

Aux origines des
mathématiques

Les éléments



Présentation par Élise Davignon
UTA050 – À la pointe du savoir
6 février 2020

«O mon roi en ce pays il y a des routes privées et des chemins royaux, mais en géométrie, il n'y a qu'une voie pour tous.»

Ménechme, à Alexandre le Grand.

Proclus attribue une citation similaire à Euclide d'Alexandrie

plan de la présentation



chapitre I : la genèse des mathématiques

- en Amérique
- en Asie
- dans le bassin méditerranéen et en Europe
- en Grèce

chapitre II : les Éléments géométriques

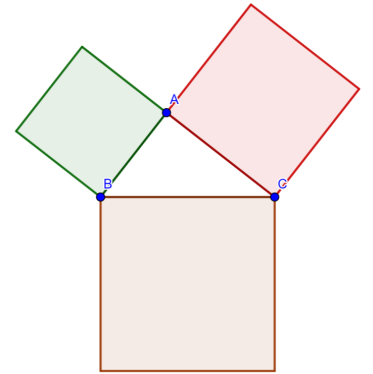
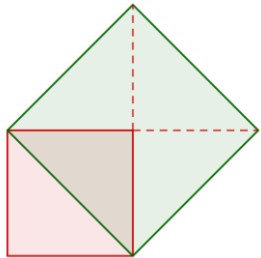
- Livre I : définitions, propositions
- Livres II à IV

chapitre III : les nombres et les ratios

- Livres V à X

chapitre IV : au-delà

- Livres X à XIII
- Résonnances modernes



Chapitre I : la genèse des mathématiques

Un bref tour du monde (lacunaire) de l'histoire des mathématiques primitives.

Avis : l'histoire n'est pas ma discipline de prédilection. Il se peut que des erreurs subsistent.

-3000 -2000 -1000 -500 0 500 1000 2000

Civilisations d'amérique centrale

Olmèques

Teotihuacan, Maya

Aztèques

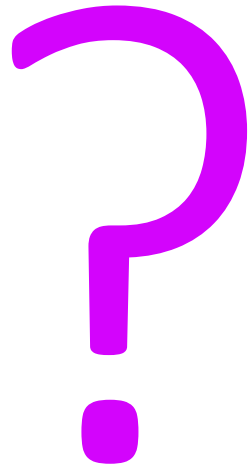
Géométrie solide

Calendrier précis

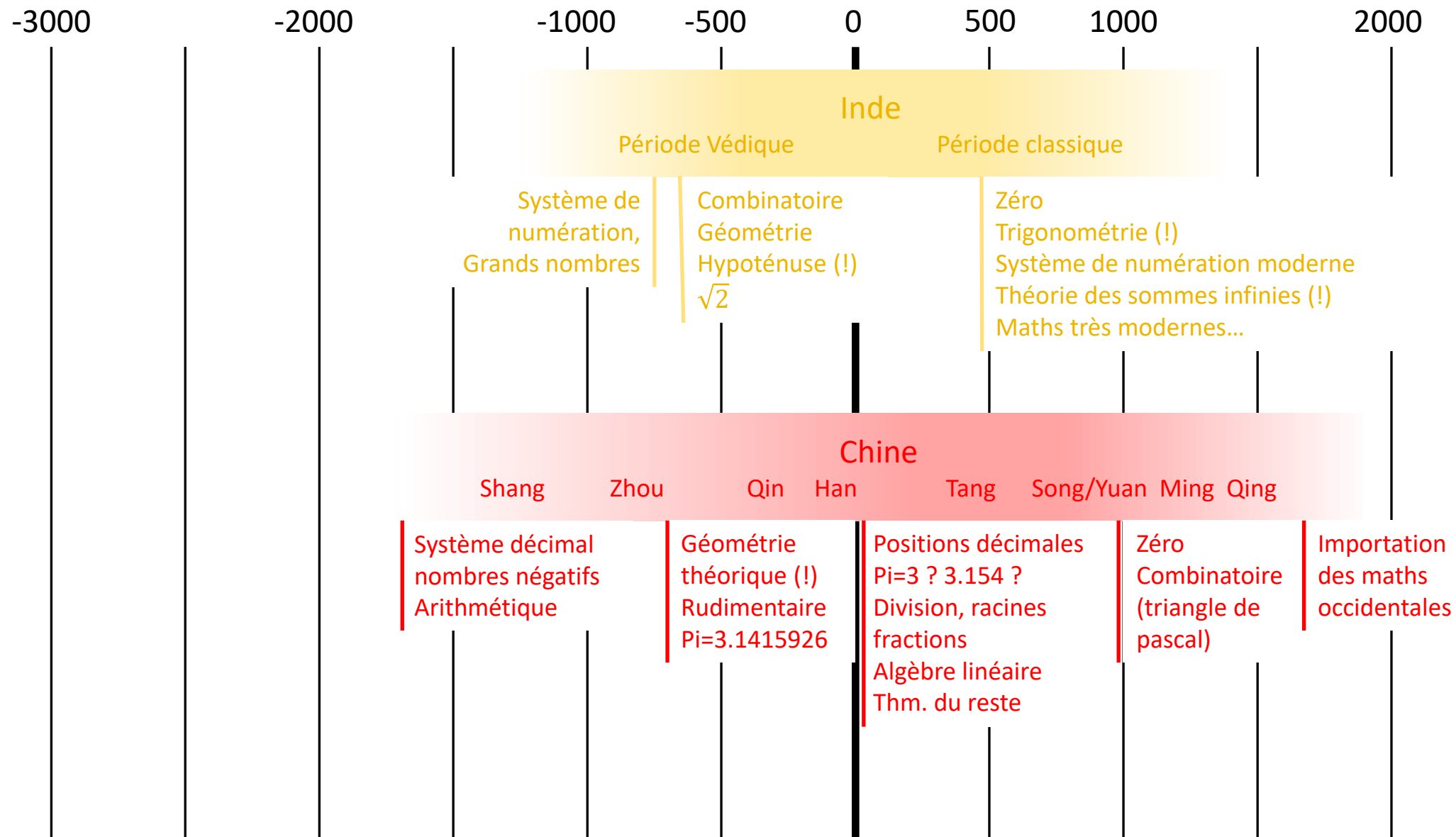
Système de numération vicésimal

Zéro !

Amérique



Les Européens n'ont pas fait attention de préserver les traces et c'est très dur de savoir de quoi ça avait l'air...



Asie

Les mathématiques en Inde

-800 à -200 : **Śulba-Sūtras**

règles pour la construction d'autels

Certaines connaissances géométriques
(Pythagore, par exemple)

Ile siècle av. J.C. : Pingala

Mathématicien qui découvre des notions d'analyse
combinatoire.

De 400 à 1600 : Période classique

Développement de la trigonométrie

Développement du système de numération moderne

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

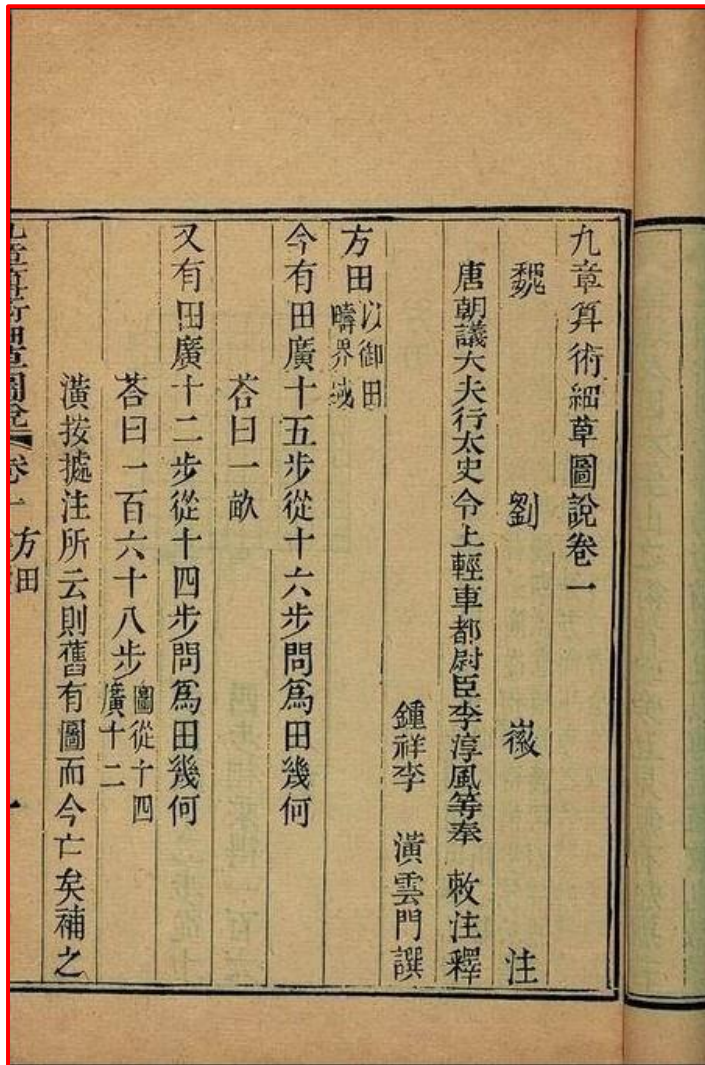
Début de calcul différentiel !



Manuscript Bakhshali

III-IVe siècles, Pakistan

Première apparition connue du zéro en Inde



Les mathématiques en Chine

Ca. -200 : Le tyran Qin ordonne de brûler plusieurs livres
On ne sait donc pas grand-chose des maths avant ça.

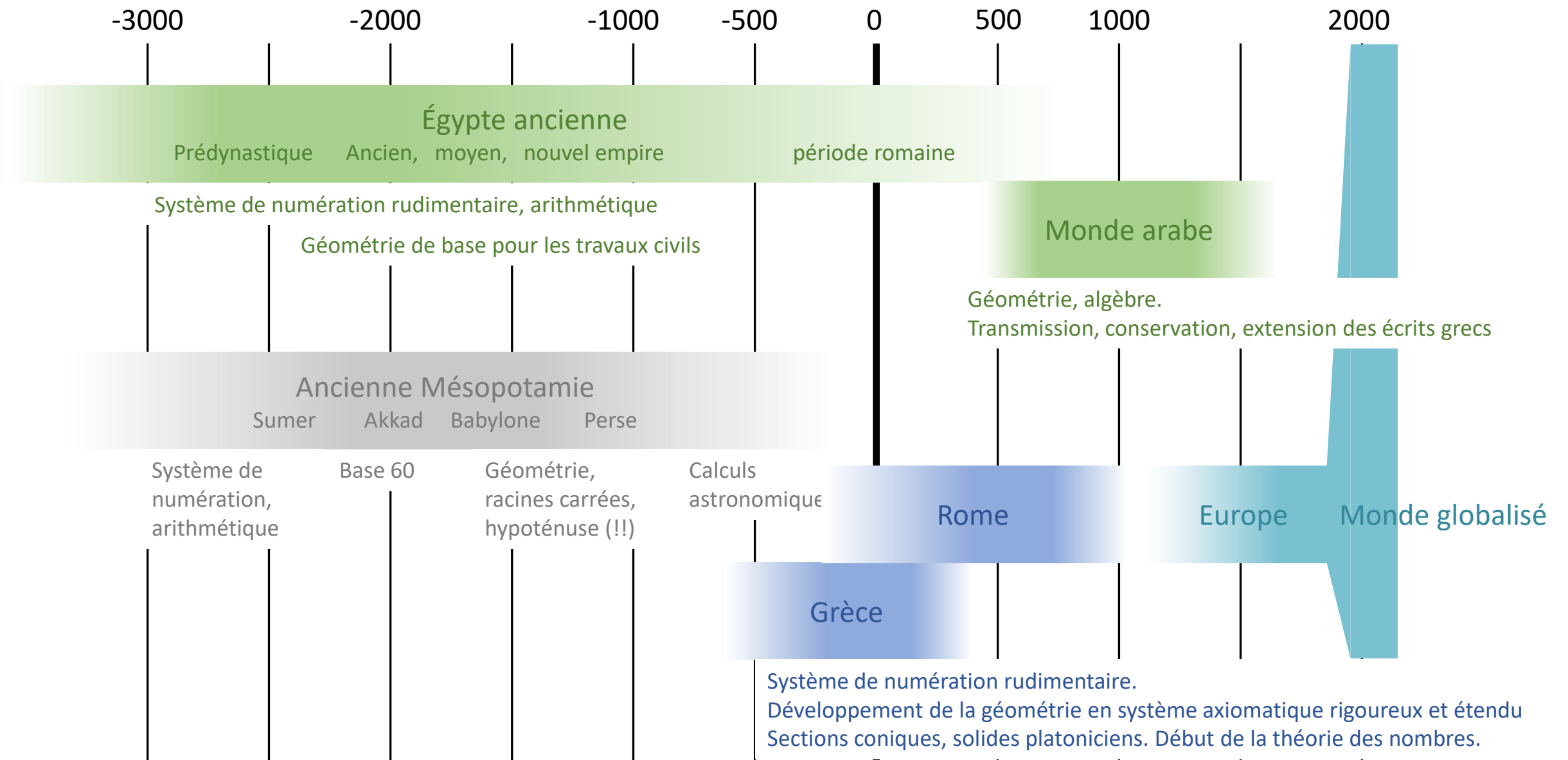
Dynastie Han (environ -200 à 200)
Les Neuf Chapitres contiennent des problèmes d'arithmétique, géométrie, proportions, etc.
Début de l'algèbre linéaire

Xe-XIIIe siècles : progrès en trigonométrie, géométrie algébrique, théorie des nombres

Les Neuf Chapitres sur l'art Mathématique

IIe-Ier siècles av. J.-C.

Traité mathématique de la dynastie Han

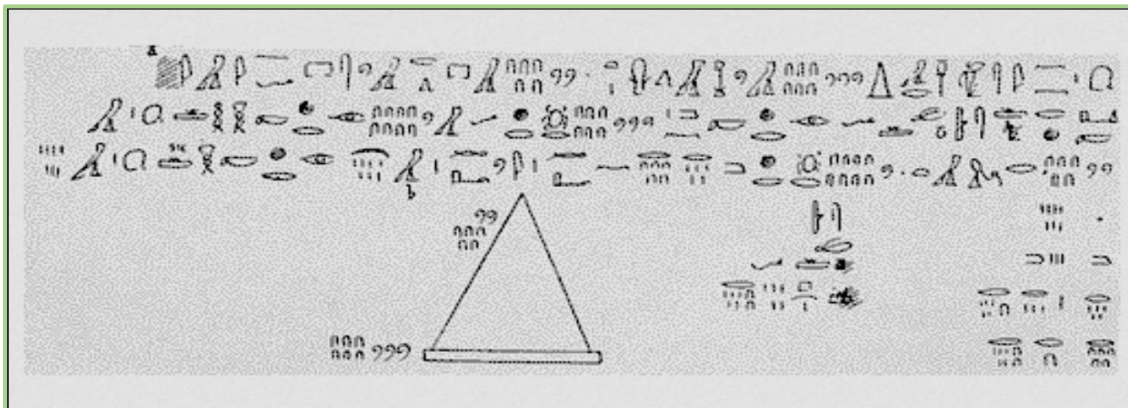


Europe, Méditerranée, moyen orient

Système de numération des anciens égyptiens :

| | | | | | | |
|---|----|-----|------|--------|---------|-----------|
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 |
| I | ∩ | 9 | ⌋ | ⌋ | ⌋ | ⌋ |

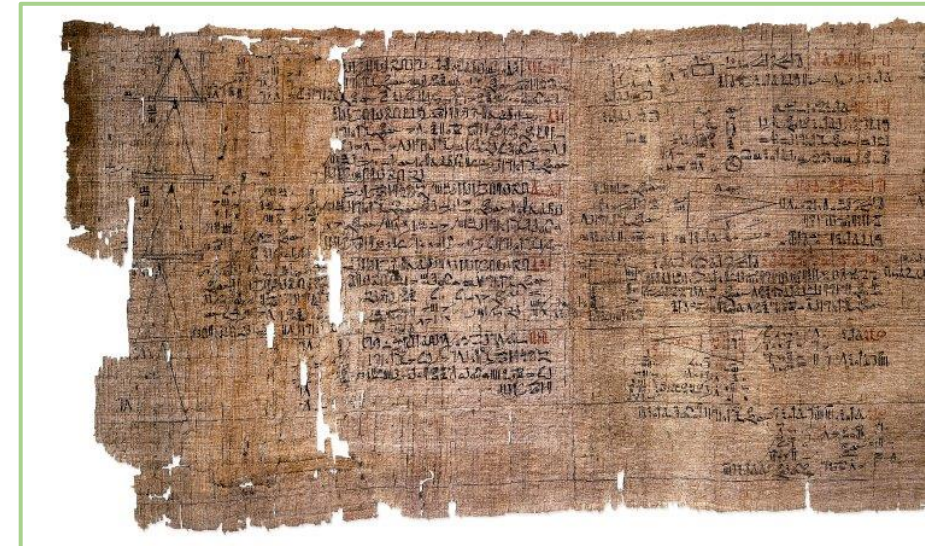
Système «additif» : on trace le symbole autant de fois qu'il faut pour obtenir la valeur désirée



Reproduction d'un extrait du Papyrus de Moscou

~ -1700 (XIIIe dynastie)

Les anciens égyptiens avaient un système de numération et une connaissance pratique de la géométrie.



Début du Papyrus Rhind

~ -1600 (XVe dynastie)

Système sexagésimal babylonien

Tablette YBC 7289 :

Entre -1900 et -1600

Un carré, des diagonales et des nombres...



▼ = 1

◀ = 10

Notation «additive» pour les chiffres de 1 à 59

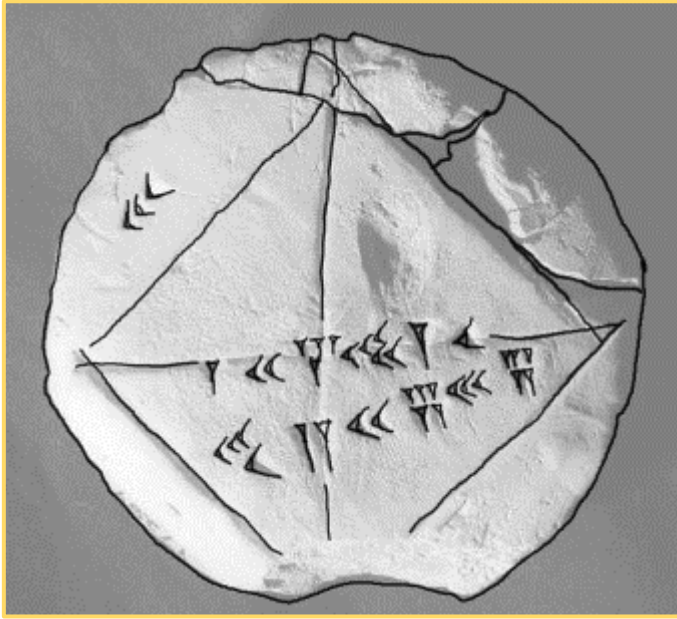
▼ ◀ = 70 (ou 70/60, ou 70 x 60, ou...)

Valeurs par positionnement
Chaque chiffre vaut 60 fois plus que la position à sa droite.
Ambiguïté !

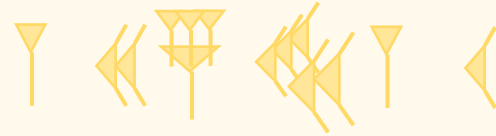
◀◀◀ = 30

▼ ◀◀ ◀◀◀ ◀◀◀◀ ◀ = 1 24 51 10

◀◀◀ ◀◀◀ ◀◀◀ ◀◀◀◀ ◀◀◀◀ ◀◀◀◀ = 42 25 35



= 30



= 1 24 51 10



= 42 25 35

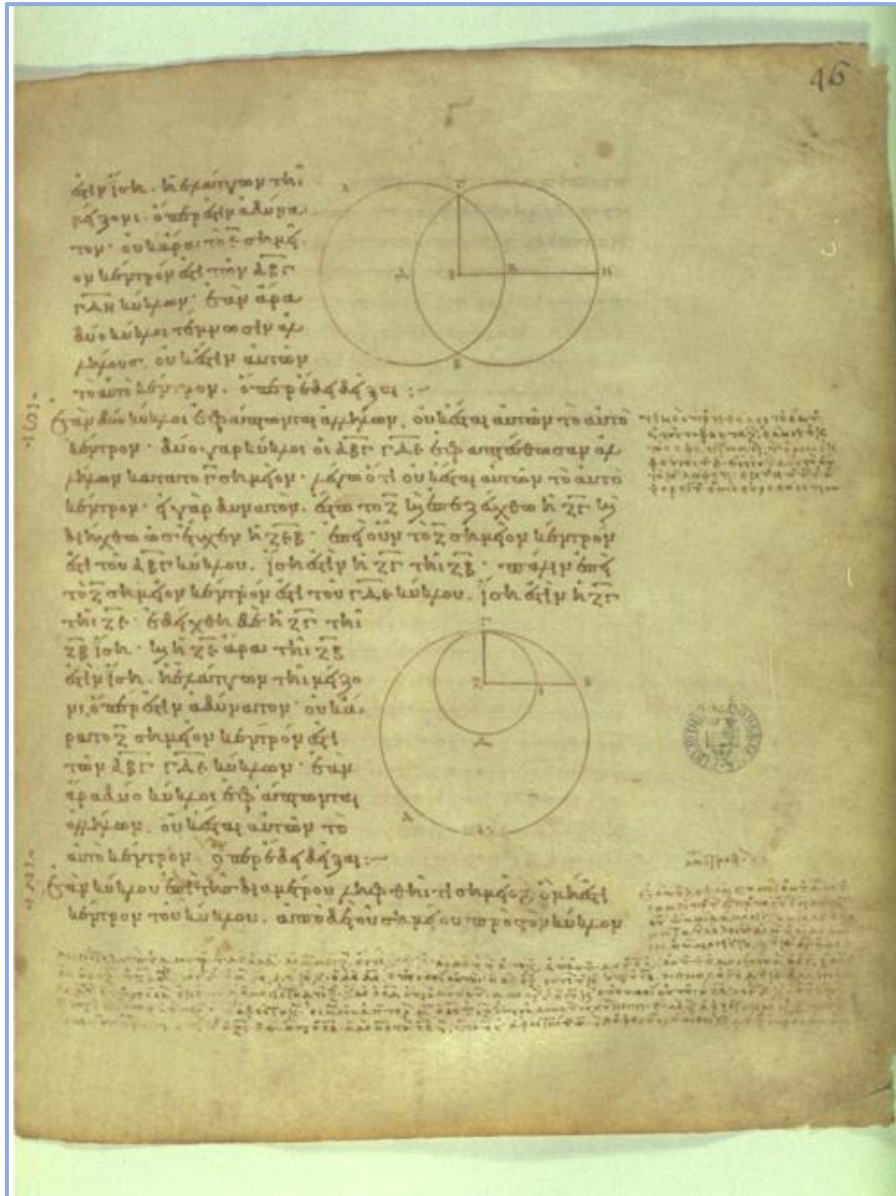
Conversion en notation décimale moderne

$$1 \ 24 \ 51 \ 10 = 1 + 24/60 + 51/3\ 600 + 10/216\ 000 = 1,41421296$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356$$

$$42 \ 25 \ 35 = 42 + 25/60 + 35/3\ 600 = 42,4263889$$

$$30 \times \sqrt{2} = 42,4264069$$



Mathématiques en grèce

Système de numération similaire à celui des romains
(I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, etc.)

Géométrie très développée

Manuscrit D'Orville

Constantinople, 888

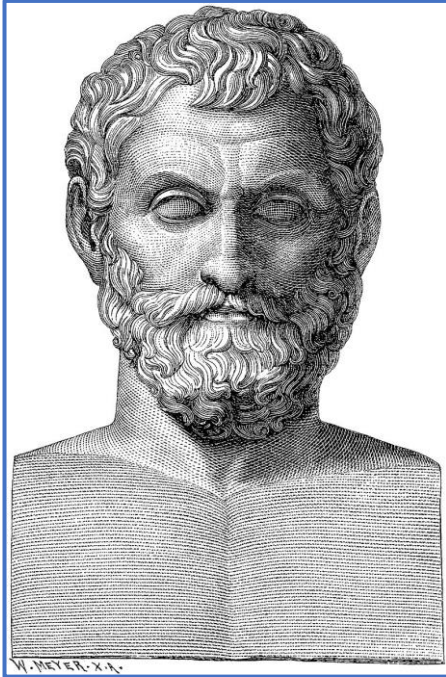
Aujourd'hui à la Bodleian Library

Propositions 5 à 7 du Livre III

Les treize livres des Éléments d'Euclide

la géométrie dans l'antiquité grecque

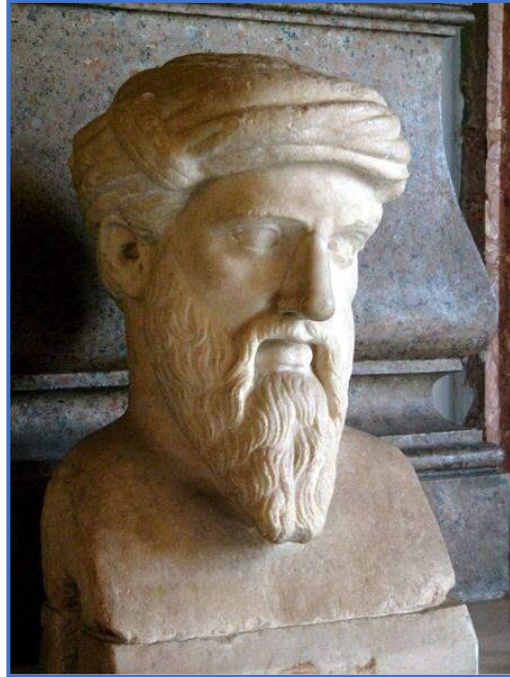
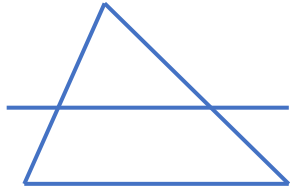
Avant Euclide



Thalès de Milet

~-625 à ~-547

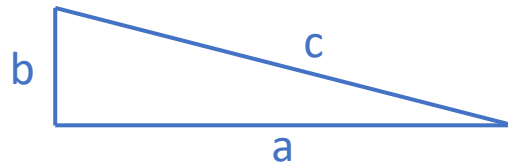
Théorème de Thalès



Pythagore

~-580 à ~-495

« $a^2 + b^2 = c^2$ »



Théétète d'Athènes

c. -417 à c. -391 ou -369

(incertain)

Théorèmes et constructions de nombres irrationnels.

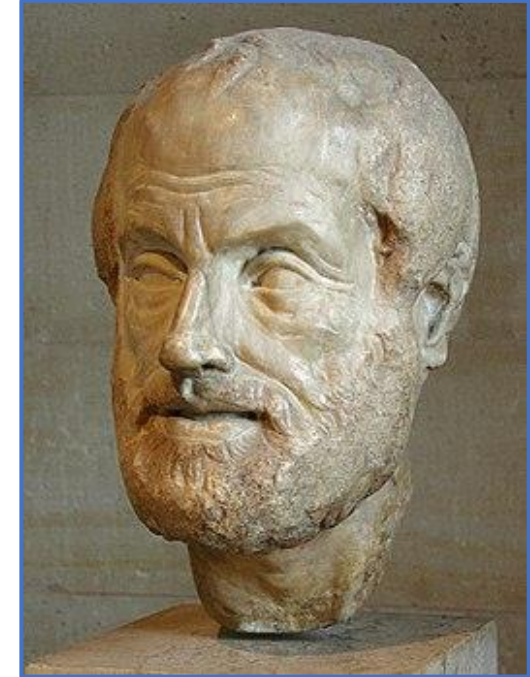
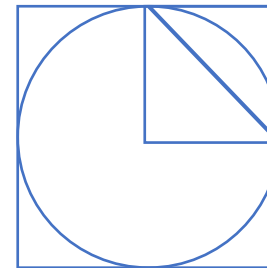
Ami de Platon et Socrate

(Platon a écrit un dialogue sur lui !)

Eudoxe de Cnide

c. -380 à c. -337

Plusieurs théorèmes sur les aires, les volumes et les proportions



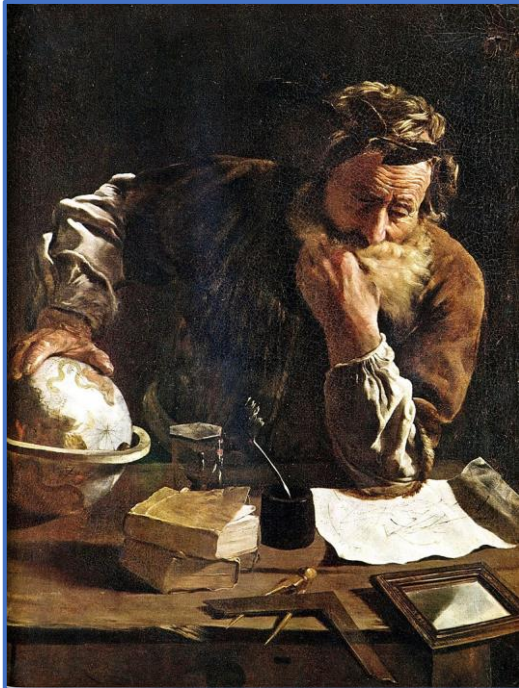
Aristote

-384 à -322

Déduction logique

$p \supset q$
 $q \supset r$
 $\Rightarrow p \supset r$

Après Euclide



Archimède

-287 à -212

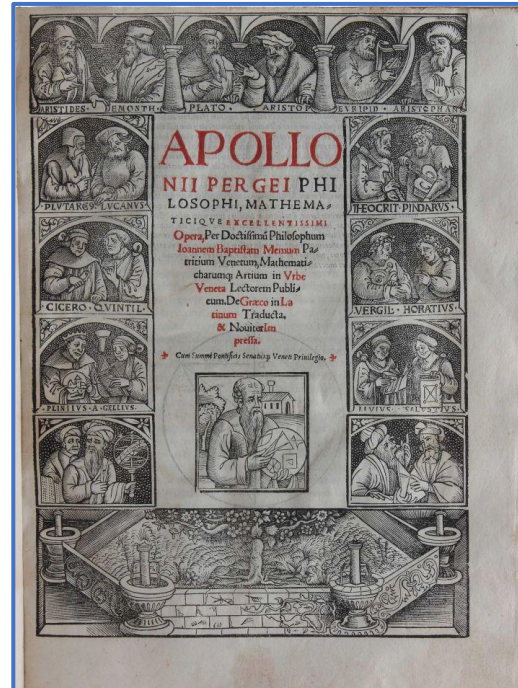
Spirale d'Archimède

Méthode d'exhaustion

Approximation de pi

Eurêka!

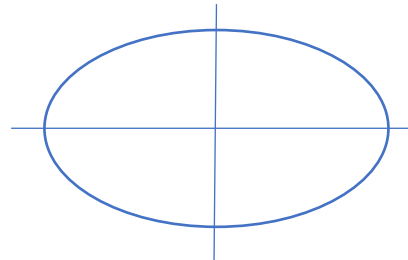
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$



Apollonios de Perga

Fl. -200

Étudie les sections coniques



Euclide

Fl. ~ -300

Ce qu'on connaît nous vient principalement du commentaire de Proclus (Ve siècle).

« Donnez-lui trois sous, puisqu'il doit faire gain de ce qu'il apprend ! »



Quelques références

- *Plofker, Kim (2009), Mathematics in India: 500 BCE–1800 CE, Princeton, NJ: Princeton University Press*
- *Katz, Victor (2007), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam : A Sourcebook, Princeton, NJ : Princeton University Press*
- *Boyer, Carl B. (1968). A History of Mathematics. New York, United States: John Wiley & Sons.*

Chapitre II : les Éléments géométriques

La pensée mathématique systématisée.
Livres I, II, III, IV

La différence dans l'approche

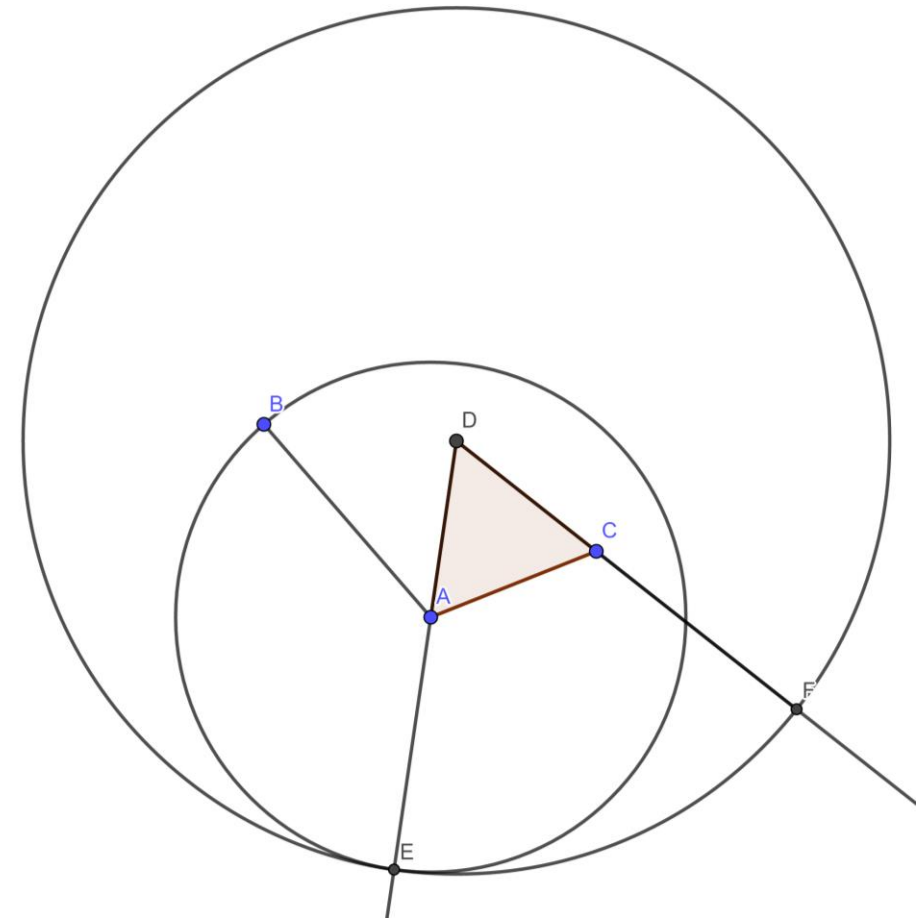
- L'approche pratique

Résoudre des problèmes



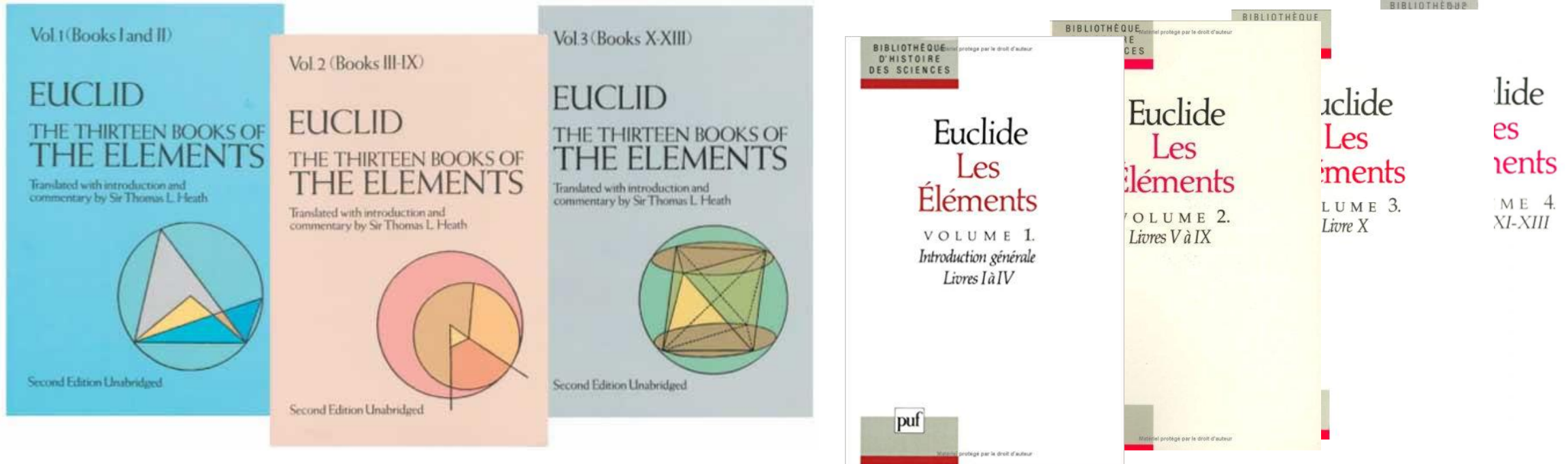
- L'approche philosophique

Développer un système de raisonnement déductif



Traductions

- **En anglais** : Thomas L. Heath (1908, seconde édition en 1925, republié chez Dover en 1956)
- **En français** : Bernard Vitrac (1990), aux presses universitaires de France.



structure des *Éléments*

livres

préambule

définitions

demandes

les demandes seraient
aujourd'hui appelées
« postulats ».

notions
communes

les notions communes
sont des postulats
d'ordre général.

contenu

propositions

énoncé

démonstration

les démonstrations sont
conduites rigoureusement par
la logique d'Aristote.

le livre I

livre I – Définitions

I.1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.



livre I – Définitions

I.1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.

Abstraction pure ? Description physique de la matière ?

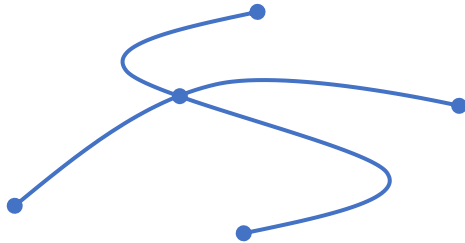


livre I – Définitions

I.2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.

I.3. Les limites d'une ligne sont des points.

3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.



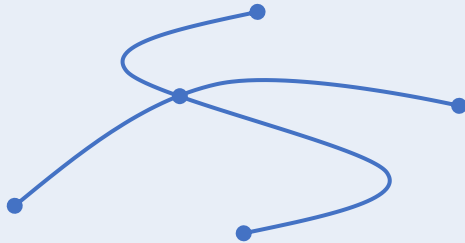
livre I – Définitions

« 1 dimension » -- la notion de « variété » en géométrie moderne vient rendre ce concept beaucoup plus précis, mais l'idée originale demeure la même.

I.2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.

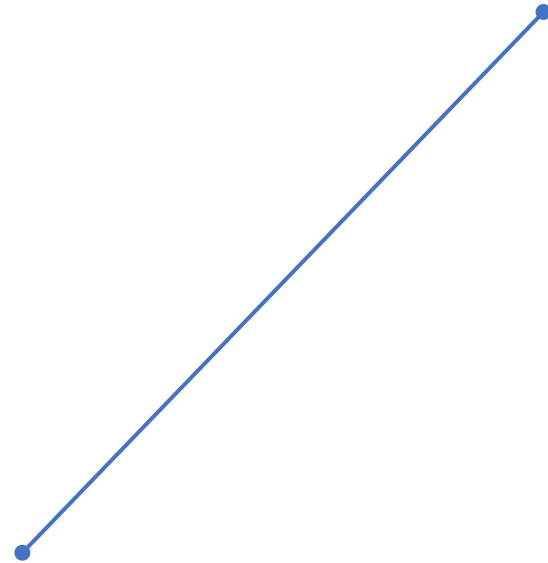
I.3. Les limites d'une ligne sont des points.

I.3'. L'intersection de deux lignes qui n'ont pas de partie commune est un point.



livre I – Définitions

I.4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.



livre I – Définitions

1.4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

Êtes-vous capables de donner une meilleure définition ?

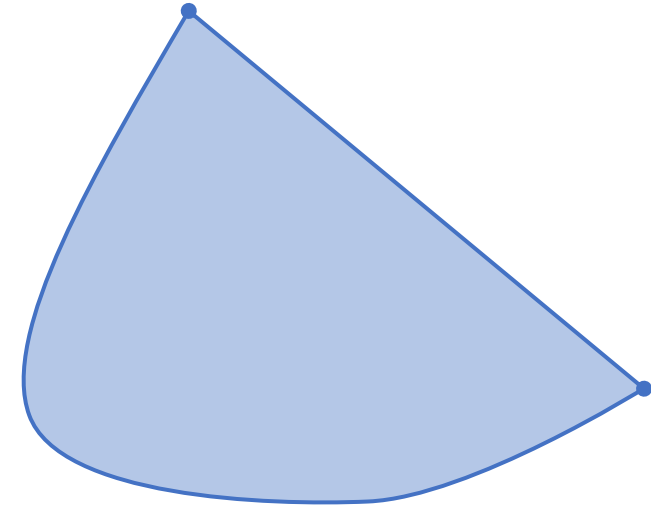


livre I – Définitions

I.5. Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur.

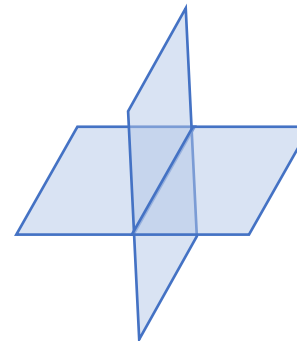
I.6. Les **limites d'une surface** sont des lignes.

I.7. Une **surface plane** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles.*



6'. L'intersection de deux surfaces qui n'ont aucune partie commune est une ligne.

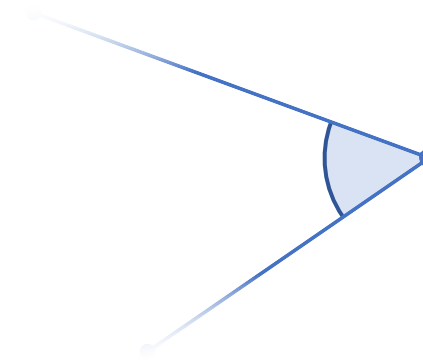
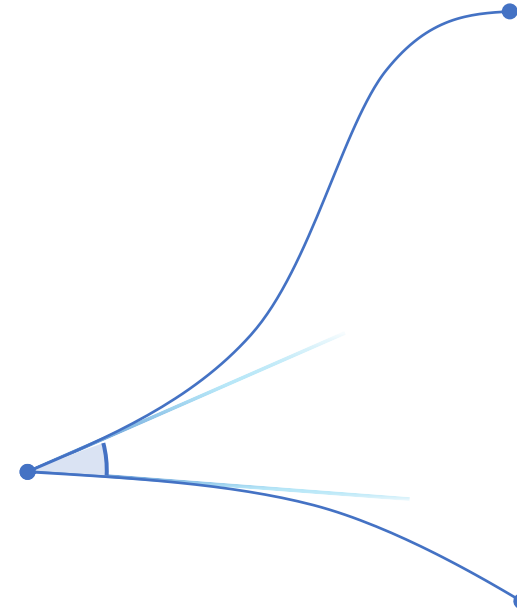
Ça n'a pas d'importance en 2D...



livre I – Définitions

1.8. Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.

1.9. Et quand ces lignes sont droites, l'angle est appelé **rectiligne**.

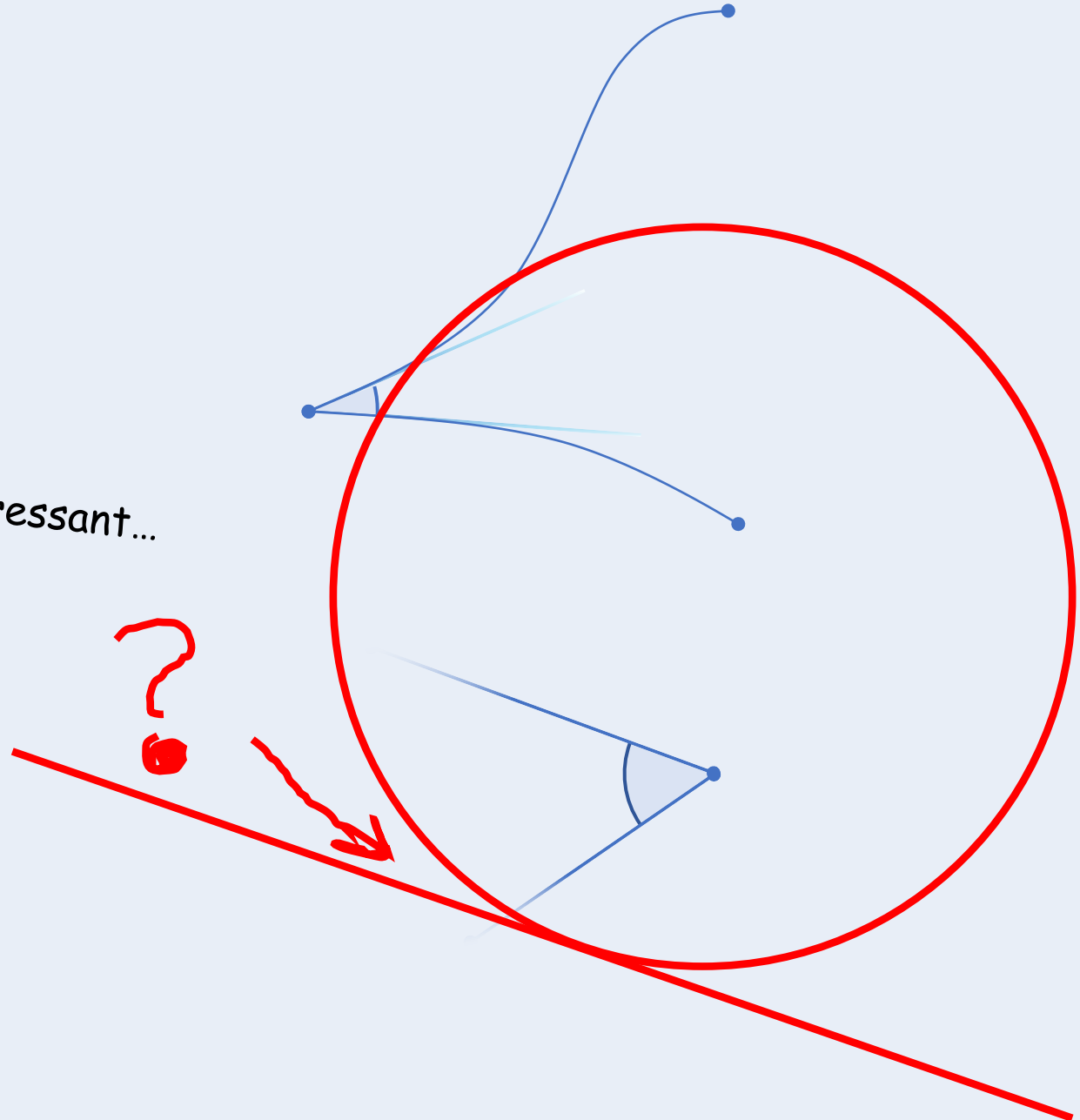


livre I – Définitions

8. Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.

9. Et quand ces lignes sont droites, l'angle est appelé **rectiligne**.

Intéressant...

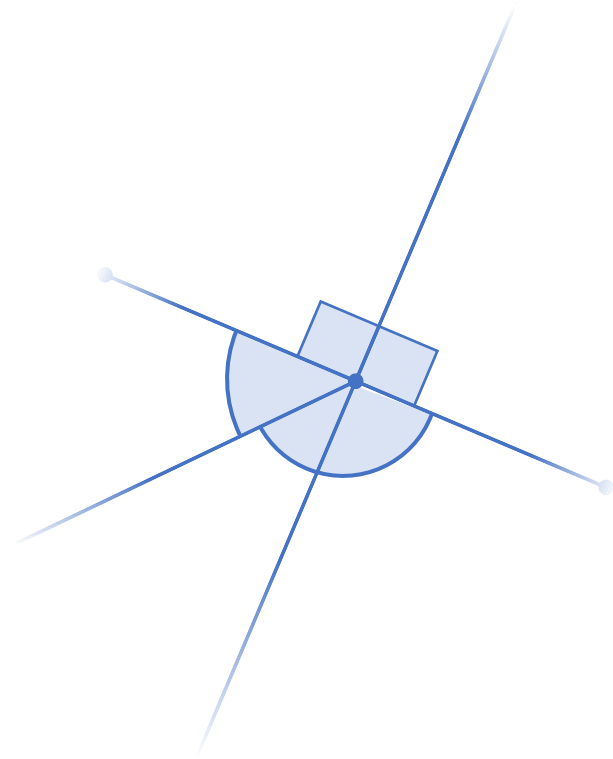


livre I – Définitions

I.10. Et quand une droite ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles est **droit** et la droite qui a été élevée est appelée **perpendiculaire** à celle sur laquelle elle a été élevée

I.11. Un angle **obtus** est celui qui est plus grand qu'un droit.

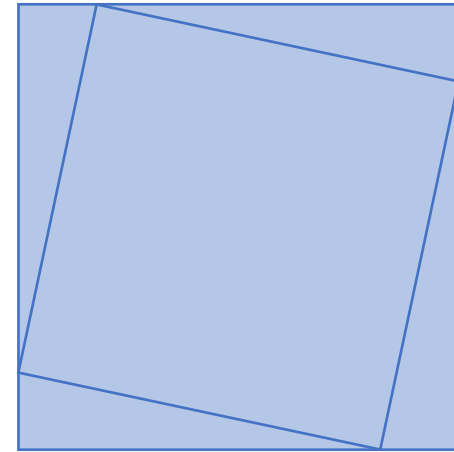
I.12. Un angle **aigu** est celui qui est plus petit qu'un droit.



livre I – Définitions

I.13. Une **frontière** est ce qui est limite de quelque chose

I.14. Une **figure** est ce qui est contenu par quelque(s) frontière(s).



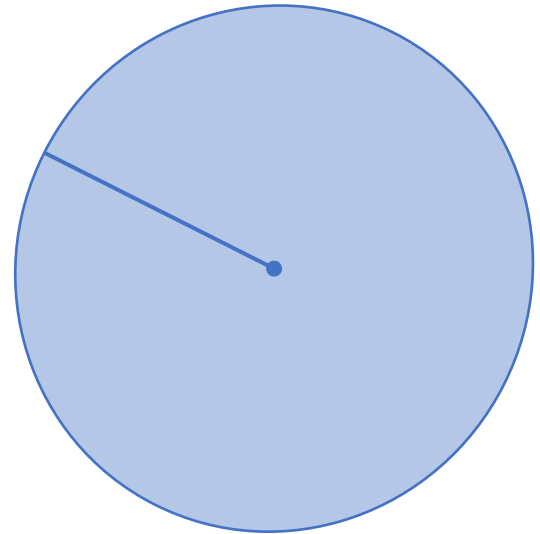
livre I – Définitions

I.15. Un **cercle** est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée **circonférence**) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

I.16. Et le point est appelé **centre** du cercle.

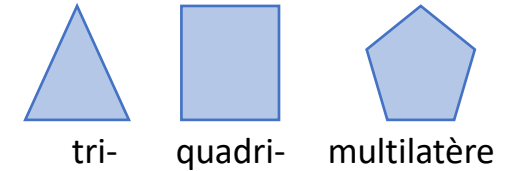
I.17. Et un **diamètre** du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

I.18. Un **demi-cercle** est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

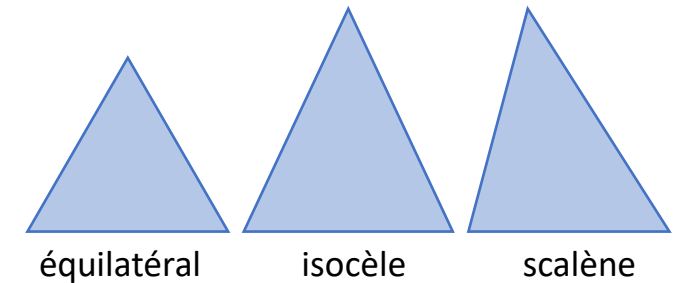


livre I – Définitions

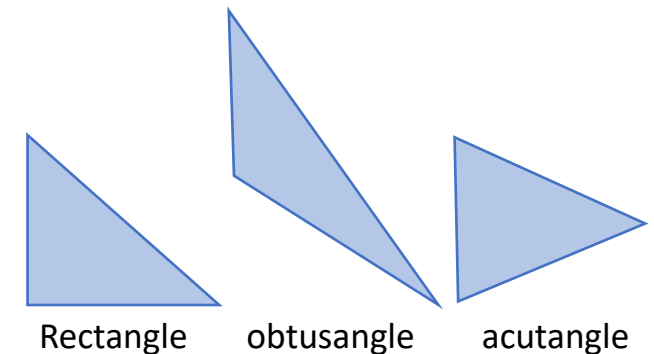
I.19. Les **figures rectilignes** sont les figures contenues par des droites;
trilatères : celles qui sont contenues par trois droites;
quadrilatères : celles qui sont contenues par quatre droites;
multilatères : par plus de quatre.



I.20. Parmi les figures trilatères est
un **triangle équilatéral** celle qui a les trois côtés égaux;
isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement;
scalène celle qui a les trois côtés inégaux.



I.21. De plus, parmi les figures trilatères est
un **triangle rectangle** celle qui a un angle droit;
obtusangle celle qui a un angle obtus;
acutangle celle qui a les trois angles aigus.



livre I – Définitions

I.22. Parmi les figures quadrilatères, est

un **carré** celle qui est à la fois équilatérale et rectangle;

est **oblongue** celle qui est rectangle mais non équilatérale;

un **losange** celle qui est équilatérale mais non rectangle;

un **rhomboïde**, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres
mais qui n'est ni équilatérale, ni rectangle;

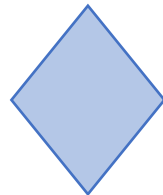
et que l'on appelle **trapèze** les quadrilatères autres que ceux-là.



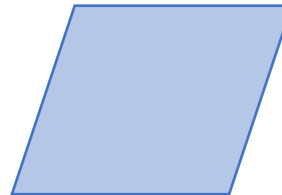
carré



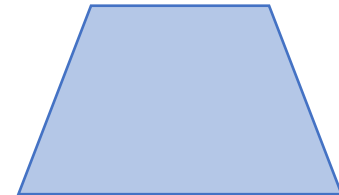
oblong
(rectangle)



losange



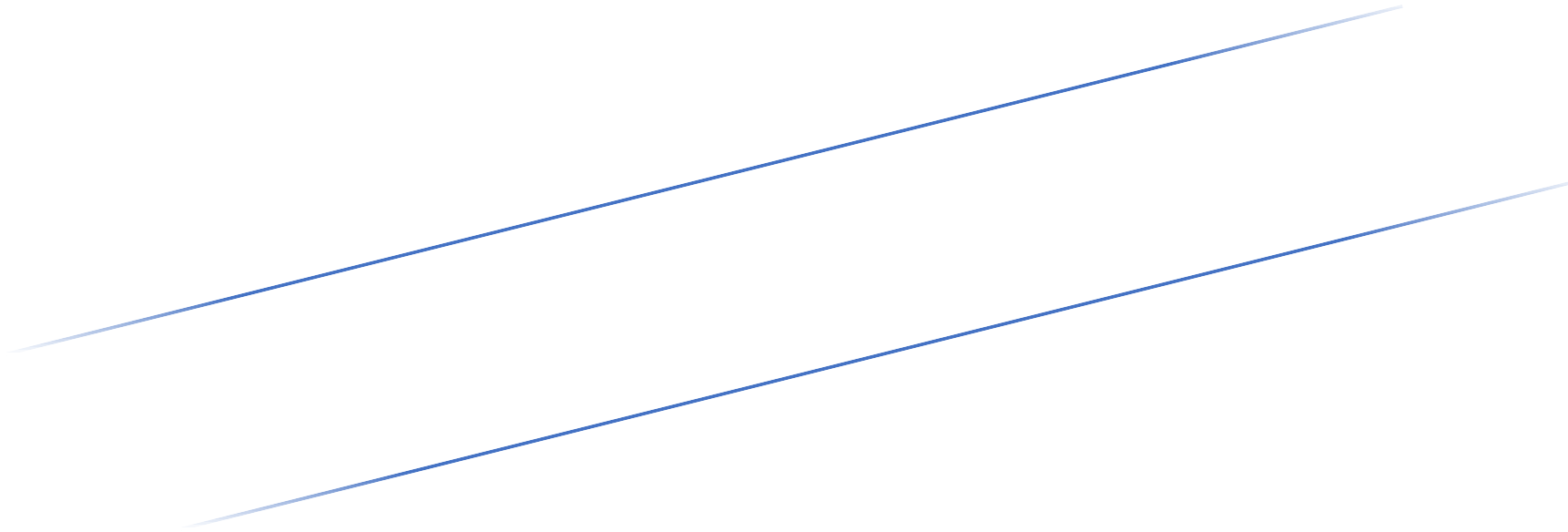
rhomboïde
(parallélogramme)



trapèze

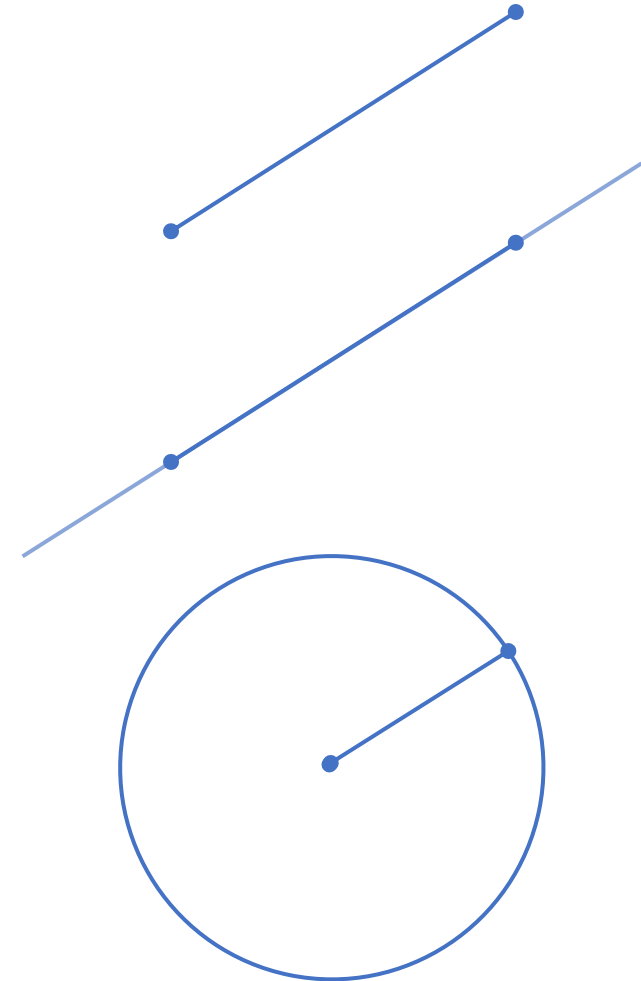
livre I – Définitions

I.23. Des droites **parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.



livre I – Demandes (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.





livre I – Demandes (postulats)

4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

livre I – Demandes (postulats)

4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux




5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

Grosse controverse : est-ce nécessaire de le demander ?
OUI ! (Prouvé au XIXe siècle, quelques 2100 ans plus tard !)

livre I – Notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
5. Et le tout est plus grand que la partie.

livre I – Notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
 transitivité
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
 translations, rotations, réflexions : isométries
5. Et le tout est plus grand que la partie.  théorie de la mesure

les propositions

typologie des propositions

typologie « ancienne »

typologie moderne

| Type | Problème « Construire une figure avec telles propriétés. » | Théorème (au sens ancien) « La figure donnée a telles propriétés. » |
|---|--|--|
| Lemme Résultat intermédiaire relativement évident, pratique et utile | Constructions «de base» : perpendiculaires, parallèles, bissections. Ex. : Props. I.1-3, 9-12, 22, 23, 31, 42, 46. III.1, 17, ... | Outils déductifs simples permettant de progresser plus rapidement dans des arguments. Congruence d'angles, de triangles. Théorie des parallèles. Ex. : Props. I.4-8, 13-21, 24-30, 33-41, 43, 45, ... |
| «Théorème» au sens moderne Résultat important, intéressant en soi, ayant des applications. | Constructions ayant des applications pratiques ou une importance théorique significative : Quadrature des figures, inscriptions/circonscriptions Ex. Props. I.44, II.14, IV.11, IV.15, IV.16, ... | Résultats théoriques de grande importance, peu évidents, «surprenants», souvent très généraux : Somme des angles intérieurs d'un triangle, Théorèmes de Pythagore, de Thalès. Ex. Props. I.32, 47, 48, ... |

constructions de base (livre I)

Propositions I.1 à I.3: Triangle équilatéral; déplacer, aligner un segment sur un autre segment.

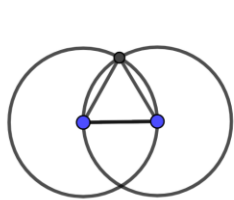
Proposition I.9, 10 : Bisections d'angles, segments.

Proposition I.11, 12: Perpendiculaires à partir d'un point sur la droite, ailleurs.

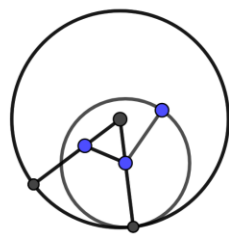
Proposition I.22: Triangle quelconque à partir des côtés.

Proposition I.23: Déplacer un angle rectiligne sur un point quelconque

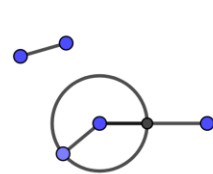
Proposition I.31: Par un point donné, monter une droite parallèle à une droite donnée.



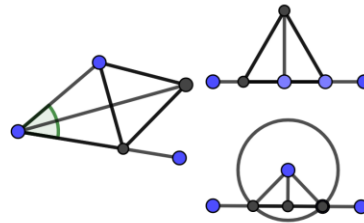
Triangle
équilatéral
(prop. 1)



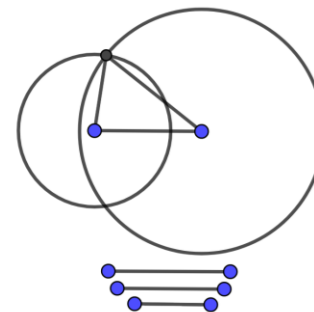
Déplacement
de segment
(prop. 2)



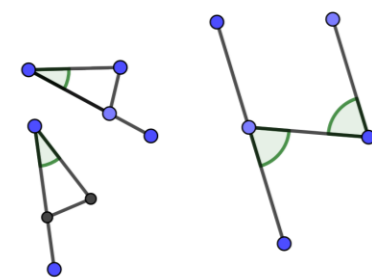
Alignement de
segment.
(prop. 3)



Bisections,
perpendiculaires
(props. 9 à 12)



Construction d'un
triangle à partir des
côtés (prop 22)

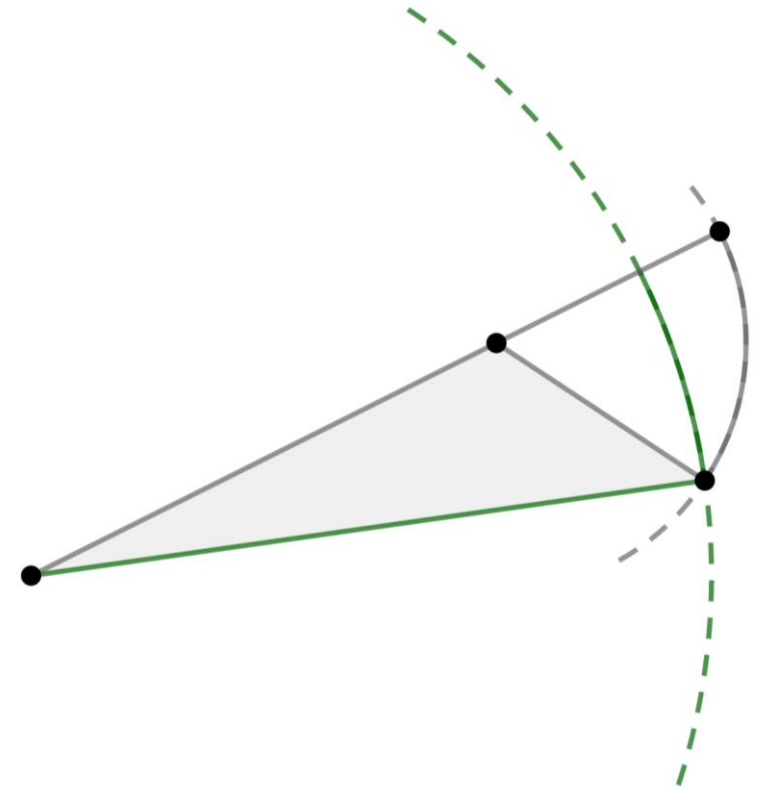


Déplacement d'angle, construction
d'une droite parallèle.
(props. 23, 31)

théorème: inégalité du triangle

Proposition I.20

Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble de quelque façon que ce soit sont plus grands que le côté restant.



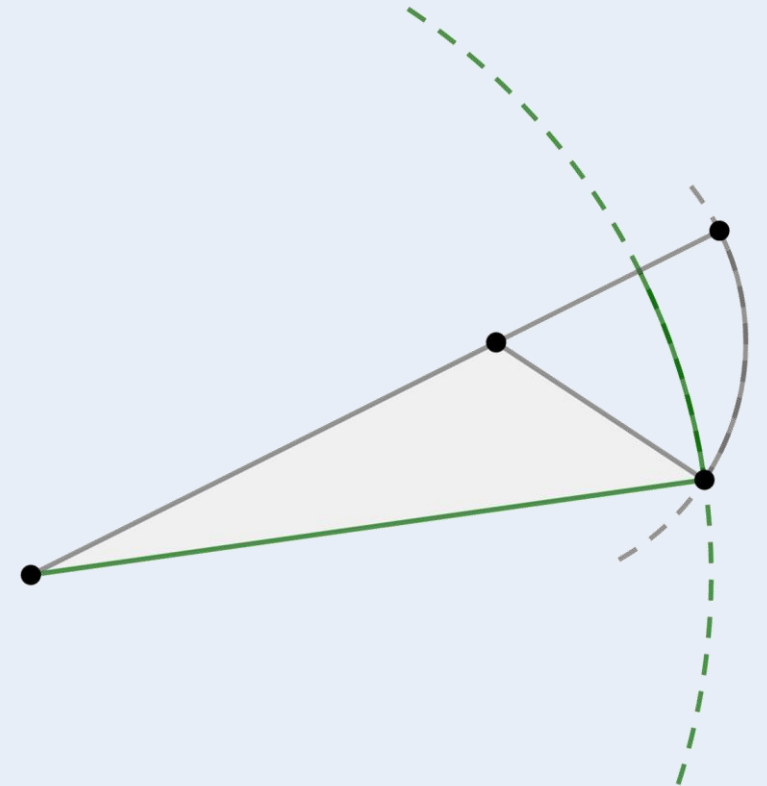
théorème: inégalité du triangle

Proposition I.20

Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble de quelque façon que ce soit sont plus grands que le côté restant.

Preuve nécessaire ?

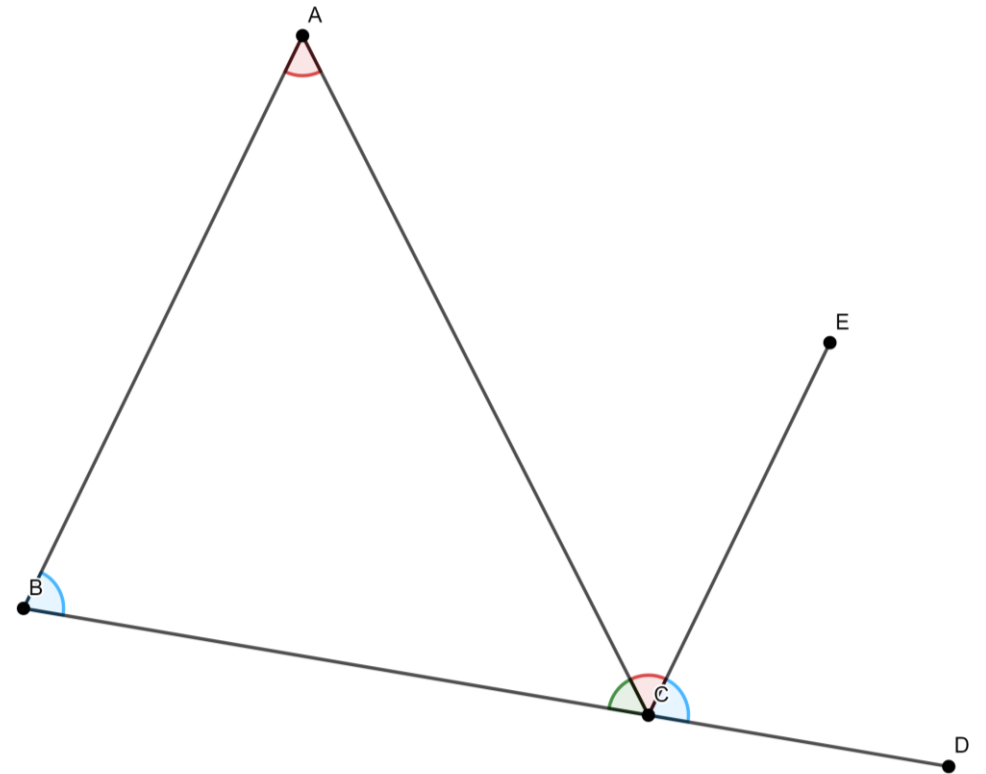
Les sophistes argumentaient qu'un âne n'aurait pas besoin de preuve pour choisir le chemin le plus court vers une carotte...



théorème: somme des angles intérieurs d'un triangle

Proposition I.32

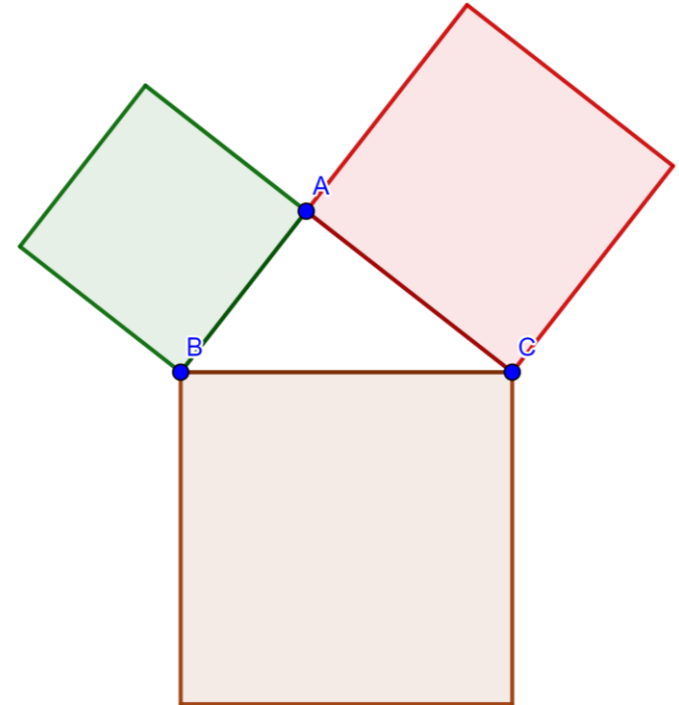
Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.



théorème de Pythagore

Proposition I.47

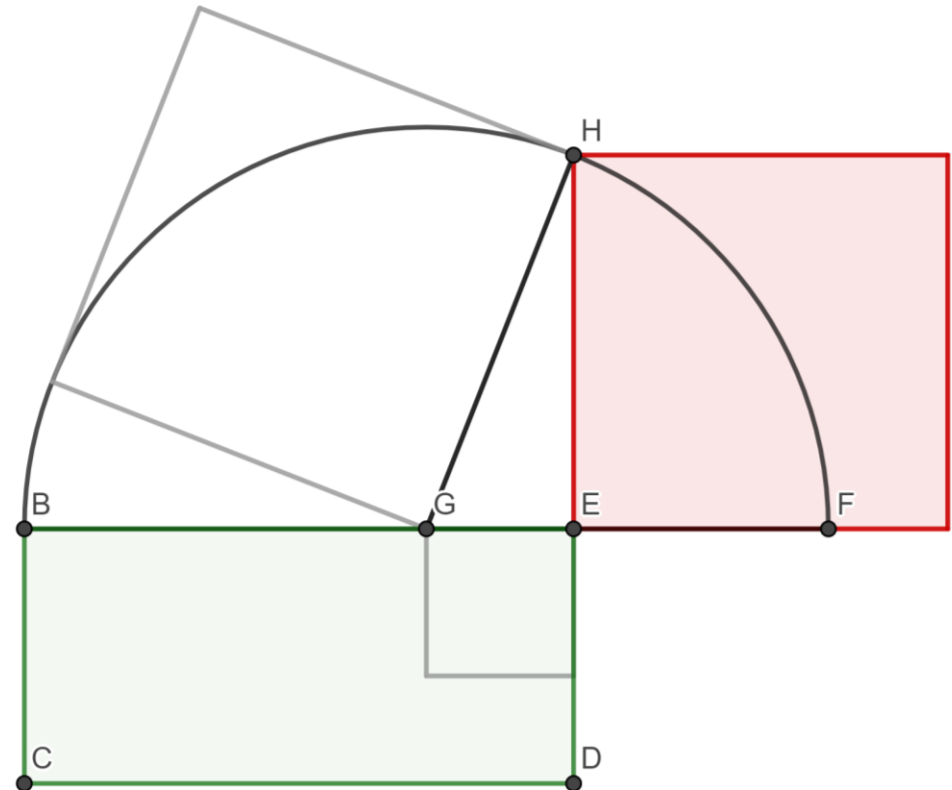
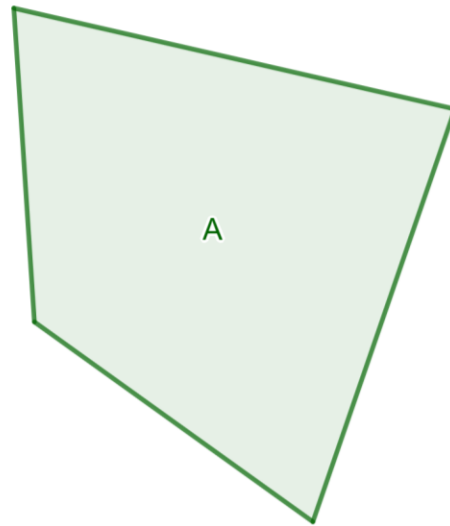
Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est [équivalent en aire] aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.



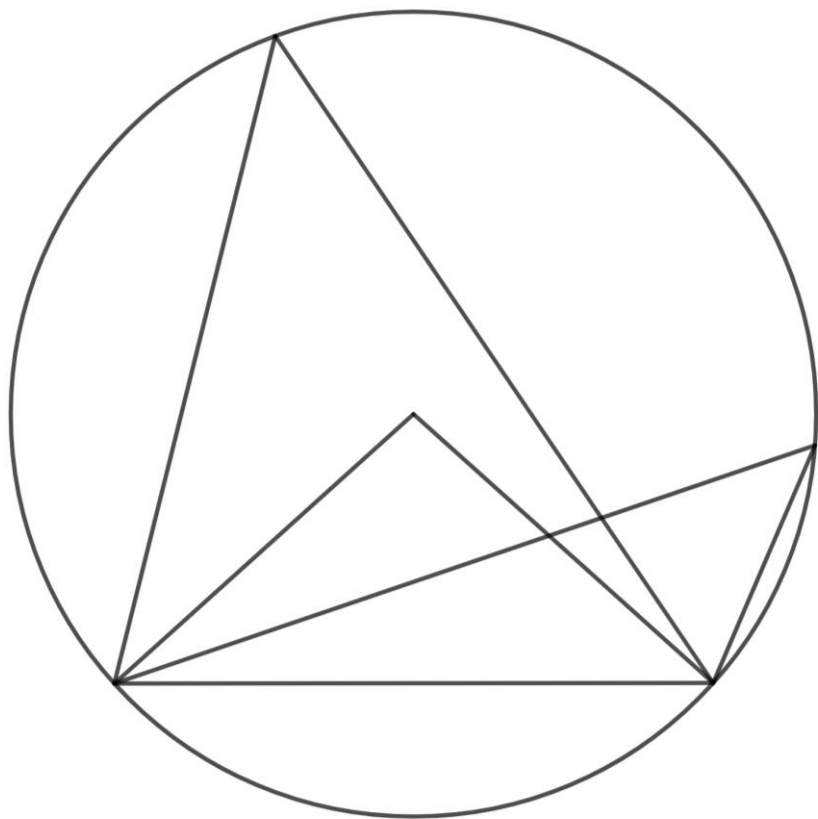
les livres II, III et IV

le livre II

- Constructions pour résoudre des équations quadratiques.
- Quadrature des polygones !



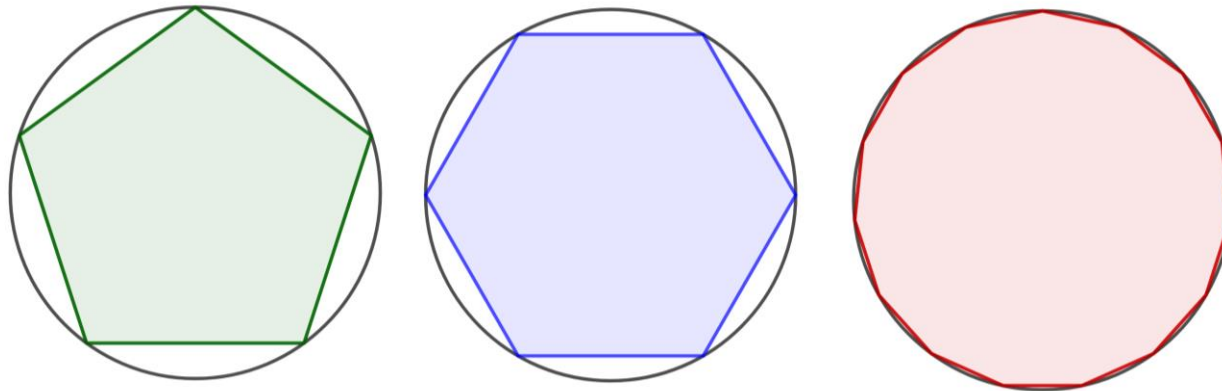
le livre III



- Constructions, théorèmes sur les cercles

le livre IV

- Constructions de polygones inscrits/circonscrits dans des cercles



Chapitre III : les nombres et les ratios

Livres V à XI, dans le désordre.

Les nombres (entiers) (positifs)

1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 ...



On connaît les nombres...

Des problèmes ?

... 2476 2477 ...

Une infinité de nombres?

? *



Un ordre particulier pour les nombres?

... 1

Un plus petit nombre?

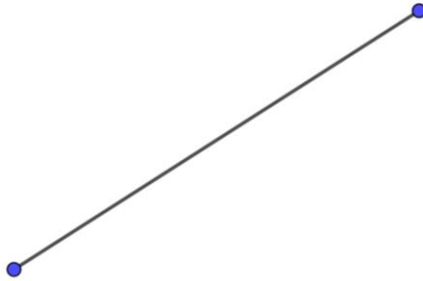
Des problèmes ?

« C't'ivident ! »

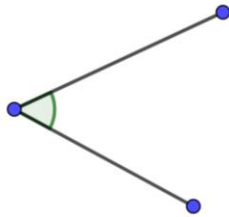
-- Euclide, c.a. 300 av. J.-C.

Pas d'axiomes, pas de postulats, pas de demandes...

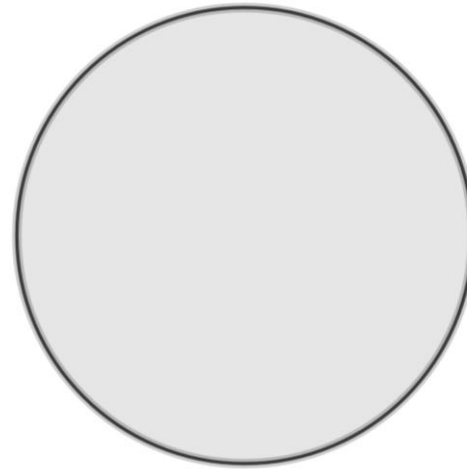
Les grandeurs



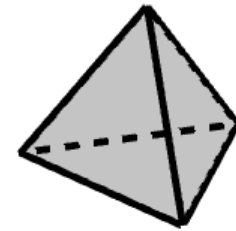
Longueur d'un segment



Mesure d'un angle



Aire d'une figure



Volume d'un solide

Nombres réels ?

Les grandeurs

NON !

- On donne toujours une grandeur comme un certain **ratio** par rapport à une grandeur-étalon
- qu'on appelle **unité**
- et c'est pas pour rien.
- **Les ratios sont les nombres réels.**
Les grandeurs ne sont pas des nombres (au sens moderne) !



Pensez-y : L'instruction « Coupe-moi un morceau de bois de longueur 2 » n'a pas de sens à moins qu'on sous entende « mètres » ou « pieds »...

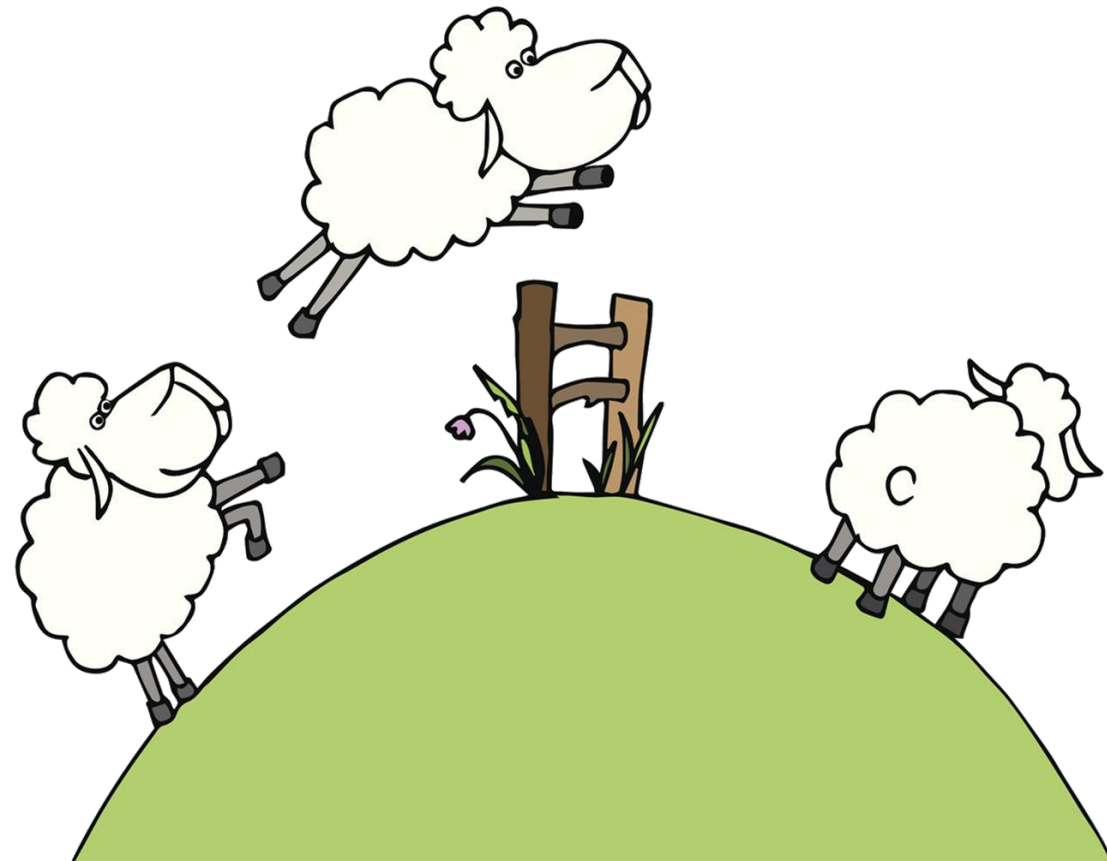
les entiers

Livres VII, VIII, IX

livre VII – Définitions

VII.1 Est **unité** ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

VII.2 Et un **nombre** est la multitude composée d'unités.



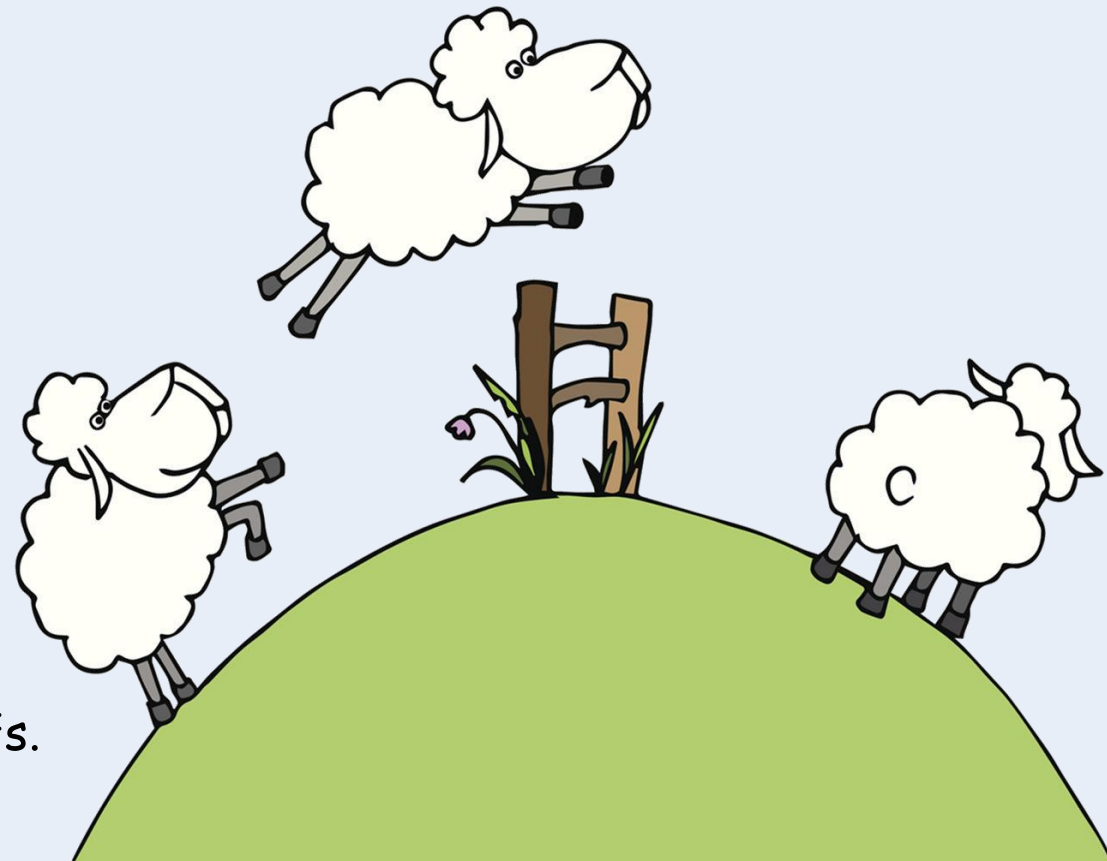
livre VII – Définitions

super vague
↓

VII.1 Est **unité** ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

VII.2 Et un **nombre** est la multitude composée d'unités.

les « nombres » sont les entiers positifs.
↑



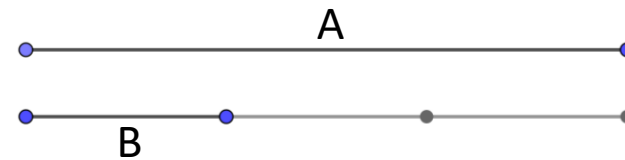
livre VII – Définitions

VII.3 Un nombre est une **partie** d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure* le plus grand.

VII.4 Et **des parties**, quand il ne le mesure pas.

VII.5 Et un **multiple**, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

*mesurer : diviser exactement



A est un multiple de B; B est une partie de A.
Attention ! Ici, comme dans tout Euclide, les nombres sont représentés par des segments, même si la longueur d'un segment n'est pas considérée comme un « nombre » au sens moderne.

livre IV – Définitions

VII.12 Un nombre **premier** est celui qui est mesuré par une seule unité.

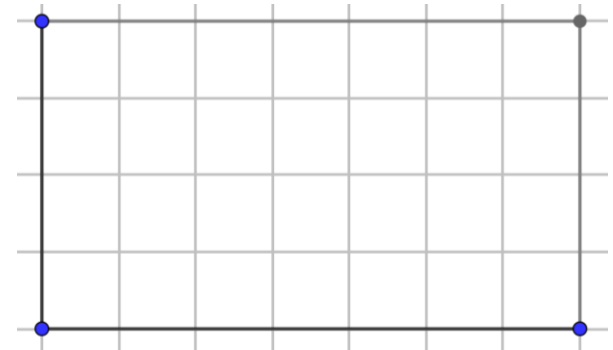


Voici par exemple 23, nombre premier de choix

livre VII – Définitions

VII.16 Un nombre est dit **multiplier** un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté à lui-même, et qu'il est produit un certain nombre.

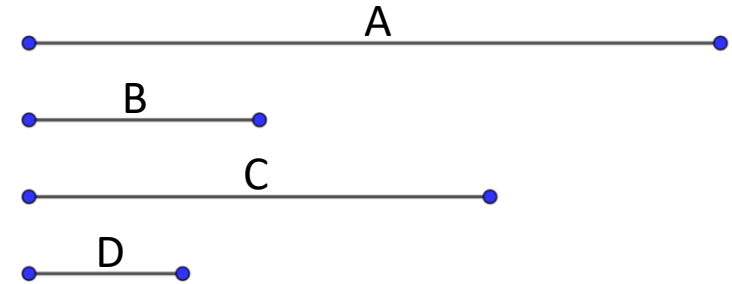
VII.17 Et quand deux nombres s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain nombre, le produit est appelé **(nombre) plan**, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses **côtés**.



$$7 \times 4 = 28$$

livre VII – Définition

VII.21 Des nombres sont en **proportion** quand le premier du deuxième, et le troisième du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties.



A, B, C et D sont en proportion car A est le triple de B et C est le triple de D. On dit que « A est à B comme C est à D ».

théorème fondamental de l'arithmétique

(props. VIII.31 et IX.14)

Tout nombre peut être décomposé de façon unique en un produit de facteurs premiers dont il est le plus petit commun multiple.

infinité des nombres premiers (Prop. IX.20)

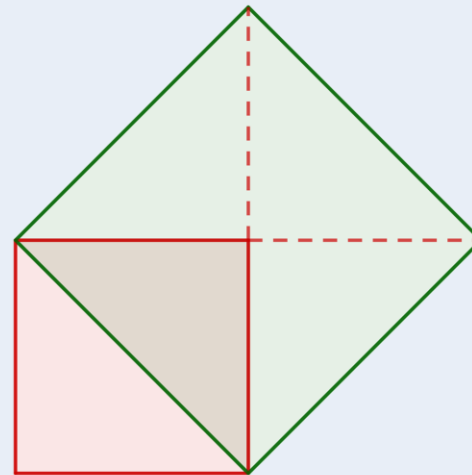
Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.

les nombres réels

Livres V

Pourquoi on a besoin de plus ?

Quel ratio entre le côté du carré vert
et celui du carré rouge ?
Peut-on l'exprimer par un ratio
d'entiers ?



Ben non !

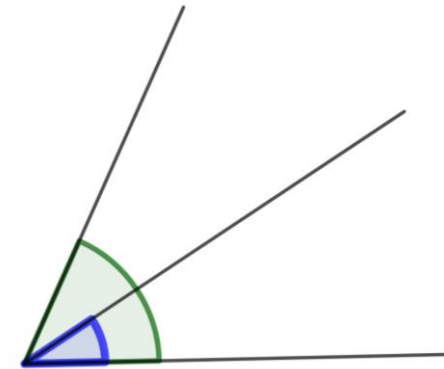
On doit avoir une définition du ratio plus générale, qui permette de comprendre le rapport entre, par exemple, le côté d'un carré et sa diagonale. Ou entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence...

Livre V – Définitions

V.1 Une grandeur est une **partie** d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.

V.2 Et **multiple**, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.

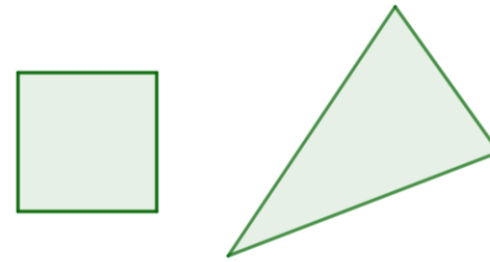
V.3 Un **rapport** est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre.



Ici l'angle bleu mesure l'angle vert.

livre V – Définitions

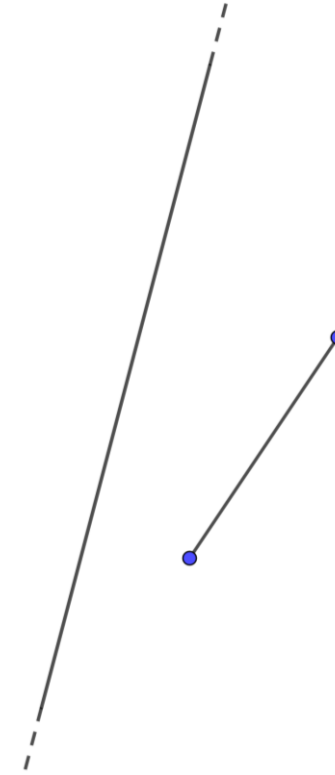
V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



On peut couvrir le triangle avec plusieurs copies du carré. On peut couvrir le carré avec plusieurs copies du triangle. Les aires du carré et du triangle ont un rapport entre elles.

livre V – Définitions

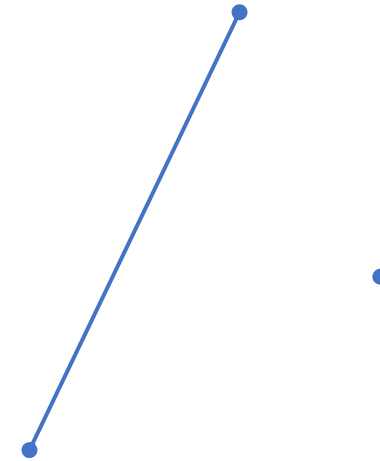
V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



Même multiplié, le segment ne dépassera jamais la droite infinie. Les deux grandeurs n'ont pas de rapport.

livre V – Définitions

V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

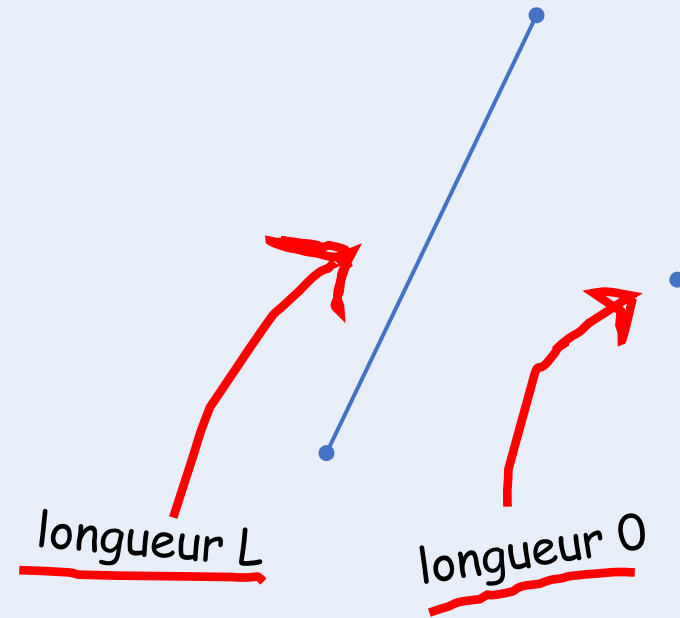


Même multiplié, le point ne pourra jamais dépasser le segment. Le segment et le point n'ont donc pas de rapport.

livre V – Définitions

V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

*Le rapport des deux serait $L/0$...
Même avant d'avoir en tête une notion de 0,
Euclide a déjà l'idée qu'on ne peut pas diviser par 0.*



Même multiplié, le point ne pourra jamais dépasser le segment. Le segment et le point n'ont donc pas de rapport.

livre V – Définitions

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une **première** relativement à une **deuxième** et une **troisième** relativement à une **quatrième** quand des équit multiples de la **première** et la **troisième** ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équit multiples de la **deuxième** et la **quatrième**, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.

$$A:B = C:D$$

Si et seulement si pour tous m, n choisis

$$mA > nB, mC > nD$$

OU

$$mA = nB, mC = nD$$

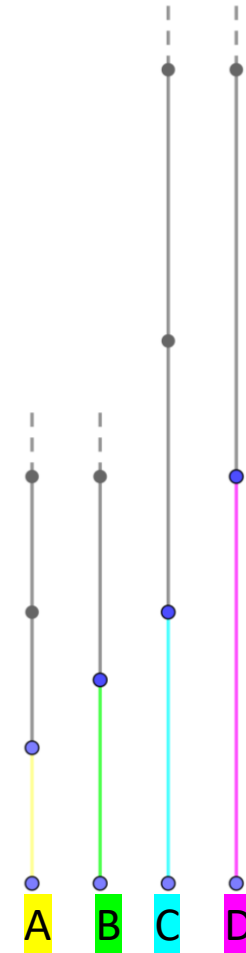
OU

$$mA < nB, mC < nD$$

Remarquez que lorsque les grandeurs sont des nombres, cette définition revient exactement à celle qu'on a vue plus tôt.

livre V – Définitions

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une **première** relativement à une **deuxième** et une **troisième** relativement à une **quatrième** quand des équiultiples de la **première** et la **troisième** ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équiultiples de la **deuxième** et la **quatrième**, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.



livre V – Définitions

V.7 Et quand parmi les équivultiples, d'une part le multiple de la **première** dépasse le multiple de la **deuxième** et que d'autre part le multiple de la **troisième** ne dépasse pas le multiple de la **quatrième**, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.

$$A:B > C:D$$

Si et seulement si pour tous m, n tels que

$$mA > nB,$$

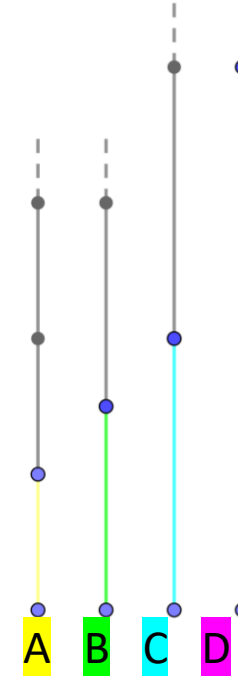
on a

$$mC \leq nD$$

Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !

livre V – Définitions

V.7 Et quand parmi les équiultiples, d'une part le multiple de la **première** dépasse le multiple de la **deuxième** et que d'autre part le multiple de la **troisième** ne dépasse pas le multiple de la **quatrième**, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.



Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !

Ici, $A:B = 2/3 > 1/2 = C:D$

ouf...

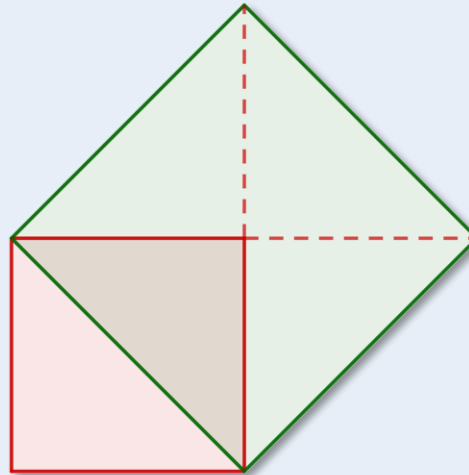
plus d'explications sur les rapports

sur les ratios : explications supplémentaires

- La définition la plus importante (V.5) concerne **l'égalité entre deux ratios**.
- Dans le livre VII, on définit l'égalité entre ratios de nombres (entiers positifs), en termes de « parties d'entiers ».
- Pour des grandeurs générales, cette définition n'est pas suffisante – il existe des ratios qu'on ne peut exprimer ainsi.
- L'astuce brillante dans la **définition V.5** consiste à considérer **des suites de multiples entiers de deux grandeurs**, et à regarder comment ces suites « s'intercalent ».
- On définit alors que deux paires de grandeurs sont dans le même ratio si les paires de suites correspondantes s'intercalent de la même façon.

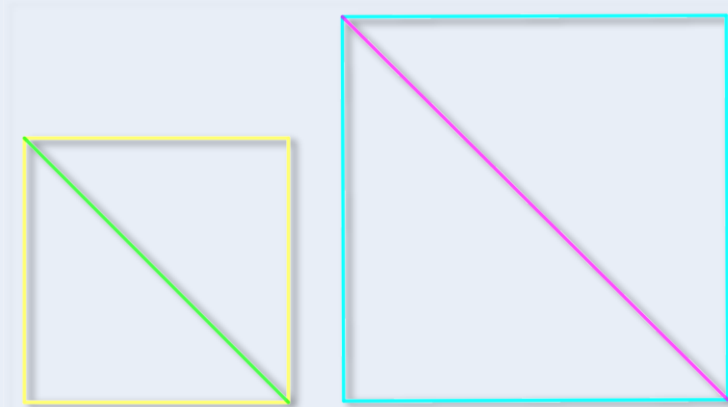
sur les ratios : exemple

- La diagonale d'un carré est proportionnelle à son côté.



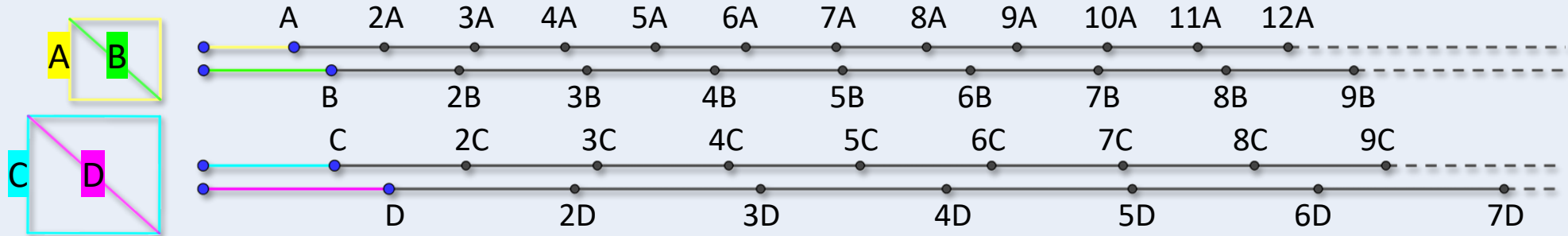
sur les ratios : exemple

- Autrement dit, étant donnés deux carrés, le côté de l'un est à la diagonale de l'un comme le côté de l'autre est à la diagonale de l'autre.



sur les ratios : exemple

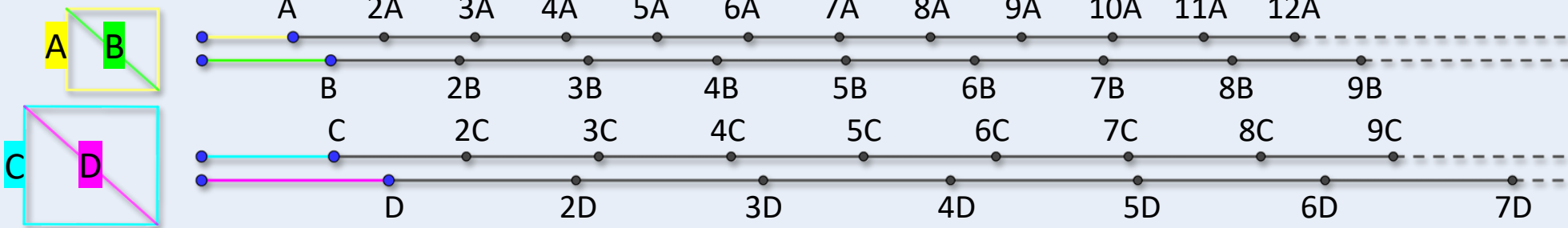
- Pour le prouver, il suffit de constater que si on intercale les suites de multiples entiers d'un côté de carré (**A** ou **C**) et de sa diagonale (**B** ou **D**), alors
- les suites s'intercalent toujours de sorte que
- $A < B < 2A < 2B < 3A < 4A < 3B < 5A < 4B < 6A < 7A < 5B < 8A < 6B < \dots$
- Les alternances sont les mêmes pour **C** et **D**, et ce jusqu'à l'infini.



les coupures de Dedekind

- On identifie les nombres réels à l'ensemble des façons de « couper » les nombres rationnels en deux parties.

$A:B = C:D$
 Si et seulement si pour tous m, n choisis
 $mA > nB, mC > nD$
 OU
 $mA = nB, mC = nD$
 OU
 $mA < nB, mC < nD$



$$mA > nB \Leftrightarrow \frac{A}{B} > \frac{n}{m}$$

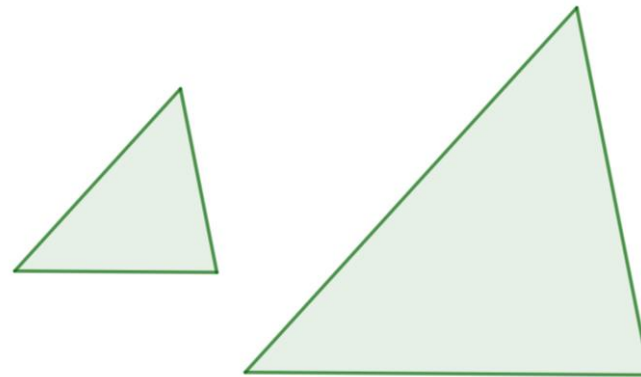
Pour toute paire m, n , on détermine si $\frac{n}{m}$ est plus petit ou plus grand que $\frac{A}{B}$. On dit que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ si ils séparent les rationnels au même endroit. C'est EXACTEMENT ce que fait Euclide !

proportions geometriques

Livre VI

Livre IV – Définitions

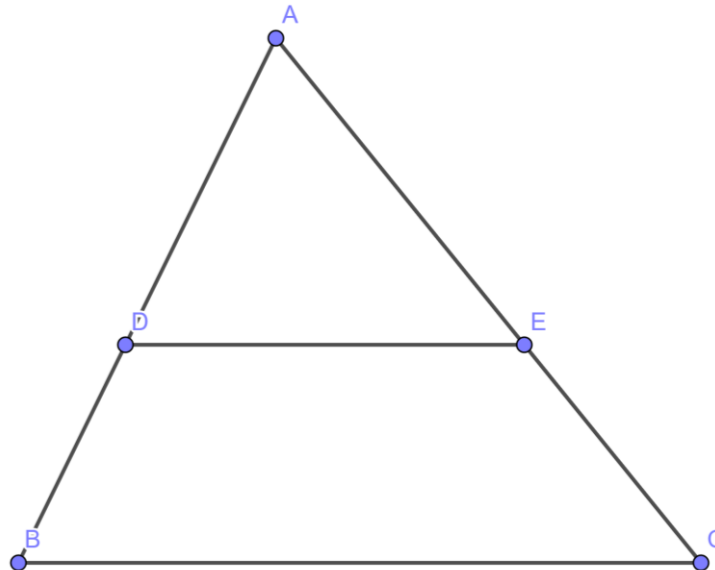
VI.1 Des figures rectilignes **semblables** sont celles qui ont les angles égaux un par un et dont les côtés autour des angles égaux sont en proportion.



théorème de Thalès

Proposition VI.2

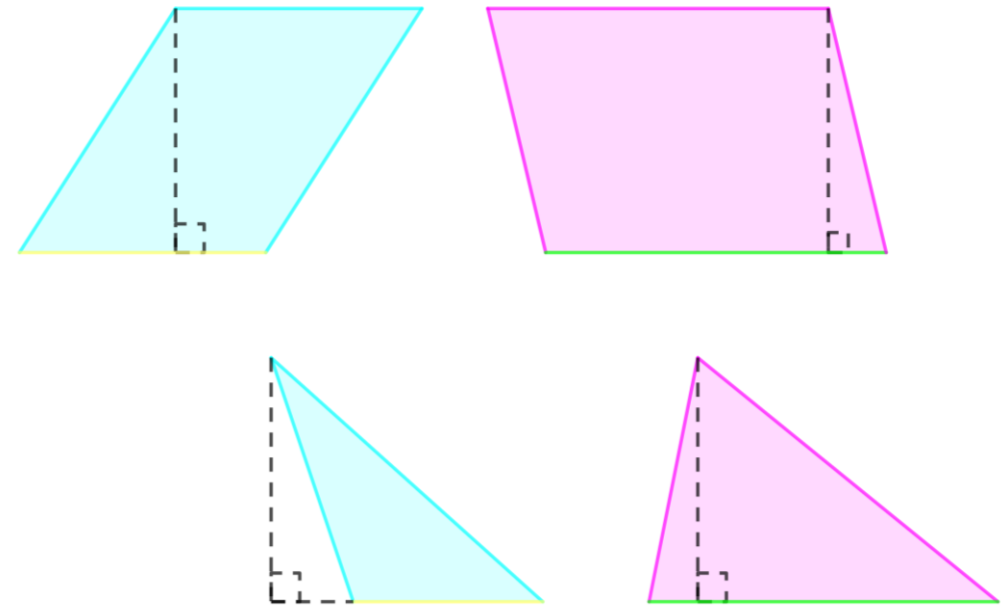
Si une droite coupe un triangle parallèlement à la base, le plus petit triangle est semblable au plus grand.



proportionnalité d'aires

Proposition VI.1

Les aires de triangles ou de parallélogrammes ayant la même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.

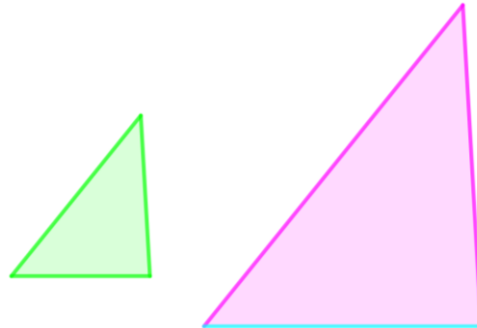


proportionnalité d'Aires

Proposition VI.19

Les aires de triangles semblables sont entre elles comme le rapport doublé* entre les côtés homologues des triangles.

*le carré

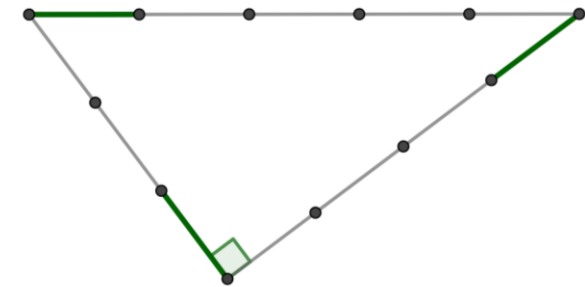


Chapitre IV : au-delà

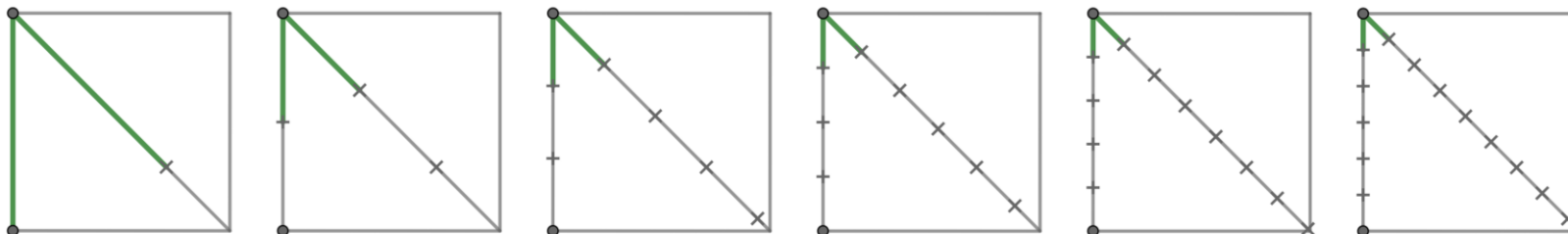
Livres X, XI à XIII
Résonnances modernes

(In)commensurabilité : Définition

X.1 Les grandeurs **commensurables** sont celles qui sont mesurées par la même grandeur, et sont **incommensurables** celles qui n'ont aucune commune mesure.



Les trois côtés de ce triangle rectangle sont commensurables.



Ici ça passe proche, mais c'est pas tout à fait ça!

...

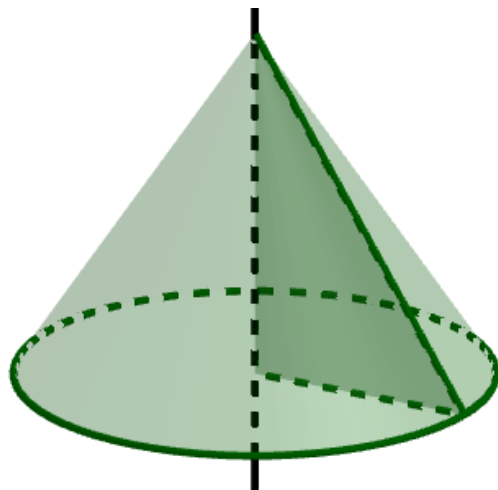
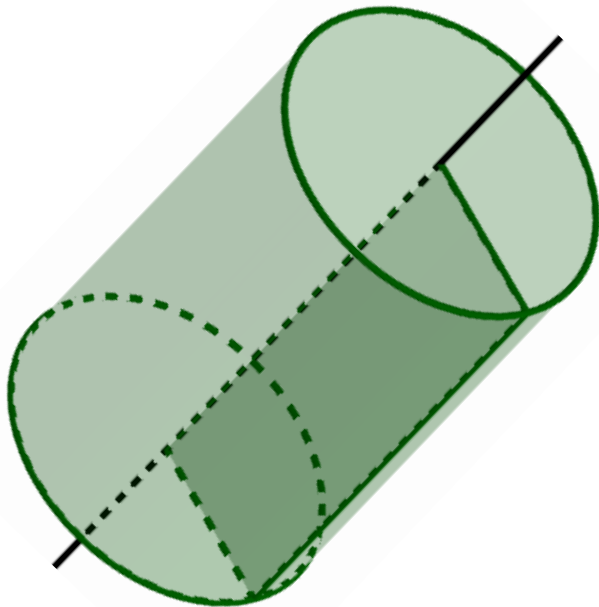
Le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables.

livre X : classification des irrationnels

- À l'époque, on connaît mal les nombres irrationnels.
- Le livre X (presque 25% de tous les livres des Éléments) est consacré à tenter de donner une classification des nombres irrationnels.
- Il s'agit d'un exercice qui aujourd'hui paraît entièrement futile...

livres XI à XIII : géométrie solide

- Le livre XI fait introduit des notions de base de géométrie en 3D.
- Le livre XII donne des propositions concernant les proportions entre les volumes et les surfaces de solides.



$$V = \frac{B \times h}{3}$$

livres XI à XIII : la géométrie solide

- Le livre XIII se consacre presque exclusivement à la construction des cinq solides platoniciens.



Octaèdre



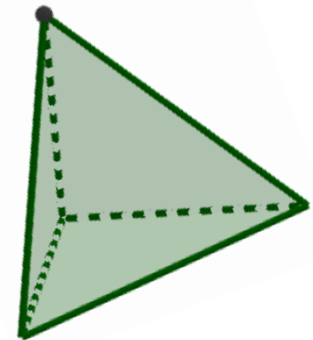
Icosaèdre



Cube



Dodécaèdre



Tétraèdre

résonnances modernes

- Euclide jette les bases de plusieurs disciplines modernes :
 - la géométrie, bien sûr, mais aussi
 - L'algèbre
 - La théorie des nombres
 - L'analyse
- plusieurs de ses idées sont des formes primitives des notions qui, encore aujourd'hui, sont au cœur de notre compréhension des mathématiques.

« En lisant Euclide, j'ai rencontré plein de formulations étranges, et d'autres qui m'étaient étrangement familières. Les bizarreries anachroniques côtoient des sursauts presque prophétiques, et sur fond de jolies figures tracées par erreur au marqueur permanent sur mon tableau blanc, ce sont les racines, profondes mais connectées, des mathématiques que j'aime, qui ressortent en filigrane. Un peu comme les premières esquisses de poulet qu'un paléontologue découvrirait avec émotion dans le fossile d'un tyrannosaure. »