Clase nº40

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

10 de Diciembre 2021

Objetivo de la clase

- Comprender el método de separación de variables.

Problemática

El número de bacterias en un cultivo aumenta de 600 a 1800 bacterias en 2 horas. Encontrar una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de cuatro horas?

Sea.

$P(t)$: n° de bacterias a las t horas.

Luego

$P(0) = 600$

$P(2) = 1800$.

además,

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k \quad , \quad k \text{ constante.}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = P(t) \cdot k$$

$$\Rightarrow \quad dP = P(t) \cdot k \, dt \quad , \; P(t) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P(t)} \, dP = k \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{P(t)} \, dP = \int k \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln |P(t)| + c_1 = kt + c_2$$

$$\Rightarrow \quad \ln |P(t)| = kt + c_3 \quad , \; c_3 = c_2 - c_1$$

$$\Rightarrow \quad |P(t)| = e^{kt + c_3}$$

$$\Rightarrow \quad |P(t)| = c_4 e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad P(t) = c \cdot e^{kt} .$$

Como $P(0) = 600$ entonces

$$600 = ce^{0}$$

$$\Rightarrow \quad c = 600$$

$$\therefore, \quad P(t) = 600 \cdot e^{kt}.$$

$$P(2) = 1800 \Leftrightarrow \quad 600\, e^{2k} = 1800$$

$$\Rightarrow \quad e^{2k} = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2k = \ln 3$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\ln 3}{2}.$$

Luego

$$P(t) = 600\, e^{\frac{\ln 3}{2} t}$$

$$= 600\, e^{\ln\left(3^{t/2}\right)}$$

$$= 600 \cdot 3^{t/2}.$$

Con lo cual

$$P(4) = 600 \cdot 3^{4/2} = 600 \cdot 3^{2} = 5.400$$

el nº de bacterias al cabo de 4 horas será de 5.400.

Ecuaciones diferenciales

Son igualdades que envuelven derivadas de funciones desconocidas.

Ejemplo 1

a) $y' + x^2 y = 4$

b) $y'' + 6y' - 4y = x$

c) $L\dfrac{d^2 i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C} i = Ew\cos(wt)$

d) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

Variable dependiente e independiente

Si una ecuación implica la derivada de una variable con respecto de otra, entonces la primera se llama una **variable dependiente** y la segunda una **variable independiente.**

Ejemplo 2

a) $\dfrac{dx}{dt} = 4x$, en este caso t es la variable independiente y x es la variable dependiente.

b) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$, en este caso y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

Ecuación diferencial ordinaria

Es una ecuación diferencial que sólo implica derivadas ordinarias con respecto de una sola variable independiente.

Ejemplo 3

a) $\dfrac{dx}{dt} = 4x.$

b) $y'' + 4x + y = 0$

c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + a\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$

Ecuación diferencial parcial

Es una ecuación diferencial que implica derivadas parciales con respecto de más de una variable independiente.

Ejemplo 4

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4x - 3y$

Solución Explícita

Consideremos la forma general

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

Una solución explícita de la ecuación (1) en algún intervalo I, es una función $\phi(x)$ tal que al sustituirla en vez de y en la ecuación (1) satisface la ecuación para toda x en el intervalo I.

Ejemplo 5

$\phi(x) = 3x^2 + 5x$ es una solución explícita de

$$\frac{dy}{dx} - 6x - 5 = 0.$$

Solución Implícita

Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de la ecuación (1) en el intervalo I si define una o más soluciones explícitas en I.

Ejemplo 6

$4x^2 - y^2 = 5$, es una solución implícita de la ecuación

$$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0. \qquad (1)$$

Tenemos que

$$4x^2 - y^2 = 5 \iff y^2 = 4x^2 - 5 \;, \quad 4x^2 - 5 \geq 0$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{4x^2 - 5}$$

$$\Rightarrow \left(y = \sqrt{4x^2 - 5} \;\vee\; y = -\sqrt{4x^2 - 5} \right)$$

Verifiquemos que $y = \sqrt{4x^2 - 5}$ es solución explícita.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-5}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-5}} = \frac{4x}{y}, \qquad y \neq 0.$$

$\therefore$,

$$y \cdot \frac{dy}{dx} - 4x = 0 \iff y \cdot \frac{4x}{y} - 4x = 0.$$

Ej. verificar que $y = -\sqrt{4x^2-5}$ es solución de (1).

Ecuaciones separables

Si el lado derecho de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

se puede expresar como una función $g(x)$ que sólo depende de x, por una función $p(y)$ que sólo depende de y, entonces la ecuación diferencial es **separable.**

En otras palabras, (2) se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y).$$

Ejemplo 7

La ecuación
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + xy}{y^3 + 1}$$
es separable.

Basta considerar $g(x) = x$ y $p(y) = \dfrac{3 + y}{y^3 + 1}$.

Ejemplo 8

La ecuación
$$\frac{dy}{dx} = 3 + xy$$
<u>no</u> es una ecuación separable.

Método para resolver ecuaciones separables

Para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \tag{3}$$

1. Consideramos los diferenciales

$$dy = g(x)p(y)dx$$

2. Multiplicamos por $1/p(y)$, $p(y) \neq 0$.

$$\frac{1}{p(y)}dy = g(x)dx.$$

3. Integramos ambos lados

$$\int \frac{1}{p(y)}dy = \int g(x)dx.$$

Observar

Notar que si $p(y_0) = 0$ entonces la función constante $y(t) = y_0$ es solución de nuestra ecuación diferencial.

Ejemplo 9

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2 \qquad (1)$$

Notar que $y(x)=0$ es solución de (1).

Si $y \neq 0$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2 \Rightarrow dy = 4xy^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = 4x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 4x\,dx$$

$$\Rightarrow -y^{-1} = 2x^2 + C, \quad 2x^2+C \neq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2x^2+C} = y.$$

• Si $c>0$ entonces $y=\frac{-1}{2x^2+c}$ está bien definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

• Si $c=0$ entonces $y=\frac{-1}{2x^2}$ está definida para $x<0$ o $x>0$.

• Si $c<0$ entonces $y=\frac{-1}{2x^2+c}$ está definida para $-\sqrt{\frac{-c}{2}}<x<\sqrt{\frac{-c}{2}}$ o $x>\sqrt{\frac{-c}{2}}$ o $x<-\sqrt{\frac{-c}{2}}$

Notar que la familia

$$\begin{cases} y(x)=0 \\ y(x)=\dfrac{-1}{2x^2+c}, \quad c\in\mathbb{R} \end{cases}$$

es solución de (1), con x en el intervalo correspondiente.

Ejemplo 10

Encuentre la solución particular de la ecuación $y' = 4y$ que verifica $y(1) = 3$.

Notar que $y(x)=0$ es solución de $y'=4y$.

Si $y \neq 0$ entonces

$$y' = 4y \Rightarrow dy = 4y\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = 4\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int 4\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 4x + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{4x+C}$$

Si $y>0$ entonces

$$y = e^{4x+c} = c_1 e^{4x}$$

si $y<0$ entonces

$$y = -e^{4x+c} = -c_2 e^{4x} = c_3 e^{4x}.$$

Como la condición inicial es $y(1)=3$ se tiene que

$$3 = c_4 e^{4} \Rightarrow c_4 = 3 \cdot e^{-4}$$

$\therefore$,

$$y(x) = 3e^{4(x-1)}.$$

Ejemplo 11

$$x^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$$

si $y \neq 0$ entonces

$$x^2 + y\frac{dy}{dx} = 0 \iff y\frac{dy}{dx} = -x^2$$

$$\Rightarrow y\,dy = -x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int -x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^3}{3} + c_1$$

$$\Rightarrow y^2 = -\frac{2x^3}{3} + c.$$

Ejemplo 12

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 2x$$

Si consideramos

$$z = 4y - 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 4z - 2 \quad , \quad 4z \neq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4z-2}\, dz = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4z-2}\,dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln|4z-2| = x + c_1$$

$$\Rightarrow \ln|4z-2| = 4x + c_2$$

$$\Rightarrow |4z-2| = e^{4x+c_2}$$

$$\Rightarrow |4z-2| = c_3 e^{4x}$$

$$\Rightarrow 4z-2 = c_4 e^{4x}$$

$$\Rightarrow z = c_5 e^{4x} + \frac{1}{2}$$

Como $z = 4y-2x$ se tiene que

$$4y-2x = c_5 e^{4x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = ce^{4x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}.}$$

Ejercicios propuestos

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x^2}{y^2}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy^3}$
3. $\dfrac{dx}{dt} = 3xt^2$
4. $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1 - 4v^2}{3v}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(1 + y^2)$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.