Trigonometría: más ejercitación

1. Demostrar que:

$$\frac{sen(3x)}{senx} - \frac{cos(3x)}{cosx} = 2$$

2. Resolver la ecuación

$$4cos^2(x) - \frac{8}{cosec(x)} = 7$$

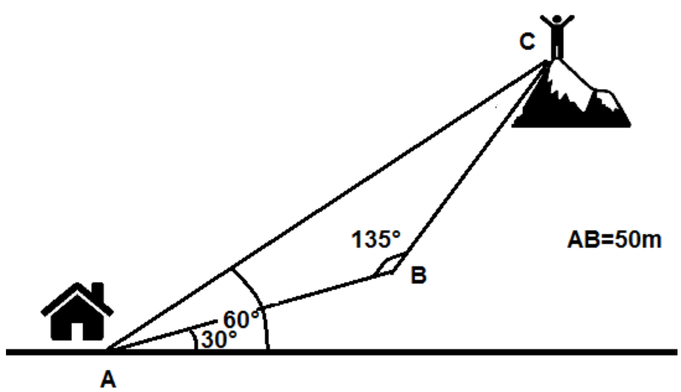
3. Sabiendo que

$$senx = \frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad secx < 0$$

determine el valor de

$$tg(x + \pi)$$

4. Desde una estación A que está en la base de una montaña, se ve su cima C con un ángulo de elevación de 60°. Una persona desde A se dirige hacia la cima, subiendo por un plano inclinado 30° respecto del plano horizontal. Luego de caminar 50 metros se detiene en una segunda estación B, desde la cual se observa que el ángulo ABC mide 135°.



Calcule la altura de la montaña. **(1.5 puntos)**

Ejercicio 1:

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen}(2x)\cdot\cos x + \cos(2x)\cdot\operatorname{sen} x$$
$$= (2\operatorname{sen} x\cdot\cos x)\cdot\cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cdot\operatorname{sen} x$$
$$= \boxed{\operatorname{sen} x\,(3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}$$

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cdot\cos x - \operatorname{sen}(2x)\cdot\operatorname{sen} x$$
$$= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cdot\cos x - (2\operatorname{sen} x\cos x)\operatorname{sen} x$$
$$= \boxed{\cos x\,(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos(3x)}{\cos x} = 3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - [\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x]$$
$$= 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)$$
$$= 2$$

Está probado.

Ejercicio 2:

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \operatorname{sen} x$$

$$4(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 8\operatorname{sen} x - 7 = 0$$

Cambio de variable: $\boxed{z = \operatorname{sen} x}$ $\Rightarrow$ $4(1 - z^2) - 8z - 7 = 0$

$$-4z^2 - 8z - 3 = 0$$
$$4z^2 + 8z + 3 = 0$$

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 4\cdot(+3)}}{2\cdot 4}$$

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{8}$$

$z_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

$z_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{3}{2}$

(Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq +1$ No sirve)

$x = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

$$Sol = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

Ejercicio 3:

$$\text{sen } x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\boxed{\cos x = \pm \frac{4}{5}}$$

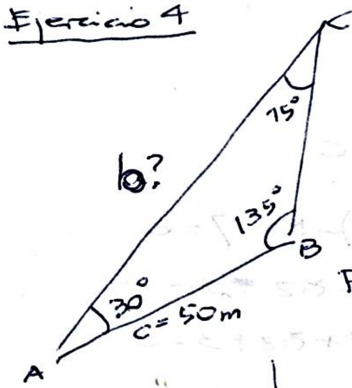
¿Cuál de los dos signos sirve?

$$\sec x < 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \boxed{\cos x = -\frac{4}{5}}$$

$$tg\, x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

Como tg tiene período π $\Rightarrow \boxed{tg(x+\pi) = -\frac{3}{4}}$

Ejercicio 4



$$\text{sen } 15° = \cos 75° = \cos(45° + 30°)$$

$$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Por teorema del seno:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{\text{sen } 135°} = \dfrac{c}{\text{sen } 15°} \\ \text{sen } 135° = \text{sen } 45° \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$b = \boxed{\frac{100}{\sqrt{3} - 1}\ m}$$

$$b = \frac{100 \cdot (\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$b = 50 \cdot 2{,}73$$

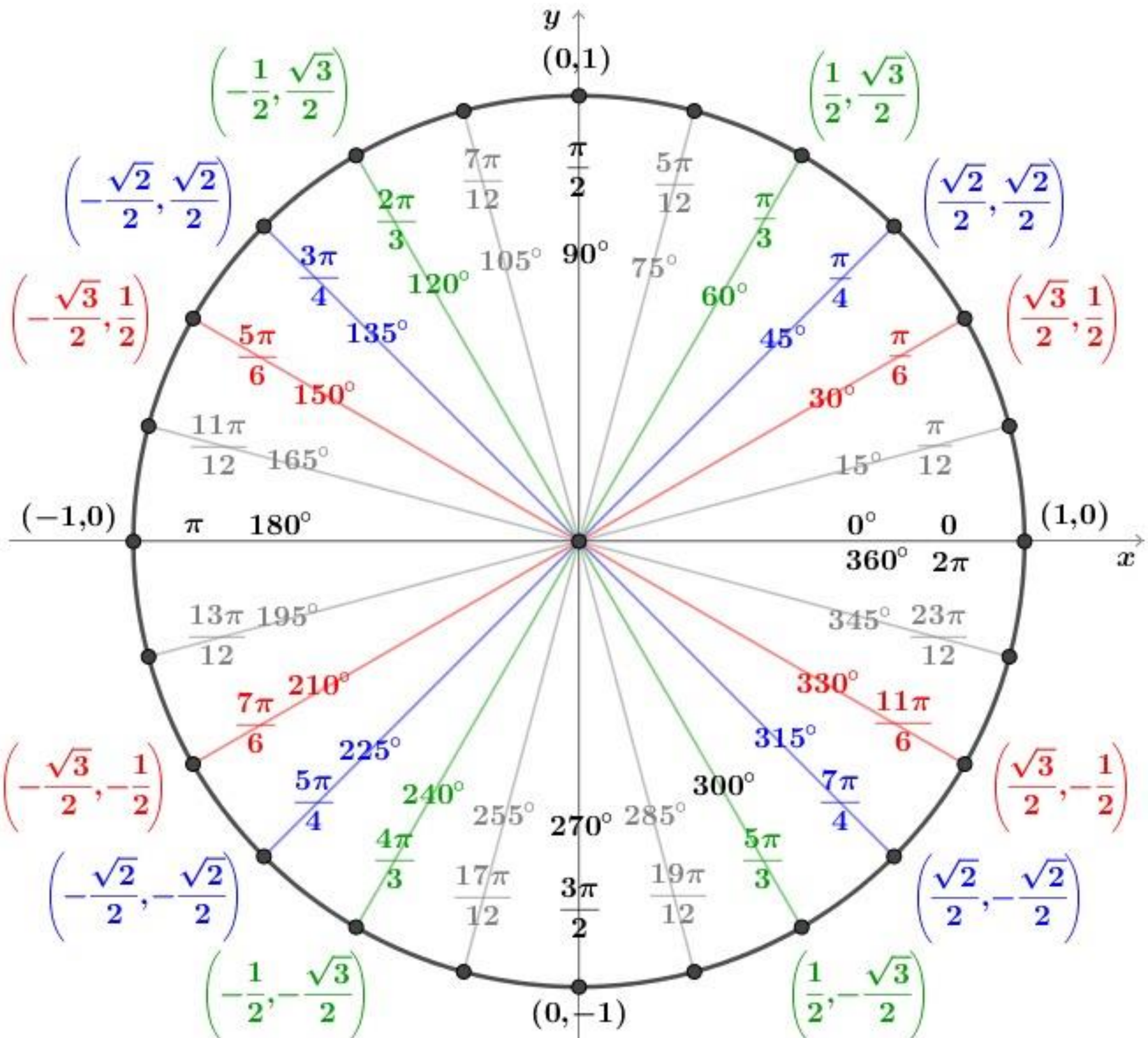
$$\boxed{b = 136{,}5 \text{ metros}}$$

Luego

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{b} \qquad \boxed{h = 117{,}4\, m}$$

$$h = b \cdot \text{sen } 60°$$

$$\boxed{h = \frac{50(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}}{2}}$$



y
x
$(0,1)$
$(-1,0)$
$(1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
0° 0
360° 2π
$\frac{\pi}{12}$ 15°
$\frac{\pi}{6}$ 30°
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{5\pi}{12}$ 75°
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{7\pi}{12}$ 105°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
$\frac{11\pi}{12}$ 165°
π 180°
$\frac{13\pi}{12}$ 195°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{17\pi}{12}$ 255°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{19\pi}{12}$ 285°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\frac{11\pi}{6}$ 330°
$\frac{23\pi}{12}$ 345°