Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

Temas de la clase

- Ecuaciones lineales simultáneas
- Eliminación Gaussiana
- Ejemplos

Ecuaciones lineales simultáneas

- Usos más comunes de computadoras en física: Resolver grupos de ecuaciones.
- Para resolver ecs. lineales se usan técnicas de álgebra lineal.

Ejemplo: Resolver el siguiente grupo de ecs. de 4 variables w, y, x y z:

$$\begin{aligned}
2w + x + 4y + z &= -4 \\
3w + 4x - y - z &= 3 \\
w - 4x + y + 5z &= 9 \\
2w - 2x + y + 3z &= 7
\end{aligned}$$

Ecuaciones lineales simultáneas

- Propósitos computacionales, forma más sencilla de analizar sistema de ecuaciones es en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alternativamente,

$$Ax = v$$

donde $x = (w, x, y, z)$, A: matriz y v: vector

Ecuaciones lineales simultáneas

- Un método de resolver ecuaciones es encontrar inverso de matriz A
- Luego multiplicar inverso de matriz en ambos lados de $Ax = v$ para encontrar solución:

$$x = A^{-1}v$$

- En la práctica, esto no es un buen método,
- Es difícil y engorroso de llevar a cabo numéricamente.
- Otros métodos más rápidos, simples y más exactos

Eliminación Gaussiana

1. **Si multiplicamos cualquiera de las ecs. por una cte, tenemos misma ecuación:** Si multiplicamos cualquier fila de matriz A por cte, y multiplicamos la misma cte por la correspondiente fila del vector v, la soluc. de sist. ecs. no cambia.
2. **Podemos tomar cualquier combinación lineal de 2 ecs para obtener otra ec. correcta:** Si adicionamos o sustraemos de una fila en A un múltiplo de cualquiera otra fila, y hacemos lo mismo con vector v, la soluc. no cambia.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Dividimos 1era fila por 2 (1er elemento, fila 1). Hay que dividir A y v:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Solución de ecs. no cambia. 1er elemento fila 1 es ahora 1

Eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Primer elemento 2da fila es 3. Sustrayendo 1era fila de 2da fila 3 veces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Hacemos misma operación en filas 3 y 4. Sustraemos 1 vez primera fila de 3ra y sustraemos 2 veces 1 fila de 4ta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Estas operaciones resultaron en simplificación de 1era columna $(1, 0, 0, 0)$ y solución de grupo de ecs. se mantiene igual.

Eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Hacemos mismas operaciones en fila 2. Dividimos 2da fila por 2do elemento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Ahora sustraemos -4.5 veces la 2da fila de la 3ra y -3 veces la 2da fila de 4ta fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & -13.6 & 0 \\ 0 & 0 & -11.4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 27.2 \\ 21.8 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & -13.6 & 0 \\ 0 & 0 & -11.4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 27.2 \\ 21.8 \end{pmatrix}$$

- Hacemos mismas operaciones en filas 3 y 4 y tenemos finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Grupo de ecs. tiene misma solución para variables (w, x, y, z) que las ecs. originales, pero ahora matriz es triangular superior. Elementos debajo de diagonal son 0. Es simple ahora determinar soluciones de variables.

Eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} w + 0.5x + 2y + 0.5z &= -2 \\ x - 2.8y - z &= 3.6 \\ y &= -2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Solución de variables se puede encontrar de manera fácil usando el proceso de sustitución inversa:

Eliminación Gaussiana

$$\begin{aligned} w + 0.5x + 2y + 0.5z &= -2 \\ x - 2.8y - z &= 3.6 \\ y &= -2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

- $z = 1$ y $y = -2$
- $x = (3.6 + 2.8y + z)/4$
- $w = -2 - 0.5x - 2y - 0.5z$
- Calculando llegamos a la solución final:
- $w = 2$, $x = -1$, $y = -2$ y $z = 1$

Ejemplo Eliminación Gaussiana (Python)

```
# Ejemplo 6.1 del Libro

from numpy import array, empty

A = array([[2,1,4,1],[3,4,-1,-1],[1,-4,1,5],[2,-2,1,3]],float)

print (A)

v = array([-4,3,9,7],float); print (v)

N = len(v)

# Gaussian elimination

for m in range(N):
        # Divide by the diagonal element
        div = A[m,m]
        A[m,:] /= div
        v[m] /= div

        # Now substract from the lower rows
        for ii in range(m+1,N):
                mult = A[ii,m]
                A[ii,:] -= mult*A[m,:]
                v[ii] -= mult*v[m]

# Backsubstitution
x = empty(N,float)
for m in range(N-1,-1,-1):
        x[m] = v[m]

        for ii in range(m+1,N):
                x[m] -= A[m,ii]*x[ii]

print "Las soluciones del sist. de ecs son"
print(x)
```

Ejemplo Eliminación Gaussiana (Python)

- Se salvaron las matrices y vectores como arreglos
- Valores iniciales de matrices y vectores se definieron al inicio del programa
- Parte de eliminación:
  - Programa recorre fila a fila de matriz,
  - Normaliza la fila dividiendo por elemento apropiado en diagonal
  - Sustrae múltiplo de fila de cada fila inferior
- Programa usa habilidad de Python de hacer operaciones en fila completa
- Programa funciona para matrices de cualquier tamaño.