LFIS223

Astronomía General

Mónica Zorotovic

Tema 4b
Estructura Estelar

Carrol&Ostlie capítulo: "The interior of stars"

27/09

Interiores Estelares

Ecuaciones de Estructura

Equilibrio de fuerzas: Lucha entre la gravedad y la presión de la materia (Eq. hidrostático).

Equilibrio energético: La energía nuclear, o la energía gravitacional, compensan la energía perdida por radiación.

Cuando uno de estos dos equilibrios se rompe la estrella está en serios problemas.

Veamos las ecuaciones que gobiernan este equilibrio

Ecuaciones de Estructura

4 ecuaciones diferenciales + ecuación de estado + condiciones de borde

(1) Equilibrio Hidrostático

(2) Conservación de la masa

(3) Conservación de la energía

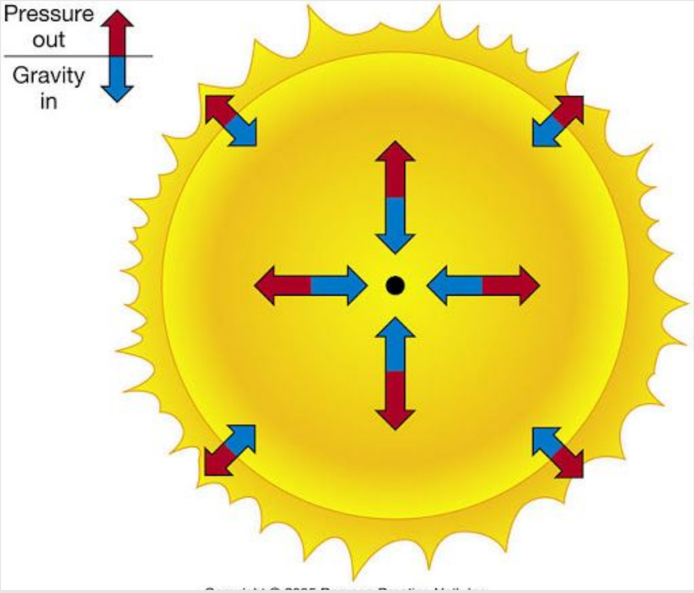
(4) Equilibrio Térmico

+ Ecuación de Estado
+ Condiciones de borde

1) Equilibrio Hidrostático

Ecuaciones de Estructura

Dos fuerzas opuestas actúan dentro de una estrella:



- La gravedad (hacia adentro) → contracción

- La presión (hacia afuera) → expansión

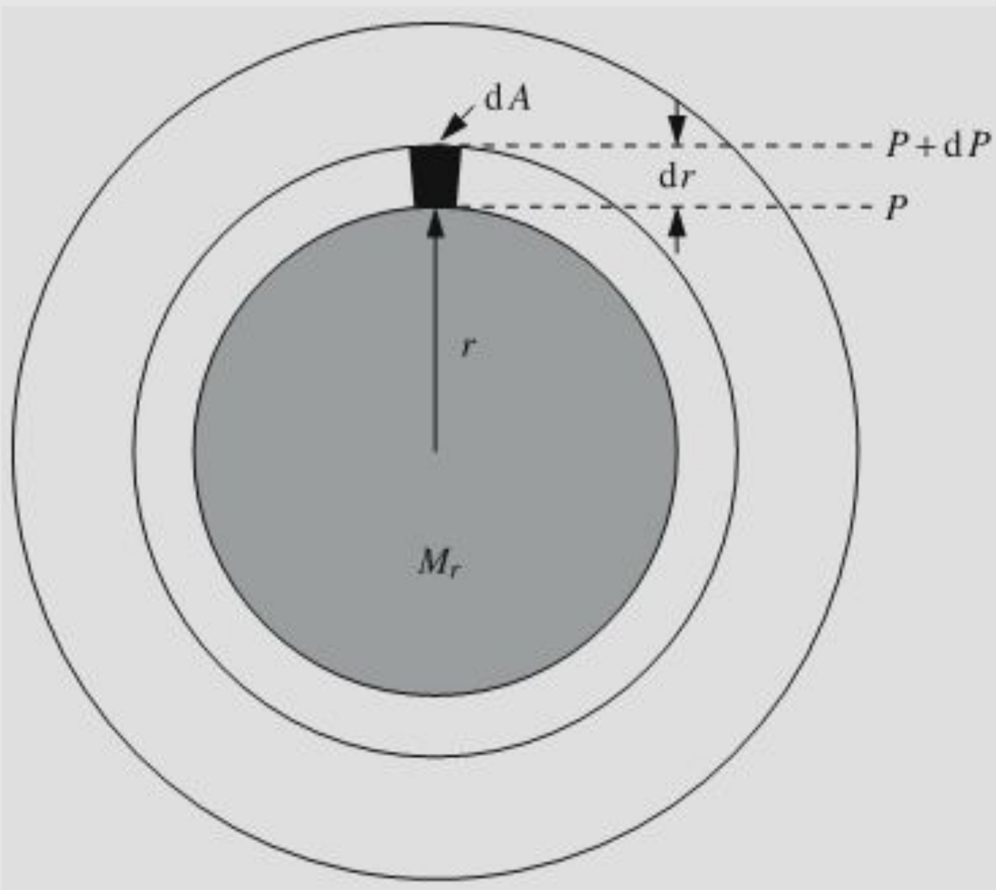
La presión y la gravedad se equilibran entre ellas:

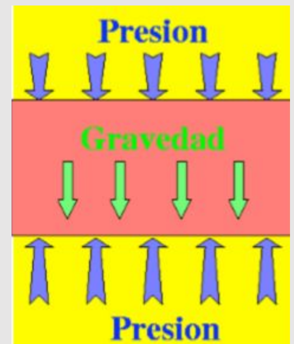
- La gravedad confina el gas en la estrella contra la expansión de la presión.
- La presión soporta la estrella contra el colapso gravitacional.

1) Equilibrio Hidrostático

Ecuaciones de Estructura

En cada capa de la estrella, la gravedad es balanceada por la presión generada en el interior





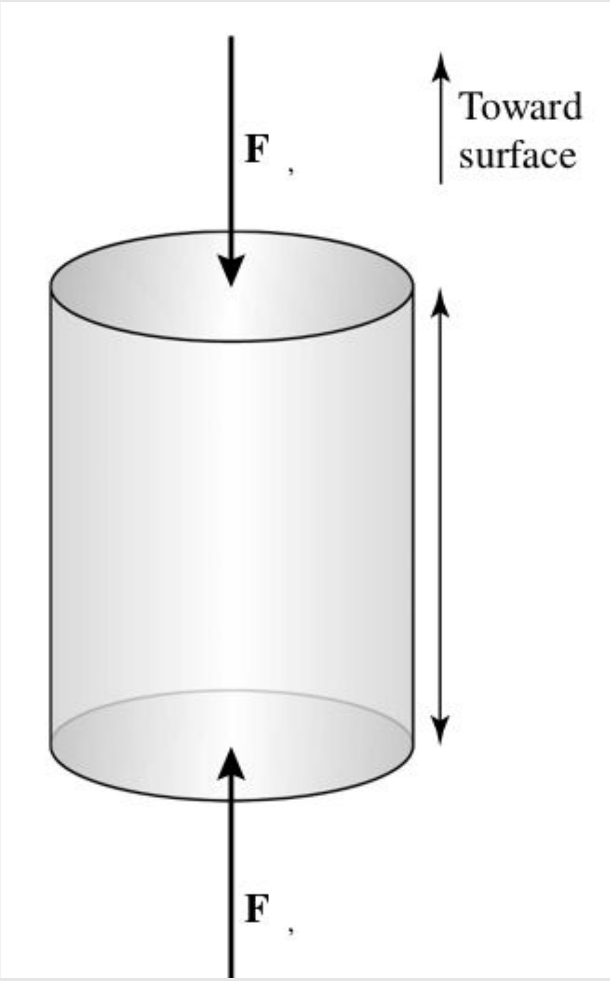
$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

donde M_r es la masa contenida dentro del volumen de radio r

1) Equilibrio Hidrostático

Demostración

Como **F** = m***a**, la fuerza neta en el cilindro de masa *dm* de la figura es **F** = *dm****a**:



$$dm\,\frac{d^2r}{dt^2} = F_g + F_{P,t} + F_{P,b},$$

Donde:

F_g = Fuerza de gravedad

$F_{P,t}$ = Fuerza de la presión en la parte superior (top) del cilindro

$F_{P,b}$ = Fuerza de la presión en la parte inferior (bottom) del cilindro

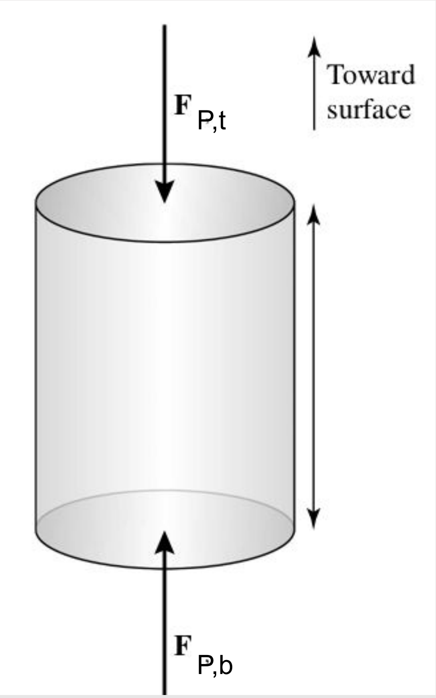
1) Equilibrio Hidrostático

Demostración

$$dm\,\frac{d^2r}{dt^2} = F_g + F_{P,t} + F_{P,b},$$

Sea d$\mathbf{F}_P$ el cambio en la fuerza de presión debido a un cambio de radio r, tenemos que

$$F_{P,t} = -\left(F_{P,b} + dF_P\right)$$



Entonces

$$dm\,\frac{d^2r}{dt^2} = F_g - dF_P$$

1) Equilibrio Hidrostático

Demostración

La fuerza de gravedad es:

$$F_g = -G\frac{M_r\,dm}{r^2}.$$

y la presión es la fuerza ejercida por la presión por unidad de área

$$P \equiv \frac{F_P}{A}. \qquad dF_P = A\,dP.$$

$$dm\,\frac{d^2r}{dt^2} = F_g - dF_P = -G\frac{M_r\,dm}{r^2} - A\,dP.$$

1) Equilibrio Hidrostático

Demostración

Si la densidad del gas en el cilindro es ρ

$$dm = \rho A\, dr.$$

Donde ***Adr*** es el volumen del cilindro.

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\rho A\, dr \frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r \rho A\, dr}{r^2} - A\, dP.$$

Podemos dividir por A*dr y nos Nos queda:

$$\rho \frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}$$

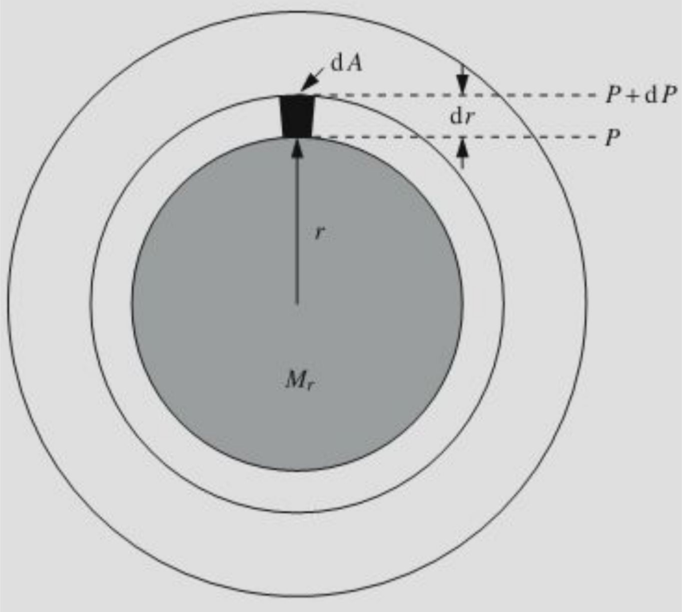
1) Equilibrio Hidrostático

Demostración

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -G\frac{M_r \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}$$

Si la estrella está en equilibrio, no se expande ni se contrae, entonces la aceleración del gas debe ser cero, y obtenemos:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$



dP/dr es siempre negativa en condiciones de equilibrio hidrostático

1) Equilibrio Hidrostático

Implicancias

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

1. $dP/dr \leq 0$ implica que la presión debe disminuir hacia afuera en una estrella en equilibrio hidrostático.
   (hacia dentro necesito más presión, porque soporta más masa)

2. Esto implica que **la densidad y temperatura deben aumentar hacia el centro**.

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ (n/V = $\rho \rightarrow P = \rho RT$)

2) Conservación de masa

Ecuaciones de Estructura

También conocida como “ecuación de continuidad”

Relaciona la masa con la densidad, en función del radio.

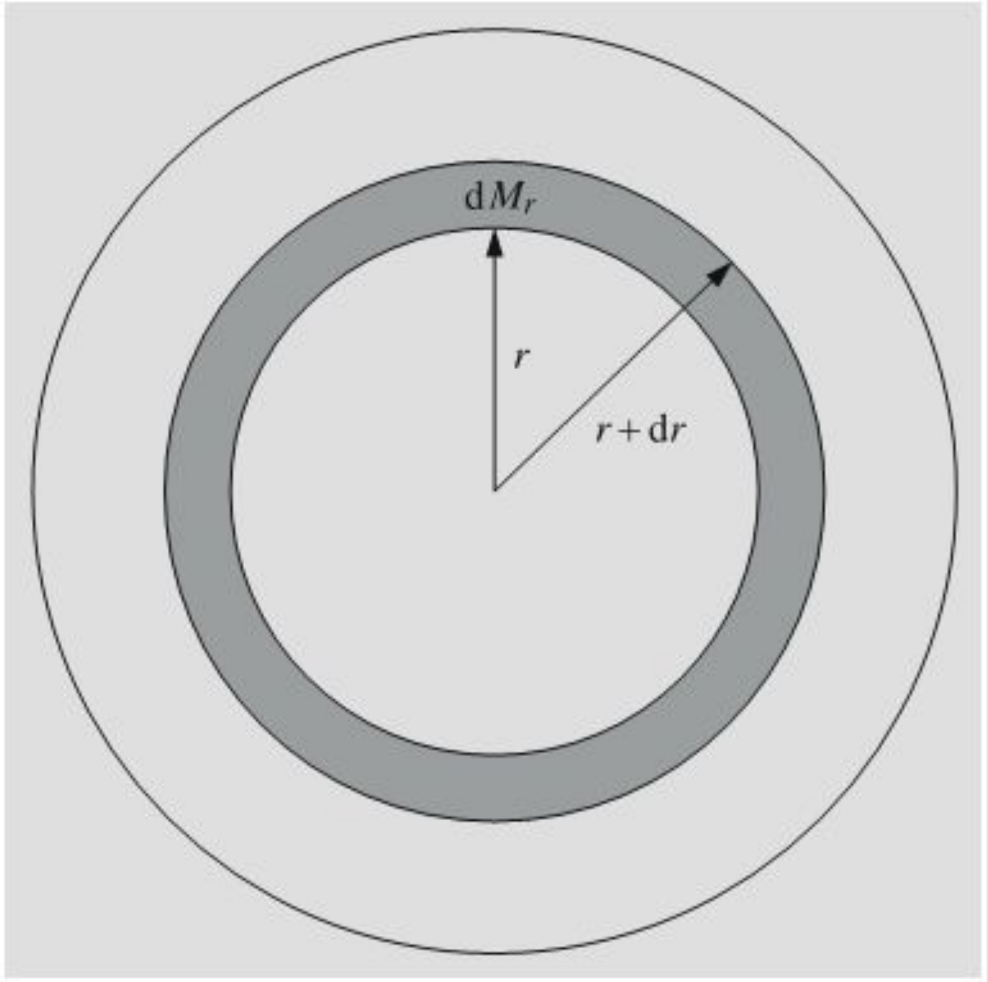
En un volumen

$$dV = A{*}dr = 4\pi r^2 dr$$

Hay una masa

$$dM_r = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$



3) Conservación de Energía

Ecuaciones de Estructura

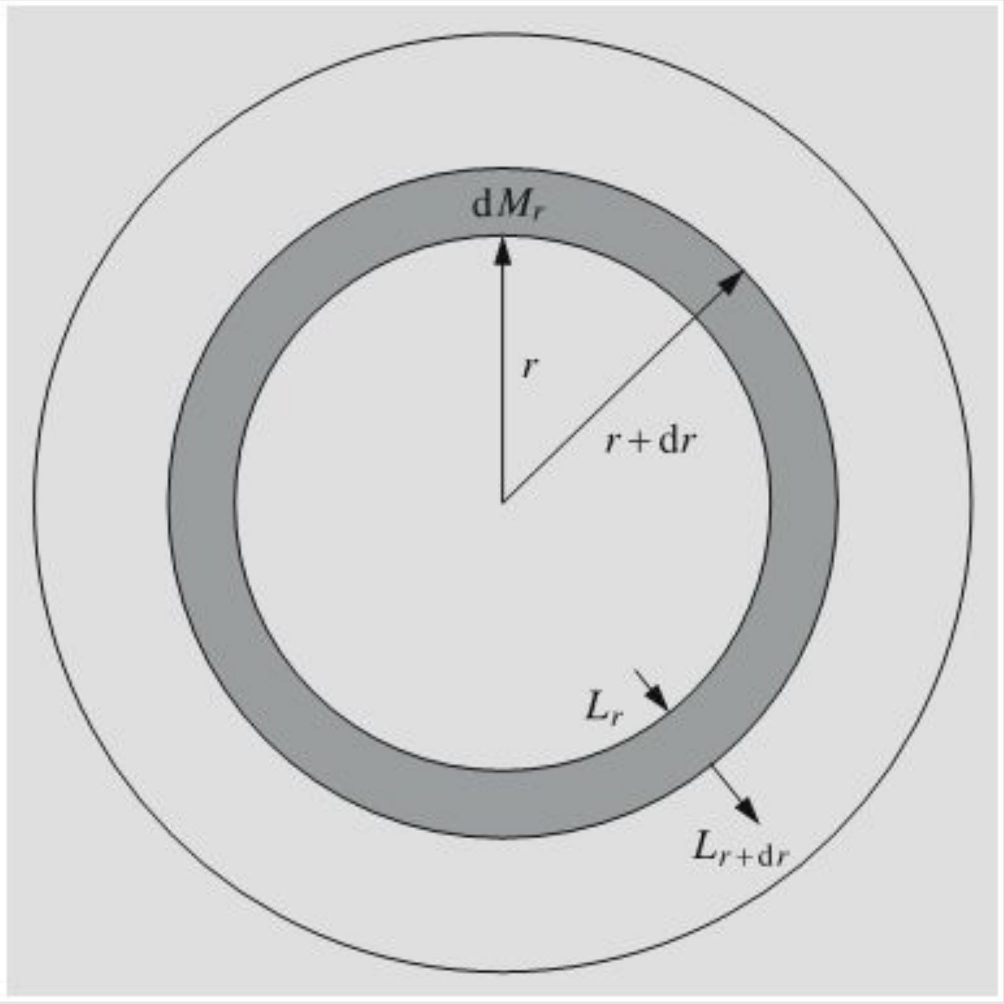
Sea ε la energía producida por un gramo de materia por segundo:

$$L_{r+\mathrm{d}r} - L_r = \varepsilon \,\mathrm{d}M_r$$

y como $dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$

$$L_{r+\mathrm{d}r} - L_r = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \,\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon$$



4) Equilibrio Térmico

Ecuaciones de Estructura

La variación de temperatura en función del radio es proporcional al flujo de energía (F), el cual depende del mecanismo principal de transporte de energía.

Recordemos que estos eran:

- Radiación – Radiación electromagnética (fotones).

- Convección – Grandes masas de fluidos circulan transportando energía.

- Conducción – Energía se transporta a través del material por interacciones entre átomos.

4) Equilibrio Térmico

Ecuaciones de Estructura

Si el transporte es radiativo:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$$

Si el transporte es convectivo:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}$$

El caso conductivo no lo veremos en este curso, más que de manera descriptiva cuando hablemos de materia degenerada.

Ecuación de Estado

Ecuaciones de Estructura

Necesitamos además la Ecuación de Estado para el gas, que relaciona presión, temperatura, y volumen, en cada capa.

$$P = P(\rho, T, \mu)$$

Para **gases ideales** (a presión baja, donde la fuerza entre los átomos es despreciable, solo movimientos térmicos)

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Donde:

- P = Presión absoluta
- V = Volumen
- n = Moles de gas
- R = Constante universal de los gases ideales
- T = Temperatura absoluta

$$P = \frac{k}{\mu m_{\mathrm{H}}} \rho T \,,$$

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4} Y + \frac{1}{2} Z} \,.$$

peso molecular medio

Ecuaciones de Estructura

Tenemos entonces 5 ecuaciones, 4 de las cuales son diferenciales, para determinar la estructura de una estrella:

Equilibrio Hidrostático $$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$$

Ecuación de continuidad (conservación de masa) $$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho$$

Conservación de energía $$\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho\varepsilon$$

Ecuación de transporte radiativo/convectivo $$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$$ $$\frac{dT}{dr} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}$$

Ecuación de Estado $$P \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{k}{\mu m_{\mathrm{H}}}\rho T$$

Ecuaciones de Estructura

Estas ecuaciones regulan el comportamiento de todo sistema con simetría esférica, sustentado por la gravedad, en equilibrio hidrostático, no degenerado y no relativista.
(en régimen relativista o degenerado la ecuación de estado cambia).

Durante la evolución, la estrella cambia su composición química, variando el peso molecular medio (μ). Esto varía la ecuación de estado, además de la capacidad de la estrella de producir y absorber energía:

$$k = k(\rho, T, \mu)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \mu)$$

Ecuaciones de Estructura
Condiciones de borde

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se necesitan las ***condiciones de borde:***

al centro de la estrella : $r = 0 \rightarrow M(r)=0 \quad L(r)=0$

en la superficie de la estrella : $r = R \rightarrow T=T_{EFF} \quad P=0$

Además de

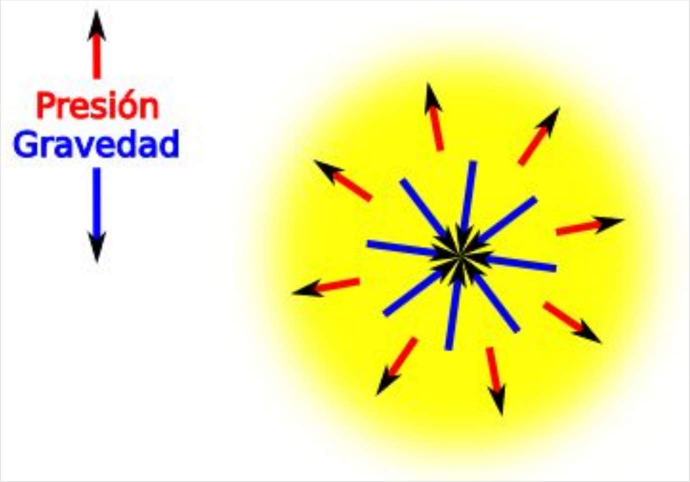
$P(0)=P_c$ $\qquad M(R)=M$

$\rho(0)= \rho_c$ $\qquad L(R)=L$

$T(0)=T_c$ $\qquad \rho(R)=0$

Teorema de Virial

Equilibrio hidrostático = equilibrio entre presión y gravedad



El teorema del virial establece que en un sistema mecánico **en equilibrio hidrostático**, la mitad del cambio en la energía gravitacional (**U**) se usará para aumentar la energía interna del sistema (**K**, calor) y la otra mitad debe ser radiada.

$$\boxed{2K + U = 0}$$

Teorema de Virial
Demostración

Las estrellas generalmente tienen a su disposición 2 grandes fuentes de energía:

1. Energía **gravitacional (U)**, que puede liberarse por contracción.
2. Energía **interna (K)**, que se puede producir tanto por contracción, como por fusión y otros procesos internos.

Combinando las ecuaciones de equilibrio hidrostático y conservación de masa:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2} \qquad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Obtenemos

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$(dP/dr)/(dM_r/dr) = dP/dM_r = dP/dm$

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$ $\times\ 4\pi r^3 \int dm$

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm = \underbrace{-4\pi \int_0^M r^3 \frac{\partial P}{\partial m}\,dm}_{\text{Integrate by parts}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \underbrace{-\,4\pi r^3 P\Big|_{m=0}^{m=M}}_{\text{identically zero}} + 12\pi \int_0^M r^2 P \frac{\partial r}{\partial m}\,dm$$

$$= 12\pi \int_0^M r^2 P \frac{1}{4\pi r^2 \rho}\,dm$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$= \int_0^M \frac{3P}{\rho}\,dm,$$

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm = \int_0^M \frac{3P}{\rho}\,dm,$$

Para el gas ideal: $P = \frac{k}{\mu m_{\rm H}}\rho T\ ,$

$$\int_0^M \frac{3P}{\rho}dm = \frac{3kT}{\mu m_H}\int_0^M dm = \frac{3kT\,M}{\mu m_H} = 3NkT$$

donde $N = \frac{M}{\mu m_H}$ = nV

entonces: $\int_0^M \frac{Gm}{r}dm = 3NkT$

Para el gas ideal además, la energía interna (térmica) es:
K=3/2NkT

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm = 3NkT = 2K$$

El lado izquierdo corresponde al módulo de la energía gravitacional (|U| = GMm/r), la cual es negativa ya que apunta hacia el centro.

Con esto obtenemos |U| = -U = 2K

$$\rightarrow 2K + U = 0$$

Algunos libros usan **U** para la energía interna y **Ω** para la gravitacional

Durante el proceso de formación y evolución estelar, las estrellas se contraen (o expanden) en condiciones muy **cercanas al equilibrio hidrostático**.

$$2K + U \cong 0$$

Si la energía gravitacional cambia por ΔU, su energía térmica debe cambiar por:

$$\Delta K \cong -1/2\Delta U$$

y la otra mitad de la energía potencial perdida debe ser radiada hacia el espacio.

ΔU negativo (contracción) implica ΔK positivo (se calienta) y viceversa. Por eso **las estrellas se calientan cuando se contraen y se enfrían cuando se expanden**.