**SOLUCION PRUEBA III**
15 de julio de 2025
Física Contemporánea
LFIS-313

**Instrucciones:** Dispone de 90 minutos para contestar la prueba. No puede consultar apuntes, cuadernos, compañeros, ni telefonos moviles. Cada pregunta tiene indicado su puntaje.

# Problema 1 (20 pts)

*Modelo atómico de Bohr.* El modelo de Bohr postula que el electrón en un átomo de hidrógeno se mueve en órbitas circulares cuantizadas alrededor del núcleo, y que solo se permiten aquellas órbitas para las cuales el momento angular es un múltiplo entero de $\hbar$. A partir de este modelo:

(a) Derive una expresión para el radio $r_n$ de la órbita permitida número $n$. (5)

(b) Derive una expresión para la energía total $E_n$ del electrón en la órbita $n$. (5)

(c) Calcule el valor del radio y la energía para $n = 1$ (órbita fundamental). (5)

(d) Calcule la longitud de onda del fotón emitido cuando un electrón decae desde el estado $n = 3$ al estado $n = 2$. ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta radiación? (5)

**Datos:** Masa del electrón: $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg; Carga del electrón: $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C; Permisividad del vacío: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$; Constante de Planck reducida: $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J · s; Velocidad de la luz: $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

## (a) Expresión para el radio $r_n$

En el modelo de Bohr, el electrón de masa $m_e$ y carga $-e$ se mueve en una órbita circular de radio $r_n$ alrededor del núcleo (protón), bajo la fuerza de Coulomb:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}$$

Y la cuantización del momento angular:

$$m_e v_n r_n = n\hbar \Rightarrow v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$$

Sustituyendo $v_n$ en la ecuación de la fuerza:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e}{r_n}\left(\frac{n\hbar}{m_e r_n}\right)^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m_e r_n^3}$$

Resolviendo para $r_n$:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2 \equiv a_0 n^2$$

donde $a_0$ es el radio de Bohr:

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

—

## (b) Expresión para la energía total $E_n$

La energía total es la suma de la cinética y la potencial:

$$E_n = K + U = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

De la fuerza centrípeta se tiene:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n} \Rightarrow \frac{1}{2}m_e v_n^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$$

Entonces:

$$E_n = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$$

Sustituyendo $r_n$ desde (a):

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow E_n = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2}$$

—

## (c) Cálculo para $n = 1$

- Radio:

$$r_1 = a_0 = 5.29 \times 10^{-11}\,\text{m}$$

- Energía:

$$E_1 = -\frac{13.6}{1^2} = -13.6\,\text{eV}$$

—

## (d) Longitud de onda del fotón emitido: $n = 3 \to n = 2$

La energía del fotón emitido es:

$$\Delta E = E_3 - E_2 = -\frac{13.6}{9} + \frac{13.6}{4} = 13.6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 13.6 \cdot \frac{5}{36} \approx 1.89\,\text{eV}$$

Usamos la relación:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

Con:

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\,\text{J·s}, \quad c = 3.00 \times 10^8\,\text{m/s}, \quad \Delta E = 1.89\,\text{eV} = 3.03 \times 10^{-19}\,\text{J}$$

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34} \cdot 3.00 \times 10^8}{3.03 \times 10^{-19}} \approx 6.56 \times 10^{-7}\,\text{m} = 656\,\text{nm}$$

**Región del espectro:** luz visible, color rojo.

## Problema 2 (20 ptos)

*Pozo infinito y valor esperado.* Considere una partícula de masa $m$ confinada en un pozo de potencial infinito unidimensional de ancho $L$, definido por:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Escriba la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para la partícula y obtenga la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. (6)

(b) Resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con las condiciones de contorno apropiadas y obtenga las funciones de onda normalizadas $\psi_n(x)$ y los niveles de energía permitidos $E_n$. (6)

(c) Calcule el valor esperado $\langle x \rangle$ para el estado fundamental ($n = 1$). Justifique físicamente el resultado. (8)

# (a) Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x,t)$$

Para el pozo infinito unidimensional de ancho $L$, el potencial es:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de onda debe ser cero fuera del pozo (ya que la partícula no puede estar ahí), y también en los bordes:

$$\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$$

Buscamos soluciones separables de la forma $\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-iEt/\hbar}$. Al sustituir en la ecuación se obtiene la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

o bien:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0, \quad \text{con } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

—

# (b) Solución con condiciones de frontera

La solución general a esta ecuación diferencial es:

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

Aplicamos las condiciones de frontera:

- $\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- $\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$

Entonces:

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Las funciones de onda normalizadas son:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Los niveles de energía asociados son:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

—

## (c) Valor esperado $\langle x \rangle$ para $n = 1$

Para el estado fundamental $n = 1$:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

El valor esperado de la posición es:

$$\langle x \rangle = \int_0^L x|\psi_1(x)|^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Usamos la identidad $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$:

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2}\right) dx = \frac{1}{L}\int_0^L x\, dx - \frac{1}{L}\int_0^L x \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

El primer término es:

$$\frac{1}{L}\int_0^L x\, dx = \frac{1}{L}\cdot\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

El segundo término es cero (puede demostrarse por integración por partes), por lo tanto:

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2}$$

**Interpretación:** La función de onda para $n = 1$ es simétrica respecto al centro del pozo. Por tanto, el valor esperado de la posición está en el centro del intervalo $[0, L]$. Esto concuerda con la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

# Problema 3 (20 ptos).

*Oscilador Armónico.* Considere un oscilador armónico unidimensional de frecuencia angular $\omega$ y masa $m$, cuyo Hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

donde $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, que satisfacen $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

(a) Demuestre que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad (6)$$

donde $|n\rangle$ es un estado de número.

(b) Calcule la energía del estado $|n\rangle$. (6)

(c) Calcule el valor esperado $\langle x^2 \rangle$ en el estado $|n\rangle$, usando la expresión: (8)

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

## (a) Acción de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$

Los operadores de aniquilación y creación satisfacen:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Sabemos que $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ es el operador número, y que:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

Usamos que:

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a})|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}^2|n\rangle$$

Pero también:

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{N}-1)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

Esto muestra que $\hat{a}|n\rangle$ es proporcional a $|n-1\rangle$. Similarmente, $\hat{a}^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$. Definimos las constantes por normalización:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

## (b) Energía del estado $|n\rangle$

El Hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

Aplicando sobre $|n\rangle$:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

Entonces, la energía del estado $|n\rangle$ es:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

## (c) Valor esperado $\langle x\rangle$ y $\langle x^2\rangle$

Se tiene:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

### Valor esperado $\langle x\rangle$:

$$\langle x\rangle = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|\hat{a} + \hat{a}^\dagger|n\rangle$$

Como:

$$\langle n|\hat{a}|n\rangle = 0, \quad \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = 0$$

entonces:

$$\langle x\rangle = 0$$

### Valor esperado $\langle x^2\rangle$:

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

Usamos:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 = \hat{N} + 1$$

Entonces:

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|n\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right)$$

Los términos $\langle n|\hat{a}^2|n\rangle$ y $\langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|n\rangle$ se anulan (por ortogonalidad), y:

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{N} + 1 + \hat{N}|n\rangle = 2n + 1$$

Por lo tanto:

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$