Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

Temas de la clase

- Problemas de valor de frontera
- Método del disparo (shooting method)
- Ejemplos
- Ejercicios

Problemas de valor de frontera

- Todos los ejemplos y ejercicios vistos hasta ahora han sido **Problemas de valor inicial**
- Esto significa que debemos resolver ODEs a partir de los valores iniciales de las variables
- Estos son los problemas de ODEs más comúnes en física, pero no los únicos
- También existen los denominados **Problemas de valor de frontera**

Problemas de valor de frontera

- Consideremos la ODE que rige la altura sobre la sup. de una bola que se lanza al aire:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

- g: aceleración de la gravedad y se ignora la fricción
- Si especificamos una condición inicial para $x\,(t = 0) = 0$ y otra para $v = \frac{dx}{dt}$ $v(t = 0) = 0$
- ODE se resuelve como un problema de valor inicial como hasta ahora

- Consideremos la ODE que rige la altura sobre la sup. de una bola que se lanza al aire:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

- Sin embargo, también se puede especificar $x(t = 0) = 0$ y $x(t = t_1) = 0$
- El valor de x cuando bola despega y cuando aterriza
- Tendríamos que encontrar la solución que satisface estas condiciones
- Ejemplo real: si queremos calcular trayectoria de proyectil para que aterrice en determinado lugar.

Problemas de este tipo se llaman problemas de valor de frontera

Método del disparo (shooting method)

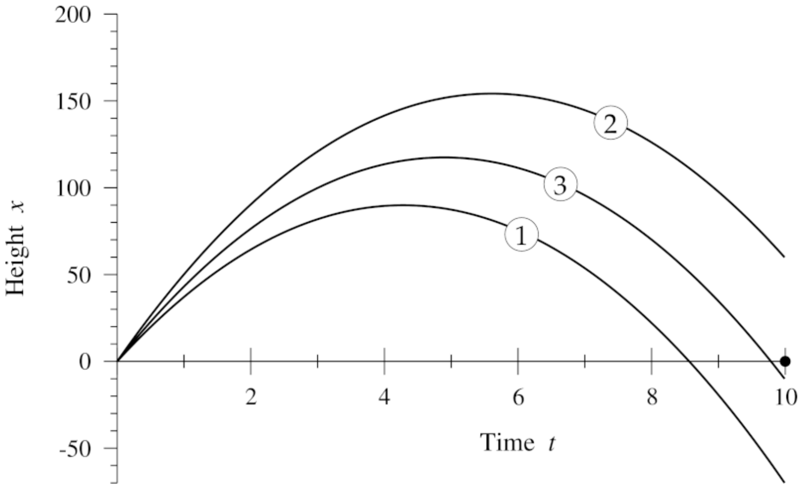
- Método de prueba y error que busca los valores correctos de cond. iniciales que igualan a valores de cond. de frontera
- Convierte el problema en un problema de Valor Inicial

- Sigamos con ejemplo anterior:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

- Conocemos posición inicial $x(t = 0)$ y final y $x(t = t_1) = 0$
- Asumimos un valor inicial para velocidad
- Resolvemos ODE y chequeamos si $x(t = t_1) = 0$
- Si no se cumple $x(t = t_1) = 0$, buscamos nuevo valor de velocidad y repetimos cálculo

Método del disparo (shooting method)



Método del disparo (shooting method)

- Se puede ver el problema como que existe función $x = f(v)$
- Entrega altura de bola en $t = t_1$ como función de v
- No conocemos función pero podemos calcularla para cualquier valor de v resolviendo ODE con esa velocidad inicial
- Resolver problema de valor de frontera equivale a encontrar v que satisface $f(v) = 0$
- Solo tenemos que encontrar raíz de $f(v)$ y ya sabemos hacerlo

Método del disparo

- Resolver ODEs para calcular valor de función $f(v)$ que relaciona cond. inicial desconocida con cond. final de frontera
- Encontrar valor de $f(v)$ que iguala cond. de frontera

Ejemplo 8.8: Posición vertical de una bola

- Bola es lanzada por el aire en instante $t = 0$ y cae de nuevo al suelo en $t = 10$s
- La ecuación diferencial que gobierna este movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

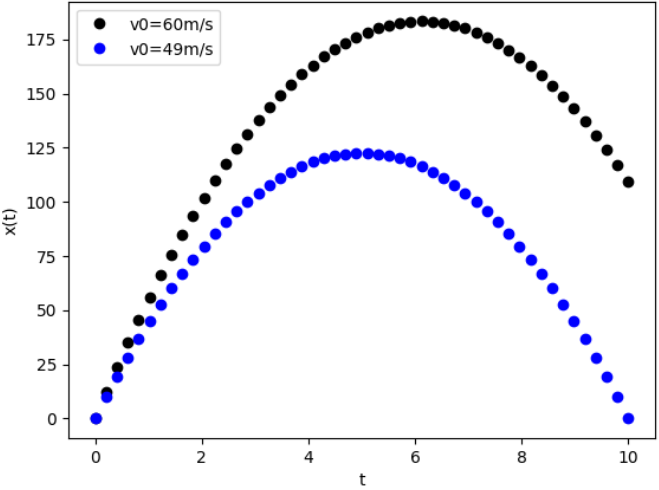
Ejemplo 8.8: Posición vertical de una bola

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
##### Primera parte ######
# Función que entrega dx/dt, dv/dt
def func(r,t):
    x = r[0]; v = r[1]
    dxdt = v; dvdt = -9.81
    return np.array([dxdt,dvdt], float)
v0 = 60 # Suposición inicial
r0 = [0, v0] # Condición inicial
N = 50; t = np.linspace(0, 10, N)
sol = odeint(func, r0, t)
```

Ejemplo 8.8: Posición vertical de una bola

- plt.clf(); plt.plot(t, sol[:,0], 'ok')
- plt.ylabel('x(t)'); plt.xlabel('t')
- ######## Segunda parte #########
- def yfinal(v0):
-         sol = odeint(func, (0, v0), t)
-         x = sol[:,0]
-         return x[-1]
- v0 = np.linspace(0,100,100)
- root = fsolve(yfinal, 10)[0]
- print("Valor inicial de velocidad = ", root, " m/s")
- #### Comprobar que condición inicial v0 = 49 es correcta #####
- sol = odeint(func, (0,root), t)
- plt.plot(t, sol[:,0], 'ob')
- plt.ylabel('x(t)'); plt.xlabel('t')
- plt.legend(('v0=60m/s','v0=49m/s'), loc=2)

Ejemplo 8.8: Posición vertical de una bola



Ejercicio:

Ejercicio: Resuelva la siguiente ODE de 2do orden para el ángulo θ en función de S -> $\theta(S)$ en el dominio $0 - L$ donde $L = 600$:

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -c\cos(\theta)$$

- Tenemos las siguientes condiciones: $\theta(0) = 0$ y $\frac{d\theta}{dS}(600) = Kr$
- Kr =0.00066937343 y c =8.360795454545$\cdot 10^{-7}$

Ejercicio: Primera parte

- import numpy as np
- from scipy.integrate import odeint
- import matplotlib.pyplot as plt
- from scipy.optimize import fsolve
- # Función que entrega dx/dt, dv/dt
- def func(r,S):
-     theta = r[0]; z = r[1]
-     dthds = z
-     c = 8.360795454545*10**-7
-     dzds = -c*np.cos(theta)
-     return np.array([dthds,dzds], float)
- Kr = 0.00066937343
- z0 = 0.002 # Suposición inicial
- r0 = [0, z0] # Condición inicial
- S = np.linspace(0, 600, 600)
- sol = odeint(func, r0, S)

Ejercicio: 2da parte

- def thetaf(z0):
-     sol = odeint(func, (0, z0), S)
-     return sol[-1,1] - Kr
- z0 = np.linspace(0.001,0.002,200)
- tf = [ ]
- for ii in z0:
-     tf.append(thetaf(ii))
- plt.clf(); plt.plot(z0, tf, '-b')
- plt.hlines(0,0, 0.01, colors='k', lw=2); plt.xlim(0, 0.002)

Ejercicio: 3ra parte

- # Find roots
- root = fsolve(thetaf, 0.001)[0]
- print("Valor inicial de dtheta/dS = ", root)
- #### Comprobar que condición inicial 'root' es correcta ######
- sol = odeint(func, [0, root], S)
- plt.clf(); plt.plot(S, sol[:,1], 'ob')
- plt.plot(600, Kr, 'or')