Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Recuperativa II
Mecánica Cuántica I
Licenciatura en Física - 2022

Problema I : Ecuación de Schrodinger y potencial de paridad Par

Se define el operador Paridad como:

$$\widehat{P}\phi(x) = \phi(x)$$

1. (15 pts.) Demuestre que los autovalores de $\widehat{P}$ son $\lambda = \pm 1$.
2. (20 pts.) Demuestre que las funciones propias (autovectores) del operador $\widehat{P}$ son funciones de paridad definida: Pares ($\phi_P(x)$) o Impares ($\phi_I(x)$).
3. (20 pts.) Demuestre que cualquier función $f(x)$ es posible reescribirla como una combinación lineal Par-Impar, esto es:
$$f(x) = \phi_P(x) + \phi_I(x)$$
Determine la forma que debe tener $\phi_P(x)$ y $\phi_I(x)$ en función de $f(x)$.
4. Para el intervalo $]-\infty, \infty[$:
   (a) (20 pts.) Si $\phi_P(x)$ y $\phi_I(x)$ son funciones normalizadas demostrar que son ortogonales en dicho intervalo.
   (b) (25 pts.) Demostrar que las funciones $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_P(x) + \phi_I(x)]$ y $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_P(x) - \phi_I(x)]$ están normalizadas y son ortogonales entre si. Suponga que todas las funciones son reales y que $\phi_P(x)$ y $\phi_I(x)$ son funciones ya normalizadas
5. Se conoce que $\phi(x)$ es solución de la ecuación de Schrodinger. Suponga que el potencial cumple con $V(-x) = V(x)$, una función Par en la posición:
   (a) (10 pts.) Aplique operador $\widehat{P}$ a la ecuación de Schrodinger. ¿Es $\phi(-x)$ solución de esta ecuación?.
   (b) (25 pts.) Concluya y demuestre que las soluciones de la ecuación de Schrodinger tienen paridad definida si el potencial es Par.

Problema II : Oscilador armónico

Se cumple que:

$$\widehat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \text{y} \qquad \widehat{a}^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad (\text{para } n = 0, 1, ...)$$

tal que $\langle j\,|n\rangle = \delta_{j,n}$.

1. (25 pts.) En la expresión $|n\rangle = \boldsymbol{ALGO} \cdot |0\rangle$ determine el factor $\boldsymbol{ALGO}$. **Obs. :** El estado $|0\rangle$ corresponde al estado base.
2. (15 pts.) Utilizando el resultado anterior determine el bracket $\langle x\,|n\rangle$.
3. (25 pts.) Se conoce que $\widehat{a}\,|0\rangle = 0$. Halle la función de onda del estado base $\phi_0(x) = \langle x\,|0\rangle$.
4. (20 pts.) Halle $\widehat{x}$ y $\widehat{p}$ en función de $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{\dagger}$.
5. (10 pts.) Halle el valor de expectación de la posición $\langle x\rangle$ para el estado estacionario $|n\rangle$.

6. Evalúe los siguientes elementos de matriz:

(a) (10 pts.) $\langle j\,|\widehat{x}|\,n\rangle$.

(b) (10 pts.) $\langle j\,|\widehat{p}|\,n\rangle$.

Reglas de equivalencia:

En espacio del dominio x

$$\begin{aligned} f(\widehat{x}) &\longleftrightarrow f(x) \\ g\left(\widehat{k}\right) &\longleftrightarrow g\left(-i\frac{d}{dx}\right) \end{aligned}$$

En espacio del dominio k

$$\begin{aligned} f(\widehat{x}) &\longleftrightarrow f\left(i\frac{d}{dk}\right) \\ g\left(\widehat{k}\right) &\longleftrightarrow g(k) \end{aligned}$$

Recordar que:

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\mathbf{Q}} + i\widehat{\mathbf{P}}\right)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Q}} &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\widehat{x} \\ \widehat{\mathbf{P}} &= \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\widehat{p} \end{aligned}$$

Pauta Prueba recuperativa II

$\underline{4}$

Probl. II)

1) si $\hat{P}\phi(x) = \phi(-x) \Rightarrow \hat{P}(\hat{P}\phi(x)) = \hat{P}\phi(-x) = \phi(x)$

$\therefore \quad \hat{P}^2 = \hat{\mathbb{1}} \Longrightarrow$ Valores propios son $\lambda = \pm 1$

demo

$\hat{P}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ y $\hat{P}^2|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$

y

$\hat{P}|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle \quad \therefore \lambda^2 = 1$

$\Downarrow$

$\lambda = \pm 1$ //

2) Sea $\phi_1(x)$ y $\phi_{-1}(x)$ los correspondientes autovectores de $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ respectivamente, Π:

$\hat{P}\phi_1(x) = \phi_1(x)$

$\Downarrow$

$\phi_1(-x) = \phi_1(x)$

$\Downarrow$

$\phi_1(x)$ es une fn. PAR (autovector de $\hat{P}$)

see $\phi_1(x) = \phi_P(x)$

$\hat{P}\phi_{-1}(x) = -\phi_{-1}(x)$

$\Downarrow$

$\phi_{-1}(-x) = -\phi_{-1}(x)$

$\Downarrow$

$\phi_{-1}(x)$ es Impar

See $\phi_{-1}(x) = \phi_I(x)$

$\therefore$ las fns. con paridad definida son autovectores o funciones propias del operador paridad $\hat{P}$.

3) $f(x) = \phi_P(x) + \phi_I(x)$

con $\phi_P(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ y

$\phi_I(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$ //

Otra forma válida:

suponer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ (sin paridad definida)

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n}}_{\phi_P(x)} + \underbrace{x \sum_{n\geq 0} a_{2n+1} x^{2n}}_{\phi_I(x)}$$ //

sin embargo esta forma no explicita dependencia de $f(x)$ de manera directa ($\therefore$ tiene un puntaje menor)

6

4) a) Se tiene que $\langle \phi_p | \phi_p \rangle = 1$ y $\langle \phi_I | \phi_I \rangle = 1$

Ahora

$$\underset{\hat{\mathbb{1}}}{\langle \phi_p | \phi_I \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\phi_p^*(x)\, \phi_I(x)}_{\text{integrando impar}}\, dx = 0$$

$\therefore$ $\phi_p(x)$ y $\phi_I(x)$ son fns. ortogonals en el intervalo $]-\infty, \infty[$.

b) $$\langle F | F \rangle = \frac{1}{2}\left[\cancelto{1}{\langle \phi_p | \phi_p \rangle} + 2\cancelto{0}{\langle \phi_p | \phi_I \rangle} + \cancelto{1}{\langle \phi_I | \phi_I \rangle}\right]$$

$$= 1$$

$$\langle G | G \rangle = \frac{1}{2}\left[\cancelto{1}{\langle \phi_p | \phi_p \rangle} - 2\cancelto{0}{\langle \phi_p | \phi_I \rangle} + \cancelto{1}{\langle \phi_I | \phi_I \rangle}\right]$$

$$= 1$$

finalmente:

$$\langle F | G \rangle = \frac{1}{2}\left[\cancelto{1}{\langle \phi_p | \phi_p \rangle} - \cancelto{1}{\langle \phi_I | \phi_I \rangle}\right] = 0$$

F(x) y G(x) son ortogonals en el intervalo $]-\infty, \infty[$.

7

5)

a) $\hat{P}$ |

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d(-x)^2}\phi(-x) + V(-x)\phi(-x) = E\phi(-x)$$

$\uparrow$ PAR

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(-x) + V(x)\phi(-x) = E\phi(-x) \;//$$

b) Se concluye que tanto $\phi(x)$ como $\phi(-x)$ son soluciones de la ecuación. La ec. es de 2º orden ∴ se requieren soluciones ortogonals (son autovectors de $\hat{H}$) y $\phi(x)$ y $\phi(-x)$ en gral. no lo son, pero combinaciones lineals de ella también son solucion, en particular haciendo los combinacions ortogonals

$\phi_\pm(x) = \phi(x) \pm \phi(-x)$ se concluye que $\phi_\pm(x)$ tiene paridad definida (se demostró antes) si $V(-x) = V(x)$ //

Probl. II)

1) si $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \wedge \hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Por inducción:

$$\hat{a}^{+}|0\rangle = |1\rangle$$

$$a^{+}a^{+}|0\rangle = \hat{a}^{+}|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$(\hat{a}^{+})^{3}|0\rangle = \sqrt{2}\,\hat{a}^{+}|2\rangle = \sqrt{2}\sqrt{3}\,|3\rangle$$

$$(\hat{a}^{+})^{4}|0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4}\,|4\rangle$$

$$\vdots$$

$$(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$$

ALGO $= \frac{(\hat{a}^{+})^{n}}{\sqrt{n!}}$

$$\therefore\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle$$

2) $\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle$, pero $\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} - i\hat{P})$

$$\Rightarrow (\hat{a}^{+})^{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)\right]^{n}$$

Usando reglas de equivalencias:

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\langle x|\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right]^n|0\rangle$$

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x - \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega\hbar}}\frac{d}{dx}\right]^n\phi_0(x) \quad //$$

con $\phi_0(x) = \langle x|0\rangle$

3) $\hat{a}|0\rangle = 0$

$\Downarrow$

$(\hat{Q} + i\hat{P})|0\rangle = 0 \implies \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)|0\rangle = 0$

$$(m\omega\hat{x} + i\hat{p})|0\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(m\omega x + \hbar\frac{d}{dx}\right)\phi_0(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,\phi_0(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\phi_0 = -\frac{1}{2}\frac{m\omega x^2}{\hbar} + \text{cte.}$$

$$\therefore \quad \phi_0(x) = \underset{\uparrow\ \text{cte}}{C}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

4) $$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\, i\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)$$

5) $$\langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\cancelto{0}{\langle n|\underbrace{\hat{a}|n\rangle}_{|n-1\rangle}} + \cancelto{0}{\langle n|\underbrace{\hat{a}^\dagger|n\rangle}_{|n+1\rangle}}\right]$$

$$= 0$$

6) $$\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\hat{a}|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right]$$

$$\hat{p}|n\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left[\hat{a}^\dagger|n\rangle - \hat{a}|n\rangle\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle - \sqrt{n}\,|n-1\rangle\right]$$

$$\therefore \quad \langle j|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n}\,\delta_{j,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{j,n+1}\right] \quad //$$

$$\langle j|\hat{p}|n\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\, i\left[\sqrt{n+1}\,\delta_{j,n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{j,n-1}\right] \quad //$$