LÍMITE DE FUNCIONES PARTE 2

Cambio a coordenadas polares

Sabemos cómo determinar la no existencia del límite, por tanto, cabe preguntarse ¿existe alguna forma de asegurar cuándo existe el

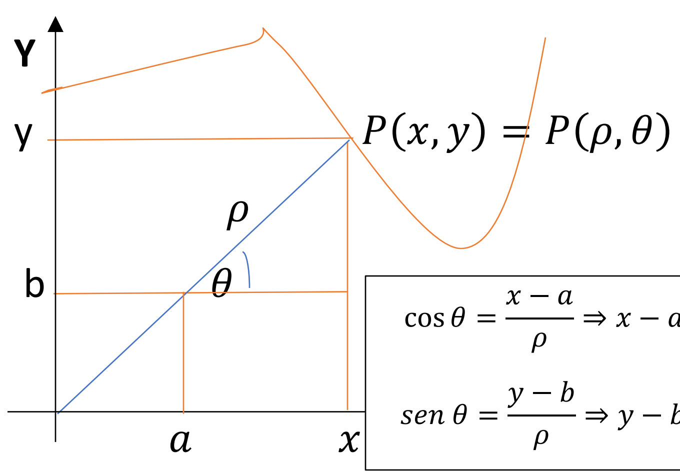
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$?

Si al considerar diferentes trayectorias que pasan por el punto (a,b), por ejemplo, rectas, parábolas, curvas en general, obtenemos el mismo valor del límite, digamos L, podemos sospechar que dicho límite existe y vale L. En este caso, la forma de estar seguro sería aplicar la definición ε -δ lo cual no resulta aconsejable.

Una alternativa para probar la existencia de límite es realizar el cambio a coordenadas polares centradas en el punto (a,b):

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho sen\,\theta \end{cases} ;\ \theta \in [0,2\pi]$$

Tal como muestra la figura



$$\cos\theta = \frac{x-a}{\rho} \Rightarrow x - a = \rho\cos\theta$$

$$sen\,\theta = \frac{y-b}{\rho} \Rightarrow y - b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Donde $\rho = d(P(x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Por lo que si $(x, y) \to (a, b) \Rightarrow \rho \to 0$

En la práctica, esto supone que podemos reducir el cálculo del límite de una función de dos variables al cálculo del límite de una función de una variable.

Mediante un cambio de variable podemos escribir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\cos\theta\,, b + \rho\, sen\,\theta)$$
$$= \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$$

Donde $F(\rho,\theta) = f(a + \rho\cos\theta\,, b + \rho sen\,\theta)$ es la función obtenida al hacer el cambio de variable en la función $f(x, y)$.

Condición suficiente para asegurar la existencia del límite mediante el cambio de coordenadas

Supongamos que queremos calcular el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$$

Y que se cumplen las siguientes condiciones;

1.- $\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = L$ independiente del valor de $\theta \in [0,2\pi]$

2.- Existe una función $\varphi(\rho)$ tal que

$$|F(\rho,\theta) - L| \le \varphi(\rho)\ \forall\, \theta \in [0,2\pi]$$

3.- $\lim\limits_{\rho\to 0} \varphi(\rho) = 0$

Entonces, podemos asegurar la existencia del límite siendo este

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Observaciones

a) Si no existe $\lim_{\rho \to 0} F(\rho, \theta)$ o bien existe, pero toma valores distintos según el ángulo θ entonces podemos asegurar que no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

b) La condición 1.- es equivalente a pedir que existan todos los límites direccionales y que su valores coincidan.

Ejemplo 1

Mediante cambio de variables a coordenadas polares, estudiar la existencia de:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\ \theta}{\rho^4 cos^4\theta + \rho^2 sen^2\theta}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\ \theta}{\rho^2(\rho^2 cos^4\theta + sen^2\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho cos^2\theta sen\ \theta}{\rho^2 cos^4\theta + sen^2\theta} = 0$$

luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$$

$$\forall\theta \in [0,2\pi]$$

Podría pensarse que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$$

Sin embargo, si tomamos puntos sobre la parábola $y = mx^2$ se obtiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + x^4 m^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} = \nexists$$

Lo que no lleva asegurar que no existe límite.

Ejemplo 2

Determine la existencia del límite e indique cuál es su valor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^3\theta + 2\rho^3 sen^3\,\theta}{\sqrt{\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(cos^3\theta + 2sen^3\,\theta)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2(cos^3\theta + 2sen^3\,\theta) = 0$$

Veamos ahora si se cumplen las condiciones dadas sobre la existencia de límites.

1.- $L = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2(cos^3\theta + 2sen^3\,\theta) = 0, \forall\theta \in [0,2\pi]$

2.-$|F(\rho,\theta) - 0| = |\rho^2(cos^3\theta + 2sen^3\,\theta)|$

$$= \rho^2|(cos^3\theta + 2sen^3\,\theta| \le \rho^2(|cos^3\theta| + 2|sen^3\theta|)$$
$$\le \rho^2\big(1 + 2(1)\big) = 3\rho^2 = \varphi(\rho)$$

$|ax + by| \le a|x|$+$b|y|$;
$a, b > 0$

3.- $\lim_{\rho \to 0} \varphi(\rho) = \lim_{\rho \to 0} 3\rho^2 = 0$

Conclusión: como se cumplen las tres condiciones para la existencia del límite, se establece finalmente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Ejemplo 3

Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2(x^2 + 2x) - 3(y^2 - 2y) - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 3(y^2 - 2y + 1 - 1) - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2(x+1)^2 - 2 - 3(y-1)^2 + 3 - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2(x+1)^2 - 3(y-1)^2}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}}$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2u^2 - 3v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Así

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2u^2 - 3v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2 cos^2\theta - 3\rho^2 sen^2\,\theta}{\sqrt{\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(2cos^2\theta - 3sen^2\,\theta)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho(2cos^2\theta - 3sen^2\,\theta) = 0$$

Este límite no depende de θ. Veremos a continuación si se cumplen las otras dos condiciones dadas sobre la existencia de límites.

1.- $L = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \rho(2cos^2\theta - 3sen^2\,\theta) = 0, \forall\theta \in [0,2\pi]$

2.-$|F(\rho,\theta) - 0| = |\rho(2cos^2\theta - 3sen^2\,\theta)|$

$$\leq \rho(2|cos^2\theta| + 3|sen^2\,\theta|)$$
$$\leq \rho\big(2(1) + 3(1)\big) = 5\rho = \varphi(\rho)$$

3.- $\lim_{\rho\to 0} \varphi(\rho) = \lim_{\rho\to 0} 5\rho = 0$

Conclusión: como se cumplen las tres condiciones para la existencia del límite, se establece finalmente que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}} = 0$$

Límite de infinitésimos

Definición

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es un infinitésimo en $x = a$ con $a \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)^2 = 0$$

Definición (infinitésimos equivalentes)

Sean f y g : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitésimos en a, tales que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Entonces se dice que f y g son infinitésimos equivalentes en a.

En ese caso escribimos $f(x) \sim g(x)$ si $x \to a$.

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1$$

$$\frac{0}{0}$$

Algunos infinitésimos equivalentes

Supongamos que existe

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)}$$

También, podemos hacerlo en un producto

$$\lim_{x \to a} f(x)h(x) = \lim_{x \to a} g(x)h(x)$$

Es decir, podemos sustituir un infinitésimo que multiplica o que divide por un infinitésimo equivalente.

Tablas de infinitésimos

Para x → 0

$$sen\ x \sim x$$

$$tg\ x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x\ ln\ a$$

$$\frac{(x+1)^n - 1}{x} \sim n\ ; n > 1$$

$$\frac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x} \sim \frac{1}{n}$$

A continuación, veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ sen\ x\ tg\ x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ \ (x\ )(\ x)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\ \ x^2}{x^2}=4$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5$$

Ejemplo 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sen^2(xy)}{1-cos\ x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{y\to 0}2y^2\ =0$$

Ejemplo 5

Con $u=x-y$, tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\ln\ (1+(x-y))}{tg(\ x-y)}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln\ (1+u)}{tg\ u}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{u}=1$$

Ejemplo 6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{sen\ x\ \ln\ (1+y)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy}=1$$

■

Ejemplo 7

Otra forma de calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+sen\,x)\,(1-\cos y)}{y}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+sen\,x)\,(1-\cos y)}{y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+sen\,x) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos y}{y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+sen\,x) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^2}{2}}{y}$$

$$= (1+sen\,0) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{2}$$

$$= (1+0)(0)$$

$$= 0$$