Guía Nº 2

Cálculo III - Facultad de Ciencias
UV

1.- Siendo $f : IR^2 \rightarrow IR$; $f(x,y) = 3x^3y - 2xy$ hallar :

a) $f(0,0)$ b) $f(-1,3)$ c) $f(a,y$ d) $f(x,2)$ e) $f(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

2.- Sea $f : A \rightarrow IR$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \ln(x+y+2) & \text{si } |y| \leq x \\ 2x+y & \text{si } xy > 0 \wedge x < 0 \end{cases}$

a) hallar y graficar A b) hallar $f(-1,2)$
c) hallar $f(1,-1)$ d) hallar $f(-2,-2)$.

3.- Hallar el dominio adecuado para cada una de las siguientes funciones y hacer un gráfico del mismo en cada caso :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}$

b) $f(x,y) = \ln|(x+3)(y-2)|$

c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1 - 3x^2 - 2y}}{\ln|5 - x^2 + y|}$

d) $f(x,y) = \dfrac{\ln|2y - x^2 - y^2|}{\cos(\pi y)}$

e) $f(x,y) = \dfrac{\arccos(x^2 + y^2 - 3)}{x^2 + y^2 - 4}$

f) $f(x,y) = \dfrac{\ln|3 - x^2 + y|}{\sqrt{1 - x^2 - y}}$

g) $f(x,y) = \dfrac{\ln\left|\frac{14x^2}{5} - y\right| \ln|y - x^2 + 4|}{\sqrt{3 - \frac{|x|}{2} - y}}$

h) $f(x,y) = \dfrac{\cos(y)}{1 + sen(x)}$

i) $f(x,y) = \sqrt{|y| - 1} + \sqrt{|x| - 2}$

j) $f(x,y) = \sqrt{|x + 2y| - 3}$

k) $f(x,y) = arcsen(xy)$

l) $f(x,y) = \dfrac{3x}{5 - |x|}$

4.- Hallar las curvas de nivel para cada una de las siguientes funciones. En cada caso considerar , según el recorrido , los valores que pueden asignarse a z .

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{5y + x}$

b) $f(x,y) = 4 - |x| - |y|$

c) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 1$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}$

e) $f(x,y) = \ln(x - 4y)$

f) $f(x,y) = y - x^2 + x - 2$

5.- Determinar las superficies de nivel correspondientes a las siguientes funciones :

a) $f(x,y,z) = x + y - z$ b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$

c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ d) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$

6.- Probar la existencia de los siguientes límites hallando $\delta(\epsilon)$ en cada caso :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (3x+4y) = 11$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} (x^2+xy) = 6$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{1}{2}$

7.- Calcular los sigientes límites :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2x^2+5y-1}{3x^2+9y^2+8}\right)$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(7,2)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x+y}}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-3)} \sqrt[3]{9-x^2-y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} \left(\dfrac{xy-x+5}{y^2}\right)$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{x+y-1}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{e^{xy}-e^{-xy}}{2}\right)$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \left(sen(x)\cos\left(\dfrac{y+x-\pi}{y^2+2}\right)\right)$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \left(\dfrac{sen(x)+y}{x-\cos(y)}\right)$

i) $\lim\limits_{(2,0)\to(2,0)} \dfrac{y\ sen(x-2)}{x^2-4}$ j) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} (x^3+y^3)sen\left(\dfrac{x^2y}{\pi y+\pi x}\right)$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{8x^3+y^3}{2x+y}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen^2(x)\ sen^2(y)}{2xy\ tg(x)\ tg(y)}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)}-1}{2x+3y}\right)$ n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{y+4\sqrt{y}-4x-8\sqrt{x}}{\sqrt{y}-2\sqrt{x}}\right)$

o) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \left(\dfrac{x-y+z}{x^2+y^2}\right)$ p) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2+z^2}{\sqrt{x^2+z^2}-y}\right)$

r) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(x^2)\ sen(y^2)}{x^6+|y|}$ s) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$

8.- Verificar que no existe límite doble en el origen , mediante límites sucesivos o diferentes trayectorias :

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{6x^2-5y^2}{x^2+2y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{tg(x)\ sen(y)}{x^2+y^2}$ e) $f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$

9.- Sea $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^3}$. Calcular límite en el origen para sus resticciones a los siguientes conjuntos : $C_1 = \{(x,y) / y = 4x\}$, $C_2 = \{(x,y) / y^2 = x\}$

10.- Idem para $f(x,y) = \dfrac{2x-y-1}{x^2-y^2}$ en $(1,1)$ sobre :
$C_1 = \{(x,y) / y = -x^2+2\}$ y $C_2 = \{(x,y) / y = 2x-1\}$

11.- Idem para $f(x,y) = \dfrac{x^2-y}{x-y^3}$ en $(1,1)$ sobre .
$C_1 = \{(x,y) / y = x\}$ y $C_2 = \{(x,y) / y = 2-x^2\}$

12.- Invetigar si existe límite doble en $(1,1)$ para :

a) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{x^2-y^3}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy-2}{1-xy}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2-y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ 1 & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$

13.- Investigar si existe o no lìmite doble en el origen para :

a) $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^4+2x^2y+y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{y^4+x^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{10x^3-2y^3}{(x-1)^3+y^3+1}$ d) $f(x,y) = \dfrac{6xy}{x^2+y^2}$

14.- ¿ Existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{4x+y-3z}{2x-5y+2z}$? . Justifique su respuesta.

15.- Averigue si la siguiente función es o no continua en $(0,0)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } |y| < x^2 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16.- Analice la continuidad de f en $(0,0)$,en $(0,1)$ y en $(1,1)$ si :

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} xy\,sen\left(\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si } (x+y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x+y) = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

17.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican :

a) $f(x,y) = \dfrac{xy+2x+4y+8}{xy-y^2+2x-2y}$ en $(-4,-2)$

b) $f(x,y) = \dfrac{sen(x+y^2-9)}{tg(3x+3y^2-27)}$ en $(5,2)$

18.- En que puntos (x,y) del plano las siguientes funciones son continuas.

a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{\ln(x)}{y}}$

b) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1}{y-x^2-1}\right) + \ln(y+x^2-2)$

c) $f(x,y) = 3y + \dfrac{\cos(4x)}{sen(9x)}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{9x^2+4y^2-1}}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^4}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$

19.- Determinar el conjunto de puntos para los cuales la siguiente función presenta discontinuidad

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2-y^2 & \text{si } x^2-y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2 > 1 \end{cases}$$

20.- ¿ Es posible definir $f(x,y) = \frac{x(1+y^2)-(y^2+1)}{x-1}$ de manera que sea contínua en $(1,0)$?

21.- Determinar los puntos (x,y,z) para los cuales las siguientes funciones son contínuas:

a) $f(x,y,z) = 1 - x + y^2 + z^3$

b) $f(x,y,z) = \cos(x+y+z)$

c) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{z^2 + x^2 - 9}$

d) $f(x,y,z) = \dfrac{x+1}{(z-1)(y+3)}$

e) $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \text{si } x^2+y^2+z^2 \neq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$

22.- Demuestre que la siguiente función es continua en el punto $(0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2xz + 3xy + 4yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$