# Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

# Temas de la clase

- Resumen
  - ODEs: Problemas de valor inicial (PVI)
  - ODEs: Problemas de valor de frontera (PVF)
- Ejercicios

# Resumen: Resolución de ODEs

- Si tenemos ODE de orden $n$:
$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$
- Requiere $n$ condiciones para resolverla y obtener solución única.
- En problemas de valor Inicial (PVI):
  - Conocemos $y(t_0)$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}$, ..., $\left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}$
- En problemas de valor de frontera (PVF)
  - Conocemos $y(t_0)$, $y(t_1)$, ... o $y(t_0)$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1}$, ...

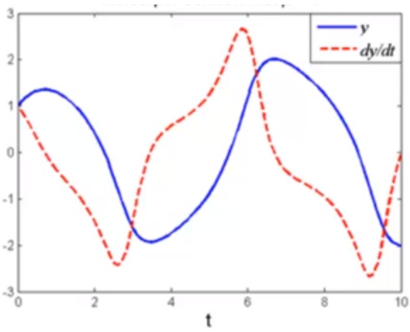
# Resumen: Resolución de ODEs

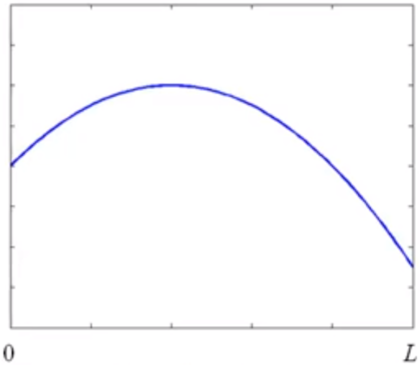
## ODEs: PVI

- $\dfrac{d^2y}{dt^2} = f\left(t,\, y,\, \dfrac{dy}{dt}\right)$
- $y(t=0) = y_0$
- $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = y_0'$

## ODEs: PVF

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\, y,\, \dfrac{dy}{dx}\right)$
- $y(x=0) = y_0$
- $y(x=L) = y_L$



## The Shooting Method Concept

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

at $x = 0, y = y_0$

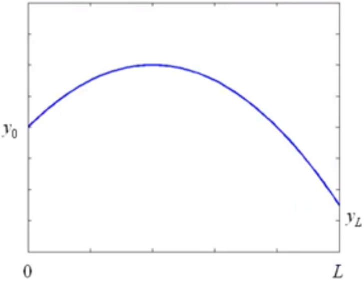
at $x = L, y = y_L$

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2)$$

at $x = 0, y_1 = y_0$

at $x = 0, y_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$




***GUESS*** the unknown initial condition and use an ***IVP Solver***!

# Ejemplo 8.8: Posición vertical de una bola

- Bola es lanzada por el aire en instante $t = 0$ y cae de nuevo al suelo en $t = 10$s
- La ecuación diferencial que gobierna este movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

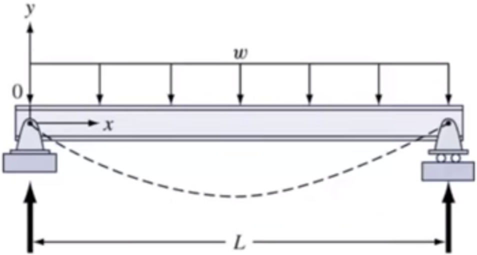
- Conocemos posición inicial $x(t = 0)$ y final y $x(t = t_1) = 0$

# Ejercicio

Ejercicio: La ODE que gobierna la desviación de una barra con un peso constantemente distribuido es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

con las condiciones de frontera $y(0) = y(L) = 0$. Determine $y(x)$ si $E = 200\text{GPa}$, $I = 30000cm^4$, $w = 15\text{kN/m}$ y $L = 3\text{m}$



# Ejercicio: 1era parte

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- from scipy.optimize import fsolve
- def func(r,x):
-     w = 15000; E = 200*10**6; I = 30000*10**-8; L = 3
-     y = r[0]; z = r[1]
-     dydx = z; dzdx = (w*L*x/2 - w*x**2/2)/(E*I)
-     return np.array([dydx, dzdx], float)
- yL = 0 # Cond. frontera y(L) = 0
- z0 = -40 # Suposición inicial
- r0 = [0, z0] # Condición inicial
- x = np.linspace(0, 3, 50)
- sol = odeint(func, r0, x)

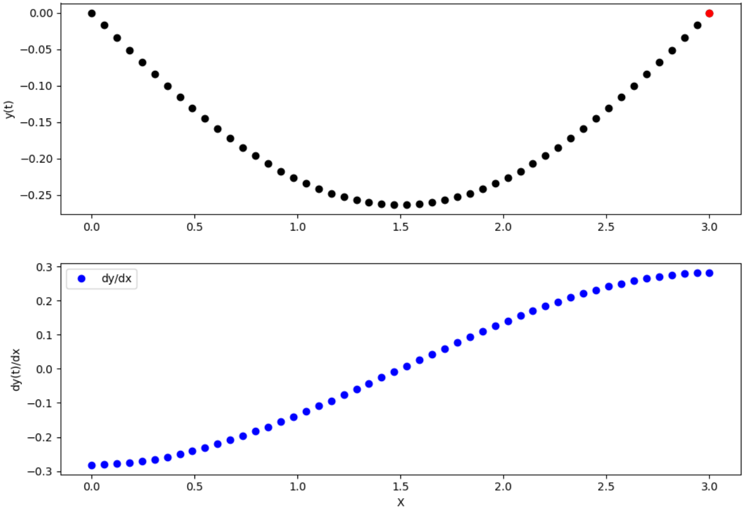
# Ejercicio: 2da parte

- def yfunc(z0):
- sol = odeint(func, (0, z0), x)
- return sol[-1,0]
- z0 = np.linspace(-40, 40, 200)
- yf = [ ]
- for ii in z0:
- yf.append(yfunc(ii))
- plt.clf(); plt.plot(z0, yf, '-b')
- plt.hlines(0,-40, 40, colors='k', lw=2)

# Ejercicio: 3ra parte

- # Find roots
- root = fsolve(yfunc, -10)[0]
- print("Valor inicial de dy/dx = ", root)
- #### Comprobar que condición inicial es correcta #####
- sol = odeint(func, [0, root], x)
- plt.clf(); plt.subplot(2,1,1)
- plt.plot(x, sol[:,0], 'ok'); plt.plot(3, yL, 'or')
- plt.ylabel('y(t)'); plt.xlabel(' t')
- plt.subplot(2,1,2)
- plt.plot(x, sol[:,1], 'ob')
- plt.ylabel('dy(t)/dx'); plt.xlabel('X')
- plt.legend(('dy/dx','yL'), loc=2)

# Ejercicio



0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.20
−0.25
y(t)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
dy/dx
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
dy(t)/dx
X

# Ejercicio 8.3: Ecuaciones de Lorenz - Newman

Uno de los grupos de ecs diferenciales más celebrados en física:

$$dx/dt = \sigma(y - x)$$

$$dy/dt = rx - y - xz$$

$$dz/dt = xy - bz$$

$\sigma$, r y b son ctes. Ecs. estudiadas primero por Lorenz en 1963 que las obtuvo de un modelo de patrones atmosféricos simplificado. Fama de ecs. se debe a que fueron de las primeras en mostrar el caos determinístico, la ocurrencia de mov. aleaorios aparentes incluso cuando no hay aleatoriedad en las ecs.

- Escriba programa que resuelva las ecs. de Lorenz para el caso b = 8/3, r = 28 y $\sigma$ = 10 en el rango desde t = 0 a t = 50 con cond. iniciales (0, 1, 0). Haga un plot de z vs x para mostrar el atractor desconocido de las ecs. de Lorenz.

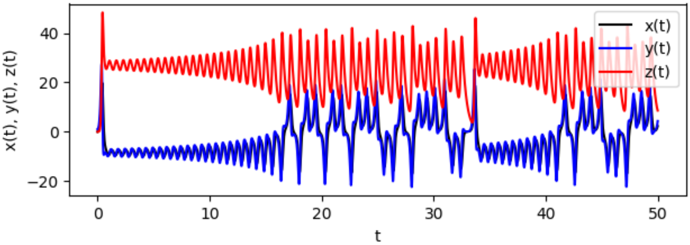
# Ejercicio 8.3: Ecuaciones de Lorenz - Newman

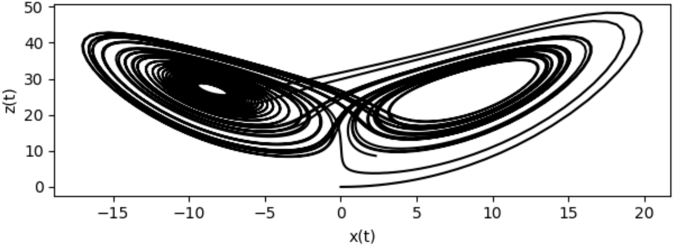
- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def Lor(r,t):
-     x = r[0]; y = r[1]; z = r[2]
-     fx = sigma*(y - x); fy = r0*x - y - x*z; fz = x*y - b0*z
-     return np.array([fx,fy,fz],float)
- t = np.linspace(0.0, 50.0, 5000)
- r0 = 28.0; sigma = 10.0; b0 = 8.0/3
- r00 = [0, 1, 0]
- # Solución de ecuaciones
- sol = odeint(Lor, r00, t)

# Ejercicio 8.3: Ecuaciones de Lorenz - Newman

- plt.clf();
- plt.subplot(2,1,1)
- plt.plot(t, sol[:, 0], '-k', label='x(t)')
- plt.plot(t, sol[:, 1], '-b', label='y(t)')
- plt.plot(t, sol[:, 2], '-r', label='z(t)')
- plt.ylabel('x(t), y(t), z(t)');
- plt.legend(loc='best')
- plt.xlabel('t'); plt.tight_layout()
- plt.subplot(2,1,2)
- plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 2], '-k')
- plt.ylabel('z(t)'); plt.xlabel('x(t)')
- plt.tight_layout()

# Ejercicio 8.3: Ecuaciones de Lorenz - Newman



# Ejercicio 8.6: Oscilador armónico

- El oscilador armónico simple aparece en muchos problemas de física. Está dado por la siguiente expresión:

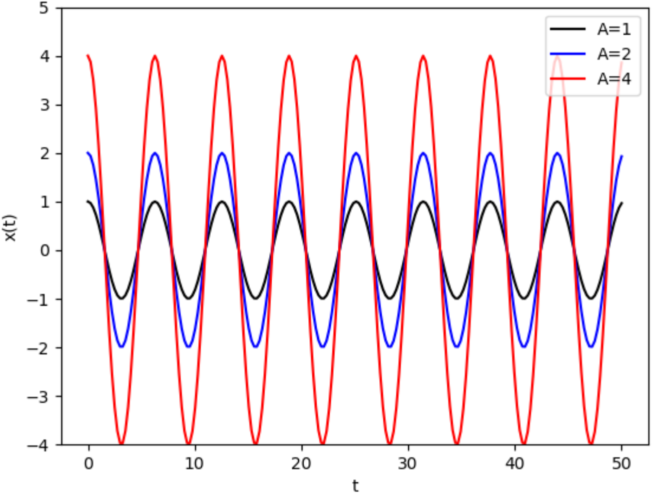
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Resuelva esta ecuación para el caso $\omega = 1$ en el rango entre $t = 0$ y $t = 50$
- Como condición inicial $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$
- Haga un gráfico $x(t)$ en función del tiempo
- Repita ejercicio usando 2 nuevas condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $x(0) = 4$, para $x'(0) = 0$
- Que pasa con el período de las oscilaciones?

# Ejercicio 8.6: Oscilador armónico

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- def func(r, t):
-     omega = 1; x = r[0]; y = r[1]
-     dxdt = y; dydt = -omega**2*x
-     return np.array([dxdt, dydt], float)
- r0 = [[1, 0],[2, 0],[4, 0]]; t = np.linspace(0, 50, 100)
- lab_p = ['-k', '-b', '-r']
- plt.clf()
- for ii in range(3):
-     sol = odeint(func, r0[ii], t)
-     plt.plot(t, sol[:, 0], lab_p[ii])
- plt.ylabel('x(t)'); plt.ylim(-4,5)
- plt.legend(('A=1','A=2', 'A=4'),loc=1); plt.xlabel('t')

# Ejercicio 8.6: Oscilador armónico



# Ejercicio

Las ecuaciones del movimiento para la posición $(x, z)$ de una bala de cañón son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\frac{dx}{dt}\sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\frac{dz}{dt}\sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2}$$

$m$ es la masa de la bala de cañón, $g$ es la aceleración de la gravedad

- Escriba un programa que resuelva las ecuaciones para una bala de cañón de masa 1kg y radio $(R)$ de 8 cm, que se dispara a un ángulo de 30º de la horizontal $(x)$ con una velocidad inicial de 100 m/s. La densidad del aire $(\rho) = 1.22\text{kg}/m^3$ y $C$=0.47. Haga un gráfico con la trayectoria de la bala de cañón ($z$ en función de $x$)
- Qué tiempo después del disparo demora la bala de cañón en tocar el suelo?
- Qué distancia en $x$ desde el inicio recorre la bala de cañón al llegar al suelo?

# Ejercicio

Resuelva la siguiente ecuación y encuentre los valores de $y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y - x = 0$$

que satisface las condiciones $y(0)$= -2, $y(1)$=1. Haga un gráfico que muestre la solución $y(x)$.