Método de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones

Una buena pregunta para hacernos ahora es: ¿Cómo surgieron las matrices en la historia de las matemáticas?

Vamos a plantearnos ahora el problema de resolver un sistema 2×2 genérico, esto es, que los represente a todos.

$$\begin{cases} Ax + By = C & \times(-A') \\ A'x + B'y = C' & \times(+A) \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por reducción. Multipliquemos la primera ecuación por (-A'), la segunda por (+A), y sumemos. Nos queda:

$$(A'A - A'A)x + (AB' - A'B)y = (C'A - CA')$$

El primer paréntesis es cero, por tanto, despejando y:

$$y = \frac{C'A - CA'}{AB' - A'B}$$

Análogamente, podemos calcular x:

$$x = \frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}$$

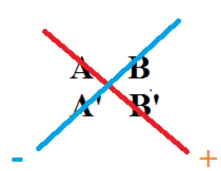
Matrices y determinantes

Recuerden que al sistema podíamos escribirlo de forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}$$

La **matriz característica** del sistema es $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$ y la **matríz ampliada** es $\left(\begin{array}{cc|c} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array}\right)$

Ahora veamos que los denominadores de "x" e "y" en la solución obtenida son $AB' - A'B$:



A esa expresión, que es un número asociado a la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$, lo llamaremos **determinante de la matriz** y lo escribiremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = AB' - A'B$$

Observen que si ese determinante es distinto de 0, la solución en “x” y en “y” es única. Es un sistema determinado y la matriz se llama **regular**. Si, en cambio, ese determinante fuera 0, la matriz se llama singular y ese caso podemos tener un **sistema indeterminado o incompatible.**

Ahora observen los numeradores:

El numerador de “x” es $CB' - C'B$

Lo podemos interpretar como un determinante, $\Delta_x = CB' - C'B = \begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}$

Es el determinante que se obtiene de reemplazar la columna de los términos independientes en la columna de los términos en “x” de la matriz original.

$$\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A'} & \mathbf{B'} & \mathbf{C'} \end{array}$$

Ahora será:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

Análogamente:

$$\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A'} & \mathbf{B'} & \mathbf{C'} \end{array}$$

$$\Delta_y = AC' - A'C = \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

Ejemplo y ejercicio:

Resolvamos nuestro sistema original por Cramer:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = 2$$

La solución es, como ya sabíamos, (1,2).

Discusión:

Nuevamente aparecen aquí los tres casos que discutimos antes.

Caso 1) Si el denominador Δ es distinto de cero, el sistema es **determinado.**

Caso 2) Si $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, el sistema es **indeterminado**, pero el método no nos permite hallar su grado de libertad.

Caso 3) Si $\Delta = 0$ y alguno de los otros determinantes es distinto de cero, el sistema es **incompatible.**

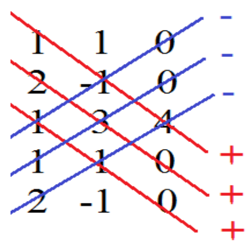
El método permite resolver sistemas cuadrados, es decir tiene que tengan tantas ecuaciones como incógnitas. Pero debemos aprender más sobre matrices y determinantes para hacerlo.

Regla de Sarrus

Esta regla permite calcular determinantes de 3er. orden. Por ejemplo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Se copian las dos primeras filas debajo del determinante,



Se multiplican los elementos de la diagonal principal (roja) y sus paralelas y se les asigna signo positivo. Se multiplican los elementos de la diagonal secundaria (azul) y sus paralelas) y se les asigna signo negativo. Luego se suman esos seis valores.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = -12$$

Ejemplo:

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según k y hallar las soluciones para $k = 2$, $k = 4$ y $k = -4$.

$$\begin{cases} 2x - ky = 5 \\ -kx + 8y = 10 \end{cases}$$

Hallamos los determinantes,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ -k & 8 \end{vmatrix} = -k^2 + 16$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -k \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 10k$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -k & 10 \end{vmatrix} = 20 + 5k$$

La solución será: $\qquad x = \frac{10(4+k)}{(4+k)(4-k)} \qquad y = \frac{5(4+k)}{(4+k)(4-k)}$

Si $k \neq 4$ y $k \neq -4$, el sistema **es determinado**. La solución única es:

$$x = \frac{10}{4-k} \qquad\qquad y = \frac{5}{4-k}$$

Si $k = -4$, el sistema **es indeterminado**. Si se toma "y" como grado de libertad,

$$y = \alpha$$

$$x = \frac{5 - 4\alpha}{2}$$

La solución es $S = \left\{\left(\frac{5+4\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$

Si $k = +4$, el sistema **es incompatible**.

Si $k = +2$, la solución es $\left(5, +\frac{5}{2}\right)$

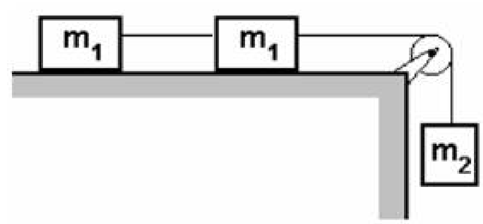
Ejercicios:

1. Discute según k:

$$\begin{cases} (k+1)x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y + z = k \\ x + y + (k+1)z = k^2 \end{cases}$$

Respuesta: **Para k = 0 y k = -3, el sistema es incompatible.**
En otro caso, el sistema es determinado.

2. Utilizando el método de Cramer, hallar la aceleración del sistema y las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas. ¿Puede el sistema NO ser determinado?



Dato: las superficies no tienen rozamiento.

3. Dados los sistemas:

(a) $\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - y + 4z = 5 \\ -3x \quad - 5z = -11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ 2x - 2y + 4z = 12 \\ -3x + 3y - 6z = -18 \end{cases}$

hallen las soluciones generales de cada uno de ellos.