Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

Temas de la clase

- ODEs de 2do orden
- Ejemplos
- Ejercicios

ODEs de 2do orden

- ODEs de primer orden son raros en física. Mayoría de ecuaciones en física son de 2do orden y mayores.
- Forma general de ODE de 2do orden con 1 variable dependiente x es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$$

Segunda derivada puede ser cualquier función arbitraria, quizás una combinación no lineal de x, t y $\frac{dx}{dt}$. Por ejemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x}(\frac{dx}{dt})^2 + 2\frac{dx}{dt} - x^3e^{-4t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x}(\frac{dx}{dt})^2 + 2\frac{dx}{dt} - x^3e^{-4t}$$

Hagamos truco:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

de manera que $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$ se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, t)$$

Redujimos ODE de 2do orden a 2 ecs. simultáneas de 1er orden.

ODEs de orden superior

- Para el caso de ODEs de orden superior.

$$\frac{d^3x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t)$$

Definimos 2 variables adicionales:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = z$$

de manera que:

$$\frac{dz}{dt} = f(x, y, z, t)$$

Redujimos ODE de 3er orden a 3 ecs. simultáneas de 1er orden.

ODEs de orden superior con varias variables

- ODE de orden mayor que 3 son raras en física.
- El método puede generalizarse a ecs. con más de 1 variable dependiente usando forma vectorial:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = f(r, \frac{dr}{dt}, t)$$

que es equivalente a ecs. de primer orden

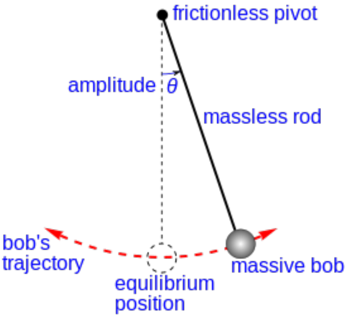
$$\frac{dr}{dt} = s, \qquad \frac{ds}{dt} = f(r, s, t)$$

Si comenzamos con 2 ecs. simultáneas de 2do orden, entonces terminamos con 4 ecs. simultáneas de 1er orden.

$$\frac{dz}{dt} = f(x, y, z, t)$$

ODEs de orden superior. Ejemplo péndulo no lineal

- Péndulo lineal: Problema estándar en física
- Se aproxima comportamiento de péndulo por ec. diferencial lineal que se puede resolver exactamente.
- PERO péndulo real es no lineal.
- Consideremos péndulo de longitud l y masa m
- Aceleración de m es $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ en dirección tangencial.
- Fuerza mg actúa en la vertical sobre m. Se ignora fricción y masa de cuerda.



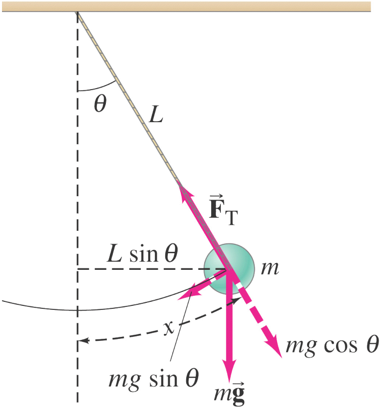
- 2da Ley de Newton para el péndulo queda:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

- Ec. no lineal. Hay que resolver numéricamente. Díficil resolver analíticamente.
- Definimos nueva variable $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

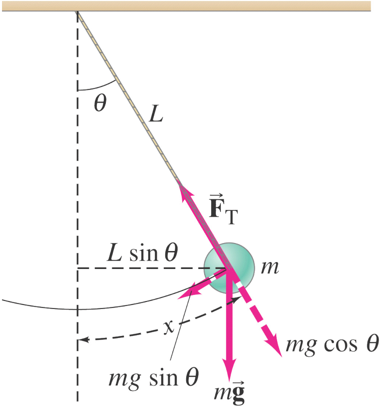


- Nos quedan 2 ecs. de primer orden:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

- Combinamos ambas variables en $r(\theta, \omega)$
- Aplicamos forma vectorial para resolver 2 ecuaciones simultáneamente.



Ejercicio 8.4

Ejercicio: Escriba un programa que resuelva el sistema de ecuaciones siguientes para el movimiento de un péndulo de 10 cm de largo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

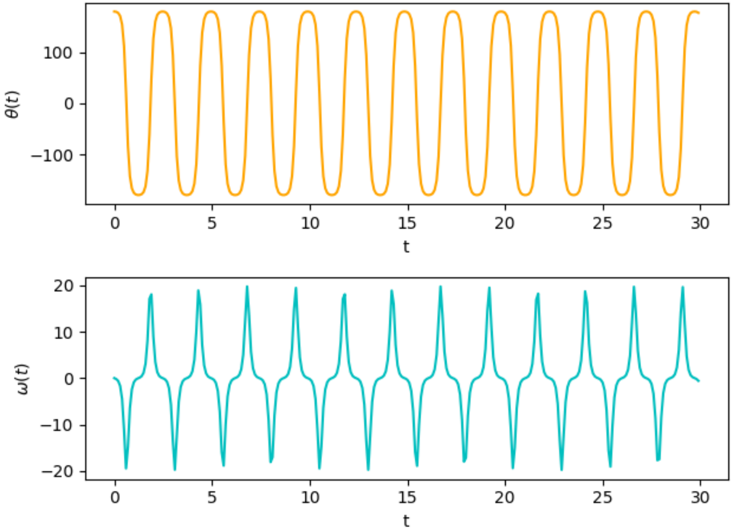
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

- Calcular $\theta(t)$ para varios períodos del péndulo si este se lanza desde un ángulo $\theta = 179^o$
- Haga un plot de $\theta(t)$ en función del t

Ejercicio 8.4

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def func(r,t):
-     theta = r[0]; omega = r[1]
-     dthedt = omega; domedt = - g0/ll*np.sin(theta)
-     return np.array([dthedt, domedt],float)
- a = 0.0; b = 50.0; N = 500; g0 = 9.81
- t = np.linspace(a,b,N); ll = 0.1 # 10 cm longitud
- r0 = np.array([np.radians(179), 0.0])
- rp = odeint(func, r0, t)
- plt.clf() plt.subplot(2,1,1)
- plt.plot(t, np.degrees(sol[:,0]),'orange')
- plt.xlabel('t') plt.ylabel(r'$\theta(t)$')
- plt.subplot(2,1,2); plt.plot(t, sol[:,1],'-c')
- plt.xlabel('t') plt.ylabel(r'$\omega(t)$')

Ejercicio 8.4



Ejercicio: La siguiente ODE de 2do orden para el ángulo θ de un péndulo que actúa bajo la gravedad y la acción de la fricción es:

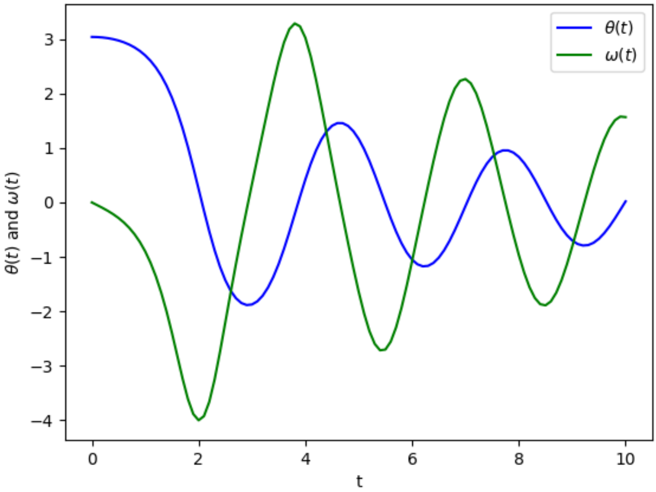
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + c\sin\theta = 0$$

- Haga un programa que resuelva esta ecuación en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 10$
- Haga un gráfico $\theta(t)$ y $\omega(t)$ en función del tiempo
- Asuma que $b = 0.25$ y $c = 5.0$
- En la condición inicial $\theta = \pi - 0.1$ y $\omega = 0$

Ejercicio: Péndulo con fricción

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def pend(y, t, b, c):
-     theta, omega = y
-     dydt = [omega, -b*omega - c*np.sin(theta)]
-     return dydt
- b = 0.25; c = 5.0
- y0 = [np.pi - 0.1, 0.0]
- t = np.linspace(0, 10, 101)
- sol = odeint(pend, y0, t, args=(b, c))
- plt.clf()
- plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label=r'$\theta(t)$')
- plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label=r'$\omega(t)$')
- plt.ylabel(r'$\theta(t)$ and $\omega(t)$')
- plt.legend(loc='best'); plt.xlabel('t')

Ejercicio: Péndulo con fricción



Ejercicio:

Ejercicio: Dada la siguiente ecuación diferencial:

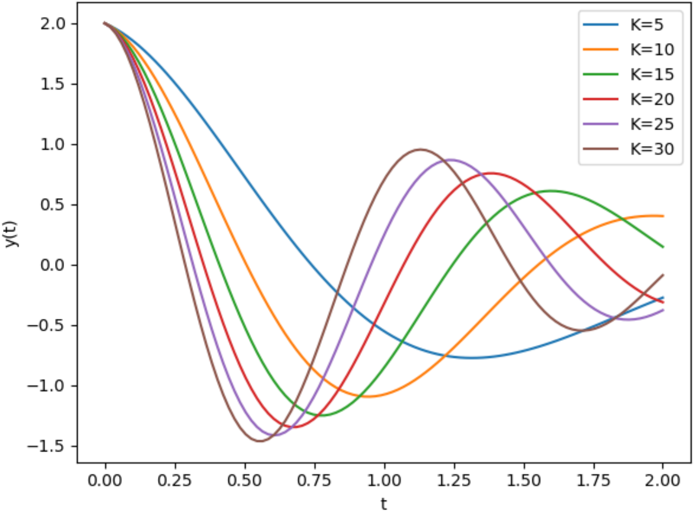
$$\frac{d^2y}{dt^2} + (0.9 + 0.7t)\frac{dy}{dt} + Ky = 0$$

- Haga un programa que resuelva esta ecuación en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 2$ para distintos valores de K en el rango 5-30, de 5 en 5
- Plotee en un mismo gráfico $y(t)$ en función del tiempo para cada uno de los valores de K
- En la condición inicial $y(0) = 2$ y $y'(0) = -1$

Ejercicio:

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def func(r, t, K):
-     y = r[0]; z = r[1]
-     dydt = z; dzdt = -(0.9 + 0.7*t)*z - K*y
-     return np.array([dydt, dzdt], float)
- r0 = [2.0, -1]; t = np.linspace(0, 2, 100)
- plt.clf()
- for ii in range(5,35,5):
-     sol = odeint(func, r0, t, args=(ii,))
-     plt.plot(t, sol[:, 0], label='K='+str(ii))
- plt.ylabel('y(t)'); plt.legend(); plt.xlabel('t')

Ejercicio



K=5
K=10
K=15
K=20
K=25
K=30
y(t)
t
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Exercise 8.5: The driven pendulum

A pendulum like the one in Exercise 8.4 can be driven by, for example, exerting a small oscillating force horizontally on the mass. Then the equation of motion for the pendulum becomes

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta + C\cos\theta\sin\Omega t,$$

where C and Ω are constants.

a) Write a program to solve this equation for θ as a function of time with $\ell = 10\,\mathrm{cm}$, $C = 2\,\mathrm{s}^{-2}$ and $\Omega = 5\,\mathrm{s}^{-1}$ and make a plot of θ as a function of time from $t = 0$ to $t = 100\,\mathrm{s}$. Start the pendulum at rest with $\theta = 0$ and $d\theta/dt = 0$.

b) Now change the value of Ω, while keeping C the same, to find a value for which the pendulum resonates with the driving force and swings widely from side to side. Make a plot for this case also.

Ejercicio 8.6: Oscilador armónico

- El oscilador armónico simple aparece en muchos problemas de física. Está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Resuelva esta ecuación para el caso $\omega = 1$ en el rango entre $t = 0$ y $t = 50$
- Como condición inicial $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$
- Haga un gráfico $x(t)$ en función del tiempo
- Repita ejercicio usando 2 nuevas condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $x(0) = 4$, para $x'(0) = 0$
- Que pasa con el período de las oscilaciones?

Ejercicio 8.6: Oscilador armónico

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def func(r, t):
-     omega = 1; x = r[0]; y = r[1]
-     dxdt = y; dydt = -omega**2*x
-     return np.array([dxdt, dydt], float)
- r0 = [[1, 0],[2, 0],[4, 0]]; t = np.linspace(0, 50, 100)
- lab_p = ['-k', '-b', '-r']
- plt.clf()
- for ii in range(3):
-     sol = odeint(func, r0[ii], t)
-     plt.plot(t, sol[:, 0], lab_p[ii])
- plt.ylabel('x(t)'); plt.ylim(-4,5)
- plt.legend(('A=1','A=2', 'A=4'),loc=1); plt.xlabel('t')

Ejercicio 8.6: Oscilador armónico