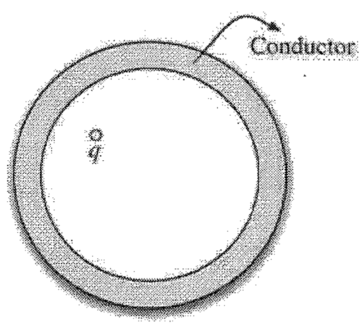
Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Recuperativa Módulo I
Electromagnetismo intermedio
Licenciatura en Física - 2023[1]

Nombre completo : ....

Problema I : Electrostática de conductores (130 puntos)

Una esfera metálica se encuentra inicialmente **descargada**. Ahora imagine que una carga positiva q es colocada en algún lugar (no necesariamente el centro) dentro de la esfera y sin tocar las paredes, ver la figura:



Para lo mostrado en la figura:

1. (20%) ¿Qué carga total se induce en la pared interior y exterior de la esfera?. Indicar cualitativamente (con un dibujo) como se distribuyen estas cargas inducidas en las respectivas superficies. Argumente en una frase explicativa el dibujo realizado.
2. (20%) Grafique las superficies equipotenciales al interior de la cavidad y fuera de la esfera. Argumente en una frase explicativa el dibujo realizado.
3. (20%) Grafique las líneas del campo eléctrico al interior de la cavidad y fuera de la esfera. Argumente en una frase explicativa el dibujo realizado.
4. (20%) Es aplicable la ley de Gauss para hallar $\left|\vec{E}\right|$ en alguna o todas las regiones. De ser así, entregue un resultado matemático.
5. (10%) Suponga que se mueve la carga q dentro de la cavidad. ¿Cambia la distribución de carga inducida en la superficie exterior de la esfera?.
6. (20%) Ahora se coloca una carga q en contacto con la superficie interior de la esfera. ¿Cómo queda la distribución de carga en la superficie interior y exterior?. Explique el proceso.
7. (20%) ¿Qué sucede con la distribución superficial externa si además (respecto al item anterior) ahora se acerca otra carga q' negativa cerca de la superficie exterior del conductor?. Haga un dibujo que explique el fenómeno.

[1] Hora de INICIO: 12:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 14:00 hrs.

Problema II : Polarización y momento dipolar (110 puntos)

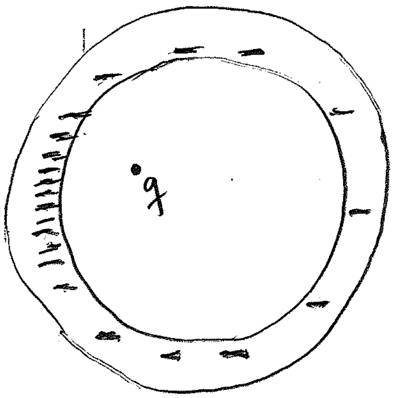
Considere un volumen cilíndrico vertical de radio R y altura h con polarización permanente (un *electreto*) y distribuída de acuerdo al siguiente modelo matemático $\vec{P}(\vec{r}) = z\left(\frac{P_o}{h}\right)\hat{k}$, Donde z es una longitud medida respecto de la base del cilindro y P_o una cantidad constante. Determine:

1. (20%) El momento dipolar eléctrico de la distribución de carga.
2. (20%) El valor de las densidades superficiales $\sigma_P(\vec{r})$ y el valor de la densidad de carga volumétrica $\rho_P(\vec{r})$.
3. (15%) El valor de $\vec{P}(\vec{r})$ fuera del cilindro.
4. (20%) Escriba como densidad volumétrica de la forma $\rho(\vec{r}\,') = A \cdot deltas \cdot heavisides$ (según corresponda) las densidades $\sigma_P(\vec{r})$ y $\rho_P(\vec{r}\,')$ de carga de polarización . La constante A en cada caso no es necesario calcularla, la podemos suponer conocida.
5. (35%) Utilizando el resultado del item anterior, escriba la expresión integral simplificada (sin deltas ni heavisides) que permite hallar el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio fuera del cilindro. Recuerde que:
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

PROBL. I)

1) Carga inducida pared interna = $-q$
Carga 〃 〃 externa = $+q$

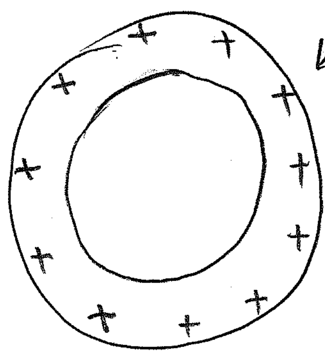
$\Downarrow$



distribución para superficie interna

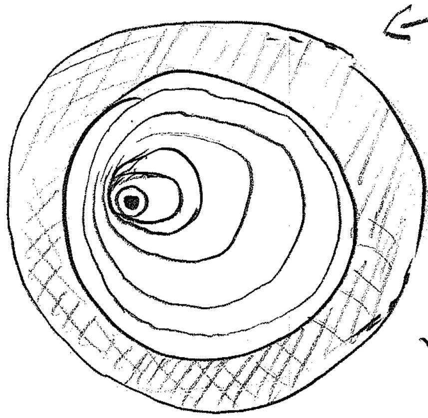
Distribución asimétrica

superficie externa



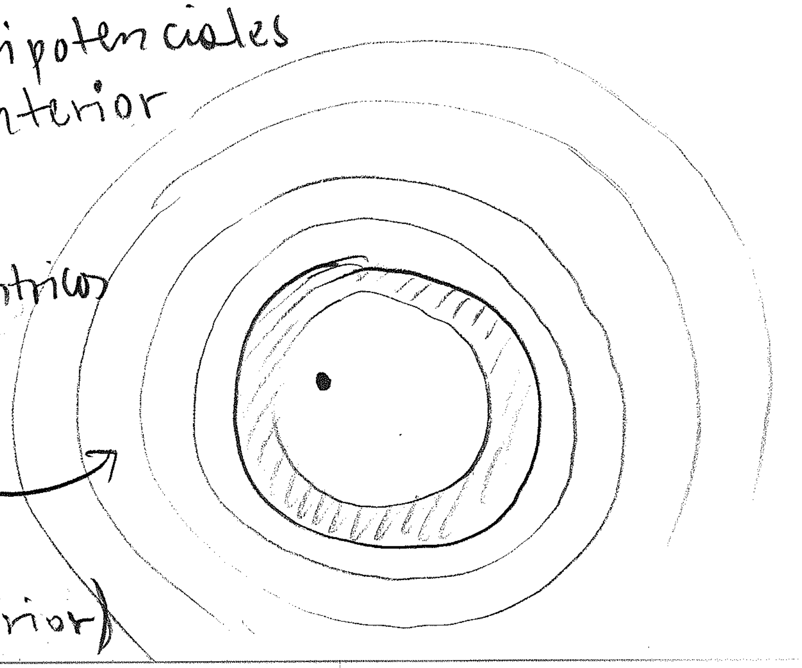
Distribución uniforme

2)

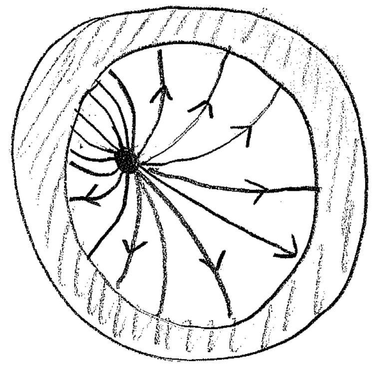


Equipotenciales al interior

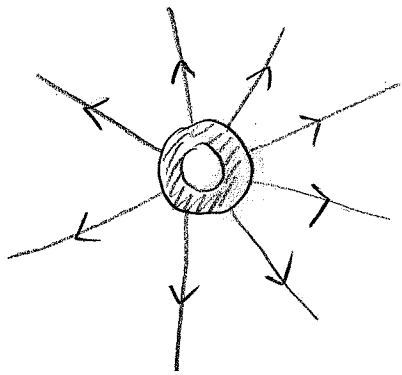
Esferas, no concéntricas



Esferas equipotenciales concéntricas (Exterior)

3) 

$\vec{E}$ interior



$\vec{E}$ exterior (De la superficie externa hacia afuera es $\vec{E}$ de carga puntual)

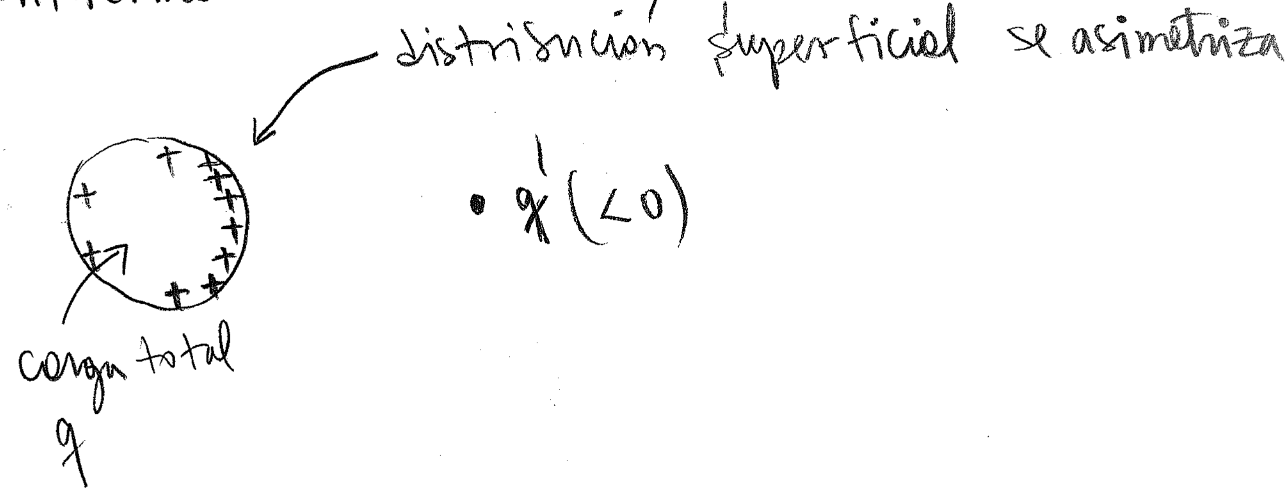
4) Al interior no es aplicable la ley de Gauss para determinar $|\vec{E}|$, no existe simetría radial en la distribución de las líneas de campo.

Al exterior, el campo corresponde al de una carga puntual, debido a que carga inducida externa está simétricamente distribuida $\Rightarrow \vec{E}$ es radial. Por lo anterior, aquí es aplicable la ley de Gauss.

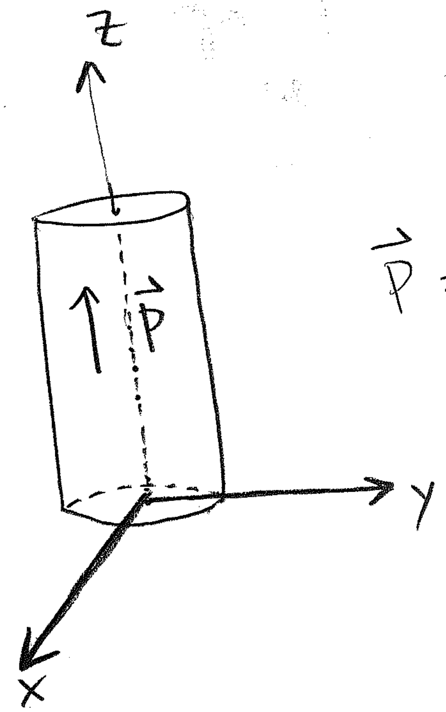
5) Cambia la interna, la externa permanece invariable.

6) Al colocarse la carga q en contacto con la superficie interior se anula con la carga inducida $(-q)$ de la superficie interior.
Solo queda la carga $+q$ de la superficie, la interior desaparece. La carga exterior sigue uniformemente distribuida.

7)



PROBL. II)



$$\vec{P} = z\left(\frac{P_0}{h}\right)\hat{k}$$

1) $\vec{P} = \dfrac{d\vec{m}}{dV} \implies \vec{m} = \int \vec{P}\, dV$

$$= \frac{P_0}{h}\hat{k}\int z\, dV$$

$$= \frac{P_0}{h}\hat{k}\int_{z=0}^{h}\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} z\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{P_0}{h}\hat{k}\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}h^2$$

$$= \frac{\pi P_0 R^2 h}{2} \,//$$

2) Para el manto $\sigma_{P(\text{manto})} = \hat{n}\cdot\vec{P} = 0 \,//\; (\hat{n}\perp\vec{P})$

$\sigma_{P(\text{tapa } z=0)} = -\hat{k}\cdot\vec{P} = 0 \,//\; (\hat{n} = -\hat{k}$ y $\vec{P} = 0$ en $z=0)$

$$\sigma_p(\text{tapa } z=h) = \hat{n}\cdot\vec{P} = \hat{k}\cdot\vec{P} = P_0 \;//$$

y

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_0}{h} \;//$$

3) $$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} z\frac{P_0}{h}\hat{k} & \text{, al interior del cilindro} \\ 0 & \text{; al exterior del cilindro} \end{cases}$$

4) $$\rho(\vec{r}\,') = A_s\,\delta(z'-h)\,[H(r')-H(r'-R)]$$

TAPA SUPERIOR (σ_P)

$$\rho(\vec{r}\,') = A_v\,[H(r')-H(r'-R)]\,[H(z')-H(z'-h)]$$

para volumen (ρ_p)

5) $$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_s(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_v(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r}\,' = (x', y', z') = (r'\cos\varphi', r'\operatorname{sen}\varphi', z')$$

coord. cilíndricas

$$\therefore \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[A_s \int_{z'=-\infty}^{\infty}\int_{r'=0}^{\infty}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\delta(z'-h)\,[H(r')-H(r'-R)]\,r'dr'd\varphi'dz'}{[(x-r'\cos\varphi')^2+(y-r'\operatorname{sen}\varphi')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \right.$$

$$\left. + A_v \int_{z'=-\infty}^{\infty}\int_{r'=0}^{\infty}\int_{\varphi'=0}^{\infty} \frac{[H(r')-H(r'-R)][H(z')-H(z'-h)]\,r'dr'd\varphi'dz'}{[(x-r'\cos\varphi')^2+(y-r'\operatorname{sen}\varphi')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[A_s \int_{r'=0}^{R}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{r'dr'd\varphi'}{[(x-r'\cos\varphi')^2+(y-r'\operatorname{sen}\varphi')-(z-h)^2]^{1/2}} \right.$$

$$\left. + A_v \int_{z'=0}^{h}\int_{r'=0}^{R}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{r'dr'dz'd\varphi'}{[(x-r'\cos\varphi')^2+(y-r'\operatorname{sen}\varphi')^2+(z-h)^2]^{1/2}} \right]$$