Ondas y óptica: Tarea 3

Mauro Jélvez Jélvez

30/05/2024

1)

Consideremos $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = k_n c$. Podemos expresar armónicos del campo eléctrico propagándose por una cavidad de la largo L en dirección al eje z, de la forma:

$$\vec{E}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{0n} \sin(k_n z) \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right]$$

Para nuestro caso:

$$A_n = \cos\phi_n$$

$$B_n = -\sin\phi_n$$

Donde ϕ es el ángulo de fase

$$\vec{E}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{0n} \sin(k_n z) \left[\cos\phi_n \cos(\omega_n t) - \sin\phi_n \sin(\omega_n t)\right]$$

$$\vec{E}_n(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{0n} \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Para un armónico n tendremos:

$$\vec{E}_n(z,t) = \vec{E}_{0n} \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Al estarse desplazando a través de z, sus componentes vectoriales serán en el eje x y en el eje y, pero si consideramos una polarización lineal solamente en el eje x y despreciamos e ángulo de fase.

$$\vec{E}_n(z,t) = E_{0n} \sin(k_n z) \cos(\omega_n t)\hat{i}$$

Para encontrar el campo de inducción magnética podemos usar la ley de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{E}_n}{\partial z} = -E_{0n} k_n \cos(k_n z) \cos(\omega t)\hat{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{B}_n = \hat{j} E_{0n} k_n \cos(k_n z) \int \cos(\omega t) dt$$

Finalmente tendremos;

$$\vec{B}_n(z,t) = \frac{k_n}{\omega_n} E_{0n} \cos(k_n z) \sin(\omega t)\hat{j} = \frac{E_{0n}}{c} \cos(k_n z) \sin(\omega t)\hat{j}$$

Para poder encontrar el vector de Poynting usaremos la relación: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{S}_n = \frac{\vec{E}_n \times \vec{B}_n}{\mu_0} = \frac{E_n B_n \hat{k}}{\mu_0} = \frac{E_{0n}^2}{c\mu_0} \sin(k_n z) \cos(\omega_n t) \cos(k_n z) \sin(\omega_n t)$$

Si usamos la identidad trigonométrica $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\vec{S}_n = \frac{E_{0n}^2}{c\mu_0}\sin(2k_n z)sin(2\omega_n t)$$

Ahora para encontrar la densidad de energía electromagnética:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E_{0n}^2 \sin^2(k_n z)\cos^2(\omega_n t) + \frac{E_{0n}^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(k_n z)\sin^2(\omega_n t)\right)$$

Por lo que tendremos la densidad de energía electromagnpetica:

$$u_n(z,t) = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2}{2}\left(\sin^2(k_n z)\cos^2(\omega_n t) + \cos^2(k_n z)\sin^2(\omega_n t)\right)$$

Para encontrar la energía electromagnética U_n debemos integrar la variable z en la cavidad de largo L

$$U_n = \int_0^L u_n dz = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2}{2}\left[cos^2(\omega_n t)\int_0^L \sin^2(k_n z)dz + \sin^2(\omega_n t)\int_0^L \cos^2(k_n z)dz\right]$$

$$U_n = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2}{2}\left[cos^2(\omega_n t)\frac{L}{2} + \sin^2(\omega_n t)\frac{L}{2}\right] = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2 L}{4}\left[cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)\right]$$

Finalmente obtenemos:

$$U_n = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2 L}{4}$$

Esto muestra que la energía electromagnética en la cavidad está relacionada con las amplitudes permitidas del campo eléctrico E_{0n}. Los valores permitidos de las amplitudes del campo eléctrico son determinados por las condiciones de frontera y las propiedades resonantes de la cavidad. Aunque la frecuencia no aparece explícitamente en la expresión final de la energía, los modos resonantes (y por ende las frecuencias permitidas) determinan los valores posibles de E_{0n}. En resumen, la energía electromagnética está influenciada directamente por las amplitudes del campo eléctrico, las cuales están dictadas por las frecuencias resonantes permitidas de la cavidad

2)

Si tenemos en cuenta $\rho_f = 0$ y conductor ohmico sin polarización, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, usaremos las siguientes ecuaciones:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ahora para poder encontrar la ecuación de onda:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Usando: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\left(\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right) \Rightarrow -\nabla^2\vec{E} = -\left(\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right) \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Como estamos considerando ondas unidimensionales: $\nabla^2 \vec{E} = \partial_x^2 \vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ahora propondremos una solución de la forma: $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$, calculando sus derivadas:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Reemplazando:

$$-k^2 \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} = -\mu\sigma i\omega \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} - \mu\epsilon\omega^2 \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Reordenando obtenemos:

$$k^2 = \mu\epsilon_0\omega^2 + i\mu\sigma\omega = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + i\sigma\omega\mu$$

Como podemos ver k tiene una parte real y compleja, por lo que para poder calcular sus componentes, si sabemos que: $k = k_{\mathbb{R}} + ik_i \to k^2 = (k_{\mathbb{R}} + ik_i)^2$

$$(k_{\mathbb{R}} + ik_i)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + i\sigma\omega \ \to k_{\mathbb{R}}^2 - k_i^2 + 2ik_{\mathbb{R}}k_i = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + i\sigma\omega$$

Par que esto se cumpla, las partes reales e imaginarias de cada lado de la ecuación deben ser iguales, por lo que tendremos:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_{\mathbb{R}}^2 - k_i^2$$

$$\sigma\omega\mu = 2k_{\mathbb{R}}k_i$$

Reemplazando $k_i = \mu\sigma\omega/2k_{\mathbb{R}}$ en la primera relación:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_{\mathbb{R}}^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4k_{\mathbb{R}}^2}$$

Multiplicando por $k_{\mathbb{R}}^2$ y reordenando todo en un lado de la ecuación:

$$k_{\mathbb{R}}^4 - k_{\mathbb{R}}^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4} = 0$$

Tenemos que tiene soluciones de la forma:

$$k_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}}$$

De la cual al ser la componente real tomaremos la solución positiva:

$$k_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}}$$

Sacando el factor común $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$

$$k_{\mathbb{R}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\sigma c^2}{\omega}\right)^2}\right)}$$

La cual es la parte real de número angular de onda k, ahora para encontrar la parte imaginaria, basta con reemplazar esta expresión en la segunda relación que obtuvimos anteriormente $k_i = \mu_\sigma \omega / 2k_{\mathbb{R}}$

$$k_i = \frac{\mu\sigma\omega}{2}\frac{c}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu\sigma c^2}{\omega}\right)^2}\right)}}$$

Reordenando obtenemos:

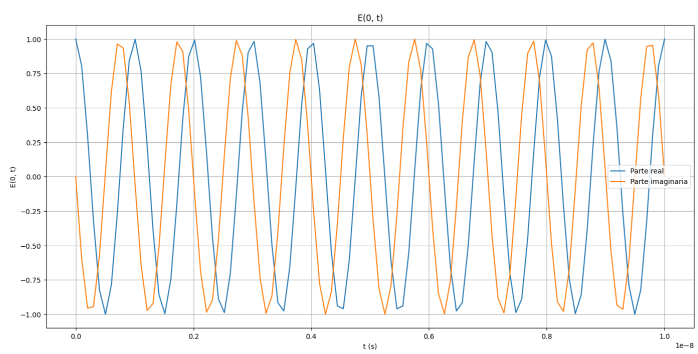
$$k_i = \frac{\mu\sigma c}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu\sigma c^2}{\omega}\right)^2}\right)}}$$

Y como sabemos, el campo eléctrico tiene la siguiente forma:

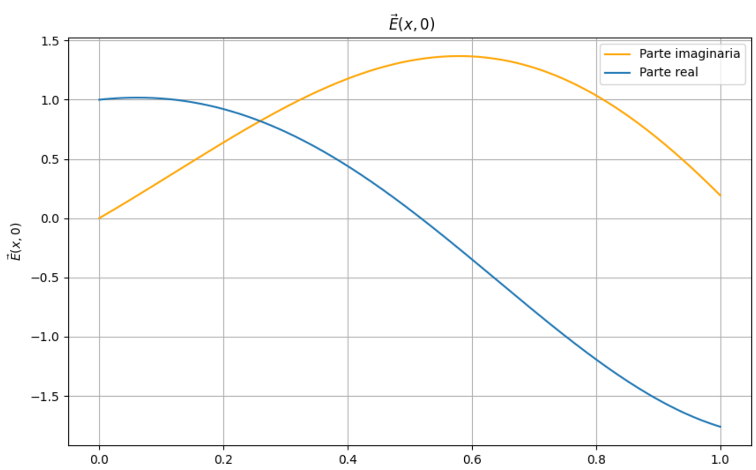
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \Rightarrow \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(k_{\mathbb{R}}x-\omega t)} e^{-k_i x}$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{\mu\sigma c x}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu\sigma c^2}{\omega}\right)^2}\right)}}\right) \exp\left(\frac{i\omega x}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu\sigma c^2}{\omega}\right)^2}\right)} - i\omega t\right)$$

Para graficar su magnitud, veremos que sucede en $x = 0$



Y ahora en $t = 0$



3)

Para la ecuación de movimiento de un electrón ligado a un núcleo por una fuerza de desplazamiento en presencia de un campo eléctrico oscilante:

$$m\ddot{x} = eE - kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{e}{m}E$$

Si tenemos:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$E = E_0\cos(\omega t)$$

Reemplazando:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t)$$

Si proponemos solución de la forma:

$$x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Calculando sus derivadas:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \\ \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

Reemplazndo:

$$-A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) + \omega_0^2 A\sin(\omega t) + \omega_0^2 B\cos(\omega t) = \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t)$$

Comparando los coeficiente de las funciones trigonométricas, podemos notar que $A \equiv 0$, quedándonos:

$$-B\omega^2 + \omega_0^2 B = \frac{e}{m}E_0 \rightarrow B(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{e}{m}E_0$$

Quedándonos:

$$B = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Por lo que finalmente tendremos su ecuación de posición de la forma:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

Ahora, si agregamos una fuerza de amortiguación:

$$m\ddot{x} = eE_0\cos(\omega t) - kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{eE_0}{m}\cos(\omega t) - \frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x}$$

Aquí definiremos:$\gamma = b/m$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos(\omega t)$$

Como t es muy grande podemos despreciar la solución homogénea, por lo tanto propondremos una solución particular de la forma: $x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, como ya calculamos sus derivadas anteriormente podemos reemplazarlas en la ecuación:

$$-A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) + \gamma(A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)) + \omega_0^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = \frac{eE_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t)[\omega_0^2 A - \gamma B\omega - A\omega^2] + \cos(\omega t)[\omega_0^2 B + \gamma A\omega - B\omega^2] = \frac{eE_0}{m}\cos(\omega t)$$

Comparando términos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\omega_0^2 A - \gamma B\omega - A\omega^2 = \frac{eE_0}{m} \Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma B\omega = \frac{eE_0}{m}$$

$$\omega_0^2 B + \gamma A\omega - B\omega^2 = 0 \Rightarrow B(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma A\omega = 0$$

Si armamos un sistema de ecuaciones más simplificado, podemos hacer unas sustituciones de la forma: $A = x$, $B = y$, $a = \omega_0^2 - \omega^2$, $b = \gamma\omega$, $c = \frac{eE_0}{m}$, quedándonos de la siguiente forma:

$$ax - by = c; ay + bx = 0$$

Para el cual encontramos las siguientes soluciones:

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}; y = -\frac{bc}{a^2 + b^2};$$

De las cuales reemplazando los valores obtenemos que:

$$A = \frac{eE_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}$$

$$B = -\frac{\gamma\omega eE_0}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}$$

Por lo que reemplazando en la solución particular:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = \left(\frac{eE_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}\right)\sin(\omega t) + \left(-\frac{\gamma\omega eE_0}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}\right)\cos(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{eE_0}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - \gamma\omega\cos(\omega t)]$$

Si definimos el ángulo de fase φ como:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega}\right)$$

De aquí podemos sacar:

$$\sin(\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Si tenemos que nuestra función para la posición es:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m((\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - \gamma\omega\cos(\omega t)]$$

Hagamos un ajuste en el denominador en la parte que es la magnitud de el ángulo de fase, si tenemos que:

$$\frac{1}{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\frac{1}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Haciendo esta sustitución tenemos:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\sin(\omega t) - \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\cos(\omega t)\right)$$

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}(\sin(\varphi)\sin(\omega t) - \cos(\varphi)\cos(\omega t)) = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Por lo que podemos describir el desplazamiento del electrón a través del tiempo como:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Teniendo el desplazamiento podemos calcular la polarización sabiendo la densidad de electrones:

$$P = Np = Nex(t)$$

Reemplazando obtenemos que la polarización es:

$$P(t) = \frac{Ne^2E_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Ahora, si sabemos que $P = \epsilon_0\chi_e E \rightarrow \chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E}$

$$\chi_e = \frac{\frac{Ne^2E_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t + \varphi)}{\epsilon_0 E_0 \cos(\omega t)}$$

Si despreciamos el ángulo de fase obtenemos:

$$\chi_e = \frac{e^2N}{\epsilon_0 m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Si sabemos que: $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ Tendremos que:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{e^2N}{\epsilon_0 m\sqrt{(\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\right)$$

4)

Para este caso tendremos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t}$$

Proponemos solución de la forma: $x_p(t) = Ae^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ai\omega e^{i\omega t} \\ \ddot{x} = -A\omega^2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

Reemplazando obtenemos:

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} + \gamma Ai\omega e^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma i\omega) = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t}$$

Por lo que tendremos el coeficiente:

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Reemplazando en la solución tendremos:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}e^{i\omega t}$$

Y para la polarización tendremos:

$$P(t) = Nex(t) = \frac{Ne^2E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}e^{i\omega t}$$

Ahora para poder encontrar χ_e

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{\frac{Ne^2 E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}e^{i\omega t}}{\epsilon_0 E_0 e^{i\omega t}}$$

Quedándonos:

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}$$

Y la permitividad:

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}\right)$$

Si sabemos que el índice de refracción de refracción de un medio se relaciona con la permitividad en el material y en el vacío de la forma:

$$n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

De donde al final tendremos la refracción de la forma:

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}}$$

Como podemos ver el índice de refracción tiene una parte real y compleja: $n = n_R - in_C$, ahora debemos buscar la forma de separar la parte real de la imaginaria, definimos la constante α para simplicidad:

$$\alpha = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

Tendremos:

$$n = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}}$$

Racionalizando i:

$$n = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}\left(\frac{(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)}\right)} = \sqrt{1 + \frac{\alpha(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}$$

Ahora podemos separar la parte real de la imaginaria:

$$n = \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\right) - i\left(\frac{\alpha\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\right)}$$

Si tenemos $\epsilon << \epsilon_0$

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} - i\frac{\alpha\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\right)}$$

Aplicando teorema binomial:

$$n \approx 1 + \frac{\alpha(\omega_0^2-\omega^2)}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} - i\frac{\alpha\gamma\omega}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} + ...$$

Ahora si encontramos una forma de poder expresar las componentes del índice de refracción de la forma:

$$n = n_R - in_C$$

Donde:

$$n_R \approx 1 + \frac{\alpha(\omega_0^2-\omega^2)}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

$$n_C \approx \frac{\alpha\gamma\omega}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

Reemplazando α

$$n_R \approx 1 + \frac{Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$n_C \approx \frac{Ne^2\gamma\omega}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Podemos notar que cuando $\omega \to \omega_0$ osea que cuando la frecuencia de la luz incidente coincide con la frecuencia de resonancia del material, se produce una absorción máxima de la energía de la onda electromagnética en esa frecuencia. Esto ocurre porque las partículas en el material (como los electrones) pueden oscilar con mayor amplitud cuando la frecuencia de la luz coincide con sus frecuencias naturales de vibración.

La absorción de la onda incidente implica que el material disipa una gran cantidad de energía, lo que se traduce en un valor alto del coeficiente de extinción n_C.A frecuencias de resonancia, el material absorbe más luz y, por lo tanto, la cantidad de luz transmitida o reflejada disminuye.

El coeficiente de extinción, relacionado con la absorción de energía, define qué longitudes de onda son absorbidas por el material. Cuando un material tiene una frecuencia de resonancia en el espectro visible, absorbe fuertemente esa longitud de onda específica, afectando el color percibido del material.

5)

Si sabemos que:

$$\psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t)$$

$$P_\epsilon = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Calculando la derivada de ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{A}{r}\left(k\sin(kr - \omega t) + \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\right) = \frac{-Ak\sin(kr - \omega t)}{r} - \frac{A\cos(kr - \omega t)}{r^2}$$

Reemplazando en la presión obtenemos:

$$P_\epsilon = \frac{A\rho_0 c^2}{r}\left(k\sin(kr - \omega t) + \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\right)$$

Tenemos que para $r \to \infty$ el término del coseno decae como $1/r^2$ de manera más rápida que el del seno que decae como $1/r$, por lo que será más dominante a esas distancias.

$$P_\epsilon \approx \frac{A\rho_0 c^2 k}{r}\sin(kr - \omega t)$$

6)

Para ondas en 3D tenemos:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Para ondas armónicas que se propagan en una dirección (z) no dependen del tiempo por lo que usamos la solución espacial de la onda:

$$\nabla^2\psi = -k^2\psi \to \nabla^2\psi + k^2 = 0$$

Con:

$$\psi(x,y,z) = \psi_0(x,y,z)e^{-ikz}$$

Calculando sus derivadas tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}e^{-ikz} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}e^{-ikz}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}e^{-ikz} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}e^{-ikz}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z}e^{-ikz} - ik\psi_0 e^{-ikz}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}e^{-ikz} - ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z}e^{-ikz} - k^2\psi_0 e^{-ikz} - ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z}e^{-ikz} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}e^{-ikz} - 2ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z}e^{-ikz} - k^2\psi_0 e^{-ikz}$$

Reemplazando en la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+k^2\psi_0 e^{-ikz} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}e^{-ikz} - 2ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z}e^{-ikz} - k^2\psi_0 e^{-ikz} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}e^{-ikz} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}e^{-ikz} + k^2\psi_0 e^{-ikz} = 0$$

Simplificando términos obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0$$

Aplicando la aproximacación paraxial asumimos que ψ_0 varía lentamente con respecto a z:

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}\right| < \left|k\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right|$$

Por lo que podemos despreciar el término ∂_z^2 y tendremos:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0$$

La aproximación paraxial es válida cuando las ondas se propagan con pequeños ángulos de divergencia respecto al eje principal de propagación.