Certamen 2

Cálculo III - FOGEC
FC - UV
15 - 06 - 2022

1.- (15 Puntos)

Sea el sistema

$$\begin{cases} sen\, x - \cos y + u^2 + v^2 = 0 \\ 2\cos x + sen\, y - 3u + 5v = 0 \end{cases}$$

que define implícitamente las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. Hallar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2.- (15 Puntos)

Sea g una función diferenciable definida por $z = g(x,y)$, si la derivada direccional de la función g en $P = (1,2)$ en la dirección de $u = (1,1)$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $v = (0,-2)$ es -3 ¿Cuál es la derivada direccional de g en $P = (1,2)$ en la dirección de $w = (-1,-2)$.

3. (15 Puntos)

Demostrar que la función z definida por $z = y\, ln(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0$$

Sugerencia: Haga $u = x^2 - y^2$; $v = y$ y aplique regla de la cadena

4.- (15 Puntos)

Encuentre los máximos y mínimos locales para la función:

$$f(x,y) = y^3 + x^2 + 4y^2 - 4x + 5y + 10$$

Obs : El certamen es individual y dispone de 90 minutos.

1.-

Sean

$$f(x,y,u,v) = sen\ x - \cos y + u^2 + v^2 = 0$$

$$g(x,y,u,v) = 2\cos x + sen\ y - 3u + 5v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 10u + 6v$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 2v \\ -2\ sen\ x & 5 \end{vmatrix} = 5\cos x + 4v\ sen\ x$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & sen\ y \\ -3 & \cos y \end{vmatrix} = 2u\cos y + 3\ sen\ y$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{5\cos x + 4v\ sen\ x}{10u + 6v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2u\cos y + 3\ sen\ y}{10u + 6v}$$

2.-

$$g_{u_1}(1,2) = 2\sqrt{2} \quad \text{donde } u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g_{v_1}(1,2) = -3 \quad \text{donde } v_1 = \frac{v}{\|v\|} = (0,-1)$$

$$g_{w_1}(1,2) = \ ? \quad \text{donde } w_1 = \frac{w}{\|w\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Ahora bien, como g es diferenciable existen g_x , g_y y también

$$\nabla g(x,y) = \left(g_x(x,y), g_y(x,y)\right)$$

entonces

$$\nabla g(1,2) = \left(g_x(1,2), g_y(1,2)\right)$$

Ahora bien

$$g_{u_1}(1,2) = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \; g_{u_1}(1,2) = u_1 \cdot \nabla g(1,2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(g_x(1,2), g_y(1,2)\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g_x(1,2)}{\sqrt{2}} + \frac{g_y(1,2)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdots (1)$$

$$g_{v_1}(1,2) = -3 \quad \Leftrightarrow \; g_{v_1}(1,2) = v_1 \cdot \nabla g(1,2)$$

$$\Leftrightarrow (0,-1)\left(g_x(1,2), g_y(1,2)\right) = -3$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot g_x(1,2) - 1g_y(1,2) = -3$$

$$\Leftrightarrow -1g_y(1,2) = -3$$

$$\Leftrightarrow g_y(1,2) = 3 \cdots (2)$$

Remplazando (2) en (1) tenemos

$$\frac{g_x(1,2)}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$g_x(1,2) + 3 = 4 \Rightarrow g_x(1,2) = 1$$

Por tanto

$$g_{w_1}(1,2) = w_1 \cdot \nabla g(1,2)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(g_x(1,2), g_y(1,2)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(1,3)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

3.-

Sean

$$z = y\ln(x^2 - y^2)$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = y$$

Así $z = f(u, v) = v\ln u$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ v \arrow[dr, dash] & & u \arrow[dl, dash] \\ & x & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & z \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ v \arrow[dr, dash] & & u \arrow[dl, dash] \\ & y & \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} = \ln u \ \cdot 0 + \frac{v}{u}2x = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial y} = \ln u \ \cdot 1 + \frac{v}{u}(-2y) = \frac{-2y^2}{x^2 - y^2} + ln(x^2 - y^2)$$

Ahora

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}$$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}ln(x^2 - y^2) - \frac{y\ ln(x^2 - y^2)}{y^2} = 0$$

4.-

$$f(x, y) = y^3 + x^2 + 4y^2 - 4x + 5y + 10$$

$$f_x = 2x - 4 = 0 \ \Leftrightarrow x = 2$$

$$f_y = 3y^2 + 8y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (y + 1)(3y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow y = -1 \vee y = -\frac{5}{3}$$

Por consiguiente, tenemos dos puntos críticos, estos son :

$$(2,-1)\ y\ \left(2,-\frac{5}{3}\right)$$

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y+8 \end{vmatrix}$$

Entonces

$$H(2,-1)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0 \wedge f_{xx}(2,-1)=2>0$$

$$\Rightarrow f(2,-1)\ \text{mínimo local}$$

$$H\left(2,-\frac{5}{3}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4<0$$

$$\Rightarrow f\left(2,-\frac{5}{3}\right)\ \text{punto silla}$$