Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 3

---

1. Escribir el conjunto de todos los enteros positivos entre 5 y 25 en notación de generación de conjuntos.

   Solución:
   $$X = \{n | n \in \mathbb{Z},\ 5 \leq n \leq 25\} \tag{1}$$

2. Considerar los siguientes conjuntos: $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. ¿Cuál de los siguientes mapeos no es una función $f : X \to Y$?

   (a) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$
   (b) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \diamondsuit\}$
   (c) $\{a, b, c, d\} \to \emptyset$
   (d) $\{a, b, d\} \to \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

   Solución: El mapeo (d) no define una función, porque no define la acción de f en el elemento c del conjunto X. Hay que definir la acción de una función en todos los elementos del dominio. En el caso de (d) si definimos el dominio como $\{a, b, d\}$ tenemos una función, pero no es una función $f : X \to Y$ sino que una función $f : A \to Y$ donde $A \subset X$. No hay problema en tener una función que no mapea a todos los elementos del conjunto del codominio Y.

3. Explicar por qué los enteros $\mathbb{Z}$ no constituyen un campo.

   Solución: Un campo requiere una inversa multiplicativa para todos los elementos, donde la inversa *es otro elemento de la misma estructura*. Es decir, para definir un campo, cada elemento del campo necesita una inversa multiplicativa que también es miembro del campo. Hay solo un número entero que tiene una inversa multiplicativa que también es un número entero: el número 1. En el caso del número 2, por ejemplo, no existe un entero x tal que $x \cdot 2 = 1$.

4. ¿Los enteros consituyen un anillo? Explicar su respuesta.

   Solución: Un anillo es una generalización de un campo donde no hay requerimiento de tener una inversa multiplicativa y la multiplicación puede ser no-conmutativa (en un campo es conmutativa). Ya que los enteros satisfacen todas las axiomas de un campo aparte de la inversa multiplicativa, los enteros constituyen un anillo.

5. Explicar por qué las matrices ortogonales en $2D$ constituyen un grupo (llamado $O(2)$).

   Solución: Un grupo es un conjunto G con una operación de producto $\cdot$ que satisface las siguientes axiomas:

   (a) Cierre bajo el producto: para $a, b \in G$ tenemos $a \cdot b = c$ donde $c \in G$.

   (b) Asociatividad: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

   (c) Elemento de identidad: $e \cdot a = a \cdot e = a$ para todo $a \in G$.

   (d) Elemento de inversa: para todo $a \in G$ existe un elemento a^{-1} tal que $a^{-1} \cdot a = e$.

   La definición de una matriz ortogonal es $A^T = A^{-1}$. Así que consideramos un producto de dos matrices ortogonales:

   $$(A \cdot B)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (A \cdot B)^{-1} \tag{2}$$

   donde el producto es el producto estandar de dos matrices. Vemos que $A \cdot B \in O(2)$, así que la primera axioma se cumple. La segunda axioma viene de la asociatividad del producto de matrices. La tercera es obvia: existe la matriz de identidad. La cuarta es inmediata dada la definición de ortogonalidad, así que siempre existe una inversa. Geométricamente es simplemente la inversa de la rotación. Entonces el conjunto $O(2)$ de matrices ortogonales en 2 dimensiones es un grupo.

6. ¿Los numeros reales $\mathbb{R}$ con la operación de multiplicación corresponde a un grupo? Explicar su respuesta.

   Solución: El conjunto $\mathbb{R}$ con multiplicación es casi un grupo: (a) el producto de dos números reales es otro número real, (b) el producto es asociativo, (c) hay una identidad, el número 1, (d) existe una inversa para casi todos los números *aparte del cero*. Es por este razón que el conjunto $\mathbb{R}$ con multiplicación NO es un grupo.

7. ¿Los numeros reales $\mathbb{R}$ con la operación de adición corresponde a un grupo? Explicar su respuesta.

   Solución: En el caso de la operación de adición, el conjunto $\mathbb{R}$ si es un grupo: (a) la suma de dos números reales es otro número real, (b) la suma es asociativa, (c) hay una identidad, el número 0, (d) existe una inversa (la negativa) para todos los números reales.

8. Demostrar que el conjunto de todas las funciones analíticas (suaves) definidas en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ constituye un espacio vectorial.

   Solución: Un espacio vectorial es un conjunto donde la operación de sumar dos elementos del espacio está definido, y donde se puede multiplicar por un escalar. En el presente caso podemos definir estas operaciones como:

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (af)(x) = af(x) \tag{3}$$

   donde $f, g \in C^\infty$ (el espacio de funciones suaves) y $a \in \mathbb{R}$. La suma en el primer miembro de la ecuación a la izquierda es la suma en el espacio vectorial, y la suma en el segundo miembro es la suma en $\mathbb{R}$ de los valores de las funciones. La suma de dos funciones suaves es otra función suave. El producto en el espacio vectorial también se define en términos del producto en $\mathbb{R}$.

9. Considerar el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de subconjuntos de X NO corresponde a una topología?

   (a) $\tau = \{X, \emptyset\}$

   (b) $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$

(c) $\tau = \{X, \emptyset, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$

(d) $\tau = \{X, \emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$

(e) $\tau = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}\}$

(f) $\tau = \{X, \emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

Solución: Una topología en un espacio X es un conjunto τ de subconjuntos tal que: (1) el conjunto vacio y X pertenecen a τ, (2) cualquier unión de miembros de τ pertenece a τ, (3) cualquier intersección finíta de miebros de τ pertenece a τ. Todos los ejemplos dados en la pregunta cumplen condición (1). El conjunto (e) no cumple con condición (2), ya que falta la unión de $\{2\}$ y $\{3\}$. El conjunto (f) no cumple con condición (3) ya que falta la intersección de $\{1, 32\}$ y $\{2, 3\}$. Todos los otros conjuntos son topologías del espacio.

10. Considerar las siguientes normas ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$:

(a) Norma L^1: $||\mathbf{x}||_1 \equiv \sum_i |x_i|$.

(b) Norma L^2: $||\mathbf{x}||_2 \equiv \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$

(c) Norma L^∞: $||\mathbf{x}||_\infty \equiv \max_i |x_i|$.

Considerando dos dimensiones (el plano $2D$), dibujar el conjunto de puntos que cumple con la condición $||\mathbf{x}|| = 1$ para cada una de estas normas.

Solución: (a) La condición es $|x| + |y| = 1$. En cada cuadrante alrededor del origen tenemos $|y| = 1 - |x|$, así que el conjunto de puntos corresponde a un diamante (o un cuadrado después de una rotación por 45 grados). (b) En este caso tenemos $x^2 + y^2 = 1$, un círculo de radio unitario. (c) $\max(|x|, |y|) = 1$ corresponde a un cuadrado centrado en el origen, con vertices en $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

11. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de numeros racionales. Definimos la siguiente métrica en este conjunto (para definir un espacio métrico):

$$d(x,y) = |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q} \tag{4}$$

Considerar la sucesión $\{x_n\}$ de numeros racionales tal que

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = 2\frac{1+x_n}{2+x_n} \quad n \geq 1$$

Por uso de esa sucesión, determinar si el espacio $(\mathbb{Q}, d)$ es completo o no.

Solución: Esta pregunta es un desafío! Para comenzar, encontramos el valor límite de la sucesión. En el límite tenemos

$$L = 2\frac{1+L}{2+L} \quad \Rightarrow \quad (2+L)L = 2 + 2L \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{2} \tag{5}$$

La distancia entre dos miembros consecutivos de la sucesión es (usando la métrica):

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| 2\frac{1+x_n}{2+x_n} - x_n \right| = \left| \frac{2 - x_n^2}{2+x_n} \right| \tag{6}$$

Así que la sucesión se acerca arbitrariamente al valor $\sqrt{2}$ pero sabemos que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por lo tanto la sucesión de Cauchy converge pero el límite no pertenece al conjunto. El espacio no es completo.

12. Considerar el espacio de funciones analíticas definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. Verificar que la siguiente integral define un producto escalar (producto interno) en el espacio:

$$(f,g) \equiv \int_{[0,1]} f(x)g(x)dx$$

Solución: El producto interno dado es (1) simétrico $(f,g) = (g,f)$, (2) lineal $(af+bg,h) = a(f,h)+b(g,h)$, (3) definido positivo $(f,f) \geq 0$ con igualdad solamente cuando $f = 0$. Aquí usamos la restricción a funciones analíticas. Para funciones no continuas es posible tener puntos aislados donde $f \neq 0$ pero $(f,f) = 0$.

13. Considerar el producto interno definido en la pregunta anterior. Definir la norma inducida por este producto interno. Definir la métrica inducida por la norma.

Solución: La norma inducida por el producto interno es

$$||f|| \coloneqq \sqrt{(f,f)} \tag{7}$$

La métrica inducida por la norma es

$$d(f,g) \coloneqq ||f-g|| = \sqrt{(f-g,f-g)} \tag{8}$$

Notar que necesitamos la estructura del espacio vectorial para definir que significa $f-g$ en la definición de la métrica.

14. Utilizar la norma definida en la pregunta anterior para calcular la norma de las funciones $f_n(x) = \cos(nx)$.

Solución:

$$||f_n|| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_{[0,1]} \cos^2(nx)\right)^{1/2} = \left|\left(\frac{2nx+\sin(2nx)}{4nx}\right)^{1/2}\right|_0^1 \tag{9}$$

15. Utilizar la métrica definida en la pregunta (13) para determinar la "distancia" entre las funciones $f_1(x) = \cos(x)$ y $f_2(x) = \cos(2x)$.

Solución:

$$d(f_1,f_2) = ||f_1-f_2|| = \sqrt{(f_1-f_2,f_1-f_2)} = \left(\int_{[0,1]} [\cos(x)-\cos(2x)]^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

16. Considerar $X = C[-1,1]$, el conjunto de funciones continuas $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Para $f,g \in X$ definimos

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Demostrar que esta definición NO corresponde a un producto interno en el espacio.

Solución: El problema de nuevo está en la condición de que $(f,f) = 0$ implica $f = 0$. Ya que la integral solamente considera la mitad del dominio de las funciones, es posible tener el producto interno cero, pero $f \neq 0$ en la otra mitad del dominio.

17. Sea $\mathcal{H}$ un espacio Hilbert con producto escalar $(,)$. Consideremos $u, v \in \mathcal{H}$. $||\cdot||$ es la norma inducida por el producto escalar. Demostrar la siguiente desigualdad (desigualdad de Cauchy-Schwarz):

$$|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$$

Solución: Primero consideremos un caso especial: $u = cv$ donde $c \in \mathbb{C}$ (podemos considerar el campo como $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Entonces u y v son linealmente dependientes. Tenemos

$$|(u,v)| = |(cv,v)| = |c(v,v)| = |c| \cdot ||v|| \cdot ||v|| = ||cv|| \cdot ||v|| = ||u|| \cdot ||v|| \tag{11}$$

y tenemos igualdad en este caso. El caso de tener uno de los vectores igual a cero es un caso especial de tener vectores linealmente dependientes. Entonces ahora suponemos que $v \neq 0$:

$$w := u - \frac{(u,v)}{(v,v)} v \tag{12}$$

El vector w es ortogonal al vector v:

$$(w,v) = (u,v) - \frac{(u,v)}{(v,v)}(v,v) = 0 \tag{13}$$

Entonces consideremos

$$u = \frac{(u,v)}{(v,v)} v + w \tag{14}$$

Para dos vectores v, w ortogonales tenemos

$$||\alpha v + w||^2 = (\alpha v + w, \alpha v + w) = |\alpha|^2 (v,v) + (w,w) + \alpha^*(v,w) + \alpha(w,v) = ||v||^2 + ||w||^2 \tag{15}$$

Así que podemos escribir:

$$||u||^2 = \left|\frac{(u,v)}{(v,v)}\right|^2 ||v||^2 + ||w||^2 = \frac{|(u,v)|^2}{(||v||^2)^2}||v||^2 + ||w||^2 = \frac{|(u,v)|^2}{||v||^2} + ||w||^2 \geq \frac{|(u,v)|^2}{||v||^2} \tag{16}$$

y por lo tanto

$$||u||^2 ||v||^2 \geq |(u,v)|^2 \quad \Rightarrow \quad |(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v|| \tag{17}$$