Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 8

Mauro Jélvez Jélvez

28/06/2024

1)

Consideremos las propiedades:

$$\delta[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\int_{\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi'(x)dx = -\varphi'(0)$$

$$\delta^{(n)}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

Haciendo el producto interno de de $\delta'(x)\psi(x)$ con $\phi(x)$, donde esta última es una función de prueba.

$$\langle \psi(x)\delta'(x), \phi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta'(x)\phi(x)dx$$

Usando la propiedades anteriores, tenemos que en este caso $\varphi(x) = \psi(x)\phi(x)$, quedándonos:

$$\langle \psi(x)\delta(x), \phi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)(\psi(x)\phi(x))'dx$$

En donde:

$$(\psi(x)\phi(x))' = \psi'(x)\phi(x) + \psi(x)\phi'(x)$$

Reemplazando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(\psi'(x)\phi(x) + \psi(x)\phi'(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi'(x)\phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)\phi'(x)$$

Usando las propiedades tenemos:

$$\langle \psi(x)\delta'(x), \phi(x)\rangle = -(\psi'(0)\phi(0) + \psi(0)\phi'(0))$$

Aqui podemos considerar:

$$\langle \psi(0)\delta'(x), \phi(x)\rangle = -\psi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x)dx = -\psi(0)\phi'(0)$$

$$\langle \psi'(0)\delta(x), \phi(x)\rangle = \psi'(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \psi'(0)\phi(0)$$

Por lo que tendremos:

$$\langle \psi(0)\delta'(x), \phi(x)\rangle = \langle \psi(0)\delta'(x), \phi(x)\rangle - \langle \psi'(0)\delta(x), \phi(x)\rangle$$

Quedándonos:

$$\psi(0)\delta'(x) = \psi(0)\delta'(x) - \psi'(0)\delta(x)$$

Ahora para el caso $\psi(x)\delta^{(n)}(x)$. tendremos:

$$\left\langle \psi(x)\delta^{(n)}(x), \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta^{(n)}(x)\phi(x)dx$$

Según las propiedades tenemos que $\varphi(x) = \psi(x)\phi(x)$ y para poder calcular su enésima derivada del producto, usaremos la fórmula de Leibnz

$$(\psi(x)\phi(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x)\phi^{(n-k)}(x)$$

Evaluando $x = 0$ tendremos:

$$\langle \psi(0)\delta'(x), \phi(x) \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0)\phi^{(n-k)}(0)$$

Podemos reescribir el resultado anterior para agrupar términos de la forma:

$$\langle \psi(0)\delta'(x), \phi(x) \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle \psi^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(x), \phi(x) \right\rangle$$

Quedándonos finalmente

$$\psi(0)\delta'(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(x)$$

2)

Si sabemos que podemos expresar la Delta de Dirac para $x \in [-\pi, \pi]$ en forma de serie de Fourier; Aquí, los coeficientes de Fourier $\hat{\delta}_n$ son:

$$\hat{\delta}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi},$$

porque $\delta(x)$ es 1 en $x = 0$ y 0 en todas partes fuera de este punto.
Entonces, tenemos:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

Ahora consideremos la serie de Fourier para $|p|\delta(px)$ en $x \in [-\pi, \pi]$ y por propiedades de la Delta de Dirac sabemos que $\forall p \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\delta(px) = \frac{1}{|p|}\delta(x)$$

Entonces:

$$|p|\delta(px) = |p| \cdot \frac{1}{|p|}\delta(x) = \delta(x)$$

De esto, se deduce que la función $|p|\delta(px)$ se reduce a $\delta(x)$ independientemente del valor de p.

Dado que ambas funciones se reducen a $\delta(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, sus series de Fourier deben ser idénticas. Esto se debe a que las series de Fourier son una representación única de una función en términos de sus componentes de frecuencia, y aquí ambas funciones $\delta(x)$ y $|p|\delta(px)$ son en realidad la misma función.