Conjuntos

Una buena pregunta

¿Qué es un conjunto? La respuesta parece fácil, digamos, un conjunto es una colección de elementos, pero rápidamente surge otra pregunta, ¿qué es una colección? ¿qué es un elemento?

NI **CONJUNTO** NI **ELEMENTO** SE DEFINEN EN MATEMÁTICA**.**
Conjunto y **elemento** son, por tanto, **conceptos primitivos**.

En un desarrollo axiomático de una rama de las matemáticas se comienza por **términos no definidos** (en este caso conjunto y elemento), **relaciones no definidas** (en este caso, la relación de pertenencia) y **axiomas** que vinculan los términos y las relaciones no definidas. Entonces se desarrollan teoremas basados en los axiomas y las definiciones.

Ejemplo 1:

Consideremos el conjunto A de planetas del sistema solar, podemos nombrar a todos sus elementos y quedará claro cual es el conjunto A al cual nos referimos.

A = {Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Neptuno, Urano, Plutón}

Observa la notación, escribimos los elementos entre llaves. Esta manera de definir un conjunto se llama por **extensión.** Urano pertenece al conjunto A y se escribe

$$\text{Urano} \in A$$

La estrella Sirio no pertenece al conjunto A. Se anota

$$\text{Sirio} \notin A$$

El signo allí utilizado se llama signo de pertenencia.

En general, se utilizan letras mayúsculas para designar a los conjuntos, A, B, C, … y minúsculas para sus elementos, a, b, c, …

Pero considérese por ejemplo, el conjunto P de los números naturales pares, tiene muchos elementos, no podemos nombrarlos a todos. Se hace por **comprensión**, dando una **propiedad** que solo cumplan los **elementos de dicho conjunto y nadie más.**

Escribimos entonces:

A = {x / x es un planeta del sistema solar}

P = {x / x es un número natural par}

Resumiendo existen dos maneras de definir conjuntos, **por extensión** (nombrándolos a todos) y **por comprensión** (mediante una propiedad que tengan todos los elementos del conjunto y sólo ellos).

Ejemplo 2:

C = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}

puede escribirse

C = {x / x es un día de la semana}

Se lee: **C es el conjunto de los elementos *x* tal que *x* es un día de la semana.**

Ejemplo 3: Consideremos el conjunto D = {x / $x \in$ **N**, $x^2 - 5x + 6 = 0$}

Veamos, D es el conjunto de números naturales (utilizamos la **N** para simbolizar este conjunto), que cumplen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Las números que cumplen la propiedad son 2 y 3, (basta con resolver la ecuación!!) por lo tanto D = {2, 3}

Ejemplo 4: Consideremos el conjunto E = {x / $x \in$ **Z**, $x^2 - 5x + 6 = 0$ ó $x + 5 = -3$}.

E es el conjunto de números enteros (utilizamos la **Z** para simbolizar este conjunto), La primera ecuación tiene raíces 2 y 3 y la segunda -8, por lo tanto E = {2, 3, -8}

Ejemplo 5: Consideremos el conjunto F = {x / $x \in$ **Z**, $x^2 - 5x + 6 = 0$ y $x + 5 = -3$}.

F es el conjunto de números enteros (utilizamos la **Z** para simbolizar este conjunto), La primera ecuación tiene raíces 2 y 3 y la segunda -8, por lo tanto NO HAY ningún número que cumpla AMBAS CONDICIONES A LA VEZ.

El conjunto F no tiene elementos, F = { } o simbólicamente F = ϕ. Lo llamamos CONJUNTO VACÍO. Después lo definiremos de alguna forma.

Observa bien la diferencia entre las definiciones en los conjuntos de los ejemplos 4 y 5. Es importante.

Inclusión Amplia

Cuando todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, se dice que **A es un subconjunto de B** y se escribe:

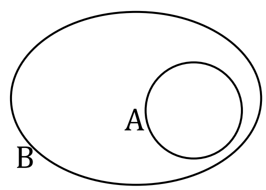
$$A \subseteq B$$

Más preciso:

Definición: A es un subconjunto de B, si y solo sí:

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

$A \subset B$ se puede leer así: **A es un subconjunto de B, A está contenido en B, A está incluido ampliamente en B.**



A un diagrama como el anterior se lo denomina **diagrama de Euler-Venn** o simplemente **de Venn.**

Ejemplo 1:

El conjunto A = {1, 2, 5} es un subconjunto de B = {1, 2, 3, 4, 5}

Ejemplo 2:

A = {a, e, i} es un subconjunto de A = {a, e, i, o, u}

Propiedades:

1. Refleja Todo conjunto es subconjunto de sí mismo, o sea $A \subseteq A \ \forall \ A$. Recuerda que el símbolo $\forall$ se lee "para todo".
2. Antisimétrica Si $A \subseteq B$ y además $B \subseteq A$ entonces $A = B$.
3. Transitiva Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración de la prop. 3: Sea x un elemento cualquiera de A, esto es $x \in A$, como A es un subconjunto de B, entonces $x \in B$, pero si $x \in B$ entonces $x \in C$. Recordando la ley del silogismo …

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Tenemos que:

$$[(x \in A) \Rightarrow (x \in B)] \wedge [(x \in B) \Rightarrow (x \in C)]$$

Por tanto, concluímos que …

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$$

Es lo que queríamos demostrar. Está demostrado. Y hemos utilizado en la demostración lo aprendido en lógica.

Inclusión Estricta

Definición: Diremos que **A es un subconjunto propio de B**, si y sólo si

A es un subconjunto de B pero A es distinto de B.
$A \subseteq B$ y además $A \neq B$

Más brevemente:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)]$$

Igualdad de conjuntos

Definición: Dos conjuntos A y B son iguales y escribimos A = B sí y solo sí, todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A. Por tanto,

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

Más sencillo: **dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.** No importa el orden de los mismos.

$$\{1, 2, 7\} = \{7, 2, 1\}$$

El conjunto vacío

Podemos definir el conjunto vacío como el conjunto sin elementos.

$$\emptyset = \{ \quad \}$$

Probemos que …

Teorema:
El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro conjunto A.

$$\emptyset \subseteq \boldsymbol{A} \qquad \forall \boldsymbol{A}$$

Demostración:

Deberíamos demostrar que:

$$Si\ (x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$$

Pero el conjunto vacío no tiene elementos, por tanto la proposición $x \in \emptyset$ es falsa, y toda implicación con premisa falsa es verdadera, por tanto se cumple lo antedicho. Está demostrado.

Tal vez es más sencillo, definir …

<u>Definición:</u> Llamamos **conjunto vacío** ϕ a un conjunto tal que $\phi \subseteq A, \forall A$.

Ejercicios:

1. ¿Los conjuntos L, M, N y P siguientes son iguales?
   L = { } M = { ϕ } N = ϕ P = { 0 }

2. ¿Son iguales los conjuntos A, B y C?
   A = {5, 6, 7} B = {7, 5, 6} C = {7, 6, 7, 5)

3. ¿Son iguales los conjuntos E, F y G?
   E = {x / x^2 - 3x = -2} F = {2, 1} G = {x / 2x - 4 = 0 ó 3x = 3}

4. Si A = {x / $2x - 6 = 0$} y b = 3, ¿es posible afirmar que b = A?

Pregunta: Exploremos algunas propiedades de la igualdad:

1. ¿cómo son los conjuntos A y A?

2. Si A = B, ¿se puede deducir de ahí otra igualdad?

3. Si A = B y B = C, ¿qué deduces?

Esas propiedades se llaman respectivamente **Refleja, Simétrica y Transitiva**. Son importantes y las poseen muchos conceptos matemáticos.

Conjunto de partes

Nos va a ocurrir a veces que los elementos de cierto conjunto son a su vez conjuntos, en este caso utilizaremos letras mayúsculas cursivas para referirnos a este nuevo conjunto.

Consideremos un conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}$$

y formemos un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de este conjunto A. A ese conjunto se le llama **conjunto de partes de A, P(A)**

Escribamos todos los subconjuntos que se nos ocurren, ¿cuántos encontraron? Son 8. Llamémoslos S_1, S_2 … S_8.

$$S_1 = \{\ \}$$
$$S_2 = \{ 1 \}$$
$$S_3 = \{ 2 \}$$
$$S_4 = \{ 3 \}$$
$$S_5 = \{ 1, 2 \}$$
$$S_1 = \{ 1, 3 \}$$
$$S_1 = \{ 2, 3 \}$$
$$S_1 = \{ 1, 2, 3 \}$$

Entonces:

$$P(A) = \{ S_1, S_2 \ldots S_8 \}$$

¿Y qué pasa si ahora A = {a, b, c, d} ¿Cuántos subconjuntos hay? ¿Cuál es la regla? ¿La encontraron? En algún momento del curso la justificaremos.

Conjunto universal

En algunos problemas van a ver que todos los conjuntos considerados son subconjuntos de cierto conjunto, a ese conjunto es habitual llamarlo **conjunto universal** y simbolizarlo con la letra U. Es importante destacar que U puede ser cualquier conjunto, depende del problema a tratar.

Cardinal de un conjunto

Se llama así al número de elementos de un conjunto.

Ejemplo: El cardinal del conjunto A = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo} es 7.

Escribimos card A = #A = n(A) = 7

Cualquiera de las notaciones es válida.

¿Cuál es el cardinal de B = ϕ?

Observa que los conjuntos cuyo cardinal es infinito no pueden ser escritos por extensión.

Ejercicios:

1. Escriban los siguientes conjuntos por extensión:

   $A = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 2 = 0\}$

   $B = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^2 - 5x + 6 = 0\}$

   C = {x / x es una letra de la palabra "calcular"}

   D = {x / x es una vocal}

   $E = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^2 - 4 = 0 \wedge 3x + 6 = 0\}$

   $F = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^2 - 7x = 0 \wedge x < 5\}$

   $G = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^3 - x = 0 \wedge 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

   $H = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, x^3 - x = 0 \vee 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

   $I = \{x \,/\, x \in \mathbf{R}, |x| = 2\}$

2. Busquen la manera de expresar los siguientes conjuntos por comprensión:

   $A = \{7, -3\}$

   $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   $C = \{1, 5\}$

   $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$