Tarea 1

Cálculo III - FOGEC
FC - UV - 26 - 04 - 2022

1.- (12 Puntos) Sea la bola abierta $B\big((3,4),3\big)$ en $\mathbb{R}^2$ y $A \subset \mathbb{R}^2$. Pruebe que:

Si $D(A) < 3$ y $B\big((3,4),3\big) \cap A \neq \emptyset$, entonces $A \subseteq B\big((3,4),6\big)$.

Obs: $\boldsymbol{D(A) = \text{diámetro del conjunto } A}$

2.- (9 + 3 = 12 Puntos) Dada la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \wedge y - x - 1 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x^2 \wedge -1 \leq x < 2 \\ \dfrac{1}{x^2+y^2-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represente gráficamente el dominio de f

b) Hallar , en caso de ser posible: $f(0,0)$, $f(3,5)$ y $f(0,4)$

3.- (12 Puntos) Graficar el cono elíptico de ecuación:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 0$$

Dibuje además las trazas que se obtienen con los planos $x = -1$; $z = 3$

4.- (12 Puntos) Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sqrt{xy-2} + x^3y^3 - 8}{\sqrt{x^2y^2-4}}$$

5.- (12 Puntos) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2-1} & \text{si } \ x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{si } \ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Observación

Fecha para entregar tarea 1 : **martes 10 de mayo en horario de clases**

1.-

Por hipótesis $B\big((3,4),3\big) \cap A \neq \emptyset$, luego podemos elegir $y \in B\big((3,4),3\big) \cap A$ tal que

a) si $x \in A$ entonces $d(x,y) < 3$.

b) $d\big((3,4),y\big) < 3$.

Sea $z \in A$. Utilizando desigualdad triangular, a) y b) se tiene que

$$d\big(z,(3,4)\big) < d(z,y) + d\big(y,(3,4)\big) < 3 + 3 = 6$$

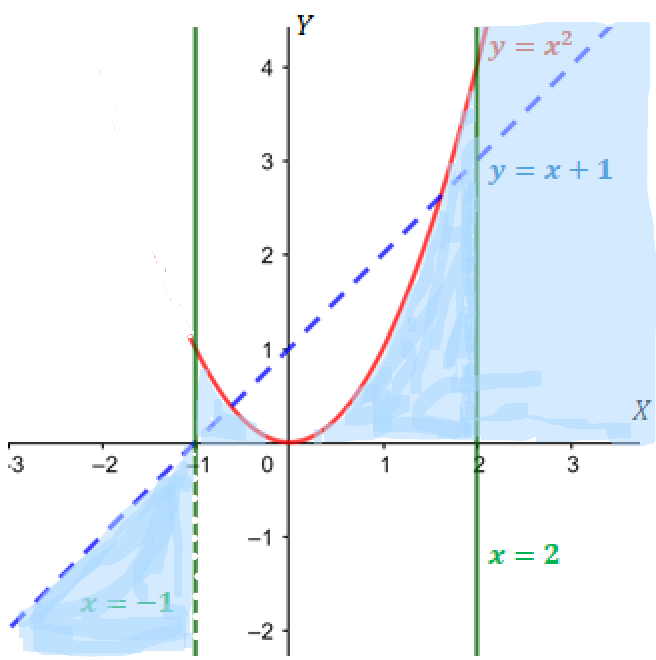
Es decir, hemos probado que $z \in B\big((3,4),6\big)$. El z escogido es arbitrario, por lo tanto, se ha probado que $A \subseteq B\big((3,4),6\big)$.

2.-

a)

$$Dom\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < -1 \wedge y < x + 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq y \leq x^2 \wedge -1 \leq x < 2\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \geq 2 \ \wedge y \geq 0\}$$

Luego el gráfico del $Dom\ f$ esta dado por la siguiente figura:



b) Ahora determinemos los valores:

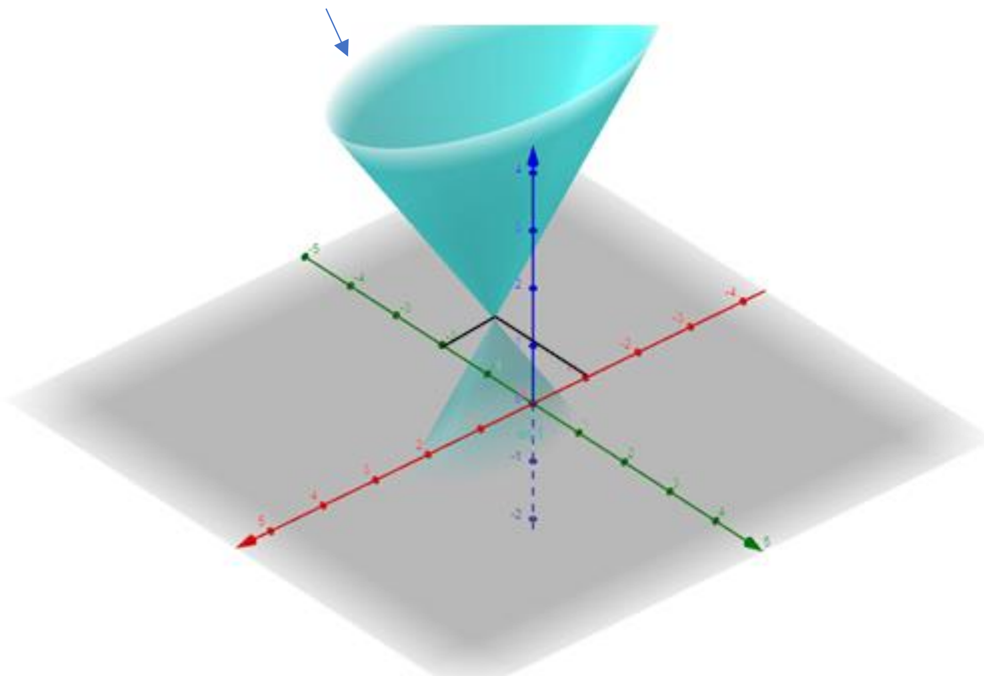
$$f(0,0) = 0$$

$$f(3,5) = \frac{1}{33}$$

$$f(0,4) = \nexists$$

3.-

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 0$$



Para el plano $x = -1$, entonces

$$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 0$$

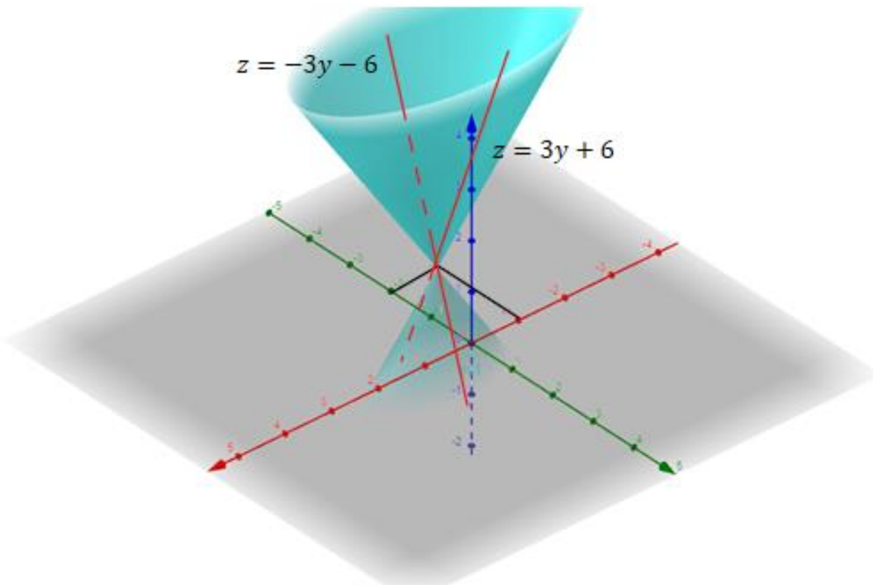
luego

$$\frac{(y+2)^2}{1} = \frac{z^2}{9}$$

De donde se obtienen las trazas que son rectas:

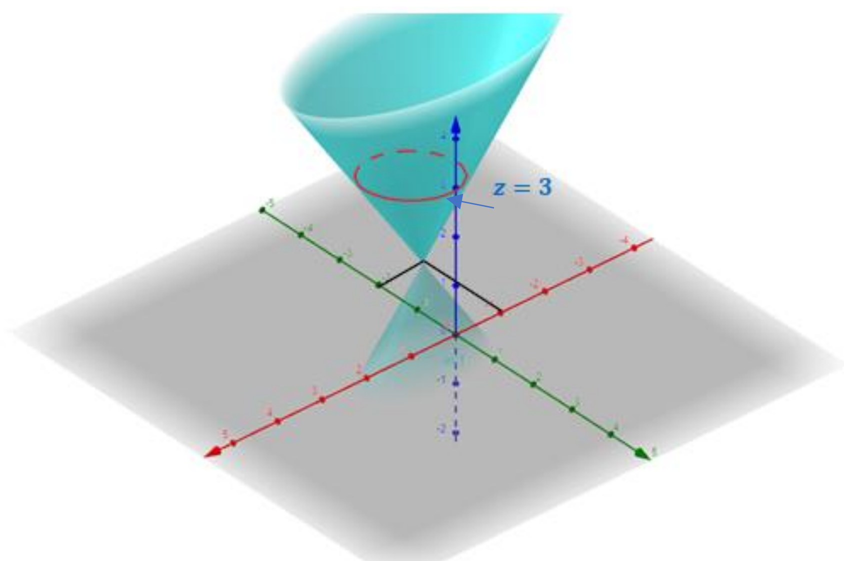
$$z = 3y + 6$$

$$z = -3y - 6$$



Para el plano $z = 3$ tenemos como traza la circunferencia

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$



4.-

Calcularemos el límite por álgebra de límite:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sqrt{xy-2} + x^3y^3 - 8}{\sqrt{x^2y^2 - 4}}$$

Previo

$$\frac{\sqrt{xy-2}+x^3y^3-8}{\sqrt{x^2y^2-4}}=\frac{\sqrt{xy-2}}{\sqrt{x^2y^2-4}}+\frac{x^3y^3-8}{\sqrt{x^2y^2-4}}$$

$$=\sqrt{\frac{xy-2}{x^2y^2-4}}+\frac{x^3y^3-8}{x^2y^2-4}$$

$$=\sqrt{\frac{xy-2}{(xy-2)(xy+2)}}+\frac{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}{\sqrt{x^2y^2-4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\frac{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}{\sqrt{(xy-2)(xy+2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\frac{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}{\sqrt{xy-2}\sqrt{xy+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\frac{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)\left(\sqrt{xy-2}\right)}{(xy-2)\sqrt{xy+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\frac{(x^2y^2+2xy+4)\left(\sqrt{xy-2}\right)}{\sqrt{xy+2}}$$

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{\sqrt{xy-2}+x^3y^3-8}{\sqrt{x^2y^2-4}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\frac{(x^2y^2+2xy+4)\left(\sqrt{xy-2}\right)}{\sqrt{xy+2}}\right)$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{1}{\sqrt{xy+2}}+\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{(x^2y^2+2xy+4)\left(\sqrt{xy-2}\right)}{\sqrt{xy+2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{(4+1+4+4)\sqrt{0}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

5.-

$$Dom\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 < 1\ \}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 > 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Sean

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\ \}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 > 1\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Luego

$$Dom\ f = A \cup B \cup C = \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, estudiaremos la continuidad para la condición

$$f(a,b)\ existe\ \ \forall (a,b) \in A \cup B \cup C$$

Consideremos entonces los puntos (a,b) tal que $a^2 + b^2 \neq 1$, por consiguiente se tiene dos casos:

Si $a^2 + b^2 < 1$, entonces $\forall (x,y) \in A$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$
$$= \frac{ab}{a^2 + b^2 - 1} = f(a,b)$$

Si $a^2 + b^2 > 1$, entonces $\forall (x,y) \in B$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$
$$= \frac{ab}{a^2 + b^2 - 1} = f(a,b)$$

De este modo, f es continua en todo los puntos (a,b) para los cuales $a^2 + b^2 \neq 1$ eso es, continua en $A \cup B$. Ahora veamos que pasa en $(a,b) \in C$, esto es, en los puntos (a,b) para los cuales $x^2 + y^2 = 1$.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{ab}{a^2+b^2-1} = \frac{ab}{0} = \nexists$$

Concluimos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe. Por tanto, f es discontinua en todos los puntos $(a,b) \in C$.

Resumiendo

La función es continua en todo punto del plano salvo en los puntos de la circunferencia **:** $x^2 + y^2 = 1$