Tarea Nº2 (Individual)

Cálculo III - FOGEC - FC - UV - 31 - 05 – 2022
Fecha para entregar: martes 7 de junio en horario de clases

1.- (15 Puntos)

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{5(x^2+y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ una función

a) Hallar las funciones derivadas parciales, $f_x\,(x,y)$, $f_y(x,y)$

b) Determine $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$

2.- (15 Puntos)

Use la definición de diferenciabilidad para demostrar que la función escalar $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x^2y$, es diferenciable en cualquier punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3.- (15 Puntos)

a) Determine si el sistema

$$\begin{cases} x+y+u+v+w=0 \\ x^2-y^2+u^2-2v^2+w^2+1=0 \\ x^3+y^3+u^4-3v^4+8w^4+2=0 \end{cases}$$

define implícitamente las funciones $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$ y $w=w(x,y)$ en el punto $p_0=(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)=(1,-1,1,-1,0)$.

b) evaluar $\dfrac{dv}{dy}\ en\ (1,-1)$

4.- (15 Puntos)

Sea $f(p,q) = p^n e^{pq^2}$. Halle el valor de la constante n , con $n \in \mathbb{N}$ de manera que satisfaga la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{q}{p}\frac{\partial f}{\partial q} = 3p^2 e^{pq^2}$$

$a)$

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{2}{5}(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\frac{2}{5}(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(h^3\cdot 0-h\cdot 0^3)}{5(h^2+0^2)}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(0^3\cdot h-0\cdot h^3)}{5(0^2+h^2)}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Por tanto, de lo anterior tenemos

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$b)$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h(h^4-4h^2 0^2-0^4)-0}{5(h^2+0^2)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h^5}{5h^4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{5}\frac{h^5}{h^5} = \frac{2}{5}$$

2.- $f(x,y) = 2x^2y$

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2b-2a^2b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(a^2+2ah+h^2)b-2a^2b}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2a^2b+4abh+2h^2b-2a^2b}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4abh+2h^2b}{h} = \lim_{h\to 0}(4ab+2hb) = 4ab$$

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2a^2b + 2a^2h - 2a^2b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2a^2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2a^2 = 2a^2$$

Ahora

$$f(a+h, b+k) = 2(a+h)^2(b+k)$$

$$= 2(a^2 + 2ah + h^2)(b+k)$$

$$= 2a^2b + 2a^2k + 4abh + 4ahk + 2bh^2 + 2h^2k$$

Por tanto,

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{E(a+h, b+k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Donde

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k =$$

$$\cancel{2a^2b} + \cancel{2a^2k} + \cancel{4abh} + 4ahk + 2bh^2 + 2h^2k - \cancel{2a^2b} - \cancel{4abh} - \cancel{2a^2k}$$

$$= 4ahk + 2bh^2 + 2h^2k$$

Luego

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{E(a+h, b+k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{4ahk + 2bh^2 + 2h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= 2 \lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{2ahk + bh^2 + h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= 2\left[2a \underbrace{\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{(1)} + b \underbrace{\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{(2)} + \underbrace{\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{(3)}\right]$$

$$= 2[0 + 0 + 0] = 0$$

Pues

En (1)

$$0 \leq \left|\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq \frac{|h||k|}{\sqrt{k^2}} = \frac{|h||k|}{|k|} = |h|$$

$$0$$

En (2)

$$0 \leq \left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq \frac{h^2}{\sqrt{h^2}} = \frac{|h|^2}{|h|} = |h|$$

$$0$$

En (3)

$$0 \leq \left|\frac{h^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq \frac{h^2|k|}{\sqrt{k^2}} = \frac{h^2|k|}{|k|} = h^2$$

$$0$$

3.- Consideremos

$$f(x, y, u, v, w) = x + y + u + v + w = 0$$

$$g(x, y, u, v, w) = x^2 - y^2 + u^2 - 2v^2 + w^2 + 1 = 0$$

$$h(x, y, u, v, w) = x^3 + y^3 + u^4 - 3v^4 + 8w^4 + 2 = 0$$

En el punto $p_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) = (1, -1, 1, -1, 0)$ se tiene

$$f(p_0) = 1 - 1 + 1 - 1 + 0 = 0$$

$$g(p_0) = (1)^2 - (-1)^2 + (1)^2 - 2(-1)^2 + 0^2 + 1$$

$$= 1 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$h(p_0) = (1)^3 + (-1)^3 + (1)^4 - 3(-1)^4 + 8(0)^4 + 2$$
$$= 1 - 1 + 1 - 3 + 0 + 2 = 0$$

Todas las derivadas parciales de f, g y h son continuas siempre. Se tiene, además

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}(p_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & -4v & 2w \\ 4u^3 & -12v^3 & 32w^2 \end{vmatrix}_{\substack{u=1 \\ v=-1 \\ w=0}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{vmatrix} \ (aplicando\ columna\ 3)$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 \neq 0$$

Por tanto, por teorema de Cauchy Dini se concluye que el sistema define implícitamente las funciones $u = u(x,y); v = v(x,y)$ y $w = w(x,y)$ en el punto $p_0 = (1,-1,1,-1,0)$.

$b)$ Ahora evaluaremos $\dfrac{dv}{dy}\ en\ (1,-1)$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,y,w)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}}$$

donde

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,y,w)}(p_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & -2y & 2w \\ 4u^3 & 3y^2 & 32w^2 \end{vmatrix}_{\substack{u=1 \\ y=-1 \\ w=0}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\frac{dv}{dy}(1,-1) = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$$

4.- Sea $f(p,q) = p^n e^{pq^2}$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial p} = np^{n-1}e^{pq^2} + p^n q^2 e^{pq^2} \cdots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2pqp^n e^{pq^2} \cdots (2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{q}{p}\frac{\partial f}{\partial q} = 3p^2 e^{pq^2}$$

$$np^{n-1}e^{pq^2} + p^n q^2 e^{pq^2} - \frac{1}{2}\frac{q}{p} 2pqp^n e^{pq^2} = 3p^2 e^{pq^2}$$

$$np^{n-1}e^{pq^2} + p^n q^2 e^{pq^2} - p^n q^2 e^{pq^2} = 3p^2 e^{pq^2}$$

$$np^{n-1}e^{pq^2} = 3p^2 e^{pq^2}$$

Entonces

$$np^{n-1} = 3p^2$$

$$np^{n-3} = 3$$

$$n = 3$$