Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

Temas de la clase

- Ecuaciones lineales simultáneas
- Método de pivote
- Decomposición LU
- Ejemplos

- En clase anterior resolvimos sistema de ecuaciones usando Eliminación Gaussiana:

$$\begin{aligned} 2w + x + 4y + z &= -4 \\ 3w + 4x - y - z &= 3 \\ w - 4x + y + 5z &= 9 \\ 2w - 2x + y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones lineales simultáneas

- Queremos resolver ahora el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Primer elemento de matriz es 0.
No podemos realizar primer paso método eliminación Gaussiana.

Ecuaciones lineales simultáneas

- Queremos resolver ahora el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Primer elemento de matriz es 0.
No podemos realizar primer paso método eliminación Gaussiana.

Método de Pivote

Intercambiar las filas de la matriz para resolver el problema

Método pivote parcial

- Cómo hacer el método de Pivote?
- Método de 'Pivote Parcial' es un esquema general que funciona en mayoría de casos
- Se reorganizan filas en cada etapa
- Se compara elemento 'm' en fila 'm' con elementos 'm' en filas inferiores
- Se escoge fila 'm+n' que tenga elemento 'm' mayor en magnitud
- Se reemplaza fila 'm' por fila 'm+n'
- Se realiza Eliminación Gaussiana

- Método de 'Pivote Parcial'

Matriz original

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Método Pivote

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.2

Modifique el programa gausselim.py del Ejemplo 6.1 para que incorpore el método de pivote parcial.

- Corra el programa para el ejemplo 6.1 para demostrar que obtiene el mismo resultado
- Modifique el programa para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

- Método de eliminación Gaussiana con pivote es confiable y se usa ampliamente.
- Sin embargo, muchas aplicaciones requieren resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ con misma matriz A pero diferentes vectores v.
- Más eficiente hacer eliminación Gaussiana completa UNA VEZ, guardar operaciones realizadas y aplicarlas a muchos vectores $\mathbf{v}$.
- Existe una variante de eliminación Gaussiana que hace esto y se llama FACTORIZACION LU.

Factorización LU

$$LU = A$$

- Grupo de ecs. $Ax = v$ puede escribirse como: $LUx = v$
- Lo bueno de ecuación es que U es matriz triangular superior y L es matriz triangular inferior
- Este es método de Factorización LU: es una versión del método EG.

Factorización LU

- Ecuación $LU = A$ se llama factorización LU de matriz A.
- A es igual al producto de matriz triangular inferior L y matriz triangular superior U
- Una vez calculada la factorización LU de A, podemos resolver $Ax = v$

Factorización LU

- Ecuación $LU = A$ se llama factorización LU de matriz A.
- A es igual al producto de matriz triangular inferior L y matriz triangular superior U
- Una vez calculada la factorización LU de A, podemos resolver $Ax = v$

Ejemplo: caso 3×3

En general, factorización de A queda:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

- Sustituyendo en $LUx = v$:

$$\begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Definiendo nuevo vector y:

$$\begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

- Sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Quedaría:

$$\begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

- Problema original quedó dividido en resolver dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Resolviendo primero el sistema para y, después podemos sustituir y resolver para x.
- 2 nuevos problemas solo conlleva resolver 2 matrices triangulares por sustitución hacia atrás.
- Problema muy fácil de resolver.

Factorización LU en Python

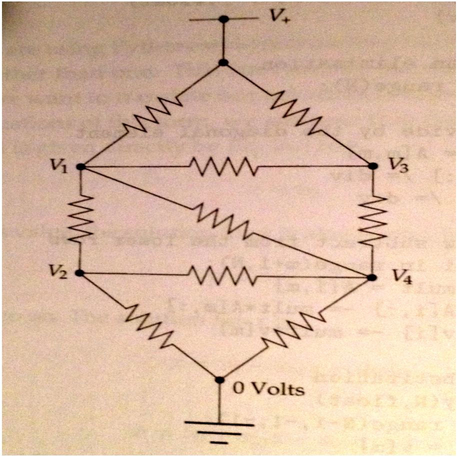
- Módulo linalg de numpy ofrece funciones para resolver ecuaciones simultáneas.
- Función 'solve' resuelve sistema de ecuaciones lineales del tipo $Ax = v$ usando factorización LU y sustitución hacia atrás
- #### Usando paquete numpy ########
- import numpy as np
- C = np.linalg.solve(A, B); print(C)
- ###### Usando paquete scipy #######
- from scipy import linalg
- D = linalg.solve(A, B); print(D)

Problema ejemplo: Circuito de resistores

Problema: Considere el siguiente circuito de resistores:

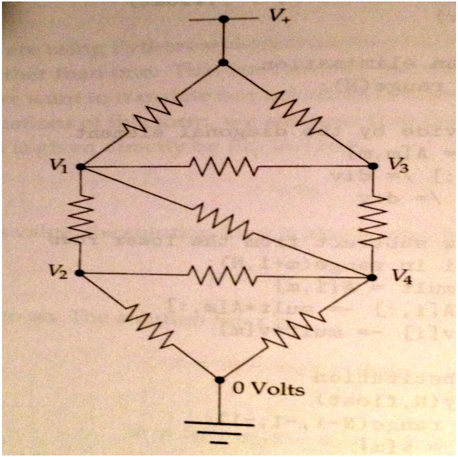
- Todos los resistores tienen resistencia R. $V_+ = 5V$.
- Cuál es el valor de los otros voltajes V_1, V_2, V_3 y V_4?
- Usar Ley de Ohm: $V = I \cdot R$
- Usar Ley de corrientes de Kirchhoff:

$$\sum I_i = \sum I_o$$



Problema ejemplo: Circuito de resistores

Problema: Considere el siguiente circuito de resistores:



- Usando Ley de Ohm y Ley de corrientes de Kirchhoff para unión en V_1 tenemos:

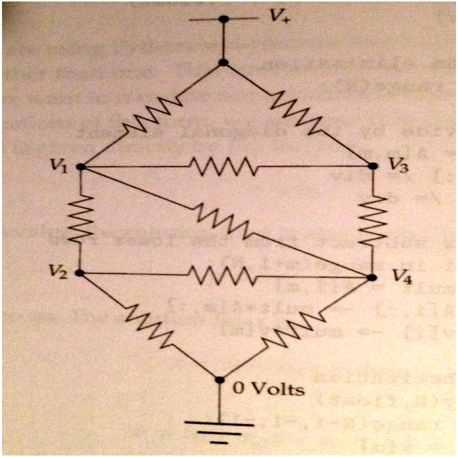
$$\frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_3}{R} + \frac{V_1 - V_4}{R} + \frac{V_1 - V_+}{R} = 0$$

$$4V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = V_+$$

Problema ejemplo: Circuito de resistores

Problema: Considere el siguiente circuito de resistores:

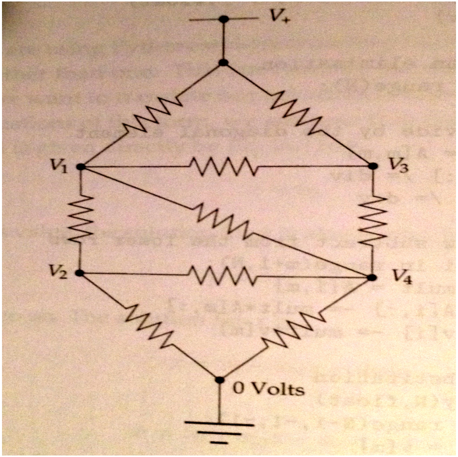
- $4V_1$-V_2-V_3-$V_4 = V_+$
- a) Escriba ecs. similares para las otras 3 uniones:
- b) Escriba un programa que resuelva las 4 ecs. resultantes usando el método de eliminación Gaussiana para encontrar V_1, V_2, V_3 y V_4.



Problema ejemplo: Circuito de resistores

Sist. de ecuaciones:

- $4V_1$-V_2-V_3-$V_4 = V_+$
- $-V_1 + 3V_2 + 0 - V_4 = 0$
- $-V_1 + 0 + 3V_3 - V_4 = V_+$
- $-V_1 - V_2 - V_3 + 4V_4 = 0$



Código de Python usando función solve

- #### Usando paquete numpy ########
- import numpy as np
- A = np.array([[4, -1, -1, -1], [-1, 3, 0, -1], [-1, 0, 3, -1], [-1, -1, -1, 4]])
- B = np.array([5, 0, 5, 0])
- C = np.linalg.solve(A, B); print(C)
- F = np.dot(A, C)
- print(B)
- print(F)

Soluciones:
$V_1 = 3, \ V_2 = 1.66666, \ V_3 = 3.33333, \ V_4 = 2$

Ejercicio

Una pizzería vende 20 pizzas y 10 lasañas en un día por un total de 350 mil pesos. El siguiente día la pizzería vende 17 pizzas y 22 lasañas por un total de 500 mil pesos. Si el precio de las pizzas y lasañas se mantuvo constante. Cuál es el valor de una pizza y una lasaña

Ejercicio

Una pizzería vende 20 pizzas y 10 lasañas en un día por un total de 350 mil pesos. El siguiente día la pizzería vende 17 pizzas y 22 lasañas por un total de 500 mil pesos. Si el precio de las pizzas y lasañas se mantuvo constante. Cuál es el valor de una pizza y una lasaña

- import numpy as np
- A = np.array([[20, 10], [17, 22]])
- B = np.array([350000, 500000])
- C = np.linalg.solve(A, B);
- print("El precio de la pizza = ", C[0], "pesos")
- print("El precio de la lasaña = ", C[1], "pesos")
- #### Probar que solución es verdadera ######
- F = np.dot(A, C)
- print(B)
- print(F)