Ejercitación en inducción completa

Ejercicio 1:

Se da la igualdad: $$\sum_{i=0}^{i=n}(i^2+2i)=\frac{an^3+bn^2+7n}{6}$$

(a) Hallar a y b sabiendo que la igualdad es válida para $n=1$ y $n=2$.

(b) Con los valores de a y b hallados, demostrar por inducción completa que la igualdad es válida $\forall n \in N$.

(c) Determinar n para que $\sum_{i=0}^{i=n}(i^2+2i)=\frac{n^3+25}{3}$

Solución:

Parte a): Debemos encontrar los valores de a y b.

La igualdad se cumple para $n=1$. Por tanto, la sumatoria tendrá dos términos (observen que esta sumatoria comienza en $i=0$).

$$\sum_{i=0}^{i=1}(i^2+2i)=\frac{a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+7\cdot 1}{6}$$

Desarrollando la sumatoria:

$$(0^2+2\cdot 0)+(1^2+2\cdot 1)=\frac{a+b+7}{6}$$

$$3=\frac{a+b+7}{6}$$

$$a+b=11$$

Luego, también se cumple para $n=2$:

$$\sum_{i=0}^{i=2}(i^2+2i)=\frac{a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+7\cdot 2}{6}$$

$$(0^2+2\cdot 0)+(1^2+2\cdot 1)+(2^2+2\cdot 2)=\frac{8a+4b+14}{6}$$

$$8a+4b=52$$

Resolvemos el sistema obtenido:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ 2a + b = 13 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a = 2} \qquad \boldsymbol{b = 9}$$

Parte b): Debemos demostrar por inducción completa que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (i^2 + 2i) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6}$$

Paso base: En este caso, para $n = 0$,

$$\sum_{i=0}^{i=0} (i^2 + 2i) = \frac{2 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0}{6}$$

$$0 = 0 \quad \text{Se cumple.}$$

Paso inductivo: Si se cumple para un natural cualquiera h, deberá cumplirse también para el natural siguiente $h + 1$.

Hipótesis) Suponemos $P(h)$ verdadera,

$$\sum_{i=0}^{i=h} (i^2 + 2i) = \frac{2h^3 + 9h^2 + 7h}{6}$$

Tesis) $P(h\ +\ 1)$ también es verdadera.

$$\sum_{i=0}^{i=h+1} (i^2 + 2i) = \frac{2(h+1)^3 + 9(h+1)^2 + 7(h+1)}{6}$$

Demostración) Separemos el último término de la sumatoria de la tesis.

$$\sum_{i=0}^{i=h} (i^2 + 2i) + [(h+1)^2 + 2(h+1)] = \frac{2(h+1)^3 + 9(h+1)^2 + 7(h+1)}{6}$$

Y reemplazamos la expresión de la hipótesis,

$$\frac{2h^3 + 9h^2 + 7h}{6} + (h+1)^2 + 2(h+1) = \frac{2(h+1)^3 + 9(h+1)^2 + 7(h+1)}{6}$$

$$\frac{2h^3+9h^2+7h+6(h+1)^2+12(h+1)}{6}=\frac{2(h+1)^3+9(h+1)^2+7(h+1)}{6}$$

$$\frac{2h^3+9h^2+7h+6(h^2+2h+1)+12(h+1)}{6}=$$
$$=\frac{2(h^3+3h^2+3h+1)+9(h^2+2h+1)+7(h+1)}{6}$$

$$\frac{2h^3+15h^2+31h+18}{6}=\frac{2h^3+15h^2+31h+18}{6}$$

Está demostrado.

Parte c): Debemos encontrar un número natural n para el cual sea:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(i^2+2i)=\frac{n^3+25}{3}$$

Hemos demostrado que, para todo n natural, la sumatoria cumple:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(i^2+2i)=\frac{2n^3+9n^2+7n}{6}$$

Por tanto:

$$\frac{2n^3+9n^2+7n}{6}=\frac{n^3+25}{3}$$

$$9n^2+7n-50=0$$

$$n=\frac{-7\pm\sqrt{1849}}{18}$$

$$\boldsymbol{n=2 \quad \text{o} \quad n=-\frac{25}{9}}$$

Estamos buscando una solución natural. Por tanto, se deberán sumar tres términos, para $i=0, i=1, i=2$.

$$\sum_{i=0}^{i=2}(i^2+2i)=\frac{2^3+25}{3}$$

$$(0^2+2\cdot 0)+(1^2+2\cdot 1)+(2^2+2\cdot 2)=\frac{8+25}{3}$$

$$11=11$$

Ejercicio 2:

Demostrar mediante inducción completa que:

Todo número natural de la forma $2^{2n}+5$ con $n \in N$ es múltiplo de 3.

Solución:

Si $n=1$:

$$2^{2\cdot 1}+5=9 \quad \text{Es múltiplo de 3}$$

Si $n=2$:

$$2^{2\cdot 2}+5=21 \quad \text{Es múltiplo de 3}$$

Si $n=3$:

$$2^{2\cdot 3}+5=69 \quad \text{Es múltiplo de 3}$$

Que la propiedad se cumple para los primeros números naturales está probada.

Nos falta demostrar el **paso inductivo**:

Teorema

Si la propiedad se cumple para un natural h cualquiera se cumple también para el natural siguiente $h+1$.

Hipótesis: Se cumple para el natural h

$$2^{2h}+5=3k$$

donde k es un natural cualquiera.

Tesis: Se cumple para el natural $h+1$

$$2^{2(h+1)}+5=3q$$

donde q es otro natural que deberemos encontrar.

Demostración: Despejando en la hipótesis tenemos que:

$$2^{2h}=3k-5$$

Operando en la tesis tenemos que:

$$2^{2(h+1)}+5=2^{2h}\cdot 2^2+5$$

$$=2^{2h}\cdot 4+5$$

$$= (3k - 5)4 + 5$$

$$= 12k - 20 + 5$$

$$= 3(4k - 5)$$

$$= 3q$$

donde $q = 4k - 5$

Está probado.

Ejercicios:

1. Demuestre que todo número natural de la forma $3^{2n} - 1$ con $n \in N$ es múltiplo de 8.

2. Se da la igualdad: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} (17i + a) = \frac{17n^2 + 29n + 12}{2}$

(a) Calcular el número a sabiendo que la igualdad es válida para $n = 1$.

(b) Después demostrar por inducción completa que la igualdad es válida para todo n natural.

Respuesta: a = 6

3. Se da la igualdad: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} (3 + 5i) = an^2 + bn + c$

(a) Hallar a, b y c sabiendo que la igualdad es válida para $n = 0, n = 1, n = 2$.

(b) Después demostrar por inducción completa que la igualdad es válida $\forall n \in N$.

Respuesta: a = $\frac{5}{2}$, b = $\frac{11}{2}$, c = 3

4. Ocupando ejemplos anteriores (de ésta y las dos clases anteriores), halle:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (5i + 2)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10} 3.(2^k)$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

(d) $\displaystyle\sum_{i=11}^{i=20} \frac{1}{i(i+1)}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$ (f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (i^2 + i + 5)$

Pista: (a) Es una p.a.
(b) y (c) Son p. g.
(d), (e), (f) Usar sumatorias anteriores