Clase nº33

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

22 de Noviembre 2021

Objetivo de la clase

- Comprender el concepto de sucesión.
- Determinar si una sucesión es acotada o monótona.
- Calcular el límite de algunas sucesiones.

Sucesiones

Definición 1

Se llama **sucesión de números reales** a una función definida sobre $\mathbb{N}$ con valores en $\mathbb{R}$, es decir, una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de $\mathbb{N}$ con números reales. En otras palabras, una sucesión es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que a cada n le asigna $f(n) = a_n$.

Observación

Podemos denotar a la sucesión como $\{a_n\}$ y a a_n se le llama término general de la sucesión.

Sucesiones

Ejemplo 1

Dados los números reales x, d, una **progresión aritmética** es la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d. \end{aligned}$$

Si $x = 3$, $d = 4$ entonces

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 + 4 = 7$

$a_3 = 7 + 4 = 11$

$a_4 = 11 + 4 = 15$

$\vdots$

$a_n = 3 + (n-1)4$

Ejemplo 2

Dados los números reales x, r, una **progresión geométrica** es la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= r a_n. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, $r = \frac{1}{2}$ entonces

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$a_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$a_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sucesiones

Definición 2

Diremos que una sucesión es:

1. **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para todo n.
2. **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.
3. **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$, para todo n.
4. **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.
5. **monótona** si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

Ejemplo 3

Sea $a_n = 4(n-1)+3$ para $n \in \mathbb{N}$. En este caso a_n es estrictamente creciente.

Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 > -4 \quad /+4n$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n > 4n-4$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n+3 > 4n-4+3$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(n+1-1)+3 > 4(n-1)+3$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n .$$

$\therefore$, a_n es estrictamente creciente.

¿$a_{n+1} = a_n$?

Sucesiones

Ejemplo 4

Sea $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}$. En este caso a_n es estrictamente decreciente.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$a_{n+1} < a_n \iff 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad / \cdot 2^{n+1}$$

$$\iff 2 < 2 \cdot 2$$

$$\iff 2 < 4$$

$$\iff V.$$

Sucesiones

Definición 3

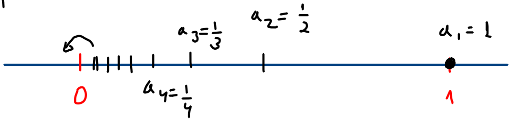
Diremos que una sucesión es **acotada** si existe un número positivo M tal que $|a_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sucesiones

Ejemplo 5

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, es acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1.

$0 < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$



$|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall M > 1$.

Sucesiones

Ejemplo 6

La sucesión $a_n = (-1)^n$, es acotada. En efecto, como tiene por recorrido $\{-1, 1\}$, basta tomar algún $M > 1$ para que $|(-1)|^n < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 = -1 \\ a_2 &= (-1)^2 = 1 \\ a_3 &= (-1)^3 = -1 \\ a_4 &= (-1)^4 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

Para n par $(-1)^n = 1$.

Para n impar $(-1)^n = -1$.

$$|a_n| = |(-1)^n| = 1.$$

Sucesiones

Ejemplo 7

La sucesión idéntica, $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, no es acotada superiormente.

Sucesiones

Algunas consideraciones

Se define el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con las siguientes reglas aritméticas y de orden.

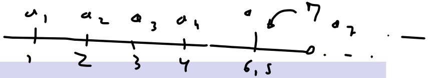
1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. Se preservan las propiedades fundamentales de las desigualdades.
2. $(+\infty) + a = +\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. $(-\infty) + a = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. $(+\infty) \cdot a = +\infty$, si $a > 0$.
5. $(+\infty) \cdot a = -\infty$, si $a < 0$.
6. $(-\infty) \cdot a = -\infty$, si $a > 0$.
7. $(-\infty) \cdot a = +\infty$, si $a < 0$.
8. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.
9. $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.
10. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Sucesiones

Observación

Llamaremos formas indeterminadas a:

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) \cdot 0,\ (-\infty) \cdot 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$



Definición 4

1. Diremos que una sucesión diverge a $+\infty$, si para cada número M existe un número natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$. Esto lo denotaremos simbólicamente por

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

2. Diremos que una sucesión diverge a $-\infty$, si para cada número negativo m existe un número natural N tal que $a_n < m$ para todo $n \geq N$. Esto lo denotaremos por

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Sucesiones

Ejemplo 8

$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots \ldots, 15, \ldots, 100,$

La sucesión $a_n = n$, diverge a $+\infty$.

Dado $M \in \mathbb{R}^+$, por principio de arquimedes tenemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$M < N \leq n = a_n$$

Luego, $\forall n \geq N$ se tiene que

$$M < n = a_n.$$

$\therefore$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$

Sucesiones

Ejemplo 9

Toda sucesión Estrictamente creciente no acotada superiormente diverge a $+\infty$.

Ejercicio propuesto

Toda sucesión Est. decreciente no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.

Sucesiones

El siguiente teorema nos dá algunas propiedades de las sucesiones divergentes a $+\infty$ ó $-\infty$.

Teorema 5

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y la sucesión $\{b_n\}$ es acotada inferiormente, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y si $b_n \geq c > 0$, para todo n, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty.$$
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $a_n \leq b_n$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$

Sucesiones

Ejemplo 10

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty.$$

Sea $a_n = n$, se tiene que $n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \overset{T.S}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

$$\overset{T.S}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty.$$

Sucesiones

Ejemplo 11

Si $b_n = 2 + n$, y $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \to +\infty} n(2 + n) = +\infty$.

Sucesiones

Ejercicio propuesto

1. Mostrar que para cualquier constante real c, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + c) = +\infty$.

2. Si $c < 0$, entonces
$$\lim_{n \to +\infty} nc =$$

Sucesiones convergentes no monótonas

Definición 6

Diremos que un número L, es el **límite de una sucesión** $\{a_n\}$ si dado un número positivo ϵ existe un número natural N tal que si $n \geq N$, se cumple que

$$|a_n - L| < \epsilon$$

es decir, $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$, para todo $n \geq N$.

Observación

En el caso de existir el número L, escribimos: $L = \lim_{n \to +\infty} a_n$ ó $a_n \to L$ cuando $n \to +\infty$ y también suele decirse que la sucesión $\{a_n\}$ **converge** hacia L.

Ejemplo 12

La convergencia de las sucesiones monótonas es un caso particular de esta definición.

Ejemplo 13

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0.$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces

$$\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Sea $\varepsilon>0$, por propiedad arquimediana $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon}<N \Longleftrightarrow \frac{1}{N}<\varepsilon.$$

Así, dado $\varepsilon>0$, $\exists N>\frac{1}{\varepsilon}$, tal que si $n\geq N$

se tiene que $\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.