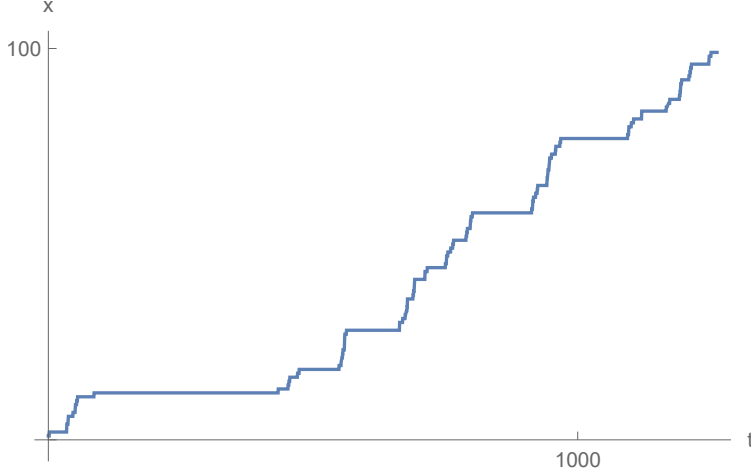


FIGURE 1.5. La position du marcheur en fonction du temps pour une réalisation du modèle de pièges de Bouchaud totalement dirigé.

aléatoire de loi exponentielle et de moyenne  $\tau_0$ . Puis il se déplace vers  $x = 1$ . Il demeure sur place pour une durée de loi exponentielle de moyenne  $\tau_1$ . Puis il avance en  $x = 2$ , etc. La figure 1.5 montre la progression d'un tel processus lorsque les  $\tau_x$  suivent une loi de Pareto avec valeur minimale 1 et puissance  $\alpha = 0.8$ .

Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i \geq 0}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle standard. Alors, on a  $X_t = \sup\{n \geq 0 \mid \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \mathbf{e}_i < t\}$ . L'inverse de  $X_t$ , le temps  $T_x$  requis pour atteindre  $x \geq 0$  est tout simplement  $T_x = \sum_{i=0}^{x-1} \tau_i \mathbf{e}_i$ , et puisque c'est une somme de variables aléatoires i.i.d. (sous  $\mathbb{P}$ ),  $T_x$  est beaucoup plus facile à travailler.

Si on suppose que  $\mathbf{E}[\tau_0^2] < +\infty$ , alors par la loi des grands nombres, on a rapidement

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_x}{x} = \mathbf{E}[\tau_0] =: v^{-1}$$

et par le théorème de la limite centrale,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_x - xv^{-1}}{\sigma x^{1/2}} = \mathcal{N}$$

où  $\sigma^2 = \text{Var}[\tau_0]$  et  $\mathcal{N}$  est une variable aléatoire de loi normale standard. On peut même aller plus loin : puisque  $T_x - xv^{-1}$  est une marche aléatoire simple avec un pas d'espérance 0, on a une limite en processus. Si  $T_u^{(k)} = (k^{-1/2}(T_{\lfloor ku \rfloor} - kv^{-1}), u \in [0, U])$  est une suite de processus stochastiques, alors cette suite de processus converge vers un mouvement brownien standard  $(B_u, u \in [0, U])$ . Ces résultats peuvent ensuite être inversés pour obtenir des résultats analogues pour  $X_t$ .

Le cas où  $\mathbf{E}[\tau_0^2] < +\infty$  n'est pas très intéressant pour nous, puisque dans ce cas, les pièges sont «relativement petits». En fait, nous serons intéressés par les cas où  $\mathbf{E}[\tau_0] = +\infty$ . Dans ces cas, la loi des grands nombres échoue, et nous devons recourir à d'autres outils : les lois stables.

Nous ferons ici l'hypothèse que  $\mathbf{P}\{\tau_0 > u\} \sim Cu^{-\alpha}$  pour une certaine constante  $C > 0$  et un exposant  $\alpha \in (0, 1)$  (la distribution de Pareto, par exemple). Dans ces conditions, on ne peut pas appliquer la loi des grands nombres. Toutefois, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_x}{x^{1/\alpha}} = \mathcal{S}_\alpha$$

où  $\mathcal{S}_\alpha$  est une variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable complètement asymétrique. Nous reviendrons sur la théorie derrière ces variables aléatoires dans le prochain chapitre. Pour l'instant, nous souhaitons simplement souligner que  $T_x$  croît maintenant «comme» une puissance de  $x$  supérieure à 1 – il devient ainsi très long d'atteindre un site éloigné de l'origine.

On a de nouveau un résultat sur la convergence de processus : si  $T_u^{(k)} = (k^{-1/\alpha} T_{[ku]}), u \in [0, U]$  est une suite de processus stochastiques sur  $[0, U]$ , alors  $T_u^{(k)}$  converge vers  $(S_u, u \in [0, U])$  où  $S_u$  est un subordonneur<sup>6</sup>  $\alpha$ -stable complètement asymétrique.

Encore une fois ces résultats peuvent être inversés pour obtenir des équivalents pour  $X_t$ . En fait, voici ce qu'on a sur  $X_t$  (ces résultats sont présentés dans [7]) :

**Théorème 1.3.1.** *Si  $\mathbf{P}\{\tau_0 \geq u\} \sim Cu^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$ , on a que*

- (1)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = (\mathcal{S}_\alpha^{ca})^{-\alpha}$  où  $\mathcal{S}_\alpha^{ca}$  est une variable aléatoire de loi stable complètement asymétrique de paramètre  $\alpha$  ;
- (2)  $(k^{-\alpha} X_{kt}, t \in [0, T])$  converge vers  $(S_t, t \in [0, T])$  (où  $S_t$  a la loi d'un subordonneur  $\alpha$ -stable) pour la topologie  $M_1$  de Skorokhod sur l'espace  $D[0, T]$  des fonctions càdlàg sur  $[0, T]$  ;
- (3)  $(k^{-\alpha} X_{kt}, t \in [0, T])$  converge vers  $(Z_t, t \in [0, T])$  (où  $Z_t$  a la loi de l'inverse d'un subordonneur  $\alpha$ -stable) pour la topologie uniforme sur  $D[0, T]$  ;
- (4) Pour tout  $h > 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_t = X_{ht}\} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy$$

On reconnaît immédiatement 4 comme la propriété de vieillissement en comparant avec le résultat du théorème 1.2.3.

### 1.3.2. Le modèle de Bouchaud biaisé

Le modèle de Bouchaud totalement dirigé est particulièrement simple à étudier – il s'agit en fait simplement de manipuler des sommes de variables aléatoires. On peut obtenir un modèle légèrement plus complexe (et un peu plus «réaliste») en le modifiant un peu. L'idée générale, c'est qu'au lieu que le marcheur fasse systématiquement un pas à droite après

---

6. En quelques mots, les subordonneurs stables sont des processus stochastiques pour lesquels les incréments sont indépendants et de loi stable complètement asymétrique. De plus amples détails seront donnés à la section 2.2.

chaque piège, il effectue plutôt un pas aléatoire : à gauche avec probabilité  $q$ , et à droite avec probabilité  $p = 1 - q > q$ . On définira également  $\epsilon = \frac{p-q}{2} > 0$  et  $v_\epsilon = 2\epsilon$ .

Le processus  $X_t$  devient alors une chaîne de Markov à temps continu sur  $\mathbb{Z}$  pour laquelle les taux de transition  $c(x, y)$  (pas des conductances) sont donnés par

$$c(x, x+1) = \frac{p}{\tau_x} \quad c(x, x-1) = \frac{q}{\tau_x}$$

Il va sans dire que nous avons  $\tau = (\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}}$  avec les  $\tau_x$  i.i.d. encore une fois.

Cette définition est suffisante, cependant elle n'est pas nécessairement particulièrement intuitive. C'est pourquoi on préfère souvent employer une description beaucoup plus explicite, même si elle est un peu plus longue. Remarquons tout d'abord que la «trace» de  $X_t$  (c'est à dire la suite des sites  $x \in \mathbb{Z}$  visités par  $X_t$ ), que l'on peut noter  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , est une marche aléatoire biaisée sur  $\mathbb{Z}$ , tout simplement. On va maintenant définir «l'horloge»  $H(n)$  avec  $H(0) = 0$  et pour tout  $n > 0$ ,

$$H(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{Y_i} e_i.$$

$H(n)$  donne donc le temps écoulé avant le  $n$ ième pas. Notons que  $H(n)$  dépend bien sûr de  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

On peut également introduire l'inverse de  $H(n)$  :  $H^{-1}(t) = \sup \{n \geq 0 \mid H(n) < t\}$ , qui donne évidemment le nombre de pas qui ont été effectués au temps  $t$ . Finalement, on a  $X_t = Y_{H^{-1}(t)}$ .

À première vue,  $H(n)$  peut sembler très similaire au  $T_x$  que nous avons précédemment. Toutefois, on remarque que la somme contient non pas  $\tau_i$  mais plutôt  $\tau_{Y_i}$ . Comme  $Y_i$  peut revenir sur ses pas,  $H(n)$  n'est pas une somme de variables aléatoires indépendantes. Voilà pourquoi le résultat suivant (voire [28]) est finalement un peu surprenant.

**Théorème 1.3.2.** *Le théorème 1.3.1 tient encore pour le modèle de pièges de Bouchaud biaisé, moyennant renormalisation des processus-limites par le facteur constant  $\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} v_\epsilon^\alpha$ .*

Dans les paragraphes qui suivent, nous exposons les principales clés du raisonnement qui ont conduit à ce résultat. Pour ce faire, nous nous inspirerons de la preuve du théorème 1.3.2 fournie par O. Zindy ([28]), qui a lui-même adapté les idées de [14, 13], dont les multiples étapes suivent bien l'intuition.

## 1.4. TRANSIENCE DIRECTIONNELLE ET RÉGÉNÉRATION

Outre la présence de pièges, on remarque que les modèles présentés ont tous une autre caractéristique commune : le «biais». Il est difficile de définir convenablement la notion de biais en dehors d'un contexte particulier – toutefois, il paraît évident que la marche biaisée sur l'arbre de Galton-Watson, la marche aléatoire sur le milieu aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  (lorsque les conditions que nous avons détaillées sont présentes) et le modèle de pièges de Bouchaud biaisé partagent tous une «préférence» vers une «direction» en particulier.

Il ne s'agit évidemment pas d'une coïncidence – remarquons en premier lieu que, contrairement aux pièges qui apparaissent (au moins dans les deux premiers modèles) plus ou moins «naturellement», nous choisissons toujours de nous concentrer sur des modèles (ou des régimes particuliers de paramètres) qui sont «directionnellement transients». On peut comprendre la transience directionnelle intuitivement comme une propriété de transience avec ceci de particulier qu'on peut savoir d'avance dans quelle «direction» le processus s'échappera vers l'infini.

Bien sûr on pourrait travailler sur des modèles qui ne présentent pas cette propriété. Par exemple, si pour le modèle de Bouchaud «biaisé» (parce qu'on choisissait  $p > q$ ), on choisissait plutôt  $p = q = 1/2$ . Évidemment, dans ce cas, la «trace»  $Y_n$  est clairement récurrente. On pourrait choisir de se pencher sur un tel modèle également mais son étude s'avère beaucoup plus complexe.

#### 1.4.1. L'indépendance sans la propriété de Markov

La complexité de l'étude de tels modèles provient du fait que sous leurs lois recuites, les marches aléatoires en milieux aléatoires ne sont pas des chaînes de Markov, et n'ont donc pas la propriété de Markov.

Pour rappel, si  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov à temps discret ( $t \in \mathbb{N}$ ), si  $I \subseteq \mathbb{N}$  est un ensemble de temps et si  $\sigma_I = \sigma(\{X_i : i \in I\})$  est la tribu engendrée par le processus  $(X_t)$  aux temps  $i \in I$  et  $\sigma_{\max I} = \sigma(X_{\max I})$  est la tribu engendrée par la position du processus au dernier temps dans  $I$ , alors pour tout événement  $A$ ,

$$\mathbb{P}\{A \mid \sigma_I\} = \mathbb{P}\{A \mid \sigma_{\max I}\}$$

Intuitivement, la propriété de Markov signifie que «si on sait où on se trouve à un moment précis, ce qui est arrivé avant ce moment n'a pas d'importance.»

Imaginons maintenant une expérience d'optique où on passe un laser à travers un bloc constitué de couches de matériaux transparents inconnus. En faisant passer à travers de ce bloc un rayon lumineux, on peut observer les angles d'incidence et de réfraction de la lumière aux interfaces entre les matériaux, et en déduire la nature des matériaux, de sorte que si l'on décide, de l'autre côté du bloc, de réfléchir le rayon de lumière, on saurait prédire sa trajectoire de retour.

Le fait que nous ne connaissons pas la nature des différentes strates à travers lesquelles la lumière passera fait en sorte que, lors de son premier passage, nous «gagnons» de l'information sur le bloc, qui nous permettra de prédire la trajectoire du second passage, qui est en quelque sorte «dépendant» du précédent.

Pour une marche aléatoire dans un milieu aléatoire, c'est un peu la même chose. Puisqu'on ne connaît pas l'environnement, en observant le tracé de la marche aléatoire, on «gagne» de l'information sur l'environnement dans lequel elle évolue – ce qui nous permet ensuite de

prédire un peu mieux comment elle se comporterait si elle repassait par une portion de l'environnement qu'elle a déjà fréquenté. Par exemple, dans le modèle de Bouchaud biaisé, imaginons que la marche soit passé  $n$  fois par un piège et qu'à chaque fois elle y ait passé énormément de temps. On peut se convaincre assez facilement que lorsqu'elle y repassera, elle y passera d'autant plus probablement beaucoup de temps que  $n$  est grand.

Cependant, si on sait que le processus est directionnellement transient, et qu'à partir d'un certain moment, «le processus ne revient plus sur ses pas», on peut s'en tirer. Dans ce cas, pour peu que des régions disjointes de l'environnement soient indépendantes, à partir du moment où on sait qu'on ne revient plus sur nos pas, on perd toute dépendance sur le passé de la marche puisqu'on sait qu'on ne fréquentera plus les mêmes sites.

Pour cette raison, il est beaucoup plus aisé d'étudier des modèles où le processus, même sous sa loi recuite, est biaisé. Très souvent ce biais s'accompagne d'une forme de transience directionnelle qui permet de recouvrer une forme d'indépendance.

#### 1.4.2. Dans le modèle de pièges de Bouchaud

Dans le modèle de pièges de Bouchaud biaisé, nous avons déjà observé que  $H(n)$  n'est pas une somme de variables aléatoires indépendantes. Par contre, rappelons que nous avons choisi  $p > q$ .

Dans ces conditions, pour  $n$  grand, la probabilité que  $Y_i$  recule d'au moins  $\nu(n) = (\log n)^{1+\epsilon}$  pas (pour  $\epsilon > 0$  quelconque) avant d'atteindre  $n$  tend vers 0. Formellement, on a le lemme suivant :

**Lemme 1.4.1.** *Dans le modèle de Bouchaud biaisé, si  $T_x = \inf\{n \geq 0 \mid Y_n = x\}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \min_{0 \leq i \leq j \leq T_n} (Y_j - Y_i) > -\nu(n) \right\} = 0 \quad (1.4.1)$$

avec  $\nu(n) = (\log n)^{1+\epsilon}$  où  $\epsilon > 0$ .

**DÉMONSTRATION.** On peut arriver à le montrer en employant un argument simple de ruine du parieur. Si pour  $A \subseteq \mathbb{Z}$  on définit  $\zeta_A = \inf\{n \geq 0 \mid Y_n \in A\}$  (dans le cas d'un singleton  $A = \{a\}$  on note simplement  $\zeta_a$ ), et  $E_n = \{\min_{0 \leq i \leq j \leq \zeta_n} (Y_j - Y_i) > -\nu(n)\}$  est l'événement qu'on a reculé de plus de  $\nu(n)$  pas avant d'atteindre  $n$ , alors on a que  $\mathbb{P}\{E_n\} = \mathbb{P}\{Y_{\zeta_{\{-\nu(n),1\}}} = 1\}^n$ . Si  $\beta = p/q$ , on note  $Z_n = \beta^{-Y_n}$ .  $Z_n$  est évidemment une martingale, et par le théorème d'arrêt de Doob,  $Z_{n \wedge \zeta_{\{-\nu(n),1\}}}$  aussi puisque  $\zeta_{\{-\nu(n),1\}}$  est un temps d'arrêt. De plus  $\mathbb{E}[\zeta_{\{-\nu(n),1\}}] < \infty$ , puisque  $\zeta_{\{-\nu(n),1\}} \leq \zeta_1$ , et par la loi des grands nombres,  $\mathbb{E}[\zeta_1] < \infty$ . On a donc que  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_{n \wedge \zeta_{\{-\nu(n),1\}}}] = \mathbb{E}[Z_{\zeta_{\{-\nu(n),1\}}}]$ . Si  $P_n = \mathbb{P}\{Y_{\zeta_{\{-\nu(n),1\}}} = 1\}$ , alors on a  $1 = P_n \beta^{-1} + (1 - P_n) \beta^{\nu(n)}$ , ce qui signifie que

$$P_n = \frac{1 - \beta^{\nu(n)}}{\beta^{-1} - \beta^{\nu(n)}} = 1 - \frac{1 - \beta^{-1}}{n^{(\log \beta)(\log n)^\epsilon} - \beta^{-1}}$$

Et bien sûr  $n = o(n^{(\log \beta)(\log n)^\epsilon})$ , ce qui entraîne  $\mathbb{P}\{E_n\} = P_n \rightarrow 1$ . □

**Remarque 1.4.1.** *Remarquons que ceci n'a rien à voir avec les pièges – c'est un fait qui concerne uniquement la marche aléatoire biaisée sur  $\mathbb{Z}$ . Remarquons également que si  $\beta > e$ , on peut obtenir le même résultat avec  $\nu(n) = \log n$ .*

Ce fait est utile dans la démonstration car lorsqu'on étudiera la progression jusqu'au site  $n$ , on pourra toujours conditionner sur  $E_n$ , et donc supposer que lorsque  $x < n$ , une fois atteint le site  $x + \nu(n)$ , on ne reviendra plus en  $x$ , ou derrière  $x$ . Autrement dit, une fois atteint  $x + \nu(n)$ , le processus qui suit pourra être considéré comme indépendant de l'environnement avant  $x$ , et donc du processus qui s'est déroulé avant de quitter  $x$  pour la dernière fois.

Le modèle de Bouchaud biaisé est particulier ; le processus  $(Y_i)_{i \geq 0}$  (qui décrit le déplacement en fonction du nombre de pas effectués) est très bien connu, ce qui permet d'obtenir facilement un résultat très fort comme celui que nous venons de montrer. Dans la plupart des cas, la structure de l'environnement et la loi de la «trace» du processus ne sont pas aussi simples. Pour ces cas, on emploiera une méthode particulière, connue généralement sous le nom de «temps de régénération», qui est plus flexible, et qui suffit pour obtenir les propriétés d'indépendance que l'on recherche.

Cependant, avant de décrire cette méthode, nous devons nous interroger de plus près sur ce que l'on entend par l'indépendance pour des portions de l'environnement.

### 1.4.3. Indépendance entre régions de l'environnement

Avant d'aller plus loin, cependant, nous devons nous arrêter un instant pour discuter un peu du lien entre le processus et son environnement. En effet, supposons que  $X_t$  est une marche aléatoire à temps discret sur un environnement aléatoire défini sur  $S$ , et que  $0 \in S$  est le point de départ de  $X_t$  ( $X_0 = 0$ ). Évidemment, pour tout  $B \subseteq S$ ,  $P_0^\omega \{X_1 \in B\}$  est une variable aléatoire mesurable par rapport à  $\sigma(\omega)$ , la tribu engendrée par l'environnement. Mais en fait,  $P_0^\omega \{X_1 \in B\} = \mu^\omega(0, B)$ , peu importe le reste de l'environnement – donc  $P_0^\omega \{X_1 \in B\}$  est mesurable par rapport à  $\sigma(\mu^\omega(0, B))$ , qui est une tribu potentiellement bien plus grande. Plus généralement, la loi trempée de  $X_{n+1}$  est mesurable par rapport à  $\sigma(X_n, \mu^\omega(X_n, B) \forall B \subseteq \mathcal{F}(S))$ .

Ce qui est important ici, c'est surtout de constater que la loi de  $X_{n+1}$  sachant  $X_n$  ne dépend pas forcément de tout l'environnement. De façon générale, nous dirons que deux portions d'environnement  $A$  et  $A'$  sont indépendantes pour  $\mathbf{P}$  (donc pour  $\mathbb{P}$ ) si avec la définition

$$\sigma(A) := \sigma(\mu^\omega(x, B) \forall x \in A, B \in \mathcal{F}(S))$$

, on a  $\sigma(A) \perp \sigma(A')$ . De façon similaire, on emploiera  $\sigma(A)$  pour définir de façon intuitive toutes les notions liées à la dépendance à ou l'indépendance de certaines portions d'environnement.



**Remarque 1.4.2.** Dans le cas où l'environnement aléatoire est obtenu en choisissant des conductances aléatoires indépendantes sur chaque arête d'un réseau, on remarque que l'environnement d'un sommet n'est pas indépendant de celui de son voisin, puisque les deux partagent une arête. Si par exemple, on sait que la probabilité de transitionner de  $x$  à  $y$  est très élevée, c'est que la conductance est très élevée. On se doute alors que la probabilité de transitionner de  $y$  à  $x$  sera aussi élevée.

#### 1.4.4. Les temps de régénération

Ce qui joue en notre faveur, c'est qu'on construit souvent des environnements aléatoires où l'environnement est très peu corréllé à lui-même – souvent il s'agit d'une hypothèse assez naturelle. Dans ces cas, la dépendance du processus  $X_t$  sur l'environnement est très localisée. Là où la transience nous devient vraiment utile, c'est qu'après un bout de temps à s'éloigner d'une portion de l'environnement, on peut souvent supposer qu'on est «suffisamment loin» pour que  $X_t$  soit indépendant de cette région et n'y revienne jamais.

Pour tirer parti de ce constat, nous allons développer le concept d'une suite de «temps de régénération». Il s'agit en fait d'une «méthode» plutôt que d'une notion bien définie. Pour illustrer cette méthode, nous allons nous placer dans le contexte de la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  (cf. section 1.2.2).

Ce qu'on cherche, ce sont des moments dans le temps qui «coupent l'environnement en deux», de sorte que toute le passé de la marche se trouve à ce moment «derrière» le marcheur, et tout son futur se trouve «devant».

Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est la trajectoire, on peut noter  $T = \{t \geq 0 \mid u \geq t \Leftrightarrow X_u \geq X_t\}$  l'ensemble de ces temps. Il s'avère que  $T$  est presque sûrement infini. On peut donc choisir  $\tau_1 = \inf \{t > 0 : t \in T, t-1 \notin T\}$  le premier temps séparant l'environnement en deux après le départ.

On appelle  $\tau_1$  un **temps de régénération**. L'intérêt principal des temps de régénération est qu'ils séparent l'environnement en deux. On peut écrire  $A_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x < X_{\tau_1}\}$  et on a alors la portion  $A_1$  de l'environnement, visitée exclusivement avant  $\tau_1$ , et la partie  $A_1^c$ , visitée à et après  $\tau_1$ . Puisque les environnements sur  $A_1$  et  $A_1^c$  sont indépendants, on sait que le processus avant  $\tau_1$  est indépendant du processus après  $\tau_1$  (conditionnellement à  $X_{\tau_1}$ ).

En répétant le procédé, on peut obtenir une suite de temps de régénération :  $\tau_{i+1} = \inf \{t > \tau_i : t \in T, t-1 \notin T\}$ <sup>7</sup> et on obtient les portions d'environnement correspondantes  $A_i = \{x \in \mathbb{Z} : x \in ]X_{\tau_{i-1}}, X_{\tau_i}]\}$ .

---

7. L'ensemble  $T$  est constitué de «plages» de valeurs de temps consécutives (lorsque par exemple, la marche grimpe de façon successive, excède son dernier maximum, puis continue de grimper longtemps), séparées par des «trous». On exige que  $\tau_i$  soit un élément de  $T$  mais que le temps précédent n'en soit pas un, afin d'éviter que de longues portions de la suite des temps de régénération soient simplement des suites de temps immédiatement consécutifs.

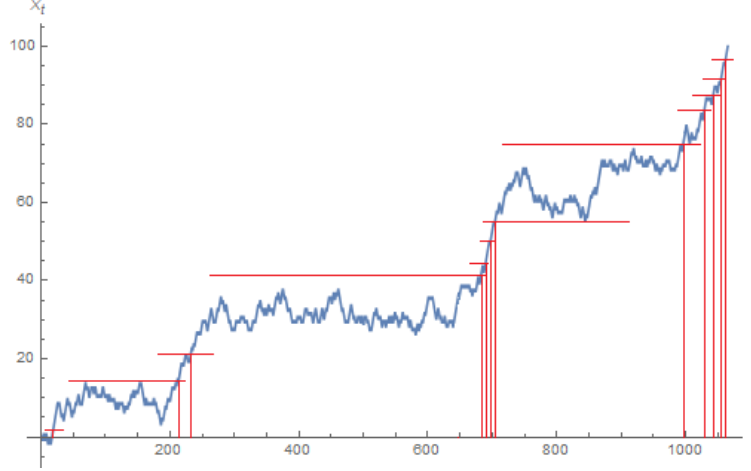


FIGURE 1.6. En bleu, la position en fonction du temps pour une marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ . Les traits verticaux rouges montrent les temps de régénération et les traits horizontaux illustrent les divisions de l'environnement.

La figure 1.6 montre les temps de régénération pour une marche aléatoire dans l'environnement aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , et illustre comment ils séparent l'environnement en portions disjointes.

#### 1.4.5. Blocs de régénération

Finalement on remarque le fait le plus intéressant de tous : si  $\tau_0 = 0$ , on a

$$\tau_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)$$

Puisque  $\tau_{i+1} - \tau_i$  ne dépend que de ce qui se passe sur  $A_{i+1}$ , on a réussi à écrire  $\tau_n$  comme une somme de variables aléatoires indépendantes !

**Remarque 1.4.3.** *Attention ! Les  $(\tau_{i+1} - \tau_i)$  ne sont pas nécessairement identiquement distribués. En effet, la loi du premier bloc ( $t < \tau_1$ ) est potentiellement différente de celle des autres. Pour qu'ils soient tous identiquement distribués, il faut que  $\tau_0 = 0$  soit aussi un temps de régénération ( $0 \in T$ ).*

Qui plus est, il est particulièrement réjouissant de constater que, ce faisant, on a séparé le processus en tronçons indépendants et «identiquement distribués» ! En effet, pour la loi recuite, nous venons d'énoncer le fait que les  $\tau_{i+1} - \tau_i$  sont indépendants et, pour  $i \geq 1$ , identiquement distribués (voir la remarque 1.4.3). La conséquence, c'est que pour tout  $i \geq 1$ , le processus  $(X_{\tau_i+t} - X_{\tau_i})_{t \geq 0}$  a la même loi que le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  conditionnellement à ce que  $0 \in T$  (0 est un temps de régénération). Pour cette raison, on appelle le processus  $(X_t)_{t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[}$  un **bloc de régénération**.

Dans cet exemple, l'indépendance de l'environnement d'avec lui-même nous a rendu un fier service. En reprenant la notation de la section 1.4.3, nous avons carrément que  $x \neq y \Leftrightarrow \sigma(\{x\}) \perp \sigma(\{y\})$  pour  $x, y \in \mathbb{Z}$ , ce qui nous permettait de «conclure» à l'indépendance des différents blocs de régénération. De plus, nous avons que la distribution de l'environnement était «stationnaire» (autrement dit, elle était invariante par translation). La «stationnarité» de la loi de l'environnement est très importante : c'est ce qui nous permet d'obtenir que les blocs de régénération sont identiquement distribués. Heureusement, il s'agit d'une hypothèse assez naturelle.

En revanche, la condition d'indépendance que nous avons ici (c'est à dire que l'environnement soit indépendant pour chaque site) est un peu trop restrictive. En général, il sera plus simple de satisfaire la condition  $d(x, y) > R \Leftrightarrow \sigma(\{x\}) \perp \sigma(\{y\})$ , où  $d$  est une métrique sur l'espace des états, et  $R > 0$  est un seuil de distance au delà duquel l'environnement n'est plus corrélé à lui-même.

Dans de tels cas, nous verrons plus loin que la méthode des temps de régénération peut toujours être appliquée, moyennant quelques technicalités supplémentaires. Principalement, il s'agira de redéfinir les temps de régénération pour qu'ils surviennent uniquement après que la marche aléatoire ait effectué un petit bout de trajectoire déterminé qui l'éloigne suffisamment de l'ancienne portion d'environnement. Le petit bout de trajectoire doit être déterminé afin de préserver l'indépendance.

## 1.5. LES PIÈGES PROFONDS

Dans le modèle de Bouchaud totalement dirigé (et aussi dans sa version biaisée), chaque site est explicitement désigné comme un piège. Sur chaque site, le marcheur attendra un temps moyen distribué selon une loi à queue lourde.

Par contre, étant donné l'environnement (les temps d'attente moyens), évidemment certains pièges ne feront finalement pas attendre notre marcheur longtemps. Pour s'en convaincre, jetons rapidement un coup d'oeil attentif à la figure 1.5. Chaque coordonnée entière sur l'axe vertical ce graphique correspond à un site. On voit qu'à certains endroits, la marche passe de très courts moments, et à d'autres, la marche met un temps considérable avant de progresser.

Afin de raffiner notre analyse, nous nous permettrons donc de distinguer, à une échelle fixe, des pièges considérés «creux» à cette échelle, et les autres, que nous considérerons comme «peu profonds». L'idée maîtresse ici sera d'abord et avant tout de montrer que face aux pièges «creux», le temps passé en tout dans les autres pièges est négligeable. (Cette intuition nous est fournie, entre autres, par la figure 1.5.) Ceci nous permettra, justement, de les négliger et de concentrer notre attention sur ceux d'entre les pièges qui ralentissent réellement le processus.

### 1.5.1. Un seuil de profondeur

Il paraît évident que nous devons distinguer les pièges «creux» des autres pièges en nous référant à un seuil de profondeur. Toutefois, celui-ci ne peut pas être un seuil constant – cette valeur serait arbitraire, et éventuellement négligeable à grande échelle de toute façon. Nous devons donc étudier le processus à une «échelle» – soit le processus avant le temps  $t$ , ou le processus avant d’atteindre «une distance»  $n$ . Le seuil de profondeur sera une fonction de  $t$  ou de  $n$ , tout dépendant si nous choisissons d’étudier le processus à une échelle «temporelle» ou «spatiale».

Cependant, avant de s’aventurer à la définition d’une «profondeur critique», il convient d’examiner ce que nous entendons par «profondeur». La définition de cette notion variera de modèle en modèle. Il s’agit encore une fois d’une méthode plus que d’une notion définie précisément. Idéalement, nous voulons identifier une quantité particulière (la même pour chaque «piège»), dépendant uniquement de l’environnement, et qui sera liée au temps moyen requis pour sortir d’un piège (conditionné sur l’environnement).

Pour l’arbre de Galton-Watson, où les pièges sont les sous-arbres finis dont la racine se trouve sur un chemin infini, la profondeur des pièges sera littéralement comprise comme la «profondeur» de ces sous-arbres finis (leur hauteur maximale). Pour la marche aléatoire sur l’environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , où les pièges sont les «creux» dans le potentiel, la profondeur d’un piège sera définie comme la «hauteur de la bosse» qui suivra le creux.

Pour les modèles de Bouchaud (totalement dirigé et biaisé), il paraît évident que la «profondeur» des pièges sera simplement  $\tau_x$ .

Si on considère une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  jusqu’au temps  $t$ , on peut penser que l’ordre de grandeur naturel pour un seuil de grands pièges serait un temps moyen de sortie de  $ct$  – une fraction quelconque  $c$  du temps écoulé. Toutefois, ceci pose un autre problème : quelle fraction ? On aimerait bien que tous les pièges qui retiendront le marcheur pour un temps «comparable» à  $t$  soient retenus comme des grands pièges.

Typiquement, pour cette raison, on utilisera comme seuil de grand piège une fonction de  $t$  négligeable devant  $t$ . Par exemple, on pourrait choisir  $t^{1-\epsilon}$  pour un certain  $\epsilon \in (0, 1)$ , ou  $t/\log t$ , etc.

**Remarque 1.5.1.** *Notons qu’on parle ici de façon générale en termes de «temps moyen de sortie d’un piège». Si on utilise plutôt une quantité qui n’est pas directement proportionnelle à ce temps moyen, il faudra ajuster le seuil en conséquence. Par exemple, dans le cas de la marche biaisée sur l’arbre de Galton-Watson, ou encore dans le cas de la marche sur l’environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , les quantités choisies (la profondeur d’un sous-arbre et la hauteur des fluctuations du potentiel, respectivement) varient comme le logarithme du temps moyen de sortie. Il faut donc adapter le choix du seuil, par exemple en prenant un seuil du*

petit ordre de  $\log t$  au lieu de  $t$  (voir [14, 13] et [20], ainsi que [7], sections 2.3.3 et 3.3.4, et remarque 3.21).

Dans le cas des modèles de Bouchaud,  $\tau_x$  est directement le temps moyen de sortie du piège, et on n'a donc pas vraiment à se soucier de cette distinction.

Dans le cas où on considérerait plutôt le processus  $X_t$  sur une échelle «spatiale» (ou de «distance»), on devra fixer le seuil en fonction de la distance significative (généralement de l'ordre de la distance parcourue  $n$ ). Puisque l'importance des pièges réside surtout dans le temps que le processus y passera, on souhaite toujours que le seuil de grandeur des pièges demeure du petit ordre du temps écoulé. Heureusement, les résultats de convergence obtenus pour le modèle de Bouchaud totalement dirigé (théorème 1.3.1) nous soufflent un indice : au temps  $t$ , la distance parcourue est de l'ordre de  $1/\mathbb{P}\{\tau_0 > t\}$ . On va donc employer  $\text{Inv}(n) = \inf\{t > 0 \mid \mathbb{P}\{\tau_0 > t\} < 1/n\}$  (l'inverse de  $1/\mathbb{P}\{\tau_0 > t\}$ ) comme estimation du temps écoulé lorsque la distance parcourue est  $n$ .

En l'occurrence, pour le modèle de Bouchaud biaisé, il se trouve que l'on aurait  $\text{Inv}(n) \sim n^{1/\alpha}$ .

Le choix du seuil de profondeur critique est par ailleurs tributaire de plusieurs exigences spécifiques. D'abord, on veut pouvoir négliger le temps passé dans tous les «petits pièges» (qui n'excèdent pas le seuil) face au temps total écoulé ( $t$  ou  $\text{Inv}(n)$ ). Il faut donc que les «petits pièges» soient suffisamment «peu profonds», ce qui encourage à fixer un seuil plus «bas».

D'un autre côté, on veut que les «grands pièges» (qui excèdent le seuil) soient relativement «rares» et de plus en plus espacés à mesure qu'on considère une échelle de plus en plus grande, ce qui tendrait à faire hausser le seuil. Cependant on veut aussi que le nombre de grands pièges compris dans le segment du processus étudié (soit avant d'avoir atteint la distance  $n$  ou le temps  $t$ ) diverge avec  $t$ , ce qu'un seuil trop haut empêcherait.

Dans son analyse du modèle de Bouchaud biaisé, O. Zindy emploie le seuil de profondeur suivant ([28]) :

$$g(n) = \frac{n^{1/\alpha}}{(\log n)^{\frac{2}{1-\alpha}}} \quad (1.5.1)$$

On constate effectivement qu'il s'agit à peu de choses près de l'ordre de grandeur attendu pour le temps écoulé lorsque  $X_t$  arrive au site  $n$ .

Dans les paragraphes qui suivent, nous survolerons brièvement les différents résultats préliminaires requis concernant les petits et grands pièges, spécifiquement dans le cas du modèle de Bouchaud, afin de donner une idée des différents éléments dont nous aurons besoin plus loin. Les démonstrations complètes sont dans ([28]).

### 1.5.2. Séparation des pièges

Ainsi que nous venons de le mentionner, nous souhaitons que les grands pièges soient séparés. De façon générale, cela nous permettra d'employer les résultats sur la transience directionnelle afin de nous assurer qu'on visitera les grands pièges «dans l'ordre» – c'est à dire qu'une fois passés à un nouveau grand piège, on ne retournera plus au grand piège précédent.

En utilisant la méthode des temps de régénération, on obtient un résultat analogue en montrant qu'il n'y a qu'un seul grand piège par bloc de régénération. Dans le modèle de Bouchaud, ce résultat doit être obtenu explicitement, puisqu'on ne fait pas référence à des temps de régénération.

Tout d'abord nous introduisons un peu de notation. On écrira  $\delta_0(n) = 0$  et  $\delta_{i+1}(n) = \inf\{j > \delta_i(n) \mid \tau_j > g(n)\}$ . Rappelons que  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}}$  est un vecteur aléatoire i.i.d. qui donne les temps moyens d'attente pour chaque site.  $\delta_i(n)$  est le  $i$ ème grand piège entre 0 et  $n$  à l'échelle de  $n$ . On abrégera  $\delta_i(n) = \delta_i$ , où la dépendance sur  $n$  sera simplement sous-entendue. On définit aussi  $\theta_n = \sup\{k \geq 0 \mid \delta_k \leq n\}$ .  $\theta_n$  est le nombre de pièges creux avant  $n$ . Remarquons que les  $\delta_i$  et  $\theta_i$  sont mesurables par rapport à l'environnement.

Soit  $\phi(n) = \mathbf{P}\{\tau_0 > g(n)\}$  la probabilité qu'un piège entre 0 et  $n$  soit grand. Alors  $\phi(n) \sim \frac{(\log n)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}{n}$ . Remarquons immédiatement que  $\delta_1$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $\phi(n)$ , et que  $\theta_n$  est une variable aléatoire binomiale de paramètres  $n, \phi(n)$ .

Le premier résultat à montrer concerne la distance entre les pièges creux. L'intérêt ici est de montrer que les pièges sont suffisamment distants pour assurer que lorsqu'un piège creux  $\delta_i$  est atteint, on ne reviendra plus en  $\delta_{i-1}$ . Bien sûr, on détermine le rayon qui doit séparer les pièges creux en fonction de l'échelle. Plus précisément on montre que

$$\mathbf{P}\left\{\min_{1 \leq i \leq \theta_n} (\delta_i - \delta_{i-1}) > \rho(n)\right\} = 1$$

pour une certaine fonction  $\rho$  qui croît le plus rapidement possible.

Rappelons que  $\nu(n)$  représente une espèce de «distance sécuritaire». Si  $X_t = x$ , alors on sait que pour  $u > t$ ,  $X_u > x - \nu(n)$  avec une probabilité tendant vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Par conséquent, on choisit  $\nu(n) = o(\rho(n))$ , ce qui nous assure (presque) qu'une fois un grand piège atteint, on ne revisitera plus les grands pièges précédents.

### 1.5.3. Temps passé dans les pièges

Dans le modèle de Bouchaud, le temps passé dans les petits pièges est donné tout simplement par  $\sum_{i=1}^{\theta_n} \tau_{Y_i} \mathbf{e}_i \mathbf{1}\{\tau_{Y_i} > g(n)\}$ . Dans [28], on montre que ce temps est inférieur à  $n^{1/\alpha} / \log n$  avec très forte probabilité (tendant vers 1). Ici, il faut se souvenir que  $n^{1/\alpha}$  est l'ordre de grandeur du temps écoulé avant d'atteindre  $n$  – ce que ce résultat nous dit, c'est que le temps passé dans les petits pièges est négligeable ( $o(n^{1/\alpha})$ ) devant le temps total

écoulé. Autrement dit, la proportion du temps total passé dans les grands pièges tendra vers 1 à mesure qu'on prendra une échelle de plus en plus grande.

Ce résultat est utile puisqu'il nous permettra de négliger ce qui se passe dans les petits pièges.

Cependant, l'essentiel du processus se déroule dans les grands pièges. On doit donc obtenir des résultats précis sur ce qui s'y passe. Typiquement, on cherche à obtenir une estimation de la loi (ou au moins de la queue) du temps passé dans un grand piège.

Pour le modèle de Bouchaud, on peut noter  $T_x$  le temps total passé sur le site  $x < n$ . On a donc

$$T_x = \sum_{i=0}^{\zeta_{n+\nu(n)}} \tau_{Y_i} \mathbf{e}_i \mathbf{1}\{Y_i = x\}$$

Ici, les  $\tau_i$  sont bien entendu les temps d'attente moyens donnés par l'environnement. Les  $\mathbf{e}_i$  sont une suite d'exponentielles i.i.d. On peut se permettre de couper la sommation au temps  $\zeta_{n+\nu(n)}$  puisqu'avec une probabilité tendant vers 1, on ne reviendra plus en  $x$  après ce temps.

Dans [28], on choisit de calculer la transformée de Laplace du temps passé dans un grand piège, c'est à dire  $\mathbb{E}_0 \left[ 1 - e^{\lambda T_x / n^{1/\alpha}} \middle| \tau_x > g(n) \right]$

Pour y parvenir, on remarque que l'on peut écrire  $T_x = \tau_x \left( \sum_{i=0}^{\zeta_{n+\nu(n)}} \mathbf{e}_i \mathbf{1}\{Y_i = x\} \right)$  Cette notation met en évidence le fait suivant : le temps passé dans un piège est le produit de deux facteurs : le temps moyen (la profondeur du piège) et une somme d'exponentielles indépendantes de paramètre 1, qui comporte  $N$  termes où  $N$  est le nombre de fois qu'on a visité  $x$ . Autrement dit, deux facteurs peuvent influencer le temps passé dans un piège : sa «profondeur» et le nombre de fois qu'on y retourne. Le temps passé à chaque visite peut fluctuer aussi. Toutefois, le nombre de fois qu'on retourne dans un piège  $x$  ne dépend que de  $p$  – pour tout dire, c'est simplement  $v^{-1} = 1/(p - q)$  (en moyenne). Et le temps passé à chaque visite (donné par  $\mathbf{e}_i$ ) est aussi «relativement petit» (variance finie).

L'intuition, c'est donc que le facteur dominant dans  $T_x$  doit être  $\tau_x$ . En faisant le calcul précisément, on obtient

$$\mathbb{E}_0 \left[ 1 - e^{-\lambda_n T_x} \middle| \tau_x > g(n) \right] \sim \frac{1}{n\phi(n)} \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} v^{-\alpha} \lambda^\alpha$$

où  $\lambda_n = \lambda/n^{1/\alpha}$ .

Remarquons que ceci est en fait la transformée de Laplace de  $T_x/n^{1/\alpha}$ , c'est à dire non pas directement le temps passé dans le piège  $x$ , mais plutôt cette même quantité renormalisée à l'échelle  $n^{1/\alpha}$  – qui est de l'ordre du temps total écoulé.

**Remarque 1.5.2.** On peut noter pour s'amuser que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $1 - e^{-\lambda_n T_x}$  peut être approximé par  $T_x/n^{1/\alpha}$  quand  $\lambda = 1$  tandis que  $n\phi(n)$  est l'espérance du nombre de pièges creux rencontrés. Autrement dit, en prenant de grandes libertés, ceci suggère que

«la proportion de temps passé dans le piège creux  $x$  avant d'atteindre  $n$  est inversement proportionnelle au nombre de pièges creux avant  $n$ »...

Notons que la convergence est valide ponctuellement, pour tout  $\lambda$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini. On reconnaît ici la transformée de Laplace d'une distribution parétienne.

Finalement, on obtient aussi un estimé pour le temps passé dans un rayon  $\nu(n)$  autour d'un grand piège. Si  $\bar{T}_x = \sum_{i=0}^{\zeta_{n+\nu(n)}} \tau_{Y_i} \mathbf{e}_i \mathbf{1} \{|Y_i - x| \leq \nu(n)\}$ , l'estimation est la même :

$$\mathbb{E}_0 \left[ 1 - e^{-\lambda_n \bar{T}_x} \mid \tau_x > g(n) \right] \sim \frac{1}{n\phi(n)} \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} v^{-\alpha} \lambda^\alpha$$

Ceci tient essentiellement au fait qu'il est très improbable qu'un autre grand piège se trouve dans le voisinage de  $x$ , et que le temps passé dans les petits pièges est négligeable.

Pour conclure, nous ferons l'observation suivante. Avec probabilité tendant vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour le modèle de Bouchaud biaisé,

- (1) Les pièges creux sont séparés par au moins  $2\nu(n)$  petits pièges...
- (2) ... ce qui signifie qu'une fois quitté la boule  $B_{\nu(n)}(\delta_i) = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - \delta_i| \leq \nu(n)\}$  autour d'un piège creux, on n'y revient plus.
- (3) Les temps passés dans ces boules  $B_{\nu(n)}(\delta_i)$  sont i.i.d. puisque les boules sont disjointes, et on connaît leur loi.

Au final, on a donc une suite de grands pièges, dans lesquels on passe des durées indépendantes et identiquement distribuées au bout desquelles on quitte pour se déplacer dans le grand piège suivant, et le temps de déplacement entre deux grands pièges est à chaque fois négligeable. Si cette description rappelle celle du modèle de Bouchaud totalement dirigé, ce n'est pas un hasard...

#### 1.5.4. Pièges et régénération

Nous terminons cette section (et ce chapitre) en discutant brièvement des pièges dans le contexte des temps de régénération. Nous reprendrons l'exemple de la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  afin d'illustrer les principes généraux dont nous discuterons ici.

Si le modèle de Bouchaud nous donne une bonne idée du type de résultats que nous devons obtenir, ces résultats ne sont pas obtenus avec la méthode des temps de régénération (du moins, pas dans [28]). Nous passerons donc ces résultats en revue, et nous ferons rapidement le lien avec la méthode des temps de régénération.

Nous avons déjà mentionné que, dans le contexte des temps de régénération, la séparation des grands pièges se manifeste par le fait qu'on ne rencontre (avec probabilité tendant vers 1 à grande échelle) au plus qu'un seul grand piège par bloc de régénération. Pour cette raison, il peut être pratique de ne plus étudier le modèle en termes des structures précises qui créent les pièges, mais plutôt en termes des blocs de régénération, tout simplement.



En effet, si il n'y a au plus qu'un grand piège dans un bloc de régénération, on peut simplement se préoccuper du temps passé dans un bloc de régénération plutôt que du temps passé dans un piège – ces quantités devraient de toute façon être similaires. Cette méthode a l'avantage que, pour peu qu'on ait des résultats suffisants sur la loi des blocs de régénération, on n'a plus besoin de se préoccuper de la structure exacte des pièges afin d'obtenir des résultats sur le vieillissement, par exemple.

Dans le prochain chapitre, nous tenterons de présenter un contexte pour la forme du résultat de vieillissement que nous cherchons à obtenir. Pour ce faire, nous présenterons une discussion d'ordre très générale sur les sommes de variables aléatoires, les processus stochastiques et, plus particulièrement, les processus de Lévy et de Poisson.



# Chapitre 2

---

## LE VIEILLISSEMENT

Nous avons déjà présenté quelques résultats dits «de vieillissement». Typiquement, si  $X_t$  est une marche aléatoire sur un environnement aléatoire sur  $S$  muni d'une métrique  $d$ , on s'attend à ce qu'un résultat de vieillissement prenne la forme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{d(X_{ht}, X_t) \leq \eta f(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (2.0.1)$$

pour  $h > 1, \eta > 0$  et une quelconque fonction  $f$  croissante.

Dans ce court chapitre, nous présenterons des éléments théoriques que nous emploierons ensuite pour justifier un peu mieux cette forme et comprendre d'où elle sort. Nous conclurons le chapitre en utilisant les idées théoriques présentées pour formuler un schéma de preuve d'ordre relativement général; c'est celui que nous suivrons pour montrer le vieillissement de la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ . À noter que ce schéma de preuve est justifié par la discussion qui le précède, mais il a d'abord été inspiré par la preuve du vieillissement pour le modèle de Bouchaud biaisé [28], elle même inspirée par l'étude de la marche aléatoire en milieu aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  [14, 13].

### 2.1. SOMMES DE VARIABLES I.I.D. ET LOIS STABLES

Nous débutons ce chapitre par une discussion théorique générale des sommes de variables aléatoires. Soit  $X_1, X_2, X_3, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On notera les sommes partielles de cette suite  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

L'enjeu est maintenant de trouver deux suites de constantes  $a_n$  et  $b_n$  telles que  $(S_n - a_n)/b_n$  converge en loi vers une quelconque variable aléatoire. On connaît au moins un cas pour lequel cela fonctionne. En effet, le théorème de la limite centrale nous garantit que si  $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0, 1)$$

où  $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ , et  $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2]}$ , et où  $\mathcal{N}(0, 1)$  est une variable aléatoire normale standard.

Qu'arrive-t-il si  $\mathbb{E}[X_1^2]$  n'existe pas ? On distingue deux cas : il se peut que  $\mathbb{E}[X_1]$  existe toujours. Dans ce cas, la loi des grands nombres tient encore, mais les fluctuations autour de la moyenne ne seront plus nécessairement Gaussiennes. L'autre possibilité, c'est bien sûr que  $\mathbb{E}[X_1]$  n'existe pas. Ici, même la loi des grands nombre échoue – on parle souvent de variables aléatoires à «queues lourdes». Dans les prochains paragraphes, nous survolerons les éléments théoriques importants permettant de comprendre les comportements limites de sommes de telles variables aléatoires i.i.d.

### 2.1.1. Lois stables

Pour commencer, on introduit la notion de loi **stable** ;  $X_1$  est de loi stable si il existe des suites  $a_n$  et  $b_n$  telles que  $(S_n - a_n)/b_n$  a toujours la même loi que  $X_1$ .

**Théorème 2.1.1.** <sup>1</sup>  *$X$  est une variable aléatoire de loi stable  $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$  si et seulement si sa fonction caractéristique  $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$  est donnée par :*

$$\phi(t) = e^{it\mu - |ct|^\alpha(1 - i\beta H(t, \alpha))} \quad (2.1.1)$$

où on a

$$H(t, \alpha) = \operatorname{sgn} t \times \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log t & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $c > 0$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Si  $\beta = 0$ , avec  $\alpha = 2$ , on reconnaît dans (2.1.1) la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale  $(\mu, 2c)$ . Si  $\alpha = 1$ , il s'agit plutôt d'une variable aléatoire suivant la distribution de Cauchy.

De façon générale, on envisage  $\mu$  comme un paramètre de translation,  $c$  contrôle la largeur du «pic» de la distribution,  $\alpha$  contrôle le comportement asymptotique de la distribution, et  $\beta$  contrôle «l'équilibre» de la distribution. Lorsque  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique. Si  $\beta = \pm 1$ , on dit que la distribution est complètement asymétrique. Lorsque  $\alpha < 1$  et  $\beta > 1$ , la distribution est entièrement supportée sur  $(\mu, \infty)$ .

Évidemment, si les  $X_i$  sont issus de la même loi stable,  $(S_n - b_n)/a_n$  a toujours la même loi que  $X_1$ , et donc converge en loi vers une loi stable. Ceci dit, cette famille de lois paraît restreinte, et les hypothèses sont très contraignantes. Si on n'exige pas que les  $(S_n - b_n)/a_n$  aient toutes la même loi, mais seulement que la limite soit une loi stable, l'ensemble des distributions éligibles s'agrandit considérablement. On dit qu'une distribution  $F$  est dans le **domaine d'attraction** de la loi stable  $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$  (noté  $D(\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c))$ ) si, lorsque les  $X_i$  sont issus de la distribution  $F$ , il existe des suites  $a_n$  et  $b_n$  telles que  $(S_n - a_n)/b_n$  converge en loi vers  $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$ .

**Remarque 2.1.1.** *Toutes les distributions aléatoires ayant un second moment fini sont dans le domaine d'attraction de  $\mathcal{S}(2, 0, 0, 1) = \mathcal{N}(0, 1)$ , par le théorème de la limite centrale.*

1. Ce résultat est démontré entre autres dans [17].

À partir d'ici, les questions naturelles sont les suivantes :

- (1) Quelles fonctions sont dans  $D(\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c))$  ?
- (2) Pour ces fonctions, quelles sont les constantes  $b_n$  et  $a_n$  ?

### 2.1.2. Queues à variation régulière

Pour répondre à ces questions, nous devons d'abord mentionner quelques notions spécifiques qui concernent surtout le comportement asymptotiques de fonctions réelles.

Soit  $f$  une fonction positive définie sur un voisinage de l'infini. On dira que  $f$  est une **fonction à variation régulière** si il existe une fonction  $u(t)$  sur  $(0, \infty)$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = u(t)$$

avec  $u(t) < \infty$  pour tout  $t \in (0, \infty)$ .

Le premier constat, c'est qu'on doit avoir que  $u(t) = t^\alpha$  pour un quelconque  $\alpha$  réel. En effet,  $u(st) = \lim_x f(stx)/f(x) = \lim_x f(stx)/f(tx) \times f(tx)/f(x) = u(s)u(t)$  et ainsi on a  $\log u(st) = \log u(s) + \log u(t)$ . Si  $g = \log u$ , alors on a que  $g(t) = \alpha \log(t)$  pour un certain  $\alpha$ , puisque les solutions à l'équation fonctionnelle  $g(st) = g(s) + g(t)$  sont des multiples réels du logarithme. En prenant l'exponentielle, on obtient  $u(t) = t^\alpha$ .

On notera  $VR$  l'ensemble des fonctions à variation régulières, et  $VR(\alpha)$  la classe de fonctions à variation régulière pour lesquelles  $u(t) = t^\alpha$ . Premier constat : si  $f \in VR(\alpha)$ ,  $g \in VR(\beta)$ , alors  $fg \in VR(\alpha + \beta)$ . Si  $f \in VR(0)$ , nous dirons que  $f$  est une **fonction à variation lente** et nous noterons  $VR(0) =: VL$ .

On a évidemment que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(x \mapsto x^\alpha) \in VR(\alpha)$ , évidemment. Ceci signifie qu'on peut toujours écrire  $f \in VR(\alpha)$  comme  $f(x) = L(x)x^\alpha$ , où  $L \in VL$  est une fonction à variation lente.

Si  $f$  et  $g$  sont à variation lente,  $1/f$ ,  $f + g$ ,  $fg$  et  $f \circ g$  sont aussi à variation lente. Si  $f \in VR(\alpha)$  et  $g \in VR(\beta)$ ,  $1/f \in VR(-\alpha)$ ,  $f + g \in VR(\alpha)$  si  $\alpha = \beta$ , et  $f \circ g \in VR(\alpha\beta)$ . On remarque que si  $f$  est une fonction à variation lente,  $f(x) = o(x^r)$  pour tout  $r > 0$ .

Un résultat intéressant sur les fonctions à variation régulières est le suivant : Si  $f(x)$  est une fonction à variation régulière sur  $(A, \infty)$  avec exposant  $\alpha$ , on peut définir  $F(x) = \int_A^x f(t)dt$ . Supposons qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital. On obtient  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(tx)/F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} tf(tx)/f(x) = t^{\alpha+1}$  pour découvrir que  $F$  est aussi une fonction à variation régulière avec exposant  $\alpha + 1$ . (En fait, ceci est vrai même sans que  $f$  ne soit nécessairement continue, pourvu que  $f$  soit Lebesgue-mesurable.)

**Théorème 2.1.2.** <sup>2</sup> Si  $f \in VR(\alpha)$  et  $F(x) = \int_A^x f(t)dt$ , on a

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$  et  $F \in VR(\alpha + 1)$  lorsque  $\alpha > -1$  ;
- (2) De plus,  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)/F(x) = \alpha + 1$

---

2. Ce théorème est mentionné entre autres dans le chapitre préliminaire de [9].

Si  $X$  est une variable aléatoire, on dit que  $X$  a une queue à variation régulière si  $Q(x) = \mathbb{P}\{|X| > x\}$  (pour  $x \geq 0$ ) est une fonction à variation régulière. Si  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ , et  $\bar{F} = 1 - F$ , on a  $Q(x) = \bar{F}(x) + F(-x)$ . On exige aussi que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/Q(x)$  existe.

Supposons maintenant qu'on définit  $E_r(x) = \mathbb{E}[|X|^r \mathbf{1}\{|X| < x\}]$ . Bien sûr, l'intégration par partie donne

$$E_r(x) = Q(x)x^r + r \int_0^x t^{r-1}Q(t)dt$$

Et avec  $Q(x) = L(x)x^{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), on a  $E_r(x) = L(x)x^{r-\alpha} + rF(x)$ , où  $F(x) = \int_0^x L(t)t^{r-1-\alpha}dt$ . Par le théorème 2.1.2, on a finalement que si  $r - \alpha > 0$ ,  $E_r \in VR(r - \alpha)$ , et  $\lim_x E_r(x) = \mathbb{E}[|X|^r] = \infty$ .

Autrement dit, si  $X$  est une variable aléatoire avec une queue à variation régulière d'exposant  $-\alpha$ , pour  $\alpha > 0$  le  $r$ ème moment de  $X$  n'est pas défini pour  $r > \alpha$ .

### 2.1.3. Généralisation du théorème de la limite centrale

Le résultat suivant caractérise les domaines d'attraction de lois stables.

**Théorème 2.1.3** ([12], Théorème 3.7.2). *Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. avec distribution  $F$  telle que  $Q(x) = \bar{F}(x) + F(-x)$  est une fonction à variation régulière avec exposant  $-\alpha$ , pour  $\alpha \in (0, 2)$  et telle que  $\lim_x \bar{F}(x)/Q(x)$  existe. Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Alors il existe  $a_n$  et  $b_n$  tels que*

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \rightarrow \mathcal{S}(\alpha) \quad (2.1.2)$$

où la convergence est en distribution vers une loi stable d'exposant  $\alpha$ . Les suites  $a_n$  et  $b_n$  sont données par

$$a_n = \inf \left\{ x : \mathbb{P}\{|X_1| > x\} < n^{-1} \right\} =: \text{Inv}_{X_1}(n) \quad b_n = n\mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}\{|X_1| \leq a_n\}]$$

Si  $\alpha < 1$ , on peut prendre  $b_n = 0$ , puisque  $b_n$  est négligeable devant  $a_n$ .

**Remarque 2.1.2.** *On reste assez vague sur la loi exacte – on sait qu'il existe un jeu de paramètres tels que  $(S_n - b_n)/a_n$  convergera vers une loi  $\alpha$ -stable avec ces paramètres. Par exemple, si on considère une somme de variables aléatoires strictement positives, et que  $\alpha < 1$ , évidemment, puisqu'on a pris  $b_n = 0$ ,  $S_n/a_n$  est aussi strictement positive. Or, on sait que pour qu'une variable  $\mathcal{S}_\alpha$  de loi  $\alpha$ -stable soit strictement positive avec probabilité 1, il faut que  $\beta = 1$ . Dans ces cas, la distribution est une loi stable complètement asymétrique. Les paramètres  $\mu$  et  $c$  dépendent de la forme de la distribution de  $X_1$ .*

**Remarque 2.1.3.** *Constatons que si  $\alpha = 2$ , les conditions citées plus haut élargissent encore davantage le domaine d'attraction de la Gaussienne. En effet, il suffit que  $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}\{|X| < x\}]$  soit une fonction à variation lente en  $x$  pour que la distribution de  $X_1$  soit dans le domaine d'attraction de la loi normale (voir [17], chapitre 6, théorème 11). Toutefois, les suites  $a_n$  et  $b_n$  ne seront pas nécessairement les mêmes si  $X_1$  n'a pas une variance finie.*

## 2.2. PROCESSUS DE LÉVY ET SUBORDINATEURS

Maintenant que nous avons généralisé les théorèmes limites importants pour obtenir des résultats, il serait également intéressant de considérer la convergence en processus, puisque c'est vraiment elle qui servira à nous donner des indices sur la forme des résultats de vieillissement que nous recherchons.

Pour ce faire, il convient d'introduire rapidement quelques définitions qui seront utiles.

**Définition 2.2.1.** Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique à temps continu. Nous dirons que  $Y_t$  est un **processus de Lévy** si :

- (1)  $Y_0 = 0$  p.s. ;
- (2) La fonction  $t \mapsto Y_t$  est càdlàg (c'est à dire qu'elle est toujours égale à sa limite approchée par la droite :  $f(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$  pour tout  $x$ ) ;
- (3) Les incréments sont indépendants (c'est à dire que pour toute suite  $t_1, t_2, \dots$ , les  $(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$  sont indépendants) ;
- (4) pour tout  $t, s > 0$ ,  $Y_t - Y_s$  est distribué comme  $Y_{t-s}$ .

On dit que c'est un processus de Lévy  $\alpha$ -stable si  $Y_t$  est distribué comme  $t^{1/\alpha} \mathcal{S}_\alpha$  où  $\mathcal{S}_\alpha$  est une variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable. Le processus est dit  $\alpha$ -stable, et il est dit complètement asymétrique si  $\mathcal{S}_\alpha$  est complètement asymétrique.

Lorsqu'un processus de Lévy est strictement positif (donc croissant), on dit qu'il s'agit d'un **subordonateur**. Par exemple, si  $\mathcal{S}_\alpha$  est une variable aléatoire  $\alpha$ -stable complètement asymétrique, alors  $Y_t$  est un subordonateur  $\alpha$ -stable.

Soit  $X_1$  dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre  $\alpha$ . On peut considérer  $S_n$  comme une marche aléatoire. Dans ce cas, la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  constitue une trajectoire sur  $\mathbb{R}$ . Fixons  $T > 0$ . On notera  $Y_t^{(k)}$  le processus défini comme suit :

$$Y_t^{(k)} = \frac{S_{\lfloor kt \rfloor} - b_{\lfloor kt \rfloor}}{\text{Inv}_{X_1}(k)}$$

Intuitivement,  $Y_t^{(k)}$  constitue une suite de processus stochastiques « en escaliers » où l'intervalle entre les pas est de longueur  $1/k$ . Comme le temps s'écoule « plus rapidement » par un facteur  $k$ , la position obtenue après  $k$  pas ( $t = 1$ ) doit être renormalisée pour que la suite de processus  $(Y_t^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge.

Il est facile de se convaincre que  $Y_t^{(k)}$  converge vers un processus de Lévy  $\alpha$ -stable. Pour faire simple, supposons que  $Q(x) \sim x^{-\alpha}$ . Dans ce cas, évidemment  $\text{Inv}_{X_1}(n) = n^{1/\alpha}$ , et à la limite où  $k$  tend vers l'infini, il paraît évident que  $Y_t = \lim_k Y_t^{(k)}$  aura la loi de  $t^{1/\alpha} \mathcal{S}_\alpha$ . En outre, la propriété de Markov assure que les incréments seront indépendants et que de même,  $Y_t - Y_s$  sera distribuée comme  $Y_{t-s}$ .

**Remarque 2.2.1.** Le résultat précis donne la convergence en processus dans la topologie de Skorokhod. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette topologie, qui sont extrêmement

techniques. Pour plus d'informations sur la topologie de Skorokhod, consulter l'article de Skorokhod lui-même [24].

## 2.3. DESCRIPTION DES SUBORDINATEURS

Avant de continuer plus loin, nous présenterons une brève description des principales caractéristiques des processus de Lévy. La discussion qui suit est appuyée principalement sur les résultats des chapitres O, I et III du livre de Jean Bertoin sur les processus de Lévy [9].

### 2.3.1. Exposants caractéristiques et de Laplace

Les processus de Lévy peuvent être caractérisés par leurs exposants caractéristiques. Nommément, on sait qu'un processus de Lévy  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est entièrement caractérisé par sa fonction caractéristique  $\phi_t(\lambda) = \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_t} \right]$ .

Or, il se trouve que pour tout processus de Lévy, on peut écrire  $\phi_t(\lambda) = e^{-t\Psi(\lambda)}$ .  $\Psi(\lambda)$  est appelé l'**exposant caractéristique** et il a toujours la forme

$$\Psi(\lambda) = ia\lambda + \frac{Q(\lambda)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}} \right) \mu(dx) \quad (2.3.1)$$

Ici,  $a$  est un nombre potentiellement complexe,  $Q$  est une forme quadratique et  $\mu$  est une mesure sur  $\mathbb{R}$ , que l'on appellera la **mesure de Lévy**. À l'inverse, un processus  $Y_t$  dont la fonction caractéristique est donné par  $e^{-t\Psi(\lambda)}$ , avec  $\Psi(\lambda)$  de la forme décrite dans l'équation (2.3.1) est un processus de Lévy pourvu que la mesure  $\mu(dx)$  respecte la condition que  $\int_0^\infty (1 \wedge x) \mu(dx) < \infty$ .

Dans le cas spécifique d'un subordonateur, puisque toutes les valeurs sont strictement positives, on peut s'intéresser à la transformée de Laplace  $\mathfrak{L}Y_t(\lambda) = \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda Y_t} \right]$ . Remarquons qu'il s'agit en fait d'évaluer  $\phi_t(i\lambda)$ . De plus, puisque les lois sont complètement asymétriques, on supprime la forme quadratique  $Q$ .

On obtient donc l'écriture  $\mathfrak{L}Y_t(\lambda) = e^{-t\Phi(\lambda)}$  où  $\Phi(\lambda)$  est l'**exposant de Laplace** et a la forme

$$\Phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \mu(dx) \quad (2.3.2)$$

$\mu$  est toujours la mesure de Lévy. Elle est contrainte par  $\int_0^\infty (1 \wedge x) \mu(dx) < \infty$ , entre autres.

### 2.3.2. Discontinuités et processus de Poisson

L'intérêt d'étudier ces caractérisations, c'est que la mesure de Lévy a une interprétation assez intéressante. Pour bien la comprendre, cependant, il convient d'abord d'étudier un cas particulier des subordonateurs : les processus de Poisson.

**Définition 2.3.1.** *Le processus de Poisson d'intensité  $c$  sur  $\mathbb{R}^+$  est un subordonateur  $(N_t)_{t \geq 0}$ , et la loi de  $N_1$  est une loi de Poisson de paramètre  $c$ .*



Autrement dit, les incréments  $N_s - N_t$  sont des variables aléatoires de loi Poisson de paramètre  $c(s - t)$ .

### 2.3.2.1. Construction simple des processus de Poisson

On peut facilement construire un processus de Poisson d'intensité  $c$ . Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots$  une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre  $c$ , et soit  $\chi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  pour tout  $n$ . Si on considère l'ensemble  $\mathcal{X} = \{\chi_1, \chi_2, \dots\}$  l'ensemble des sommes partielles de la suite des  $\xi_i$ , et que l'on note  $N_t = \text{Card}(\mathcal{X} \cap [0, t))$ , alors  $(N_t)_{t \geq 0}$  a la loi d'un processus de Poisson d'intensité  $c$ .

Autrement dit, un processus de Poisson sur la demi-droite réelle positive peut être vu comme un ensemble de points «uniformément distribués» sur la droite réelle avec une «densité moyenne de  $c$  points par unité de longueur».

On peut aussi construire une mesure à partir de  $N_t$ , puisque c'est un processus croissant. Si l'on note simplement  $\tilde{N} \{[0, t)\} = N_t$ , on a en effet une mesure sur les boréliens de  $\mathbb{R}^+$ . Il s'agit de la mesure de comptage qui donne une masse de 1 unité à tous les «points aléatoires» sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exemple 2.3.1.** Si  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $N$  la mesure associée au processus de Poisson construit plus haut sur  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\int f N(dx) = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ .

### 2.3.2.2. Processus de points de Poisson

On peut facilement généraliser la notion de processus de Poisson sur  $\mathbb{R}^+$  à n'importe quel espace  $\Omega$ , pourvu qu' $\Omega$  soit muni d'une tribu  $\mathcal{F}$  et d'une mesure  $\mathbf{m}$ .

**Définition 2.3.2.** Un **processus ponctuel de Poisson**, ou processus de points de Poisson sur un espace mesuré  $\sigma$ -fini  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{m})$  est une mesure aléatoire  $N : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

- Pour tout  $B, B'$  disjoints,  $N(B) \perp N(B')$
- $N(B)$  est une variable aléatoire de loi Poisson avec paramètre  $\mathbf{m}(B)$ .

Puisque  $\Omega$  est  $\sigma$ -fini pour  $\mathbf{m}$ , on peut partitionner  $\Omega$  en  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  tels que  $m_i = \mathbf{m}(\Omega_i) < \infty$  pour tout  $i$ . On choisit donc  $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots$  une suite de variables aléatoires uniformes indépendantes dans  $\Omega_i$ , et on note  $\mathcal{X}_i = \{\xi_{i,j} : 1 \leq j \leq n_i\}$  où les  $n_i$  sont des variables aléatoires de loi Poisson de paramètres  $m_i$  indépendantes.

Finalement, on écrit  $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$  et on définit  $N(B) = \text{Card}(\mathcal{X} \cap B)$ . La mesure  $N$  est un processus de points de Poisson d'intensité  $\mathbf{m}$ .

Il suffit de prendre  $\mathbb{R}^+$  et les boréliens avec la mesure  $\mathbf{m}(dx) = cdx$  ( $c$  fois la mesure de Lebesgue) pour recouvrer le processus de Poisson d'intensité  $c$ .

### 2.3.2.3. Intensités-produits et processus de points de Poisson composés

Pour le processus de Poisson sur  $\mathbb{R}^+$ , les sauts sont tous de la même hauteur. On peut créer un **processus de Poisson composé**, qui est un objet un peu plus général. Les sauts seront encore distribués sur  $\mathbb{R}^+$  comme un processus de points de Poisson. Par contre, la valeur des sauts changera.

Pour faire ceci, on commence avec un processus de points de Poisson  $N$  sur l'espace  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , avec intensité  $\mathbf{m}(dxdy) = (cdx) \times (\nu(dy))$ , où  $\nu(dy)$  est une mesure sur  $\mathbb{R}$ .

La mesure  $N(\{x\} \times \mathbb{R}) \leq 1$  presque sûrement. On note  $x_1 = \min \{x \in \mathbb{R}^+ : N(\{x\} \times \mathbb{R}) = 1\}$  et  $x_{i+1} = \min \{x > x_i : N(\{x\} \times \mathbb{R}) = 1\}$ , puis  $y_i = \inf \{y \in \mathbb{R} : N(\{x_i\} \times (-\infty, y)) = 1\}$ . Alors, les couples  $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont la suite de nos «points de Poisson».

On peut alors définir  $N_t = \sum_{i: x_i \leq t} y_i$ .  $N_t$  est un processus de Poisson composé. On peut aussi définir  $N(dx) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \delta_{x_i}(dx)$  où  $\delta_t(dx)$  est la mesure  $\delta$  (parfois dite «de Dirac») qui donne une masse de 1 au point  $t$ .

### 2.3.2.4. Lien avec les processus de Lévy

Pour nous, l'intérêt principal d'un processus de Lévy  $Y_t$  avec une mesure de Lévy  $\mu(dy)$  est que les discontinuités de  $Y_t$  sont données par le processus de Poisson composé sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  d'intensité  $\mathbf{m}(dtdy) = dt \times \mu(dy)$ , où les points  $(t_i, y_i)$  (construits comme précédemment) représentent le moment  $(t_i)$  et la hauteur  $(y_i)$  des sauts.

Pour les sous-ordinateurs  $\alpha$ -stables (avec  $\alpha \in (0, 1)$ ), par exemple, l'exposant de Laplace est

$$\Phi(\lambda) = c\lambda^\alpha = \frac{c\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) x^{-1-\alpha} dx$$

Par identification, on reconnaît que la mesure de Lévy d'un sous-ordinateur  $\alpha$ -stable est simplement  $\mu(dx) = \frac{c\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-1-\alpha} dx$ .

Autrement dit, la mesure de Lévy donne une interprétation de la distribution des discontinuités du processus de Lévy qu'elle sous-tend.

### 2.3.3. Passage de seuils pour les sous-ordinateurs

Si  $Y_t$  est un sous-ordinateur stable, sa trajectoire est constituée de segments croissants continus, entrecoupés de sauts positifs. Étant donné un niveau  $y > 0$  fixe, puisque  $Y_t$  est un sous-ordinateur, le «temps d'atteinte»  $T(y) = \inf \{t \geq 0 : Y_t \geq y\}$  est presque sûrement fini. On notera  $Y_{T(y)-} := \lim_{t \rightarrow T(y)-} Y_t$  la position de  $Y_t$  «juste avant» le temps où  $Y_t$  excède  $y$ . On remarque que l'événement  $\{Y_{T(y)} = y\}$  est le résultat de l'une de deux alternatives.

- (1) Soit le seuil  $y$  est traversé «continûment» (c'est à dire durant un des segments où la trajectoire de  $Y_t$  est continue ;
- (2) Soit le seuil  $y$  est le «point d'atterrissage» exact d'un saut ;

La seconde option paraît peu probable. En fait, on a simplement que  $\mathbb{P}\{Y_{T(y)} = y\} = 0$  lorsque le paramètre  $a$  (dans l'exposant de Laplace; parfois aussi appelé  $d$  pour *drift*) est nul. En particulier, c'est le cas pour les subordonateurs  $\alpha$ -stables.

Autrement dit, pour n'importe quel seuil  $y > 0$ , le passage au-delà de  $y$  se fait toujours par un saut. On peut alors se demander où se trouvait  $Y$  avant ce saut – autrement dit, on peut chercher la loi de  $Y_{T(y)-}/y$ .

À partir de maintenant, nous nous attacherons surtout à obtenir ce résultat pour un subordonateur  $\alpha$ -stable ( $\alpha \in (0, 1)$ ).

Le résultat que l'on obtient est le suivant :

**Théorème 2.3.1** (Loi de l'arc-sinus). *Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un subordonateur  $\alpha$ -stable. Alors, pour tout  $y$ , nous avons*

$$\mathbb{P}\left\{\frac{Y_{T(y)-}}{y} < u\right\} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^u z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} dz \quad (2.3.3)$$

On reconnaît le côté droit de (2.3.3) immédiatement comme le côté droit des résultats de vieillissement, la loi de l'arc-sinus généralisé.

**IDÉE D'UNE PREUVE.** Pour démontrer ce résultat, Bertoin [9] emploie une méthode analytique rapide et qui repose entre autres sur la notion de mesure potentielle ainsi que sur les propriétés analytiques de l'exposant de Laplace. Nous ne reproduirons pas cette preuve directement. Néanmoins, nous aimerions présenter rapidement un schéma de raisonnement plus intuitif. La discussion qui suit n'est pas complètement rigoureuse.

Commençons par noter  $(t_i, y_i)$  les couples «temps-hauteur» des discontinuités de la trajectoire  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . On se souviendra que les  $y_i$  sont des variables aléatoires i.i.d. de densité  $\mu(dy)$  où  $\mu$  est la mesure de Lévy.

Pour le reste de notre raisonnement, nous supposons que la proportion de la «distance» parcourue continûment avant  $y$  est négligeable face à la distance parcourue «par sauts» avant  $y$ . Si on définit  $S_n = \sum_{i=1}^n y_i$  la distance parcourue en  $n$  sauts et  $\ell_y = \sup\{n : S_n < y\}$ , on va alors approximer  $Y_{T(y)-}/y$  par  $S_{\ell_y}/y$ .

On cherche alors la loi de  $S_{\ell_y}/y$ . On a, pour  $0 < a < b < 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{\ell_y}/y \in (a, b)\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_i/y \in (a, b), \ell_y = i\} \\ &= \int_a^b \left( \mathbb{P}\{y_{i+1} > 1-t\} \sum_{i=1}^{\infty} d\mathbb{P}\{S_i/y < t\} \right) \end{aligned}$$

On sait que  $\mathbb{P}\{y_{i+1} > 1-t\} = \mu((1-t, +\infty))$ . On pose  $U(dt) = \sum_{i=1}^{\infty} d\mathbb{P}\{S_i/y < t\}$ .

On peut alors déterminer le comportement de  $U(dx)$  en remarquant que sa transformée de Laplace est donnée par

$$\mathfrak{L}U(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda S_i/y} \right] = (1 - \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda y_1/y} \right])^{-1}$$

( $S_i$  est une somme de variables aléatoires i.i.d. de la même distribution que  $y_1$ ).

En appliquant un théorème Taubérien pour la loi de  $y_1$ , puis en inversant la transformation de Laplace sur le résultat, on peut finir par obtenir le résultat.  $\square$

Comme mentionné précédemment, le schéma de raisonnement que nous avons présenté n'est pas rigoureux, et ce n'est pas celui employé dans [9]. Nous l'avons présenté car c'est sur ce schéma que nous nous appuierons plus tard pour démontrer notre résultat de vieillissement. C'est aussi sur ce genre de raisonnement que s'appuient [13, 28] pour démontrer les résultats de vieillissement respectifs pour la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  et le modèle de Bouchaud biaisé.

Avant d'illustrer clairement comment ceci est lié à la propriété de vieillissement, nous notons simplement que le théorème 2.3.1 peut être employé pour calculer la probabilité qu'un subordonateur stable  $Y_t$  saute par-dessus un intervalle  $(a, b]$ .

**Corollaire 2.3.1.** *Soient  $0 < a < b$ . La probabilité que  $Y_t$  saute par-dessus l'intervalle  $(a, b]$  est donnée par*

$$\mathbb{P} \left\{ Y_{T(b)^-} < a \right\} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{a/b} z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} dz \quad (2.3.4)$$

Ceci est vrai puisque avec probabilité 1,  $Y_{T(b)} > b$ , ce qui signifie que pour sauter par-dessus l'intervalle  $(a, b]$ , il faut simplement que, «juste avant de passer par dessus  $b$ », le processus n'ait pas encore atteint  $a$  ( $Y_{T(b)^-} < a$ ).

## 2.4. LIEN AVEC LE VIEILLISSEMENT

Voici maintenant venu le temps de revenir à notre fil conducteur. Nous allons employer les propriétés des subordonateurs stables pour justifier intuitivement la forme des résultats de vieillissement.

Tout d'abord, rappelons brièvement le modèle de pièges de Bouchaud totalement dirigé. Dans ce modèle, le processus « horloge » (que nous notons  $\sum_{i=1}^n T_i$  à la section 1.3.1) est clairement une somme de variables aléatoire avec queue  $Q(x) \sim x^{-\alpha}$ , et nous avons même mentionné la convergence en processus vers un subordonateur stable.

Si nous notons  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$  en reprenant la notation de la section 1.3.1, et que nous considérons  $Y_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{\lfloor kx \rfloor}}{k^{1/\alpha}}$  le processus limite, alors  $Y_x$  est un subordonateur stable.

Nous avons vu que le processus stochastique  $Y_x$  est discontinu et que si  $(x_i, y_i)$  est une suite de points où  $x_i$  est l'endroit de la  $i$ ème discontinuité et  $y_i$  est la hauteur du saut (toujours positive), alors  $(x_i, y_i)$  est un processus de Poisson composé. Notons que nous employons

pour  $Y$  l'indice  $x$ , surtout pour souligner que  $Y_x$  est la limite du processus «horloge», et que son paramètre est une échelle de «distance», et pas de temps.

D'abord, interprétons ces discontinuités. Puisque  $Y_x$  est un processus de Lévy (donc continu à droite), supposons qu'au point  $x_i$ , on ait  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} Y_{x_i - \epsilon} < a$  et  $Y_{x_i} > b > a$ , soit qu'au point  $x_i$ , le processus  $Y_x$  fasse un saut par dessus l'intervalle de  $a$  à  $b$ . Bien que ce qui suit ne soit pas un raisonnement parfaitement rigoureux, cela devrait servir l'intuition suffisamment pour nos besoins. Remarquons immédiatement que l'on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{\lfloor k(x_i - \epsilon) \rfloor}}{k^{1/\alpha}} < a \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{\lfloor kx_i \rfloor}}{k^{1/\alpha}} > b$$

Intuitivement, lorsque l'échelle spatiale est relativement grande ( $k \rightarrow \infty$ ), on a que, en restant au site  $kx_i$ , on saute du temps  $ak^{1/\alpha}$  au temps  $bk^{1/\alpha}$ . Considérons par exemple  $x_i = 1$ . Alors, ce que cela signifie est simple : si  $Y_1 - Y_{1-}$  saute par dessus l'intervalle  $[a, b]$ , cela signifie qu'entre les temps  $ak^{1/\alpha}$  et  $bk^{1/\alpha}$ , on n'aura pas bougé.

Nous allons maintenant inverser la perspective, et nous concentrer sur la marche plutôt que l'horloge. Soit  $X_t$  le processus du modèle de Bouchaud totalement dirigé. Alors, on sait qu'au temps  $t$ , on a parcouru une distance d'à peu près  $t^\alpha$ . Autrement dit,  $k^{1/\alpha}$  est à peu près de l'ordre du temps écoulé  $t$ . À la limite où  $t$  tend vers l'infini, donc, on a que si  $Y_x$  saute, à un quelconque moment, par dessus l'intervalle  $[a, b]$ , cela signifie que lorsque  $t$  est grand,  $X_{at} = X_{bt}$ , et vice-versa.

C'est alors qu'intervient la théorie des subordonateurs stables de nouveau. En effet, rapelons le corollaire 2.3.1 On fait le lien, parce que l'on remarque que lorsque  $t$  est grand, la probabilité que  $X_t = X_{ht}$  doit tendre vers la probabilité que le subordonateur stable vers lequel tend l'horloge (après renormalisation) – appelons-le l'horloge-limite – saute par dessus l'intervalle  $(1, h]$ .

Dans les faits, on n'obtiendra pas toujours  $X_t = X_{ht}$  – cela dépend de la façon précise dont les pièges sont réalisés dans les différents modèles. Cependant, pourvu que le déplacement du processus à l'intérieur d'un piège soit négligeable devant le déplacement total, un saut par dessus l'intervalle  $(1, h]$  pour l'horloge-limite est équivalent au fait que la distance entre  $X_t$  et  $X_{ht}$  soit négligeable devant la distance totale parcourue – en effet, un saut par dessus  $(1, h]$  dans l'horloge limite est «équivalent» à ce que  $X_t$  et  $X_{ht}$  soient dans le même piège lorsque  $t$  est grand.

À supposer que la taille (l'étendue) d'un grand piège à l'échelle du temps  $t$  puisse être donnée par une fonction  $f(t)$ , on peut comparer  $d(X_t, X_{ht})$  à  $f(t)$  pour obtenir un résultat ne faisant pas référence aux pièges explicitement. On constate par exemple que dans le modèle de marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ , à la limite où  $t$  tend à l'infini, les «vallées» qui constituent les pièges ne seront pas forcément concentrées en un site. Cependant, on sait qu'elles seront «d'une étendue de l'ordre de  $\log t$ ».

## 2.5. UN SCHÉMA DE PREUVE

L'avantage primordial de ce constat, c'est qu'il permet de dégager une méthode de preuve pour montrer le vieillissement.

- (1) Employer les résultats préliminaires décrits dans la section 1.5 (le temps passé dans les petits pièges est négligeable, le temps passé dans les grands pièges a une queue à variation régulière, une forme de transience directionnelle) pour montrer que :
  - (a)  $X_t$  est dans le dernier grand piège rencontré au temps  $t$  ;
  - (b)  $X_{ht}$  est dans le dernier grand piège rencontré au temps  $ht$  ;
  - (c) Ces deux pièges coïncident avec probabilité  $\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy$ . Pour montrer cela, nous nous appuyerons sur les idées présentées plus haut pour la preuve du théorème 2.3.1.
- (2) Obtenir une borne  $f(t)$  de l'étendue parcourue par  $X_t$  dans un grand piège afin de montrer ces deux résultats :
  - (a) Lorsque  $X_t$  et  $X_{ht}$  sont dans le même piège, ils sont relativement rapprochés (à distance  $\leq \eta f(t)$ ) ;
  - (b) Lorsque  $X_t$  et  $X_{ht}$  sont dans deux pièges différents, ils sont plus éloignés (à distance  $> \eta f(t)$ ) ;

Les résultats 1a et 1b sont une conséquence du fait que les petits pièges sont négligeables devant le temps  $t$ . Le résultat 1c est l'endroit où l'on montre que «notre processus horloge sautera par dessus  $[t, ht]$ ». Cela est basé sur le fait que les petits pièges sont négligeables (donc que le déplacement du processus horloge entre les discontinuités est négligeable) et que le temps passé dans les grands pièges a une queue à variation lente (ce sont nos «discontinuités»). Le fait que  $X_t$  et  $X_{ht}$  sont tous les deux dans un grand piège reflète le fait que le saut par dessus  $(1, h]$  se produit lors d'une «discontinuité».

Finalement, les résultats 2a et 2b servent uniquement à supprimer la définition explicite de «piège» (trop liée aux spécificités du modèle) du résultat de vieillissement, en utilisant le fait que, lorsqu'elle se trouve dans un piège, la marche aléatoire bouge relativement peu.

# Chapitre 3

---

## LA MARCHE ALÉATOIRE BIAISÉE SUR DES CONDUCTANCES ALÉATOIRES DANS $\mathbb{Z}^D$

Les deux chapitres précédents ont traité surtout de notions générales concernant divers aspects des modèles de pièges ainsi que du lien entre les subordonateurs stables et le phénomène de vieillissement. En marche vers le chapitre 4, où nous appliquerons toutes les notions mentionnées plus haut pour montrer un résultat de vieillissement spécifique, nous devrons tout de même consacrer un chapitre à la description du modèle particulier sur lequel nous nous pencherons.

Nous présenterons donc le modèle, et nous en profiterons pour introduire des résultats préliminaires, principalement tirés de [16], et qui seront vitaux pour formuler la preuve présentée au chapitre 4.

### 3.1. DESCRIPTION DU MODÈLE

Ainsi que le nom du modèle le suggère, l'environnement aléatoire sera défini sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ . Plus précisément, on considère le graphe  $(V, E)$  où  $V = \mathbb{Z}^d$  et où  $(x, y) \in E \Leftrightarrow \|x - y\| = 1$ . On reprend par ailleurs la notation  $x \sim y$  (« $x$  est voisin de  $y$ ») pour  $(x, y) \in E$  avec  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  et  $e \sim x$  (« $e$  est incident à  $x$ ») si  $e = (x, y)$  pour un certain  $y \in \mathbb{Z}^d$ .

Pour chaque arête  $e$ , on sélectionne une conductance aléatoire  $c_*^\omega(e)$ . Les  $c_*(e)$  sont i.i.d. et positives. On les appellera les **conductances brutes**. On choisit  $\ell = l\hat{\ell}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  avec  $\|\hat{\ell}\| = 1$ ; ce sera le **biais**. On prend également  $u_1, \dots, u_d$  une base de  $\mathbb{Z}^d$ . Sans perdre de généralité, on peut prendre  $\hat{\ell} \cdot u_1 \geq \hat{\ell} \cdot u_2 \geq \dots \geq \hat{\ell} \cdot u_d \geq 0$ . On peut aussi prendre  $v_1 = \hat{\ell}$ , et construire une base orthonormale  $v_1, \dots, v_d$  de  $\mathbb{R}^d$ .

On définit ensuite pour chaque  $e$  la **conductance nette**  $c^\omega(e)$ , reliée à la conductance brute par la définition suivante : si  $x \sim y$ ,

$$c^\omega(x, y) = c_*^\omega(x, y)e^{\ell \cdot (x+y)/2}$$

On définit aussi pour tout  $\pi^\omega(x) = \sum_{y: x \sim y} c^\omega(x, y)$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Nous avons utilisé l'indice supérieur  $\omega$  pour  $c_*$ ,  $c$  et  $\pi$ , pour souligner que ces quantités seront mesurables par rapport à la loi de l'environnement  $\mathbf{P}$ .

On définit maintenant le processus stochastique  $(X_n)_{n \geq 0}$  par sa loi trempée, de la façon suivante : pour tout  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathbb{P}_x^\omega \{X_0 = x\} = 1 \quad \mathbb{P}_z^\omega \{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} = \begin{cases} \frac{c^\omega(x, y)}{\pi^\omega(x)} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a finalement que  $\mathbb{P}_x = \mathbf{E}[\mathbb{P}_x^\omega]$  et, pour faire court,  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$ . Dans ce qui suit, nous omettrons les surindices  $\omega$  afin d'alléger la notation.

Avant d'aller plus loin, prenons un moment pour se pencher sur un résultat qui fournira un début d'intuition quant au comportement de ce modèle.

**Théorème 3.1.1** ([15, 23]). *Pour  $d \geq 2$ , nous avons que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \quad \mathbb{P} - p.s.$$

où  $v = 0$  si  $\mathbf{E}[c_*] = \infty$  et  $v \cdot \hat{\ell} > 0$  si  $\mathbf{E}[c_*] < \infty$ .

De plus, si il existe  $\gamma \in (0, 1)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbf{P}\{c_* \geq n\}}{\log n} = -\gamma$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(X_n \cdot \hat{\ell})}{\log n} = \gamma$$

En particulier, supposons que  $\bar{F}(u) := \mathbf{P}\{c_* \geq u\} = L(u)u^{-\gamma}$  où  $\gamma \in (0, 1)$  et  $L(u)$  est une fonction à variation lente (autrement dit, si les conductances brutes sont des variables aléatoires avec des queues à variation régulières), on a que  $X_n \cdot \hat{\ell}$  croît plus lentement (resp. rapidement) que  $n^\delta$  pour n'importe quel  $\delta < \gamma$  (resp.  $\delta > \gamma$ ). Bien entendu, puisque  $\gamma < 1$ , on a que  $v = 0$ . Bien sûr,  $|X_n \cdot \hat{\ell}| < \|X_n\|$ , et on conclue que  $X_n$  est transient même si sa vitesse asymptotique  $v$  est nulle. On détecte ici encore une fois un régime où des pièges semblent ralentir la progression de  $X_n$ .

Puisque nous sommes intéressés à ce régime en particulier, nous allons conserver l'hypothèse qu'il existe une fonction à variation lente  $L(u)$  telle que  $\mathbf{P}\{c_* \geq u\} = L(u)u^{-\gamma}$ .

Dans les prochaines sections, nous présenterons les résultats et les estimés préliminaires importants qui nous serviront de base pour la preuve du chapitre 4. Ces résultats sont obtenus dans [16]; nous suivrons donc cet article de près tout au long de ce chapitre, en tentant de synthétiser les idées qui y sont présentées.

### 3.2. «BONNES» ET «MAUVAISES» PORTIONS D'ENVIRONNEMENT

Cette première notion est présentée dans la section 4 de [16]. Nous n'entrerons pas trop dans les détails, qui peuvent devenir extrêmement techniques. Toutefois, il convient de mentionner rapidement cette méthode, introduite dans [14], puisqu'elle est nécessaire



pour l'obtention des résultats qui seront présentés dans le présent chapitre. En outre, les explications devraient suffire à justifier l'emploi de notations autrement déroutantes.

L'idée de départ est la suivante : soit  $K \geq 1$  fixé. Si la distribution de  $c_*$  était supportée entièrement sur l'intervalle  $[1/K, K]$ , on aurait que la marche aléatoire en résultant est *uniformément elliptique* – un cas traité en détails dans [23]. Ce qui nous embête, c'est qu'ici, la marche n'est pas uniformément elliptique. Toutefois, on peut penser qu'elle se «comportera comme telle» sur de larges portions de l'environnement. On va donc décomposer notre environnement en une «Bonne» et une «Mauvaise» portion. L'intuition est que sur la bonne portion, la marche aléatoire se comportera «bien», puisque sur cette portion, les conductances brutes sont bornées.

**Définition 3.2.1.** *On dira que  $e \in E$  est **normale** si  $c_*(e) \in [1/K, K]$  et **anormale** autrement. On dira également que  $x \in \mathbb{Z}^d$  est  **$K$ -ouvert** si toutes les arêtes incidentes à  $x$  sont normales. Un sommet  $x \in \mathbb{Z}^d$  qui n'est pas  $K$ -ouvert est  **$K$ -fermé**.*

*On dira qu'un chemin orienté infini  $(x_1, x_2, \dots)$  est  **$K$ -ouvert** si  $x_{2i+1} - x_{2i} = u_1$  pour tout  $i$ , et  $x_i$  est  $K$ -ouvert pour tout  $i$ .*

*Finalement, on dira que  $x \in \mathbb{Z}^d$  est un **bon sommet** si il existe un chemin orienté ouvert commençant en  $x$ . Un sommet qui n'est pas bon est un **mauvais sommet**.*

L'idée c'est que pour que  $x$  soit un bon sommet, il faut qu'il existe un chemin  $K$ -ouvert qui progresse toujours dans le sens du biais (c'est à dire que  $x_i \cdot \hat{\ell} \leq x_{i+1} \cdot \hat{\ell}$ ) et ce, à un rythme relativement régulier (c'est à dire qu'il existe  $c(d)$  tel que  $(x_i - x) \cdot \hat{\ell} \geq c(d)i$ ).

Le reste de la section 4 de [16] présente des résultats sur les composantes connectées de bons et de mauvais sommets. Ceux-ci ne seront pas nécessaires pour nous. Toutefois, le paramètre  $K$  deviendra relativement important pour la définition précise des temps de régénération dans la prochaine section. Pour l'instant, retenons simplement l'existence du paramètre  $K$ .

### 3.3. TEMPS DE RÉGÉNÉRATION

La définition de temps de régénération vise avant tout à nous procurer des propriétés d'indépendance entre diverses portions de la marche aléatoire. Nous avons déjà mentionné l'idée maîtresse derrière cette technique à la section 1.4.4.

L'idée générale demeure la même. Toutefois, des complications techniques surviennent, et qui nécessitent que l'on soit plus précautionneux dans la définition des temps de régénération. La principale raison pour ces complications est que les environnements autour de deux sommets voisins ne sont pas indépendants ici. La définition des temps de régénération est conséquemment plus subtile et plus technique ; elle repose sur la construction d'un processus  $\tilde{X}_n$  sur  $\mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}$  telle que la coordonnée de  $\tilde{X}_n$  dans  $\mathbb{Z}^d$  a exactement la loi de  $X_n$ . Notons que la définition de  $\tilde{X}_n$  dépend de  $K$ .

La première étape consiste à introduire la variable aléatoire  $D$ . Typiquement, cette variable compterait le nombre de pas nécessaires avant de «revenir en arrière» ( $X_n \cdot \hat{\ell} < X_0 \cdot \hat{\ell}$ ). Toutefois, ici, on impose également certaines autres restrictions sur  $D$  – on «modifie» en quelque sorte la définition précise de «revenir en arrière» afin de supprimer les corrélations. C’est cette nouvelle définition du «retour en arrière» que l’on emploiera pour définir les temps de régénération. De plus, on exige des temps de régénération qu’ils respectent quelques conditions supplémentaires.

- Au moment d’atteindre un temps de régénération (par exemple,  $\tau_1$ ), la marche aléatoire doit se trouver sur un sommet  $K$ -ouvert ;
- Les deux derniers pas avant un temps de régénération doivent avoir été faits dans la direction  $u_1$ .

On remarque que la seconde exigence sert simplement à éloigner la marche future de la marche passée afin de préserver l’indépendance des environnements.

Malgré toutes ces différences, nous obtenons une suite  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de temps de régénération qui «fonctionnent» comme l’intuition présentée dans la section 1.4.4 du présent mémoire le suggère. Si on introduit la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_x^K$  caractérisée par

$$\mathbb{P}_x^K \{ \cdot \} = \mathbb{P}_x \{ \cdot \mid \forall e \sim x, c_*(e) = K \} ,$$

et la mesure  $\bar{\mathbb{P}}$  caractérisée par

$$\bar{\mathbb{P}} \{ \cdot \} = \mathbb{P}_0^K \{ \cdot \mid D = \infty \} ,$$

les tronçons de marche aléatoire  $(X_i; \tau_k \leq i < \tau_{k+1})$  sont indépendants et identiquement distribués (à translation près) (voir le théorème 5.4 dans [16]) pour  $\bar{\mathbb{P}}$ .

De plus, la proposition 5.1 de [16] garantit que conditionnellement à ce que 0 soit  $K$ -ouvert (ce qui se produit avec probabilité tendant vers 1 lorsque  $K \rightarrow \infty$ ), la loi conditionnelle de la marche  $X_t$  sachant que  $D = \infty$  est indépendante des conductances autour de 0. Autrement dit, la condition que  $c_*(e) = K$  pour tout  $e \sim 0$  ne modifie en rien le comportement de la marche aléatoire. Ceci nous sera utile, parce que ça signifie que  $\bar{\mathbb{P}} \{ \cdot \} \rightarrow \mathbb{P}_0 \{ \cdot \mid D = \infty \}$  lorsque  $K \rightarrow \infty$ .

Également, il sera important de réaliser que si  $U$  est une variable aléatoire mesurable par rapport à  $(X_t)_{t > \tau_1}$  (c’est à dire indépendante de ce qui se passe dans le premier bloc de régénération), alors  $\mathbb{E}_0[f(U)] = \mathbb{E}_0[f(U) \mid D = \infty]$ . En effet, à partir de  $\tau_1$ , la loi de  $X_t$  est celle de  $\bar{\mathbb{P}}$  (modulo une translation) – donc si  $U$  ne dépend pas de ce qui se passe dans le premier bloc de régénération, on peut prendre sa loi sous  $\mathbb{P}_0^K$  ou sous  $\bar{\mathbb{P}}$  indifféremment.

### 3.4. LES PIÈGES

Nous nous tournons maintenant vers l’examen de la dynamique de «pièges» qui apparaît lorsque  $\mathbf{P} \{ c_* > u \}$  est à variation régulière avec exposant  $\gamma < 1$ . Déjà le simple fait que la

condition pour l'apparition des pièges soit une condition sur  $c_*$ , cela donne une petite idée de ce qui cause les pièges.

L'intuition est encore une fois assez simple : plaçons-nous dans  $\mathbb{Z}^2$ , et imaginons un instant qu'une arête  $e$  avec conductance brute  $c_*(e) = 997$ , et que les six arêtes incidentes à  $e$  aient des conductances unitaires (oublions un moment le biais). Une marche aléatoire qui atteindrait une extrémité de  $e$  aurait alors une probabilité  $997/1000$  de traverser  $e$ , et  $3/1000$  en tout pour les autres arêtes, et ce serait la même chose à l'autre bout. Autrement dit, en moyenne il faudrait  $1000/3 \approx 333$  pas au marcheur avant de quitter l'arête  $e$ . De façon plus générale, on voit que dans notre modèle, une arête avec une conductance brute significativement plus grande que celles des arêtes incidentes créera un piège, puisque le marcheur passera énormément de temps à faire l'aller-retour le long d'une telle arête.

L'avantage de notre suite  $\tau_i$  de temps de régénération est que les blocs de régénération (entre  $\tau_{i+1}$  et  $\tau_i$ ) sont i.i.d. On va en tirer profit, et au lieu de parler directement des pièges, on va plutôt parler en termes de blocs de régénération. Autrement dit, on considérera chaque bloc de régénération comme un «piège», qui sera grand ou petit selon qu'on y aura rencontré une arête avec une grande conductance ou pas.

On définit l'événement  $LT(K, n)$  où la marche a rencontré une arête  $e$  avec  $c_*(e) \geq n$  avant le temps  $\tau_1$ . De façon analogue, on définit  $LT^{(i)}(K, n)$  l'événement où la marche a rencontré une arête  $e$  avec  $c_*(e) \geq n$  entre les temps  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$ .  $LT$  tient pour *Large Trap* («grand piège» en anglais).

On notera  $OLT(K, \delta, n)$  l'événement où il existe une arête  $e$  rencontrée par la marche avant  $\tau_1$  (dans le premier bloc de régénération) avec  $c_*(e) \geq n$  et telle que pour toute arête  $e'$  incidente à  $e$  ou rencontrée par la marche dans le premier bloc de régénération,  $c_*(e') < n^\delta$ . ( $\delta < 1$ ).  $OLT$  tient pour *One Large Trap* («un [unique] grand piège» en anglais). Comme pour  $LT$ , on définit  $OLT^{(i)}(K, \delta, n)$  pour tous les blocs de régénération.

On remarque que  $OLT(K, \delta, n) \subseteq LT(K, n)$ , de telle sorte que  $\overline{\mathbb{P}}\{LT(K, n) \mid OLT(K, \delta, n)\} = 1$ , et  $\overline{\mathbb{P}}\{OLT(K, \delta, n) \mid LT(K, n)\} = \overline{\mathbb{P}}\{OLT(K, \delta, n)\} / \overline{\mathbb{P}}\{LT(K, n)\}$  Le lemme 9.6 de [16] implique qu'il existe un  $K_0$  tel que si  $K > K_0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{OLT(K, \delta, n) \mid LT(K, n)\} = 1 \quad (3.4.1)$$

Ce que ce résultat nous indique, c'est que de façon générale, avec notre définition d'un piège creux, lorsqu'on considère une échelle de plus en plus grande, sachant qu'on a rencontré un piège creux, avec probabilité tendant vers 1, la configuration ressemblera à ce que nous avons décrit au début de cette section – c'est à dire : une arête avec une grande conductance entourée d'arêtes de conductances comparativement petites.

On obtient également un estimé de la probabilité de rencontrer un piège creux. Avec le lemme 9.5 de [16], on a qu'il existe deux constantes  $c$  et  $C$  telles que :

$$c\mathbf{P}\{c_* \geq n\} \leq \bar{\mathbb{P}}\{LT(K, n)\} \leq C\mathbf{P}\{c_* \geq n\} \quad (3.4.2)$$

pour tout  $K$  supérieur à un certain  $K_0$ .

Pour des fins pratiques, on définit  $\mathbb{P}_n\{\cdot\} = \bar{\mathbb{P}}\{\cdot \mid LT(K, n)\}$ .

### 3.5. LE TEMPS PASSÉ DANS LES PIÈGES

Nous avons déjà remarqué que le temps passé dans les pièges creux peut être noté comme une somme de variables indépendantes i.i.d. sous  $\bar{\mathbb{P}}$ . L'objectif est maintenant de tenter de comprendre quelle est la loi de ces variables aléatoires.

Pour commencer, les lemmes 6.2 et 6.3 de [16] nous garantissent que le temps passé sur de relativement petites conductances au sein d'un bloc de régénération est négligeable. On peut donc se concentrer sur l'estimation du temps passé sur les arêtes qui ont une très grande conductance.

Supposons que  $e^{(n)}$  soit une arête avec  $c_*(e^{(n)}) \geq n$  et que toutes les arêtes incidentes  $e'$  aient des conductances  $c_*(e') < n^\delta$ , avec  $\delta < 1$ . Un peu comme ce que l'on faisait à la section 1.5.3, on va considérer le temps passé sur  $e$  comme un produit de deux facteurs :

- (1) le temps passé sur la conductance en moyenne à chaque «visite» ;
- (2) le nombre de visites.

À des fins pratiques, si  $e = e^{(n)} = (x, y)$ , on définit

$$\pi(e) = \sum_{e': e' \sim e} c_*(e') \quad \bar{\pi}(e^{(n)}) = \exp(-(x + y) \cdot \ell) \pi(e)$$

On définit aussi  $V_n$  le nombre de visites séparées à l'arête  $e$ . Alors, il existe une mesure  $\mathbb{P}_\infty$  et des variables aléatoires  $V_\infty$  et  $\bar{\pi}^\infty$  telles que

$$\mathbb{P}_n\{(V_n, \bar{\pi}(e^{(n)})) \in B\} \rightarrow \mathbb{P}^\infty\{(V_\infty, \bar{\pi}^\infty) \in B\}$$

Si on connaît l'environnement, le temps passé sur  $e^{(n)}$  lors d'une excursion peut être approximé par une variable aléatoire de loi exponentielle de moyenne  $2c(e^{(n)})/\bar{\pi}(e^{(n)})$  (le facteur 2 s'explique par le fait qu'il est possible d'échapper à  $e^{(n)}$  par l'un ou l'autre des deux bouts). De façon plus précise, si  $T_e^{\text{ex}}$  est le temps d'une excursion sur  $e$ , on peut faire l'approximation

$$\left(1 - C(d)n^{\delta-1}\right) \frac{c_*(e^{(n)})}{\pi(e^{(n)})} 2\mathbf{e} \leq T_e^{\text{ex}} \leq \left(1 + C(d)n^{\delta-1}\right) \frac{c_*(e^{(n)})}{\pi(e^{(n)})} 2\mathbf{e} + 1$$

Ceci conduit à l'approximation du temps total passé sur l'arête  $e$  :

$$T_e \approx \frac{c_*(e^{(n)})}{\pi(e^{(n)})} \sum_{i=1}^{V_n} 2\mathbf{e}_i$$

avec  $\mathbf{e}_i$  une suite d'exponentielles de moyenne 1.

On introduit maintenant  $W_n = T_e/c_*(e^{(n)})$ . Le lemme 9.4 de [16] garantit l'existence de  $W_\infty$  mesurable pour  $\mathbb{P}_\infty$  et telle que

$$\mathbb{P}_n \{W_n \in A\} \rightarrow \mathbb{P}_\infty \{W_\infty \in A\}$$

De plus, nous avons

$$W_\infty = \frac{1}{\pi^\infty} \sum_{i=1}^{V_\infty} 2\mathbf{e}_i,$$

que nous devinons en voyant la forme de l'approximation de  $T_e$ .

Dans la section 9.5 de [16], on montre que  $W_n$  est asymptotiquement indépendant de  $c_*(e^{(n)})$ . Si on note  $c_*^{\max}$  une variable aléatoire mesurable pour  $\mathbb{P}_\infty$  avec la loi de la plus grande conductance rencontrée par la marche avant  $\tau_1$  pour  $\bar{\mathbb{P}}$  (on peut aussi écrire  $c_{*,(i)}^{\max}$  la plus grande conductance rencontrée entre  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$ ), on obtient un résultat fondamental : il existe un couplage (c'est à dire un espace de probabilité étendu) avec une mesure  $\mathbb{P}^\infty$  qui satisfait  $\mathbb{P}^\infty \{(V_\infty, \pi^\infty) \in A\} = \mathbb{P}_\infty \{(V_\infty, \pi^\infty) \in A\}$ , et pour tout événement  $E$  mesurable pour  $\bar{\mathbb{P}}$ ,  $\mathbb{P}^\infty \{E\} = \bar{\mathbb{P}} \{E\}$ .

Sous  $\mathbb{P}^\infty$ , nous avons l'indépendance de  $c_*^{\max}$  et  $W_\infty$ . De plus, nous avons la convergence en distribution de  $c_*(e^{(n)})W_n \mathbf{1}\{OLT(K, 1/2, n)\}$  vers  $c_*^{\max}W_\infty \mathbf{1}\{c_*^{\max} \geq n\}$ .

Finalement, les auteurs de [16] terminent leur chapitre 9 en démontrant deux résultats cruciaux pour nous. Le premier (lemme 9.9) nous donne une idée de la queue de  $W_\infty$  en nous indiquant lesquels de ses moments sont finis :

$$\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\beta}] < \infty \quad \beta \in (1-\gamma, 1) \quad (3.5.1)$$

Ce résultat nous indique que le nombre de retours à un même piège n'est pas le facteur déterminant pour expliquer les longues périodes passées dans un bloc de régénération. Le second résultat, d'une importance capitale, donne une approximation de la queue de  $c_*^{\max}W_\infty$  (qui est une estimation de la longueur d'un bloc de régénération) :

$$\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} \geq u\} \sim C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(u) u^{-\gamma} \quad (3.5.2)$$

Ici,  $C_1$  est une constante définie dans l'équation 9.6 de [16].

### 3.6. THÉORÈMES-LIMITES

Une fois ces résultats obtenus, nous aurons également besoin de certains résultats concernant la convergence en distribution de sommes de blocs de régénération. Ceux-ci sont présentés dans la section 10 de [16].

Tout d'abord, introduisons

$$\text{Inv}(t) = \inf \left\{ u \geq 0 \mid \mathbf{P} \left\{ c_* \geq u^{-1} \right\} < t \right\}$$

– on reconnaît le facteur de normalisation pour une somme de variables i.i.d. distribuées comme  $c_*$  (cf. section 2.1.3)

Il appert que ceci s'avère être le bon facteur de renormalisation également pour les  $\tau_n$  – cela n'est pas nécessairement surprenant. Après tout, l'équation (3.5.2) nous laisse présager que le temps passé dans un bloc de régénération (en fait, le temps passé sur la plus grande arête d'un bloc de régénération) aurait une queue à variation régulière avec exposant  $\gamma$ , comme  $c_*$ .

Rappelons rapidement l'équation 10.2 de [16] : pour tout  $r \in (0, 1/\gamma)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{\gamma}-r}}{\text{Inv}(n)} = 0 \quad (3.6.1)$$

Le premier résultat important pour nous sera la proposition 10.1 de [16], qui affirme qu'il existe  $K_0$  tel que pour  $K > K_0$ , et pour n'importe quel  $\beta \in (0, 1/6)$ ,

$$\frac{\tau_n - \sum_{i=0}^{n-1} W_{n^{\frac{1-\beta}{\gamma}}}^{(i)} c_*(e_{(i)}^{(n^{\frac{1-\beta}{\gamma}})}) \mathbf{1} \left\{ OLT^{(i)}(K, 1/2, n^{\frac{1-\beta}{\gamma}}) \right\}}{\text{Inv}(n)} \rightarrow 0 \quad (3.6.2)$$

où la convergence est en distribution pour  $\mathbb{P}_0^K$  et  $\bar{\mathbb{P}}$  (donc pour  $\mathbb{P}^\infty$ ). Ici,  $W_\infty^{(i)}$  et  $c_*(e_{(i)}^{(k)})$  sont des suites de variables aléatoires correspondant à chaque bloc de régénération entre  $\tau_{i-1}$  et  $\tau_i$ . Ces suites sont donc des suites i.i.d., et on voit donc ainsi comment on peut approximer  $\tau_n$  par une somme de  $n$  variables aléatoires i.i.d. Ce résultat (tout comme les quelques suivants qui lui ressemblent) est essentiellement utile pour nous parce qu'il nous permet de travailler non directement avec les blocs de régénération, mais plutôt avec les variables aléatoires  $c_*^{\max}$  et  $W_\infty$ , qui sont beaucoup plus faciles à manipuler. Il signifie en fait que, «à grande échelle», on peut approximer un bloc de régénération tout simplement par le produit  $c_*^{\max} W_\infty$ .

On remarque l'indicatrice pour chaque terme de la somme, qui signifie que les seules valeurs qui seront significatives sont celles où on a rencontré une arête avec une grande conductance.

Un autre résultat d'importance est l'équation 10.14 de [16], qui dit que pour  $K$  au-delà d'un certain  $K_0$ , et  $\beta \in (0, 1/6)$ ,

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} W_{n^{\frac{1-\beta}{\gamma}}}^{(i)} c_*(e_{(i)}^{(n^{\frac{1-\beta}{\gamma}})}) \mathbf{1} \left\{ OLT^{(i)}(K, 1/2, n^{\frac{1-\beta}{\gamma}}) \right\}}{\text{Inv}(n)} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \left\{ c_{*,(i)}^{\max} \geq n^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \right\}}{\text{Inv}(n)} \right| \rightarrow 0 \quad (3.6.3)$$

Ici, la convergence est en distribution sous le couplage  $\mathbb{P}^\infty$ . Ce résultat nous sera particulièrement pratique puisqu'il nous permet maintenant, avec l'équation (3.6.2), d'approximer  $\tau_n$  par une somme de variables aléatoires que l'on connaît déjà un peu mieux grâce au couplage.

Nous utiliserons aussi un autre résultat : pour  $K$  au-delà d'un certain  $K_0$ ,  $\beta \in (0, 1/6)$ , il existe  $r \in (0, 1/\gamma)$  tel que

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \left\{ c_{*,(i)}^{\max} < n^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \right\}}{n^{\frac{1}{\gamma}-r}} \rightarrow 0 \quad (3.6.4)$$

Ici, encore une fois, la convergence est en distribution pour  $\mathbb{P}^\infty$ . Ce résultat est en fait un résultat intermédiaire employé pour montrer celui-ci (lemme 10.3 dans [16])

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} - \sum_{i=1}^n c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \left\{ c_{*,(i)}^{\max} \geq n^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \right\}}{\text{Inv}(n)} \rightarrow 0 \quad (3.6.5)$$

Dans [16], tous ces résultats servent la preuve de la proposition 10.3, elle-même une proposition très utile. Cette proposition affirme que, pour  $K$  suffisamment grand, en distribution sous  $\mathbb{P}_0^K$ , on a

$$\frac{\tau_n}{\text{Inv}(n)} \rightarrow C_\infty \mathcal{S}_\gamma \quad (3.6.6)$$

où  $C_\infty$  est une constante définie à l'équation 10.9 de [16] et  $\mathcal{S}_\gamma$  est une variable aléatoire de loi stable complètement asymétrique d'indice  $\gamma$ .

### 3.7. LOCALISATION

Pour clore ce chapitre, nous citerons quelques résultats importants sur la localisation de la marche aléatoire. L'intérêt, ici, ce sera de comprendre comment (ou à quel point) la marche aléatoire se déplace à l'intérieur d'un bloc de régénération. Le résultat clé ici se trouve au début de la section 6 de [16].

Rappelons que nous avons choisi une base orthonormale de  $\mathbb{R}^d$   $v_1, \dots, v_d$  telle que  $v_1 = \hat{\ell}$ . À l'aide de cette base, on définit

$$B(n, k) = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d \mid |x \cdot v_1| \leq n, |x \cdot v_i| \leq k, 2 \leq i \leq d \right\}$$

Ceci nous donne une boîte, centrée à l'origine, dont les faces sont parallèles ou perpendiculaires à  $\ell$ . Pour une constante  $\xi > d + 3$ , l'équation 6.1 de [16] définit

$$\chi := \inf \left\{ m \in \mathbb{N} : \{X_i, i \in [0, \tau_1]\} \subset B(m, m^\xi) \right\} \quad (3.7.1)$$

On peut donc interpréter  $\chi$  comme la «taille» de la plus petite boîte qui renferme la trace du processus  $X_t$  avant  $\tau_1$ . Le lemme 6.1 de [16] affirme que pour  $K$  suffisamment grand, pour tout  $M > 0$ ,

$$\mathbb{P}_0 \{ \chi \geq k \} \leq C k^{-M} \quad (3.7.2)$$

et que cela est aussi vrai si l'on remplace  $\mathbb{P}_0$  par  $\mathbb{P}_0^K$ . Cela nous donne une bonne borne sur la queue de  $\chi$ , donc sur à quel point la marche peut «se promener» dans un même bloc de régénération.

**Remarque 3.7.1.** *Compte tenu de ce que nous avons déjà dit sur la structure précise des pièges (qui sont en fait une seule arête), il est normal que le résultat fourni par (3.7.2) paraisse faible, au sens où il semble évident qu'on pourrait connaître plus précisément la position de la marche dans un long bloc de régénération. Nous reviendrons sur ce sujet en conclusion.*



# Chapitre 4

---

## PREUVE DU VIEILLISSEMENT POUR LA MARCHE ALÉATOIRE BIAISÉE SUR LES CONDUCTANCES ALÉATOIRES DANS $\mathbb{Z}^D$

### 4.1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Nous voici enfin prêts à nous attaquer à la démonstration d'un résultat de vieillissement pour le modèle de la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ .

**Théorème 4.1.1** (Vieillissement). *Avec la définition du modèle faite au chapitre 3, pour n'importe quel  $\epsilon \in (0, \gamma)$ ,  $h > 1$ ,  $\eta > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{ \|X_t - X_{ht}\| \leq \eta t^\epsilon \} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (4.1.1)$$

Cet énoncé ne devrait pas surprendre; à ce stade, la seule nouveauté est la forme du «seuil de distance»  $\eta t^\epsilon$  que l'on a choisi. Celle-ci reflète les bornes que l'on aura pu obtenir en employant le résultat de la section 3.7.

La preuve procède en deux grandes étapes. On va d'abord montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.1.1.** *Il existe  $K_1$  tel que pour tout  $K > K_1$  et  $h > 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{ \exists i : \tau_i \leq t < ht \leq \tau_{i+1} \} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (4.1.2)$$

Ceci nous donne la probabilité que les moments  $t$  et  $ht$  soient dans le même bloc de régénération. On remarque immédiatement que les côtés droits de (4.1.1) et (4.1.2) sont identiques. Une fois cette étape complétée, il ne restera plus qu'à montrer que pour  $t$  grand, les événements  $\|X_t - X_{ht}\| \leq \eta t^\epsilon$  et  $\exists i : \tau_i \leq t < ht \leq \tau_{i+1}$  se produisent presque toujours simultanément.

**Proposition 4.1.2.** *Il existe  $K_2$  tel que pour tout  $K > K_2$  et  $h > 1$ ,  $\epsilon \in (0, \gamma)$ ,  $\eta > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{ \{ \exists i : \tau_i \leq t < ht \leq \tau_{i+1} \} \triangle \{ \|X_t - X_{ht}\| \leq \eta t^\epsilon \} \} = 0 \quad (4.1.3)$$

Ici  $\triangle$  représente la différence symétrique d'ensembles :  $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ .

Armés de ces propositions, le théorème 4.1.1 suit sans difficulté.

## 4.2. RÉSULTAT PRÉLIMINAIRES SUR LES BLOCS DE RÉGÉNÉRATION

Avant de procéder aux démonstrations des propositions présentées ci-haut, nous devons prendre quelques instants pour adapter les résultats cités aux sections 3.5 et 3.6 en particulier, afin de se permettre de travailler dans le contexte de notre preuve.

Commençons toutefois par introduire un peu de notation. On choisit une suite  $(\delta_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'indice telle que

$$\delta_1(t) = \inf \left\{ j \geq 0 \mid LT^{(j)}(K, t^\alpha) \right\} \quad \delta_{i+1}(t) = \inf \left\{ j \geq \delta_i(t) \mid LT^{(j)}(K, t^\alpha) \right\}$$

Souvenons-nous que  $LT^{(j)}(K, t^\alpha)$  est l'événement pour lequel le  $j$ -ième bloc de régénération contienne un piège creux (c'est à dire que la marche rencontre au moins une conductance supérieure à  $t^\alpha$ ). Ici, nous travaillons à l'échelle du temps écoulé  $t$ , et nous choisissons un seuil de piège creux  $t^\alpha$ . Pour l'instant, on peut s'imaginer que  $\alpha \in (0, 1)$  – nous restreindrons le choix de  $\alpha$  plus loin. Dans ce qui suit, nous omettrons la dépendance explicite de  $\delta_i$  en  $t$  afin d'alléger la notation.

On définit maintenant

$$l_t(s) = \sup \left\{ j > 0 \mid \tau_{\delta_j(s)} < t \right\}$$

$l_t(s)$  est un indice qui donne le rang du dernier piège  $s^\alpha$ -creux rencontré avant le temps  $t$ . Encore pour alléger la notation, nous noterons  $l_t := l_t(t)$  – en fait, peu importe ce que  $u$  peut bien être, nous supposons toujours  $l_u = l_u(t)$ .

Avec ces notations, on commence par montrer un résultat technique qui nous sera très utile pour le reste de notre raisonnement.

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $(F_t)_{t \geq 0}$  une famille de variables aléatoires mesurables pour  $\mathbb{P}^\infty$  telle que pour tout  $\eta > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \geq \eta \right\} = 0 \tag{4.2.1}$$

*Alors, il suit que pour tout  $\eta > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} > \eta \right\} = 0 \tag{4.2.2}$$

**DÉMONSTRATION.** On débute par le constat suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} > \eta \right\} &= \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} \geq \eta, \frac{t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} > M \right\} \\ &\quad + \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} > \eta, \frac{t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \leq M \right\} \end{aligned}$$

Le premier terme peut être borné car en général, pour des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ ,  $\{X > x, Y > y\} \subseteq \{XY > xy\}$ . Le second terme est quant à lui borné en ignorant la condition que  $F_t/t > \eta$ . On obtient alors ceci :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} \geq \eta \right\} &\leq \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \geq \eta M \right\} + \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \leq M \right\} \\ &\leq \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \geq \eta M \right\} + \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l_t}}}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \leq M \right\} \end{aligned}$$

La seconde inégalité est obtenue en vertu de la définition de  $l_t$ , qui signifie que  $\tau_{\delta_{l_t}} \leq t$ . En prenant la limite lorsque  $t \rightarrow \infty$  des deux côtés, on supprime le premier terme en vertu de notre hypothèse (4.2.1), et il nous reste

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{F_t}{t} \geq \eta \right\} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l_t}}}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \leq M \right\} \\ &= \mathbb{P}^\infty \{C_\infty \mathcal{S}_\gamma \leq M\} \end{aligned}$$

La dernière égalité nous provient directement de l'équation (3.6.6). On complète la preuve en constatant que  $\mathcal{S}_\gamma$  est presque sûrement strictement positive, et en prenant la limite lorsque  $M$  tend vers 0.  $\square$

Une fois ceci obtenu, tournons notre attention aux blocs de régénération proprement dit. Première étape : obtenir un résultat sur le temps passé dans un long bloc de régénération. On note  $T_i = \tau_{\delta_{i+1}} - \tau_{\delta_i}$ . Par définition de  $\delta_i$ ,  $T_i$  est le temps passé dans un long bloc de régénération quelconque.

**Lemme 4.2.2.** *Pour tout  $u > 0$ , lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,*

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{T_i}{t} \geq u \right\} \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} u^{-\gamma} \quad (4.2.3)$$

**DÉMONSTRATION.** On commence par définir  $\tilde{T}_i = c_{*,(\delta_i)}^{\max} W_\infty^{(\delta_i)}$ . Par définition de  $\delta_i$ , on a que  $\mathbb{P} \{LT^{(\delta_i)}(K, t^\alpha)\} = 1$ , nécessairement. Autrement dit, la plus grande conductance rencontrée entre  $\tau_{\delta_i}$  et  $\tau_{\delta_{i+1}}$  doit être supérieure à  $t^\alpha$ . Ceci signifie que

$$\mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\tilde{T}_i}{t} \geq u \right\} = \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\}$$

On commence par montrer que  $\mathbb{P}^\infty \{(\tilde{T}_i - T_i)/t \geq \eta\} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Pour ce faire, on constate que les équations (3.6.2), (3.6.3) et (3.6.5) ensemble impliquent que

$$\frac{\tau_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty}{\text{Inv}(n)} \rightarrow 0 \quad (4.2.4)$$

où la convergence est en distribution sous  $\mathbb{P}^\infty$ .

On a que  $\delta_i(t)$  tend vers l'infini  $\mathbb{P}$ -p.s. lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Aussi, on a que  $\text{Inv}(n) \sim \text{Inv}(n+1)$ . On peut donc utiliser deux fois l'équation (4.2.4) pour obtenir

$$\frac{\tau_{\delta_i+1} - \tau_{\delta_i} - c_{*,(\delta_i)}^{\max} W_{\infty}^{(\delta_i)}}{\text{Inv}(\delta_i)} \rightarrow 0$$

où, encore une fois, la convergence est en distribution pour  $\mathbb{P}^{\infty}$ . Mais  $\tau_{\delta_i+1} - \tau_{\delta_i} = T_i$  et  $c_{*,(\delta_i)}^{\max} W_{\infty}^{(\delta_i)} = \tilde{T}_i$ . De plus, lorsque  $t$  est suffisamment grand,  $l_t > i$ , puisque  $l_t$  tend vers l'infini aussi  $\mathbb{P}$ -p.s.. On a donc que

$$\frac{\tilde{T}_i - T_i}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \rightarrow 0$$

où la convergence est en distribution pour  $\mathbb{P}^{\infty}$ . On applique le lemme 4.2.1 et on obtient finalement que

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{T_i}{t} \geq u \right\} = \mathbb{P}^{\infty} \left\{ \frac{T_i}{t} \geq u \right\} \sim \mathbb{P}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{T}_i}{t} \geq u \right\}$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu \mid c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\}$ . Or, on montre que

$$\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu, c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} \sim \mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu\}$$

Pour ce faire, on va simplement montrer que

$$\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu, c_*^{\max} < t^{\alpha}\} = o(\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu\})$$

Ce calcul est quelque peu ardu. Dans ce qui suit, nous avons choisi  $\eta \in (0, 1 - \gamma)$ . Les constantes  $c$  et  $C$  sont celles de l'équation (3.4.2). À noter aussi que nous considérons sans perdre de généralité que  $L$  est croissante – autrement, on peut toujours choisir  $\hat{L}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} L(s)$ . On a alors que  $\hat{L}(t)$  est croissante, à variation lente et borne  $L$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} W_{\infty} \geq tu, c_*^{\max} < t^{\alpha}\} \\ &= \int_0^{t^{\alpha}} \mathbb{P}^{\infty} \{W_{\infty} \geq tu/x\} d\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} < x\} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \int_0^{t^{\alpha}} x^{\gamma+\eta} d\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} < x\} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \mathbb{E}^{\infty} \left[ (c_*^{\max})^{\gamma+\eta} \mathbf{1}_{\{c_*^{\max} < t^{\alpha}\}} \right] \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \int_0^{\infty} \mathbb{P}^{\infty} \left\{ (c_*^{\max})^{\gamma+\eta} \mathbf{1}_{\{c_*^{\max} < t^{\alpha}\}} \geq x \right\} dx \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \int_0^{t^{\alpha(\gamma+\eta)}} \mathbb{P}^{\infty} \left\{ x < (c_*^{\max})^{\gamma+\eta} < t^{\alpha(\gamma+\eta)} \right\} dx \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \int_0^{t^{\alpha(\gamma+\eta)}} \left( \mathbb{P}^{\infty} \left\{ (c_*^{\max})^{\gamma+\eta} > x \right\} - \mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} > t^{\alpha}\} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \left( C \int_0^{t^{\alpha(\gamma+\eta)}} L(x^{1/(\gamma+\eta)} x^{-\gamma/(\gamma+\eta)}) dx - cL(t^\alpha) t^{\alpha\eta} \right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\eta}]}{(tu)^{\gamma+\eta}} \left( CL(t^\alpha) \int_0^{t^{\alpha(\gamma+\eta)}} x^{-\gamma/(\gamma+\eta)} dx - cL(t^\alpha) t^{\alpha\eta} \right) \\
&= \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\eta}] u^{-(\gamma+\eta)} \left( \frac{C(\gamma+\eta)}{\eta} - c \right) L(t^\alpha) t^{-(\gamma+(1-\alpha)\eta)} \\
&= o(\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu\})
\end{aligned}$$

Ce calcul utilise simplement l'inégalité de Markov/Tchebychev (avec (3.5.1)) et les bornes fournies par (3.4.2). La dernière égalité est un résultat de l'estimé obtenu pour la queue de  $c_*^{\max} W_\infty$  à l'équation (3.5.2).

On a donc

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu, c_*^{\max} < t^\alpha\} + \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu, c_*^{\max} \geq t^\alpha\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu\}} \\
&\sim \frac{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu, c_*^{\max} \geq t^\alpha\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu\}}
\end{aligned}$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On peut donc écrire

$$\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\} \sim \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}^{-1} \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} W_\infty \geq tu\}$$

ce qui, avec (3.5.1), et en se rappelant que  $L(tu) \sim L(t)$ , conduit à

$$\mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\tilde{T}_i}{t} \geq u \right\} \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} u^{-\gamma}$$

□

Nous avons donc réussi à montrer que la proportion de temps passé dans un grand piège tend vers une distribution à variation régulière. Prochaine étape : montrer que le temps passé dans de petits pièges est négligeable. Nous ne le ferons pas nécessairement directement tout de suite. Cependant, nous allons montrer un résultat qui le laisse assez bien figurer.

**Lemme 4.2.3.** *Pour  $\alpha \in (5/6, 1)$ , on a que*

$$\frac{\sum_{i=0}^{\delta_{l_t}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} < t^\alpha\}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.5)$$

et

$$\frac{\sum_{i=0}^{\delta_{l_t}+1-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} < t^\alpha\}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.6)$$

**DÉMONSTRATION.** On sait que pour tout  $\beta \in (0, 1/6)$ , il existe  $r \in (0, 1/\gamma)$  tel que l'équation (3.6.4) est vérifiée. On notera  $STN(\beta, r)$  la condition «L'équation (3.6.4) est vérifiée avec  $\beta, r$ ».

En remplaçant  $n$  par  $t^{\frac{\alpha\gamma}{1-\beta}}$  dans l'équation (3.6.4), on obtient immédiatement que pour tout  $\beta \in (0, 1/6)$ , il existe un  $r \in (0, 1 - \gamma)$  tel que

$$\frac{\sum_{i=0}^{t^{\frac{\alpha\gamma}{1-\beta}}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_{\infty}^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} < t^{\alpha}\}}{t^{\alpha \frac{1-r\gamma}{1-\beta}}} \rightarrow 0 \quad (4.2.7)$$

où la convergence est en distribution sous  $\mathbb{P}^{\infty}$ .

En fait, l'équation (4.2.7) est vérifiée si et seulement si  $STN(\beta, r)$  tient. Notre objectif, c'est de trouver un couple  $(\beta, r) \in (0, 1/6) \times (0, 1/\gamma)$  tel que  $STN(\beta, r)$  soit vérifiée, et que  $1 - \beta < \alpha \leq \frac{1-\beta}{1-r\gamma}$ .

Bien sûr, si  $STN(\beta, r)$  est vérifiée, on a que pour tout  $r' < r$ ,  $STN(\beta, r')$  est également vérifiée. On peut donc définir  $R(\beta) = \{r : STN(\beta, r)\}$  l'ensemble des valeurs de  $r$  telles que  $STN(\beta, r)$  est vérifiée, et introduire également  $\hat{r}(\beta) = \sup R(\beta)$ .

On remarque que le numérateur de (3.6.4) diminue lorsqu'on augmente  $\beta$ . Ainsi, si  $STN(\beta, r)$  est vérifiée, on a que  $STN(\beta', r)$  est aussi vérifiée pour tout  $\beta' > \beta$ . Autrement dit, si  $STN(\beta, r)$  est vérifiée,  $\beta' > \beta$  entraîne  $STN(\beta', r)$ . Mais cela signifie que  $\beta < \beta'$  entraîne en fait  $R(\beta) \subseteq R(\beta')$ , donc  $\hat{r}(\beta) \leq \hat{r}(\beta')$ .

Commençons par choisir  $\beta_0 = 1 - \alpha \in (0, 1/6)$ , et  $r \in R(\beta_0)$ . On va prendre  $\beta = \beta_0 + \eta$  et il faudra simplement choisir  $\eta$  judicieusement. Si on remplace  $\beta$  dans notre condition que  $\alpha < (1 - \beta)/(1 - r\gamma)$ , on trouve finalement qu'il suffit de prendre  $\eta < \alpha\gamma r$  pour avoir simultanément  $STN(\beta, r)$  et  $1 - \beta < \alpha < (1 - \beta)/(1 - r\gamma)$ .

Dans ces conditions,  $\alpha\gamma/(1 - \beta) > \gamma$  et  $\alpha(1 - r\gamma)/(1 - \beta) \leq 1$  simultanément. Ceci signifie entre autres qu'on a au moins  $t^{\alpha \frac{1-r\gamma}{1-\beta}} = O(t)$  et donc

$$\frac{\sum_{i=0}^{t^{\frac{\alpha\gamma}{1-\beta}}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_{\infty}^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} < t^{\alpha}\}}{t} \rightarrow 0$$

De plus,  $\delta_{l_t} \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On a en outre que pour tout  $\eta > 0$ ,  $\delta_{l_t}^{(1-\eta)/\gamma} = o(\text{Inv}(\delta_{l_t}))$ . Il suit du lemme 4.2.1 que  $\delta_{l_t}^{(1-\eta)/\gamma} = o(t)$  en loi (donc  $\mathbb{P}^{\infty} - \text{p.s.}$  également, puisqu'on a la convergence vers une constante). Au bout du compte, on a donc que pour tout  $\zeta > 0$ ,  $\delta_{l_t} = o(t^{\gamma+\zeta})$   $\mathbb{P}^{\infty} - \text{p.s.}$  En particulier,  $\delta_{l_t} = o(t^{\alpha\gamma/(1-\beta)})$ , ce qui signifie que lorsque  $t$  est suffisamment grand,  $t^{\alpha\gamma/(1-\beta)} > \delta_{l_t}$ . Dans ce cas,

$$\sum_{i=0}^{t^{\frac{\alpha\gamma}{1-\beta}}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_{\infty}^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max}\} > \sum_{i=0}^{\delta_{l_t}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_{\infty}^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} < t^{\alpha}\}$$

et on conclut à (4.2.5)

Pour obtenir (4.2.6), il suffit de réaliser que  $\delta_{l_{t+1}} - \delta_{l_t}$  est une variable aléatoire ayant la même loi que  $\delta_1$ , c'est à dire une loi géométrique de paramètre  $\bar{\mathbb{P}}\{LT(K, t^{\alpha})\}$ . On a donc

que, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{P}}\{\delta_1 > \eta t^\gamma\} &\leq \frac{\overline{\mathbb{P}}\{LT(K, t^\alpha)\}^{-1}}{\eta t^\gamma} \\ &\leq \frac{(c\mathbf{P}\{c_* \geq t^\alpha\})^{-1}}{\eta t^\gamma} \\ &\sim C' L(t^\alpha)^{-1} t^{\gamma(\alpha-1)} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Autrement dit,  $\delta_{l_t+1} - \delta_{l_t} = o(t^\gamma)$  et on a donc aussi  $\delta_{l_t+1} = o(t^{\gamma+\zeta})$  pour  $\zeta > 0$ .  $\square$

**Lemme 4.2.4.** *Pour  $K$  suffisamment grand, nous avons, en distribution sous  $\mathbb{P}^\infty$  et sous  $\overline{\mathbb{P}}$ ,*

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t}} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.8)$$

et

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t+1}} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.9)$$

DÉMONSTRATION. Pour montrer (4.2.8), en partant de (4.2.4), on remplace  $n$  par  $\delta_{l_t}$  et on applique tout simplement le lemme 4.2.1. Tout ce qu'il reste à faire ici, c'est d'ajouter et de soustraire la sommation dans le numérateur de (4.2.8), puis d'appliquer le lemme 4.2.3.

On peut procéder de façon similaire pour (4.2.9). Si on remplace plutôt  $n$  par  $\delta_{l_t+1}$  dans (4.2.4), et qu'on ajoute puis qu'on soustrait la sommation du numérateur de (4.2.9), on obtient

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t+1}} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}}{\text{Inv}(\delta_{l_t+1})} \rightarrow 0$$

Pour conclure, on emploie à notre avantage les faits suivants :

- (1) Si  $R(t)$  est une fonction à variation régulière à l'infini et que nous avons deux suites  $a_n \sim b_n$  (à l'infini également), alors  $R(a_n) \sim R(b_n)$ .
- (2) Si  $R(t)$  est une fonction à variation régulière,  $R^{-1}(1/t)$  est aussi une fonction à variation régulière.

On montre d'abord que  $\delta_{l_t} \sim \delta_{l_t+1}$ . Pour ce faire, il suffit de constater que, sachant  $l_t$ ,  $\delta_{l_t+1} - \delta_{l_t}$  est une géométrique de paramètre  $\mathbf{P}\{c_*^{\max} > t^\alpha\}$  et que  $\delta_{l_t}$  est indépendante de  $\delta_{l_t+1} - \delta_{l_t}$ , et est une somme de  $l_t$  variables distribuées comme  $\delta_1$ . Puisque  $l_t \rightarrow \infty$  presque sûrement, on a donc nécessairement que  $\delta_{l_t+1} - \delta_{l_t} = o(\delta_{l_t})$ .

Puis, on déduit des propriétés que nous venons d'énoncer que  $\text{Inv}$  est une fonction à variation régulière, en conséquence de quoi  $\text{Inv}(\delta_{l_t+1}) \sim \text{Inv}(\delta_{l_t})$ . On obtient donc

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t+1}} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}}{\text{Inv}(\delta_{l_t})} \rightarrow 0,$$

puis on applique le lemme 4.2.1 pour obtenir (4.2.9).  $\square$

**Lemme 4.2.5.** *Pour  $K$  suffisamment grand, nous avons en distribution sous  $\mathbb{P}^\infty$  et sous  $\bar{\mathbb{P}}$*

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t+1}} - \tau_{\delta_{l_t}}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.10)$$

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que  $\text{Inv}(n+1) \sim \text{Inv}(n)$ . Par conséquent, le raisonnement de la preuve précédente appliqué à  $\tau_{\delta_{l_t+1}}$  donne immédiatement

$$\frac{\tau_{\delta_{l_t+1}} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t}} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}}{t} \rightarrow 0 \quad (4.2.11)$$

Comparons les dénominateurs de (4.2.9) et (4.2.11). On a

$$\sum_{i=0}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\} - \sum_{i=0}^{\delta_{l_t}} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\} = \sum_{i=\delta_{l_t}+1}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}$$

Dans la sommation sur le côté droit de cette dernière équation, toutes les indicatrices sont nulles, par définition des  $\delta_i$  ! Autrement dit, on a précisément

$$\sum_{i=0}^{\delta_{l_t+1}-1} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\} = \sum_{i=0}^{\delta_{l_t}} c_{*,(i)}^{\max} W_\infty^{(i)} \mathbf{1} \{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\}$$

Le résultat suit immédiatement en appliquant ensemble (4.2.9) et (4.2.11)  $\square$

### 4.3. LA PROBABILITÉ QUE LA MARCHE SOIT DANS LE MÊME BLOC DE RÉGÉNÉRATION EN $t$ ET EN $ht$

Nous sommes maintenant prêts à attaquer la proposition 4.1.1. La preuve de cette proposition est largement inspirée des étapes suivies par [28] et [13]. On commence par introduire les notations suivantes :  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$  et  $\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{T}_i$ . On notera également  $l_t^* = \sup \{n \in \mathbb{N} | S_n \leq t\}$ . Avec ces notations, on montre d'abord ce résultat :

**Lemme 4.3.1.** *Pour  $K$  suffisamment grand, pour tout  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ a \leq \frac{S_{l_t^*}}{t} \leq b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_a^b y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (4.3.1)$$

De plus, pour tout  $0 \leq a \leq b$ , on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ 1+a \leq \frac{S_{l_t^*+1}}{t} \leq 1+b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_a^b \frac{dy}{y^\gamma (1+y)} \quad (4.3.2)$$

DÉMONSTRATION. La probabilité que nous tentons d'évaluer est la suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} \left\{ a \leq \frac{S_{l_t^*}}{t} \leq b \right\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ a \leq \frac{S_i}{t} \leq b, l_t^* = i \right\} \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \frac{T_{i+1}}{t} \geq (1-y) \right\} f_i(y) dy \end{aligned}$$



Ici, on a choisi  $f_i(y)$  comme densité de  $S_i/t$ . La seconde égalité ne va pas forcément de soi – pourtant, on constate que si  $S_i/t$  est entre  $a$  et  $b$  et que  $i = l_t^*$ , c'est que, d'une part,  $S_i/t$  est entre  $a$  et  $b$ , et que d'autre part,  $S_{i+1} = S_i + T_{i+1}$  excède  $t$  (donc si  $S_i/t = y$ , il faut que  $T_{i+1}/t > 1 - y$ ). On remarque finalement que puisque les  $T_i$  sont i.i.d.,  $S_i/t$  est indépendant de  $T_{i+1}$ .

En outre, puisque les  $T_i$  sont i.i.d., on peut remplacer  $T_{i+1}$  par  $T_1$  dans l'égalité obtenue plus haut. En fait, si on note  $G_t(x) = \mathbb{P}\{T_1/t \geq x\}$ , et si on note de plus  $dU_t(y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(y)dy$ , alors on a

$$\mathbb{P}\left\{a \leq \frac{S_{l_t^*}}{t} \leq b\right\} = \int_a^b G_t(1-y)dU_t(y)$$

Nous avons déjà une approximation suffisante pour  $G_t(1-y)$ . Ce que nous voulons maintenant, c'est avoir une idée de ce qu'est la mesure  $dU_t(y)$ . Pour ce faire, on étudie sa transformée de Laplace :  $\hat{U}_t(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-y\lambda} dU_t(y)$ . On voit que si on développe  $dU_t(y)$ , et que l'on intervertit la somme et l'intégrale (ce que l'on peut faire sans problème par le théorème de la convergence monotone), on obtient

$$\hat{U}_t(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_i/t}\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda T_1/t}\right]}$$

La seconde égalité provient du fait que  $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_i/t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_1/t}\right]^i$ , puisque  $S_i/t$  est une somme de variables aléatoires i.i.d. ayant la loi de  $T_1/t$ .

Nous avons une approximation de la queue de  $T_1/t$  donnée par

$$G_t(x) \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^{\infty}[W_{\infty}^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^{\infty}\{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\}} x^{-\gamma}$$

On calcule maintenant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda T_1/t}\right] &= 1 + \int_0^{\infty} e^{-x\lambda} dG_t(x) \\ &= 1 - \left[e^{-x\lambda} G_t(x)\right]_0^{\infty} + \lambda^{-1} \int_0^{\infty} G_t(x) e^{-x\lambda} dx \\ &\sim \frac{C_1 \mathbb{E}^{\infty}[W_{\infty}^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^{\infty}\{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\}} \lambda^{-1} \int_0^{\infty} x^{-\gamma} e^{-x\lambda} dx \\ &= \frac{C_1 \mathbb{E}^{\infty}[W_{\infty}^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^{\infty}\{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\}} \Gamma(1-\gamma) \lambda^{\gamma} \end{aligned}$$

et on obtient par conséquent que

$$\hat{U}_t(\lambda) \sim \frac{\mathbb{P}^{\infty}\{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} t^{\gamma}}{C_1 \mathbb{E}^{\infty}[W_{\infty}^{\gamma}] L(t)} \frac{\lambda^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}$$

L'intérêt de ceci, c'est que l'identité  $\Gamma(\gamma) \lambda^{-\gamma} = \int_0^{\infty} e^{-y\lambda} y^{\gamma-1} dy$  nous permet d'affirmer que si  $dU_{\infty}(y) = (y^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma))dy$ , alors on a que  $\hat{U}_{\infty}(\lambda) = \lambda^{-\gamma}$ .

En particulier, on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(1 - \gamma) \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} \hat{U}_t(\lambda) = \hat{U}_\infty(\lambda)$$

c'est à dire que la mesure  $dF_t(y) := \Gamma(1 - \gamma) \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} dU_t(y)$  converge vers la mesure  $dU_\infty(y)$ .

De retour à notre calcul de probabilité, on a

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} \left\{ a \leq \frac{S_{l_t^*}}{t} \leq b \right\} &= \int_a^b G_t(1 - y) dU_t(y) \\ &\sim \int_a^b (1 - y)^{-\gamma} \frac{dF_t(y)}{\Gamma(1 - \gamma)} \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(\gamma)} \int_a^b y^{1-\gamma} (1 - y)^{-\gamma} dy \end{aligned}$$

On conclut donc à (4.3.1) en appliquant l'identité  $\frac{\pi}{\sin \pi \gamma} = \Gamma(\gamma) \Gamma(1 - \gamma)$ .

On montre (4.3.2) de façon tout à fait analogue.  $\square$

Ce résultat paraît prometteur : on a une idée de la loi de la proportion obtenue si on additionne tous les temps passés dans des grands blocs de régénération sans que le total excède  $t$  – ça y est presque. Toutefois, la quantité qui nous intéresse vraiment, c'est la loi de la proportion du temps passé avant le dernier grand bloc qui nous intéresse :  $\tau_{\delta_{l_t}}$ .

**Lemme 4.3.2.** *Pour  $K$  suffisamment grand et pour  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ a \leq \frac{\tau_{\delta_{l_t}}}{t} \leq b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_a^b y^{\gamma-1} (1 - y)^{-\gamma} dy \quad (4.3.3)$$

et pour  $0 \leq a \leq b$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ 1 + a \leq \frac{\tau_{\delta_{l_t+1}}}{t} \leq 1 + b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_a^b \frac{dy}{y^\gamma (1 + y)} \quad (4.3.4)$$

**DÉMONSTRATION.** Nous savons déjà (lemme 4.2.4) que  $(\tau_{\delta_{l_t}} - \tilde{S}_{l_t-1})/t \rightarrow 0$  en distribution pour  $\mathbb{P}^\infty$ , puisque le nombre de pièges profonds rencontrés entre  $i = 0$  et  $i = \delta_{l_t} - 1$  est de  $l_t = 1$ . En raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.2.2, on montre aisément que  $(\tau_{\delta_{l_t}} - S_{l_t-1})/t \rightarrow 0$ , aussi en distribution pour  $\mathbb{P}^\infty$ . (Pour un bref rappel, on avait que  $(\tilde{T}_i - T_i)/t \rightarrow 0$  pour  $\mathbb{P}^\infty$ , et  $l_t = o(t)$  puisque  $\delta_{l_t} = o(t)$ ).

Puisque  $\tau_{\delta_{l_t}}$  et  $S_{l_t-1}$  sont mesurables pour  $\bar{\mathbb{P}}$ , on doit avoir également que  $(\tau_{\delta_{l_t}} - S_{l_t-1})/t \rightarrow 0$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Évidemment,  $S_{l_t-1} \leq \tau_{\delta_{l_t}} \leq t$ , puisque  $S_{l_t-1}$  omet certains blocs de régénération. Cela signifie que  $l_t - 1 \leq l_t^*$ , par définition de  $l_t^*$ .

De plus,  $(\tau_{\delta_{l_t}} - S_{l_t-1})/t \rightarrow 0$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$  entraîne  $(\tau_{\delta_{l_t+1}} - S_{l_t})/t \rightarrow 0$ , également sous  $\bar{\mathbb{P}}$  – il suffit d'ajouter puis de soustraire  $T_{\delta_{l_t}}$  au numérateur de la première équation pour se

convaincre de la seconde. On a donc

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{S_{l_t} \leq t\} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l_t}+1}}{t} \leq 1 \right\} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \tau_{\delta_{l_t}+1} t \leq 1 \right\} = 0\end{aligned}$$

La seconde égalité s'obtient en vertu du lemme (4.2.5). La dernière égalité est simplement due au fait que, nécessairement,  $\tau_{\delta_{l_t}+1} > t$  par définition de  $l_t$ . Le résultat, c'est que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{S_{l_t} > t\} = 1$ , donc avec probabilité 1 lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $l_t > l_t^*$ , ce qui signifie que  $l_t - 1 \geq l_t^*$ . On a donc finalement  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{l_t - 1 = l_t^*\} = 1$ . On peut donc remplacer sans problème  $l_t^*$  par  $l_t - 1$  dans le lemme 4.3.1. On conclut en appliquant encore une fois le fait que  $(\tau_{\delta_{l_t}} - S_{l_t-1})/t \rightarrow 0$  sous  $\bar{\mathbb{P}}$  (ou que  $(\tau_{\delta_{l_t}+1} - S_{l_t})/t \rightarrow 0$ , pour (4.3.4)).  $\square$

Nous aurons maintenant besoin d'un peu plus : on veut que pour tout  $h \geq 1$ , au temps  $ht$ , la marche soit encore dans le dernier  $t^\alpha$ -long bloc rencontré.

**Lemme 4.3.3.** *Pour  $K$  suffisamment grand, pour tout  $h \geq 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \tau_{\delta_{l_{ht}}} \leq ht < \tau_{\delta_{l_{ht}+1}} \right\} = 1 \quad (4.3.5)$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où  $h = 1$ , le résultat a déjà été montré dans la preuve du lemme 4.3.2. En effet nous avons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l_t}+1}}{t} \leq 1 \right\} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \left\{ \tau_{\delta_{l_t}+1} t \leq 1 \right\} = 0,$$

ce qui est exactement le résultat que nous voulions démontrer.

Si  $h > 1$ , il y a une petite subtilité. On sait (par le raisonnement précédent) qu'au temps  $ht$ , la marche aléatoire est dans le dernier  $(ht)^\alpha$ -long bloc rencontré avec probabilité 1. Toutefois, puisque  $h > 1$ ,  $h^\alpha > 1$  et par conséquent,  $(ht)^\alpha > t^\alpha$ . Or, il paraît par ailleurs évident que  $LT(K, r) \subseteq LT(K, s)$  lorsque  $r > s$  – en effet, si la plus grande conductance rencontrée excède  $r$ , elle excède forcément  $s$  si  $r > s$ . Résultat des courses : nous savons que le dernier bloc de régénération rencontré par la marche au temps  $ht$  est le dernier  $(ht)^\alpha$ -grand bloc. Ce bloc est également  $t^\alpha$ -grand, et il s'agit forcément du dernier bloc rencontré, donc du dernier  $t^\alpha$  grand bloc rencontré.  $\square$

On approche de plus en plus de notre objectif ! Nous allons maintenant calculer la probabilité que le dernier  $t^\alpha$ -grand bloc rencontré au temps  $t$  soit le même au temps  $ht$ .

**Lemme 4.3.4.** *Pour  $K$  suffisamment grand et pour  $h > 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{l_t = l_{ht}\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (4.3.6)$$

DÉMONSTRATION. Ici la preuve est une simple histoire de calcul. En effet, l'événement  $l_t = l_{ht}$  est simplement l'événement sur lequel au temps  $ht$ , il n'y a pas eu de nouveau piège creux – autrement dit, c'est simplement l'événement  $\tau_{\delta_{l_t}+1} > ht$ . On applique simplement le lemme

4.3.2 pour obtenir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{l_t = l_{ht}\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{h-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma(1+x)}$$

Il suffit d'effectuer le changement de variables  $y = 1/(1+x)$  pour conclure.  $\square$

À l'aide de tous ces petits résultats, la preuve de la proposition 1 devrait être assez simple. En effet, nous venons de montrer qu'au temps  $t$  et  $ht$ , la marche se trouve presque sûrement dans le dernier  $t^\alpha$ -long bloc de régénération rencontré – et nous avons aussi montré que la probabilité que celui-ci soit le même correspond au côté gauche de (4.1.2)

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.1.1. Définissons d'abord pour  $h > 1$  quelques familles d'événements. Tout d'abord, on introduit

$$D_h(t) = \{\tau_{\delta_{l_t}} \leq t < \tau_{\delta_{l_t}+1}\} \cap \{\tau_{\delta_{l_{ht}}} \leq ht < \tau_{\delta_{l_{ht}}+1}\}$$

l'événement que  $t$  et  $ht$  soient chacun leur dernier long bloc de régénération rencontré. On définit  $M_h(t) = \{l_t = l_{ht}\}$  l'événement que les derniers longs blocs rencontrés en  $t$  et  $ht$  soient le même.

Puis, on définit

$$\tilde{A}_h(t) = D_h(t) \cap M_h(t)$$

et

$$A_h(t) = \{\exists i : \tau_i \leq t < ht < \tau_{i+1}\}$$

Clairement,  $\tilde{A}_h(t) \subseteq A_h(t)$ . On considère maintenant  $\bar{A}_h(t) = A_h(t) \setminus \tilde{A}_h(t)$ . On a

$$\bar{A}_h(t) = (A_h(t) \cap D_h(t)^c) \sqcup (A_h(t) \cap (D_h(t) \setminus M_h(t)))$$

(le symbole  $\sqcup$  est employé pour identifier que les deux termes de l'union sont disjoints). Ceci entraîne évidemment

$$\mathbb{P} \{\bar{A}_h(t)\} \leq \mathbb{P} \{D_h(t)^c\} + \mathbb{P} \{A_h(t) \cap D_h(t) \cap M_h(t)^c\}$$

Or, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le premier terme tend vers 0 en vertu du lemme 4.3.3. Quant au second terme, on constate qu'il est nul, puisque  $A_h(t) \cap D_h(t) \subseteq M_h(t)$  – en effet, si  $t$  et  $ht$  sont chacun dans le dernier long bloc qu'ils ont rencontré, et qu'il existe un bloc de régénération qui contient  $t$  et  $ht$ , on a nécessairement  $i = \delta_{l_t} = \delta_{l_{ht}}$ , ce qui conduit à  $l_t = l_{ht}$ .

On a donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{\bar{A}_h(t)\} = 0$ , ce qui entraîne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{A_h(t) \triangle \tilde{A}_h(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{A_h(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{\tilde{A}_h(t)\}$$

On a déjà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{M_h(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

par le lemme 4.3.4. Or, par la formule de probabilité totale,

$$\bar{\mathbb{P}}\{M_h(t)\} - \bar{\mathbb{P}}\{\tilde{A}_h(t)\} = \bar{\mathbb{P}}\{M_h(t) \setminus D_h(t)\}$$

et en prenant la limite lorsque  $t \rightarrow 0$ , encore par le lemme 4.3.3,  $\bar{\mathbb{P}}\{M_h(t) \setminus D_h(t)\} \rightarrow 0$ . On conclut finalement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\{M_h(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\{\tilde{A}_h(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\{A_h(t)\}$$

□

Bien sûr, la formulation de la proposition 4.1.1 ne fait référence à aucun seuil de profondeur de piège, quel qu'il soit. On peut obtenir un résultat plus précis – il suffit de renverser le raisonnement ! En effet,  $\tilde{A}_h(t)$  dépend de  $\alpha$ , mais on a bien, dans la preuve, plus haut, que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\{\tilde{A}_h(t) \triangle A_h(t)\} = 0$  pour n'importe quelle valeur de  $\alpha \in (5/6, 1)$ . Autrement dit, pour n'importe quel  $\alpha < 1$ , la probabilité que  $t$  et  $ht$  se retrouvent dans le même bloc de régénération sans que ce bloc ne soit pas  $t^\alpha$ -long tend vers 0. Une conséquence directe de ce raisonnement est le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3.1.** *On a que pour tout  $h > 1$ ,  $\alpha < 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\left\{LT^{(i)}(K, t^\alpha) \middle| \tau_i \leq t < ht < \tau_{i+1}\right\} = 1 \quad (4.3.7)$$

L'intérêt de formuler le résultat ainsi, c'est surtout de mettre en évidence le fait que nous ne choisissons pas un  $\alpha$  en particulier. Nous avons montré que, lorsque  $t$  et  $ht$  se trouvent dans le même bloc de régénération, quand  $t \rightarrow \infty$ , celui-ci est presque sûrement  $t^\alpha$ -long pour toute valeur de  $\alpha < 1$ .

#### 4.4. LA DISTANCE ENTRE LA POSITION DE LA MARCHE AUX TEMPS $t$ ET $ht$

Nous en sommes maintenant à déterminer la borne de distance qui se trouvera à la gauche de notre équation pour le résultat de vieillissement. C'est l'objet principal de la proposition 4.1.2.

On commence par deux lemmes :

**Lemme 4.4.1.** *Pour tout  $K$  suffisamment grand,  $\epsilon > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , nous avons que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}\left\{\max_{\tau_i \leq r \leq s < \tau_{i+1}} \|X_r - X_s\| \geq \eta t^\epsilon \middle| LT(K, t^\alpha)\right\} \quad (4.4.1)$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que pour  $\xi > d + 3$ , nous avons

$$\chi := \inf \left\{ m \in \mathbb{N} : \{X_i, i \in [0, \tau_1]\} \subset B(m, m^\xi) \right\}$$

(équation (3.7.1)).

Nous avons que pour tout  $M > 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathbb{P}} \left\{ \max_{\tau_i \leq r \leq s < \tau_{i+1}} \|X_r - X_s\| \geq \eta t^\epsilon \mid LT(K, t^\alpha) \right\} \\
& \leq 2 \overline{\mathbb{P}} \left\{ \max_{\tau_i < s < \tau_{i+1}} \|X_s\| \geq \frac{\eta t^\epsilon}{2} \mid LT(K, t^\alpha) \right\} \\
& \leq 2 \overline{\mathbb{P}} \left\{ \chi \geq \left( \frac{\eta t^\epsilon}{2\sqrt{d}} \right)^{1/\xi} \mid LT(K, t^\alpha) \right\} \\
& \leq \frac{2}{\overline{\mathbb{P}} \{LT(K, t^\alpha)\}} \overline{\mathbb{P}} \left\{ \chi \geq \left( \frac{\eta t^\epsilon}{2\sqrt{d}} \right)^{1/\xi} \right\} \\
& \leq \frac{2C(\xi, K, d)}{\mathbf{P} \{c_* \geq t^\alpha\}} t^{-\epsilon M/\xi} \\
& \sim \frac{C'(\xi, K, d)}{L(t^\alpha)} t^{\alpha\gamma - \epsilon M/\xi}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé dans l'ordre : l'inégalité du triangle, la définition de  $\chi$ , le fait que les blocs de régénération sont i.i.d., la définition de probabilité conditionnelle, ainsi que (3.7.2) et (3.4.2). Puisque cela est valable pour tout  $M$ , il suffit de choisir  $M > \gamma\alpha\xi/\epsilon$ .  $\square$

On voit immédiatement ce que l'on fera de ce résultat : si  $\tau_i \leq t < ht < \tau_{i+1}$ , on a évidemment que  $\|X_t - X_{ht}\| \leq \max_{r,s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[} \|X_r - X_s\|$ . De plus, avec le corollaire 4.3.1, ceci signifie qu'on obtient :

**Corollaire 4.4.1.** *Pour  $K$  suffisamment grand,  $h > 1$ ,  $\epsilon, \eta > 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}} \{ \|X_t - X_{ht}\| \geq \eta t^\epsilon \mid \tau_i \leq t < ht < \tau_{i+1} \} = 0 \quad (4.4.2)$$

Nous sommes maintenant à mi-chemin vers la proposition 4.1.2. Nous savons que si  $t$  et  $ht$  sont dans le même bloc de régénération,  $X_t$  et  $X_{ht}$  ne peuvent pas être «trop éloignés». Ceci dit, nous devons aussi vérifier que lorsque  $t$  et  $ht$  ne sont pas dans le même bloc de régénération,  $X_t$  et  $X_{ht}$  ne sont pas trop proches.

**Lemme 4.4.2.** *Pour tout  $K$  suffisamment grand,  $0 < \epsilon < \gamma$ ,  $\alpha \in (\epsilon/\gamma, 1)$ ,  $\eta > 0$ ,  $i < j$ , nous avons*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}} \left\{ \min_{r \in [\tau_{\delta_i}, \tau_{\delta_i+1}[ , s \in [\tau_{\delta_j}, \tau_{\delta_j+1}[} \|X_r - X_s\| \leq \eta t^\epsilon \right\} = 0 \quad (4.4.3)$$

**DÉMONSTRATION.** On commence par rappeler la définition des temps de régénération. Cette dernière implique qu'il y a ce que nous appellerons des «frontières» entre les blocs de régénération – les hyper-plans perpendiculaires au biais  $\ell$ , et qui coupent  $(X_t)_{t \geq 0}$  aux temps de régénération. Ces plans séparent  $\mathbb{Z}^d$  en partitions telles que lorsque  $X_t$  quitte l'une de ces partitions (par la frontière la plus éloignée de l'origine), le processus ne reviendra plus dans cette partition. Avec ceci en tête, la preuve devient assez simple. Si  $i$  est fixé,  $\min \|X_r - X_s\|$  (avec  $r$  et  $s$  choisis comme dans (4.4.3)) est monotone en  $j$ . Il sera donc suffisant de montrer

le résultat pour  $j = i + 1$ . Dans ce cas, une autre chose dont il faut se souvenir, c'est que la distance minimale entre deux sommets de blocs de régénération différents est de 1. Ainsi, on doit avoir

$$\min_{r \in [\tau_{\delta_i}, \tau_{\delta_{i+1}}[, s \in [\tau_{\delta_j}, \tau_{\delta_{j+1}}[} \|X_r - X_s\| > \delta_j - \delta_i$$

Mais  $\delta_{i+1} - \delta_i$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p = \overline{\mathbb{P}}\{LT(K, t^\alpha)\}$ . Ceci fait en sorte que

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}\{\delta_{i+1} - \delta_i \geq \eta t^\epsilon\} &\geq (1 - p)^{\lfloor \eta t^\epsilon \rfloor} \\ &\sim \left(1 - \frac{CL(t^\alpha)}{t^{\alpha\gamma}}\right)^{\eta t^\epsilon} \end{aligned}$$

Ici,  $C$  est une constante et comme on a choisi  $\alpha > \epsilon/\gamma$ , on a finalement que  $\overline{\mathbb{P}}\{\delta_{i+1} - \delta_i \geq \eta t^\epsilon\} \rightarrow 1$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

Avec ce lemme, on a montré que lorsque  $t$  et  $ht$  sont dans deux longs blocs de régénération différents, la distance entre les deux ne peut pas être «trop petite». En employant le lemme 4.3.3, on obtient aisément le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.2.** *Pour tout  $K$  suffisamment grand,  $0 < \epsilon < \gamma$ , nous avons*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{\|X_t - X_{ht}\| \leq \eta t^\epsilon \mid \exists i : \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \leq ht\} \quad (4.4.4)$$

On peut maintenant passer à la démonstration de la proposition 4.1.2

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.1.2.** Nous réutiliserons les familles d'événements  $A_h(t)$  et  $\tilde{A}_h(t)$  de la preuve de la proposition 4.1.1. Soit une nouvelle famille d'événements  $B_h(t)$  définie par

$$B_h(t) = \{\|X_t - X_{ht}\| \leq \eta t^\epsilon\}$$

Le corollaire 4.4.2 nous donne déjà  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{B_h(t)^c \mid A_h(t)\} = 0$ . D'autre part, sur  $A_h(t)^c$ , nous avons toujours que, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $D_h(t)$  est presque sûrement réalisé. On a donc, par le corollaire 4.4.2, que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{B_h(t) \mid A_h(t)^c\} = 0$ .

On a évidemment

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{A_h(t) \triangle B_h(t)\} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{B_h(t)^c \mid A_h(t)\} + \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{B_h(t) \mid A_h(t)^c\} = 0$$

Ceci complète la preuve de la proposition 4.1.2.  $\square$

## 4.5. CONCLUSION DE LA PREUVE

Nous pouvons maintenant attaquer la preuve du théorème 4.1.1. Cela devrait être assez rapide, pour la plus grande part. L'objectif est d'obtenir la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\{B_h(t)\}$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1.1. Par la proposition 4.1.2, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{A_h(t) \triangle B_h(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{B_h(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{A_h(t)\}$$

Par la proposition 4.1.2, on a cependant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{A_h(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}} \{B_h(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

Ce qu'il reste à faire, surtout, c'est de montrer que l'on a la même limite pour  $\mathbb{P}_0$ . Cela s'avère assez simple également. En effet, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , l'événement  $B_h(t)$  devient de plus en plus indépendant de  $(X_t)_{t \leq \tau_1}$ , puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{\tau_1 < t\} \rightarrow 1$ . Comme mentionné à la fin de la section 3.3, on a par conséquent la même limite lorsque l'on remplace  $\bar{\mathbb{P}}$  par  $\mathbb{P}_0^K$ .

Finalement, on remarquera que, encore une fois grâce à une remarque faite à la fin de la section 3.3 (proposition 5.1 dans [16]), on considère

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{B_h(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

Mais puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{B_h(t)\}$  est ultimement constant en  $K$ , on peut intervertir les limites. On obtient donc finalement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{B_h(t)\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

Et on a finalement obtenu le résultat souhaité. □



# CONCLUSION

---

Nous aimerions conclure en présentant une conjecture particulière concernant la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ , et que nous ne démontrerons pas. Souvenons-nous que, bien que les temps de régénération aient été pratiques et que nous ayons formulé l'essentiel de notre raisonnement en termes de blocs de régénération, le vieillissement en tant que tel est causé par la présence de pièges à l'intérieur de ces blocs de régénération. La présence de pièges et leur importance n'a peut-être pas été tout à fait évidente lors de la discussion – en effet, on peut surtout voir la trace de ceux-ci dans les résultats préliminaires cités dans le chapitre 3, mais la structure précise des pièges n'apparaît pas dans notre raisonnement.

L'avantage d'une telle approche, c'est qu'on n'a pas à réinventer la roue à chaque fois – on peut s'imaginer que, pour autant que des résultats similaires aient été obtenus pour un autre modèle, et que la structure de régénération soit semblable, il sera facile de procéder de manière similaire pour obtenir un résultat de vieillissement.

Par contre, cette approche présente aussi un inconvénient. En ignorant la structure précise des pièges, même si on sait par exemple que  $X_t$  se trouve dans «un bloc de régénération comprenant un grand piège», cela ne nous donne qu'une idée très vague de ce qui se passe précisément dans les pièges. Par exemple, rappelons la remarque 3.7.1 à la fin de la section 3.7. Elle souligne précisément une conséquence de ce problème : l'estimé de la «taille» d'un bloc de régénération est très vague – on a seulement qu'il est ultimement inférieur à n'importe quelle puissance de  $t$  lorsque  $t$  croît à l'infini. Peut-on faire mieux ?

Peut-être pas si l'on s'en tient aux temps et aux blocs de régénération. Cependant, nous avons déjà mentionné que nous savons bien quelque chose de la façon dont les pièges se produisent ; à la limite où  $t$  est grand, les grands pièges se produisent presque sûrement toujours de la même façon : une arête a une conductance dramatiquement plus élevée que ses voisines, ce qui force la marche aléatoire à faire des allers-retours sur cette arête pendant des périodes très prolongées. À l'extérieur de telles configurations, malgré qu'on peut toujours se trouver dans le même bloc de régénération, la marche aléatoire n'est pas véritablement «piégée». Autrement dit, lorsque la marche est véritablement coincée dans un piège, elle est en fait coincée sur une arête ! On peut donc formuler la conjecture suivante :

**Conjecture.** *Si  $X_t$  est la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$  telle que décrite au chapitre 3, pour tout  $h > 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{ \|X_t - X_{ht}\| \leq 1 \} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \quad (4.5.1)$$

La différence avec le théorème 4.1.1 est frappante : on a remplacé la borne  $\eta t^\epsilon$  (qui tend toujours vers l'infini lorsque  $t \rightarrow \infty$ ) par une constante (1), qui reflète que malgré qu'un bloc de régénération peut être assez étendu, le vrai piège sera toujours une seule arête, peu importe  $t$ . On peut même aller un peu plus loin : si on définit  $p_h(t) = t + 2\lfloor (h-1)t/2 \rfloor$ . Alors,  $t$  et  $p_h(t)$  ont la même parité, et  $|ht - p_h(t)| \leq 1$  (donc  $ht \sim p_h(t)$  pour toute valeur de  $h$ ). On pourrait remplacer 4.5.1 par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{ X_t = X_{p_h(t)} \} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy$$

# Bibliographie

---

- [1] Elie AÏDÉKON : Transient random walks in random environments on a Galton-Watson tree. *Probability Theory and Related Fields*, 142(3–4):525–559, 2008.
- [2] Elie AÏDÉKON : Speed of the biased random walk on a Galton-Watson tree. *Probability Theory and Related Fields*, 159(3–4):597–617, 2014.
- [3] Martin T. BARLOW : Random walks on supercritical percolation clusters. *The Annals of Probability*, 32(4):3024–3084, 2004.
- [4] Martin T. BARLOW, Antal A. JÁRAI, Takashi KUMAGAI et Gordon SLADE : Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimension. *Communications in Mathematical Physics*, 278(2):385–431, 2008.
- [5] Gérard BEN AROUS, Anton BOVIER et Véronique GAYRARD : Glauber dynamics of the random energy model. *Communications in Mathematical Physics*, 236(1):1–54, 2003.
- [6] Gérard BEN AROUS, Anton BOVIER et Jiří ČERNÝ : Universality of the REM for dynamics of mean-field spin glasses. *Communications in Mathematical Physics*, 282(3):663–695, 2008.
- [7] Gérard BEN AROUS et Alexander FRIBERGH : Biased random walks on random graphs. In V. SIDORAVICIUS et S. SMIRNOV, éditeurs : *Probability and Statistical Physics in St. Petersburg*, pages 99 – 154. American Mathematical Society, juin 2012.
- [8] Gérard BEN AROUS, Alexander FRIBERGH, Nina GANTERT et Alan HAMMOND : Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves. *Annals of Probability*, 40(1):280 – 338, 2012.
- [9] Jean BERTOIN : *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] Jean-Philippe BOUCHAUD : Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. 2(9): 1705–1713, 1992.
- [11] David CROYDON, Alexander FRIBERGH et Takashi KUMAGAI : Biased random walks on critical Galton-Watson trees conditioned to survive. *Probability Theory and Related Fields*, 157(1–2):453–507, 2013.
- [12] Richard DURRETT : *Probability : Theory and Examples (4th edition)*. Cambridge University Press, 2010.
- [13] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY : Aging and quenched localisation for one-dimensional random walks in random environment in the sub-ballistic regime. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 137:423–452, 2009.

- [14] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY : Limit laws for transient random walks in random environments on  $\mathbb{Z}$ . *Annales de l'Institut Fourier*, 59(6):2469–2508, 2009.
- [15] Alexander FRIBERGH : Biased random walks in positive random conductances on  $\mathbb{Z}^d$ . *Annals of Probability*, 41(6):3910 – 3972, 2013.
- [16] Alexander FRIBERGH et Daniel KIOUS : Scaling limits for sub-ballistic biased random walks in random conductances. *Annals of Probability*, à paraître.
- [17] Janos GALAMBOS : *Advanced probability theory*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.
- [18] Barry D. HUGHES : *Random Walks and Random Environments*. Oxford University Press, 1996.
- [19] Donald L. IGLEHART : Extreme values in the GI/G/1 queue. *Annals of Mathematical Statistics*, 43(2):627–635, 1972.
- [20] Russell LYONS, Robin PEMANTLE et Yuval PERES : Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probability Theory and Related Fields*, 106(2):249–264, 1996.
- [21] Russell LYONS et Yuval PERES : *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, décembre 2016.
- [22] Peter MÖRTENS, Marcel ORTGIESE et Nadia SIDOROVA : Ageing in the parabolic anderson model. *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, 47(4):969–1000, 2011.
- [23] Lian SHEN : Asymptotic properties of certain anisotropic walks in random media. *Annals of Applied Probability*, 12(2):477–510, 2002.
- [24] Anatoliy Volodymyrovych SKOROKHOD : Limit theorems for stochastic processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1(3):261–290, 1956.
- [25] Fred SOLOMON : Random walks in a random environment. *Annals of Probability*, 3(1):1–31, 1975.
- [26] Remco van der HOFSTAD et Antal A. JÁRAI : The incipient infinite cluster for high-dimensional unoriented percolation. *Journal of Statistical Physics*, 114(3–4):625–663, 2004.
- [27] Ofer ZEITOUNI : Random walks in random environment. *Lecture notes in Mathematics*, 1837: 193–312, 2004.
- [28] Olivier ZINDY : Scaling limit and aging for directed trap models. *Markov Processes and Related Fields*, 15(1):31–50, 2009.