Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 5

1. Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos del espacio es la línea recta.

2. Demostrar que las geodésicas de una superficie esférica son círculos máximos, es decir, circunferencias cuyos centros coinciden con el centro de la esfera.

3. Muestre que la solución al problema de la *braquistócrona* corresponde a una cicliode con una cúspide en el punto inicial en el cual se suelta la partícula. Demostrar también que si la partícula se proyecta con una energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$, la braquistócrona sigue siendo una cicloide que pasa por los dos puntos que tienen una cúspide a una altura z sobre el punto inicial dada por $v_0^2 = 2gz$.

4. (a) Considere la funcional
$$I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y, y')\,\mathrm{d}x,$$
donde Φ es independiente de x. Muestre que la ecuación de Euler-Lagrange tiene una primera integral de la forma
$$\Phi - y'\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = \text{const.}$$
(b) Una cuerda flexible de longitud l $(> 2x_0)$ cuelga entre dos soportes de igual altura separados a una distancia $2x_0$. Minimizar la energía potencial, incorporando la restricción de l fijo con un multiplicador de Lagrange. Utilizando el resultado de la parte (a), o cualquier otra cosa, integre para encontrar la ecuación explícita para la forma de la cuerda. Si $l = 4x_0$, ¿a qué distancia se encuentra el centro de la cuerda por debajo de la línea que une los soportes?

5. En óptica geométrica, la trayectoria de un rayo de luz viene dada por el *principio de Fermat*, el cual establece que un rayo viaja entre dos puntos fijos de manera tal que el tiempo de tránsito es estacionario con respecto a pequeñas variaciones del camino. Considere la propagación de rayos de luz en la atmósfera de la Tierra, asumiendo que el índice de refracción n es sólo función de la distancia desde el centro de la Tierra. Exprese el principio de Fermat en forma integral. Derive la siguiente ecuación de un rayo en la atmósfera:
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = r\sqrt{kn^2r^2 - 1}, \tag{1}$$
donde k es una constante y (r, ϕ) son las coordenadas azimutales de un punto sobre el rayo con el centro de la Tierra como origen. Si n es proporcional a r^m, encuentre el valor de m tal

que un rayo que se mueve inicialmente a lo largo de una dirección tangencial (paralela a $\widehat{\phi}$) permanezca a una distancia constante desde el centro de la Tierra para cualquier valor de r.

6. (a) Demostrar que una fuerza que se puede expresar por el gradiente negativo de la función escalar $U(x, y, z)$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x, y, z), \tag{2}$$

da fuerzas generalizadas expresadas por

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{3}$$

y que las ecuaciones de movimiento generalizadas son, por tanto,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{4}$$

(b) Demostrar que para tales fuerzas

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = -\Delta U, \tag{5}$$

y, en consecuencia,

$$dT = d\left[\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = -dU, \tag{6}$$

o sea, $T + U =$ constante.

7. Utilizar el resultado del problema 1 para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\, a\, \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\, b\, \dot{q}_2^2, \tag{7}$$

y cuya energía potencial escalar es

$$U = \frac{1}{2}\, k_1 (q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}\, k_2 (q_1 - q_2)^2. \tag{8}$$

8. El punto de soporte de un péndulo simple de longitud ℓ y masa m se mueve sobre una recta vertical de acuerdo con la ecuación

$$y = y(t). \tag{9}$$

El movimiento del péndulo es en un plano vertical.

(a) Establecer las componentes de las ecuaciones de Newton para la partícula en las direcciones $\widehat{e}_1$ y $\widehat{e}_2$ mostradas en la FIG 1 a. [*Sugerencia*: Considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya aceleración es $\vec{a} = \ddot{y}\, \widehat{j}$.]

(b) Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \dot{y}^2 + m\, \ell\, \sin\theta\, \dot{\theta}\, \dot{y}. \tag{10}$$

(c) Dado que la energía potencial escalar es

$$U = m\, g\, y - m\, g\, \ell\, \cos\theta, \tag{11}$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte (b) y esta función de energía potencial para la variable θ (ver problema 1) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de $\widehat{e}_2$.

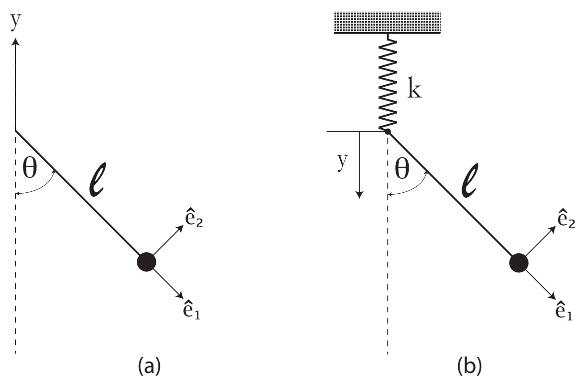

Figure 1: (a) Problema 3; (b) Problema 5

(d) Demostrar que si expresamos la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r} \sin\theta + r\, \dot{\theta} \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r} \cos\theta + r\, \dot{\theta} \sin\theta + \dot{y})^2, \tag{12}$$

y restringuimos el movimiento por la ecuación

$$r - \ell = 0, \tag{13}$$

entonces, la ecuaciones de Lagrange para las variables r y θ concuerdan con las de Newton halladas en la parte (a).

9. Un péndulo consiste de una masa m y una vara sin masa de longitud ℓ. El soporte del péndulo oscila horizontalmente con la posición de acuerdo a la ley $x(t) = A\, \cos\omega t$. ¿Cuál es la solución general para el ángulo del péndulo en función del tiempo?

10. Consideremos el sistema representado en la FIG 1.b. El resorte está obligado a moverse en una recta vertical.

   (a) Teniendo en cuenta que la fuerza sobre el resorte es igual a la componente vertical de la tensión en la cuerda, establecer las ecuaciones de movimiento de Newton, tomando componentes sobre las direcciones $\widehat{e}_1$ y $\widehat{e}_2$ indicadas.

   (b) Demostrar que las ecuaciones así obtenidas son equivalentes a las de Lagrange para las variables r y θ, obtenidas a partir de la energía cinética de la partícula

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r} \sin\theta + r \cos\theta\, \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\, m\, (-\dot{r} \cos\theta + r \cos\theta\, \dot{\theta} - \dot{y})^2, \tag{14}$$

   y su energía potencial

$$U = \frac{1}{2}\, k\, y^2 - m\, g\, (r\, \cos\theta + y). \tag{15}$$

   (Obsérvese que el sentido positivo de y es hacia abajo) sujeta a la ecuación de restricción

$$r - \ell = 0, \tag{16}$$

   (c) Comprobar que la ecuación de Lagrange para la variable y es equivalente a la ecuación

$$R\, \cos\theta = k\, y. \tag{17}$$

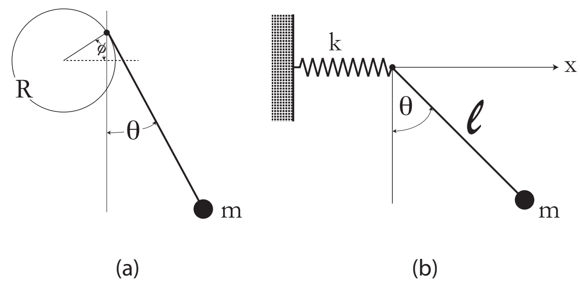

Figure 2: (a) Problema 6; (b) Problema 7

11. El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio R con una velocidad constante v, como es mostrado en la FIG. 2.a. Hallar la ecuación de movimiento de Lagrange para el péndulo si $U = m\,g\,R\,\sin\phi - m\,g\,\ell\cos\theta$.

12. (a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Newton para un péndulo simple cuyo punto de soporte está unido a un resorte con libertad de movimiento horizontal, ver FIG. 2.b.

    (b) Como la energía potencial para este problema es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - m\,g\,r\,\cos\theta, \quad \text{donde} \quad r - \ell = 0, \tag{18}$$

    establecer la expresión de la energía cinética de la partícula y hallar las ecuaciones del movimiento de Lagrange. Comparar las respuestas de la parte (a) y la parte (b).

13. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la superficie de un cilindro horizontal.

    (a) Obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

    (b) Si la partícula se desliza en un plano vertical habiendo partido de la parte superior del cilindro con una velocidad muy pequeña, hállese la fuerza de reacción en función de la posición.

    (c) ¿En qué punto se separará la partícula del cilindro?

14. Repetir el problema 8 con una partícula que se mueve sobre la superficie lisa del cilindro parabólico

$$y = -a\,x^2. \tag{19}$$

15. Una bolita de masa m desliza libremente sin fricción en un alambre circular de radio b que gira en un plano horizontal alrededor de un punto del alambre circular con una velocidad angular constante ω. Encuentre la ecuación de movimiento de Lagrange para la bolita. Demostrar que la bolita oscila como un péndulo de longitud $\ell = g/\omega^2$.

16. Una partícula de masa m desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior del cono invertido de la FIG. 3.a. cuya ecuación es

$$\rho = z\tan\alpha. \tag{20}$$

    (a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

    (b) Demostrar que son posibles las órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.

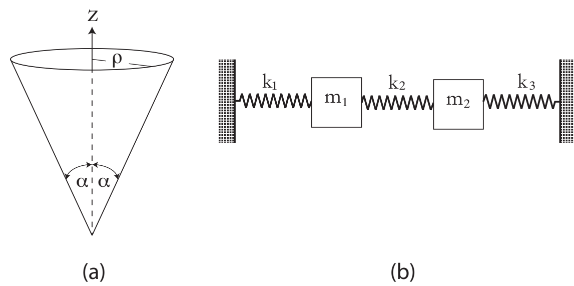

Figure 3: (a) Problema 11; (b) Problema 13

17. Considere una partícula de masa m unida a un punto fijo por una varilla de longitud L cuya masa es despreciable. La partícula es libre de oscilar en cualquier dirección bajo la acción de la gravedad. Debido a que la partícula está obligada a moverse en la superficie interior de una esfera, este sistema se llama un *péndulo esférico*. Encuentre las ecuaciones diferenciales para su movimiento.

18. Considerando el sistema mostrado en la FIG. 3.b.

    (a) Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamientos, a partir del equilibrio, x_1 y x_2.

    (b) Demostrar que para cualesquiera desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por

    $$U = \frac{1}{2}\, k_1\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, k_2\, (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}\, k_3\, x_2^2 \tag{21}$$

    (c) empleando la expresión

    $$T = \frac{1}{2}\, m_1\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, x_2^2, \tag{22}$$

    para la energía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables x_1 y x_2, a partir de esta T y la U de la parte (b), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte (a). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

19. Las coordenadas q_1 y q_2 están definidas en función de las coordenadas polares planas, r y ϕ, por las ecuaciones

    $$q_1 = \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \phi \cot\xi, \qquad q_2 = \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \phi \tan\xi, \tag{23}$$

    donde a y ξ son constantes. Trazar las curvas de las constantes q_1 y q_2. Hallar la energía cinética de una partícula de masa m en función de q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$. Encontrar expresiones para Q_1 y Q_2 en función de las componentes polares, F_r y F_ϕ, de la fuerza, donde $F_r = \widehat{e}_r \cdot \vec{F}$ y $F_\phi = \widehat{e}_\phi \cdot \vec{F}$. Hallar p_1 y p_2. Determinar las fuerzas Q_1 y Q_2 necesarias para que la partícula se mueva con una velocidad constante, $\dot{s}$, sobre una espiral de $q_1 = c$ constante.

20. Un anillo de masa m se desliza, bajo la acción de la gravedad por un alambre curvado en la forma de la parábola $y = 1 + x^2$. El coeficiente de rozamiento entre el anillo y el alambre es μ, por lo que la fuerza de ligadura que actúa sobre el anillo es μR, donde R es la fuerza de ligadura normal a la curva. Dicha fuerza de rozamiento tiende a oponerse al movimiento. Al mismo tiempo, el plano del alambre gira alrededor de Oy con una velocidad angular constante, ω. Hállense las ecuaciones de Lagrange para el anillo.

21. Una masa puntual m desliza sin fricción en el interior de la superficie de revolución $z = \alpha \sin(r/R)$ cuyo eje de simetría está a lo largo de la dirección de un campo gravitacional $\vec{g}$. Considere $0 < r/R < \pi/2$.

   (a) Construya el Lagrangiano $L(r, \phi; \dot{r}, \dot{\phi})$, y calcule las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas r y ϕ.

   (b) ¿Existen las órbitas circulares estacionarias horizontales?

   (c) ¿Cuáles de estas órbitas son estables bajo pequeño impulsos a lo largo de la superficie transversal a la dirección?

   (d) Si la órbita es estable, ¿cuál es la frecuencia de oscilación en torno a la órbita de equilibrio?

22. (a) Establecer la expresión de la energía cinética de una partícula de masa m en función de las coordenadas parabólicas planas, q_1 y q_2, definidas por

$$x = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2), \qquad y = q_1 q_2. \tag{24}$$

   Hállense las cantidades de movimiento generalizadas, p_1 y p_2.

   (b) Escríbanse las ecuaciones de Lagrange en función de estas coordenadas para el caso en que sobre la partícula no actúe ninguna fuerza.

   (c) Encontrar las fuerzas generalizadas, Q_1 y Q_2, necesarias para que la partícula se mueva sobre una parábola, $q_1 = c =$ constante, con velocidad generalizada $\dot{q}_2 = u_0$, partiendo desde el punto $q_1 = c$ y $q_2 = 0$ en $t = 0$.

   (d) Hallar las fuerzas correspondientes, F_x y F_y, relativas a un sistema de coordenadas cartesianas.

23. En ciertas situaciones, particularmente en sistemas unidimensionales, es posible incorporar efectos de fricción sin la necesidad de introducir la función de disipasión. Como ejemplo, encuentre las ecuaciones de movimiento para el Lagrangiano

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{m\,\dot{q}^2}{2} - \frac{k\,q^2}{2}\right).$$

   ¿Cómo se describe el sistema? ¿Hay alguna constante de movimiento? Suponga una transformación de punto en la forma

$$s = e^{\gamma t}\, q$$

   ¿Cuál es el Lagrangiano efectivo en términos de s? Encuentre la ecuación de movimiento para s. ¿Qué dice su resultado con respecto a las cantidades conservadas?