Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 3

Mauro Jélvez Jélvez

03/05/2024

1)

Solución: Si sabemos que $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros, tendremos que:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \mid 5 < x \leq 25\}$$

Lo cual nos dice que x pertenece al conjunto de los números enteros, pero que está definido solamente en el intervalo de 5 hasta 25.

2)

a) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

Si es un mapeo $f : X \to Y$, ya que a cada elemento del dominio X se le asigna un único elemento del codominio Y. Por lo tanto no hay valores repetidos.

b) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \diamondsuit\}$

Este mapeo no es una función $f : X \to Y$, ya que los elementos $\clubsuit$ y $\diamondsuit$ en el codominio están siendo asignados a dos elementos diferentes.

c) $\{a, b, c, d\} \to \{\varnothing\}$

Como el codominio es el conjunto vacío, no se le puede asignar ningún elemento al dominio X.

d) $\{a, b, d\} \to \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

Este mapeo si es una función $f : X \to Y$ ya que cada elemento del X tiene un elemento asignado no repetido en el codominio.

3)

Tendremos que $\mathbb{Z}$ no es un campo ya que no cumple con axioma del inverso multiplicativo.

$$(a \cdot a^{-1} = 1)$$

Ejemplo: Si tenemos un número entero cualquiera como $n = 2$ nos daremos cuenta que no existe en elmismo conjunto este inverso multiplicativo el cual es $\frac{1}{2}$ el cual pertenece al conjunto racional $\mathbb{Q}$

4)

Sí, el conjunto de los enteros cumple con los axiomas de un anillo. Ya que como sabemos la suma y multiplicación de enteros con enteros no da otro entero.

I) Asociatividad: Para la suma $a + (b + c) = (a + b) + c$ y para la multiplicación $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Para comprobarlo usaremos los enteros $a = 1, b = 2, c = 3$

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3 \rightarrow 1 + 5 = 3 + 3 \rightarrow 6 = 6$$

$$1 \cdot (2 \cdot 3) = (1 \cdot 2) \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot (6) = (2) \cdot 3 \rightarrow 6 = 6$$

II) Conmutatividad aditiva : La conmutatividad aditiva es de la forma $a + b = b + a$.

Como la suma de los enteros ya está definida tendremos:

$$1 + 2 = 2 + 1 \rightarrow 3 = 3$$

III) Identidad aditiva y mutiplicativa: De la forma $a + 0 = a$ para la suma y $a \cdot 1 = a$ para la multiplicación. Como 0 y 1 son números enteros se siguen manteniendo las propiedades.

Como ejemplo:

$$2 + 0 = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

IV) Inversa aditiva: De la forma $a + (-a) = 0$. Como ejemplo:

$$2 + (-2) = 0$$

V) Distributividad de multiplicación sobre una adición: Tendremos $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Ejemplo:

$$1 \cdot (2 + 3) = (1 \cdot 2) + (1 \cdot 3) \rightarrow 1 \cdot (5) = 2 + 3 \rightarrow 5 = 5$$

Y así es como finalmente demostramos mediante los axiomas que definen los anillos que el conjunto de números enteros constituyen un anillo.

5)

Solución: Las matrices ortogonales en 2D constituyen un grupo llamado O(2) debido a varias propiedades importantes que poseen.

I) Cerradura bajo multiplicación: Si tenemos dos matrices ortogonales en 2D y las multiplicamos entre sí, el resultado también será una matriz ortogonal en 2D. Esto significa que la operación de multiplicación está cerrada dentro del conjunto de matrices ortogonales en 2D.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II) Identidad: Existe una matriz dentro de O(2) que actúa como la identidad para la multiplicación de matrices. Esta matriz es la matriz de identidad en 2D, que no altera ningún vector al multiplicarlo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III) Inversos: Cada matriz ortogonal en 2D tiene una matriz inversa que también es ortogonal. La inversa de una matriz ortogonal en 2D es su matriz transpuesta, ya que la transposición de una matriz ortogonal preserva la ortogonalidad.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV) Asociatividad de la multiplicación: La multiplicación de matrices ortogonales en 2D es asociativa, lo que significa que el orden en el que se realizan las multiplicaciones no importa.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6)

Solución: Sí, los números reales con la operación de multiplicación forman un grupo, siempre y cuando excluyamos el elemento neutro aditivo, es decir, el número 0. Para que un conjunto junto con una operación formen un grupo, deben cumplirse cuatro axiomas:

I) Cerradura: La multiplicación de dos números reales siempre resulta en otro número real.

II) Asociatividad: Para cualquier conjunto de números reales a, b y c:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

III) Existencia de elemento neutro: El elemento neutro para la multiplicación en los números reales es el número 1, ya que para cualquier número real a, se cumple:

$$a \cdot 1 = a$$

IV) Existencia de inversos: Para cada número real a, excepto el 0, existe un inverso multiplicativo a^{-1}, tal que:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

La única propiedad que no se cumple cuando se incluye el número 0 es la existencia de inversos, ya que el inverso de 0 no existe en los números reales. Por lo tanto, si excluimos el 0, los números reales bajo la multiplicación forman un grupo.

7)

Solución: Sí, los números reales con la operación de adición forman un grupo. Para que un conjunto junto con una operación formen un grupo, deben cumplirse cuatro axiomas:

I) Cerradura: La suma de dos números reales siempre resulta en otro número real.

II) Asociatividad: Para cualquier conjunto de números reales a, b y c, se cumple:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

III) Existencia de elemento neutro: El elemento neutro para la adición en los números reales es el número 0, ya que para cualquier número real a, se cumple:

$$a + 0 = a$$

IV) Existencia de inversos: Para cada número real a, existe un inverso aditivo -a que cumple:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

8)

Solución: Para demostrar que el conjunto de todas las funciones analíticas (suaves) definidas en el intervalo cerrado [0, 1] de $\mathbb{R}$ constituye un espacio vectorial, debemos verificar los axiomas de un espacio vectorial.

I) Cerradura bajo la suma: Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones analíticas definidas en [0, 1], entonces $f(x) + g(x)$ también es analítica y está definida en [0, 1]. Esto es una propiedad de las funciones analíticas, por lo que esta propiedad se cumple.

$$f, g \in V \to (f + g) \in V$$

II) Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Si $f(x)$ es una función analítica definida en [0, 1] y c es un escalar, entonces $cf(x)$ también es analítica y está definida en [0, 1]. Esto también es una propiedad de las funciones analíticas, por lo que esta propiedad se cumple.

$$f \in V, c \in \mathbb{R} \to cf \in V$$

III) Asociatividad de la suma: Para cualquier $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ analíticas definidas en [0, 1], basándonos en una de las propiedades la cual es la suma de funciones reales.

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

IV) Conmutatividad de la suma: Para cualquier $f(x)$ y $g(x)$ analíticas definidas en [0, 1], como anteriormente basándonos en las propiedades de las funciones reales, tendremos:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

V) Elemento neutro de la suma: La función constante $f(x) = 0$ es analítica y está definida en [0, 1], y para cualquier función analítica $g(x)$.

$$g(x) + f(x) = 0$$

VI) Inverso aditivo: Dada una función analítica $f(x)$ definida en [0, 1], su inverso aditivo $-f(x) = g(x)$ es también analítica y está definida en [0, 1].

$$f(x) + g(x) = 0$$

VII) Compatibilidad de multiplicación: Para una función $f(x)$ definida en [0,1] y los escalares $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple siempre:

$$a(bf(x)) = (ab)f(x)$$

VIII) Elemento neutro de la multiplicación: Dada la función $f(x) = 1$ y la función g(x) definidas en [0,1], tendremos:

$$f(x) \cdot g(x) = g(x)$$

VIII) Distributividad de multiplicación escalar : Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y el escalar $a \in \mathbb{R}$, tendremos que la suma de las funciones multiplicadas por el mismo escalar es igual a la suma de cada una de ellas multiplicada ya por el escalar:

$$a(f(x) \cdot g(x)) = af(x) + ag(x)$$

IX) Distributividad de multiplicación sobre adición del campo: Dada la función $f(x)$ y los escalares $a, b \in \mathbb{R}$, sucede algo similar al caso anterior, solo que ahora la función se distribuye a cada escalar.

$$(a + b)f(x) = af(x) + bf(x)$$

Finalmente queda demostrado que las funciones analíticas suaves definidas en [0,1] constituyen un espacio vectorial V, ya que satisface todos los axiomas.

9)

Solución: Para que una colección de subconjuntos de un conjunto X sea una topología en X, debe cumplir los siguientes axiomas:

I) El conjunto vacío $\varnothing$ y X deben estar contenidos en la colección τ.

II) La unión de cualquier colección del conjunto τ también está en τ.

III) La intersección de cualquier par de conjuntos en τ también está en τ.

a) Si es una topología válida.

b) Si es una topología válida.

c) No es una topología válida, ya que la unión de $\{1\}$ y $\{2\}$ es $\{1, 2\}$, que está en τ, pero $\{2\}$ no está en τ.

d) Esta no es una topología válida, ya que la intersección de $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, que no está en τ.

e) Esta es una topología válida, ya que cumple con las tres propiedades.

d) Esta no es una topología válida, ya que la intersección de $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, que no está en τ.

10)

a)

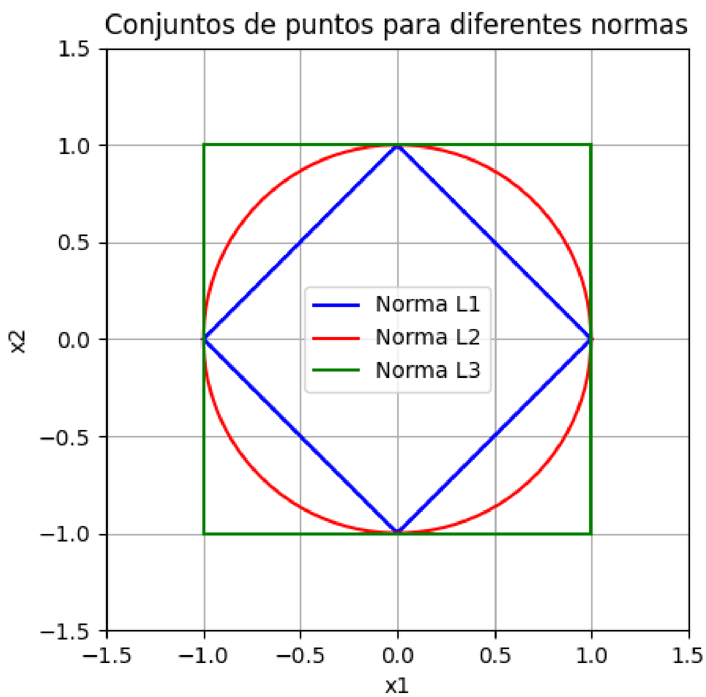
Cada punto (x_1, x_2) en el rombo satisface la ecuación: $|x_1| + |x_2| = 1$.

b)

Cada punto (x_1, x_2) en la circunferencia satisface la ecuación: $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

c)

Cada punto (x_1, x_2) en el cuadrado satisface la condición: $max(|x_1|, |x_2|) = 1$.



11)

Solución: Es una sucesión creciente, por lo tanto $x_{n+1} > x_n$, haciendo tender n al infinito tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{1+x_n}{2+x_n} \to 2\lim_{L\to\infty} \frac{1+L}{2+L}$$

$$L = 2\frac{1+L}{2+L} \to 2L + L^2 = 2 + 2L \to L^2 = 2$$

$$L = \pm\sqrt{2}$$

Estos límites no están contenidos en $\mathbb{Q}$ ya que son irracionales. Por lo tanto $(\mathbb{Q}, d)$ no es completo.

12)

Solución: Debemos verificar las propiedades del producto interno de funciones.

I) $(f,g) = (g,f)$
II) $(af + bg, h) = a(f,h) + b(g,h)$
III) $(f,f) \geq 0$ y $(f,f) = 0$ sí y sólo sí $f = 0$
Ahora para verificar propiedad por propiedades tendremos:

I)

Como sabemos la multiplicación de números reales tales que $x \in [0,1]$ es conmutativa, osea $f(x)g(x) = g(x)f(x)$

$$(f,g) = \int_{[0,1]} f(x)g(x)dx = \int_{[0,1]} g(x)f(x)dx = (g,f)$$

II)

Tenemos a y b escalares.

$$(af + bg, h) = \int_{[0,1]} (af(x) + bg(x))h(x)dx = a\int_{[0,1]} f(x)h(x) + b\int_{[0,1]} g(x)h(x) = a(f,h) + b(g,h)$$

III)

Dado que el cuadrado de un número real siempre es positivo, osea $|f(x)|^2 \geq 0$

$$(f,f) = \int_{[0,1]} f(x)f(x)dx = \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \geq 0$$

13)

Solución: Usaremos el último resultado para calcular la norma:

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx}$$

Y para la métrica tendremos:

$$d(f,g) = ||f-g|| = \sqrt{(f-g, f-g)} = \sqrt{\int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

14)

Solución:

$$||f_n|| = \sqrt{\int_0^1 cos^2(nx)dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2nx)}{2}\right) dx}$$

Usando un cambio de variable de la forma:

$$u = 2nx$$

$$du = 2ndx$$

Integrando obtenemos:

$$||f_n|| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{sen(2n)}{4n}}$$

Si tomamos $n \to \infty$, obtendremos:

$$||f|| \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

15)

Solución, si tenemos $f_1 = cos(x)$ y $f_2 = cos(2x)$

$$d(f_1, f_2) = \sqrt{\int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 |cos(x) - cos(2x)|^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (cos^2(x) + cos^2(2x) - 2cos(x)cos(2x))dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (cos^2(x) + cos^2(2x) - cos(x-2x) - cos(x+2x))dx} = \sqrt{\frac{sen(2)+2}{4} + \frac{sen(4)+4}{8} - sen(1) - \frac{sen(3)}{3}} = 0.49$$

$$d(f_1, f_2) \approx \frac{1}{2}$$

16)

Solución: Consideremos $f(x) = 1$ y $g(x) = -1$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)(-f(x))dx = -\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = -\int_{-1}^1 1dx = -(1+1) = -2$$

Este resultado no cumple la propiedad de positividad definida que define al producto escalar.

17)

Solución: Sea c un número real arbitrario, definiremos el vector $w = u - cv$, ahora calculemos su norma al cuadrado.

$$||u - cv||^2 \geq 0$$

Expandiendo la expresión obtenemos:

$$||u - cv||^2 = (u - cv, u - cv) = (u, u) - c(u, v) - c(v, u) + c^2(v, v)$$

Dado que estamos en un espacio de Hilbert $(v, u) = \overline{(u, v)}$ lo que denota el complejo conjugado de (u, v) Pero en un espacio de Hilbert los productos internos son conmutativos, entonces $(u, v) = \overline{(v, u)}$. Derivando con respecto a c:

$$-(u,v)-(v-u)+2c(v,v)=-2(u,v)-2c(v,v)=0 \to c=\frac{(u,v)}{(v,v)}$$

Reemplazando obtenemos:

$$||u-cv||^2=(u,u)-\frac{|u,v|^2}{(v,v)}\geq 0 \to (u,u)\geq \frac{|u,v|^2}{(v,v)}$$

Finalmente obtenemos:

$$|(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v)$$

$$|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$$