Certamen 3

Cálculo III - FOGEC
FC - UV
26 - 07 - 2022

1.- (15 Puntos)

Hallar

$$\iint_R xy \, dA$$

donde R es la región limitada por el trapecio de vértices $A(-1,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,-1)$ y $D(1,-1)$.

2.- (15 Puntos)

Use integrales dobles para calcular el volumen del sólido que está ubicado en el primer octante, y limitado por las superficies cilíndricas cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + z^2 = 16$.

3. (15 Puntos)

Sea Q la región del espacio acotado superiormente por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e inferiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ para $z \geq 0$. Calcule

$$\iiint_Q z dV$$

4.- (15 Puntos)

Calcular la integral de línea

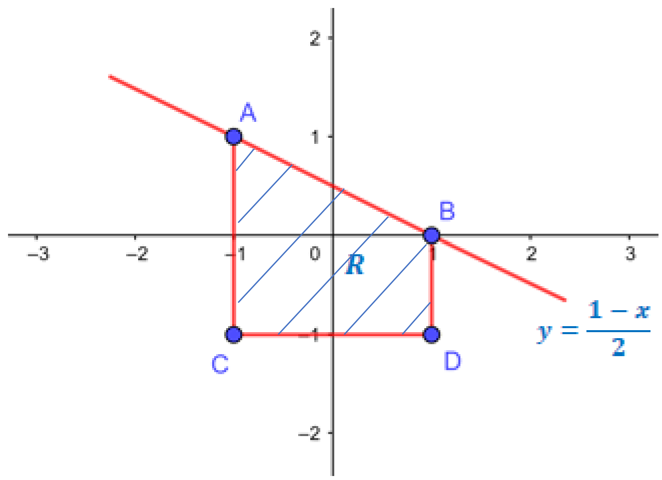
$$\int_C xy \, ds$$

donde C es el contorno del cuadrado $|x| + |y| = 1$

Obs : Dispone de 90 minutos.

1.-

Grafico de la región R



$$\iint_R xy\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{1-x}{2}} xydydx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{\frac{1-x}{2}} dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{\frac{(1-x)^2}{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x\frac{(1-x)^2}{8} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1}\left(x\frac{(1-2x+x^2)}{8} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{x-2x^2+x^3}{8} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{-3x-2x^2+x^3}{8}\right) dx$$

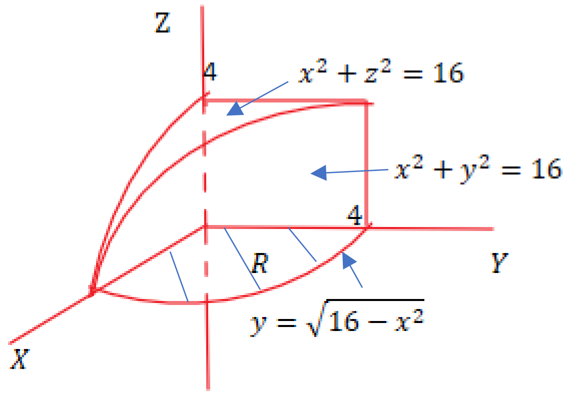
$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(-3x-2x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{3}{2}x^2 - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

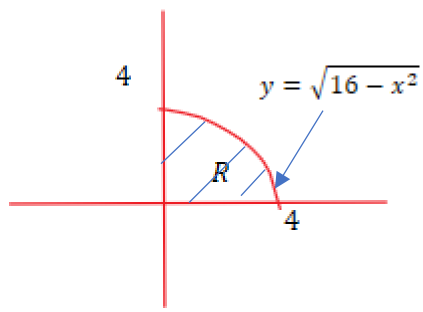
$$= \frac{1}{8}\left[\left(-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

2.-



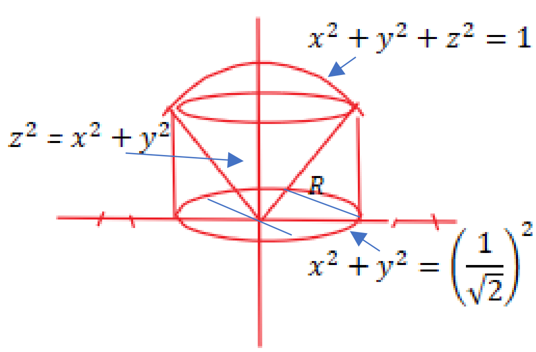


$$R = \left\{(x, y, z)\ x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2}\right\}$$

$$V(R) = \iint \sqrt{16 - x^2}dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16 - x^2}dxdy$$

$$= \int_0^4 \sqrt{16 - x^2}[y]_0^{\sqrt{16-x^2}}dx = \int_0^4 (16 - x^2)dx = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{128}{3}$$

3.-



La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ en coordenadas cilíndricas es $z^2 = r^2$, entones

$$z = r \ \geq 0 \text{ pues } z \geq 0$$

La ecuación de la semiesfera es: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{1 - r^2}$.

La intersección de as dos superficies:

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2z^2 = 1$$

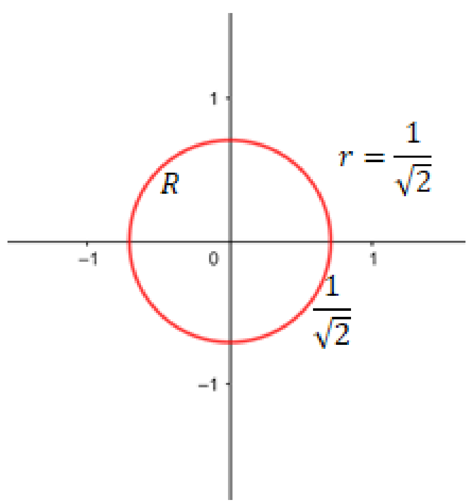
$$\Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es decir , esta es una circunferencia de centro $\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cuya proyección en el plano XY es la circunferencia :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

Luego

$$R = \left\{(r, \theta) / \ 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\right\}$$

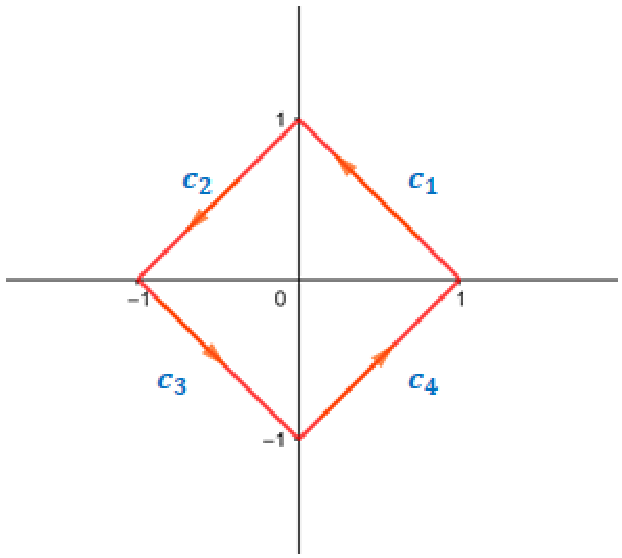


$$\iiint\limits_Q zdV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} zrdrdzd\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r-2r^3)drd\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{\pi}{8}$$

4.-



$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

En el primer cuadrante de $(1,0)$ a $(-1,0)$

$$C_1: r_1(t) = (1,0) + \big((-1,0)-(1,0)\big)t$$
$$= (1-t, t)\,;\, t \in [0,1]$$

En el segundo cuadrante de $(0,1)$ a $(-1,0)$

$$C_2: r_2(t) = (0,1) + \big((-1,0)-(0,1)\big)t$$
$$= (-t, 1-t)\,;\, t \in [0,1]$$

En el tercer cuadrante de $(-1,0)$ a $(0,-1)$

$$C_3: r_3(t) = (-1,0) + \big((0,-1)-(-1,0)\big)t$$
$$= (-1+t, -t)\,;\, t \in [0,1]$$

En el cuarto cuadrante de $(0,-1)$ a $(1,0)$

$$C_4: r_4(t) = (0,-1) + \big((1,0)-(0,-1)\big)t$$
$$= (t, t-1)\,;\, t \in [0,1]$$

Además

$$r_1'(t) = (-1,1) \Rightarrow \|r_1'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$r_2'(t) = (-1,-1) \Rightarrow \|r_2'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$r_3'(t) = (-1,1) \Rightarrow \|r_3'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$r_4'(t) = (-1,1) \Rightarrow \|r_4'(t)\| = \sqrt{2}$$

Por tanto

$$\int_C xy\, dr = \int_0^1 (1-t)t\sqrt{2}dt + \int_0^1 (-t)(1-t)\sqrt{2}dt + \int_0^1 (t-1)(-t)\sqrt{2}dt + \int_0^1 t(t-1)\sqrt{2}\, dt = 0$$