Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

Temas de la clase

- Soluciones sobre rangos infinitos
- Ejemplos
- Ejercicios

Soluciones sobre rangos infinitos

- Hemos encontrado las soluciones a ODEs comenzando en condición inicial para un rango finito de t
- Hay casos que queremos encontrar solución en el rango $t \to \infty$
- Podemos usar el siguiente truco haciendo un cambio de variable:
- Definimos:

$$u = \frac{t}{1+t} \quad \text{o equivalentemente} \quad t = \frac{u}{1-u}$$

de manera que cuando $t \to \infty$, se obtiene $u \to 1$

Soluciones sobre rangos infinitos

- Usamos regla de la cadena para describir $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ como:

$$\frac{dx}{du}\frac{du}{dt} = f(x,t)$$

- Recordando que

$$u = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{u}{1-u}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{dt}{du} f(x, \frac{u}{1-u})$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{(1-u)^2}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{(1-u)^2} f(x, \frac{u}{1-u}) = g(x,u)$$

Soluciones sobre rangos infinitos

$$u = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{u}{1-u}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{(1-u)^2} f(x, \frac{u}{1-u}) = g(x,u)$$

$$\frac{dx}{du} = g(x,u)$$

- ODE de 1er orden para valores de u hasta 1 es equivalente a resolver ecuación orginal para valores de $t \to \infty$.
- Obtenemos soluciones $x(u)$ y usando $t = \frac{u}{1-u}$ obtenemos $x(t)$

Ejemplo: Resolver ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x^2+t^2}$ desde $t = 0$ a $t \to \infty$ con $x = 1$ en $t = 0$

$$u = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{u}{1-u}$$

$$g(x,u) = \frac{1}{(1-u)^2} f(x, \frac{u}{1-u})$$

$$g(x,u) = \frac{1}{(1-u)^2}\left(\frac{1}{x^2 + u^2/(1-u^2)}\right) = \frac{1}{x^2(1-u)^2 + u^2}$$

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo

Ejemplo: Resolver ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x^2+t^2}$ desde $t = 0$ a $t \to \infty$ con $x = 1$ en $t = 0$

$$u = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{u}{1-u}$$

Hay que resolver ecuación:

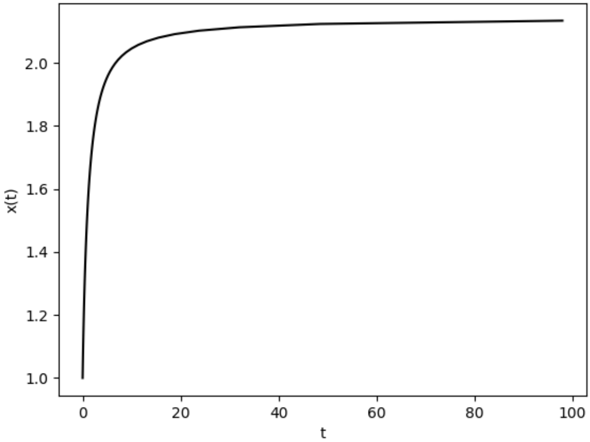
$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{x^2(1-u)^2 + u^2}$$

desde $u = 0$ a $u = 1$ con la condición inicial $x = 1$ en $u = 0$

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- # Función que entrega dx/dt
- def model(x,u):
-     dxdu = 1/(x**2*(1-u)**2 + u**2)
-     return dxdu
- x0 = 1.0 # Condición inicial
- u = np.linspace(0,0.99,100); t = u/(1 - u)
- xp = odeint(model, x0, u) # Resolver ODE
- plt.clf()
- plt.plot(t, xp, '-k')
- plt.ylabel('x(t)'); plt.xlabel('t')

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo



- Se crea arreglo t y se usa al final para plotear $x(t)$ de 0 a 100

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo

- La transformación expresada por ecuaciones:

$$u = \frac{t}{1+t}$$

$$t = \frac{u}{1-u}$$

funciona bien en mayoría de los casos

- Otras transformaciones basadas en funciones trigonométricas, hiperbólicas, etc, pueden usarse en otros casos

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo

Ejercicio: Resolver ec. diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x+t}$ desde $t = 0$ a $t \to \infty$ con $x = 2$ en $t = 0$

Ejercicio: Resolver ec. diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x+t}$ desde $t = 0$ a $t \to \infty$ con $x = 2$ en $t = 0$

$$u = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{u}{1-u}$$

$$g(x,u) = \frac{1}{(1-u)^2} f(x, \frac{u}{1-u})$$

$$g(x,u) = \frac{1}{(1-u)} \left(\frac{1}{x - xu + u} \right)$$

Hay que resolver ec.:

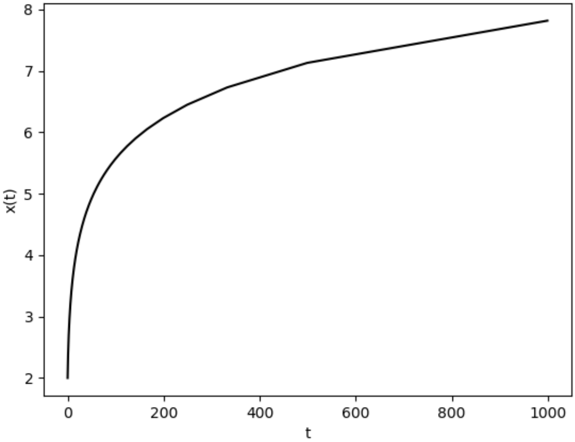
$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{(1-u)} \left(\frac{1}{x - xu + u} \right)$$

desde $u = 0$ a $u = 1$ con la cond. inicial $x = 2$ en $u = 0$

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
# Función que entrega dx/dt
def model(x,u):
    dxdu = 1/(1-u)*1/(x-x*u+u)
    return dxdu
x0 = 2.0 # Condición inicial
u = np.linspace(0,0.99,100); t = u/(1 - u)
xp = odeint(model, x0, u) # Resolver ODE
plt.clf()
plt.plot(t, xp, '-k')
plt.ylabel('x(t)'); plt.xlabel('t')
```

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo



Ejercicio

Ejercicio: Resolver ODE $5\frac{dy}{dt} = -y(t) + u(t)$ en el intervalo $t = (0 - 50)$ con la condición inicial $y(t = 0) = 1$ y $u = 0$ para $t < 10$ y $u = 2$ para $t \geq 10$

Ejercicio

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def model(y, t):
-     if t < 10:
-         u = 0.0
-     else:
-         u = 2
-     dydt = (-y + u)/5
-     return dydt
- y0 = 1.0 # Condición inicial
- t = np.linspace(0,50,200)
- yp = odeint(model, y0, t) # Resolver ODE
- plt.clf()
- plt.plot(t, yp, '-k')
- plt.ylabel('y(t)'); plt.xlabel('t')

Soluciones sobre rangos infinitos. Ejemplo