Pauta corrección

Universidad de Valparaíso CHILE

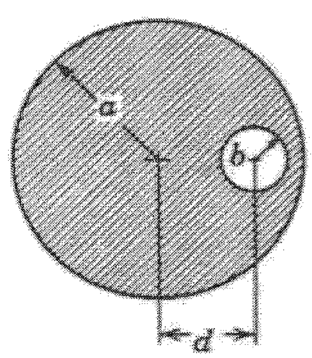
Prueba Módulo II
Electromagnetismo intermedio
Licenciatura en Física - 2023[1]

Nombre completo : ....

Nota final :

Problema I : Ley de Ampere (105 pts.)

En la figura se muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico "muy largo" de radio a que contiene una cavidad cilíndrica de radio b. Los ejes de los dos cilindros son paralelos y están separados a una distancia d. Si una corriente I_0 (que sale perpendicularmente de la página) se distribuye uniformemente sobre el área sombreada de la figura:



1. (10%) Determine la densidad de corriente $\vec{J}$.
2. (40%) Determine el campo $\vec{B}(\vec{r})$ en **cualquier** punto al interior de la cavidad.
3. (15%) Evalúe $\nabla \times \vec{B}(\vec{r})$ al interior de la cavidad.
4. (30%) Determine el campo $\vec{B}(\vec{r})$ en **cualquier** punto del interior del cilindro y fuera de la cavidad.
5. (10%) Del resultado obtenido en el item (4) evalúe $\nabla \times \vec{B}(\vec{r})$.

[1] Hora de INICIO: 14:30 hrs.
Hora de TÉRMINO: 16:30 hrs.

Problema II : Interacción entre dipolos puntuales (95 pts.)

Para un dipolo puntual $\vec{m}$ ubicado en $\vec{r}_0$ se cumple que:

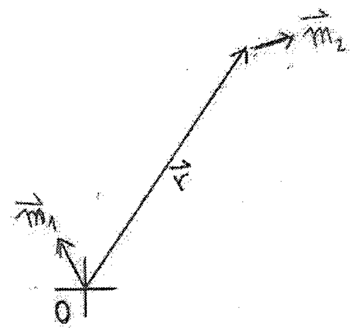
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\right)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right]$$

1. Suponga que el dipolo de momento dipolar magnético $\vec{m}$ se encuentra ubicado en el origen.

   25 (a) ~~(15%)~~ Halle el valor para el caso $\vec{m} \parallel \vec{r}$, siendo $\vec{r}$ una posición arbitraria.

   15 (b) ~~(25%)~~ Explique porque el resultado anterior es consistente con el hecho que $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ (haga un análisis desde el punto de vista geométrico).

2. Sean los momentos dipolares magnéticos $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ ubicados en el origen y en la posición $\vec{r}$ respectivamente, tal como se muestra en el dibujo:



   (a) (40%) Determine la fuerza que realiza $\vec{m}_1$ sobre $\vec{m}_2$. Recuerde que $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$ y $U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{r})$

   (b) (15%) Para el caso $\vec{r} = (d, 0, 0)$ y $\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = (0, m, 0)$, ¿la fuerza es repulsiva o atractiva?.

   (c) (15%) Para el caso $\vec{r} = (d, 0, 0)$ y suponiendo que $|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = m$. Halle una configuración donde la fuerza es máxima y otra para cuando es mínima.

Problema III : Potencial vectorial magnético (80 pts.)

Sea $\vec{B}_0$ un campo uniforme, una opción para válida para describir este campo es a través del siguiente potencial vectorial magnético: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{B}_0\right)$. A partir de lo anterior, evalúe:

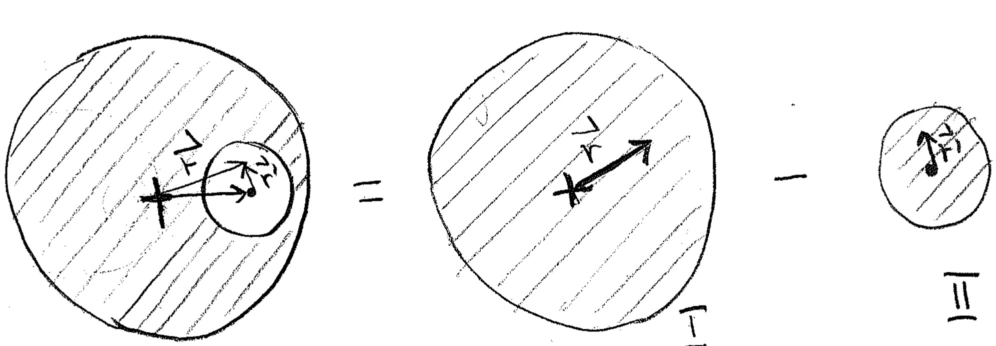
1. (15%) $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$
2. (25%) $\nabla \times \vec{A}(\vec{r})$
3. (15%) $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{r})\right)$
4. (25%) $\left|\vec{A}(\vec{r})\right|^2$

PROBL. I) Para corrientes rectas e infinitas la magnitud está dada por $B(r) = \frac{\mu_0 i_{enc}}{2\pi r}$ (la diferencia entre caso y caso es la corriente encerrada por la trayectoria encerrada.

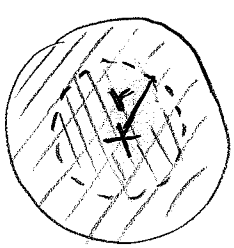
1) La magnitud de la densidad de corriente es:
10

$$J = \frac{I_0}{\pi(a^2-b^2)} \Rightarrow \vec{J} = \frac{I_0}{\pi(a^2-b^2)}\hat{k} \text{ (suponiendo } \hat{k} \perp \text{ a la página)}$$

2)
40



Por otro lado el campo $B(\vec{r})$ al interior de una corriente cilíndrica es y distribuida uniformemente es



$$B(r) = \frac{\mu_0 i_{enc}}{2\pi r}$$

con $i_{enc} = \int J\,dS = J\int dS = \pi r^2 J$

$\therefore \quad B(r) = \mu_0 \dfrac{\pi r^2 J}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 J r}{2}$; siendo J calculado en item (1)

Vectorialmente se cumple que:

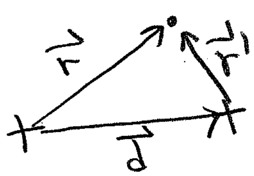
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{2}$$

$\therefore$ el campo en la cavidad está dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{I} - \vec{B}_{II} = \mu_0 \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{2} - \mu_0 \frac{\vec{J} \times \vec{r}\,'}{2}$$

de la cavidad.

$$= \frac{\mu_0 \vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{2}$$



$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{d}$ = posición relativa del centro de la cavidad respecto al centro del cilindro de corriente.

$$\Downarrow$$

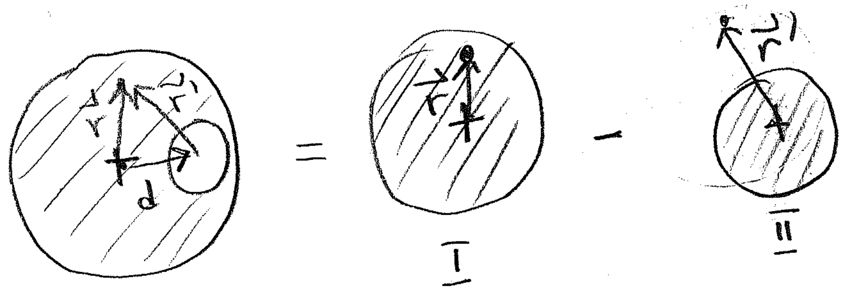
$\therefore \quad \boxed{\vec{B}_{cavidad} = \mu_0 \dfrac{\vec{J} \times \vec{d}}{2}} \Rightarrow$ Campo uniforme

3) $\vec{J}_{cavidad} = \dfrac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}_{cavidad} = 0$ (No hay corriente al interior de la cavidad)

1.5 [redacted]

4)

30



$$\vec{B}_{interior} = \vec{B}_{I} - \vec{B}_{II} = \mu_0 \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{2} - \frac{\mu_0 i'}{2\pi r'} \hat{B}_{II}$$

con i' = corriente total que atraviesa sección de término $\underline{II}$

$\underline{II}$; $\quad i' = \int J \, dS = J \pi a^2$

$$\therefore \quad \vec{B}_{II} = \frac{\mu_0 a^2}{2 r'^2} \vec{J} \times \vec{r}'$$

Finalmente : $\vec{B}_{interior} = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \left(\vec{r} - \frac{a^2}{r'^2} \vec{r}' \right)$

5) $\quad \nabla \times \vec{B}_{interior} = \mu_0 \vec{J}$ $\quad$ con $|\vec{J}|$ = calculado en item (1) y dirección $\perp$ a la página.

10

Probl. II)

1.a) $\vec{m} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{r} = mr \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{m} = m\hat{r}\\ \vec{r} = r\hat{r}\end{array}$

25

$$\therefore \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3mr^2}{r^5} - \frac{m}{r^3}\right]\hat{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\frac{m}{r^3}\hat{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r^3}\hat{r} \quad //$$

1.b) <u>Eliminada</u>

2.a) $\vec{F} = -\nabla U = -\nabla\left(-\vec{m}_1\cdot\vec{B}_2\right)$;

40

$$\text{con} \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}_2\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_2}{r^3}\right]$$

luego $$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_{1\ell}B_{2\ell}\right) = m_{1\ell}\frac{\partial}{\partial x_i}B_{2\ell}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B_{2\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(3\frac{(m_{2j}x_j)x_\ell}{r^5} - \frac{m_{2\ell}}{r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3 m_{2j}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j x_\ell r^{-5}) - m_{2\ell}\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-3})\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3 m_{2j}\left(\delta_{ij} x_\ell r^{-5} + \delta_{i\ell} x_j r^{-5} - \frac{5 x_j x_\ell}{r^6}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\right.$$

$$\left. - m_{2\ell}\frac{(-3)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\left(\frac{m_{2i}x_\ell}{r^5} + \frac{\delta_{i\ell} m_{2j} x_j}{r^5} - \frac{5 x_j x_\ell x_i m_{2j}}{r^7}\right.\right.$$

$$\left. + 3\frac{m_{2\ell} x_i}{r^5}\right]$$

luego

$$F_i = m_{1\ell}\frac{\partial B_{2\ell}}{\partial x_i} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\left((\vec{m}_1\cdot\vec{r})m_{2i} + m_{1i}(\vec{m}_2\cdot\vec{r}) - \frac{5(\vec{m}_1\cdot\vec{r})(\vec{m}_2\cdot\vec{r})x_i}{r^7}\right)\right.$$

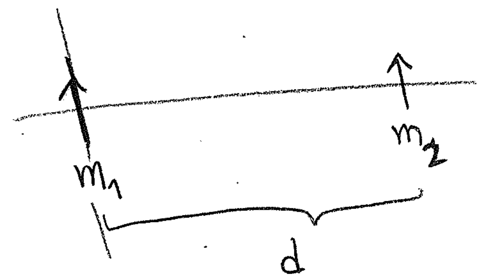
$$\left. + 3\frac{(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)x_i}{r^5}\right]$$

Finalmente:

$$\vec{F} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\left[\frac{(\vec{m}_1\cdot\vec{r})\vec{m}_2}{r^5} + \frac{(\vec{m}_2\cdot\vec{r})\vec{m}_1}{r^5} + \frac{(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)\vec{r}}{r^5} - \frac{5(\vec{m}_1\cdot\vec{r})(\vec{m}_2\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^7}\right]$$ //

2.b) $\vec{r} = d\hat{\imath}$

15 $\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = m\hat{\jmath}$



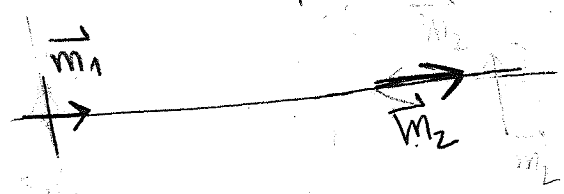
Luego $\vec{m}_1\cdot\vec{r} = 0$

$\vec{m}_2\cdot\vec{r} = 0$

$$\therefore\ \vec{F} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{d^5}d\hat{\imath} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{d^4}\hat{\imath}$$ //

2.c) Obs: Mínima (repulsión o atracción) está dada en conf. (2.b)

15



máxima atracción

$\vec{F} \parallel \vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2$

$$\vec{F} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m_1 m_2 d}{d^5} + \frac{m_1 m_2 d}{d^5} + \frac{m_1 m_2 d}{d^5} - \frac{5 m_1 m_2 d^3}{d^7}\right]\hat{\imath}$$

$$= -\frac{3\mu_0}{4\pi}\cdot 2\frac{m_1 m_2}{d^4}\hat{\imath}$$ //

si $\vec{m}_1$ opuesto a $\vec{m}_2$ $\Rightarrow$ máxima repulsión

Probl. $\underline{\overline{III}}$)

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{B}) \quad ; \quad \vec{B} \equiv \text{uniforme}$$

1) $$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}x_j B_k\right)$$

15 [redacted]

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial x_k}{\partial x_i}B_k \qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik}$$

$$= -1/2\,\underbrace{\epsilon_{ijk}\delta_{ik}}_{0}B_k = 0$$

2) $$(\nabla\times\vec{A})_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{r}\times\vec{B}_0)_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{klm}x_l B_m$$

25 [redacted]

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial x_l}{\partial x_j}B_m \qquad \frac{\partial x_l}{\partial x_j} = \delta_{lj}$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kjm}B_m$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\epsilon_{kjm}B_m = -\frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{jm} - \delta_{im}\cancel{\delta_{jj}}^{\,3})B_m$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta_{im} - 3\delta_{im})B_m = \delta_{im}B_m = B_i$$

$\therefore \quad (\nabla\times\vec{A})_i = B_i \implies \nabla\times\vec{A} = \vec{B}_0 \,\|$

3) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{B}_0 = \vec{0}$

15

$\uparrow$ Es uniforme

4) $|\vec{A}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{r} \times \vec{B}_0) \cdot (\vec{r} \times \vec{B}_0)$

25

$= \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} X_j B_k \epsilon_{ilm} X_l B_m$

$= \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} X_j B_k X_l B_m$

$= \frac{1}{4} (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) X_j B_k X_l B_m$

$= \frac{1}{4} \left(r^2 B_0^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B}_0)^2 \right) //$