Universidad de Valparaíso CHILE

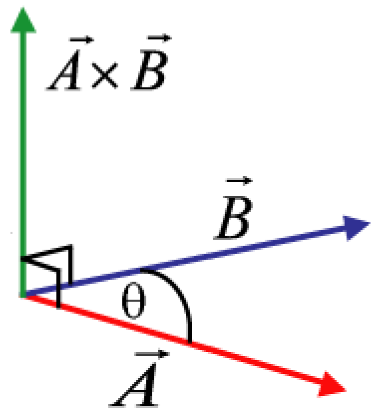
Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 11

Producto vectorial de dos vectores (×) de R³

Consideremos dos vectores de **R³**:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$$
$$\vec{\boldsymbol{b}} = \langle b_x, b_y, b_z \rangle$$



Definiremos el producto vectorial $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ como un nuevo vector perpendicular al plano que contiene a los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ y cuyo módulo viene dado por:

$$\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{b}}\right| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

siendo como antes θ el ángulo formado por los dos vectores.

Nota: observen que al ser el vector $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ perpendicular al plano de los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ es, por tanto, perpendicular a cada uno de ellos.

Teorema:

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que forman los vectores vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$

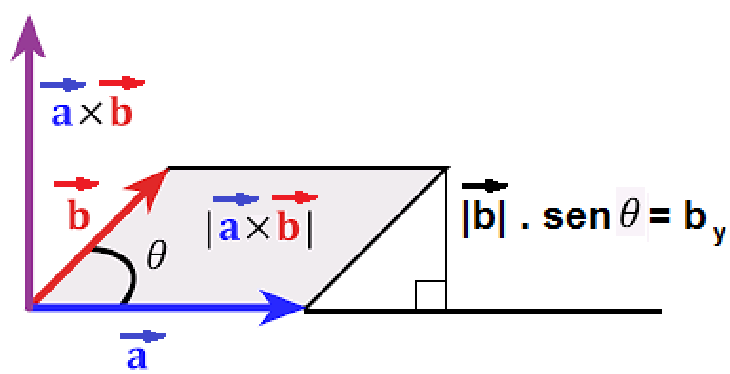
Deomstración:

Sabemos que:

$$\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{b}}\right| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Y que el área de un paralelogramo es

Área = base × altura



La base es claramente la longitud del vector $\vec{\mathbf{a}}$, o sea $|\vec{\boldsymbol{a}}|$ y vemos que la altura del mismo es igual a la componente b_y.

Por trigonometría sabemos que:

$$b_y = \left|\vec{\boldsymbol{b}}\right| \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Por tanto,

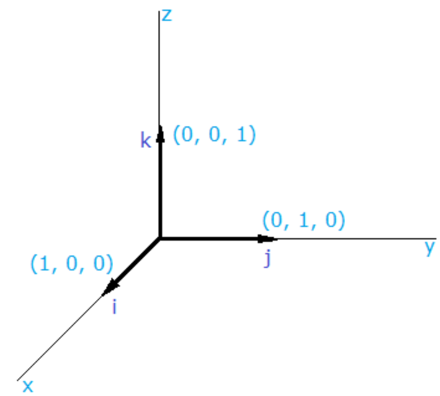
Área = base × altura

$$\text{Área} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}\, \theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Está demostrado.

Una forma práctica de calcular el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es mediante el siguiente determinante (cosa que asumiremos sin demostración):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



siendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los **vectores unitarios** (vectores con módulo 1) siguientes:

$\vec{i} = \langle 1,0,0 \rangle$ $\qquad$ $\vec{j} = \langle 0,1,0 \rangle$ $\qquad$ $\vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$

Ejemplo:

$$\vec{a} = \langle 1,2,3 \rangle \qquad \vec{b} = \langle 1,0,-1 \rangle$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle -2, 4, -2 \rangle$$

Se puede comprobar rápidamente, mediante el producto punto, que ese vector es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Propiedades:

1) A diferencia del producto punto que es conmutativo, el producto cruz no lo es. Para convencerse basta con calcular

$$\vec{b} \times \vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

Por tanto,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

2) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos, entonces

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ **= (0,0,0)** $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0°$ (los vectores son **colineales**, tienen la misma dirección)

Para convencerse, basta con recordar que $sen\ 0° = 0$

El área del paralelogramo formado por los vectores es nula.

Nota importante: Recuerden que el producto punto sólo se define en el espacio $\mathbf{R^3}$**.** No se define en el plano ni en espacios de dimensión superior

Resumiendo:

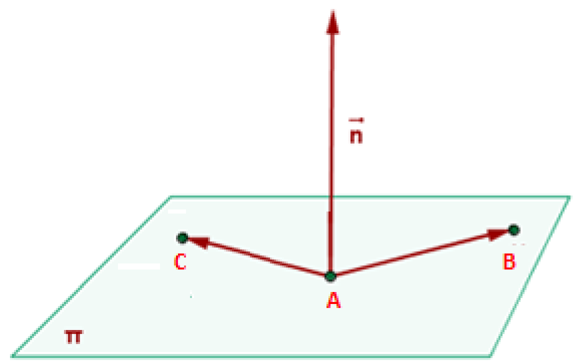
Si $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ son vectores no nulos, entonces

$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90°$ (los vectores son perpendiculares)

$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{o}}$ **= (0,0,0)** $\Leftrightarrow \quad \alpha = 0°$ (los vectores son **colineales**, tienen la misma dirección)

Vector normal a un plano

Al vector que es perpendicular a todos los vectores pertenecientes a un plano lo llamaremos **vector normal al plano**



Ejemplo

Encontremos el vector normal al plano en $\mathbf{R^3}$ al cual pertenecen los puntos

$A(3,3,1) \quad B(-2,0,3) \quad C(1,1,5)$

Para ello, formamos los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, ambos pertenecientes al plano nombrado.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle x_B - x_{A,} y_B - y_{A,} z_B - z_A \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle -2-3, 0-3, 3-1 \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle -5, -3, 2 \rangle$$

Análogamente:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \langle x_C - x_{A,} y_C - y_{A,} z_C - z_A \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \langle 1-3, 1-3, 5-1 \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \langle -2, -2, 4 \rangle$$

La ecuación vectorial del plano sería:

$$(x, y, z) = (3,3,1) + \alpha\langle -5, -3, 2 \rangle + \beta\langle -2, -2, 4 \rangle$$

El vector normal lo encontraríamos calculando $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$**:**

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} = -\mathbf{8}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{16}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{4}\vec{\boldsymbol{k}}$$

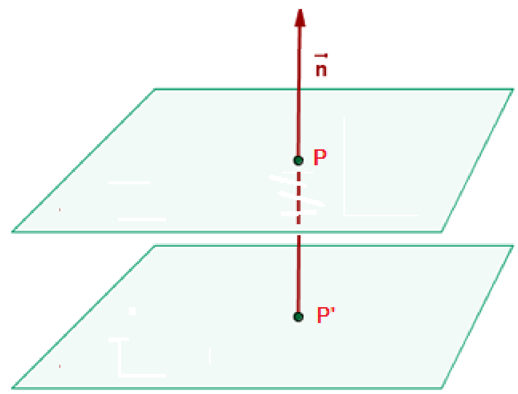
Simplificando entre cuatro (por simple comodidad) y cambiando de notación:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \langle -2,4,1 \rangle$$

Verificamos rápidamente que el vector normal es perpendicular a los vectores del plano calculando dos productos puntos.

Teorema:

Dos **planos paralelos o coincidentes** tiene vectores normales colineales (el mismo vector o una ponderación del mismo)



Ejercicios:

1. Pruebe que la recta

$$(x, y, z) = \lambda(-1,1,1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y el plano

$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

no se intersectan. ¿Alcanza con que sean paralelos?

2. Hallar k para que el plano $2x - y + z + 6 = 0$ sea paralelo al vector $\vec{v} = (2, k, -3)$.

3. Considere las rectas cuyas ecuaciones son:

$$(x, y, z) = (2,2, k) + \alpha < 1, -1, -1 >$$

$$(x, y, z) = (k, 2,1) + \beta < 0,2,1 >$$

(a) Encuentre k para que las rectas sean coplanares (esto es, estén contenidas en un mismo plano)

(b) Encuentre la ecuación general del plano que las contiene.

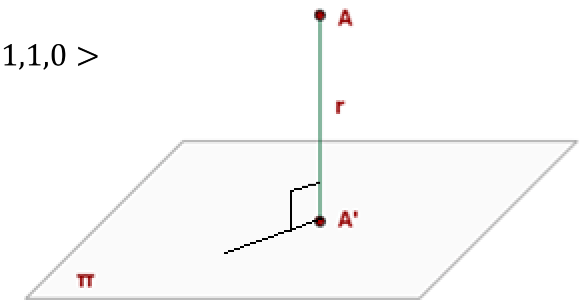
(c) Encuentre las coordenadas del punto de intersección de ambas.

Respuestas: $\boldsymbol{k = 0}$; $\boldsymbol{x - y + 2z = 0}$; $\boldsymbol{(0, 4, 2)}$

4. Dado el punto $A(2,1,3)$ y el plano de ecuación

$$(x, y, z) = (0,1,2) + \alpha < -1, -1, 2 > + \beta < 1,1,0 >$$

encuentre el punto A’,
(proyección ortogonal de A
sobre el plano dado).



Respuesta: $\boldsymbol{A(1,2,3)}$