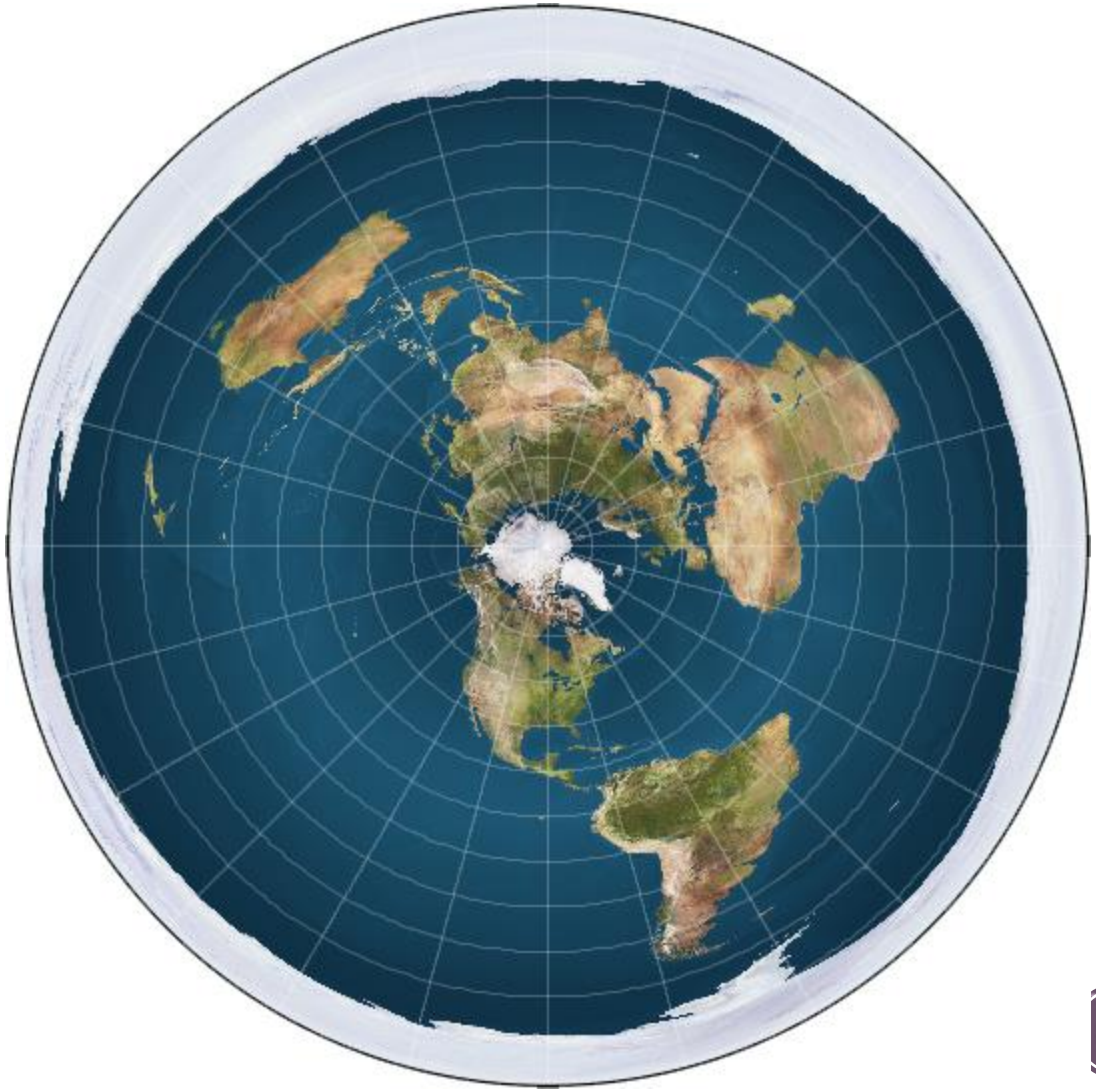
Les mathématiques à vapeur !

Séance 5 – Le spectacle des variétés.

Élise Davignon
elise.davignon@umontreal.ca
https://www.dms.umontreal.ca/~davignon/

Au programme ce soir

- Notions de base
  - Ensembles, réunion, intersection;
  - Fonctions;
  - Exemples;
- Espaces Euclidiens
  - 1, 2, 3, n dimensions;
  - Droites, plans, cercles, sphères.
- Continuité et homéomorphismes
- Géométrie
  - Variétés !
  - Cartes !
  - La Terre est-elle plate ?

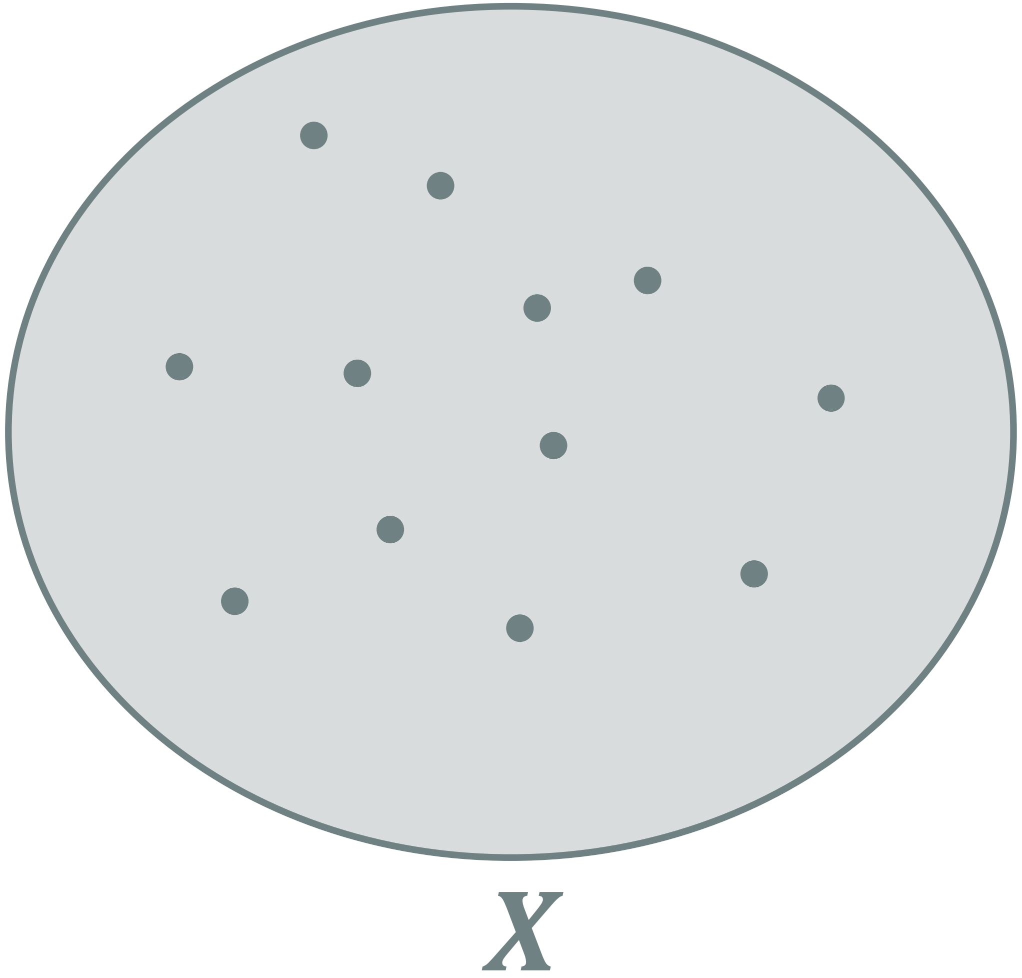


Ensembles et fonctions

Concepts de base : inclusion, réunion, intersection. Fonction, domaine, codomaine, image. Produit cartésien, graphe. Exemples de fonctions.

Définitions

Déf. 1. Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, considérée elle-même comme un objet.*



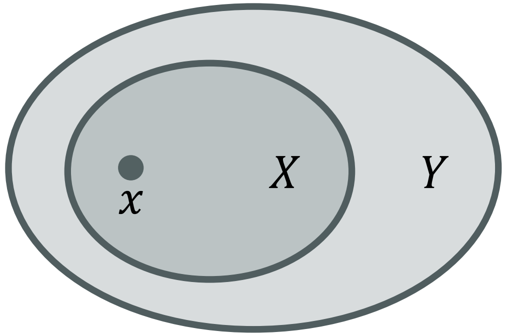
En fait c'est un peu plus compliqué que ça, et ça dépend de la théorie axiomatique des ensembles qu'on choisit… Mais grosso-modo, ça va, là…
Les intéressés peuvent aller lire l'article Wikipédia pour « Théorie des Ensembles »; c'est un bon début.

Notations

On emploie typiquement les majuscules pour désigner des ensembles, et les minuscules pour désigner les éléments des ensembles.

$$x \in X$$

L'objet x est un élément de l'ensemble X

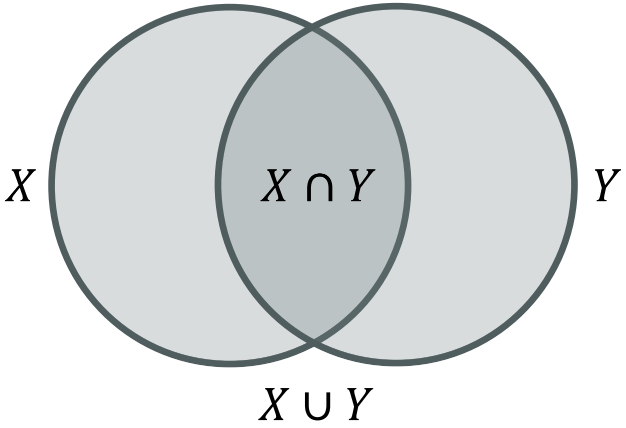


$$X \subseteq Y$$

L'ensemble X est un sous-ensemble de l'ensemble Y.

$$X \cup Y$$

La réunion entre les ensembles X et Y.



$$X \cap Y$$

L'intersection entre les ensembles X et Y.

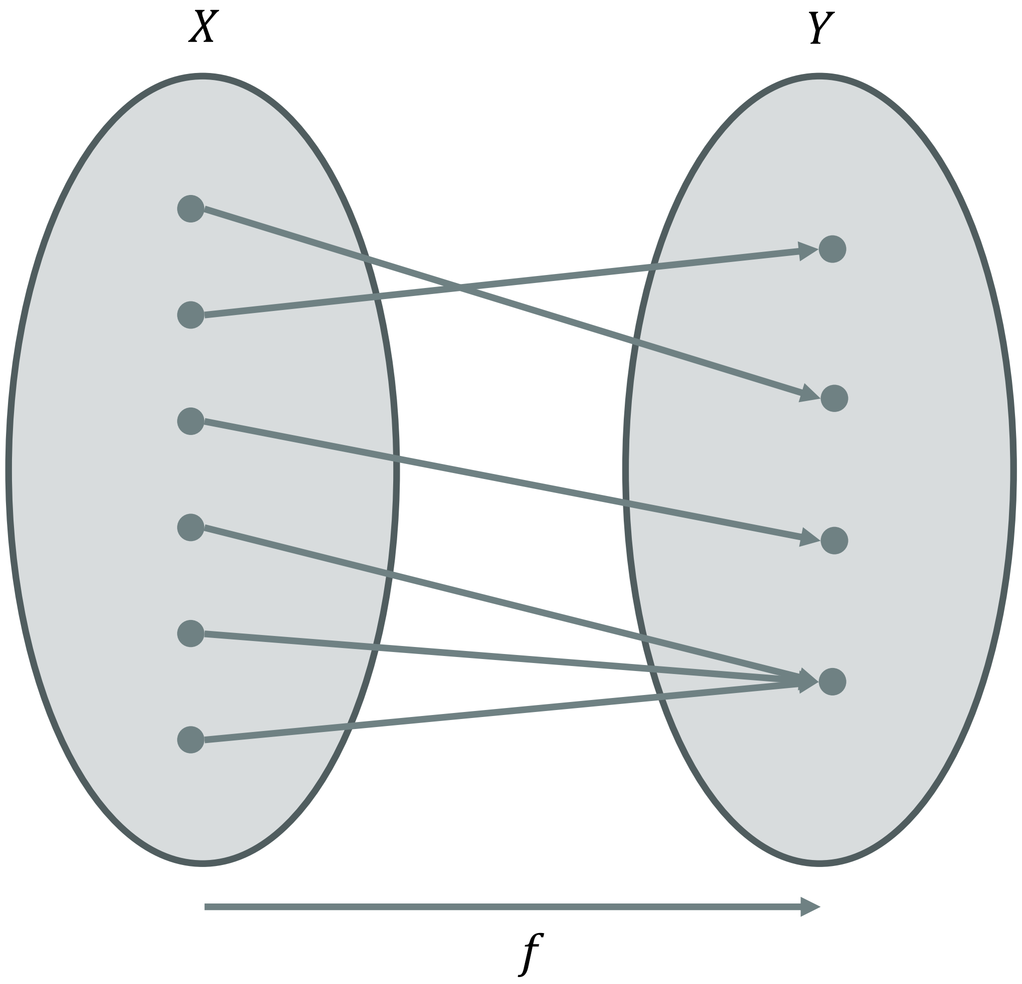
Définitions

Déf. 2. Une **fonction** f de l'ensemble X à l'ensemble Y associe à chaque élément x dans X un unique élément y dans Y

Déf. 3. Et cet élément est appelé **l'image** de x par f.

Déf. 4. X est appelé le **domaine** de f.

Déf. 5. Y est appelé le **codomaine** de f.

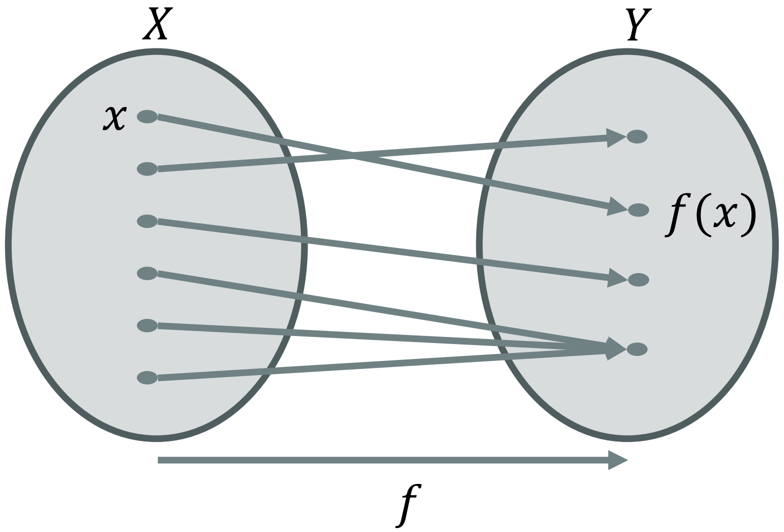


Notations

Typiquement, on utilise f et les lettres subséquentes pour dénoter des fonctions.

$$f : X \to Y$$

La fonction f associe aux éléments de X des éléments de Y.



$$f(x)$$

L'image de x par la fonction f. Si x est une variable, on dit que x est l'**argument** de f

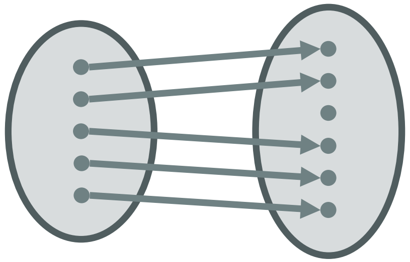
Injections, surjections, bijections

Déf. 6. Une fonction est **injective** si chaque élément du codomaine est l’image d’au plus un élément du domaine.

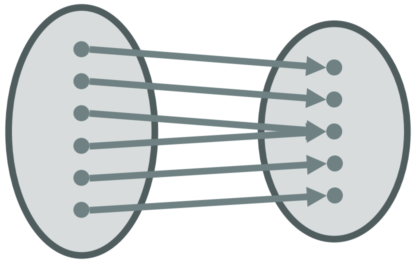
Déf. 7. Une fonction est **surjective** si chaque élément du codomaine est l’image d’au moins un élément du domaine.

Déf. 8. Une fonction est **bijective** si elle est injective et surjective.

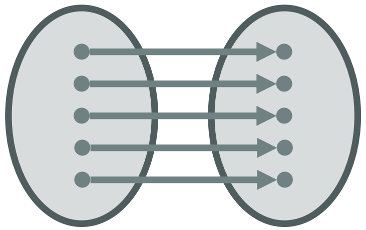
Déf. 9. Une fonction bijective f a une **fonction inverse** (notée f^{-1}), du codomaine vers le domaine, qui associe à l’image de x par f l’élément x.



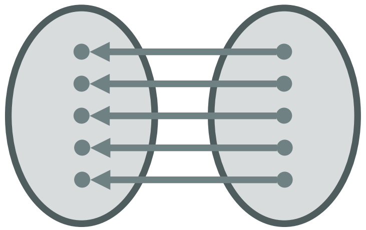
Une fonction injective



Une fonction surjective



Une fonction bijective.



Et son inverse.

Plus concrètement

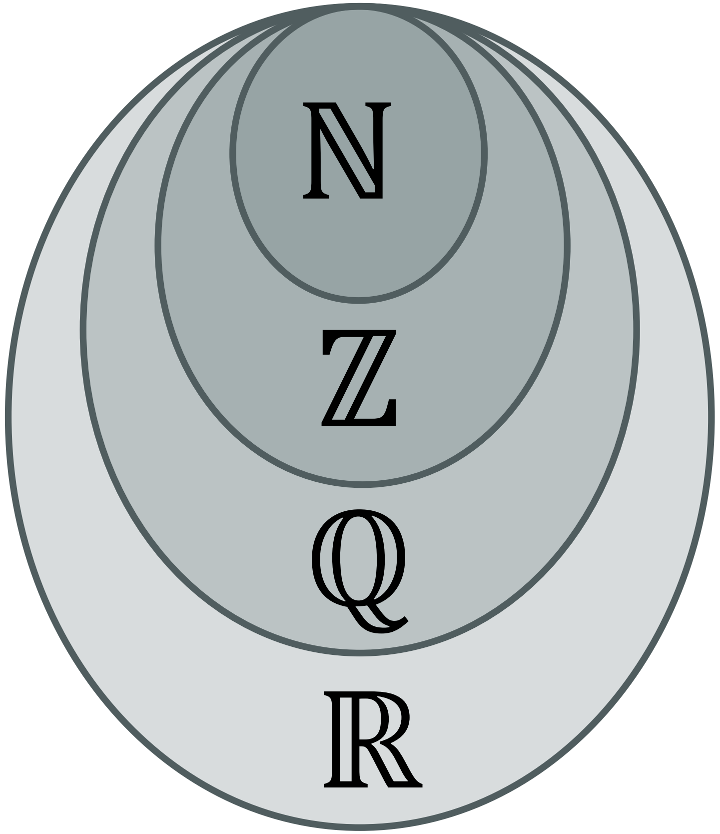
Les ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$

L'ensemble des nombres naturels : 1, 2, 3, …

$\mathbb{Q}$

L'ensemble des fractions (ratios de nombres entiers).



$\mathbb{Z}$

L'ensemble des nombres entiers (y compris les nombres négatifs).

$\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels.

Exemple de fonctions

Voici quelques exemples de fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que…

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = 4x + 3$$

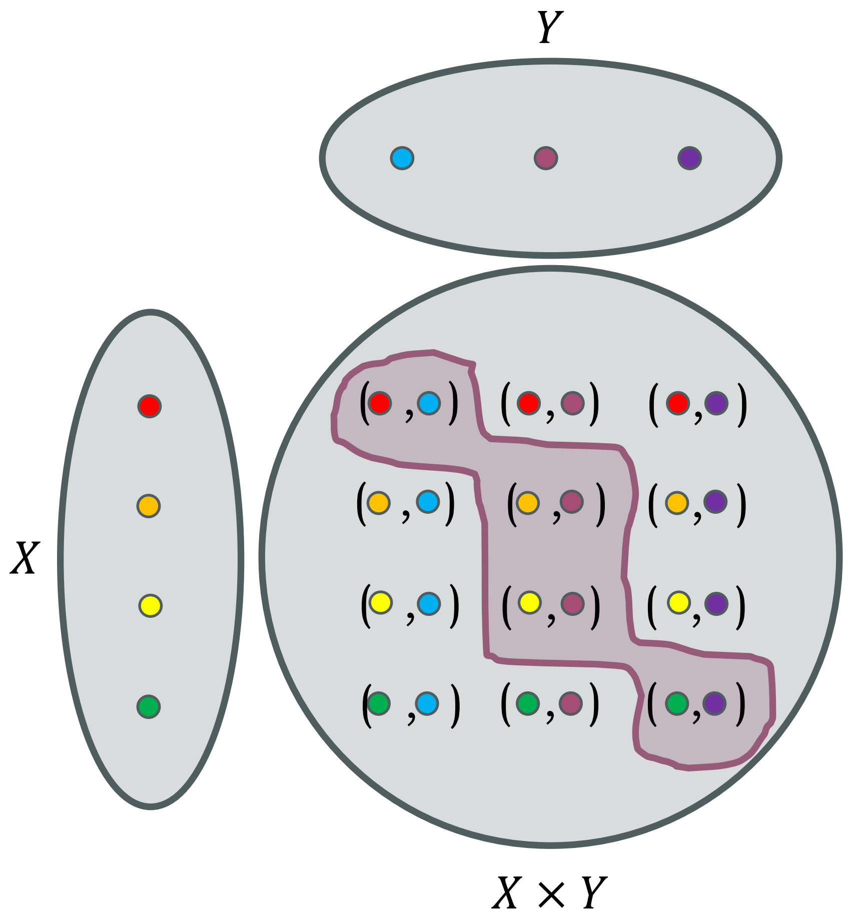
$$f(x) = a\sin\left(\frac{x-h}{b}\right) + k$$

…

Des fonctions plus… exotiques…

- La fonction qui associe à chaque point sur Terre la température qu'il fait à cet endroit.
- La fonction qui associe à chaque point sur Terre la force et la direction du vent à cet endroit.
- La fonction qui associe à chaque personne sa taille en centimètres.
- La fonction qui associe à chaque personne sa masse en kilogrammes.
- La fonction qui associe à chaque personne sa mère biologique.
- La fonction qui associe à chaque personne sa position sur Terre (ou dans l'espace).
- La fonction qui associe à chaque équipe de la LNH la probabilité qu'elle gagne la coupe cette année,
- Etc.

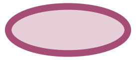
Produit d'ensembles et graphe d'une fonction.



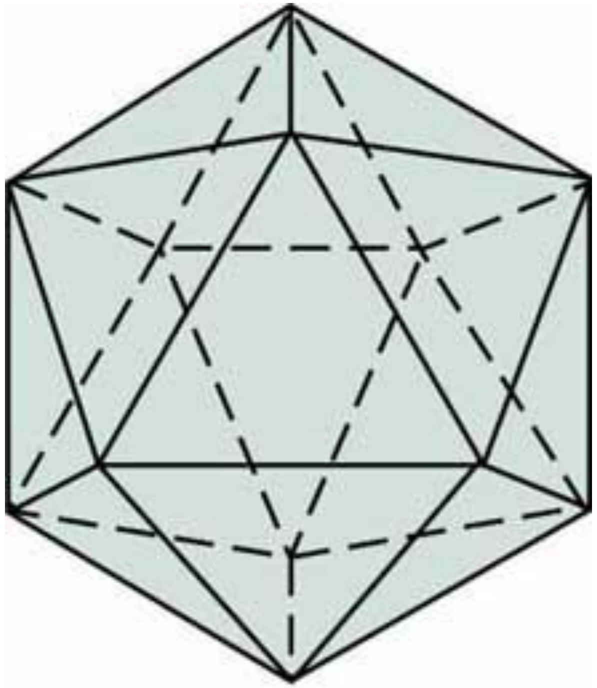
Déf. 10. Le **produit des ensembles** X et Y (noté $X \times Y$) est l'ensemble des paires (x, y) où x est élément de X et y est élément de Y.

Déf. 11. Le **graphe de la fonction** $f : X \to Y$ est l'ensemble des paires $(x, f(x))$. C'est un sous-ensemble de $X \times Y$.

La fonction $f: X \to Y$ définie par

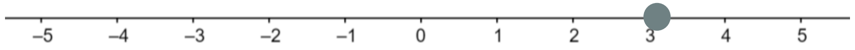
a le graphe 

Les espaces Euclidiens



La géométrie en terme d'ensembles et de fonctions.
Ligne réel, plan, espace cartésien. Espace à n dimensions.
Distance. Droites, plans, cercles et sphères.

La ligne réelle



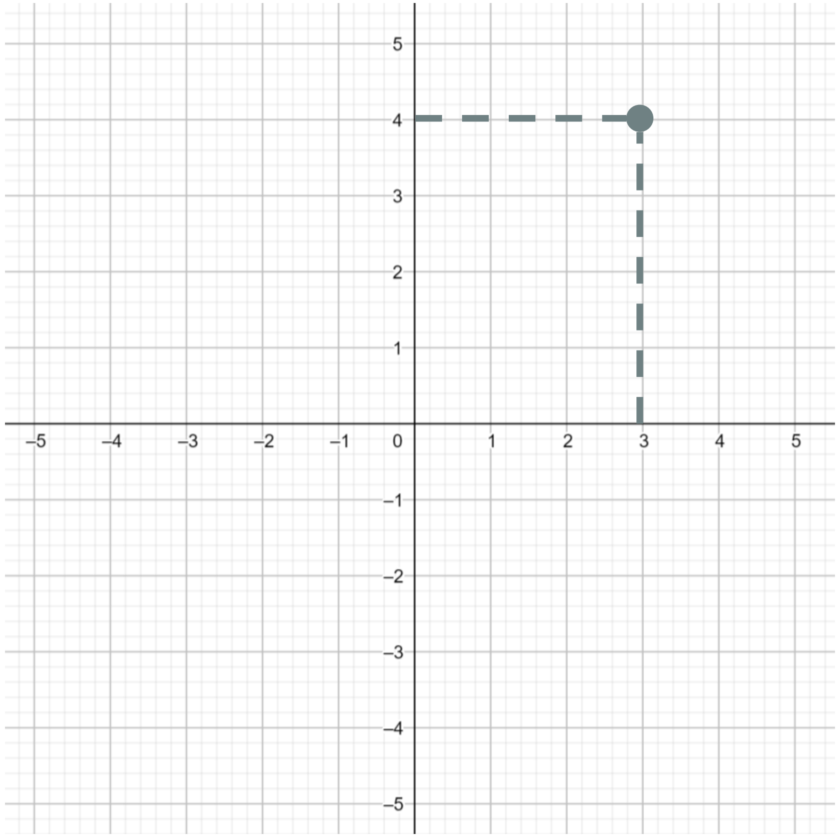
Représentation du nombre π sur la droite réelle.

On peut voir les nombres réels comme des points sur un axe appelé la droite (ou la ligne) réelle.

C’est l’espace à une dimension :

$$\mathbb{R}$$

Le plan cartésien



Le point (3; 4)

On peut voir le plan cartésien comme l'ensemble des couples de nombres réels.

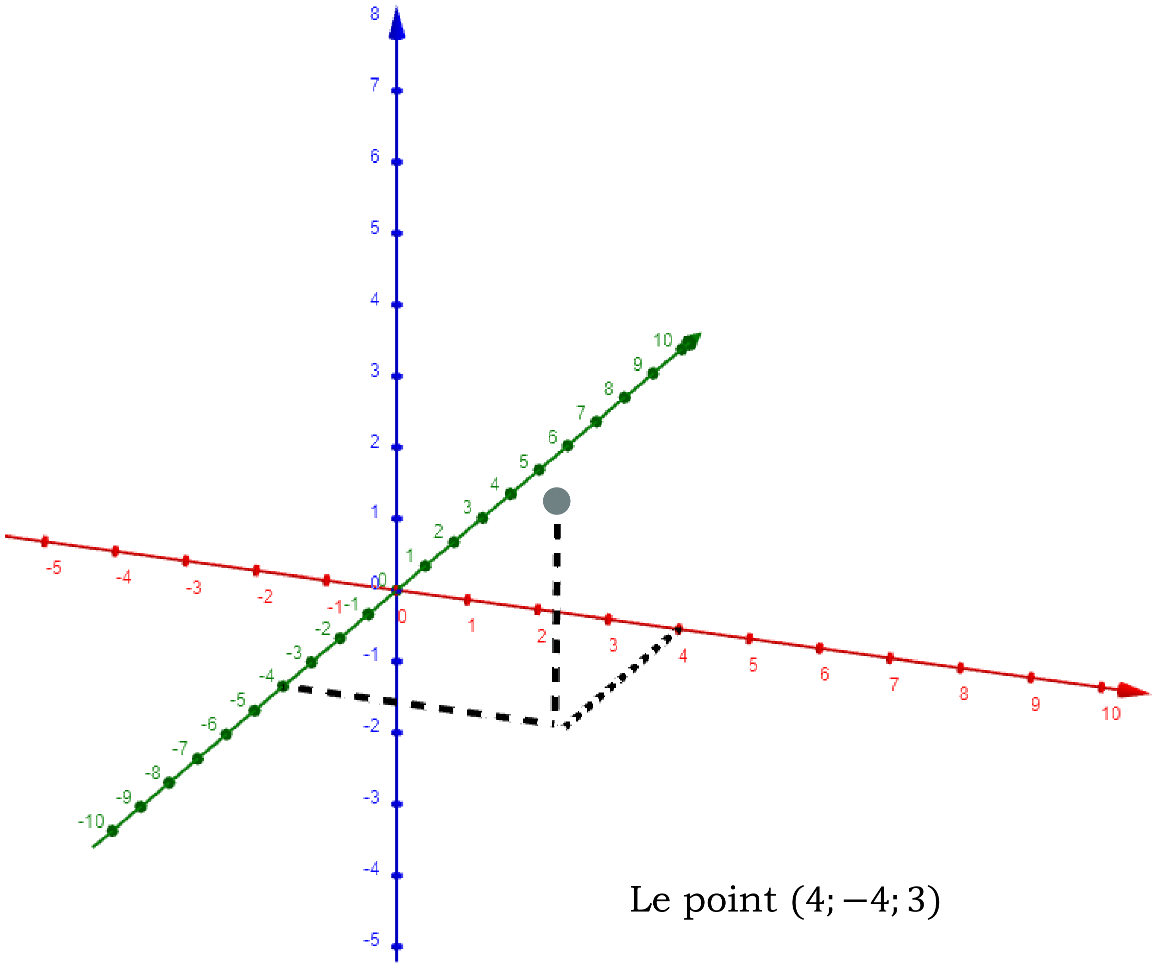
Par convention, la première coordonnée nous donne **l'abscisse** (projection sur l'axe horizontal)

La seconde coordonnée nous donne **l'ordonnée** (projection sur l'axe vertical).

Le plan cartésien est un ensemble dont la structure représente l'espace à deux dimensions (le plan). On note cet espace

$$\mathbb{R}^2$$

L’espace cartésien



Le point $(4; -4; 3)$

De façon analogue, on peut voir l’espace cartésien comme l’ensemble des triplets de nombres réels.

C’est ce qu’on appelle l’espace cartésien, et c’est une représentation de l’espace à trois dimension comme un ensemble.

On note cet ensemble…

$$\mathbb{R}^3$$

L'espace à n dimensions.

Technique de visualisation pour les espaces à hautes dimensions. Résultats non-garantis. Consommez responsablement.

Pourquoi s'arrêter à trois ?

On peut considérer l'ensemble des « n-tuples » de nombres réels,

$$(x_1; x_2; x_3; \cdots; x_n)$$

Cet ensemble est un **espace euclidien à <u>n dimensions</u>** !

Malheureusement, rendus là, ce n'est plus possible de le représenter graphiquement, parce que nous vivons dans un espace en 3D seulement… En tout cas, c'est ce qu'on perçoit.

On note cet espace

$$\mathbb{R}^n$$

Les opérations sur l'espace Euclidien à n dimensions.

On a des points qui sont des « listes de nombres ». On peut définir des opérations dessus.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux points dans l'espace à n dimensions, et si a est un nombre réel :

$$ax = (ax_1, \dots, ax_n)$$

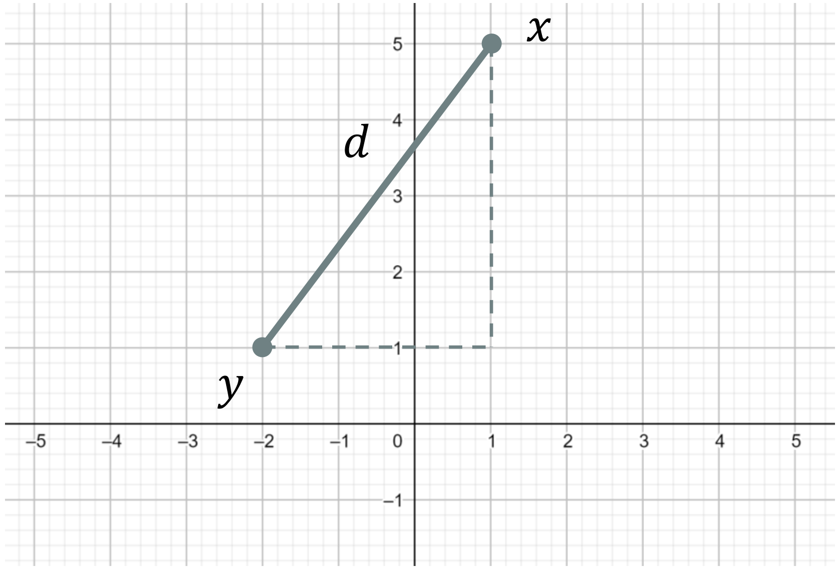
On peut « multiplier » un point de l'espace par un nombre: il suffit de multiplier une à une toutes les coordonnées.

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_1)$$

On peut « additionner » deux points de l'espace: il suffit d'additionner une à une toutes les coordonnées.

Pour nos besoins, on considérera ces opérations comme des « raccourcis de notation ». En vrai, ce sont des définitions très pratiques qui transforment l'espace Euclidien en un **espace vectoriel**. Ces espaces sont le sujet d'étude de l'algèbre linéaire.

Distance entre deux points

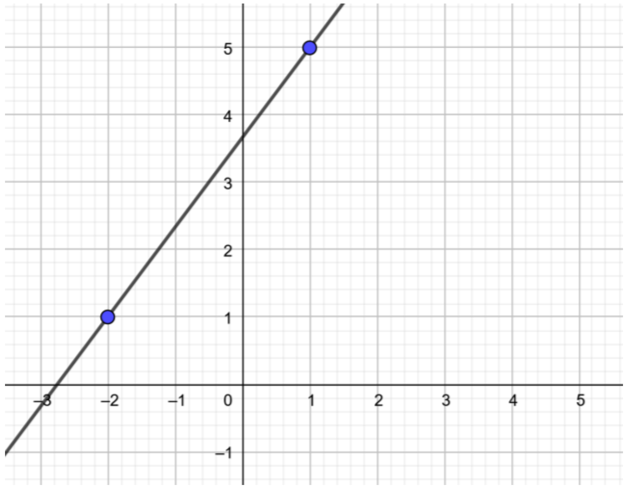


Dans l'espace à n dimensions, la distance entre les points x = $(x_1; \ldots; x_n)$ et y = $(y_1; \ldots; y_n)$ est donnée par la formule

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ceci provient directement du théorème de Pythagore, car les axes sont à angles droits les uns aux autres.

Droites



Dans l'espace à n dimensions, on peut voir une droite comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Si $x = (x_1; \dots; x_n)$ et $y = (y_1; \dots; y_n)$ sont deux points, on écrit la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Décrite par

$$f(s) = (s\,x_1 + (1-s)y_1; \dots; s\,x_n + (1-s)y_n)$$

On peut aussi abréger cette notation en $f(s) = s\,x + (1-s)\,y$

L'ensemble des points sur la droite sont les images de la ligne réelle par la fonction f.

Plans

De façon analogue, un plan dans l'espace à n dimension est le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, le plan qui passe par les points x, y, z est l'image du plan cartésien par la fonction

$$f(s,t) = (1 - s - t)x + sy + tz$$

Pour résumer, les droites sont des images de la droite réelle $\mathbb{R}$, et les plans sont des images du plan cartésien $\mathbb{R}^2$ par des <u>fonctions « linéaires ».</u>

Cercles, sphères, etc.

Un cercle de centre (x, y) et de rayon r peut être vu comme le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

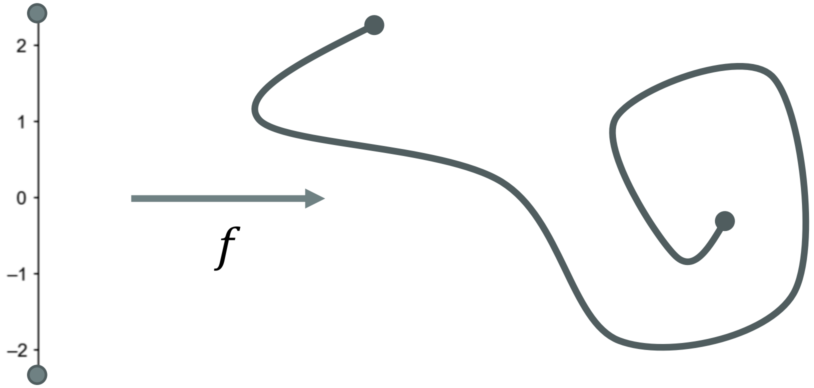
$$f(\theta) = (x + r\cos\theta\,, y + \mathrm{r}\sin\theta)$$

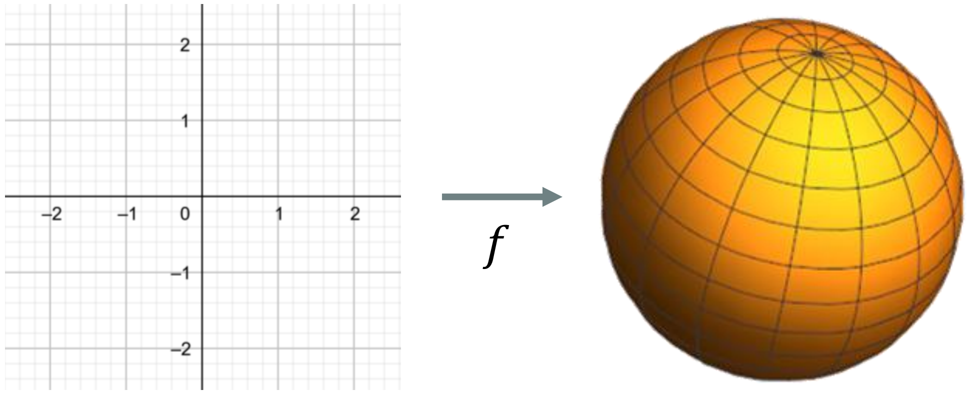
Et une sphère de centre (x, y, z) et de rayon R peut être vue comme le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\theta, \phi) = (x, y, z) + (R\sin\theta\cos\phi\,, R\sin\theta\sin\phi\,, R\cos\theta)$$

Ainsi, on peut décrire toutes les figures euclidiennes comme des images de la ligne et du plan par des fonctions.

Lignes, surfaces…





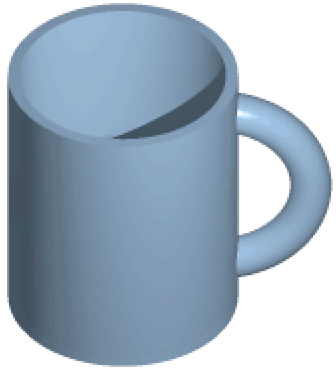
Souvenez-vous des définitions louches d'Euclide pour les lignes, les surfaces et les solides.

Avec nos nouveaux outils, ces définitions sont plus faciles :

Une ligne est l'image (d'une portion) de $\mathbb{R}$ par une fonction injective continue.

Une surface est l'image (d'une portion) de $\mathbb{R}^2$ par une fonction injective continue.

Continuité et topologie



Un aparté sur la notion de continuité.

Des problèmes

On peut construire des fonctions assez… vilaines…

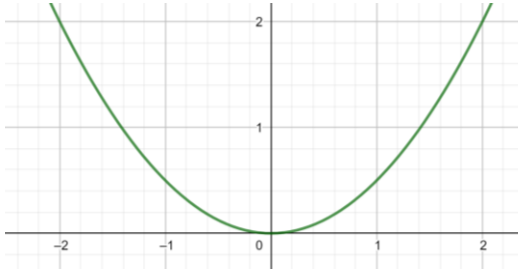
$$f(x) = \begin{cases} 1 \ (x \in \ \mathbb{Q}) \\ 0 \ (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

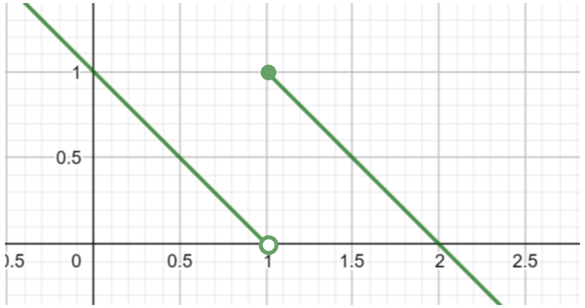
Cette fonction est appelée « indicatrice » des rationnels, car elle « indique » quels nombres sont rationnels.

La continuité

Intuitivement, on dit qu'une fonction est **continue** autour d'un point lorsqu'une « *petite variation* » de son argument produit une « *petite variation* » de l'image correspondante.

La fonction représentée par le graphe ici est continue





Cette fonction est discontinue en x=1, car une petite variation produit un saut toujours aussi grand.

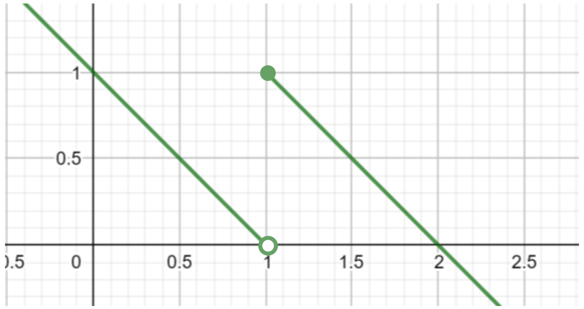
La continuité

Formellement, si $f: X \to Y$ est une fonction,

f est **continue** en $x \in X$ si et seulement si

pour toute suite $x_1, x_2, x_3, \dots$ d'éléments de X qui s'approchent arbitrairement près* du point x,

la suite $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ s'approche de arbitrairement près* de $f(x) \in Y$.



Ici en 1, la fonction vaut 1. Mais pour toutes les valeurs inférieures à 1, la fonction tend vers 0. Donc, la fonction est discontinue en 1.

*Il faut une notion bien claire de ce que c'est que de « s'approcher arbitrairement près de ». Si on l'a, c'est correct.

Pourquoi c’est important pour nous ?

Intuitivement, un ensemble est l’image d’un autre par une fonction continue « si on peut le déformer, l’étirer, le plier, le ‘remodeler’, etc. », mais

sans le « découper, le re-coudre, le ‘percer’, etc. ».

En 1D, c’est comme jouer avec un élastique.
En 2D, c’est comme jouer avec un morceau de pellicule moulante.
En 3D, c’est comme jouer avec de la plasticine.

Homéomorphismes

Une fonction $f: X \to Y$ continue et bijective dont l'inverse est aussi continue est appelée un **homéomorphisme**.

Si il existe au moins un homéomorphisme entre X et Y, les ensembles X et Y sont dits **homéomorphes**.

Cela signifie qu'ils ont exactement la même « structure topologique ».

La tasse et le beigne sont homéomorphes.

Et pourquoi on s'intéresse à tout ça

?

Les variétés

Espaces géométriques courbes.

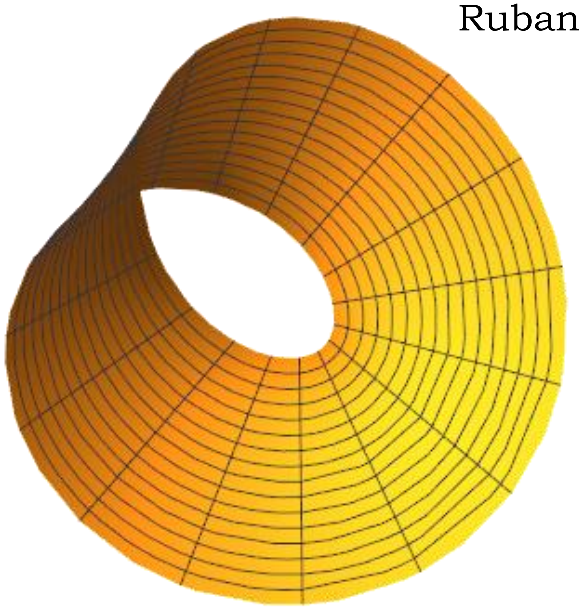
Motivation

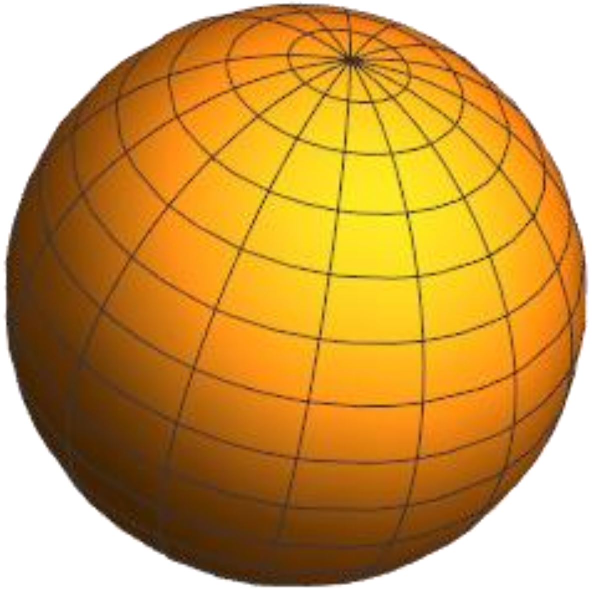
Jusqu'ici, on sait bien gérer les objets plats, les lignes droites, etc.

Les polygones n'ont plus de secrets pour nous.

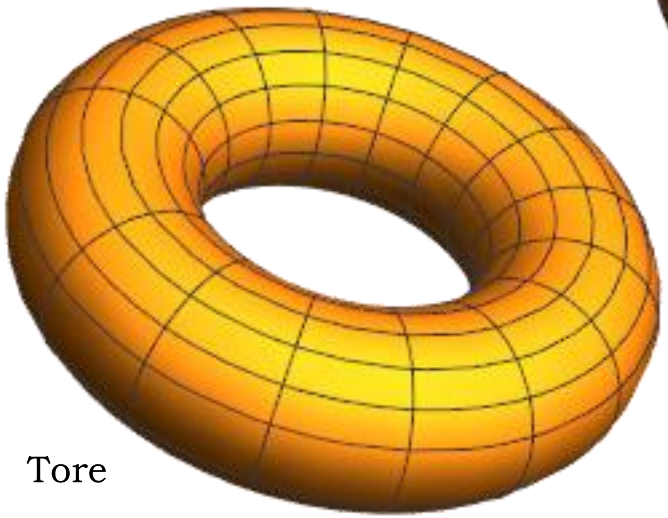
Qu'en est-il des objets courbes ?

Ruban de Moebius





Sphère



Tore

Variété

Une **variété de dimension n** est un espace qu'on peut recouvrir par des ensembles homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.

Les lignes sont des variétés de dimension 1.
Les surfaces sont des variétés de dimension 2.

C'est un peu comme du papier-mâché !
On a recouvert cette sphère avec des petits bouts de papier-journal – homéomorphes au plan !

Variété

Autrement dit, si X est notre variété, on a un certain nombre N d'ensembles $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ et des homéomorphismes associés $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_N$.

avec

$$f_i \colon X_i \to \mathbb{R}^n$$

un homéomorphisme pour chaque i.

Ces f_i sont appelés des **cartes** et ensemble elles forment un **Atlas**.

C'est important que les domaines des cartes se chevauchent pour que la variété soit bien décrite, et il faut que les changements de carte soient homéomorphes aussi.

Atlas, cartes, variété

L’analogie est absolument parfaite !

Un atlas contient des cartes qui sont les images de portions du globe sur des petits bouts de plan par des transformations continues.

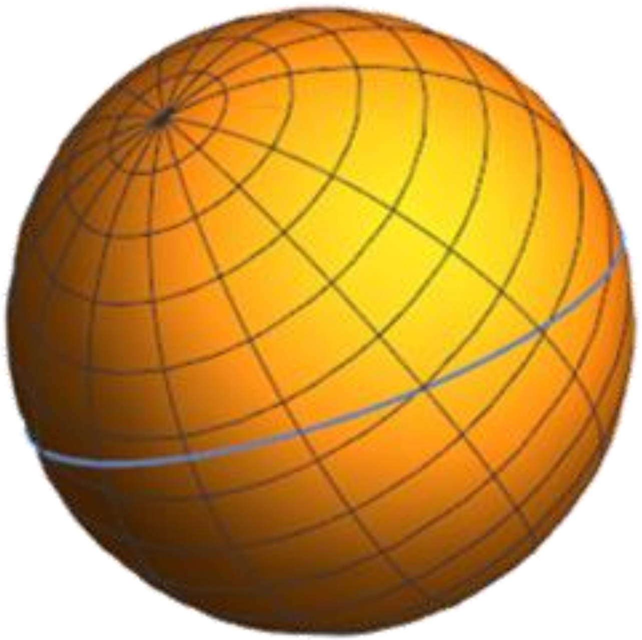
La Terre est une variété de dimension 2 !

Géodésiques

Sur une variété, la **géodésique** passant par un point dans une direction donnée est la courbe qui « semble aller tout droit ».

Si on s'imagine être « une fourmi qui marche sur la surface », et que l'on marche « droit devant », on suivra la géodésique.

Sur une sphère, les géodésiques sont des « équateurs »



Distance

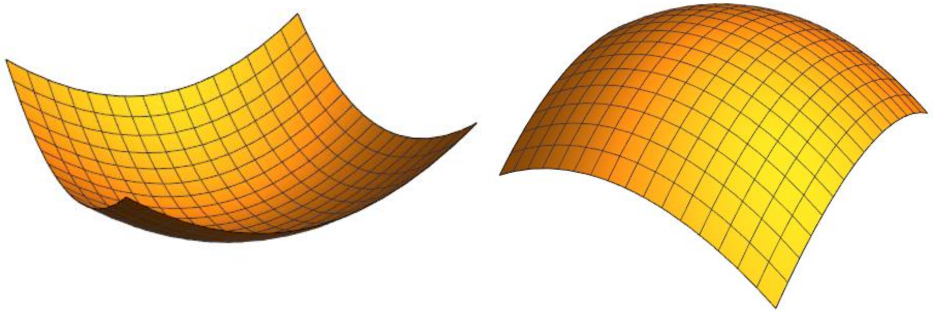
La **distance** entre deux points sur une variété est donnée par le plus grand nombre positif inférieur à la longueur de tous les chemins possibles qui relient les deux points.

Cela correspond à la longueur des deux points si il existe un chemin le plus court. Dans ce cas, ce chemin est une géodésique.

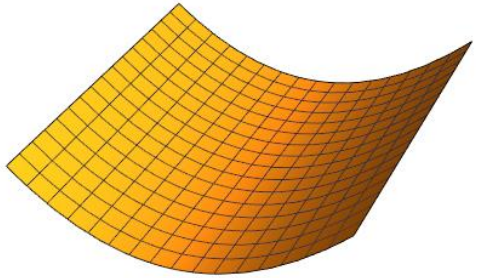
Courbure

La **courbure gaussienne** est une « mesure de la déformation des distances » sur une variété.

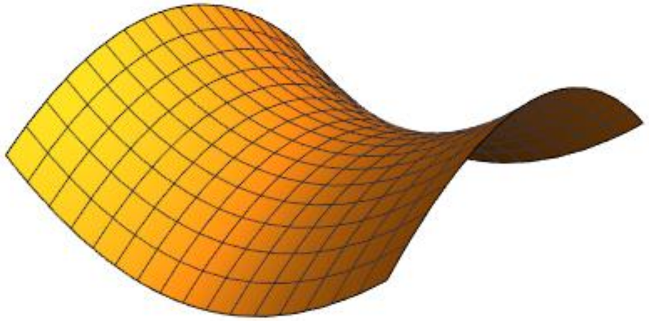
À un point quelconque, on distingue trois différents types de courbures, selon que la courbure Gaussienne est positive, nulle ou négative.



$\kappa > 0$



$\kappa = 0$



$\kappa < 0$

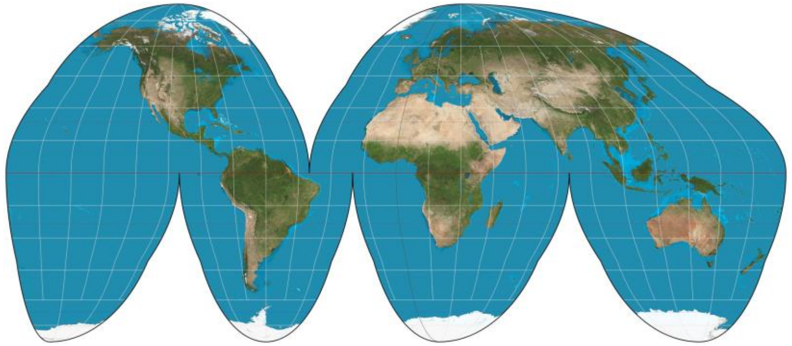
Est-ce que la Terre est plate ?

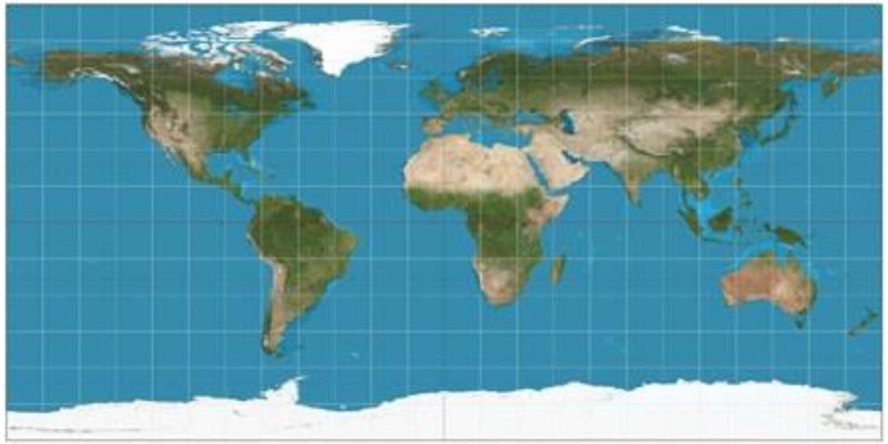
Isométries !

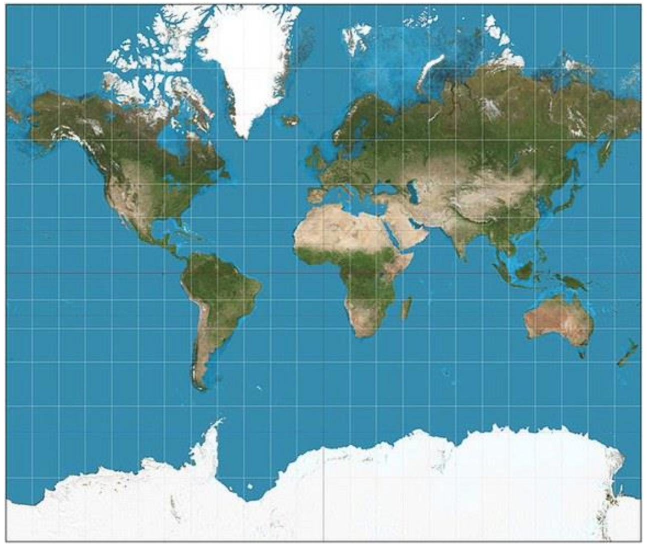
C'est pas une question si conne.

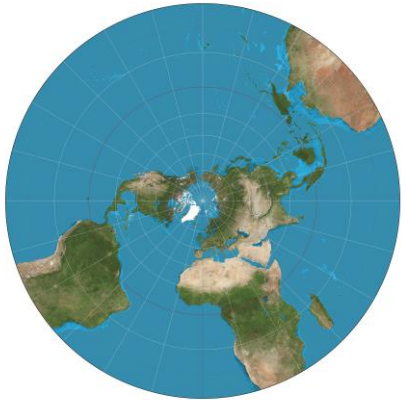
Il existe plusieurs types de projections différentes sur un plan.

D'entre elles plusieurs sont des homéomorphismes (presque).





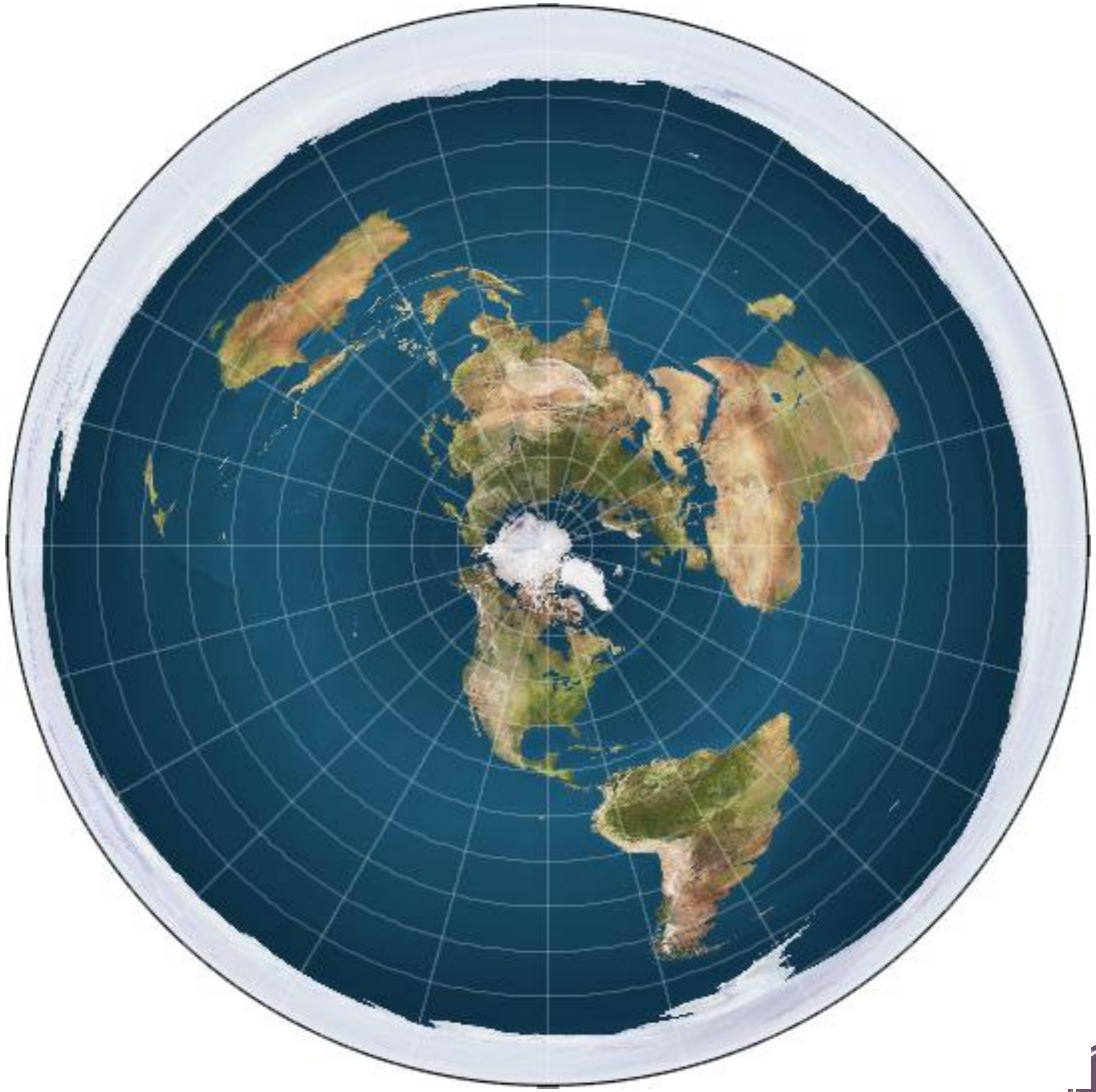




Question

Quand on demande si la Terre est plate, ce qu'on demande, en fait, c'est :

Est-ce qu'il existe un homéomorphisme entre une partie de la sphère et une partie du plan, et qui préserve les distances (isométrie) ?



Autre question

Est-ce que ça, c'est plat ?

Réponse :

Oui, en fait…

Ça n’en a pas l’air, mais il existe une isométrie entre ce tore tout plissé et…

http://hevea-project.fr/

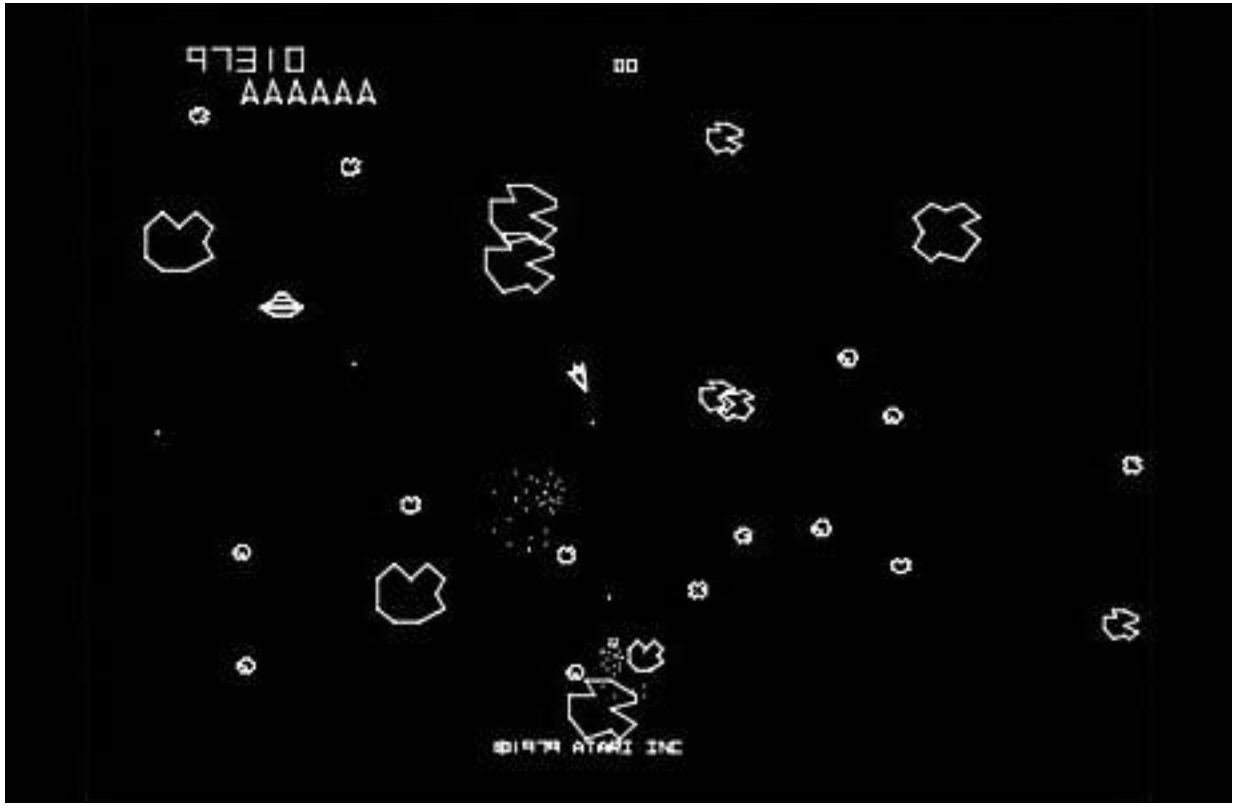
Le tore plat

Le jeu vidéo « Asteroids » (1979)!

On contrôle un vaisseau spatial dans un espace Euclidien de dimension 2, plat.

Sauf que…

L'espace se replie sur lui-même : lorsqu'on traverse le haut de l'écran, on se retrouve en bas, et vice versa, et pareil pour la gauche et la droite !



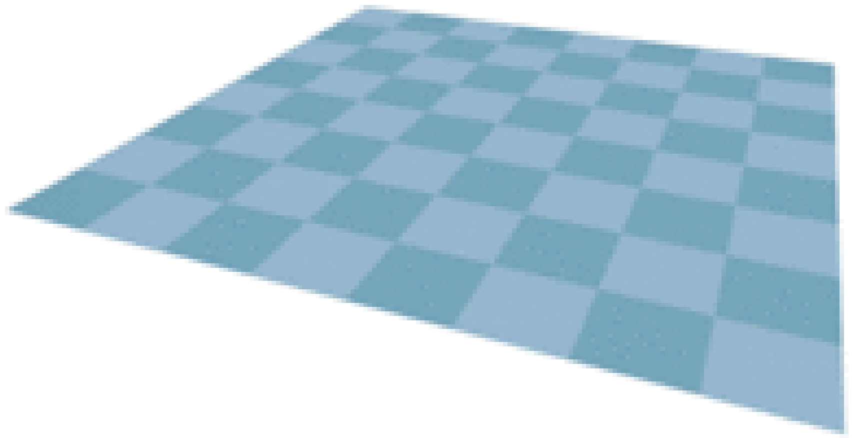
En fait, on a fait le travail à l'envers. On a construit le tore tout plissé explicitement pour qu'il soit « plat ». On savait qu'il existait depuis les années 50, mais on a finalement trouvé comment faire seulement en 2012 !

Le tore plat

Une telle variété est appelée un tore plat.

En effet, il est possible de recouvrir l'ensemble des points par des cartes qui sont simplement des isométries du plan !

Mais la variété est aussi homéomorphe au tore !



Et la Terre plate alors ?

Sur la sphère, la courbure gaussienne est constante partout, et elle est non-nulle.

Un théorème de la géométrie différentielle nous dit qu’un homéomorphisme entre deux variétés est une isométrie si et seulement si la courbure gaussienne est égale partout.

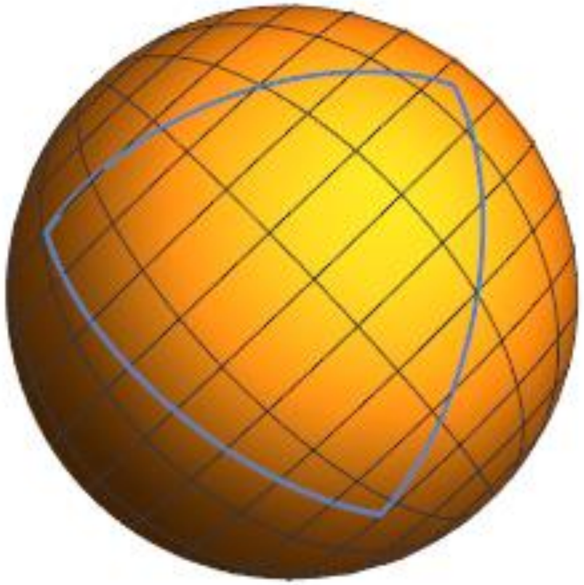
Il ne peut donc pas exister d’isométrie entre une partie d’une sphère et une partie d’un plan.

C’est pour cette raison qu’on ne peut jamais complètement aplatir une pelure d’orange sans la déchirer en petits morceaux.

Vérifier la courbure.

Théorème :

Sur une variété quelconque, la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits plus la courbure gaussienne totale contenue par le triangle.



Ce théorème permet de vérifier si la courbure est nulle très facilement ! Juste à faire un triangle et à vérifier la somme des angles intérieurs !

Questions ?
Discussions ?
Commentaires ?

Merci de votre attention !

Merci à Étienne Lepage et l’équipe de l’Upop.