Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
1er. semestre 2022
Prof. Mario Marotti

**CLASE No. 6**

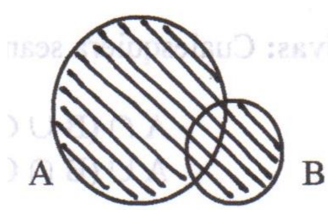
## Operaciones con Conjuntos

Las operaciones que se definen entre conjuntos son la **unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica** y el **producto cartesiano**

**<u>Operación 1</u>: Unión De Conjuntos**

**Definición:** La **unión de los conjuntos** A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos. Anotamos la unión de conjuntos así:

$A \cup B$




Representamos la unión por la zona sombreada.

**Ejemplo 1:** Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$.
Entonces $A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$

**Ejemplo 2:** Sean los conjuntos $C = \{0, 1, 2\}$ y $D = \phi$. Entonces $C \cup D = \{0, 1, 2\}$
¿Te animas a escribir una propiedad de la unión basada en este ejemplo?

**Ejemplo 3:** Sean los conjuntos $E = \{k, l, m, n, p\}$ y $F = \{l, m, p\}$. Entonces
$E \cup F = \{k, l, m, n, p\}$ ¿Otra propiedad?

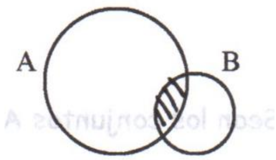
**Propiedades:**

| | | |
|---|---|---|
| **Principio de consistencia:** | $A \subseteq (A \cup B)$ $\quad B \subseteq (A \cup B)$ | $\forall A, \forall B$ |
| **Propiedad conmutativa:** | $A \cup B = B \cup A$ | $\forall A, \forall B$ |
| **Propiedad asociativa:** | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $\forall A, \forall B, \forall C$ |
| **Propiedad de Idempotencia:** | $A \cup A = A$ | $\forall A$ |
| **Existencia de neutro:** | $A \cup \emptyset = A$ | $\forall A$ |

## Operación 2: Intersección De Conjuntos

**Definición:** La **intersección de los conjuntos** A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamennte a A y a B. Anotamos la intersección de conjuntos así $A \cap B$

Representamos la intersección por la zona sombreada




---

**Ejemplo 1:** Sean los conjuntos A = {a, b, c ,d ,e} y B = {a, e, i, o, u}. Entonces $A \cap B$ = {a, e}

**Ejemplo 2:** Sean los conjuntos C = {0, 1, 2} y D = $\phi$. Entonces $C \cap D = \phi$. Escribe una propiedad de la intersección basada en este ejemplo.

**Ejemplo 3:** Sean los conjuntos E = {k, l, m, n, p} y F = {l, m, p}. Entonces $E \cap F$ = {l, m, n} ¿Otra propiedad?

**Ejemplo 4:** Sean los conjuntos M = {a, b, c} y N = {j, k, l}. La intersección $M \cap N = \phi$. M y N no tienen elementos comunes.
**Definición:** Si $A \cap B = \phi$, o sea A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son **conjuntos disjuntos.**

**Propiedades:**

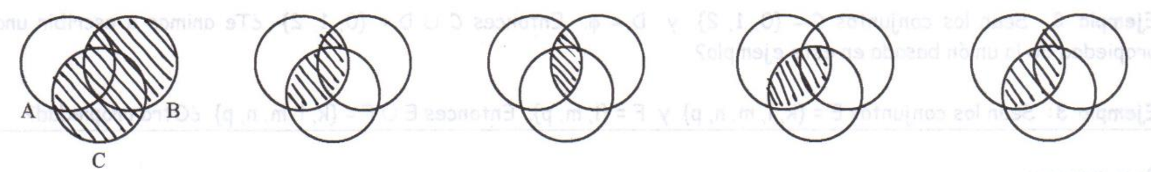
| | | |
|---|---|---|
| **Principio de consistencia:** | $(A \cap B) \subseteq A$ $(A \cap B) \subseteq B$ | $\forall A, \forall B$ |
| **Propiedad conmutativa:** | $A \cap B = B \cap A$ | $\forall A, \forall B$ |
| **Propiedad asociativa:** | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | $\forall A, \forall B, \forall C$ |
| **Propiedad de Idempotencia:** | $A \cap A = A$ | $\forall A$ |
| **Propiedad de absorción:** | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $\forall A$ |

**Propiedades distributivas:** Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se cumplen las siguientes propiedades:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \forall \text{ A, B, C conjuntos}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \forall \text{ A, B, C conjuntos}$$

Justifiquemos la primera de ellas utilizando diagramas de Venn, sombreando lo que corresponda.

$B \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cap C$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$




---

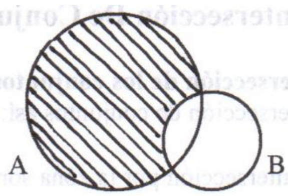
**Ejercicio:** Verifica que estas propiedades se cumplen para los conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $\qquad$ $C = \{2, 5, 8\}$

**Ejercicio:** Justificar la otra propiedad distributiva de la misma manera.

## <u>Operación 3</u>: Diferencia De Conjuntos

**Definición:** La **diferencia de los conjuntos** A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B. Anotamos la diferencia de conjuntos así: A - B




**Ejemplo 1:** Sean los conjuntos A = {a, b, c ,d ,e} y B = {a, e, i, o, u}. Entonces A - B = {b, c, d}

**Ejemplo 2:** Sean los conjuntos C = {0, 1, 2} y D = $\phi$. Entonces C - D = {0, 1, 2} ¿Te animas a escribir una propiedad de la unión basada en este ejemplo?

---

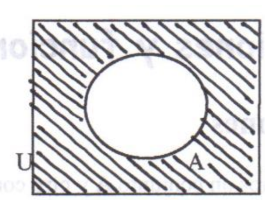
**Para pensar:** 1. ¿Son iguales los conjuntos A - B y B - A?

---

## <u>Operación 4</u>: Complemento

Supongamos un conjunto universal U y un subconjunto A.

**Definición:** Llamamos **complemento de A (con respecto a U)** al conjunto $A^C = U - A$.
Observa el diagrama de Venn. La zona rayada es $A^C$.



**Ejemplo:** Sea U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9} y A = {1, 2, 3, 4}

Entonces $A^C$ = {0, 5, 6, 7, 8, 9}

¿Cuál es el complemento con respecto a N (números naturales) del conjunto P (naturales pares)?

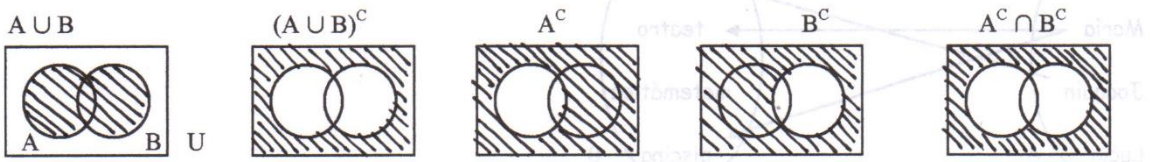
---

**Propiedades del complemento:** Supongamos un conjunto U y dos subconjuntos A y B.

Son validas las siguientes **leyes de De Morgan:**

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad \forall\ A, B \text{ conjuntos}$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad \forall\ A, B \text{ conjuntos}$$

Justifiquemos la primera de ellas, sombreando en diagramas de Venn los siguientes conjuntos,




**Ejercicio:** Justificar la otra ley de De Morgan en forma similar.

## <u>Operación 5</u>: Producto Cartesiano De Conjuntos

**Un ejemplo previo:** Tomemos un conjunto A = {0, 1, 2} y otro B = {a, b}. Formemos todos los pares ordenados posibles tomando como primer elemento un elemento de A y como segundo elemento un elemento de B. Podemos formar seis pares ordenados: (0, a),(0, b),(1, a),(1, b),(2, a),(2, b).
Llamamos **producto cartesiano** al conjunto: A × B = { (0, a),(0, b),(1, a),(1, b),(2, a),(2, b)}

**Observación:** Los pares ordenados (a, 1) y (1, a) son diferentes, el primero no pertenece al conjunto en este caso, el segundo, sí. Halla ahora el producto cartesiano B x A.
¿El producto cartesiano tiene la propiedad conmutativa?

**Definición:** Se llama **producto cartesiano** A x B al conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ o sea:

$$A \times B = \{(a, b) \ /\ a \in A \text{ y } b \in B\}$$

**Propiedades:**

1. $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$
2. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \text{ o } (B = \emptyset)$

## Partición de un conjunto

Consideremos un conjunto A = {a, b, c, d, e, f} y los siguientes subconjuntos: $H_1$ = {a, b, c} $H_2$ = {d, e} $H_3$ = {f}

**Propiedades:**
1. Ninguno de ellos es vacío: $H_1 \neq \phi$ $H_2 \neq \phi$ $H_3 \neq \phi$
2. Son disjuntos dos a dos, o sea que no tienen elementos comunes.
3. La unión de todos es A.

Se dice que el conjunto de conjuntos *H* = {$H_1$, $H_2$,, $H_3$} es una **partición** de A.

**Definición:** Una **partición de un conjunto A** es un conjunto *H* = {$H_1$, $H_2$,, $H_3$} cuyos elementos son subconjuntos no vacíos de A, disjuntos dos a dos y cuya unión es A. Observa que una partición H de un cierto conjunto A es siempre un subconjunto de P(A)

**Ejercicios:**

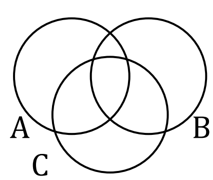
**1.** Sean los conjuntos: A = {1,2,3,4} B = {2,4,6,8} C = {3,4,5,6}.

(a) Deben hallar:

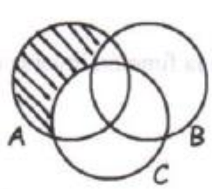
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A \cup B$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $(A \cup B) \cap B$ | $B \cup B$ |
| $C \cap C$ | $C \cap \phi$ | $A \cup \phi$ | $(A \cap C) - B$ | $A \cup (B \cup B)$ |
| $B \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cap C$ | $A \cup (B \cup C)$ | $(A \cup B) \cup C$ |
| $A - B$ | $(A - B) - C$ | $B - C$ | $C - (A \cup B)$ | $B - (B - C)$ |
| $(B - C) - B$ | $C - C$ | $B - \phi$ | $\phi - C$ | $B - (A \cup (C \cap B))$ |

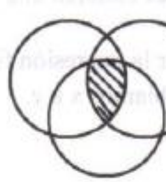
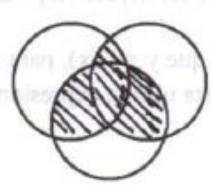
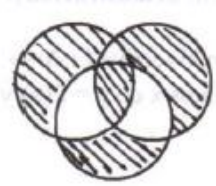
(b) Indicar el cardinal de cada uno.

**2.** Rayar lo que corresponda en los diagramas de Venn de abajo para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior:




**3.** Expresen con letras los conjuntos rayados:



**4.** (a) Sean D = {a, b, c} y E = {0, 1}. Hallar D x E y E x D. ¿Se cumple D x E = E x D?
(b) Hallar *P*(D) y *P*(E).

**5.** Dados A = {1,2,3,4} B = {2,4,6,8} C = {3,4,5,6} hay que hallar:

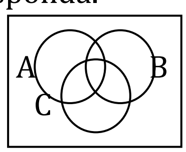
| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) A - B | (b) B - C | (c) (A - B) x (B - C) | (d) (B - C) x B |
| (e) A x A | (f) A x $\phi$ | (g) A x B | (h) (A - C) x B |
| (i) $(A \cap B)$ x C | (j) $B \times B$ | (k) $C \times (C - B)$ | (l) $(C - C) \times C$ |

**6.** Sea el conjunto universal U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} y sus subconjuntos
A = {1,2,3,4}, B = {2,4,6,8} y C = {3,4,5,6}. Hay que hallar:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $A^C$ | (b) $B^C$ | (c) A - B | (d) $(A - B)^C$ |
| (e)$(A^C)^C$ | (f) $A \cup B$ | (g) $(A \cup B)^C$ | (h) $A \cap C$ |
| (i) $(A \cap C)^C$ | (j) $U^C$ | (k) $A^C \cap B^C$ | (l) $A^C \cup C^C$ |

**7.** Para cada uno de los conjuntos anteriores, hacer un diagrama de Venn como el de abajo y rayar lo que corresponda.

U




**8.** Designemos div N al conjunto de divisores del número N. Ejemplo: div 6 = {1,2,3,6}

(a) Hallar div 12, div 20, div 18, div 4 e identificar cuál es subconjunto de otro.

(b) <u>Definición</u>: Un número natural N es primo si es divisible solamente entre 1 y sí mismo. ¿Podrías dar una nueva definición que involucre el conjunto div N?

(c) ¿es el conjunto {div 8, {3,6}, {12}} una partición de div 12? ¿por qué?

(d) Inventa una partición de div 20.

**9.** (a) ¿Cuáles son los elementos del conjunto que se obtiene de la expresión 2k - 3 dándole a k los valores 2, 3, 4, 5 y 6?

(b) Escribe el conjunto de los elementos anteriores por extensión.

(c) Demostrar que siendo A = {k / k $\in$ N, 3 $\leq$ 2 + 5k $\leq$ 20} y B = {k / k $\in$ N, 3 $\leq$ 2 + k $\leq$ 20} se cumple A $\subset$ B.

(d) Hallar el conjunto M = {k / k $\in$ Z, -2 $\leq$ 2 + 7k $\leq$ 23}

**10.** Dados los conjuntos A = {x / $x^2 - x - 2 = 0$}

B = {x / x$\in$ N, 0 $\leq$ x $\leq$ 2}

C = {x / $x^2 - 1 = 0$}

D = {x / $\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x+1}{4} = -\frac{3}{4}$}

(a) hallar A, B, C y D por extensión,

(b) hallar A $\cup$ B, A $\cap$ B, B - C, B $\cup$ (C $\cap$ A)

(c) ¿Son iguales los conjuntos B $\cup$ (C $\cap$ A) y (B $\cup$ C) $\cap$ A? Justifique.

**11.** (a) En cierta clase de 32 estudiantes, no todos cursan idiomas. 13 de ellos cursan Francés, 14 cursan Inglés y 10 no cursan idioma alguno, ¿cuántos son los que cursan los dos idiomas a la vez?

(b) De los 44 estudiantes de una clase:

22 cursan un solo idioma (inglés o francés)
7 no cursan lenguas.
25 van a inglés

¿Cuántos estudiantes cursan inglés, cuántos francés, cuántos hacen ambos idiomas?

(c) Colocamos las 48 cartas de un mazo (sin comodines) en tres montones. Pasamos del primer montón al segundo tantas cartas como hay en éste y del segundo al tercero tantas cartas como hay en el tercero y finalmente del tercero al primero tantas como quedaban en este, entonces resultan los tres montones iguales. ¿Cuántas cartas había al principio en cada montón?

**12.** Justificar porqué si un conjunto A tiene n elementos entonces el conjunto de partes tiene $2^n$ elementos.