

Computación científica LF-214

Profesor: Julio C. Marín

Departamento de Meteorología, Universidad de Valparaíso

Primer Semestre

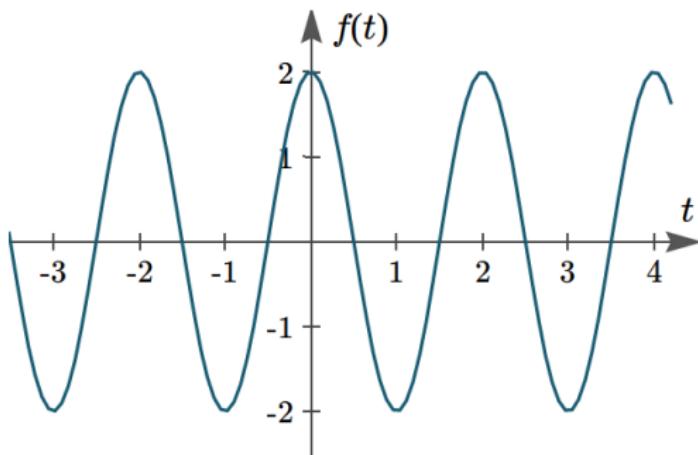
- Transformadas discretas de cosenos y senos
- Ejercicios

Transformadas discretas de cos y sin

- Hemos visto expresiones complejas para las series de Fourier
- También podemos construir series de Fourier que usen senos y cosenos en vez que exponenciales complejos
- Hay versiones de Transformada Discreta de Fourier (DFT) para series de senos y cosenos.
- Particularmente, la serie de cosenos las usamos a diario

Transformadas discretas de cos y sin

- Si $f(x)$ es par (simétrica alrededor de eje y) ==>
 $f(x) = f(-x)$ para todo x

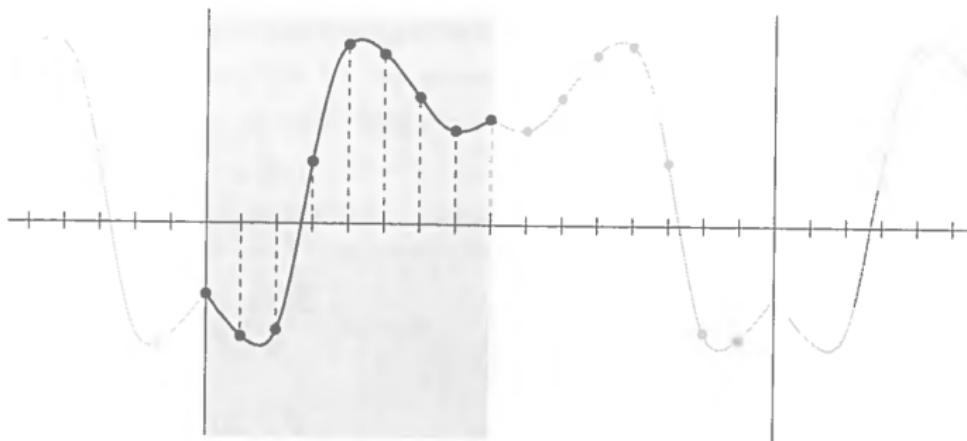


$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)$$

Transformadas discretas de cos y sin

- No todas las $f(x)$ pueden representarse de esta forma
- Es necesario que $f(x)$ sea simétrica alrededor del punto medio del intervalo en $\frac{1}{2}L$
- Series de Fourier de senos solo puede usarse en $f(x)$ simétricas de este tipo
- Todas las funciones no son simétricas PERO podemos convertir $f(x)$ en función periódica simétrica adicionando una imagen especular de función y repitiendo este patrón

Transformadas discretas de cos y sin



- Series de cosenos pueden usarse para cualquier $f(x)$
- Dado arreglo de valores de $f(x)$, se hace copia especular de valores para crear $f(x)$ simétrica antes de hacer transformada
- Esto implica que No. total de muestras (N) es siempre par

Transformadas discretas de cos y sin

- Una vez que se tiene función simétrica, la serie de Fourier de cos es solo el caso especial de ecuación DFT

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \exp\left(-i \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

cuando muestras x_n son simétricas alrededor de $x = \frac{1}{2}L$

- Trabajando con ecuación se llega a:

$$c_k = y_0 + y_{N/2} \cos\left(\frac{2\pi k(N/2)}{N}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}N-1} y_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Normalmente, transformada de cosenos se aplica a valores reales $\Rightarrow c_k$ serán todos reales

Transformadas discretas de cos y sin

$$c_k = y_0 + y_{N/2} \cos\left(\frac{2\pi k(N/2)}{N}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}N-1} y_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Trabajando con las ecuaciones se llega a la transformada inversa de la serie de cosenos:

$$y_n = \frac{1}{N} \left[c_0 + c_{N/2} \cos\left(\frac{2\pi n(N/2)}{N}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N-1} c_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

Ecuaciones son la Transformada Discreta de Cosenos (DCT) y la Transformada Inversa discreta de cosenos (DCT inversa) de tipo I

Importante: la DCT toma $\frac{1}{2}N + 1$ valores reales y_n y los transforma en $\frac{1}{2}N + 1$ c_k reales

Transformadas discretas de cos y sin

- Cuando los puntos x_n de muestreo están en el medio del intervalo, y no al final
- La DCT toma una forma algo distinta y se les llama DCT de tipo II

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{\pi k(n + \frac{1}{2})}{N}\right)$$

$$y_n = \frac{1}{N} \left[a_0 + 2 \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{\pi k(n + \frac{1}{2})}{N}\right) \right]$$

Fórmulas son versiones más comunes usadas para calcular DCT y DCT inverso

- Fórmulas de DCT son preferibles usar en datos que no son periódicos
- Existen fórmulas para transformadas discretas de series de senos
- Pero son mucho menos usadas porque fuerzan $f(x)$ a ser 0 en cada extremo
- Series de senos tienen aplicabilidad más limitada

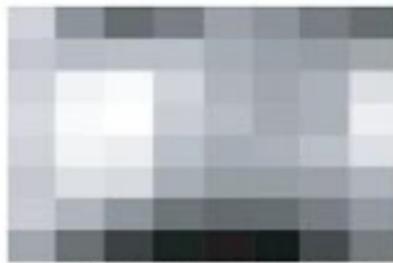
Aplicaciones de DCT - Formato JPEG

- Fórmulas de DCT forman la base matemática de formato de imagen JPEG
- Imágenes digitales se representan como rejillas regulares de pixels de diferentes tonos
- Los tonos se almacenan como números en PC
- PERO almacenar todos estos números en orden requiere tener archivos muy grandes
- Se pueden almacenar archivos de imágenes de una forma más económica haciendo uso de DCT

Aplicaciones de DCT - Formato JPEG

- Formato JPEG funciona dividiendo la imagen en bloques de pixels y aplicando DCT en 2 dimensiones (Tipo II) a cada bloque
- Se descartan los coeficientes a_k pequeños
- Se guardan los demás coeficientes a_k en un archivo
- Cuando queremos ver la imagen, la PC reconstituye la imagen usando la DCT inversa
- Ventaja: Como solo se requiere una fracción pequeña de a_k para representar la imagen, se reduce muchísimo el tamaño de las imágenes en los PC

DISCRETE COSINE TRANSFORM



PICTURE MATRIX

40	24	15	19	28	24	19	15
38	34	35	35	31	28	27	29
40	47	49	40	33	29	32	43
42	40	50	39	34	30	32	46
40	47	46	35	31	32	35	43
38	43	42	31	27	27	28	33
30	33	25	17	14	15	10	26
29	16	6	1	-4	0	7	18

DCT →



DCT COEFFICIENTS

239	32	27	-12	3	-5	3	1
34	-3	-19	6	2	0	-1	1
-70	2	8	23	9	6	-1	-1
5	0	-6	11	-2	0	-1	1
-17	-3	6	6	3	-1	0	0
2	4	2	1	-2	0	1	
-3	0	0	-1	-1	0	0	0
1	-1	3	1	0	0	0	0