Clase nº6

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

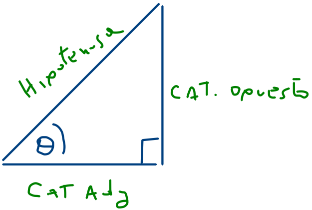
3 de Septiembre 2021

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ con respecto a x?

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = ??$$

Recordar que:



$$\sin\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{Hip.}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cat. Ady}}{\text{Hip}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. Ady}}.$$

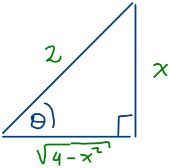
Integración por sustituciones trigonométricas

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = ??$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

Recordar que:



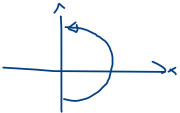
$$\boxed{\sin\theta = \frac{x}{2}} \iff x = 2\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Obs:

- condición: $4-x^2>0 \iff x^2<4$
  $\iff -2<x<2$.
- como $-2<x<2$ Tenemos $-2<2\sin\theta<2$.
  Luego, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.



$$x = 2 \cdot \sin\theta$$

$$\cdot \quad dx = 2\cos\theta \, d\theta .$$

Luego,

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(2\cdot\sin\theta)^2}{\sqrt{4-(2\cdot\sin\theta)^2}} \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{8\sin^2\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{4\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{4\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{|\cos\theta|}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{4 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 4 \int \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= 4 \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= 2\theta - \frac{2 \cdot \sin(2\theta)}{2} + C$$

$$= 2\theta - \sin(2\theta) + C$$

$$= 2 \cdot \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cdot \sin\theta \cos\theta + C$$

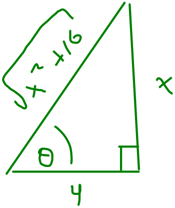
$$= 2 \cdot \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

$$= 2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C.$$

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{x^2+16}$ con respecto a x?

$$\int \frac{x^2}{x^2+16}\,dx = ??$$



$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$$

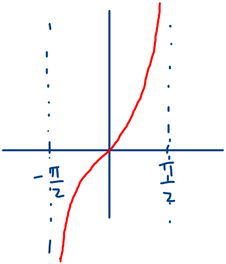
$$\tan\theta = \frac{x}{4} \iff 4\tan\theta = x$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Obs:

$$x = 4\tan\theta \iff \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$x \in \left]-\infty, \infty\right[\iff \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



Además,

$$dx = 4\sec^2\theta \, d\theta$$

Así,

$$\int \frac{x^2}{x^2+16}\,dx = \int \frac{(4\tan\theta)^2}{(4\tan\theta)^2+16} \cdot 4\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{16\tan^2\theta}{16(\tan^2\theta+1)} \cdot 4 \cdot \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} \cdot 4 \cdot \sec^2\theta \, d\theta$$

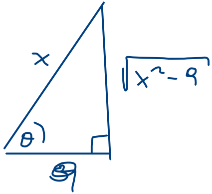
$$= 4\int \tan^2\theta \, d\theta$$

$$= 4(-\theta + \tan\theta) + C$$

$$= -4 \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + x + C.$$

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{x^2-9}$ con respecto a x?



$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{x} \iff x = 3\sec\theta.$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$$

Obs:

- $x = 3\sec\theta \iff \theta = \operatorname{Arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$
- $x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]3,+\infty\right[\iff \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$
- $dx = 3\sec\theta\cdot\tan\theta \, d\theta$
- $\sqrt{x^2-9} = 3\left|\tan\theta\right|$

Integración por sustituciones trigonométricas

Así,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int \frac{9\sec^2\theta \cdot 3\sec\theta \cdot \tan\theta\, d\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}}$$

$$= \int \frac{\cancel{3}\cdot 9 \cdot \sec^2\theta \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta}{\cancel{3}\sqrt{\tan^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{9\sec^3\theta \cdot \tan\theta}{|\tan\theta|}\, d\theta$$

$$= \begin{cases} 9 \displaystyle\int \frac{\sec^3\theta \cdot \tan\theta}{\tan\theta}\, d\theta, & \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 9 \cdot \displaystyle\int \frac{\sec^3\theta \ \tan\theta}{-\tan\theta}\, d\theta, & \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 9 \displaystyle\int \sec^3\theta \, d\theta, & \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ -9 \displaystyle\int \sec^3\theta \, d\theta, & \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

$= \ldots$ Ejercicio.

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

Para las integrales que involucran potencias enteras de x y de una de las raíces: $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}, \sqrt{x^2 + a^2}$ se puede realizar las siguientes substituciones: $x = a \sin \theta, x = a \tan \theta, x = a \sec \theta$.

a) La substitución $x = a \sin \theta$.
   Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2 - x^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a \sin \theta$.
   Así tenemos:

$$
\begin{aligned}
x = a \sin \theta \quad &\Leftrightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \\
-a \leq x \leq a \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos \theta| = a \cos \theta.$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

b) La substitución $x = a\tan\theta$.
Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2+a^2}$, con $a>0$ se usa la substitución: $x = a\tan\theta$. Se tiene

$$x = a\tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x \in]-\infty,+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = a|\sec\theta| = a\sec\theta,\ \text{ pues } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

c) La substitución $x = a\sec\theta$.
Es adecuada para integrales de funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 - a^2}$, con $a > 0$. Si utilizamos $x = a\sec\theta$ entonces se tiene

$$x = a\sec\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = arcsec\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan\theta|$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Ejemplo 28

Integrar por medio de sustituciones trigonométricas

$$\int \frac{2e^{4x}}{\sqrt{10 - e^{4x}}} \cdot dx$$

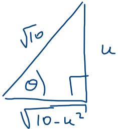
Ideas :

- cambio de variable:

$$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}\, dx$$

$$\int \frac{2e^{4x}}{\sqrt{10 - e^{4x}}}\, dx = \int \frac{e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{\sqrt{10 - (e^{2x})^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{u}{\sqrt{10 - u^2}}\, du$$



$$\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{10}} \iff u = \sqrt{10}\sin\theta$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Ejercicios propuestos

Integrar por medio de sustituciones trigonométricas

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{-3}{\sqrt{4+e^{-6x}}}\,dx$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.