UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Modelarea Unei Funcții Necunoscute

PROIECT - PARTEA I

Studenți: **PILUG** Elisei
BOTA Horia
CRUCERU Claudiu

N: 17
GRUPA: 30135
Îndrumător de proiect: Ing. Vicu-Mihalis **MAER**
Îndrumător: Prof. Dr. Ing.Lucian **BUȘONIU**

CUPRINS

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

01

Descrierea Problemei

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

În prima parte a proiectului se dorește modelarea unei funcții necunoscute ce reprezintă un sistem cu o intrare și o ieșire. Astfel, ne vom folosi de metoda regresiei liniare pentru a crea un aproximator polinomial de grad configurabil și pentru a studia comportamentul acestuia. Acest aproximator este antrenat pe baza setului de date de identificare și validat pe cel de validare.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

02

Structura Aproximatorului

Regresia Liniară

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Regresia liniară (sau metoda celor mai mici pătrate) este un algoritm de predicție care studiază relația dintre două variabile continue (în cazul nostru, intrarea și ieșirea sistemului) pentru a prezice valorile variabilei dependente (ieșirea) în funcție de variabila independentă (intrarea).

În cazul nostru, vom antrena un aproximator cu un polinom de grad configurabil de următoarea formă:

$$m = 2, \quad \hat{g}(x) = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2] \cdot \theta = \theta_1 + \theta_2 x_1 + \theta_3 x_2 + \theta_4 x_1^2 + \theta_5 x_2^2 + \theta_6 x_1 x_2$$

, unde **m** este gradul polinomului iar **Θ_1**… reprezintă coeficienții polinomului.

Obținerea soluției

Pentru a obține o soluție validă a aproximatorului, trebuie să construim un sistem de ecuații pe baza variabilelor de intrare și ieșire și să-l rezolvăm pentru a obține vectorul de parametrii $\boldsymbol{\Theta}$ al sistemului. Fiecare variabilă de intrare poate fi scrisă ca rezultat al ecuației polinomiale descrise anterior. Astfel:

$$
\begin{aligned}
y(1) &= \varphi_1(1)\theta_1 + \varphi_2(1)\theta_2 + \dots \varphi_n(1)\theta_n \\
y(2) &= \varphi_1(2)\theta_1 + \varphi_2(2)\theta_2 + \dots \varphi_n(2)\theta_n \\
&\dots \\
y(N) &= \varphi_1(N)\theta_1 + \varphi_2(N)\theta_2 + \dots \varphi_n(N)\theta_n
\end{aligned}
$$

,unde φ1… reprezintă termenii polinomului ales

Obținerea soluției*

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Acest sistem poate fi rescris sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \dots & \varphi_n(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \dots & \varphi_n(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Y = \Phi\theta}$$

Ne vom folosi de această formă matriceală pentru a rezolva sistemul de ecuații și a obține aproximatorul.

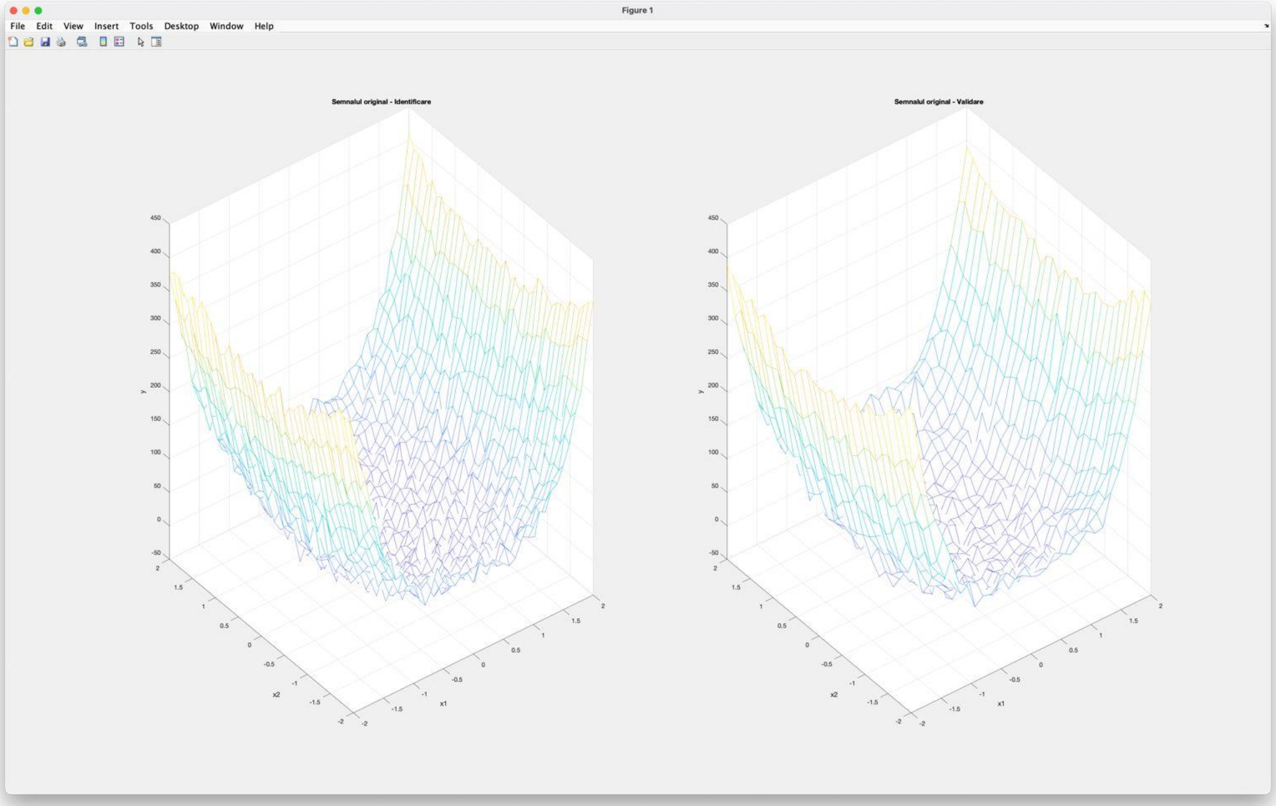
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

03

Caracteristici Esențiale Ale Soluției

Reprezentarea Datelor Inițiale

Am reprezentat setul de date primit, atât semnalul de identificare, cât și cel de validare.



Determinarea matricei THETA (Matricea de Parametri)

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pentru obținerea matricei de parametri am urmat următorii pași:

- Am creat matricea PHI pe baza formei matriceale a sistemului de ecuații;
- Pentru a calcula toate valorile din PHI, am creat o funcție *calcul_regresori* care calculează câte o linie a matricei PHI
- Am transformat datele de ieșire date, *Y_id*, dintr-o matrice de 41x41, într-un vector coloană de 1681x1 Y, folosind funcția custom *coloana*
- Am calculat matricea THETA din formula PHI\Y (notăm faptul că operatorul “\” rezolvă ecuația înmulțind cu inversa lui PHI la dreapta)

Calculul modelului aproximat polinomial

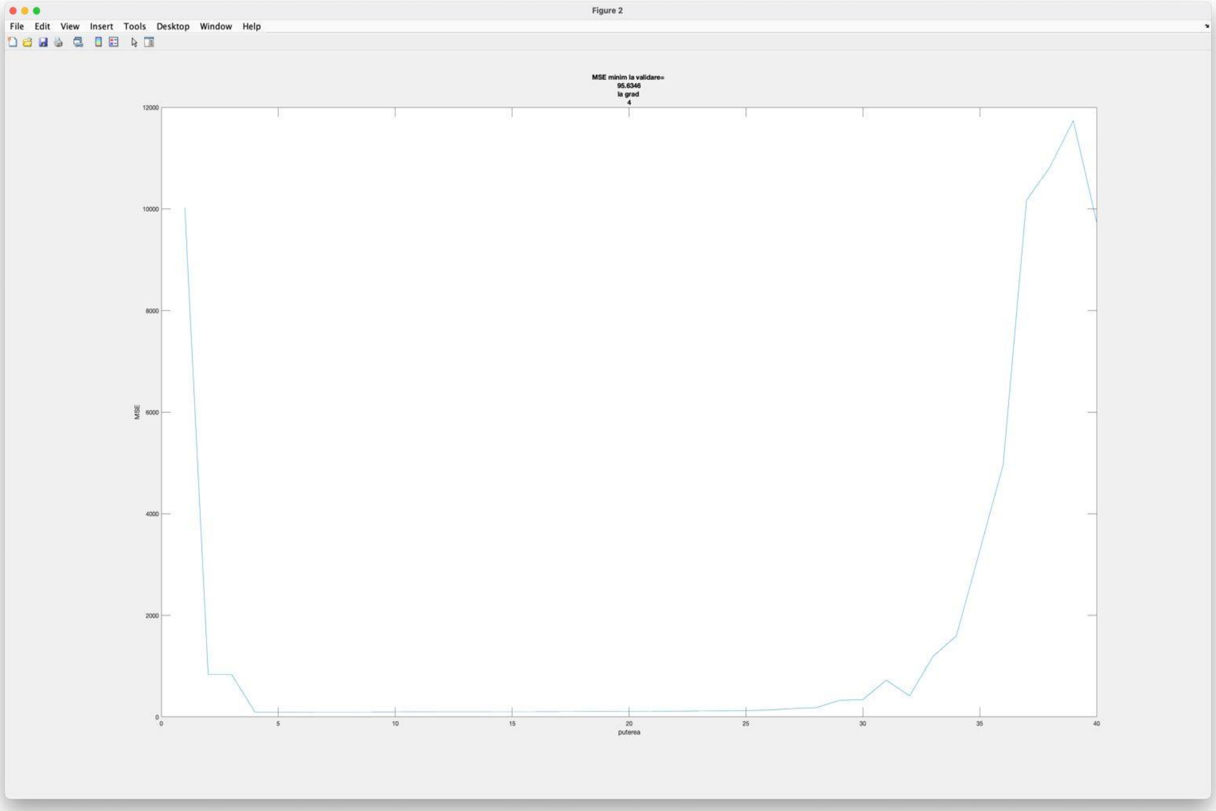
Pentru a creea matricea de ieșire aproximată, am înmulțit vectorul PHI cu vectorul THETA obținând astfel noul vector Y_aprox. Acest vector l-am trecut apoi prin funcția *matrice* pentru a-l aduce la forma dorită, și anume o matrice de 41x41

04

Rezultate de Acordare

Determinarea erorii minime

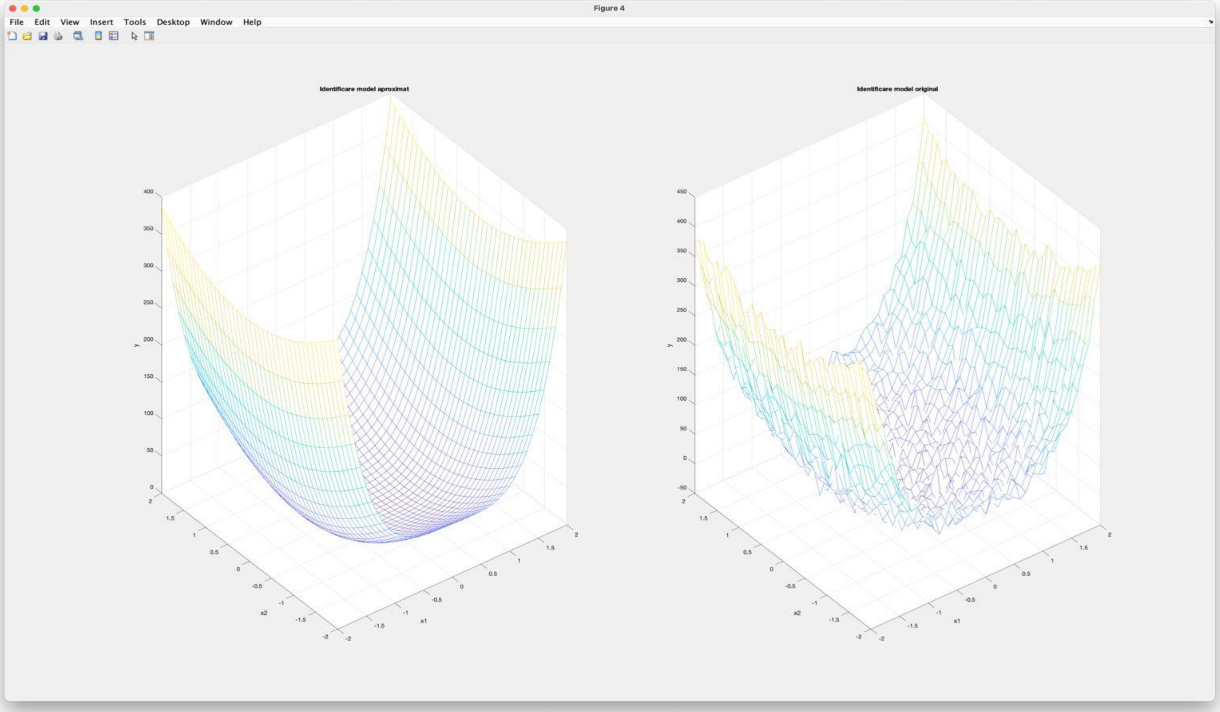
Pentru a determina gradul optim al aproximatorului polinomial, am rulat toți pașii menționați anterior de mai multe ori pe setul de validare, incrementând valoarea gradului polinomului de la 1 la 40. Am obținut astfel următorul grafic:



Determinarea Polinomului Optim de Aproximare

Având eroarea minimă calculată la pasul anterior, ne-am folosit de index-ul acestei valori pentru a calcula polinomul optim, acesta având gradul 4.

Am calculat apoi ieșirile optime aproximate, atât pentru identificare, cât și pentru validare.



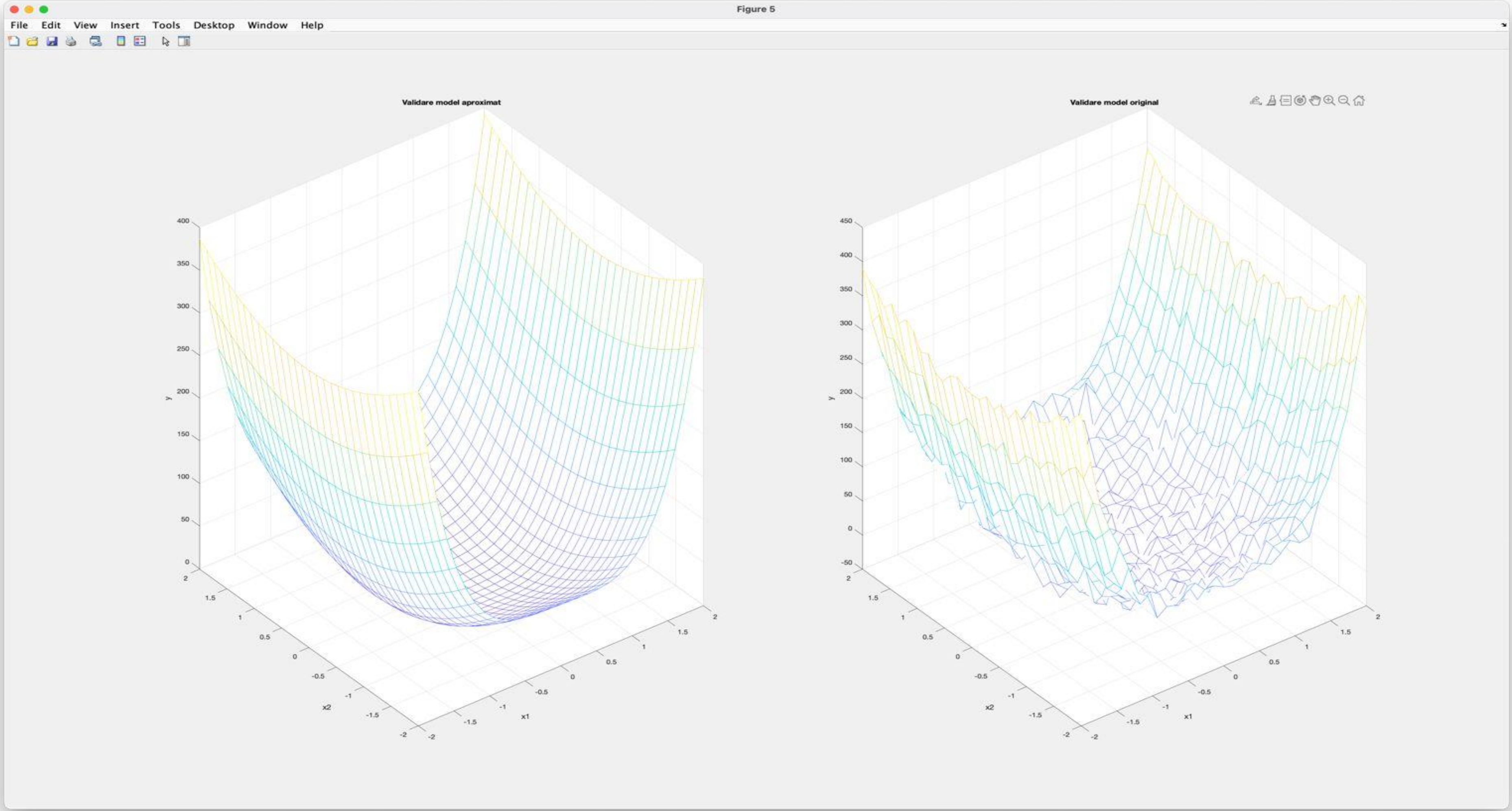


Figure 5
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Validare model aproximat
y
400
350
300
250
200
150
100
50
0
x2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
x1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
Validare model original
y
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
x2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
x1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

05

Concluzii

Din graficele prezentate, putem observa că aproximarea se îmbunătățește odată cu creșterea gradului polinomului, dar la un moment dat devine supra-antrenat. Așadar, observăm că gradul la care polinomul are eroarea minimă este 4.

Mulțumim pentru atenție