Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 4

Matrices y sus propiedades

Nota importante: No se debe confundir una matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$ (un cuadro de números) con su determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = AB' - A'B$ (un número asociado a esa matriz)

Dimensiones:

Las matrices pueden tener diferentes dimensiones, esto dependerá de cuantas filas y columnas tiene el cuadro de números. Por ejemplo, la matriz a continuación es una matriz 3×2. Tiene tres filas y dos columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Más generalmente, si queremos trabajar con una matriz genérica, la escribiremos así,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

La matriz A es un matriz 3×2. Y al elemento que pertenece a la fila "i" y la columna "j" lo representamos con dos subíndices, el primero cuenta la fila y el segundo la columna,

$$a_{ij}$$

En el ejemplo anterior, el elemento que ocupa la fila 3 y la columna 1 es

$$a_{31} = -5$$

Si una matriz tiene igual número de filas que de columnas, se llama **matriz cuadrada**.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sólo para ellas definiremos un **determinante** y lo escribiremos,

$$\det B = -8$$

Ya sabemos calcular determinantes de matrices 2×2 y 3×3, pero aún no sabemos las estrategias para calcular el determinante de una matriz cuadrada **de orden superior.**

Operaciones con matrices

Suma y resta de matrices: Dos matrices de iguales dimensiones se pueden sumar y restar de manera muy sencilla. Basta con sumar o restar los elementos que ocupan la misma posición

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

o sea:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i,j \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq 2$$

La resta sería,

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 16 & -18 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedad: Observen que la multiplicación de matrices es conmutativa, es decir no importa el orden en que se sumen,

$$A + B = B + A \qquad \forall A, B$$

La resta no lo es.

Multiplicación de una matriz por un número

Lo vemos con un ejemplo. Multiplicar una matriz por un número, significa multiplicar todos sus elementos por ese número.

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Nota: Las anteriores son propiedades sencillas para la suma y multiplicación de matrices, pero muy peligrosas. Los determinantes no se suman ni se multiplican así.

Multiplicación de matrices: Para poder multiplicar matrices, es necesario que la primera tenga el mismo número de columnas que las filas de la segunda.

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A tiene 3 filas y 2 columnas B tiene 2 filas y 4 columnas

La matriz $A \times B$ resultante tendrá 3 filas y 4 columnas. La estrategia para su cálculo es como sigue:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 14 & 25 & 38 \\ 26 & 22 & 25 & 24 \\ -10 & -10 & -15 & -20 \end{pmatrix} = A \times B$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 14 & 25 & 38 \\ 26 & 22 & 25 & 24 \\ -10 & -10 & -15 & -20 \end{pmatrix} = A \times B$$

Para calcular el elemento que ocupa la fila 2 y la columna 3 de la matriz $A \times B$ debemos ocupar toda la fila 2 de la matriz A y toda la columna 3 de la matriz B. Y multiplicar el primer elemento por el primero y así.

O sea que si llamamos c_{23}al elemento de la matriz $A \times B$, sería …

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$$

En general si la primera matriz es una matriz A de dimensiones $m \times n$ y la segunda es una matriz B de dimensiones $n \times p$, el producto $A \times B$ será una matriz de dimensiones $m \times p$, cuyo elemento genérico es:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}b_{jk}$$

Propiedades:

1) Es claro que la multiplicación de matrices **no es conmutativa.** En el caso del ejemplo $B \times A$ ni siquiera se puede hacer. En general, salvo excepciones,

$$A \times B \neq B \times A$$

2) La mutiplicación de matrices es **asociativa**

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

3) La multiplicación y la adición de matrices cumplen la **propiedad distributiva:**

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Desafío: ¿En qué casos es posible calcular $A \times B$ y también $B \times A$, aunque obviamente no den igual?

Matriz identidad

Se llama así a una matriz cuadrada que tiene todos los elmentos de su diagonal principal iguales a 1 y todos los demás iguales a 0. Por ejemplo, la matriz identidad de orden 3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad tiene la propiedad de que al ser multiplicada por cualquier otra matriz (siempre que esa multiplicación esté definida por el tema de las dimesiones) el resultado vuelve a ser la matriz original. Se dice que es el **neutro de la multiplicación de matrices.**

$$A \times I = A \qquad \forall\ A \text{ matriz}$$

Matriz traspuesta

Se llama así a la matriz A^t que tiene sus filas iguales a las columnas de y sus columnas iguales a las filas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿Qué pasa con la división de matrices? La respuesta es: “no se define”. Pero podemos definir algo equivalente.

La **matriz inversa** A^{-1} de otra matriz A (que en nuestro curso será siempre cuadrada) es otra matriz tal que:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Observen que, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, estamos indicando que “la inversa por izquierda” será la misma que “la inversa por derecha”.

Cálculo de la matriz inversa de una matriz 2×2:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ¿cuál es su matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliquemos las matrices:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Formamos entonces dos sistemas de ecuaciones, uno de llos con incógnitas p y r, y otro con incógnitas q y s.

$$\begin{cases} ap + br & = 1 \\ cp + dr & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} aq + bs & = 0 \\ cq + ds & = 1 \end{cases}$$

Resolviéndolos por Cramer (o por cualquier otro método) se obtiene:

$$p = \frac{d}{ad - bc} \qquad r = \frac{-b}{ad - bc}$$
$$q = \frac{-c}{ad - bc} \qquad s = \frac{a}{ad - bc}$$

La matriz inversa será entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

Que puede ser calculada siempre y cuando $ab - cd \neq 0$. Ese es justamente el determinante de la matriz A. Escrito de otra forma:

cambia el signo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

cambia el signo

Los elementos de la diagonal principal intercambian posiciones, los otros cambian el signo.

Consecuencia:

Sólo tienen inversa las matrices cuadradas cuyo determinante $\det A \neq 0$. Se llaman **matrices regulares.**

Las matrices con $\det A = 0$, no tiene inversa. Se llaman **matrices singulares**.

Se puede extender este resultado a matrices cuadradas de otra dimensión.

Ejemplo:

Si $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces $\det A = -2$, la matriz **es invertible** y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Comprueben que $$A \times A^{-1} = I$$

Propiedades de la matriz inversa:

Prop. 1: La inversa de la inversa es la propia matriz A

$$(A^{-1})^{-1}$$

Prop. 2: La inversa de un producto de matrices es el producto de las matrices inversas de cada una de llas pero en orden invertido.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ejercicios:

1. Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Calcula $A.B$; $A.C$ y $A.(B + C)$ ¿Qué propiedad se cumple?

(b) Prueba que se cumple en general (trabaja con matrices 2 x 2 genéricas).

2. Encuentra todos los valores de x, y, z para que las siguientes dos matrices sean idénticas:

$$\begin{pmatrix} x-3y+9 & y-z \\ 0 & 2x+y+z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-5z & z-x-y+7 \\ 0 & -3x+3y-2z \end{pmatrix}$$

3. Encuentre los valores de a y b para que el producto de las siguientes matrices **conmute**, es decir para que $M.N = N.M$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices B (distintas de la matriz nula y de la identidad) que conmutan con la matriz A.

(b) Ocupando la misma matriz A, encontrar todas las matrices B tal que $A.B = O$ siendo $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (**la matriz nula 2 x 2**).

5. Sea el polinomio

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$$

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula $p(A)$.

6. (a) Encuentre k para que el producto de las matrices A y B conmute, es decir para que $AB = BA$. ¿Conmuta para algún otro valor?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es posible que el producto de una matriz A 4 x 2 y otra B 2 x 4 conmute?

Respuesta: k=9
No, no es posible.

7. En el conjunto de números reales R se cumplen la siguiente propiedad:

Propiedad Hankeliana: Si $a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

¿Se cumple la propiedad hankeliana para matrices 2 x 2?
Compruébalo multiplicando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. **Definición:** *Una matriz se llama* ***ortogonal****, cuando se cumple que su matriz inversa es igual a su matriz traspuesta. Esto es,* $A^t = A^{-1}$

Prueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

son ortogonales.

9. Expresa la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ como **combinación lineal** de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$