Sucesiones y progresiones

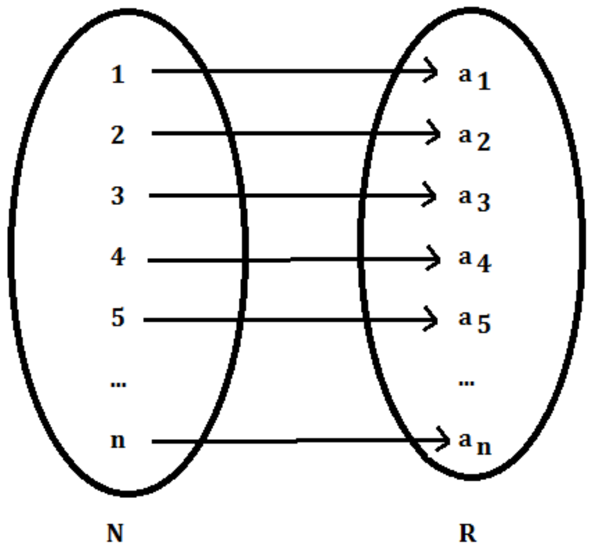
Definición: Una **sucesión** es una función cuyo dominio D es el conjunto de los números naturales.

***f*: N → R**

a_1 será el primer término de la sucesión, a_2 el segundo, etc. El término a_n se llama **término general** de la sucesión S.

En lugar de dibujar los incómodos diagramas de Venn anteriores, podemos dar la sucesión de esta manera,

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$$



Ejemplos:

Progresión aritmética: cada término se obtiene del anterior sumando siempre la misma diferencia d.

{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...} **d = 2**

{19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, ...} **d = -3**

Progresión geométrica: cada término se obtiene del anterior multiplicando a aquel por un número constante llamado razón q.

{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 ... } **q = 2**

$$\{5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \dots\} \qquad q = \frac{1}{3}$$

Sucesiones dadas por término general (cuando se da el término en función de la posición que ocupa)**:**

$$\boldsymbol{a_n = f(n)}$$

Ejemplo 1:

$$\boldsymbol{a_n = n^2}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{a_1 = 1^2 = 1}$$
$$\boldsymbol{a_2 = 2^2 = 4}$$
$$\boldsymbol{a_3 = 3^2 = 9}$$

....

O sea:

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$$

En todo el desarrollo del tema no debe confundirse la posición del término n con el valor del término a_n. En la sucesión anterior el segundo término es 4 y el cuarto término es 16. El séptimo término será 49 y no hay ninguno que valga 7.

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{a_n = n^2 - 3n + 4}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 2}$$
$$\boldsymbol{a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2}$$
$$\boldsymbol{a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 4}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

O sea: $\{2, 2, 4, 8, 14, \ldots\}$

Sucesiones dadas por recurrencia (en las cuales para calcular un término se necesitan uno o más de los términos anteriores):

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 1 \text{ si } n = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \ \forall\, n > 2 \end{cases}$$

O sea que esta sucesión tiene sus dos primeros términos igual a 1 y el resto de ellos es igual a la suma de los dos anteriores …

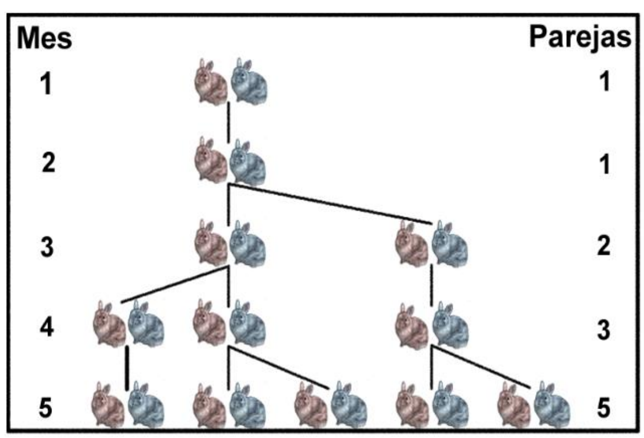
$$\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, \ldots\}$$

Esa es la famosa **sucesión de los conejos o sucesión de Fibonacci.**

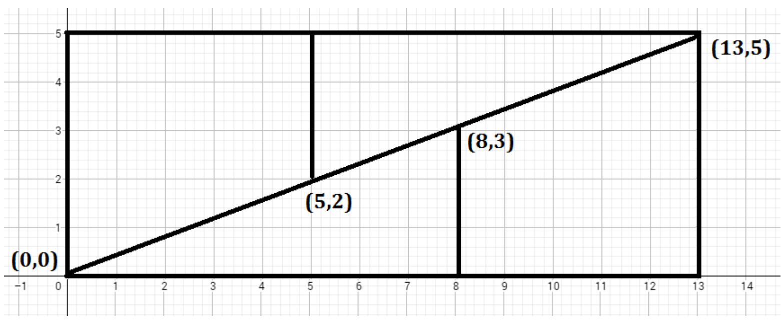
Leonardo de Pisa, o Fibonacci, famoso matemático del siglo XIII, comerciante de alfombras que traía de Oriente Medio, planteó el problema de la siguiente manera.

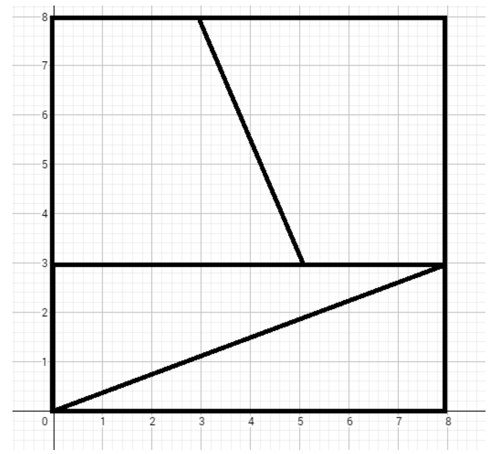
¿Cuántas parejas de conejos habrá en una granja si se coloca inicialmente una sola pareja y se parte de las siguientes premisas:

1. Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes.
2. En cuanto alcanzan la madurez sexual los conejos se aparean y la hembra da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos.
3. El periodo de gestación de los conejos es de un mes.
4. Los conejos no mueren.



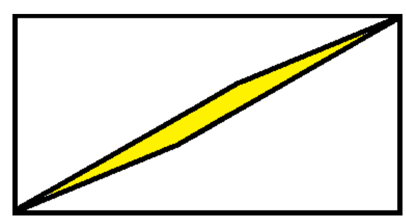
Un pequeño truco matemático:





Vean la figura de arriba. Es un rectángulo de $13 \times 5 = 65$ cuadraditos unitarios. Reordenamos las cuatro piezas como se muestra la figura, y ahora es un cuadrado de lado 8, o sea 64 cuadraditos. ¿Dónde está el cuadradito faltante?

Observen que todos los números involucrados en el problema son términos de la sucesión de Fibonacci. ¿Cómo es posible hacer desaparecer un cuadradito así?



Respuesta: Prueben mediante geometría analítica, que los puntos (5,2) y (8,3) no pertenecen a la recta definida por los puntos (0,0) y (13,5). En realidad, no están alineados como parece mostrar la figura superior. El cuadradito perdido, o mejor dicho su área, es el área del cuadrilátero que forman esos cuatros puntos. El rectángulo de arriba tiene área 64 + 1. Los números de Fibonacci sólo logran optimizar el problema para que sea más difícil de ver.

Progresiones aritméticas

Definición: Una **progresión aritmética** es una sucesión en la cual cada término se obtiene de sumar al antecesor un número constante llamada distancia o diferencia d.

Ejemplo: **{2,5,8,11,14,17,20 ...}**

Observen que para pasar de un término al siguiente, se suma siempre $d = 3$. Para poder comenzar necesito saber cuánto vale el primer término, a_1. En este caso, es

$$a_1 = 2$$

Podemos escribir entonces,

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_4 = a_3 + d$$
$$\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + d$$

La última fórmula es la que define una progresión aritmética.

"Un término cualquiera es la suma de su antecesor más la diferencia".

Observen que es una fórmula de recurrencia ya que para calcular el término a_{50} necesitaríamos el a_{49}, y así …

Sumemos ahora todas esas igualdades miembro a miembro. Es decir, sumemos todo lo que está a la izquierda y todo lo que está a la derecha del igual. Observen que varios términos que están a ambos lados de la igualdad se cancelan. Nos queda …

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Esta fórmula que es la **fórmula del término general de una p. a.**, nos permite calcular cualquier término de la progresión sin tener que pasar por los anteriores. Solamente necesitamos conocer su posición:

En la p. a. anterior: $a_{50} = a_1 + (50-1)d$

$$a_{50} = 2 + 49 \cdot 3 = 149$$

Ejemplo 1:

Considere una p. a. cuyos términos cumplen $\begin{cases} a_3 + 5a_7 = 0 \\ a_4 - 3a_2 = -32 \end{cases}$

halle d, a_1, a_{10} y el término general a_n.

Solución: Ocupando la fórmula del término general, escribamos a los cuatro términos que allí aparecen en función de a_1 y d.

$$\begin{cases} a_1 + 2d + 5(a_1 + 6d) = 0 \\ a_1 + 3d - 3(a_1 + d) = -32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a_1 + 32d = 0 \\ -2a_1 = -32 \end{cases}$$

Obtenemos:

$$a_1 = 16 \qquad d = -3$$

La progresión es:

$$\{16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8\ \dots\}$$

Cálculo de a_{10}:

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$$

$$a_{10} = 16 + 9 \cdot (-3) = -11$$

Cálculo del término general a_n:

$$\boldsymbol{a_n = 16 + (n - 1)(-3)}$$

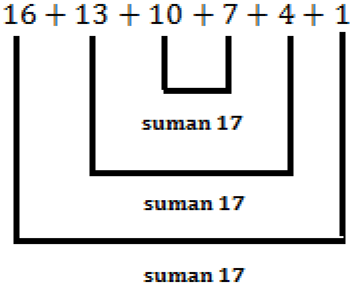
$$\boldsymbol{a_n = 19 - 3n}$$

El término general de una p. a. siempre tiene la forma, $a_n = An + B$ (una expresión lineal en n.

Fórmula para la suma de términos de una p. a.

Simbolicemos ahora con S_n a la suma de los primeros n términos de una p. a. En el ejemplo anterior es:

$$S_6 = 16 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1 = 51$$



Observen la propiedad que no demostraremos. Se cumple en todas las p. a.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_{1+k} + a_{n-k}$$

Escribamos ahora la suma de los primeros términos de una p. a.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

O lo que es lo mismo:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumemos las dos últimas igualdades miembro a miembro, ocupando la propiedad.

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

donde el paréntesis se repite n veces.

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}$$

Esta fórmula nos será útil para calcular la suma de términos sin tener que pasar por todos los términos intermedios.

Ejemplo 2:

En la progresión aritmética del ejemplo anterior, calcule la suma S_{50} de los primeros 50 términos.

$$\{16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8 \ \dots\}$$

Solución: Primero deberemos calcular el último término de los que queremos sumar …

$$a_{50} = 16 + 49 \cdot (-3) = -131$$

Luego ocupar la fórmula de la suma …

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (a_1 + a_{50})}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (16 - 131)}{2} = -2875$$

Ejemplo 3:

Sume todos los números pares desde el 28 al 400.

Solución: Está claro que es una p. a. y que su diferencia es $d = 2$.

$$\{28, 30, 32, 34, \dots 396, 398, 400\}$$

Tenemos dos alternativas. Podemos considerarla una p. a. con $a_1 = 28$ y $d = 2$

Y debemos averiguar que posición ocupa el término 400 (recuerden no confundir "posición" con "valor" del término.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$400 = 28 + (n-1) \cdot 2$$

$$372 = (n-1) \cdot 2$$

$$n = 187$$

Por tanto, debemos sumar los primeros 187 términos de la p. a.:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{187} = \frac{187 \cdot (a_1 + a_{187})}{2}$$

$$S_{187} = \frac{187 \cdot (28 + 400)}{2} = 40018$$

$$28 + 30 + 32 + 34 + \cdots + 396 + 398 + 400 = 40018$$

Otra alternativa:

Consideremos la progresión

$$a_n = 2n$$

Desarrollando,

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots, 28, 32, 34, \dots, 400, \dots\}$$

Y queremos sumar desde el término $a_{14} = 28$ al término $a_{200} = 400$.

Lo cual sería equivalente a sumar los primeros 200 términos y luego restar la suma de los primeros 13. Llamemos N al número que estamos buscando …

$$N = S_{200} - S_{13}$$

$$N = \frac{200 \cdot (a_1 + a_{200})}{2} - \frac{13 \cdot (a_1 + a_{13})}{2}$$

$$N = \frac{200 \cdot (2 + 400)}{2} - \frac{13 \cdot (2 + 26)}{2}$$

$$N = 40200 - 182 = 40018$$

Se confirma el resultado.

Ejercicios de progresiones aritméticas

1. Se sabe que los dos primeros términos de una p.a. son 7 y 5 respectivamente. Determine a_5, el término general a_n y la suma de los primeros 8 términos.

Respuesta: $a_5 = -1$, $a_n = 9 - 2n$, $S_8 = 0$

2. En una p.a. la suma del cuarto término con el sexto es 8 y la suma del quinto y el noveno es 9. Determine el segundo término. **Respuesta: $a_2 = \frac{13}{4}$**

3. Calcule la suma de todos los números múltiplos de tres desde el 201 al 300.

Respuesta: S = 8517

4. En una p.a. el primer término es 2, el último 29 y la suma de ellos 155. ¿Cuál es la diferencia d?

Respuesta: Son 10 términos, d = 3

5. En una p.a. el cuarto término es igual al triple del primero y el sexto término tiene valor 13. Determine la progresión dando $a_n = f(n)$.

Respuesta: $a_n = 2n + 1$

6. En una progresión aritmética $(a_n)_{n \in N}$ se sabe que: $\begin{cases} a_5 + a_8 = 64 \\ a_3 + a_4 = 52 \end{cases}$

Determine a_{30} y la suma de los primeros treinta términos S_{30}

Respuesta: d = 2, a_1 = 21, a_{30} = 79; S_{30} = 1500

7. ¿Cuántos términos de la p.a. cuyos tres primeros términos son 2, 4, 6 se deben sumar para obtener 210?

Respuesta: 14

8. La suma de tres números en p.a. es 39 y su producto 2184. Encuentre los números.

Respuesta: 12, 13, 14

9. La suma de cinco números en p.a. es 40 y la suma de sus cuadrados es 410. Determine los números.

Respuesta: 2, 5, 8, 11, 14

10. *Definición*: *"Una progresión es **armónica** si los inversos de sus términos forman una progresión aritmética".* En base a ello, determine $x \in R$ para que

$$\boldsymbol{x};\ \ \boldsymbol{x-6};\ \ \boldsymbol{x-8}$$

estén en progresión armónica.

Respuesta: x = 12