Trigonometría

Trigonometría: tri + gono + metría = medida de tri-ángulos

Medida de ángulos

Al usar la calculadora también se debe tener cuidado de que existen dos sistemas de medidas de ángulos:

1) medida de ángulos en grados sexagesimales.
2) medida de ángulos en radianes.

1) Grados sexagesimales

Es el sistema en el cual un ángulo recto mide 90°, un ángulo extendido 180°, un ángulo completo (giro completo) 360°.

Se debe tener cuidado porque es un sistema sexagesimal (al igual que el que utilizamos para medir el tiempo):

$$1° = 60 \text{ minutos} = 60'$$
$$1' = 60 \text{ segundos} = 60''$$

Ejemplo:

Dados $\alpha = 42° \, 15' \, 20''$ y $\beta = 23° \, 50' \, 12''$,

1) calcular $\alpha + \beta$;

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 42° \, 15' \, 20'' \\ \underline{+ \quad \beta =} & \underline{23° \, 50' \, 12''} \\ \alpha + \beta = & 65° \, 65' \, 32'' \end{array}$$

pero 65' alcanza para formar un grado más, por tanto, convierto 60' en un grado más (el equivalente a "reservar uno" al sumar en el sistema decimal) …

$$\alpha + \beta = 65° \, 65' \, 32''$$

$$\alpha + \beta = 66° \;\; 5' \, 32''$$

2) Calcular $\alpha - \beta$;

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 42° \, 15' \, 20'' \\ - \quad \underline{\beta =} & \underline{23° \, 50' \, 12''} \end{array}$$

No puedo restar 15 – 50 porque daría negativo, por tanto "le pido uno a la columna de la izquierda" y convierto un grado en 60 minutos.

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 41° \, 75' \, 20'' \\ - \quad \beta = & 23° \, 50' \, 12'' \\ \hline \alpha - \beta = & 18° \, 25' \;\; 8'' \end{array}$$

3) Calcular 3α;

$$3\alpha = \; 3 \times (42° \, 15' \, 20'')$$

$$3\alpha = 126° \, 45' \, 60''$$

Luego, reservo uno al igual que en la suma,

$$3\alpha = 126° \, 46' \;\; 0''$$

2) Radianes

Definición: Un **radián** es la medida de un ángulo tal que la longitud del arco subtendido por el igual al radio de la circunferencia.

$$1 \, rad \; \approx 57°17'$$

lo que nos lleva a la equivalencia,

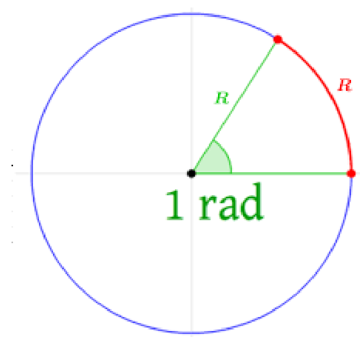
$$6{,}28 \, rad \; \approx 360°$$

Más exactamente,

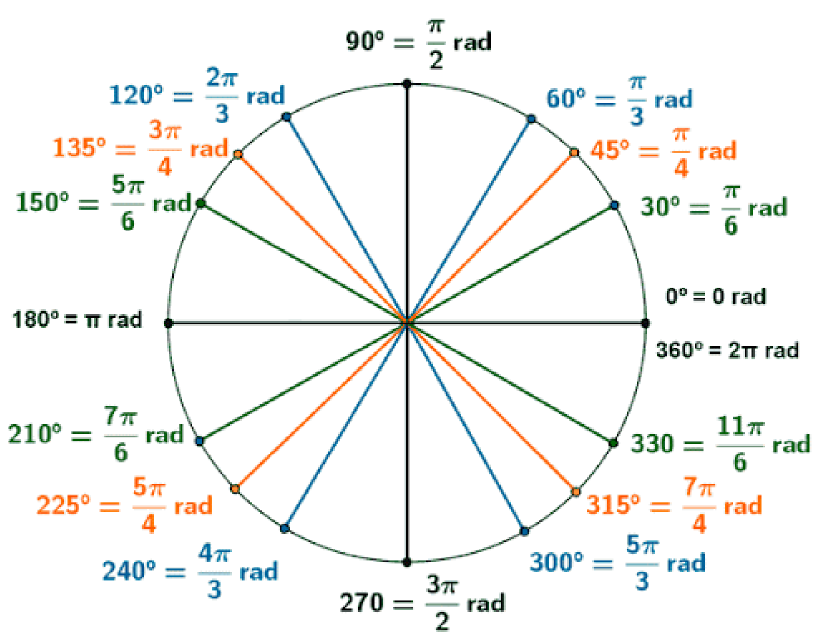
$$2\pi \, rad = 360°$$

o sea,

$$\pi \, rad = 180°$$



Usando esa equivalencia y mediante proporciones, encontramos que:

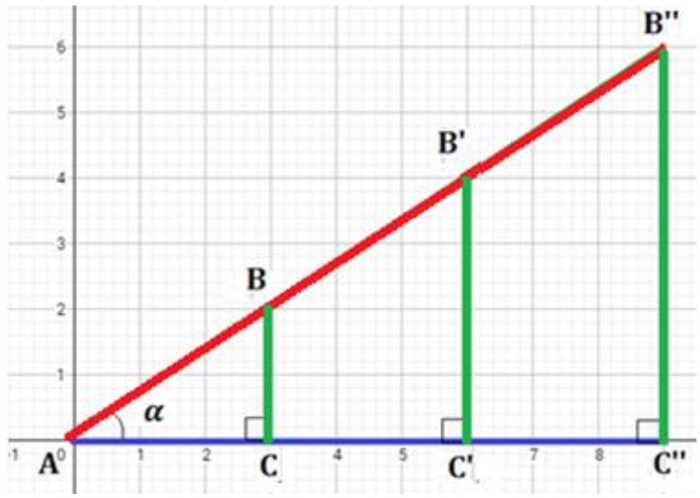


Las razones trigonométricas

Observen los tres triángulos dibujados a continuación. Dado que comparten el ángulo en el vértice A y los tres son rectángulos (es decir, en todos ellos un ángulo mide α y otro 90°) se puede afirmar que son **triángulos semejantes**. Y en dos o más triángulos semejantes los lados respectivos son **proporcionales.**

Por tanto, si elegimos lados, por ejemplo, **verde** y **rojo**, las razones de esos lados en los tres triángulos serán iguales:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$



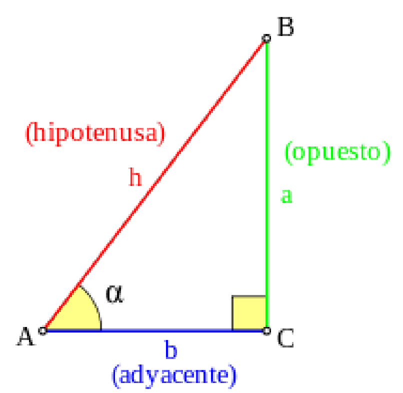
Por tanto, esas razones no pueden depender del tamaño del triángulo (es decir de las medidas de sus lados). Sólo pueden depender del ángulo α. Se dice que son funciones del ángulo α y se escribe $f(\alpha)$.

¿Cuántas de estas razones trigonométricas se pueden construir en la figura? Exactamente seis, que llamaremos respectivamente sen α, cos α, tg α, sec α y cosec α (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante):

$$sen\ \alpha = \frac{BC}{AB} \qquad cosec\ \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\ \alpha = \frac{AC}{AB} \qquad sec\ \alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$tg\ \alpha = \frac{BC}{AC} \qquad cotg\ \alpha = \frac{AC}{BC}$$



Por lo dicho antes, el cálculo de cualquiera de ellas es independiente del triángulo en el cual trabajemos, sólo depende del ángulo α, por tanto nos bastará con dibujar un solo triángulo. Dados que las letras pueden cambiar de posición, coloquémosles nombres a los diferentes lados del triángulo: **hipotenusa**, **cateto opuesto al ángulo** y **cateto adyacente al ángulo**.

Tenemos entonces que:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cosec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad cotg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

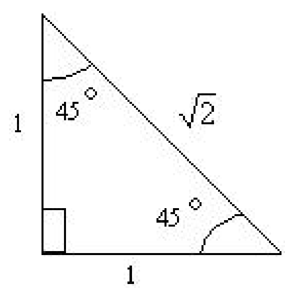
Pequeño recurso mnemotécnico (ayuda memoria):

"Dos cocas con hielo, por favor"

$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$	$\frac{CA}{CO}$	$\frac{H}{CA}$	$\frac{H}{CO}$
sen	**cos**	**tg**	**cotg**	**sec**	**cosec**

Valores trigonométricos de ángulos notables:

Trabajando en un triángulo isósceles rectángulo, se pueden deducir los valores del seno, coseno y tangente de 45°:



$$sen 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^0 = \frac{1}{1} = 1$$

Finalmente (véanse los ejercicios al final sobre como deducir el seno, coseno, tangente de ángulos 30° y 60°), se puede construir la siguiente tabla:

	ÁNGULO				
RAZÓN	0º	30º	45º	60º	90º
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$

Ejercicios:

1. Exprese en radianes:

a) 15° b) 120° c) 240°

Respuestas: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$

2. Exprese en grados:

a) $\pi/15$ b) $3\pi/10$ c) $7\pi/12$

Respuestas: 12°; 54°; 105°

3. Si α es ángulo agudo con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, encontrar $\sec\alpha$.

Respuesta: $\sec\alpha = \frac{7}{5}$

4. Mediante las figuras adjuntas y utilizando el teorema de Pitágoras, deduzca los valores de seno, coseno y tangente de 30° y 60°.