

LOGARITMOS

Ejemplo previo:

Sabemos que: $2^3 = 8$

Examinemos el problema desde tres perspectivas:

- 1) $2^3 = x$ entonces $x = 8$ (Potencia)
- 2) $x^3 = 8$ entonces $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (Raíz)
- 3) $2^x = 8$ entonces $x = ?$

“x es el exponente al cual hay que elevar 2 para que el resultado sea 8”
¿Cómo podemos escribir eso?

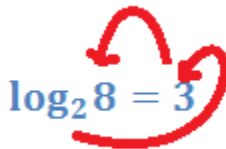
Podríamos poner por ejemplo: $x = \exp_2 8$

Y eso es lo que hacemos, pero en lugar de “exponente” decimos
“logaritmo”

$$x = \log_2 8 = 3$$

“El exponente al cual hay que elevar a la base 2 para que el resultado sea 8 es 3”:

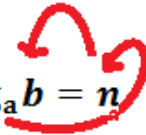
$$\log_2 8 = 3$$


$$\log_2 8 = 3$$

Palabras claves: “LOS LOGARITMOS SON EXPONENTES”

Definición:

Si $a^n = b$ entonces

$$\log_a b = n$$


Condiciones:

“b” tiene que ser un número positivo: $b > 0$

(no se definen logaritmos de números negativos ni cero)

$\log_{12}(-144)$ no existe

“a” tiene que ser positivo y distinto de 1: $a > 0, a \neq 1$

Sistemas de logaritmos:

Base 10 (no se escribe)

logaritmos decimales $\boxed{\log}$

Base $e \approx 2,71828 \dots$

logaritmos naturales o neperianos $\boxed{\ln}$

Propiedades:


1) $\log_a 1 = 0$ cualquiera sea la base “a” ya que $a^0 = 1$

2) $\log_a a = 1$ cualquiera sea la base “a” ya que $a^1 = a$

3) Logaritmo del producto: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4) Logaritmo del cociente: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

5) Logaritmo de una potencia:

$$\log_a(b^n) = \log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$$


Ejemplo:

$$\log_2(4^3) = \log_2(4 \times 4 \times 4) = \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4$$

$$\log_2(4^3) = 3 \times \log_2 4$$

6) Logaritmo de una raíz: $\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{\log_a b}{n}$

7) Propiedad de cambio de base: $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

Ejemplo:

$$\log_{36} 216 = ???$$

$$\log_{36} 216 = \frac{\log_6 216}{\log_6 36} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 1:

Sabiendo que

$$\log 19 = 1,2788$$

calcular:

$$\log 190, \quad \log 1,9, \quad \log (19)^2$$

Solución: $\log 190 = \log(19 \cdot 10)$

$$= \log 19 + \log 10$$

$$= 1,2788 + 1$$

$$= 2,2788$$

$$\log 1,9 = \log \left(\frac{19}{10} \right)$$

$$= \log 19 - \log 10$$

$$= 1,2788 - 1$$

$$= 0,2788$$

$$\log(19)^2 = \log(19 \cdot 19)$$

$$= \log 19 + \log 19$$

$$= 2 \cdot \log 19$$

$$= 2 \cdot 1,2788$$

$$= 2,5576$$

Ejemplo 2:

Calcular: $\log \sqrt[3]{40} + \log \sqrt[3]{25} =$

$$= \log \sqrt[3]{40} \cdot \sqrt[3]{25}$$

$$= \log \sqrt[3]{40 \cdot 25}$$

$$= \log \sqrt[3]{1000}$$

$$= \log 10$$

$$= 1$$

Ejemplo 3:

Calcular: $(\log_2 16 + \log_7 49) \cdot (\log_5 125 - \log_3 \sqrt[5]{9}) =$

$$= (4 + 2) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{13}{5}$$

$$= \frac{78}{5}$$

Ejemplo 3:

Desarrollar: $\log(p^2 - q^2) =$

$$= \log[(p + q)(p - q)]$$

$$= \log(p + q) + \log(p - q)$$

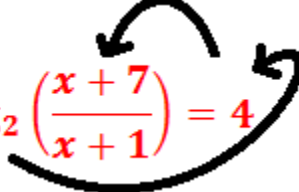
Ecuación logarítmica:

$$\log_2(x + 7) - \log_2(x + 1) = 4$$

Restricciones:

$$\begin{array}{ll} x + 7 > 0 & x > -7 \\ x + 1 > 0 & x > -1 \end{array}$$

Resolución:

$$\log_2 \left(\frac{x + 7}{x + 1} \right) = 4$$


$$2^4 = \frac{x + 7}{x + 1}$$

$$16(x + 1) = x + 7$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

Es solución ya que

$$-\frac{3}{5} > -1 \quad \text{y} \quad -\frac{3}{5} > -7$$

SEGUNDA PARTE: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones matemáticas donde aparecen números y letras.

Monomios: (las más sencillas) multiplicación (producto) de números y letras)

Ejemplo:

$$2 \times 3 \times a \times b \times b \times b \times c = 6ab^3c$$

1) Observen que no ponemos más el signo de \times

2) 6 es el coeficiente, ab^3c es la parte literal.

3) a, b, c variables

4) Ese es un monomio de grado $5 = 1 + 3 + 1$ (suma de los exponentes de las variables)

Multiplicación de monomios:

$$(6ab^3c) \times (3a^2b^2) = 18a^3b^5c$$

Siempre puedo multiplicar monomios

Suma de monomios: Sólo se pueden sumar si son semejantes (misma parte literal)

$$6ab^3c + 5ab^3c = 11ab^3c$$

Se suman como si fueran frutillas.

¿Y si no son semejantes? Me queda un polinomio.

Polinomio: suma o resta de monomios cualesquiera.

Ejemplo:

$$P(x, y, z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2$$

Los términos semejantes se reducen.

$$P(x, y, z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2$$
$$P(x, y, z) = 6xy - xz^2 - 5x$$

Polinomios en una variable x:

Sólo tienen una letra, en este caso “x”.

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - x^3 + 5x - 8 + 7x - 9 - 2x^2$$

Reducimos términos semejantes:

$$p(x) = 2x^2 + 12x - 17$$

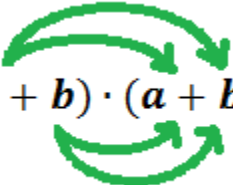
Una vez reducido puede determinar el...

Grado del polinomio: es el grado del término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de 0.

$p(x)$ es de grado 2, o de segundo grado

Algunas fórmulas:

Cuadrado de una suma:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$


Cuadrado de una resta:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fórmula de la suma por la diferencia:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cubo de una suma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = \dots + \dots + \dots + \dots$$

(Número de términos = exponente + 1)

Colocamos potencias decrecientes de a (en el último término sería a^0):

$$(a + b)^3 = a^3 \dots + a^2 \dots + a \dots + \dots$$

Colocamos potencias crecientes de b (en el primer término sería b^0):

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

Finalmente colocamos coeficientes 1 3 3 1 que luego veremos de donde salen.

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Resultado final:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo de una resta:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(signos alternados)

Factorización de sumas y restas de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$



(iguales)



(cambia) (+)

Factorización de polinomios de 2º. Grado

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

suma producto

Ejemplo 1:

$$x^2 + 7x + 6 = (x + 6) \cdot (x + 1)$$

Busco dos números que sumen 7 y multiplicados den 6.

Ejemplo 2:

$$x^2 + x - 12 = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

Busco dos números que sumen 1 y multiplicados den -12