Pièges et vieillissement pour les marches aléatoires en milieux aléatoires

Phénoménologie et étude de cas

Élise Davignon

le 25 mars 2024

The Problem of the Random Walk.

CAN any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after these n stretches he is at a distance between r and $r+\delta r$ from his starting point, O.

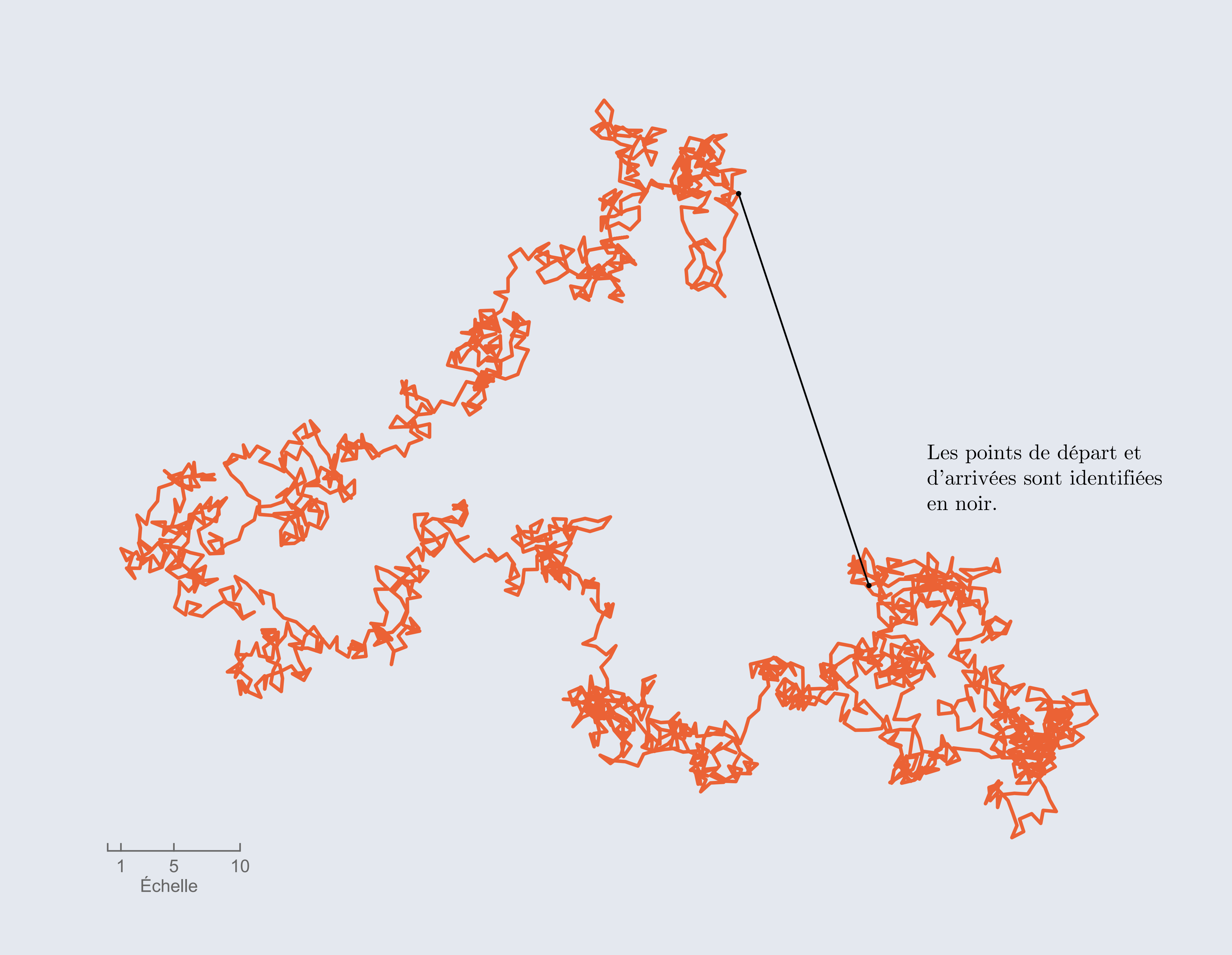
The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for *two* stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series in powers of $1/n$, when n is large.

KARL PEARSON.

The Gables, East Ilsley, Berks.

Karl PEARSON
The Problem of the Random Walk,
Nature, 1905

Une réalisation de
la marche aléatoire
décrite par Pearson,
avec $n = 2\,000$



Physical ageing

In contrast to degradation involving chemical reactions as in corrosion, physical ageing involves changes of material properties that are caused exclusively by molecular rearrangements[8,9,10,11,12,13,14,15,16]. Non-crystalline materials such as ordinary glass[6,9], polymers[10,13,17] and metallic glasses[14,18,19] are all subject to physical ageing because the glassy state relaxes continuously towards a state of metastable equilibrium[20]. In the vast majority of cases this is too slow to be observed, but in certain cases physical ageing results in undesirable property changes. The study of physical ageing is important for applications of glassy materials, as well as for optimization of their production. For this reason—and because what controls the rate of physical ageing remains disputed—this old research field continues to attract attention[21,22,23,24,25,26,27].

Til Bömer et al.
Time reversibility during the ageing of materials,
Nature Physics, 2024

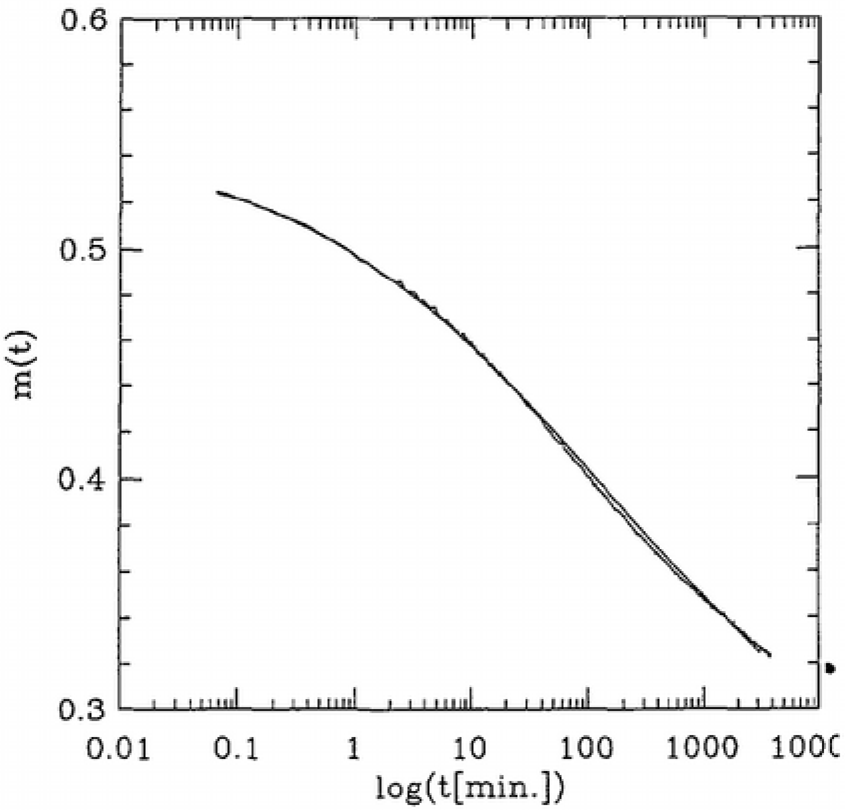


Fig. 2. — Fit of one of the aging experiment on $CdCr_{1.7}In_{0.3}S_4$ spin glass [6]. The waiting time is 31.3 min under 15 Gauss, and the temperature is $10\ K \simeq 0.6\, T_g$. The set of parameters used was $m_0 = 0.567$ (in units of the field cooled magnetization), $x = 0.76$ and $\gamma = 0.0645$.

M. Alba, M. Ocio, M. Hammann.
(*Europhysics Letters* vol. 2, no. 45 1986);
Lettres du journal de Physique vol. 46, L-1101, 1985

via : Jean-Philippe Bouchaud : Weak Ergodicity Breaking and aging in disordered systems, *Journal de Physique I*, 1992

1. Exemple de MAMA sur $\mathbb{Z}$

On commence avec la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$.

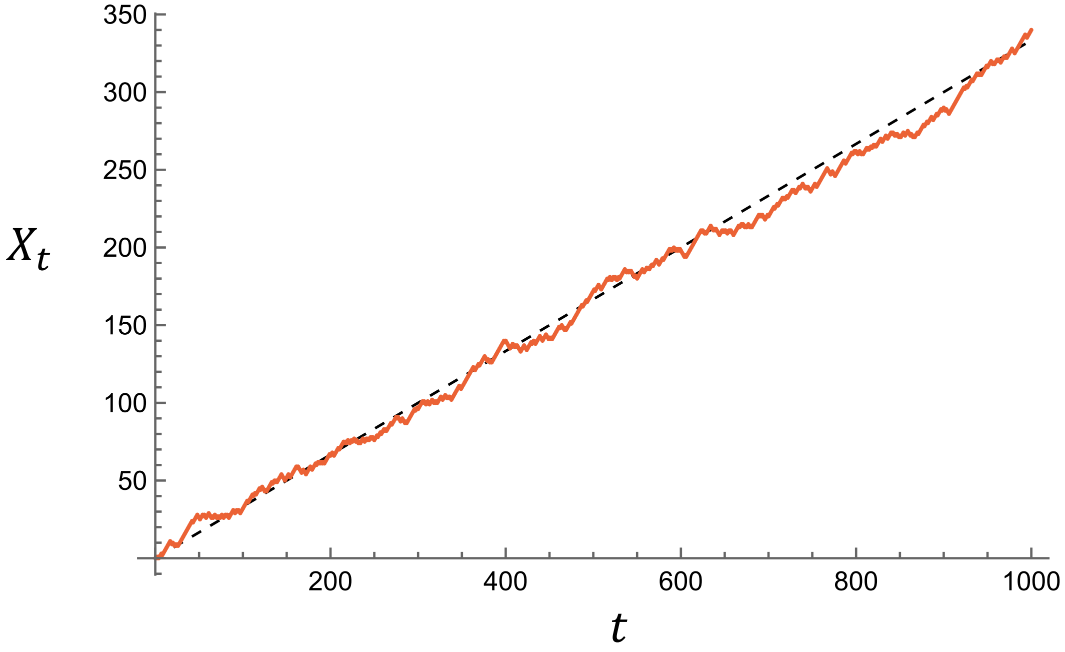
$$p(x,x+1) = p = \frac{2}{3};\;\; p(x,x-1) = q = \frac{1}{3}$$

probabilités de transition

$$\rho = \frac{q}{p} = 1/2$$

ratio de biais à gauche

Résultats classiques



Une réalisation de la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$ avec $\rho = 1/2$.

$$\lim_{t=0} X_t = \pm\infty \text{ si } \pm (p-q) > 0$$

Transience directionnelle

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = v = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1}{3}$$

Vitesse asymptotique positive

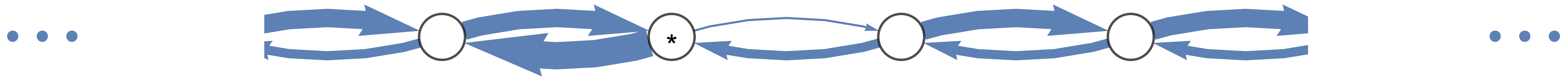
$$\frac{X_t - v\,t}{\sqrt{4\,p\,q\,t}} \to \mathcal{N}$$

Fluctuations normales

$$\left(\frac{X_{\lfloor Nt \rfloor} - v\,N\,t}{\sqrt{N}}\right)_{0\le t\le T} \to (\mathcal{W}_t)_{0\le t\le T}$$

Limite d'échelle brownienne

Pour chaque sommet, on le désigne comme un goulot d'étranglement $(*)$ avec probabilité $g = 1/100$.



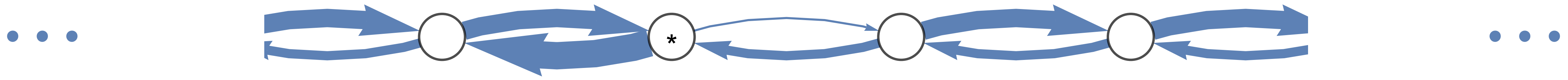
Les goulots d'étranglement renvoient le marcheur vers la gauche avec probabilité $q^* = 100/101$ et le laissent passer avec probabilité $p^* = 1/101$.

$$\rho^* = \frac{q^*}{p^*} = 100.$$

L'environnement de la marche est donc *aléatoire.*

P Mesure de probabilités *pour l'environnement*

ω Environnement aléatoire

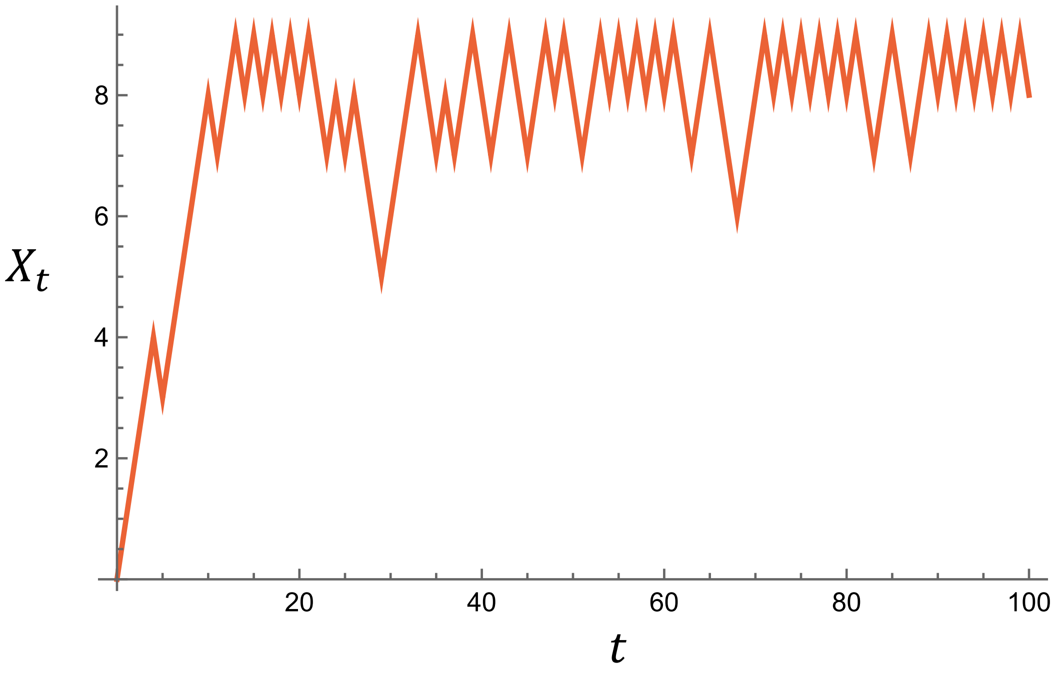


Les probabilités de transition sont des variables aléatoires mesurables sous **P**.

$$p_x^\omega = p^\omega(x, x+1);\;\; q_x^\omega = 1 - p_x^\omega \qquad \rho_x^\omega = \frac{q_x^\omega}{p_x^\omega}$$

$$\mathbf{P}\left\{\rho_x^\omega = \rho = \frac{1}{2}\right\} = \frac{99}{100} = 1 - g \qquad \mathbf{P}\{\rho_x^\omega = \rho^* = 100\} = \frac{1}{100} = g$$

La *marche aléatoire* sur l'environnement ω est une chaîne de Markov qui suit les probabilités de transitions données.



X_t Position du marcheur au temps t

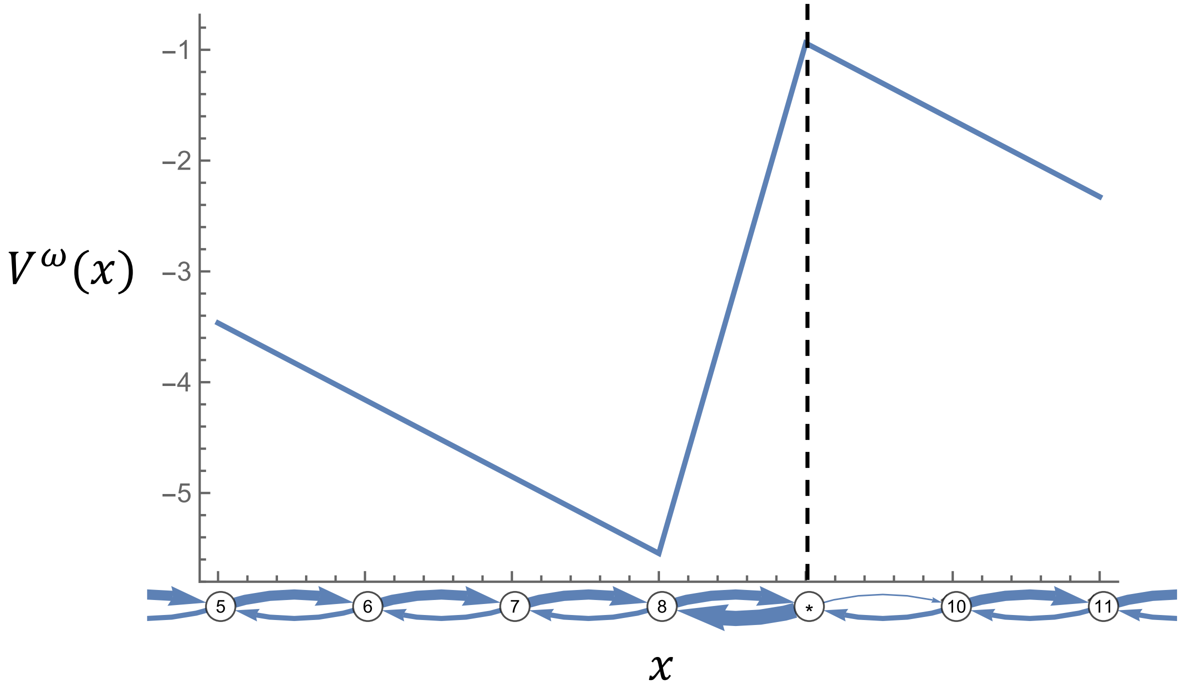
P^ω Mesure de probabilités *trempée* pour la marche aléatoire

$$P^\omega\{X_{t+1} = y \,|X_t = x) = p^\omega(x,y)$$

$\mathbb{P}$ Mesure de probabilités *recuite* pour la marche aléatoire

$$\mathbb{P}\{\,\cdot\,\} = \mathbf{E}[P^\omega\{\,\cdot\,\}]$$

Le potentiel



$$\Delta V(x) = V^\omega(x) - V^\omega(x-1)$$
$$= \log \rho_x^\omega$$

$$V^\omega(0) = 0$$

Le *potentiel* permet de décrire l'environnement.

$$p_x^\omega = \frac{1}{1 + e^{\Delta V(x)}}$$

La marche est attirée vers les potentiels faibles

Si $\Delta V(x) > 0$, $p_x^\omega < q_x^\omega$

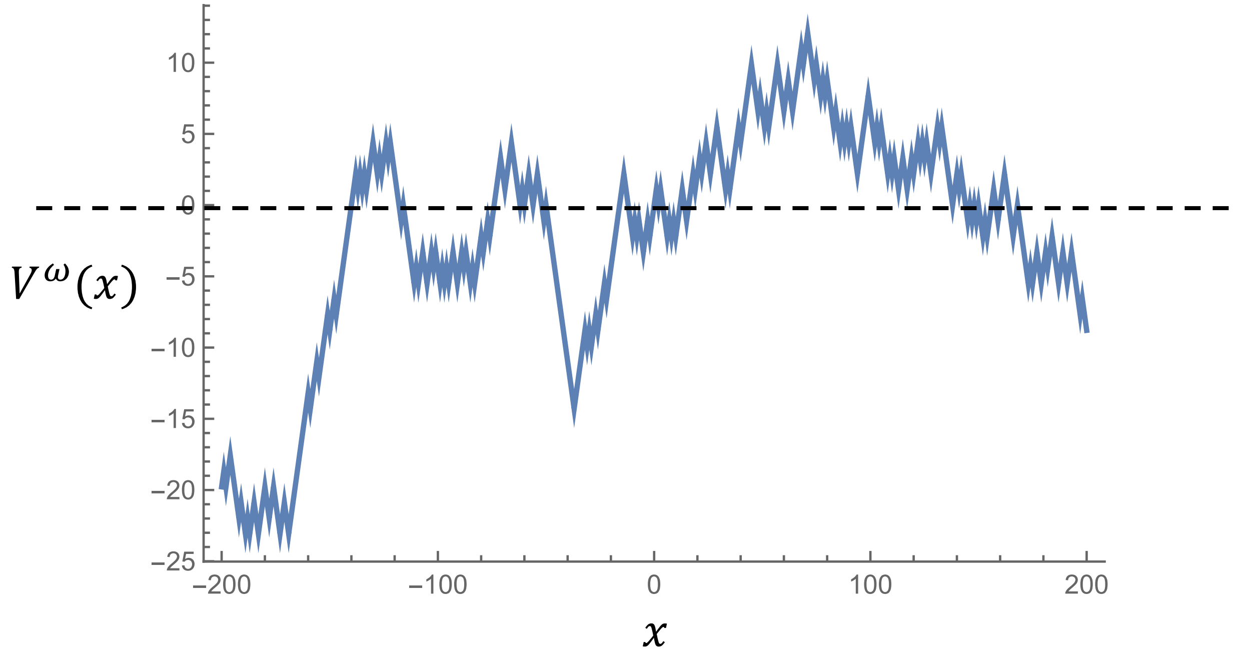
Si $\Delta V(x) < 0$, $p_x^\omega > q_x^\omega$

Transience/récurrence

Thm. (Solomon, 1975)

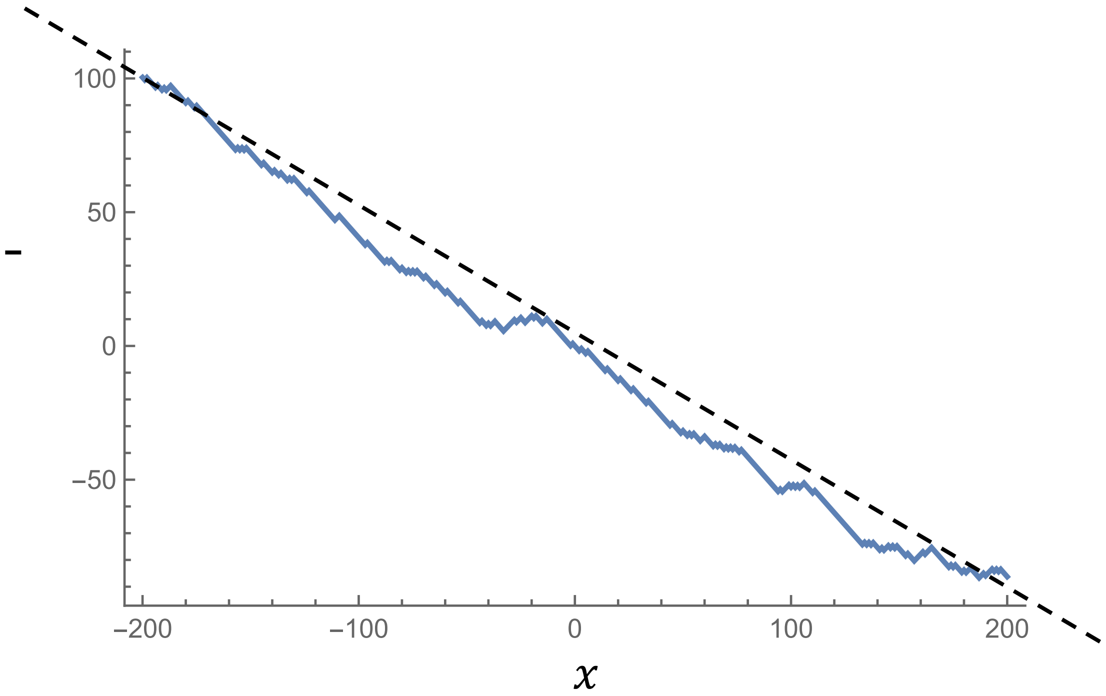
Si $\mathbf{E}[\log \rho^\omega] = 0$, le processus est récurrent.

$$\limsup_{t\to\infty} X_t = -\liminf_{t\to\infty} X_t = \infty$$



Si $\mathbf{E}[\log \rho^\omega] < 0$, le processus est transient vers la droite

$$\liminf_{t\to\infty} X_t = \infty$$

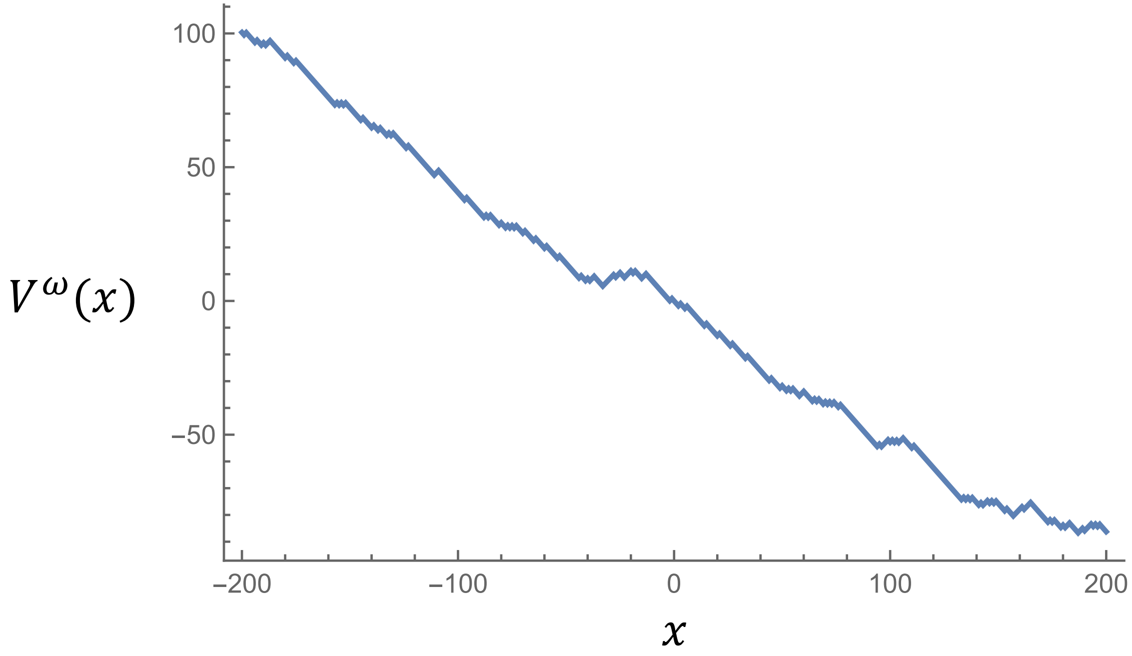


Vitesse asymptotique

Thm. (Solomon, 1975). Si $\mathbf{E}[\log \rho^\omega] < 0$,

Si $\mathbf{E}[\rho^\omega] < 1$, la vitesse est non-nulle

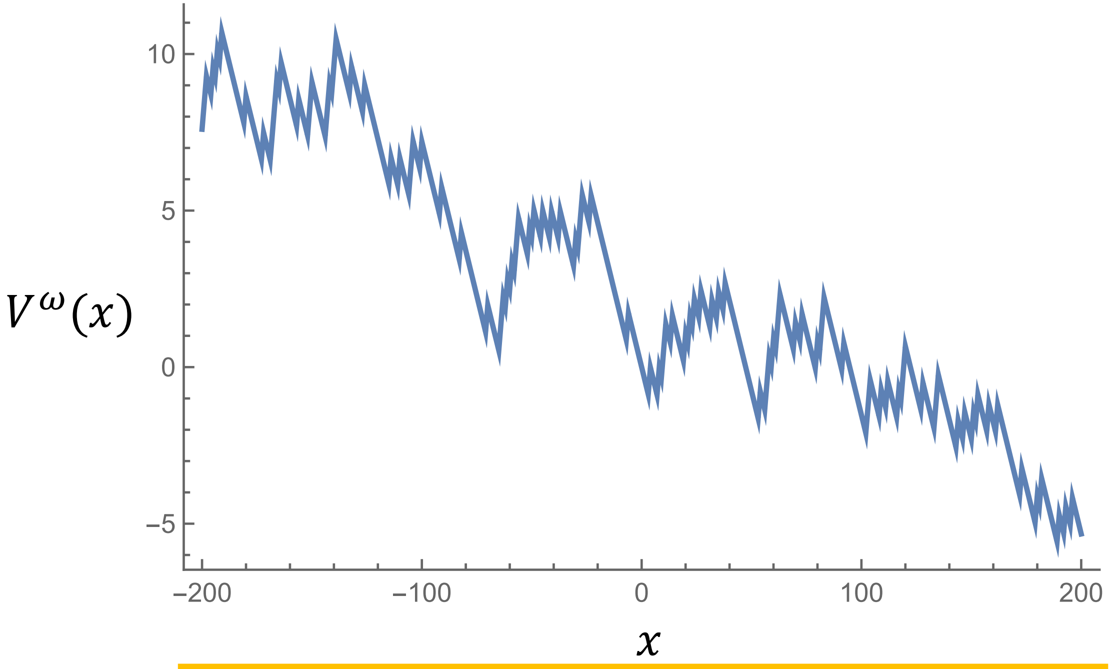
$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{1 - \mathbf{E}[\rho^\omega]}{1 + \mathbf{E}[\rho^\omega]}$$



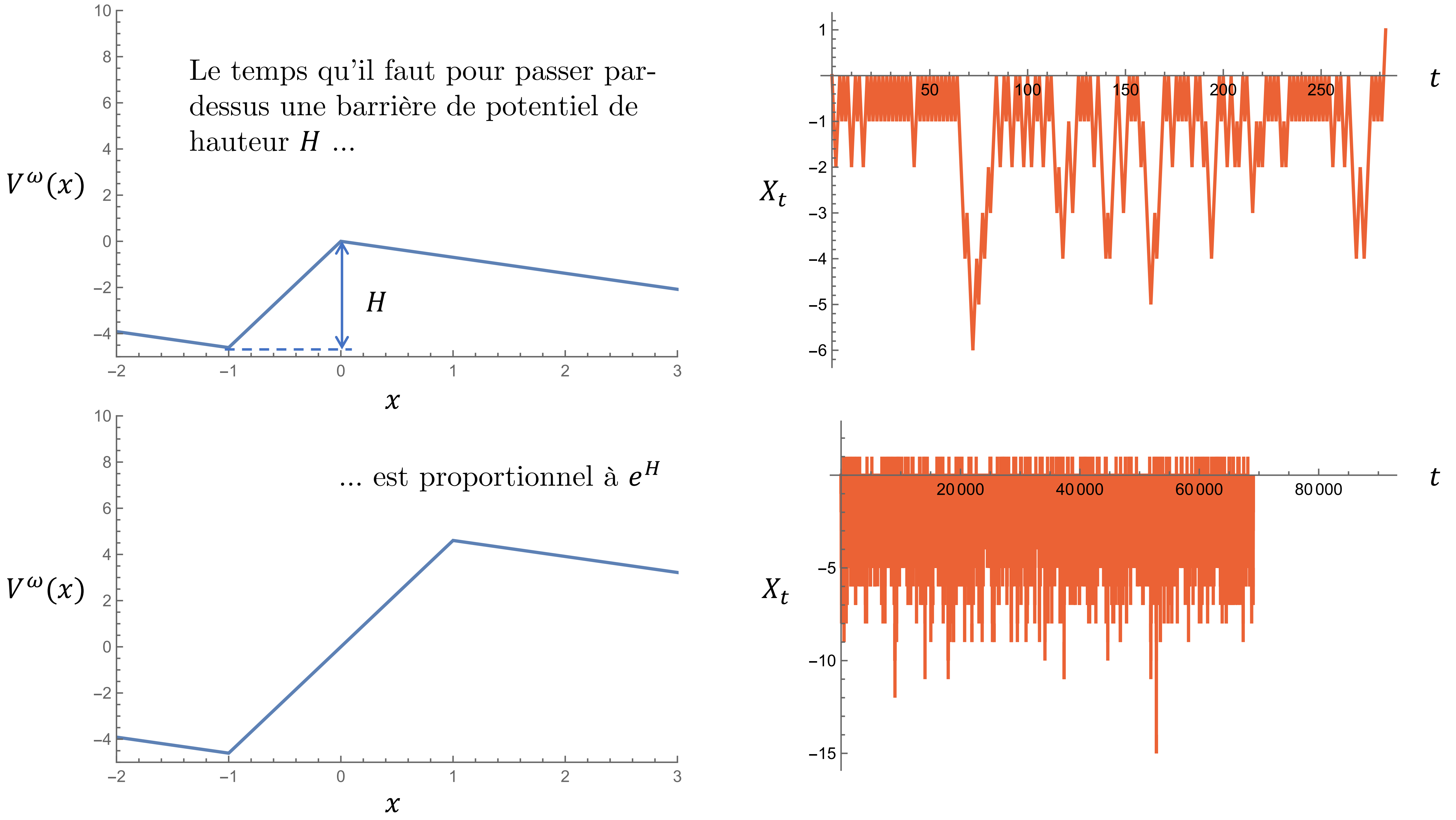
Régime balistique

Si $\mathbf{E}[\rho^\omega] \geq 1$, la vitesse est nulle

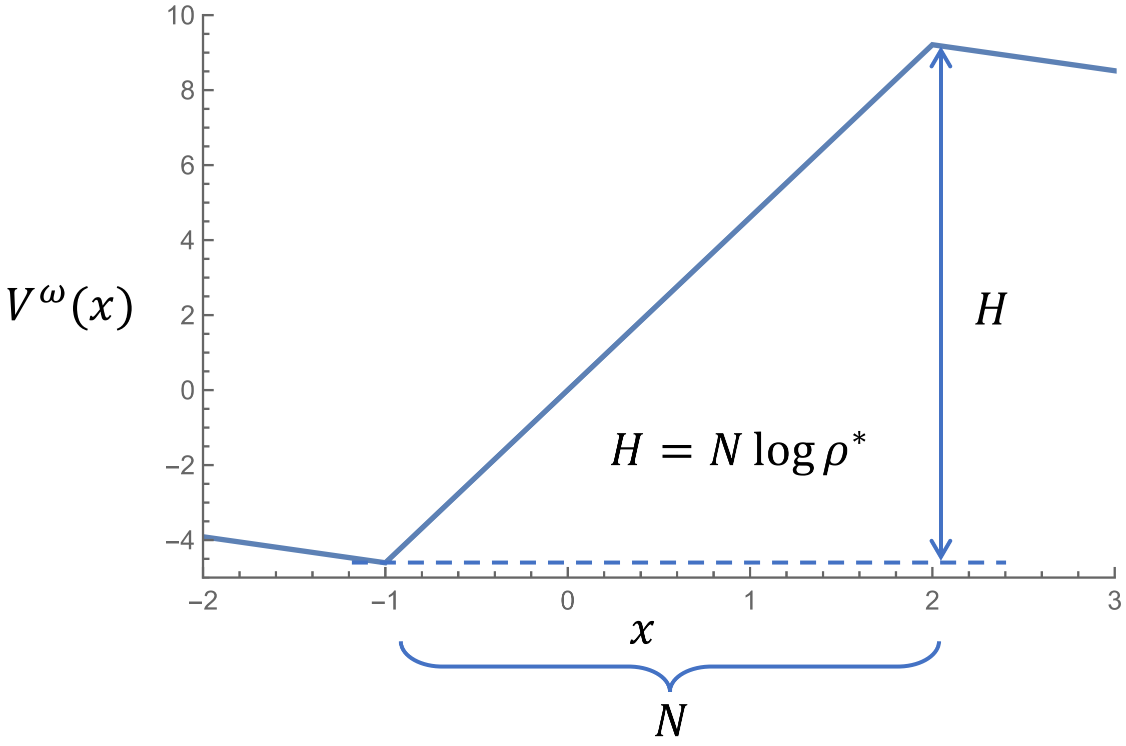
$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$$



Régime sous-balistique

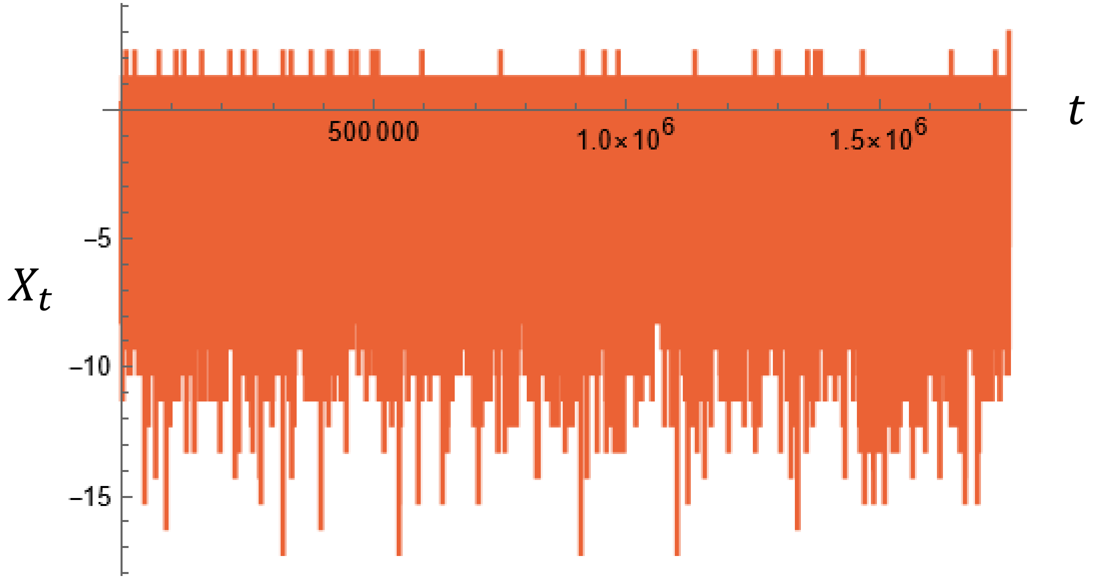

Le temps qu'il faut pour passer par-dessus une barrière de potentiel de hauteur H …
… est proportionnel à e^H
$V^\omega(x)$
x
H
X_t
t

Si il y a N goulots d'étranglement de suite...



$$e^H = (\rho^*)^N = 100^N$$

$$\boxed{\mathbf{P}\{e^H > u\} = \mathbf{P}\left\{N > \frac{\log u}{\log \rho^*}\right\} = u^{\frac{\log g}{\log \rho^*}} = u^{-1}}$$



si $-\frac{\log g}{\log \rho^*} \leq 1$, $\mathbf{E}[e^H] = \infty$

... c'est long longtemps!

Le modèle de Bouchaud

$$U_i$$

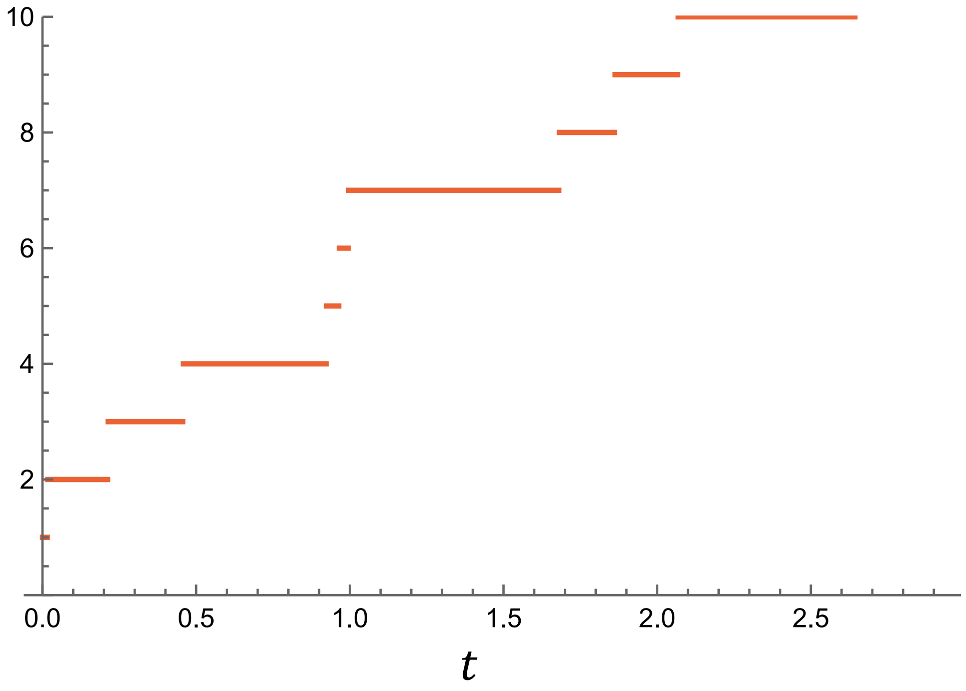
Temps passé dans l'$i$ème piège.

$$T_k = \sum_{i=1}^{k-1} U_i$$

Temps pour atteindre le $k$ième piège

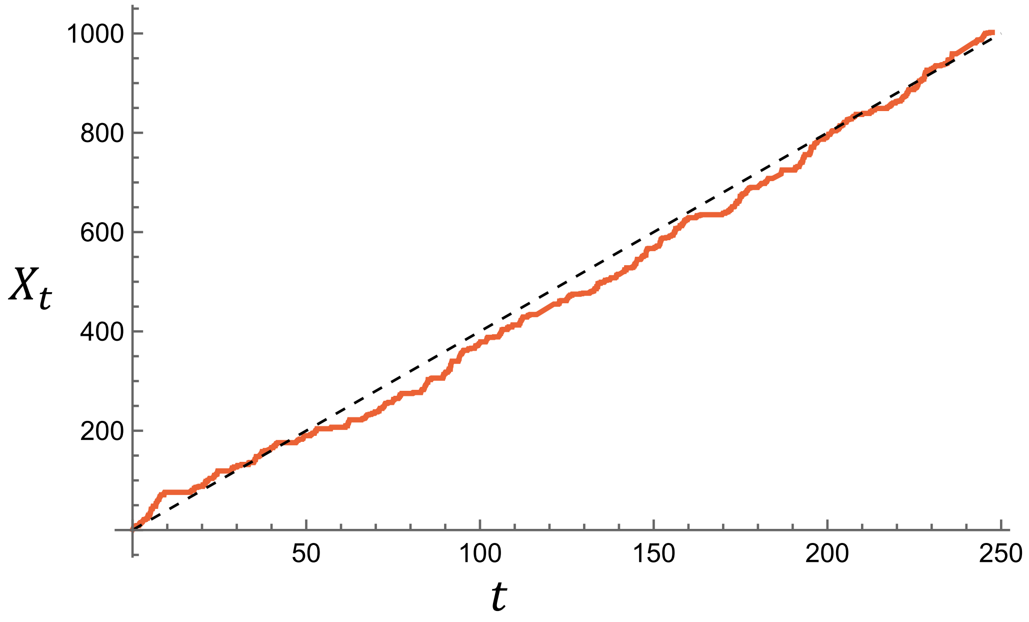
$$X_t$$

Piège au temps t



Résultats classiques

si $\mu = \mathbb{E}[U_i] < \infty$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[U_i] < \infty$

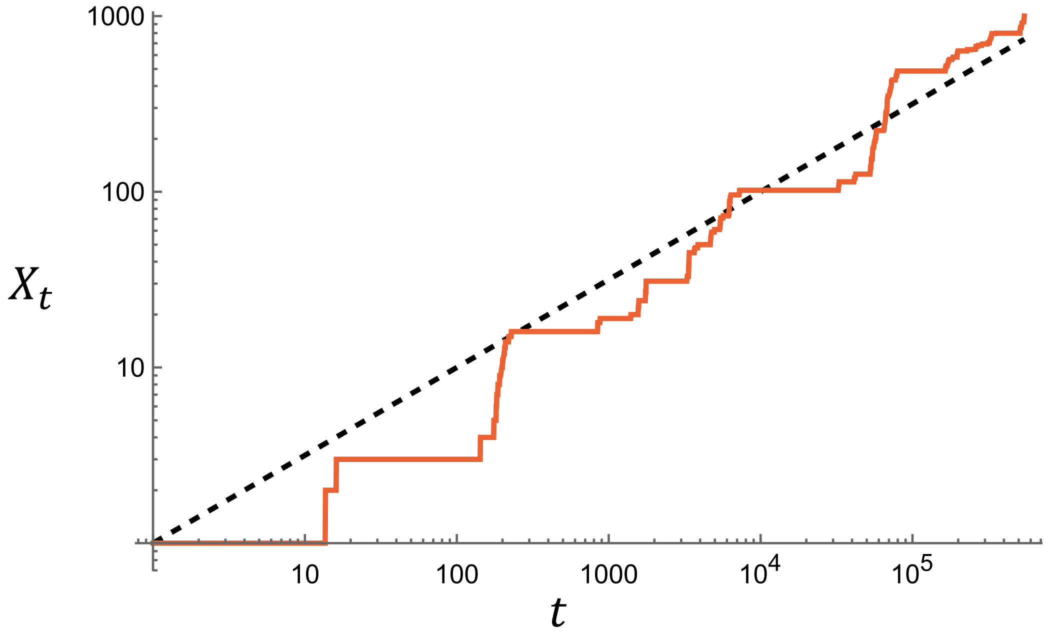


$$\frac{T_k}{k} \to \mu \qquad \frac{T_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \to \mathcal{N}$$

$$\frac{X_t}{t} \to v = \frac{1}{\mu} \qquad \frac{X_t - v\,t}{\sigma v^{3/2}\sqrt{t}} \to \mathcal{N}$$

p.s. — en distribution

$$\mathbb{P}\{U > x\} \sim C\, x^{-\alpha}$$
$$\alpha \in (0,1)$$



Exemple pour $\alpha = 1/2$

$\mathbb{E}[U] = \infty \quad \mathbb{E}[U^2] = \infty$

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}(\alpha, 1, m, c)$$

Distribution α-stable asymétrique*

$$\frac{T_k}{k^{1/\alpha}} \to \mathcal{S} \qquad \frac{X_t}{t^{\alpha}} \to \mathcal{S}^{-\alpha}$$

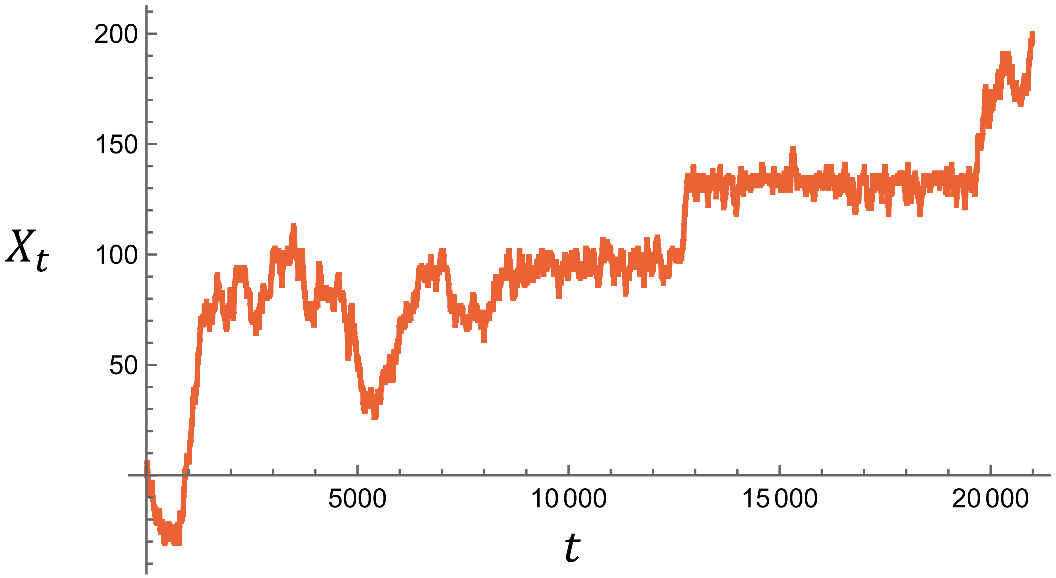
en distribution

$$\mathbb{P}\{X_t = X_{ht}\} \to \mathrm{ASIN}_\alpha(1/h)$$

$$\mathrm{ASIN}_\alpha(u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^u x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dx$$

Vieillissement

Limites



Réalisation de la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire dans le régime sous-balistique.

Thm. (Kesten, Koslov, Spitzer, 1975)

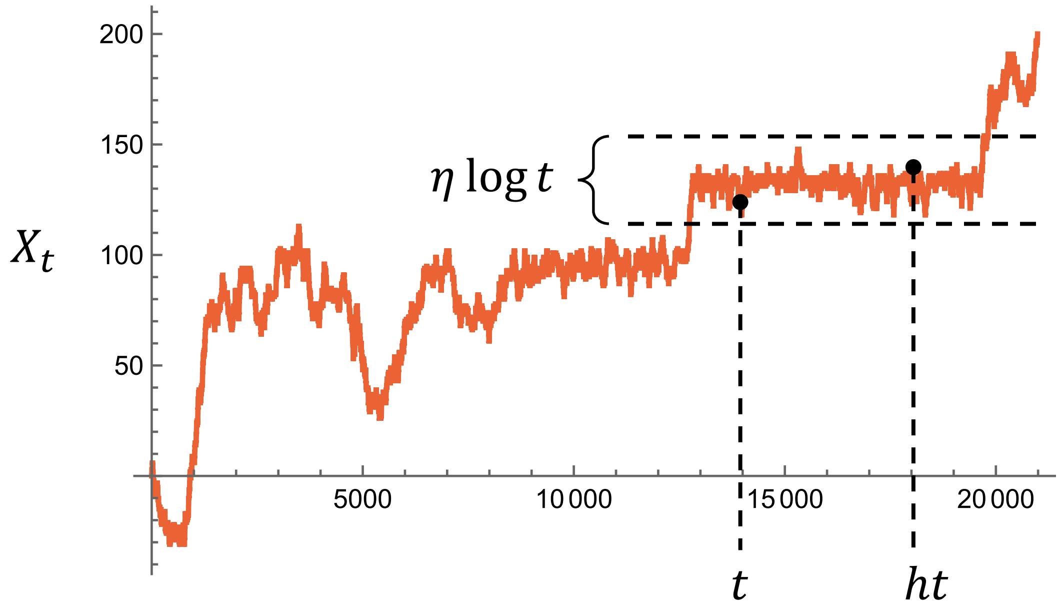
- $-\infty \leq \mathbf{E}[\log \rho] < 0$
- $\alpha \in (0,1)$ t.q. $\mathbf{E}[\rho^\alpha] = 1, \mathbf{E}[\rho^\alpha \log \rho] < \infty$
- $\log \rho$ non arithmétique *

Alors, les limites d'échelle sont α-stables. *

$$\frac{X_t}{t^\alpha} \to \mathcal{S}(\alpha, 1, \dots)^{-\alpha}$$

Thm. (Enriquez, Sabot, Zindy, 2009)
Convergence en processus vers des subordinateurs α-stables.

Vieillissement



Thm. (Enriquez, Sabot, Zindy, 2009)
Avec $\alpha \in (0,1)$, pour tous $\eta > 0$, $h \geq 1$

$$\boxed{\mathbb{P}_0\{|X_t - X_{ht}| \leq \eta \log t\} \to \mathrm{ASIN}_\alpha(1/h)}$$

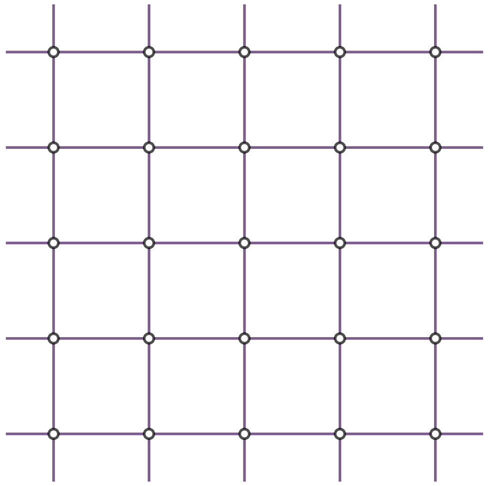
$$\mathrm{ASIN}_\alpha(u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^u x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dx$$

2. La marche aléatoire βiaisée sur les c_*^ωonductances aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$

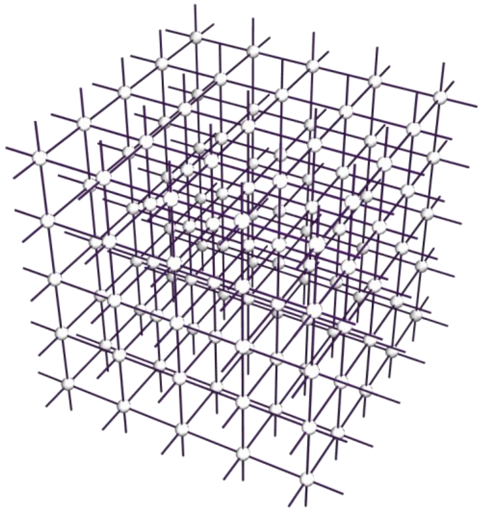
I. Description du modèle

Le graphe : $\mathbb{Z}^d$

$\mathbb{Z}^1$



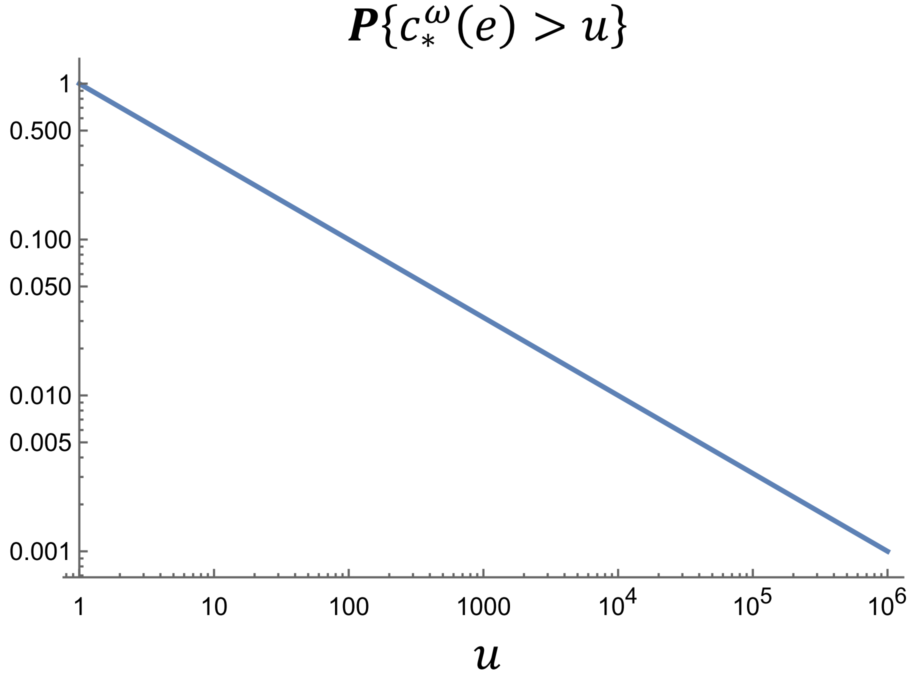
$\mathbb{Z}^2$



$\mathbb{Z}^3$

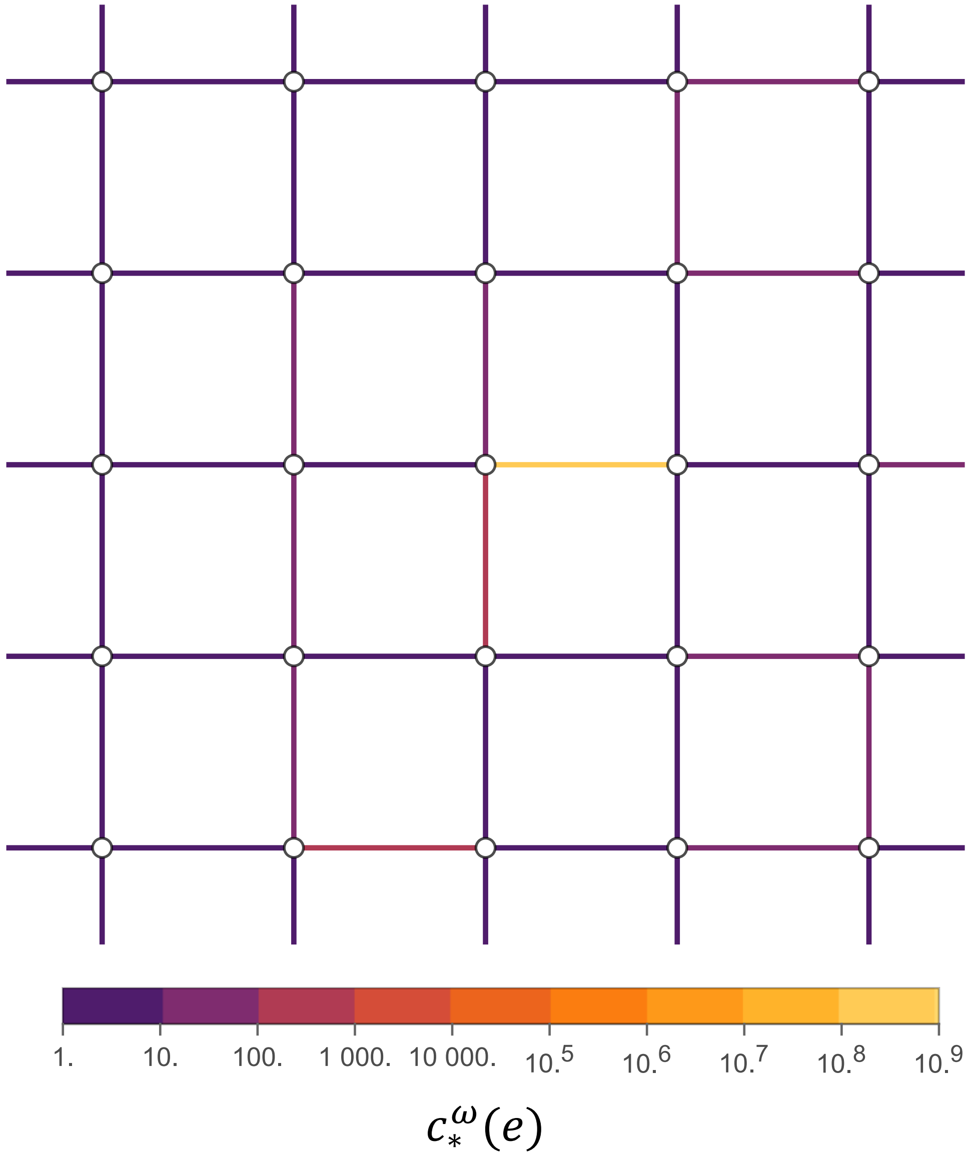
...

Les c_*^ωonductances (brutes)

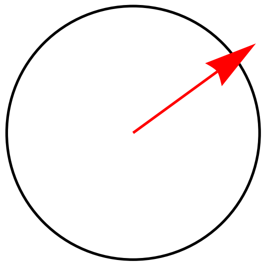


$$\boldsymbol{P}\{c_*^\omega(e) > u\} \sim L(u)u^{-\gamma}$$

$\gamma \in (0,1)$ $\quad L$ à variation lente



Le βiais

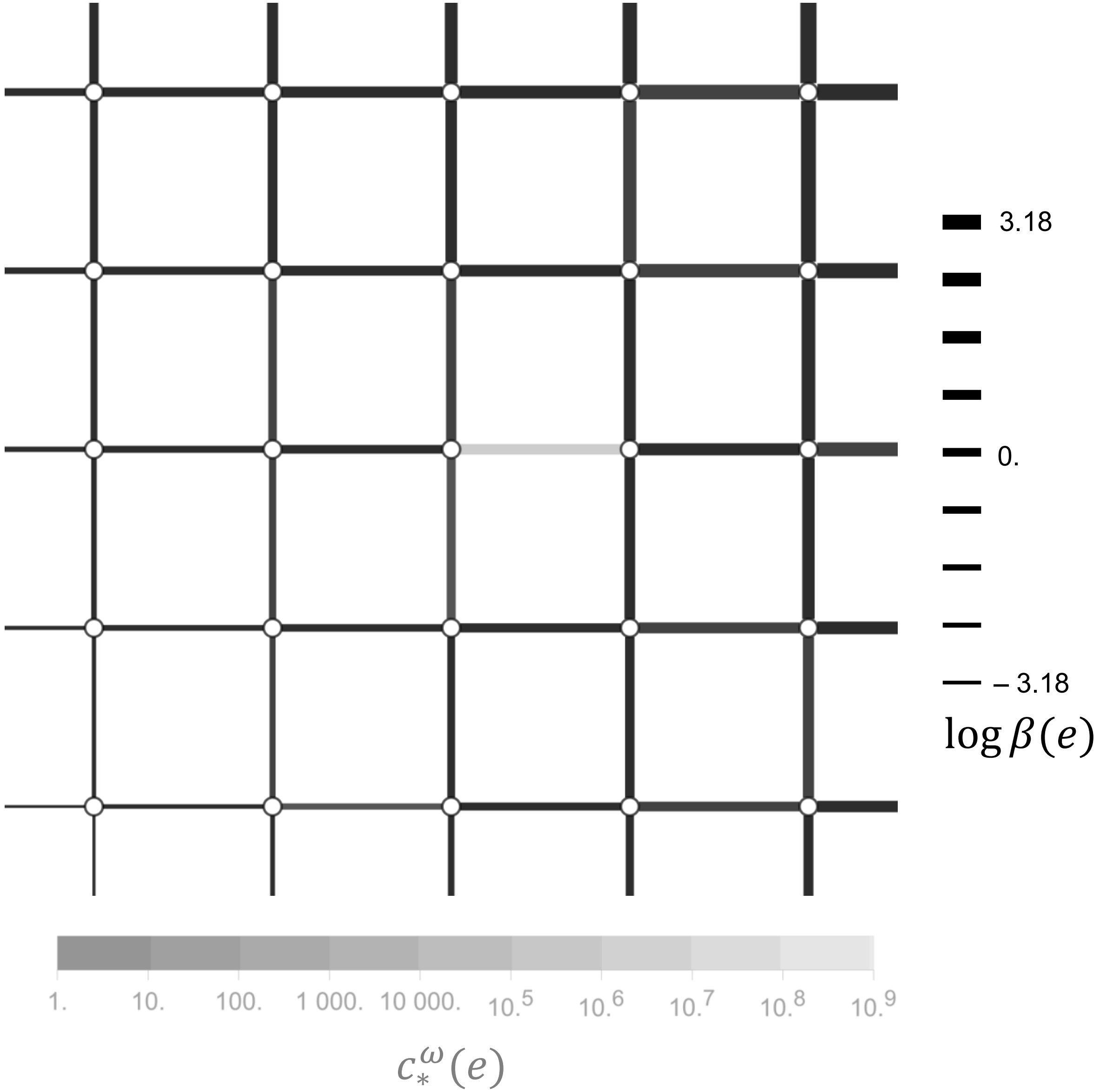


$$\ell = \lambda \hat{\ell}$$

$\lambda > 0 \quad \hat{\ell} \in \mathbb{S}_{d-1}$

$$\beta(e) = \exp\left(\ell \cdot \frac{e^+ + e^-}{2}\right)$$

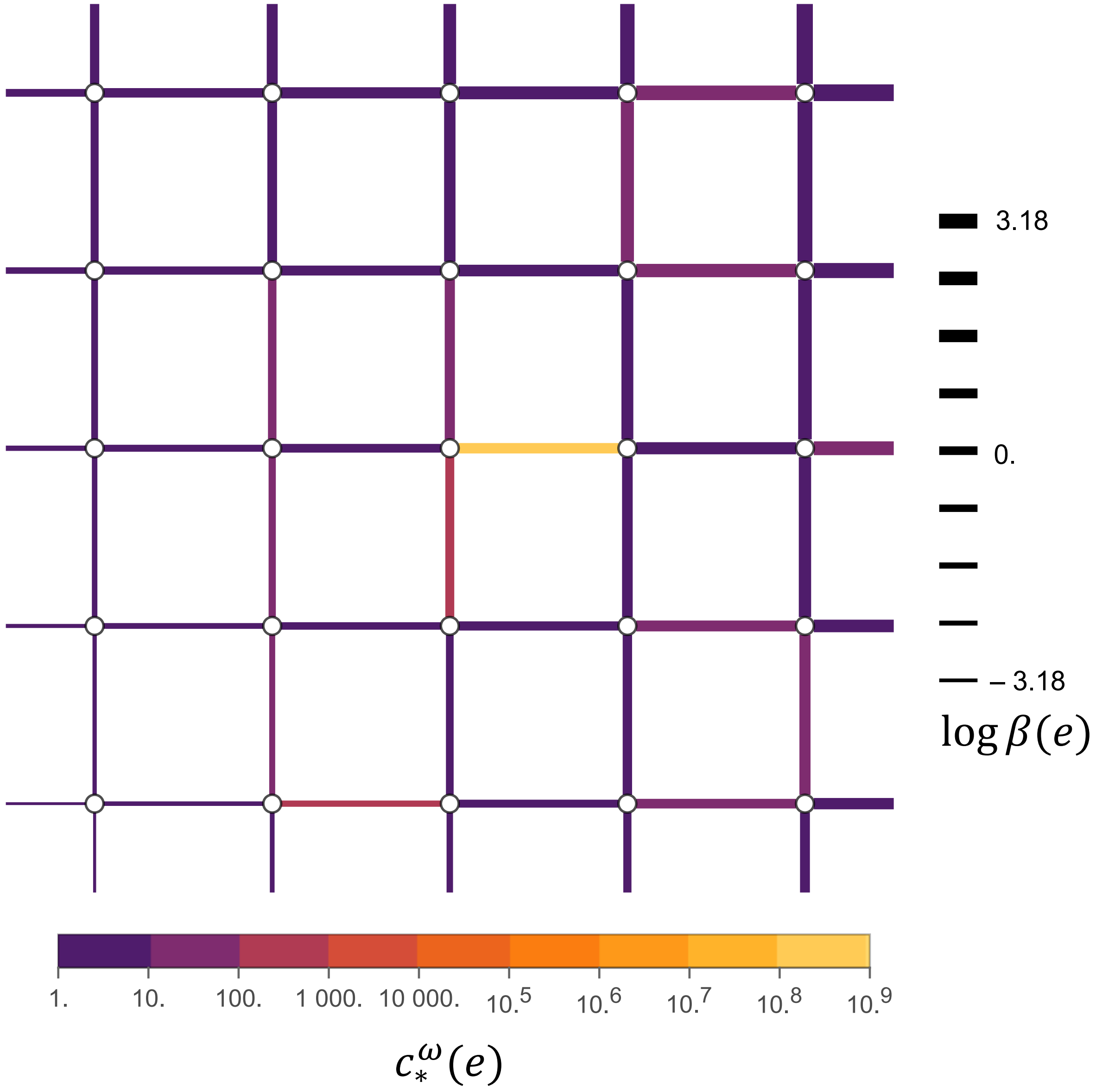
$$= \exp(\ell \cdot e^-) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ell \cdot (e^+ - e^-)\right)$$



Les c^ωonductances nettes

$$c^\omega(e) = \beta(e)\, c_*^\omega(e)$$

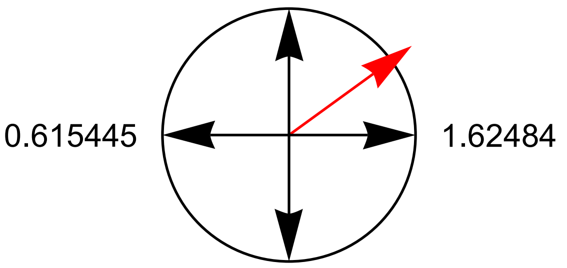
$$\pi^\omega(x) = \sum_{y: x\sim y} c^\omega(x,y)$$
$$= \mathrm{e}^{\ell\cdot x} \sum_{y: x\sim y} e^{\frac{1}{2}\ell\cdot(y-x)}\, c_*^\omega(x,y)$$



Les p^{ω}robabilités de transition trempées

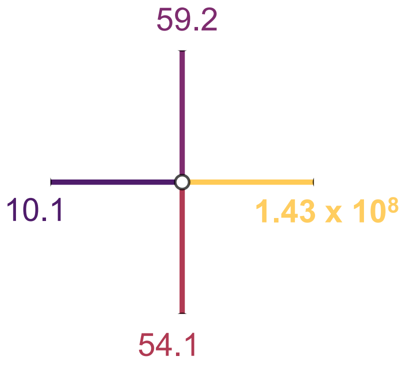
$$p^{\omega}(x,y) = \frac{c^{\omega}(x,y)}{\pi^{\omega}(x)}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}\ell\cdot(y-x)} c_*^{\omega}(x,y)}{\sum_{z:x\sim z} e^{\frac{1}{2}\ell\cdot(z-x)} c_*^{\omega}(x,z)}$$

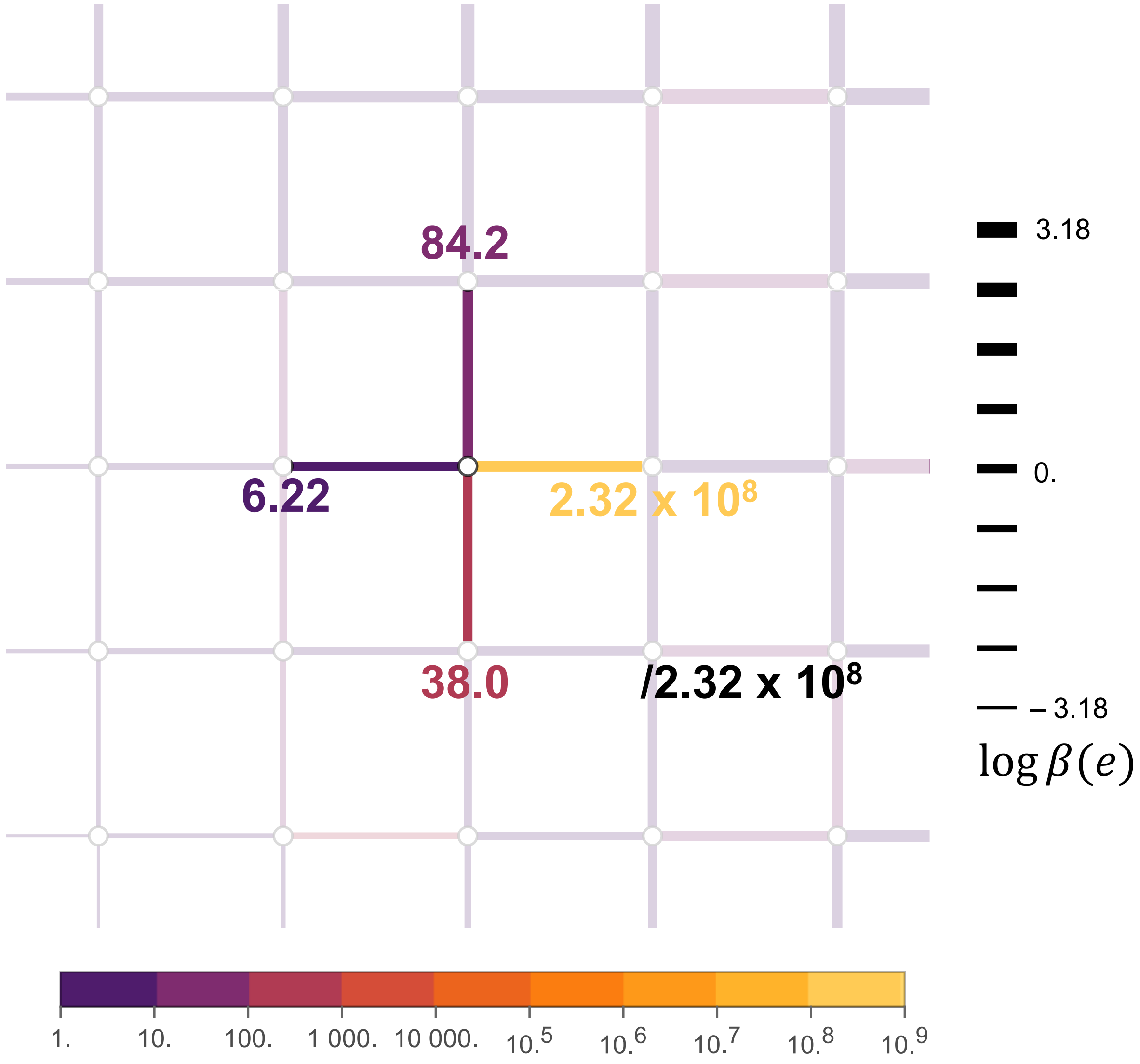


$e^{\frac{1}{2}\ell\cdot(y-x)}$

$\times$



$c_*^{\omega}(x,y)$



$c_*^{\omega}(e)$

II. Résultats

Limites

Thm. (Shen, 2002; Fribergh, 2013)

- Pour $d \geq 2$,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = v\,, \qquad \mathbb{P} - \text{p.s};$$
$v = 0$ si $\mathbf{E}[c_*^\omega] = \infty$ **et** $v \cdot \hat{\ell} > 0$ sinon.

- Si il existe $\gamma < 1$ t.q. $\log \mathbf{P}\{c_*^\omega \geq t\} \sim -\gamma \log t$ pour $t \to \infty$,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(X_t \cdot \hat{\ell})}{\log t} = \gamma\,, \qquad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

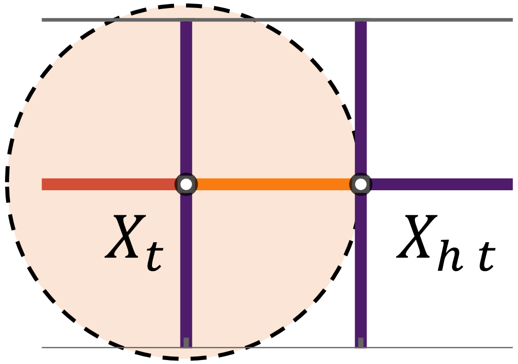
Thm. (Fribergh & Kious, 2018)
Pour $d \geq 2$, il existe un vecteur unitaire $\hat{u}$ avec $\hat{u} \cdot \hat{\ell} > 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,
$$\left(\frac{X_{\lfloor N\,t \rfloor}}{t^\gamma / L(t)}\right)_{0\leq t\leq T} \to \left(C\, \mathcal{Z}_\gamma(t)\, \hat{u}\right)_{0\leq t\leq T}$$
où $\mathcal{Z}_\gamma$ est l'inverse d'un subordinateur stable d'indice γ.

III. Le théorème de vieillissement.

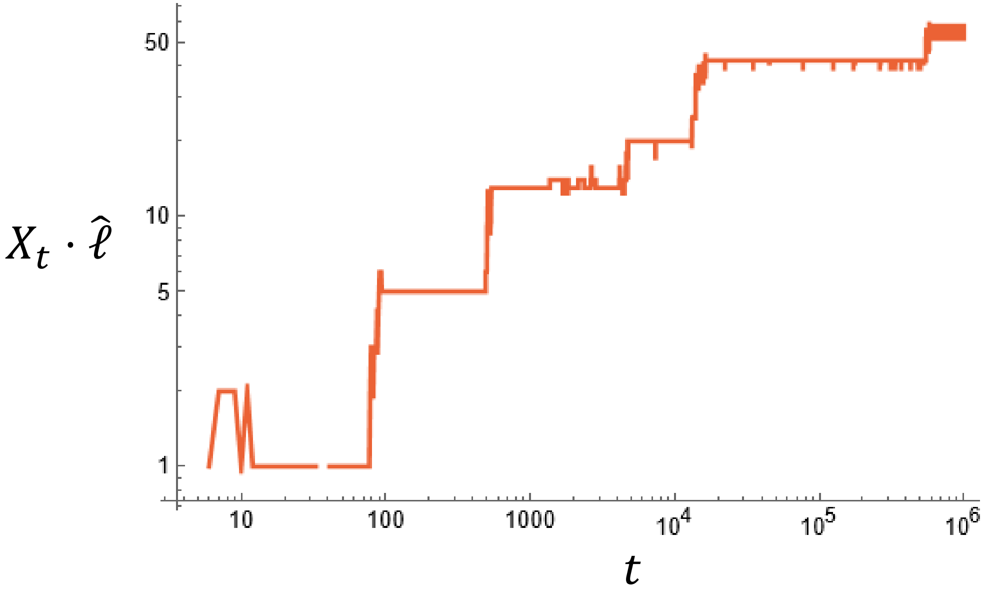
Vieillissement

Thm. (Davignon, 2023)
Pour $\gamma \in (0,1)$, $h > 1$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\|X_{ht} - X_t\| \le 1\} = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^{1/h} x^{(\gamma-1)}(1-x)^{-\gamma} dx$$



- Conjecture de Fribergh & Kious (2018)
- Utilise un parallèle avec le modèle de Bouchaud.
- Utilise les ***temps de régénération***.
- Borne *constante* (!) pour $\left\|X_t - X_{\lfloor ht \rfloor}\right\|$ dans la proba.

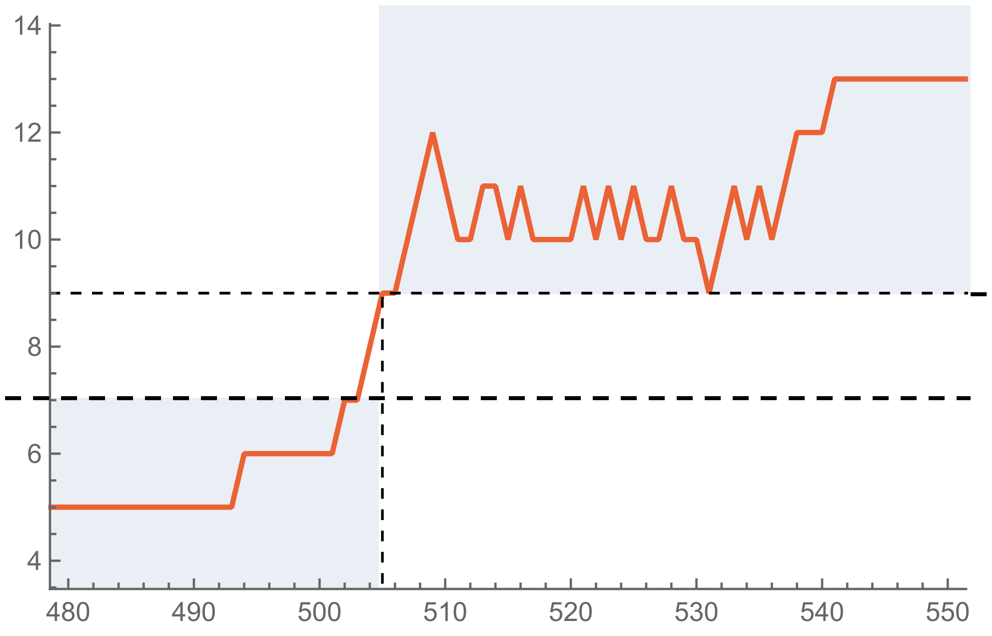


Les temps de régénération

Suite de temps aléatoires croissante $(\tau_i)_{i\geq 1}$

Séparent l'environnement en portions indépendantes.

Si $t > \tau_i$
$X_t \cdot \hat{\ell} > X_{\tau_i} \cdot \hat{\ell}$



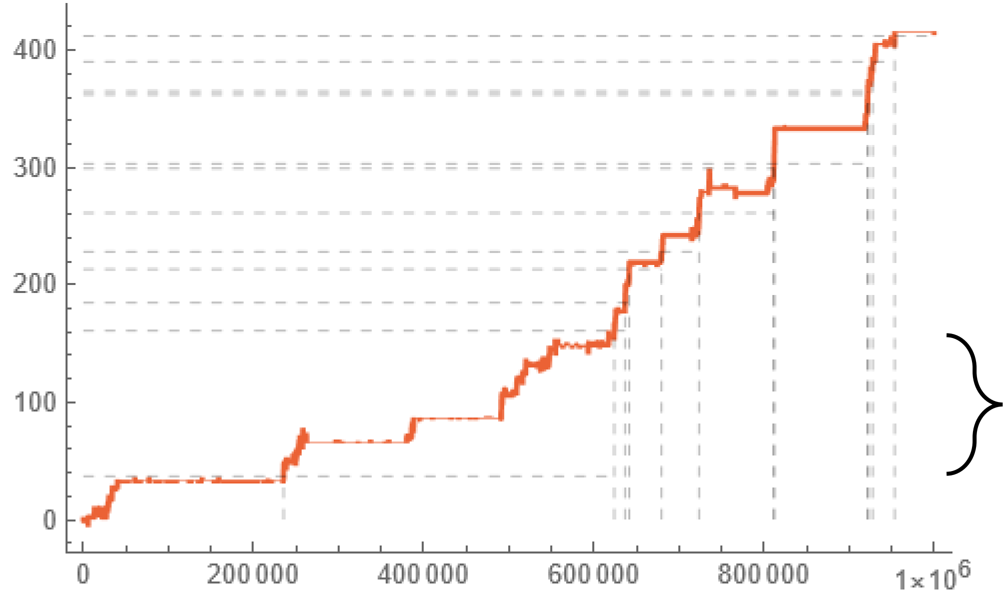
On termine une période de régénération par deux pas dans le sens du biais.

Si $t < \tau_i$
$X_t \cdot \hat{\ell} < X_{\tau_i} \cdot \hat{\ell}$

τ_i

L'$i$ème temps de regénération

$X_t \cdot \hat{\ell}$



τ_{i-1} τ_i

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{T}_i = \tau_i - \tau_{i-1}}$$

Durée de la $i$ème régénération

Les segments du processus correspondant à chaque période de régénération sont i.i.d. à condition que $\mathbf{0}$ soit un temps de régénération.

$$(X_t)_{\tau_{i-1} \leq t < \tau_i}$$

$i$ème période de régénération

$$\overline{\mathbb{P}}$$

Mesure « sachant que 0 est un temps de regénération »

Les $(X_t)_{\tau_{i-1} \leq t < \tau_i}$ sont i.i.d. sous $\overline{\mathbb{P}}$

On rencontre un « grand piège » à l'ième régénration si :

$$LT^i(t^\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} \text{La plus grande arête rencontrée} \\ \text{entre } \tau_{i-1} \text{ (incl.) et } \tau_i \text{ a } c_*^\omega > t^\alpha \end{array} \right\}$$

$0 \ll \alpha < 1$ Ordre de grandeur pour les grands pièges.

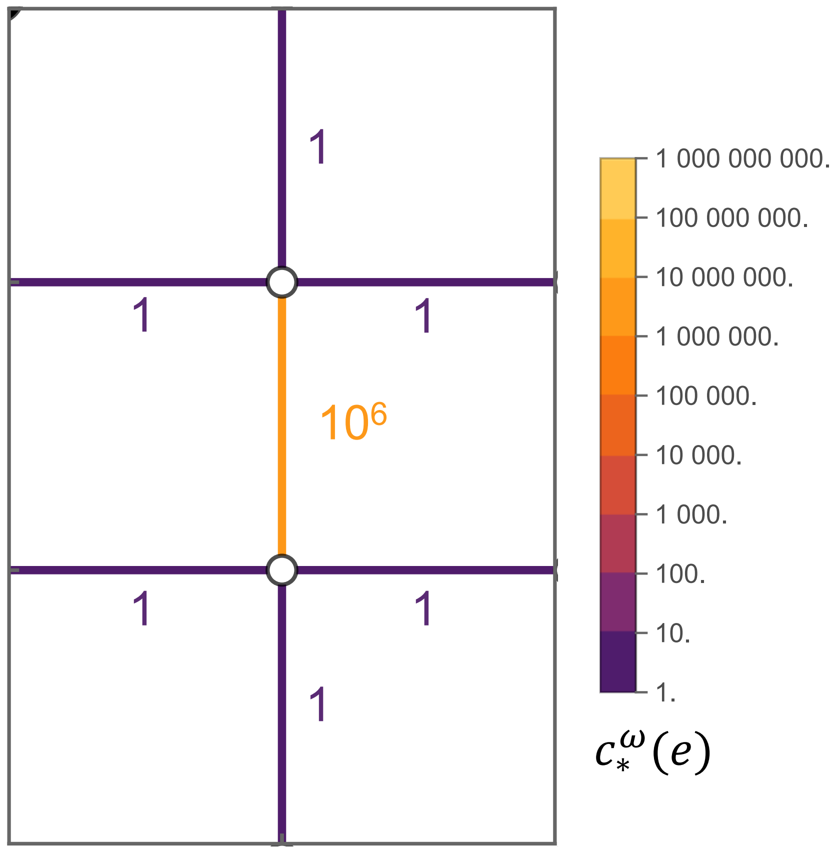
$$\overline{\mathbb{P}}\{LT(t^\alpha)\} \asymp L(t^\alpha)t^{-\gamma\alpha}$$

Ce grand piège est *unique* si :

$$OLT^i\left(t^\alpha, t^{\alpha\delta}\right) = LT^i(t^\alpha) \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{Toutes les autres} \\ \text{arêtes ont } c_*^\omega \leq t^{\alpha\delta} \end{array} \right\}$$

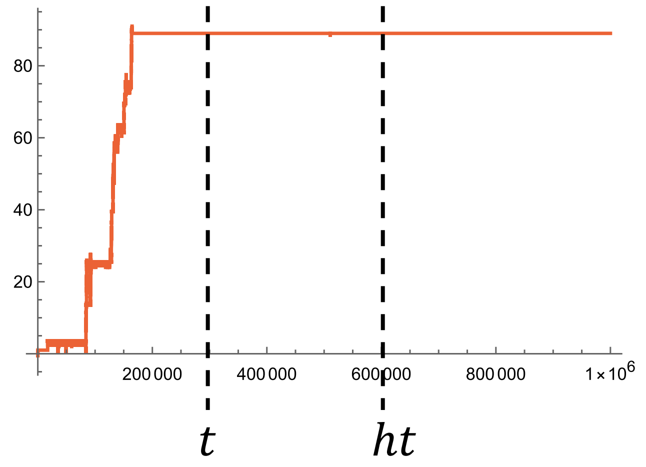
$0 < \delta < 1$ Ordre de grandeur pour les moyens pièges.

$$\overline{\mathbb{P}}\{OLT\left(t^\alpha, t^{\alpha\delta}\right) \mid LT(t^\alpha)\} = 1 - O(t^{-\alpha\eta})$$



Prop. 1. La probabilité que les temps t et ht surviennent durant la même régénération tend vers une loi de l'arcsinus :

$$\mathbb{P}\{\exists i : \tau_{i-1} \leq t < ht < \tau_i\} \to ASIN_\gamma(1/h)$$



$$\delta_1 = \min\{i \geq 0 : LT^i\}; \;\; \delta_{i+1} = \min\{j > \delta_i : LT^j\}$$

Les régénérations qui ont des grands pièges.

$$l(t) = \max\{i : \tau_{\delta_i - 1} \leq t\}$$

La dernière des grandes régénérations à commencer avant t

$$\Rightarrow \; \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t < ht$$

Il suffira de montrer :

$$\mathbb{P}\{l(ht) = l(t)\} = \mathbb{P}\left\{ht < \tau_{\delta_{l(t)}}\right\} \to ASIN_\gamma(1/h)$$

Idée de preuve : $\quad \tau_{\delta_i} = \sum_{j=1}^{i} \mathcal{T}_{\delta_i} + o(t)$

$\mathcal{T}_{\delta_i}$ i.i.d. suivent une loi de puissance

$\Rightarrow$ Même argument que Bouchaud

Considérations d'échelles.

$$\frac{\tau_n}{\mathrm{Inv}(n)} \to C\,\mathcal{S}_\gamma$$

$$\mathrm{n}^{\frac{1-\mathrm{r}}{\gamma}} \ll \mathrm{Inv}(n) = \inf\left\{u : \mathbf{P}\{c_*^\omega > u\} < \frac{1}{n}\right\} \ll n^{\frac{1+r}{\gamma}}$$

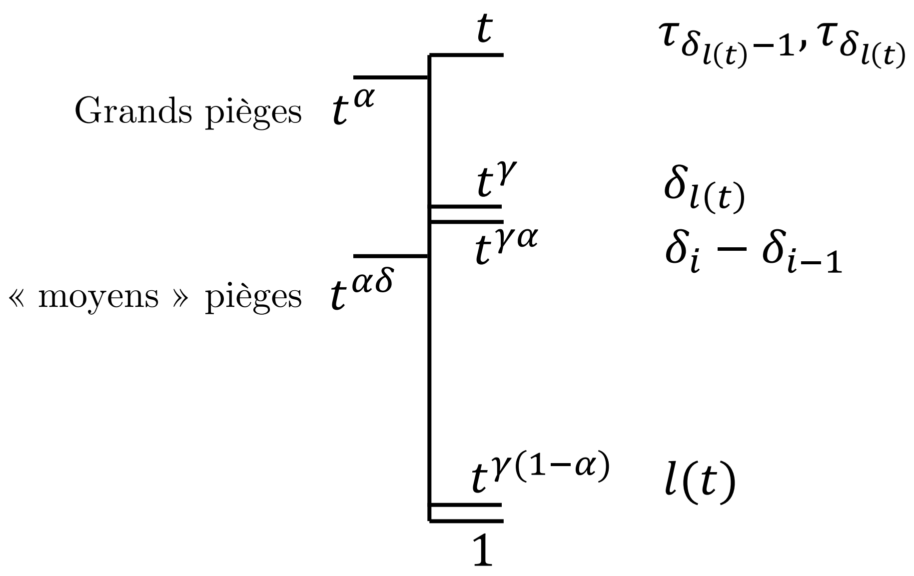
$$\delta_{l(t)} \ll t^{\gamma+\zeta} \qquad \delta_{l(t)+1} \gg t^{\gamma-\zeta}$$

Puisqu'on doit avoir $\tau_{\delta_{l(t)-1}} \leq t$ et $\tau_{\delta_{l(t)+1}} > t$

$$l(t) \ll t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}$$

Parce que

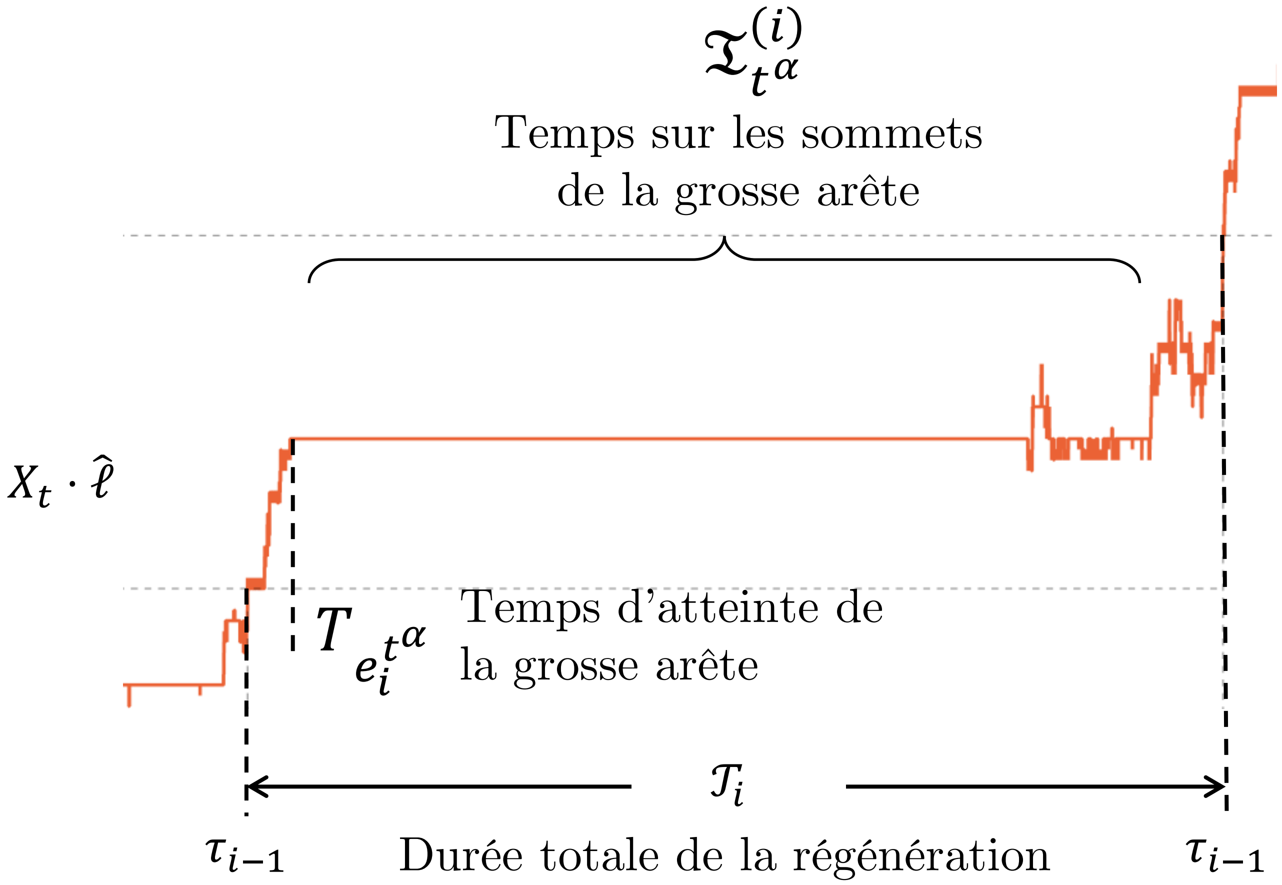
$\delta_i - \delta_{i-1} \sim G\acute{e}om\ (\ \mathbf{P}\{c_*^\omega > t^\alpha\} \asymp L(t^\alpha)t^{-\alpha\gamma})$



Arguments par borne d'union : (e.g.)

$$\mathbb{P}\left\{A_{\delta_{l(t)}}\right\} \leq \sum_{i=1}^{t^{\gamma+\zeta}} \mathbb{P}\{A_i\} + o(1)$$

Anatomie d'une régénération $OLT^{i}(t^{\alpha}, t^{\delta\alpha})$



À l'échelle du temps t, le temps passé sur le grand piège approxime bien la durée de la régénération

$$\frac{\left|\mathfrak{T}_{t^{\alpha}}^{(i)} \mathbf{1}\{OLT^{i}(t^{\alpha}, t^{\alpha\delta})\} - \mathcal{T}_i\right|}{t} \to 0$$

Avec un certain couplage $\mathbb{P}^{\infty}$, on a (en distribution)

$$\mathfrak{T}_{t^{\alpha}} \mathbf{1}\{OLT(t^{\alpha}, t^{\alpha\delta})\} \to c_{*}^{\max} W_{\infty} \mathbf{1}\{c_{*}^{\max} > t^{\alpha}\}$$

$c_{*}^{\max} \perp W_{\infty}$ et on connaît les queues des deux. (Fribergh & Kious)

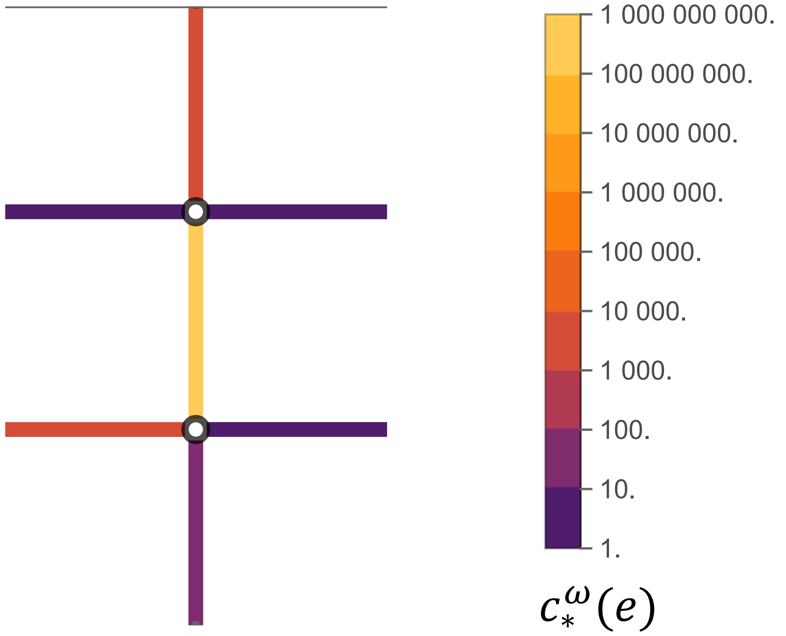
On peut donc estimer la distribution des $\mathcal{T}_{\delta_i}$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\mathcal{T}_{\delta_i}}{t} > u\right\} \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^{\infty}[W_{\infty}^{\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^{\infty}\{c_{*}^{\max} > t^{\alpha}\}} u^{-\gamma}$$

Prop. 2. Pour $\alpha' \in (\alpha, 1)$,

- L'événement $OLT^{\delta_{l(t)}}(t^{\alpha'}, t^{\alpha\delta})$ se produit avec probabilité $\to 1$.
- X_t est sur la $t^{\alpha'}$-grosse arête avec proba. $\to 1$.

$$\mathbb{P}\left\{OLT^{\delta_{l(t)}}\left(t^{\alpha'}, t^{\alpha\delta}\right); X_t \in e_{\delta_{l(t)}}^{\left(t^{\alpha'}\right)}\right\} \to 1$$



Le paradoxe de l'inspecteur.

$$\mathbb{P}\left\{OLT^{\delta_{l(t)}}\left(t^{\alpha}, t^{\alpha\delta}\right)\right\} \to 1$$

$$\overline{\mathbb{P}}\left\{OLT\left(t^{\alpha}, t^{\alpha\delta}\right) \mid LT(t^{\alpha})\right\} = 1 - O(t^{-\alpha\eta})$$

On utilise une borne d'union.

$$\Rightarrow \alpha > \frac{\gamma}{\gamma + \eta}$$

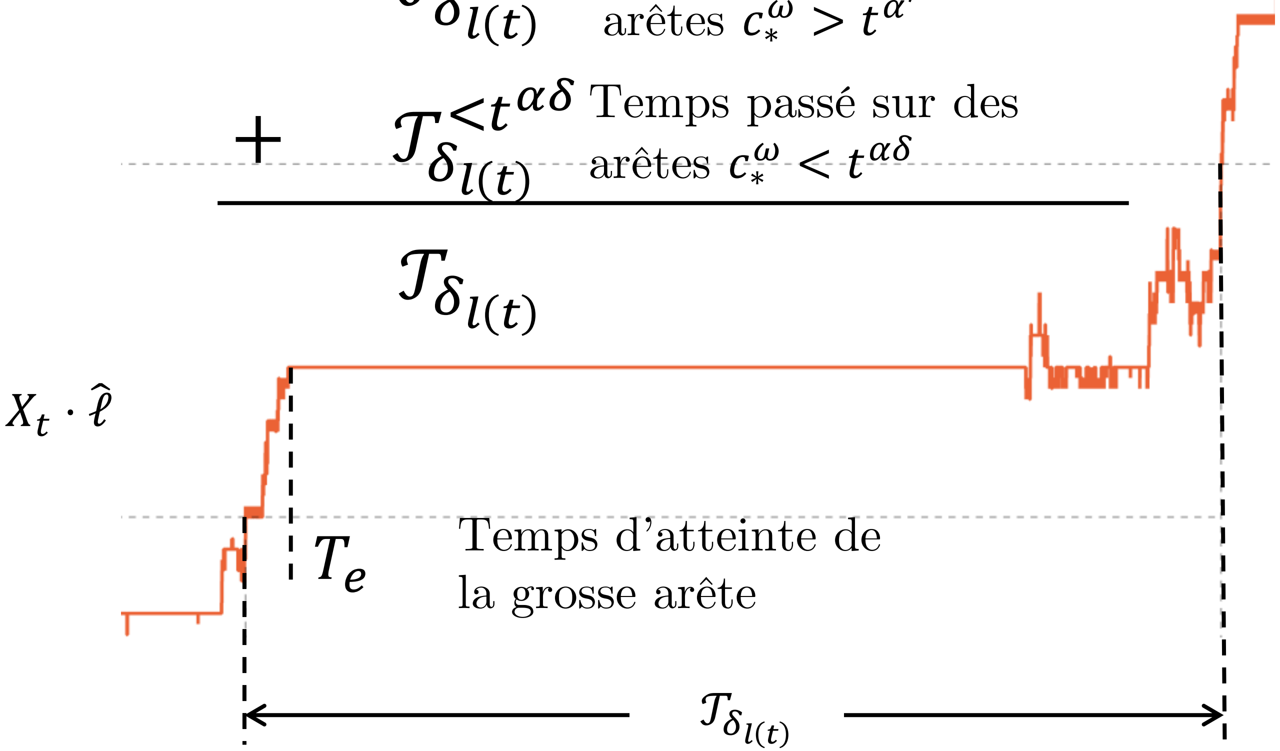
$$\mathbb{P}\left\{OLT^{\delta_{l(t)}}\left(t^{\alpha'}, t^{\alpha\delta}\right)\right\} \to 1$$

$\alpha' \in (\alpha, 1)$

On montre que l'arête est probablement plus grosse car le temps passé dans le piège est $\sim t$.

On est arrivés?

$$\frac{\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{\geq t^{\alpha'}} \text{ Temps passé sur des arêtes } c_*^\omega > t^{\alpha'} \quad + \quad \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{< t^{\alpha\delta}} \text{ Temps passé sur des arêtes } c_*^\omega < t^{\alpha\delta}}{\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}}$$



Durée totale de la régénération

Lem. Le temps passé hors des grosses arêtes durant la période de régénération $\delta_{l(t)}$ est négligeable p.r. à t. Il existe $\epsilon > 0$ t.q.

$$\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{< t^{\alpha\delta}} \ll t^{1-\epsilon} \ll t$$

Donc $\quad T_e - \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{< t^{\alpha\delta}} \ll t^{1-\epsilon}$

Si $t < T_e$ alors

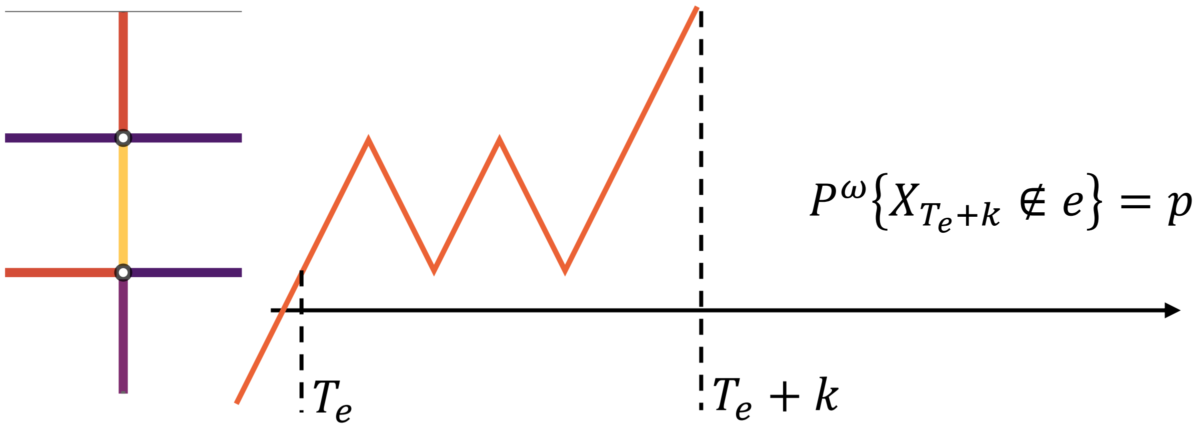
$$t - \tau_{\delta_{l(t)}-1} < T_e - \tau_{\delta_{l(t)}-1}$$

Mais $t - \tau_{\delta_{l(t)}-1} \asymp t$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{OLT^{\delta_{l(t)}}(t^{\alpha'}, t^{\delta\alpha});\ T_e < t\} \to 1$$

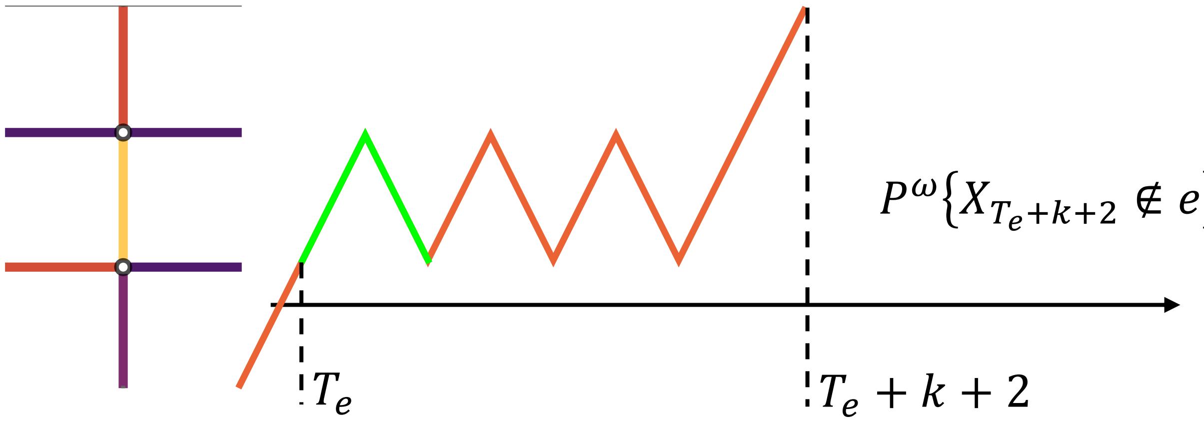
Une contradiction pour la probabilité de sortir de la grosse arête.

Si on suppose que c'est probable de faire :



$$P^{\omega}\{X_{T_e+k} \notin e\} = p$$

Alors c'est aussi assez probable de faire :



$$P^{\omega}\{X_{T_e+k+2} \notin e\} \geq p \times \left(\frac{10^9}{10^9+6}\right)^2$$

Une contradiction pour la probabilité de sortir de la grosse arête.

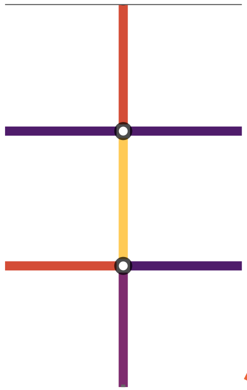
On suppose :

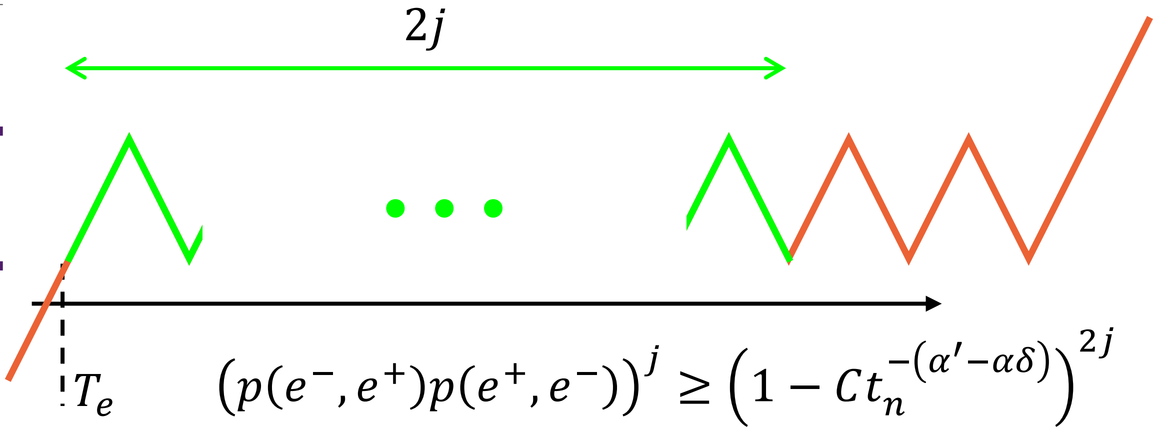
$$\mathbb{P}\{X_{T_e+k} \notin e\} \geq \eta\, t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\{X_{T_e+k+2j} \notin e\} \geq \frac{1}{2}\eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}$$

$$0 \leq j \leq t_n^{\alpha'-\alpha\delta}$$





$$\left(p(e^-,e^+)p(e^+,e^-)\right)^j \geq \left(1 - C t_n^{-(\alpha'-\alpha\delta)}\right)^{2j}$$

Donc l'espérance du temps passé en dehors de e est bornée inférieurement par

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{T}^{<t^{\alpha\delta}}\right] \geq \frac{1}{3}\eta\, t_n^{\alpha'-\alpha\delta-\gamma(1-\alpha)-\zeta}$$

Mais le temps passé en dehors des grosses arêtes est borné supérieurement par

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{T}^{<t^{\alpha\delta}}\right] \leq t_n^{1-\epsilon}$$

En choisissant les exposants avec *précautions*, on obtient une contradiction.

$$\Rightarrow\ \mathbb{P}\{OLT; T_e < t; X_t \notin e\} = o(t^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta})$$

Précautions dans les choix des exposants

α

$$\alpha > \frac{\gamma}{\gamma + \eta_i}; \qquad i = 0, 1;$$

$$\alpha > \tfrac{5}{6}; \qquad \alpha > \frac{2\gamma}{1+\gamma};$$

$$\alpha > 1 - \frac{1-\gamma}{\gamma(1+\gamma)}; \quad \alpha > \max\{\gamma, \delta\}$$

α'

$$\alpha' > \alpha$$

δ

$$\delta < 1 - \frac{2\gamma(1-\alpha)}{(1-\gamma)\alpha};$$

$$\delta < \frac{1}{2\alpha}(1 - \gamma - \gamma(1+\gamma)(1-\alpha))$$

ϵ

$$\epsilon < 1 - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)\alpha(1-\delta) - \gamma(1-\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\gamma)}.$$

$$\epsilon > \alpha\delta + \gamma(1-\alpha);$$

Tous les P de ma thèse :

$$\mathrm{p} = (p(x,y))_{x,y\in S} \quad \mathbf{P}. \quad \mathrm{p}^{\omega} \quad P_x^{\omega} \quad \mathbb{P}_x \quad \mathbf{P}_{\infty} \quad \overline{\mathbf{P}}. \quad \mathbf{P}_x^K \quad \mathbb{P}_x^K \quad \overline{\mathbb{P}}_x \quad \mathbb{P}^{\infty}$$

Et les T :

$$t \quad \tau_k \quad \mathcal{T}_k \quad T_A, T_x \quad T_{A,(k)} \quad \mathcal{T}_i^{\geq n}, \mathcal{T}_i^{<n} \quad \mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}_n^{(i)} \quad \mathfrak{T}_{\infty}, \mathfrak{T}_{\infty}^{(i)}$$

Merci!

Références

Gérard Ben Arous, Alexander Fribergh, Nina Gantert et Alan Hammond : Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves. *Annals of Probability*, 40(1):280 – 338, 2012.

Jean-Philippe Bouchaud : Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. 2(9):1705–1713, 1992.

Nathanaël Enriquez, Christophe Sabot et Olivier Zindy : Aging and quenched localisation for one-dimensional random walks in random environment in the sub-ballistic regime. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 137:423–452, 2009.

Nathanaël Enriquez, Christophe Sabot et Olivier Zindy : Limit laws for transient random walks in random environments on $\mathbb{Z}$. *Annales de l'Institut Fourrier*, 59(6):2469–2508, 2009.

Alexander Fribergh : Biased random walks in positive random conductances on $\mathbb{Z}^d$. *Annals of Probability*, 41(6):3910 – 3972, 2013.

Alexander Fribergh et Daniel Kious : Scaling limits for sub-ballistic biased random walks in random conductances. *Annals of Probability*, 46(2):605–686, 2018.

Russell Lyons, Robin Pemantle et Yuval Peres : Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probability Theory and Related Fields*, 106(2):249–264, 1996.

Russell Lyons et Yuval Peres : *Probability on Trees and Networks*. Presses de l'Université Cambridge, décembre 2016.

Karl Perason : The problem of the random walk. *Nature*, 72(294), juillet 1905.

Yakov G. Sinai : The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory of Probability and Applications*, 27(2):256–268, 1983.

Lian Shen : Asymptotic properties of certain anisotropic walks in random media. *Annals of Applied Probability*, 12(2):477–510, 2002.

Fred Solomon : Random walks in a random environment. *Annals of Probability*, 3(1):1–31, 1975.

Appendices

A. D'autres modèles reliés

Autres modèles reliés

Shen (2003) :
La distribution de c_*^ω supportée sur un compact $[1/K, K]$;
Marche elliptique, limite Brownienne

(1.1) $p_\omega(x, x+e) \geq \kappa > 0$ for all unit vectors $e \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$,

$$\frac{X_n}{n} \text{ converges } P_0\text{-a.s. to a deterministic nondegenerate velocity } v.$$

Further, we prove in Theorem 5.3 that the process $B_\cdot^n$,

$$B_t^n = \frac{X_{[tn]} - [tn]v}{\sqrt{n}}, \qquad t \geq 0, \tag{1.10}$$

with $[t]$ denoting the integer part of $t \geq 0$, converges in law under the annealed measure P_0 to a d-dimensional Brownian motion with nondegenerate covariance matrix, as $n \to \infty$.

Lawler (1992) :
Une MAMA dans $\mathbb{Z}^d$ qui converge vers un Brownien.

Abstract. Let $\pi_i(x)$, $i = 1, \ldots, d$, $x \in Z^d$, satisfy $\pi_i(x) \geqq \alpha > 0$, and $\pi_1(x) + \ldots + \pi_d(x) = 1$. Define a Markov chain on Z^d by specifying that a particle at x takes a jump of $+1$ in the i^{th} direction with probability $\frac{1}{2}\pi_i(x)$ and a jump of -1 in the i^{th} direction with probability $\frac{1}{2}\pi_i(x)$. If the $\pi_i(x)$ are chosen from a stationary, ergodic distribution, then for almost all π the corresponding chain converges weakly to a Brownian motion.

Barlow & Černý (2009) :
Une MAMA dans $\mathbb{Z}^d$ sur des conductances en loi de puissance, sans biais. Limite : Fractional Kinetics.

Abstract

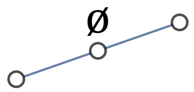
We consider a random walk among unbounded random conductances whose distribution has infinite expectation and polynomial tail. We prove, that the scaling limit of this process is a Fractional-Kinetics process – that is the time change of a d-dimensional Brownian motion by the inverse of an independent α-stable subordinator. We further show, that the same process appears in the scaling limit of the non-symmetric Bouchaud's trap model.

B. MAMA βiaisée sur l'arbre de Bienaymé conditionné à survivre.

L'arbre de Bienaymé

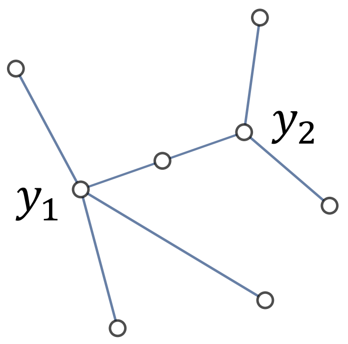
Une racine ø ...

... a un nombre aléatoire $\xi_ø$
d'enfants $y_1, y_2, y_3, \ldots$



$$\xi_ø = 2$$

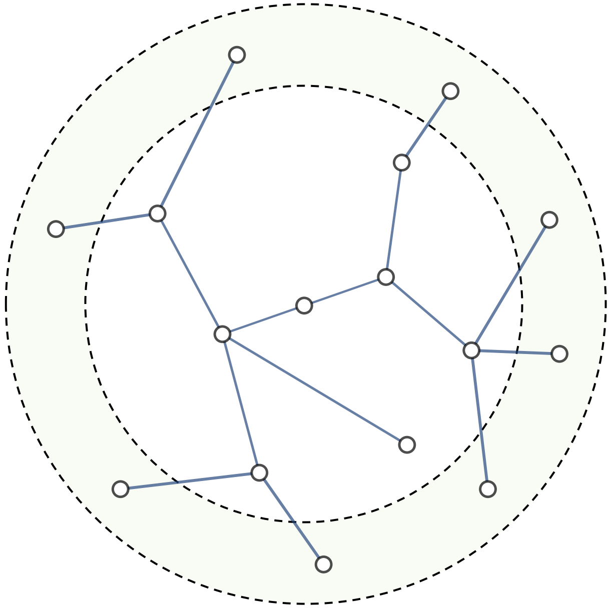
... qui ont chacun un nombre aléatoire $\xi_{y_i} \underset{d}{\sim} \xi_{ø}$ d'enfants ...



$\xi_{y_1} = 3; \ \xi_{y_2} = 2$

... etc. Le nombre d'individus à la $n$ième génération est

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_{x_i}.$$

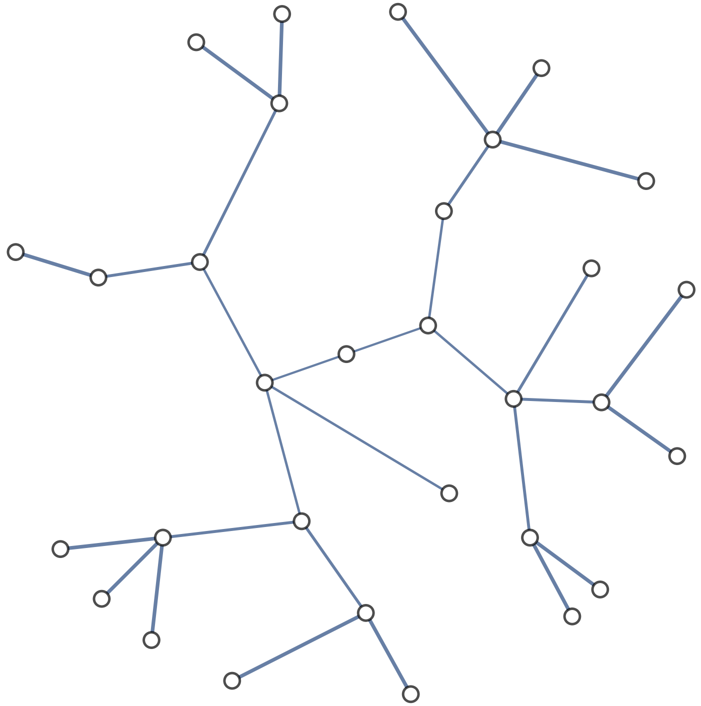


$Z_3 = 8$

Conditionné à survivre

Thm. Si $m = \mathbf{E}[\xi] > 1$,

$$\mathbf{P}\{Z_n \to 0\} = q < 1$$



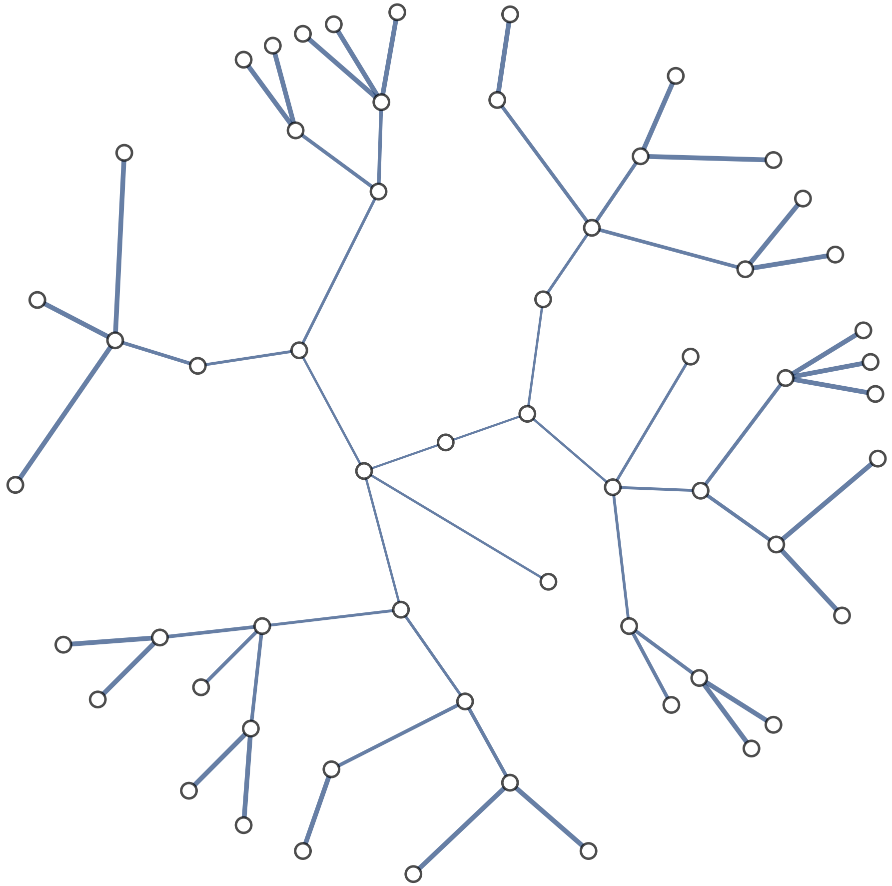
L'arbre *survit* avec probabilité $1 - q = \bar{q}$

$$\mathbf{P}_\infty\{\,\cdot\,\} = \mathbf{P}\{\cdot \mid Z_n \to \infty\}$$

Conductances

Pour tout x, la conductance de l'arête qui le rattache à son parent $\overleftarrow{x}$ est

$$c^{\omega}(\overleftarrow{x}, x) = \beta^{|\overleftarrow{x}|}$$



$\beta = 8/5$

$$\pi^{\omega}(x) = \beta^{|\overleftarrow{x}|}(1 + \beta\xi_x)$$

Les probabilités de transition sont données par

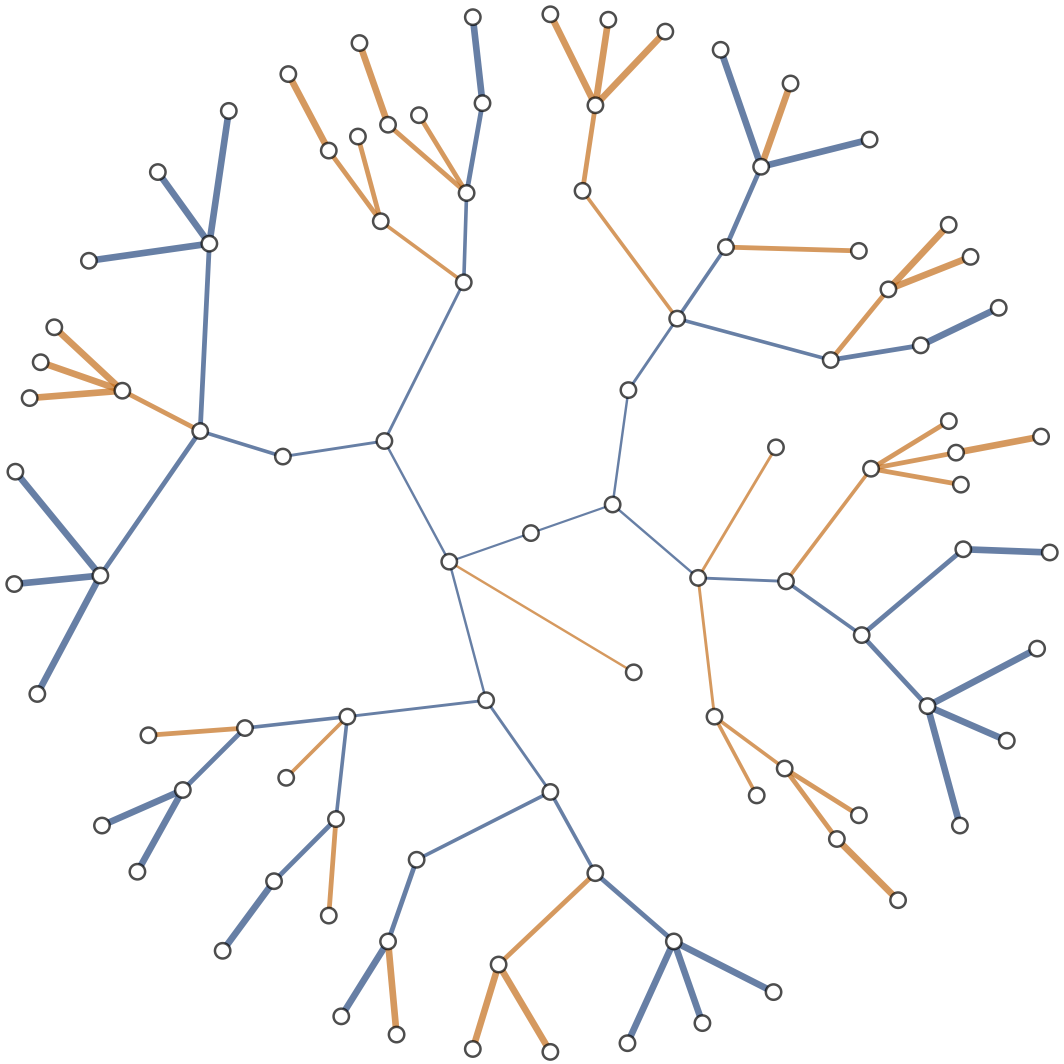
$$p^{\omega}(x, \overleftarrow{x}) = \frac{1}{1 + \xi_x\beta};$$

$$p^{\omega}(x, y_i) = \frac{\beta}{1 + \xi_x\beta}$$

où les y_i sont les enfants de x.

Décomposition

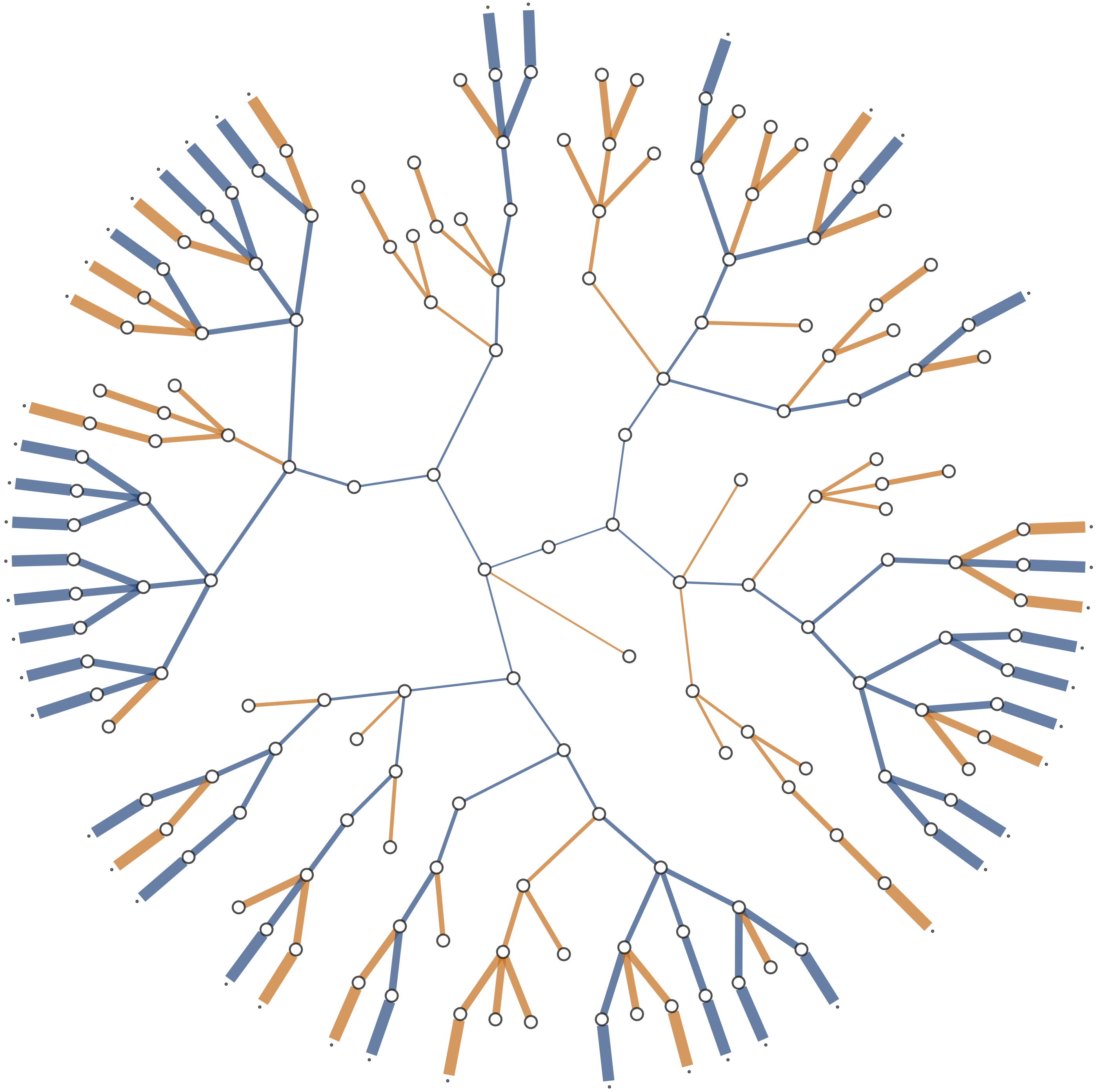
Sous $\mathbf{P}_\infty$ on peut décomposer l'arbre en une ***épine dorsale*** infinie



et des ***branches*** qui sont des sous-arbres finis.

Les branches ont la même distribution que l'arbre sous

$$\overline{\mathbf{P}}\{\,\cdot\,\} = \mathbf{P}\{\,\cdot \mid Z_n \to 0\}$$



Récurrence/transience

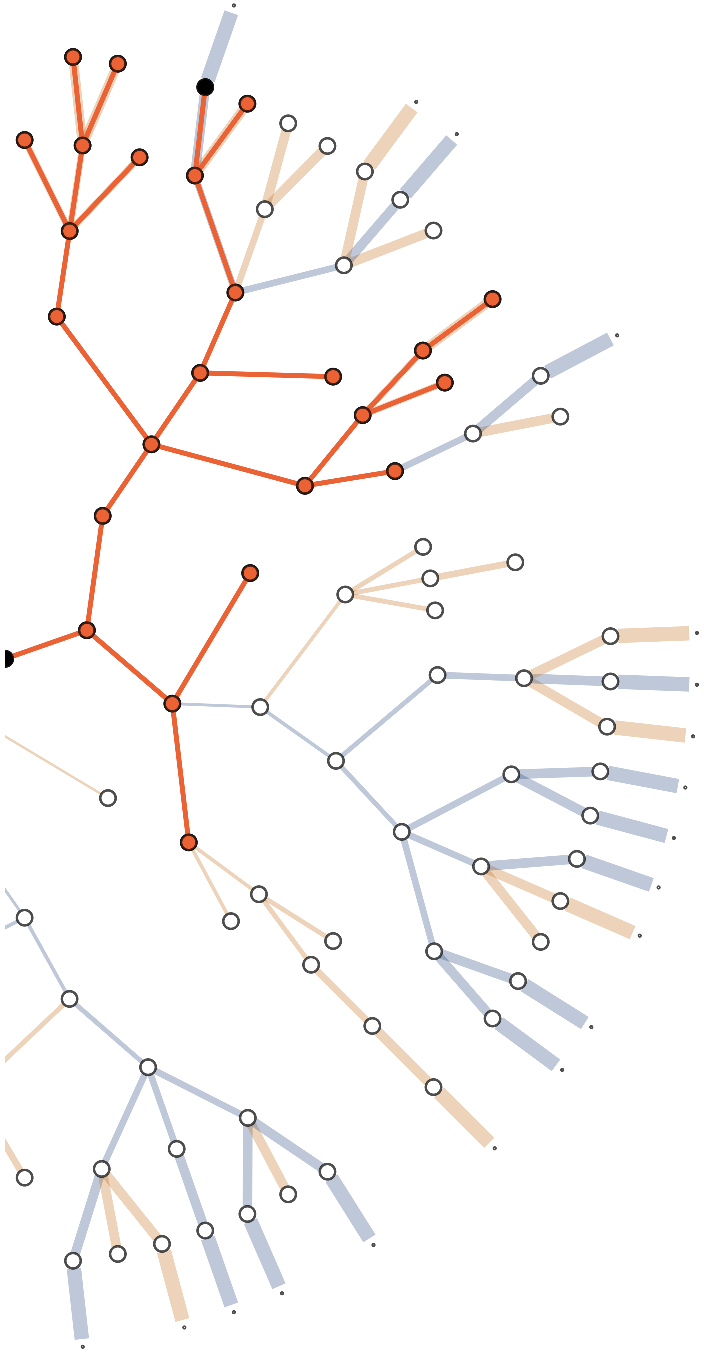
Thm. (Lyons, 1992)
Si $\mu = \mathbf{E}[\xi] > 1$,

- Si $\beta < 1/\mu$, récurrent p.s.
- Si $\beta = 1/\mu$, récurrent positif p.s.
- Si $\beta > 1/\mu$, transient p.s.

Thm. (Lyons, Peres, Pemantle, 1996)
Si $\mu = \mathbf{E}[\xi] > 1$, ψ f. g. prob. de ξ,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = v(\beta, \psi) \quad \text{p.s.}$$

- Si $\psi(0) = 0$, $v > 0$;
- Si $\psi(0) > 0, \frac{1}{\mu} < \beta < \frac{1}{\psi'(q)}$, $v > 0$;
- Si $1 < \beta_c = \frac{1}{\psi'(q)} < \beta$,
  $v = 0$.



Si $\beta_c < \beta$, les branches sont des pièges.

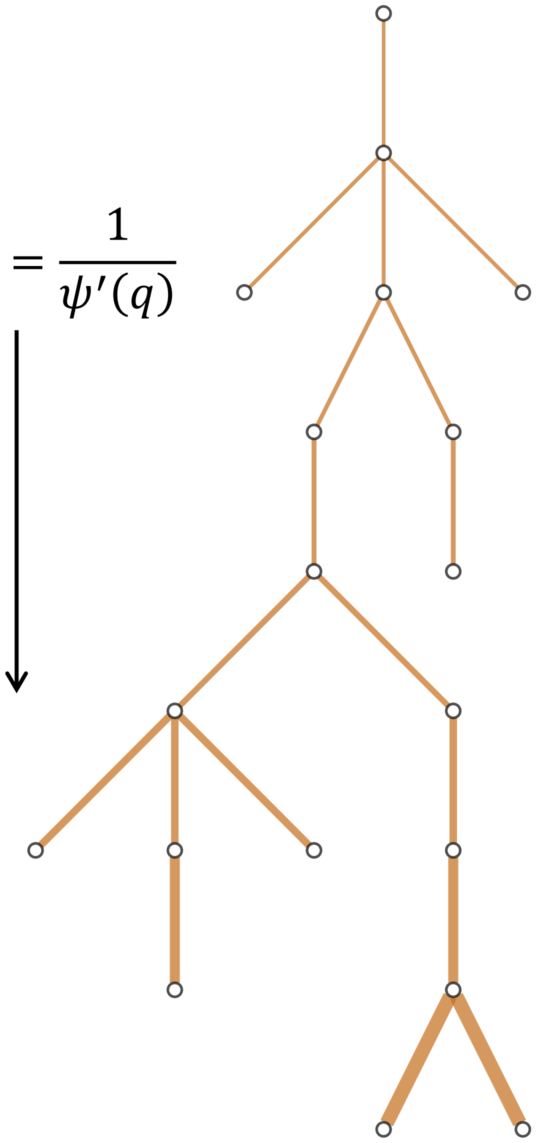
Pièges

H^ω

Hauteur de la branche

$\overline{\mathbf{P}}\{H^\omega \geq n\} \sim C\beta_c^{-n}$

$\beta > \beta_c = \dfrac{1}{\psi'(q)}$

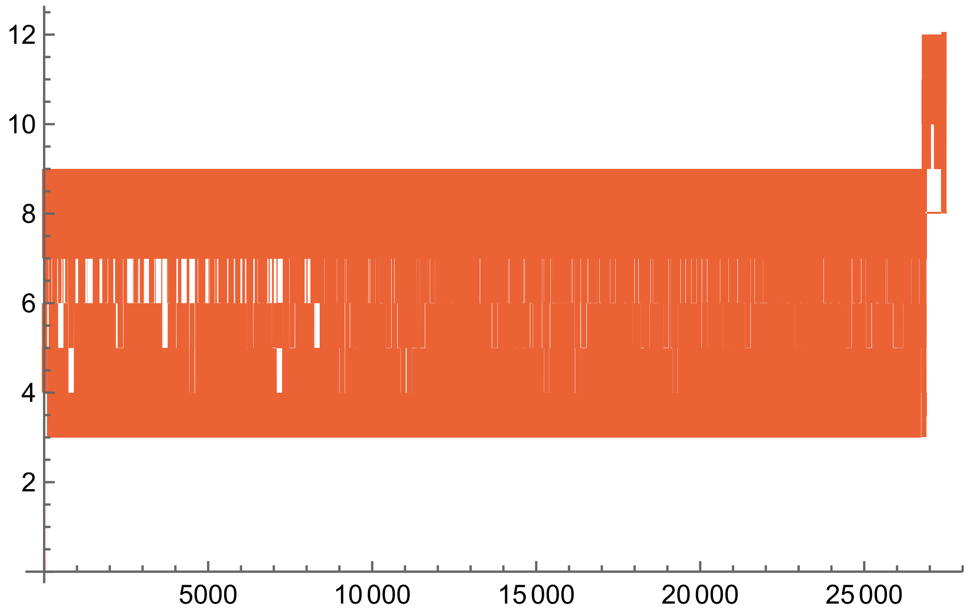


$$T_\varnothing^+ \approx \beta^{H^\omega}$$

Temps de retour (trempé) à la racine de la branche

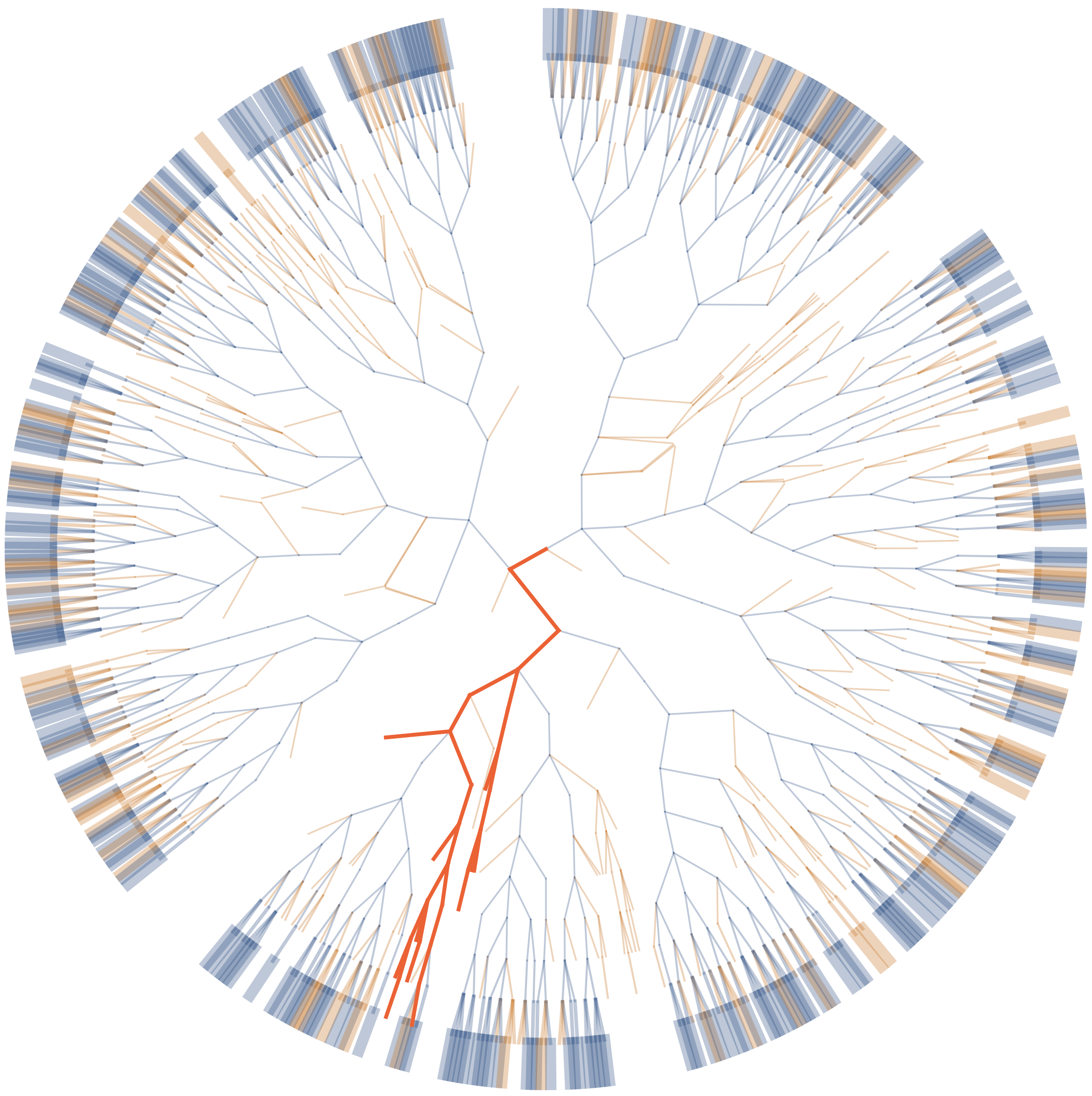
$$\overline{\mathbb{P}}_\varnothing\{T_\varnothing^+ \geq u\} \sim C' u^{-\gamma}$$

$$\gamma = \frac{\log \beta_c}{\log \beta} < 1$$



Distance à la racine en fonction du temps

$$\psi(s) = \frac{1}{4}(1 + s + s^2 + s^3); \beta = 5;$$

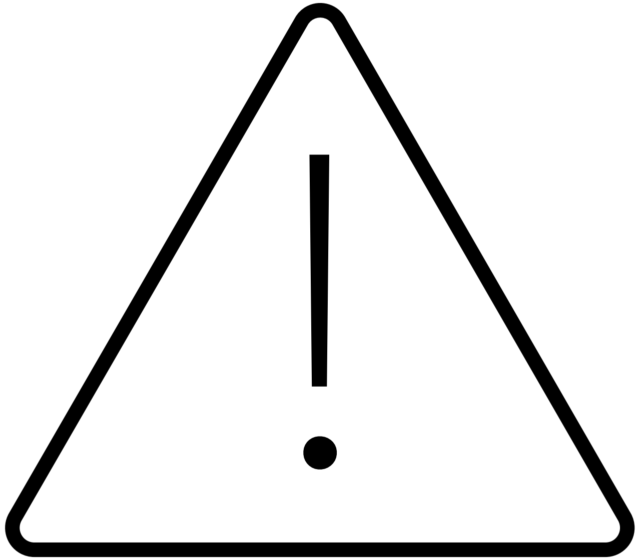


$$H^{\omega} \in \mathbb{N}$$

La distribution de H
est arithmétique

$$Q(x) = \overline{\mathbf{P}}\{\beta^{H^{\omega}} \geq x\}$$

n'est pas à variation régulière



Thm. (Ben Arous, et al., 2012)
Les limites d'échelle n'existent pas!

Thm. (Ben Arous et al., 2012)
Les distributions pour X_t/t^{α}
sont tendues.

$$\frac{\log |X_t|}{\log t} \to \gamma \ \text{ p.s.}$$

C. Distributions stables; fonctions à variation régulière

Distributions stables

La distribution marginale $\mathcal{D}$ des X_i (i.i.d.) est *stable* si

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i - b_k}{a_k} \sim X_1$$

pour certaines suites a_k et b_k.

La famille des distributions stables

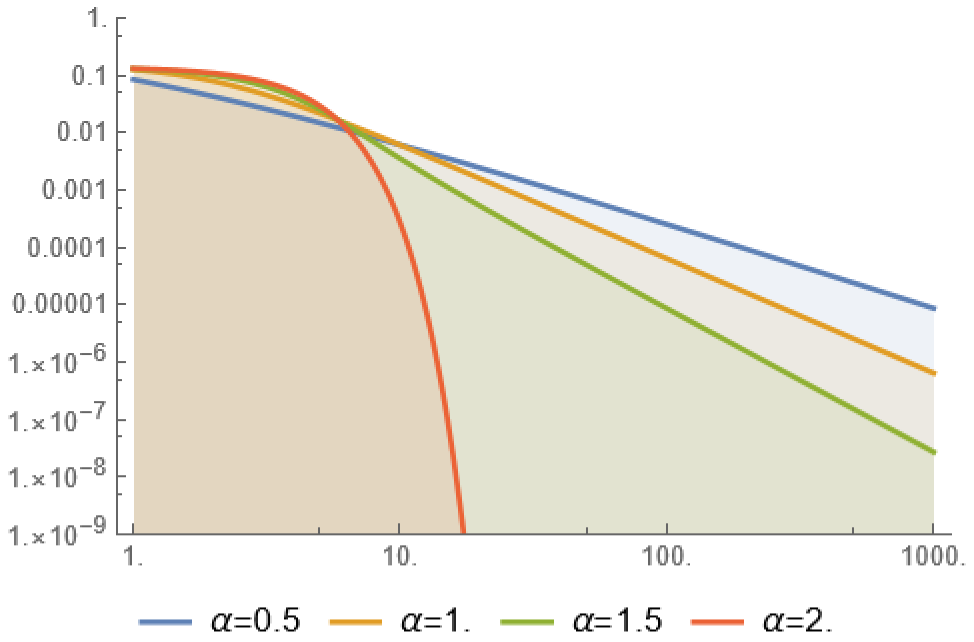
$$\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$$

est caractérisée par 4 paramètres. Sa fonction caractéristique est

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\,t\,\mathcal{S}(\alpha,\beta,\mu,c)}\right]$$
$$= e^{it\mu - |ct|^{\alpha}\left(1 + i\beta H(t,\alpha)\right)}$$

$$H(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\log|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

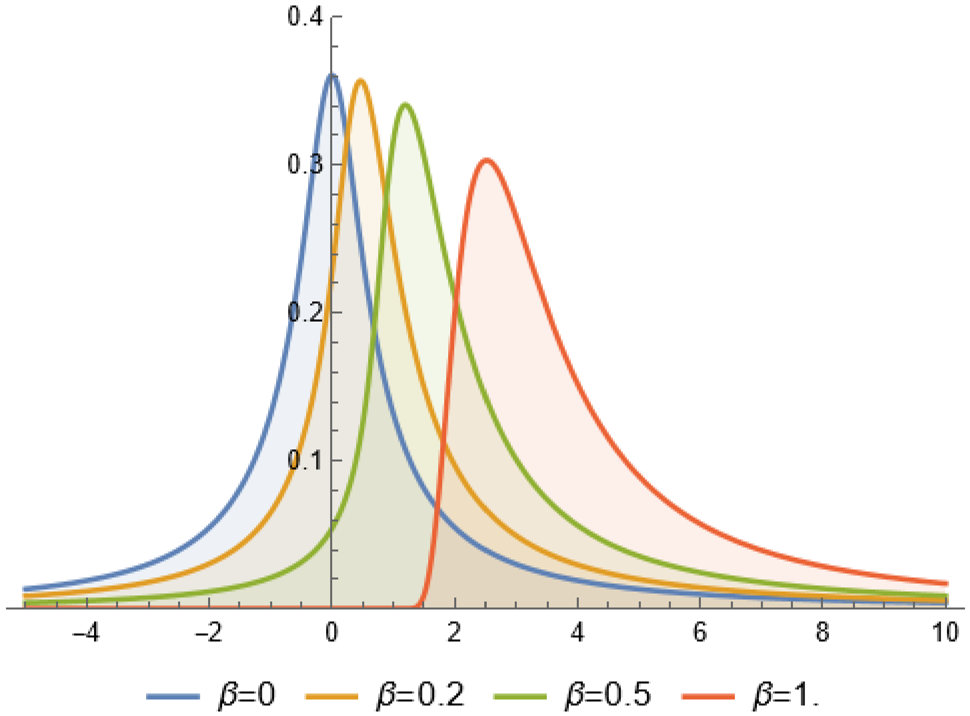
α et β



$\alpha \in (0,2]$

contrôle les queues.

Lois de puissance pour $\alpha < 2$.

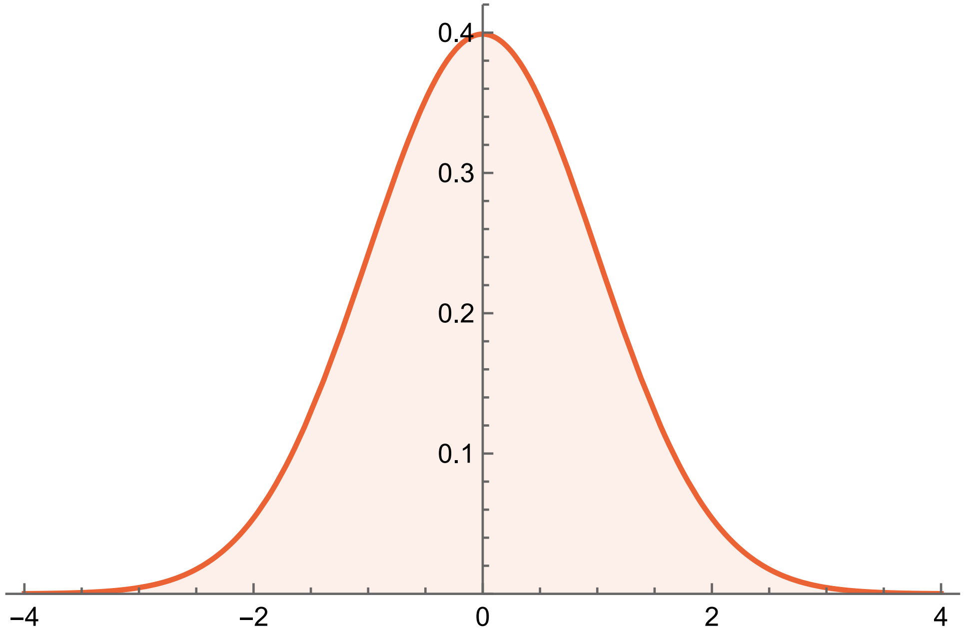


$\beta \in [-1,1]$

contrôle le biais à gauche ou à droite.

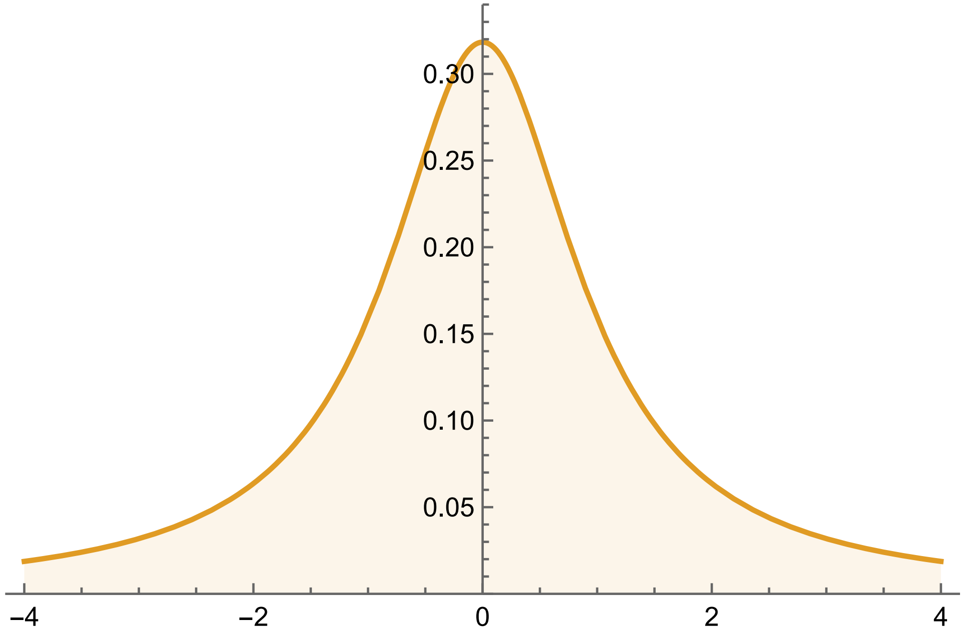
symétrique si $\beta = 0$.

α et β



$$\alpha = 2, \beta = 0$$

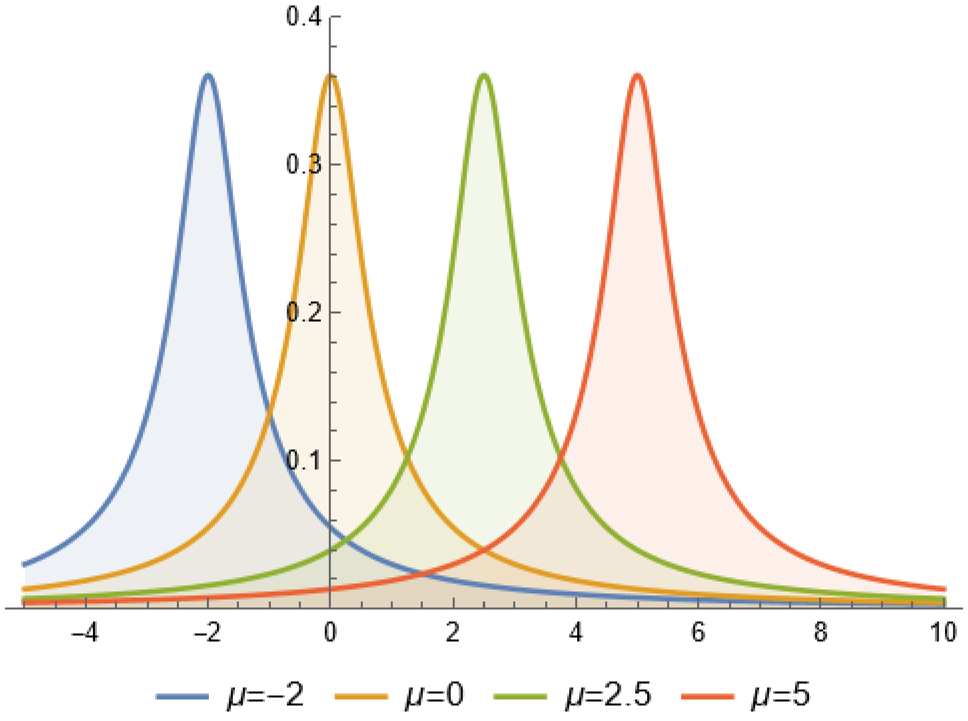
Distributions normales



$$\alpha = 1, \beta = 0$$

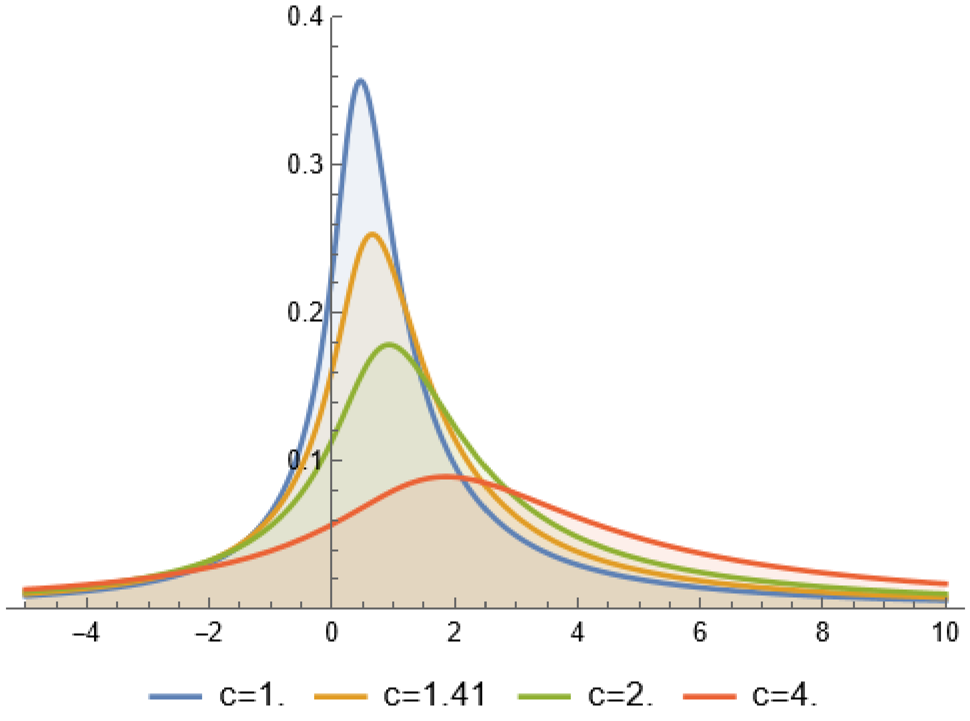
Distributions de Cauchy!

μ et c



$$\mu \in \mathbb{R}$$

paramètre de translation



$$c > 0$$

paramètre d'échelle

Thm. Si $\mathcal{D}$ est une distribution avec f. de rép. F, f. de survie $\overline{F}$ et

$$Q(x) = \mathbb{P}\{\, |X| > x\} \sim C\, L(x) x^{-\alpha}$$

De plus, on suppose

- X_i i.i.d. $\sim \mathcal{D}$
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $L(x)$ var. lente. *
- $\lim_{x\to\infty} \overline{F}(x)/Q(x)$ existe

alors...

$$a_n = \inf\{x \in R^+ : Q(x) < n^{-1}\} =: \mathrm{Inv}_Q(n);$$

$$b_n = n \int_0^{a_n} x\, dQ(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \to \mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$$

* Fonctions à variation régulière

f est à variation régulière d'exposant $\gamma \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^{\gamma}$$

f est à variation *lente* si $\gamma = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 1$$

Thm. Si f est à variation régulière d'exposant γ, alors $f(x)/x^{\gamma}$ est à variation lente.

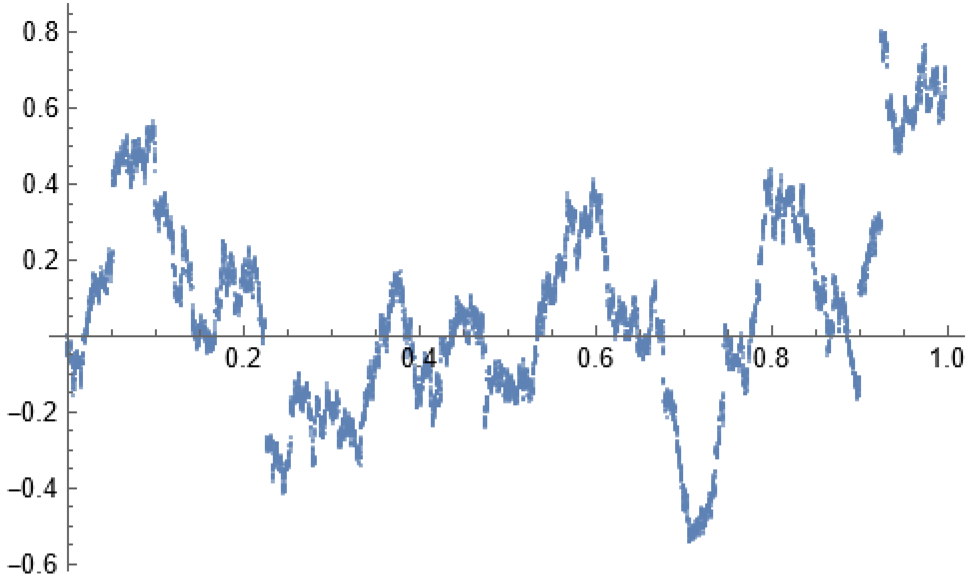
...

Processus stables (de Lévy)

$$(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$$

- $\mathcal{Y}_0 = 0$;
- $t \mapsto \mathcal{Y}_t$ càdlàg.
- Incréments indépendants; homogènes.
- α-stable si $\mathcal{Y}_t \sim t^{1/\alpha}\,\mathcal{S}(\alpha, \ldots)$

Généralise le processus de Wiener.

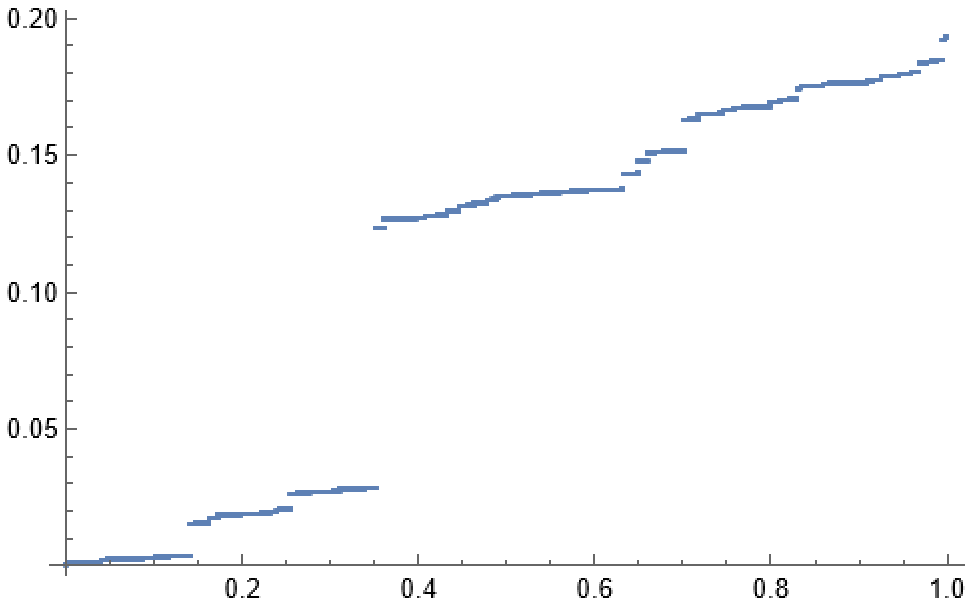


Exemple d'une réalisation d'un processus α-stable symétrique avec $\alpha = 1{,}8$

Subordinateurs α-stables

$$(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$$

- Processus α-stable
- $0 < \mathcal{Y}_t \sim \ t^{1/\alpha}\, \mathcal{S}(\alpha, \beta = 1, \dots)$



Exemple d'une réalisation d'un subordinateur α-stable avec $\alpha\ = 0{,}5$

Limites d'échelles α-stables

Thm. Soit $\mathcal{D}$ est une distribution supportée sur $[0, +\infty)$ avec f. de survie $\overline{F}$ et

$$\bar{F}(x) \sim Cx^{-\alpha} \; , \alpha \in (0, 2)$$

avec

- X_i i.i.d. $\sim \mathcal{D}$
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Si $\alpha < 1$,
$$S_t^{(N)} = N^{-1/\alpha} \, S_{\lfloor N\, t \rfloor}$$
- Si $\alpha > 1$,
$$S_t^{(N)} = N^{-1/\alpha} \, (S_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu N t)$$

où $\mu = \int_0^\infty x \, dF(x)$

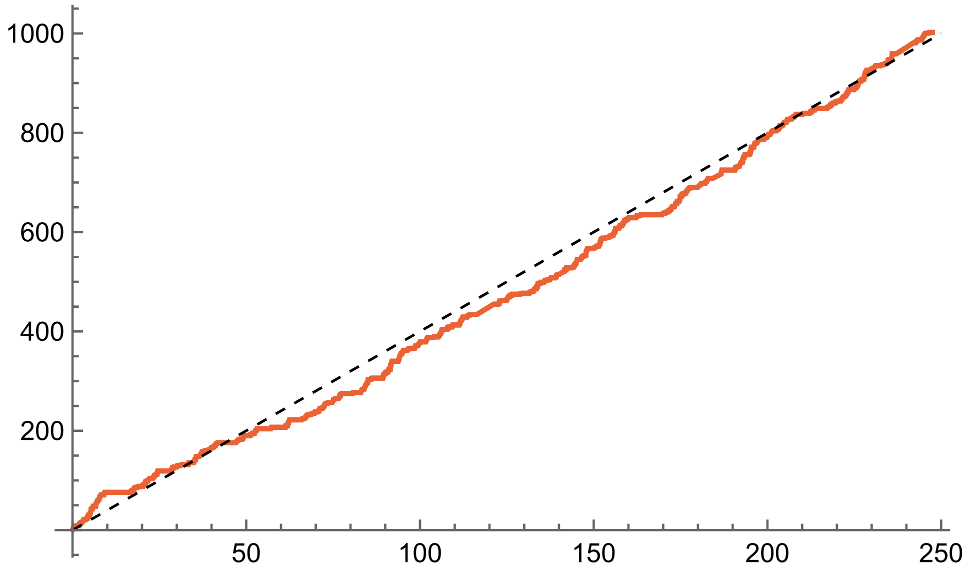
$$\left(S_t^{(N)}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{Y}_t)_{0 \le t \le M}$$

en distribution

dans la topologie de Skorokhod pour les fonctions càdlàg sur l'intervalle $[0, M]$.

Pour Bouchaud

si $\mu = \mathbb{E}[U_i] < \infty$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[U_i] < \infty$



pour $\tau \sim \; Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\left(\frac{T_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu N t}{\sigma \sqrt{N}}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{W}_t)_{0 \le t \le M}$$

$$\left(\frac{X_{Nt} - v\, N\, t}{\sigma v^{3/2} \sqrt{N}}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{W}_t)_{0 \le t \le M}$$

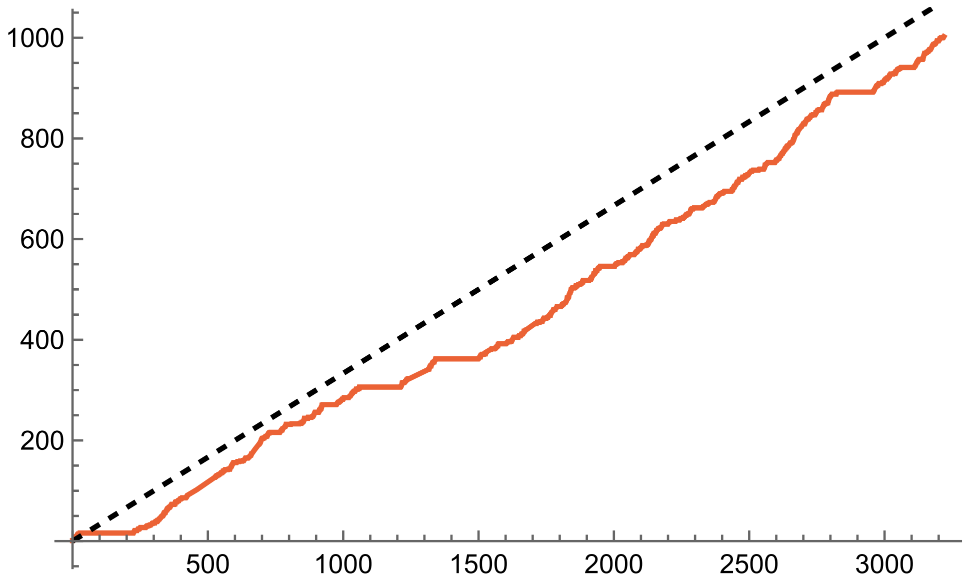
en distribution dans la topologie de Skorokhod.

si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim C\, x^{-\gamma}$

$$\gamma \in (1,2)$$

$\mu = \mathbb{E}[U] < \infty \qquad \mathbb{E}[U^2] = \infty$

$\mathcal{Y} \sim$ subordinateur γ-stable



pour $\tau \sim Pareto(a = 1, \gamma = 3/2)$.

$$\left(\frac{T_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu N t}{N^{1/\gamma}}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{Y}_t)_{0 \le t \le M}$$

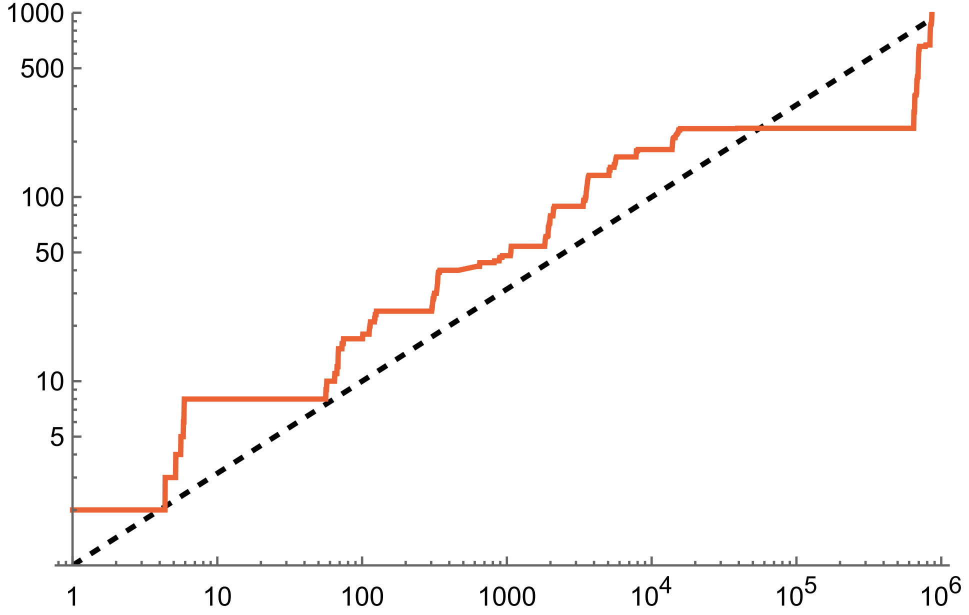
$$\left(\frac{X_{Nt} - v\, N\, t}{N^{1/\gamma}}\right)_{0 \le t \le M} \to \left(-v^{1+1/\gamma}\mathcal{Y}_t\right)_{0 \le t \le M}$$

en distribution dans la topologie de Skorokhod.

si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim C\, x^{-\gamma}$

$$\gamma \in (0,1)$$

$\mathbb{E}[U] = \infty$ $\mathbb{E}[U^2] = \infty$



pour $\tau \sim Pareto(a = 1, \gamma = 1/2)$.

$\mathcal{Y} \sim$ subordinateur γ-stable;

$$\left(\frac{T_{\lfloor Nt \rfloor}}{N^{1/\gamma}}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{Y}_t)_{0 \le t \le M}$$

en distribution dans la topologie de Skorokhod.

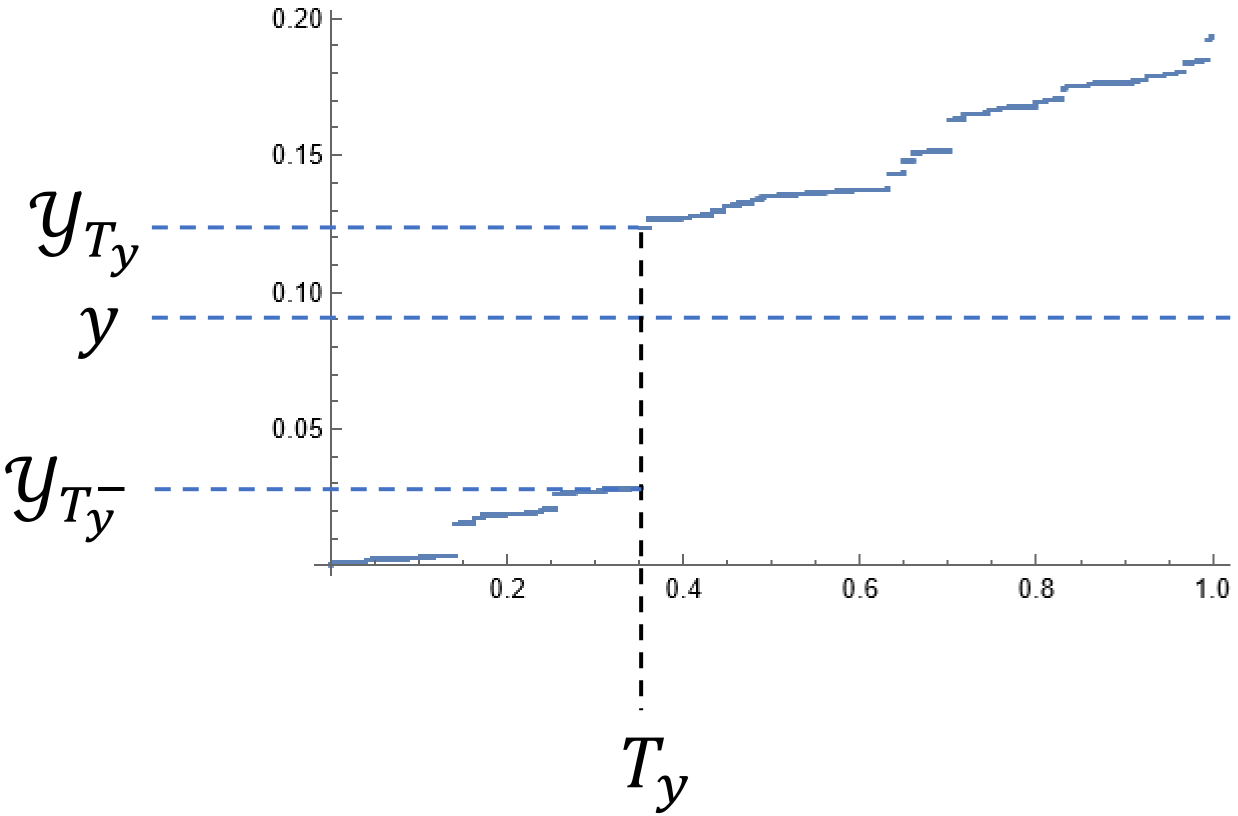
$\mathcal{Z} \sim$ inverse d'un subordinateur γ-stable;

$$\left(\frac{X_{Nt}}{N^{\gamma}}\right)_{0 \le t \le M} \to (\mathcal{Z}_t)_{0 \le t \le M}$$

en distribution dans la topologie uniforme.

D. Vieillissement et loi de l’arc-siuns

Loi de l'arc-sinus



Temps d'atteinte du niveau y.

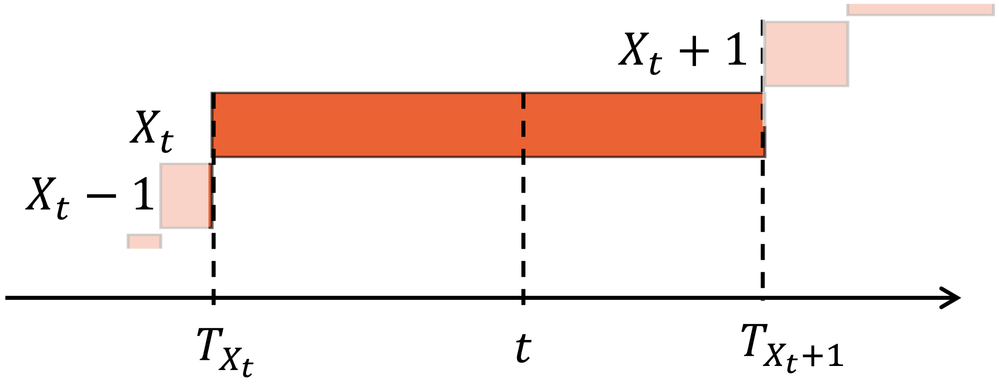
Thm. Si $\mathcal{Y}$ est un subordinateur α-stable, $\alpha < 1$,

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\mathcal{Y}_{T_y^-}}{y} \leq u\right\} = \mathrm{ASIN}_\alpha(u)$$

avec

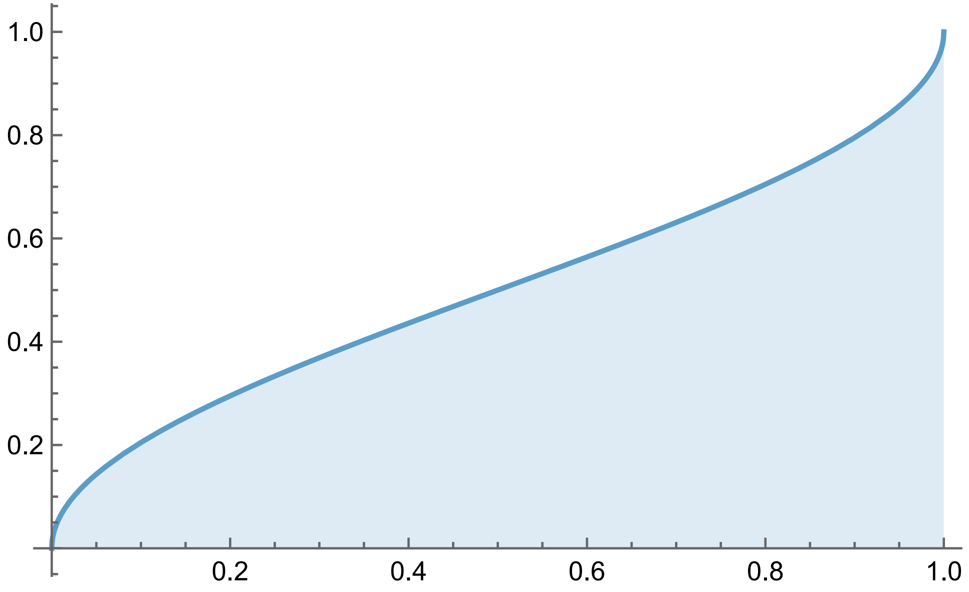
$$\mathrm{ASIN}_\alpha(u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^u x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dx$$

Pour Bouchaud



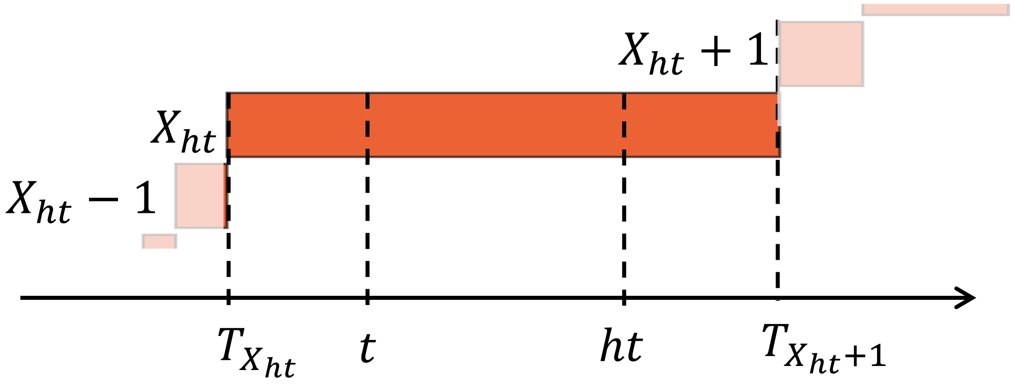
Thm. Si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim Cx^{-\gamma}, \gamma < 1, u \in [0,1]$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{T_{X_t}}{t} \leq u\right\} \to \mathrm{ASIN}_\gamma(u)$$



f. de rép. limite pour T_{X_t}/t si $\gamma = 1/2$.

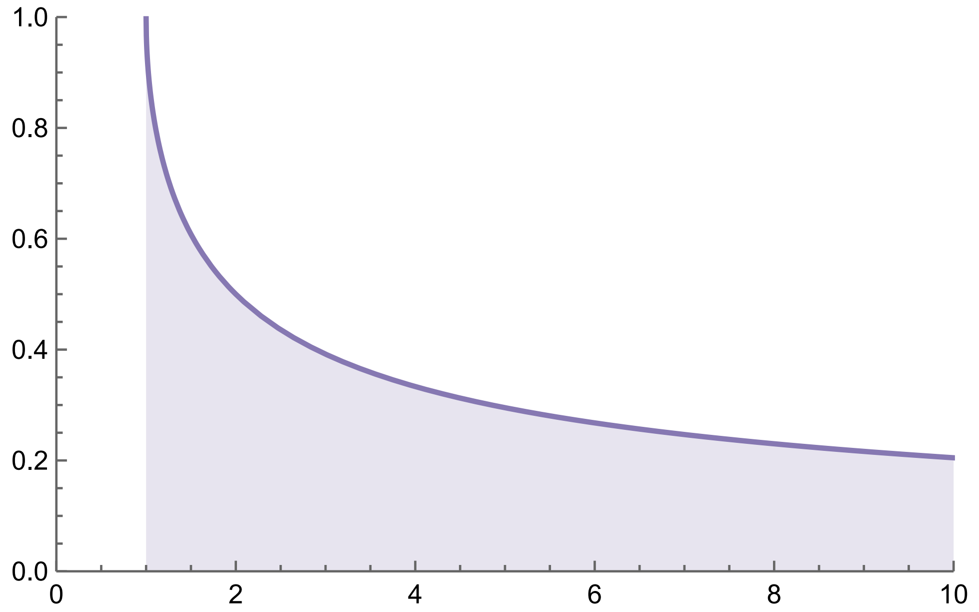
Pour Bouchaud



vieillissement

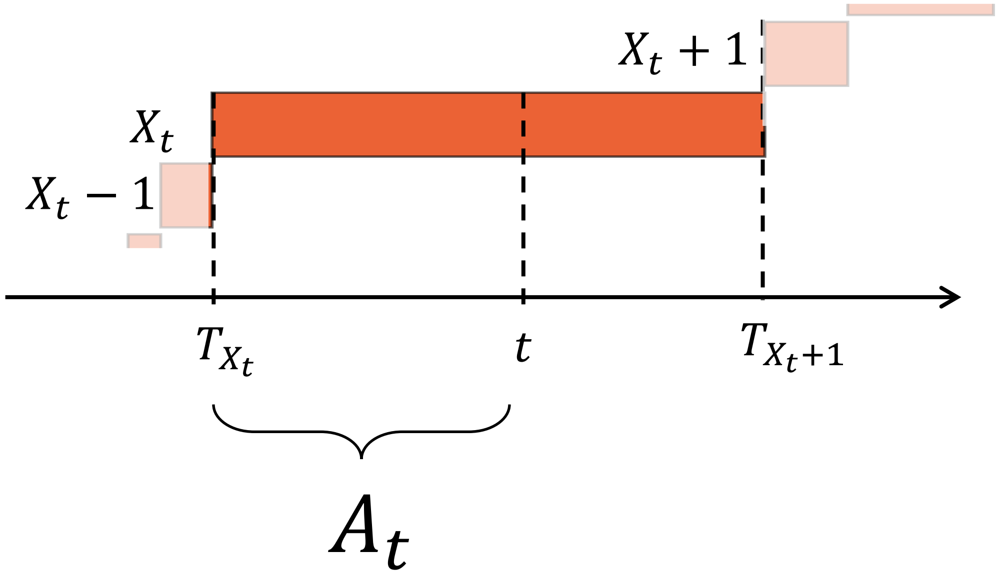
Si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim Cx^{-\gamma}, \gamma < 1, h \geq 1$

$$\mathbb{P}\{X_t = X_{ht}\} \to \mathrm{ASIN}_\gamma(1/h)$$



$\lim_t \mathbb{P}\{X_t = X_{ht}\}$ si $\gamma = 1/2$.

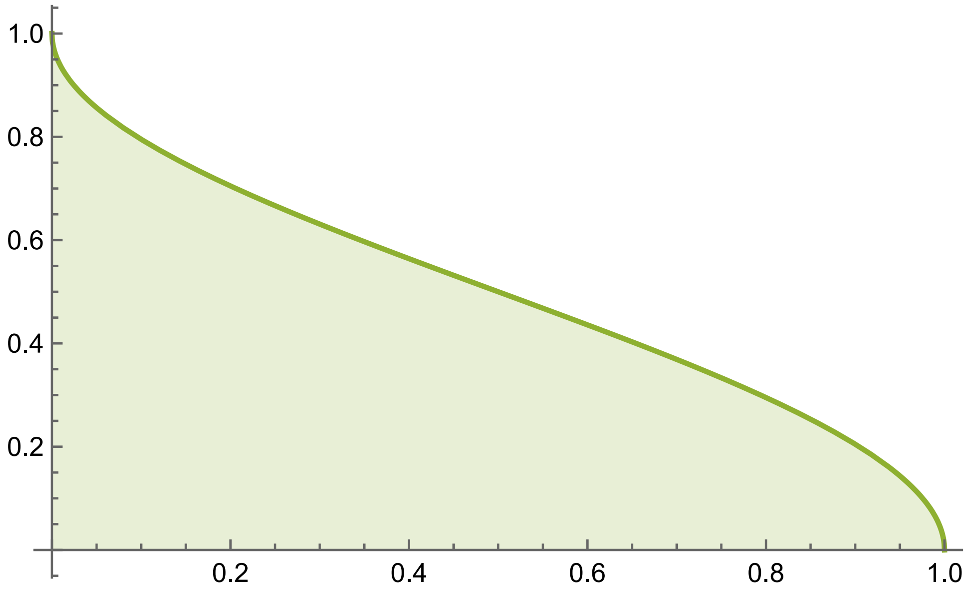
En termes de renouvellements



Âge du renouvellement courant

Thm. Si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim Cx^{-\gamma}, \gamma < 1, u \in [0,1]$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{A_t}{t} \geq u\right\} \to \mathrm{ASIN}_\gamma(1 - \mathrm{u})$$



F. de survie limite pour A_t/t si $\gamma = 1/2$.

En termes de renouvellements

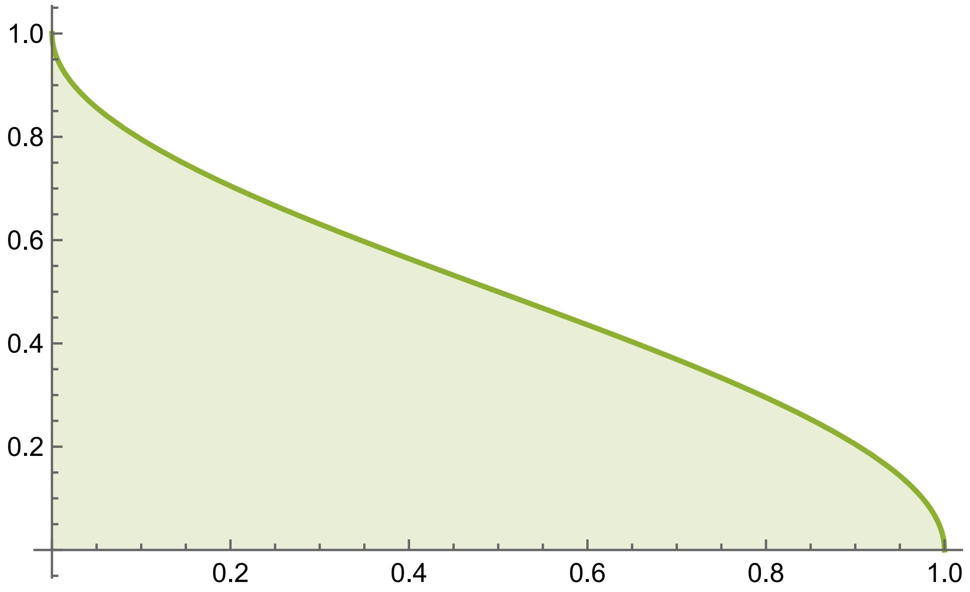
Vieillissement

$$\frac{A_t}{t}$$

converge en distribution quand $t \to \infty$

Thm. Si $\mathbb{P}\{U > x\} \sim Cx^{-\gamma}, \gamma < 1, u \in [0,1]$

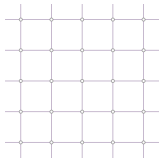
$$\mathbb{P}\left\{\frac{A_t}{t} \geq u\right\} \to \mathrm{ASIN}_\gamma(1 - \mathrm{u})$$



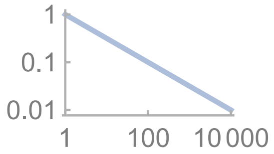
F. de survie limite pour A_t/t si $\gamma = 1/2$.

E. Exemple de simulation

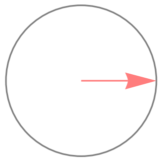
Paramètres :



$d = 2$

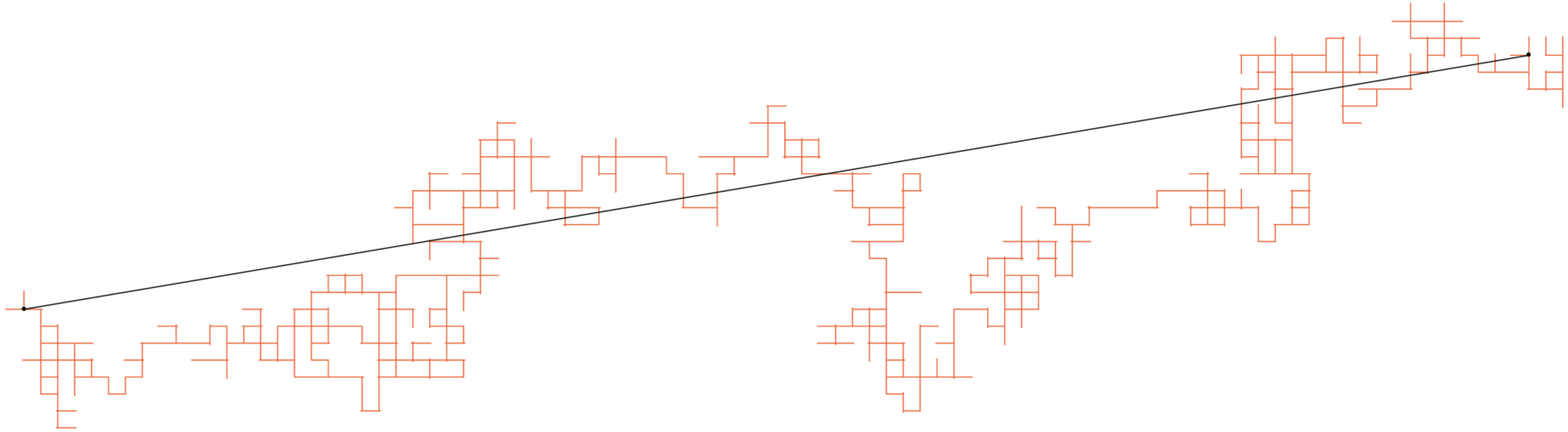


$\boldsymbol{P}\{c_*^\omega(e) > u\} = u^{-1/2}$

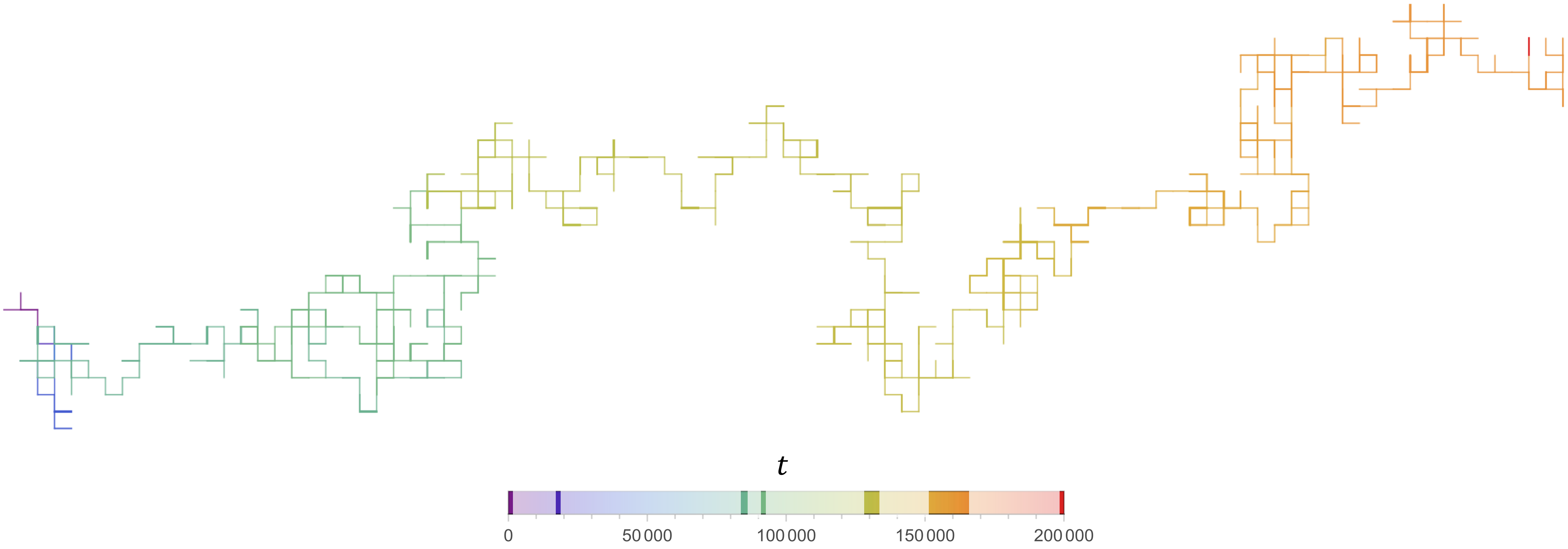


$\ell = (1,0)$

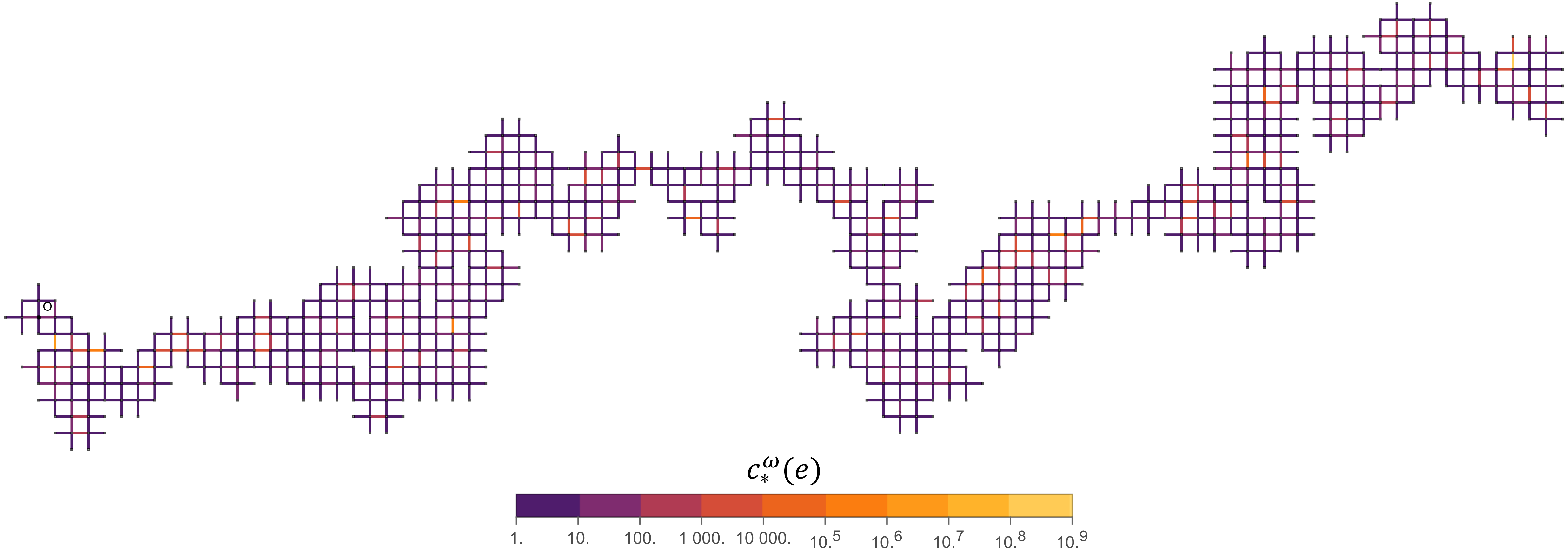
La marche aléatoire



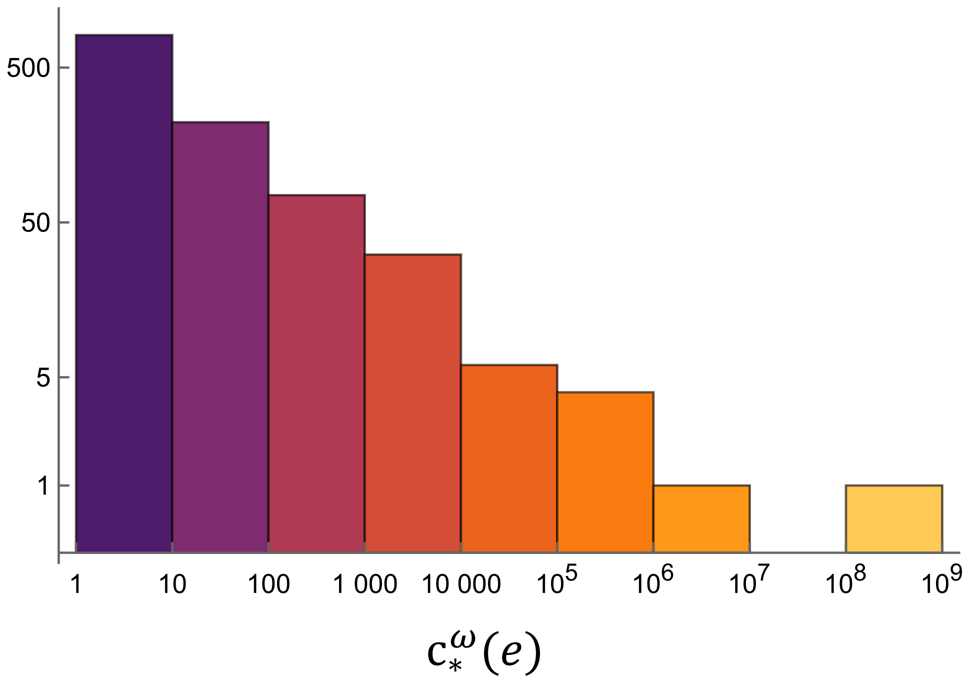
La marche aléatoire

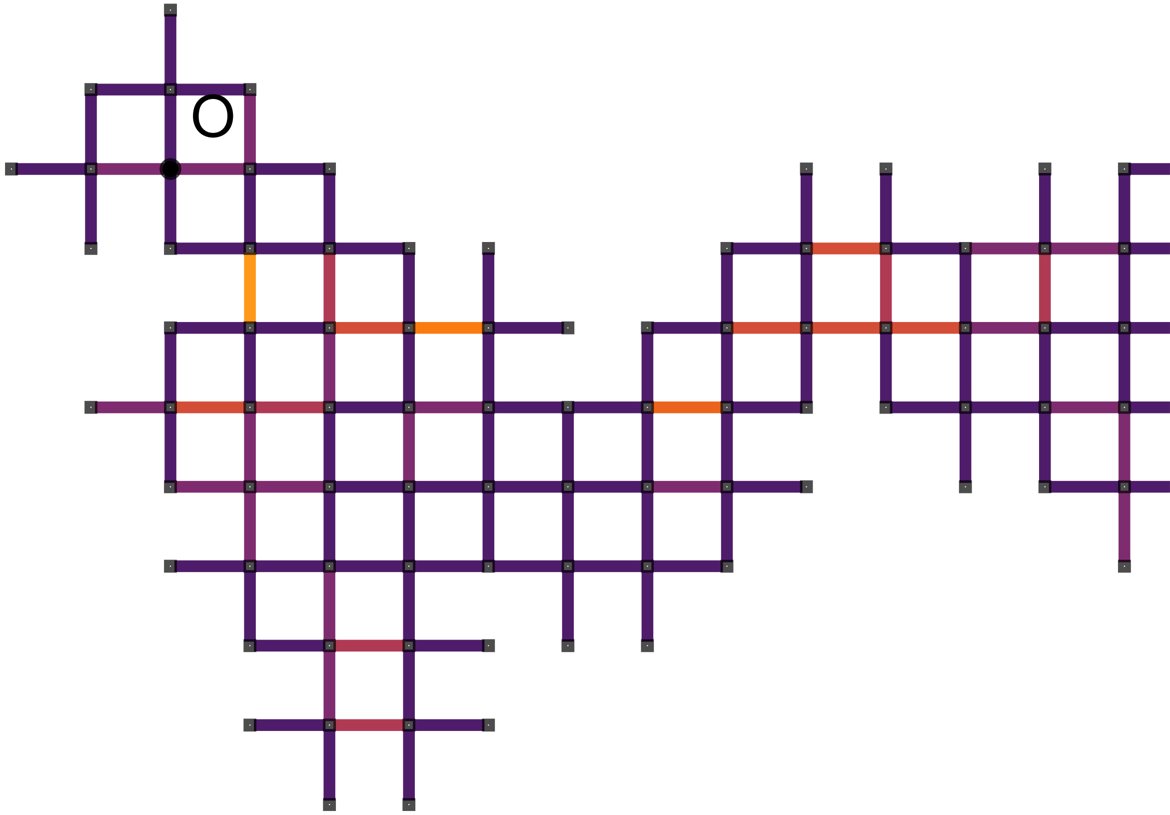


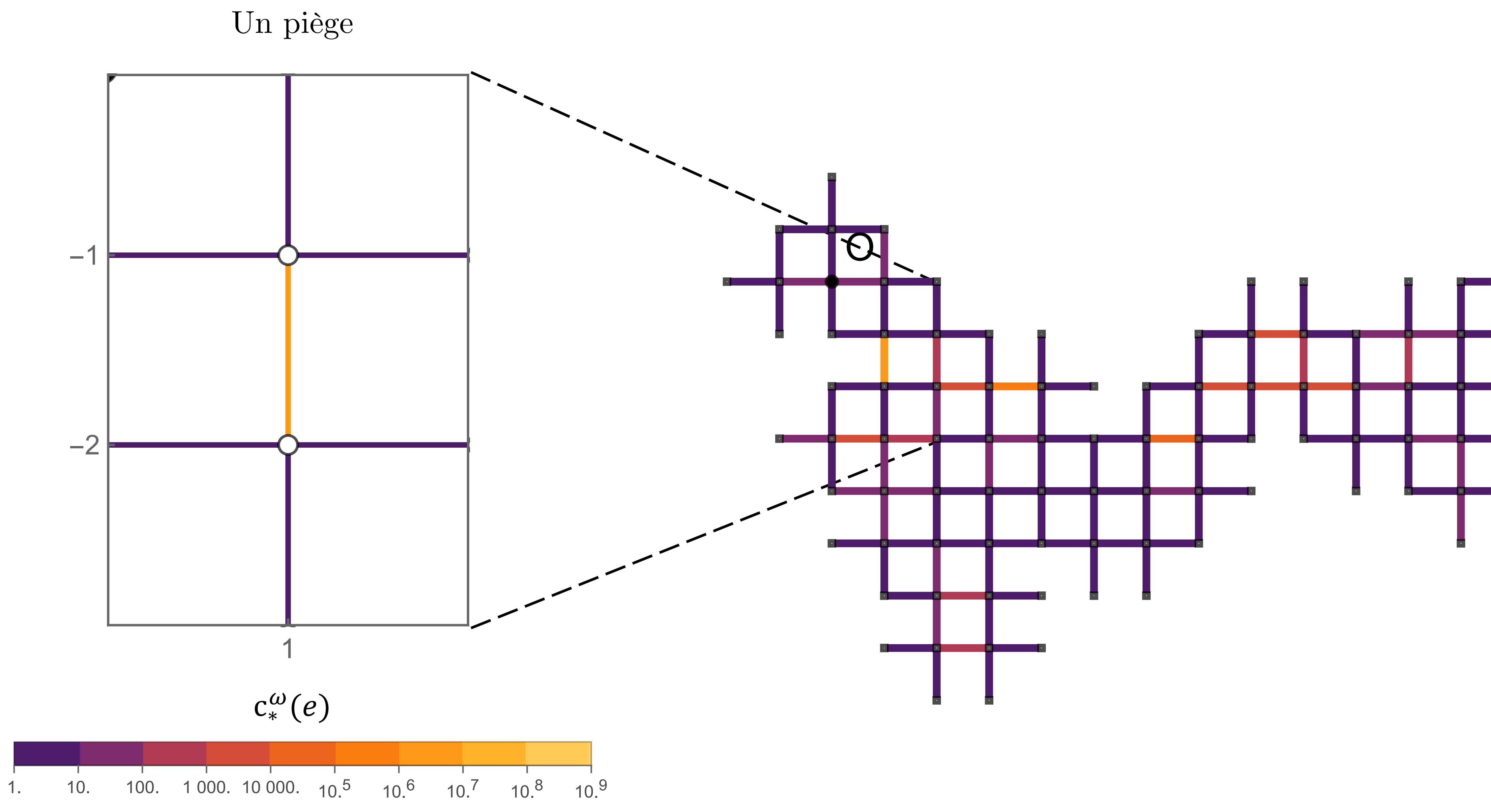
Le graphe découvert par la marche aléatoire



Fréquences des conductances dans le graphe

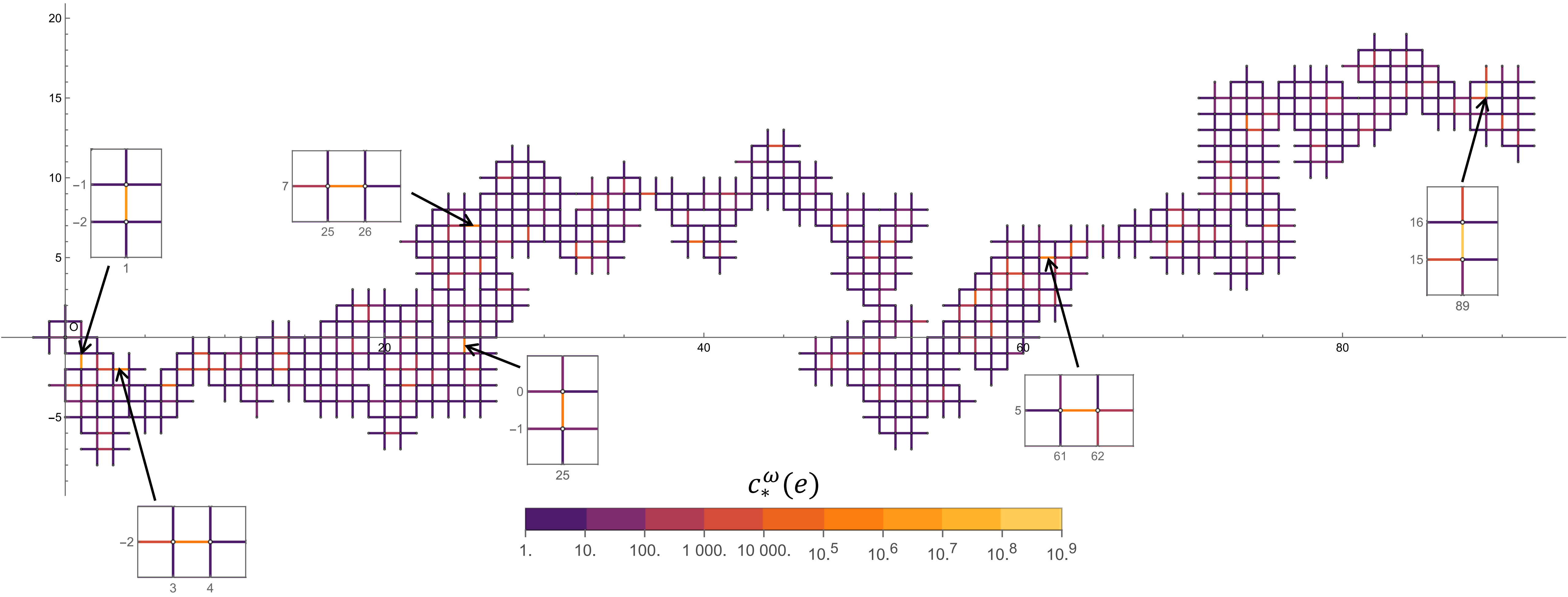




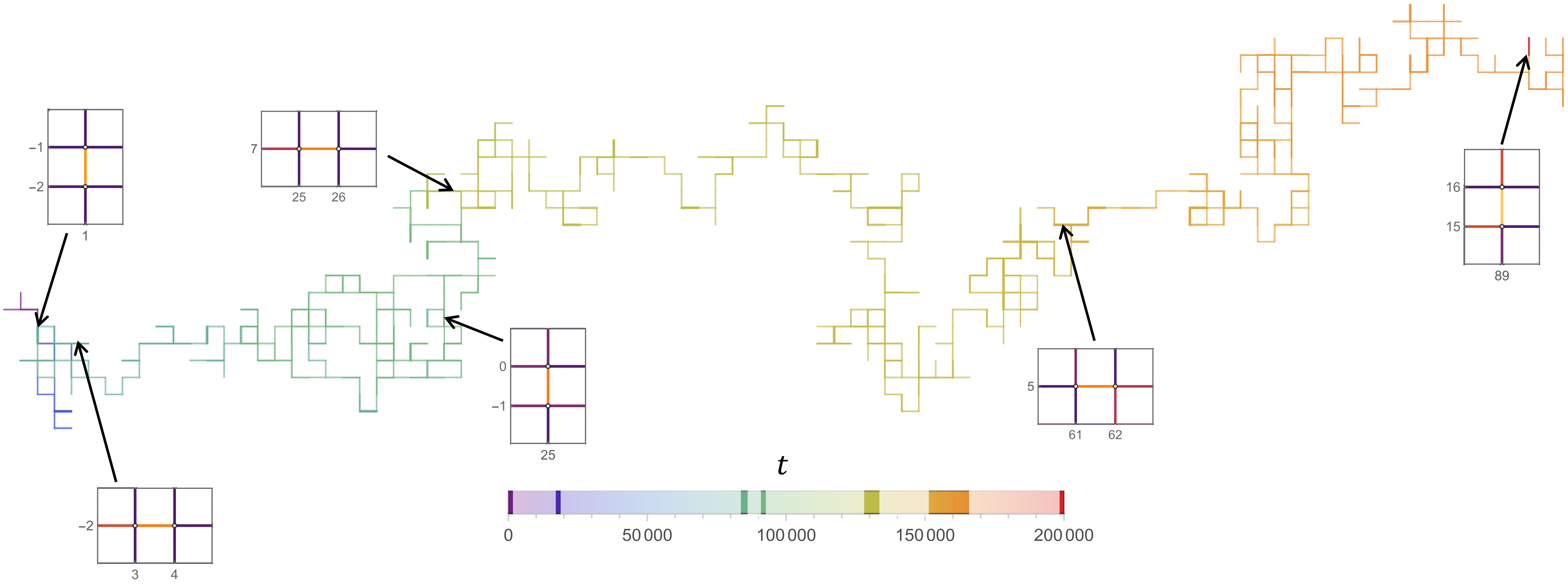


Un piège
−1
−2
1
$c_*^{\omega}(e)$
1.
10.
100.
1 000.
10 000.
$10.^5$
$10.^6$
$10.^7$
$10.^8$
$10.^9$

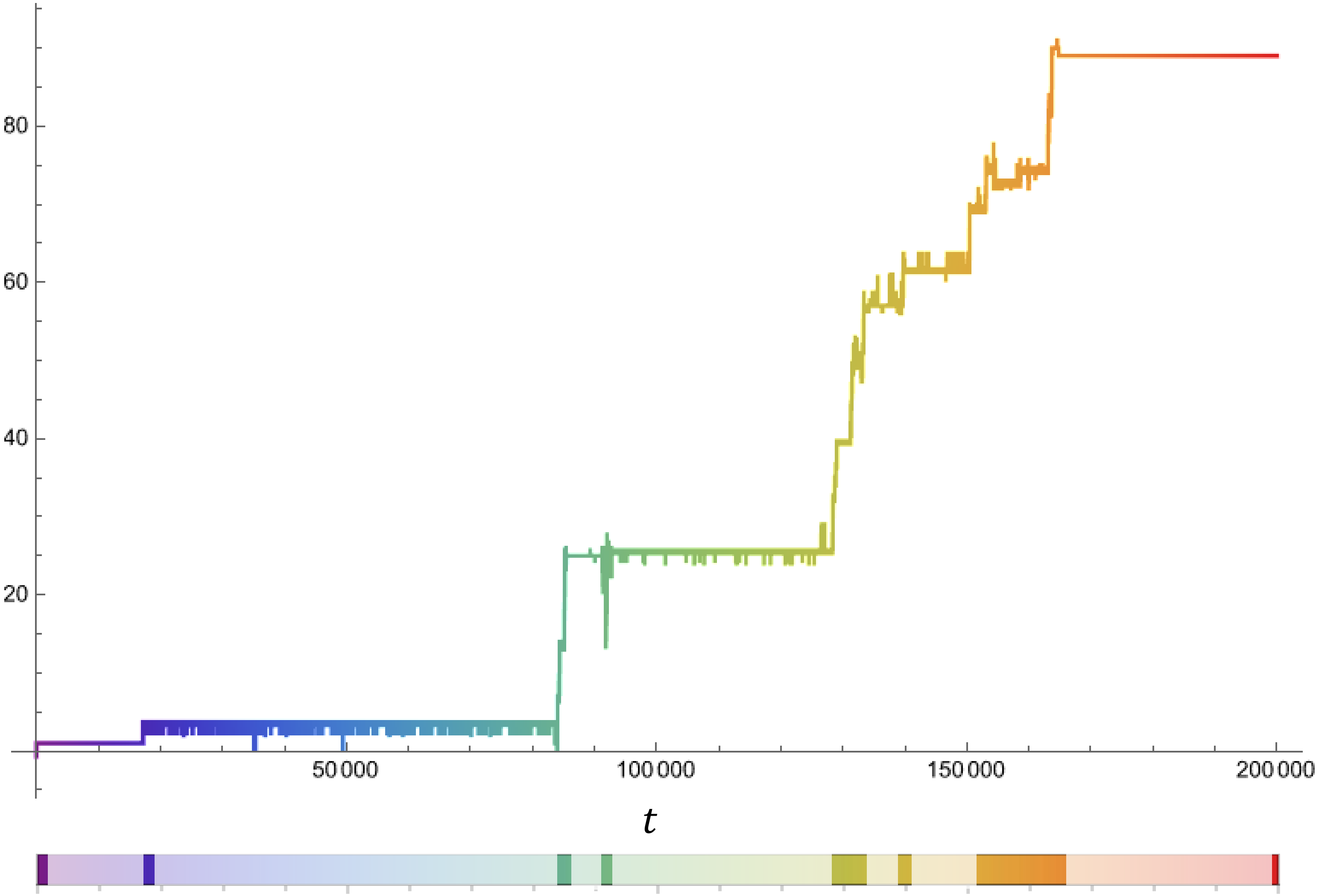
Les grands pièges $\quad (c_*^\omega(e) > 10^5)$



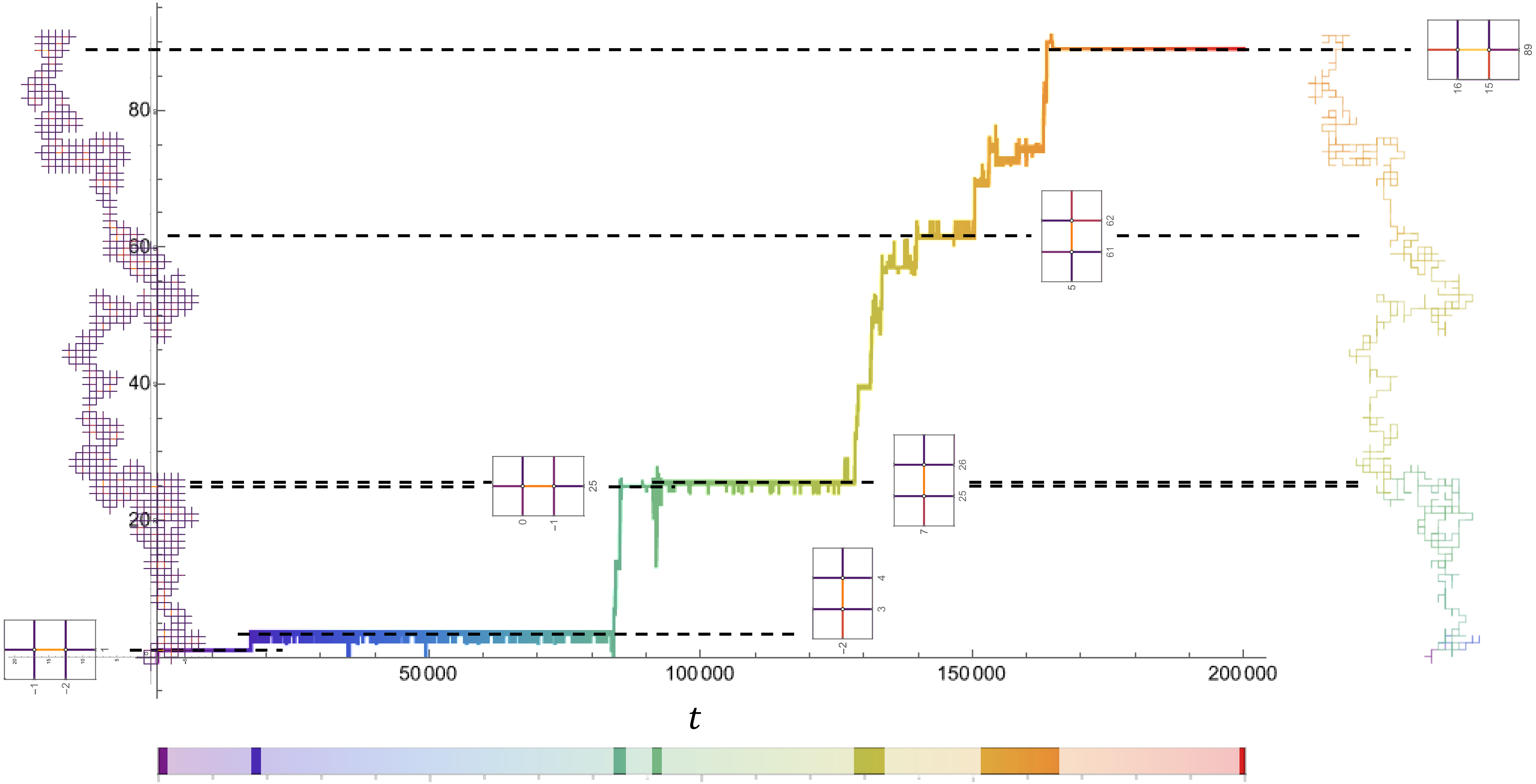
La marche aléatoire

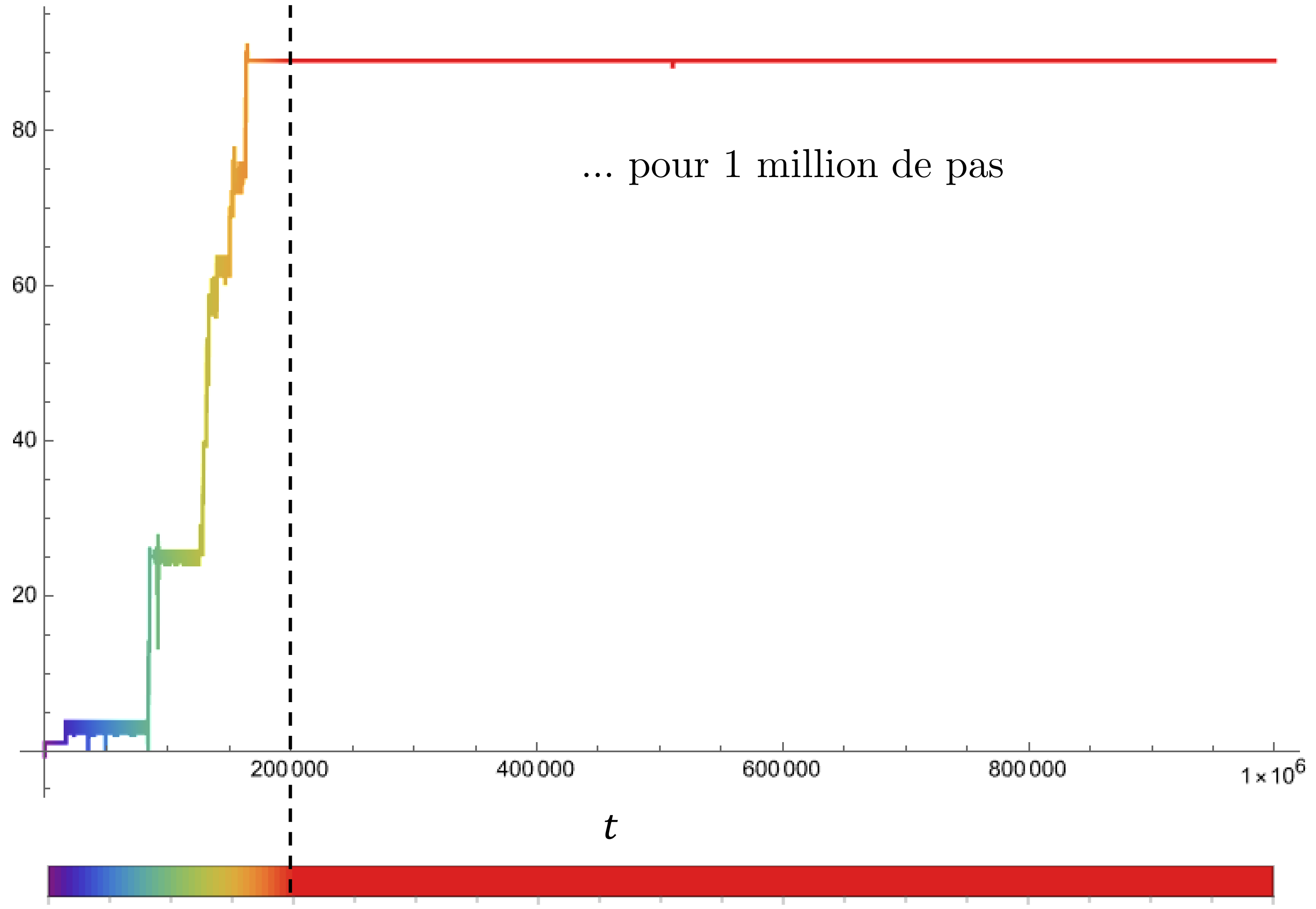


La progression dans le sens du βiais ...



La progression dans le sens du βiais ...




80
60
40
20
200000
400000
600000
800000
1×10^6
... pour 1 million de pas
t