Momentos y centro de masas

Introducción

A continuación, presentaremos métodos para calcular los momentos y los centros de masa de una lámina, es decir de una placa plana y delgada. Como motivación , consideraremos primero partículas o masas puntuales.

Sea l una recta coordenada y P un punto de l con coordenada x. Si una partícula de masa (cantidad de materia o sustancia que posee un cuerpo) m se coloca en P, entonces el momento (más precisamente, el primer momento) de la partícula con respecto al origen O se define como el producto de mx. Supongamos que l es horizontal, su dirección positiva es a la derecha y puede girar libremente alrededor de O donde se supone un punto de apoyo (fulcro), como se muestra en la figura 1.

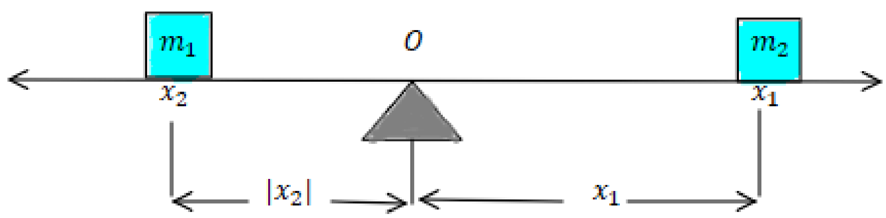

Figura 1

Si la masa m_1 de un objeto está concentrada en un punto de coordenada positiva x_1, entonces el momento m_1x_1 es positivo y l giraría en el sentido del reloj. Si un objeto de masa m_2 se encuentra en un punto de coordenada negativa x_2, entonces su momento m_2x_2 es negativo y l giraría en sentido contrario del reloj. Se dice que el conjunto formado por los dos objetos está en equilibrio si $m_1x_1 = m_2|x_2|$. Como $x_2 < 0$, esto es equivalente a

$$m_1x_1 = -m_2x_2$$

o bien

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0$$

Es decir, la suma de los momentos con respecto al origen es cero. Esto se asemeja aun balancín o un sube y baja con un punto de apoyo O el cual queda en equilibrio si dos partículas con masas m_1 y m_2 se colocan como se indica en la figura 1.

Si las partículas no están en equilibrio, entonces hay un punto P del balance con coordenada $\bar{x}$, tal que

$$m_1(x_1 - \bar{x}) = m_2|x_2 - \bar{x}|$$

Como $x_2 < \bar{x} \Rightarrow |x_2 - \bar{x}| = -(x_2 - \bar{x})$, deduce que

$$m_1(x_1 - \bar{x}) = -m_2(x_2 - \bar{x})$$

Esta situación se ilustra en la figura 2.

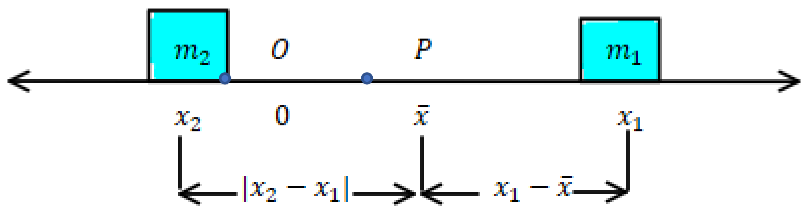

Figura 2

Para localizar P se despeja $\bar{x}$ como sigue:

$$m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) = 0$$

$$m_1x_1 + m_2x_2 - (m_1 + m_2)\bar{x} = 0$$

$$(m_1 + m_2)\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}}$$

Entonces, para calcular $\bar{x}$ se divide la suma de los momentos con respecto al origen entre la masa total $m = m_1 + m_2$. El punto con coordenada $\bar{x}$ se llama el centro de masa (o centro de gravedad) de las partículas. La siguiente definición es una generalización de este concepto para más de dos partículas.

Definición

Sea l una recta coordenada y S un conjunto de n partículas de masas m_1, $m_2, \cdots, m_n$ localizadas en los puntos de coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivamente. Sea

$$\boldsymbol{m = \sum_{i=1}^{n} m_i \ \ la\ masa\ total}$$

i) El momento de S con respecto al origen es

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i\, x_i}$$

ii) El centro de masa (o centro de gravedad) de S es el punto con coordenada $\bar{x}$, tal que

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i x_i}}{\boldsymbol{m}} \; o \; bien \; \boldsymbol{m\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i\, x_i}$$

Obs:

El número $m\bar{x}$ en la definición es considerado como el momento total respecto al origen de una partícula de masa m colocada en el punto de coordenada $\bar{x}$. Entonces, en ii) afirma que $\bar{x}$ da la posición en la masa total m lo que indica que podría concentrarse sin que cambie el momento respecto al origen. El punto con coordenada $\bar{x}$ es el punto de balance (en el sentido del balancín) . Si $\bar{x} = 0$, entonces por la definición,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i\, x_i = 0}$$

y se dice que el conjunto S está en equilibrio. En este caso el origen es el centro de masa.

Ejemplo

En los puntos $0,1,2$ y 4 , a lo largo del eje X, hay masas de 4,2,6 y 7 Kilogramos, respectivamente (ver figura 3) . Encuentre el centro de masa

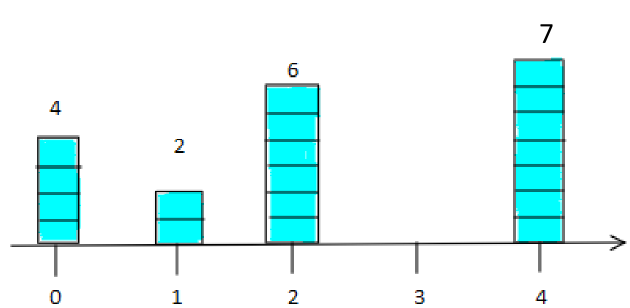

Figura 3

Solución

$$\bar{x} = \frac{(0)(4) + (1)(2) + (2)(6) + (4)(7)}{4 + 2 + 6 + 7}$$

$$= \frac{42}{19} \approx 2{,}21$$

Por intuición $x = 2{,}21$ es casi el puntos de equilibrio correcto.

Distribuciones de masa en un plano

Si una partícula de masa m_1 está colocada en un punto $P(x, y)$ de un plano coordenado, como se ilustra en la figura 4, entonces los momentos M_x y M_y de la partícula con respecto al eje X y al eje Y se definen por

$$M_x = m_1 y_1 \quad y \quad M_y = m_1 x_1$$

respectivamente.

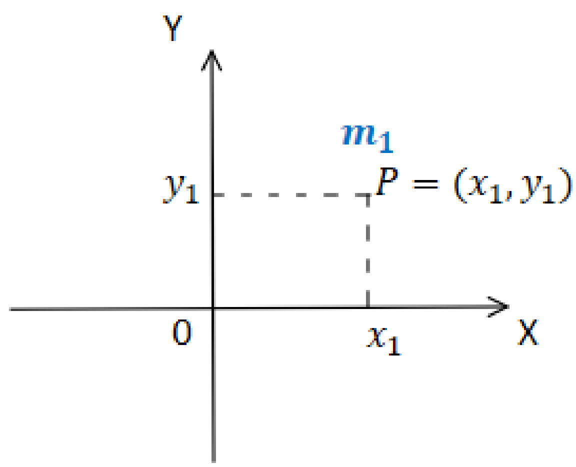

Figura 4

Nótese que si x_1 y y_1 son ambos positivos, entonces para calcular M_x se multiplica la masa de la partícula por su distancia y_1 al eje X y para calcular M_y se multiplica la masa por la distancia x_1 al eje Y . Si x_1 o y_1 es negativo, entonces M_x o M_y también es negativo.

Para calcular los momentos M_x y M_y de un conjunto de partículas se suman los momentos de las partículas individuales, tal como se indica en la siguiente definición.

Definición

Sea S un conjunto de n partículas de masas $m_1, m_2, \cdots, m_n$, ubicadas en los puntos $P_1(x_1, y_1), P_1(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, respectivamente de un plano coordenado (Ver figura 5) y sea

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ la masa total}$$

i) Los momentos M_x, M_y de S con respecto al eje X y al eje Y son

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i \;\; y \;\; M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i$$

Respectivamente.

ii) El centro de masa (o centro de gravedad) de S es el punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ dado por

$$m\bar{x} = M_y \;\; y \;\; m\bar{y} = M_x$$

$$o, \; \bar{x} = \frac{M_y}{m} \;\; y \;\; \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

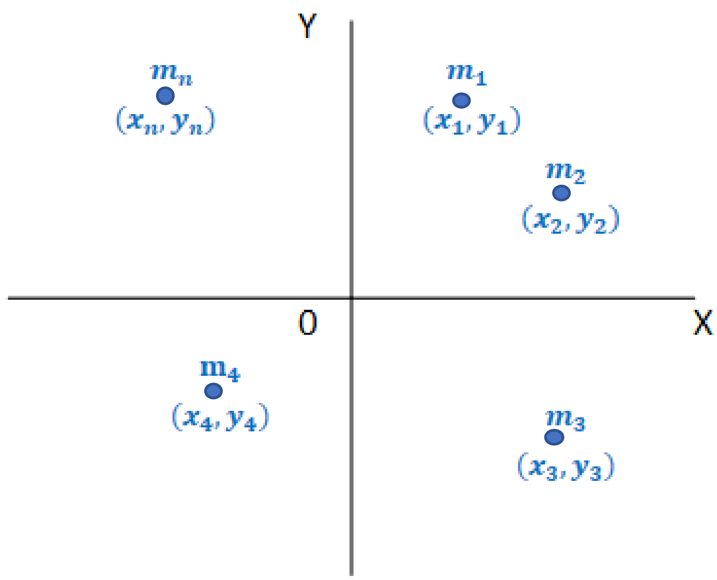

Figura 5

Ejemplo

Cuatro partículas con masas de 4,8,3 y 2 Kg están colocadas en los puntos $P_1(-2{,}3)$, $P_2(2,-6), P_3(7,-3)$ y $P_4(5{,}1)$, respectivamente . Calcular los momentos M_x y M_y , y las coordenadas del centro de masa del sistema.

Solución

Las partículas se ilustran en la figura 6, donde también se ha marcado por anticipado la posición de $(\bar{x}, \bar{y})$. Aplicando la definición anterior parte i) tenemos,

$$M_x = (4)(3) + (8)(-6) + (3)(-3) + (2)(1) = -43$$

$$M_y = (4)(-2) + (8)(2) + (3)(7) + (2)(5) = 39$$

Como $m = 4 + 8 + 3 + 2 = 17$, se deduce de la parte ii) de la definición anterior que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{39}{17} \approx 2{,}3 \quad , \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = -\frac{43}{17} \approx -2{,}5$$

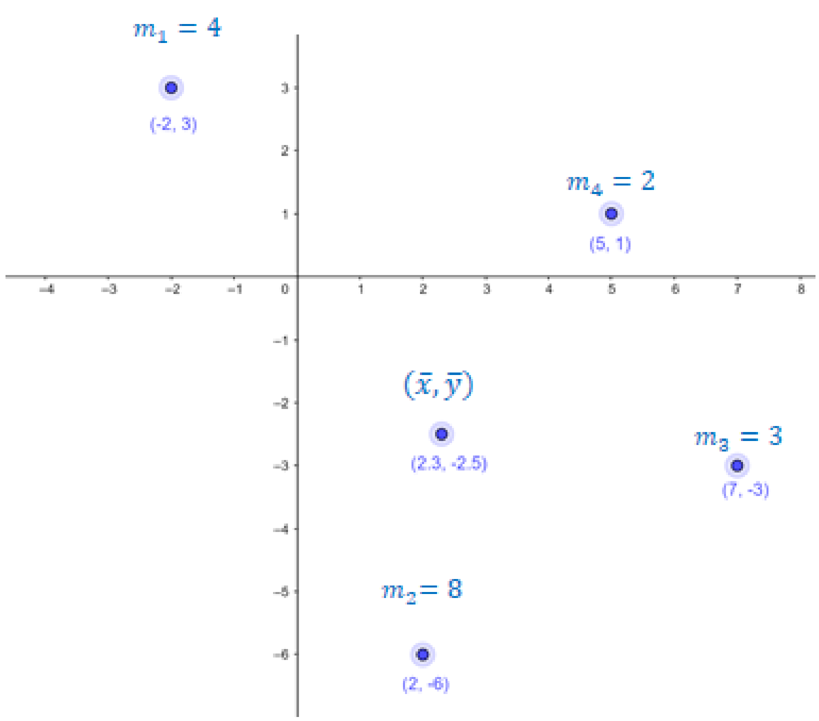

Figura 6

Ahora consideraremos el problema de encontrar el centro de masa de una lámina (hoja plana delgada). Por simplicidad, supondremos que es homogénea, esto es , tiene densidad constante δ. Para una hoja rectangular homogénea, el centro de masa (en ocasiones llamada centro de gravedad) está en el centro geométrico, como las siguientes figuras (a) y (b) en la figura 7.

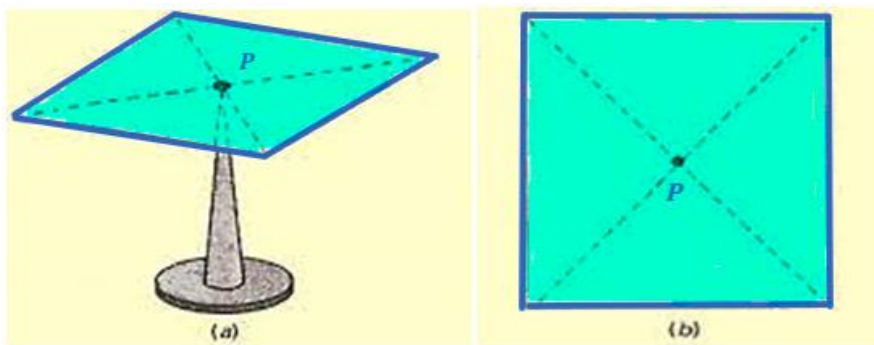

Figura 7

En efecto, consideremos una lámina que tiene la forma de una región como la que se ilustra en la figura 8, con f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

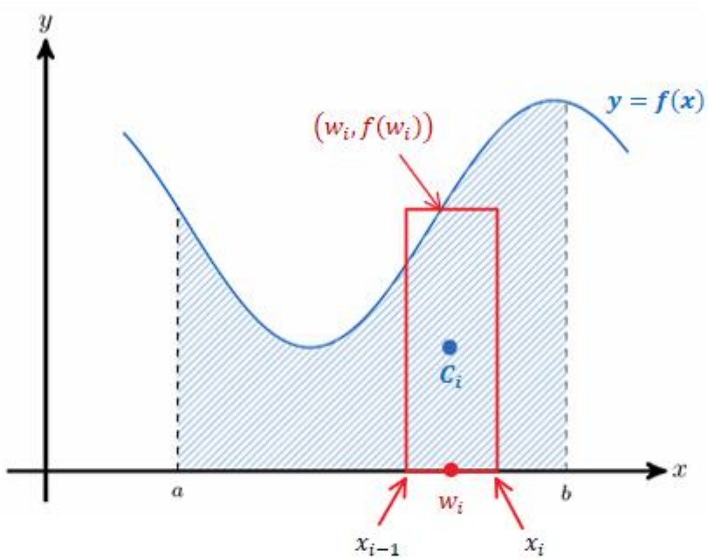

Figura 8

Consideremos una partición de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Para todo k, sea w_k el punto medio del subintervalo genérico $[x_{i-1}, x_i]$, es decir,

$$w_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

La suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x_i$$

puede considerarse como la suma de las áreas de los rectángulos del tipo que se muestra en la figura 8.

Si la densidad superficial (o masa por unidad de área) se denota por δ, entonces la masa correspondiente al *i-ésimo* rectángulo es

$$\delta f(w_i)\Delta x_i$$

Y, por tanto, la masa del polígono rectangular asociado a la partición es la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \delta f(w_i)\Delta x_i f(w_i)\Delta x_i$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$, la longitud de cada subintervalo, $\Delta x_i \longrightarrow 0$, luego el área del polígono formado por los rectángulos tiende al área de una cara de la lámina, y la suma debe tender a la masa de dicha lamina. De modo que se define la masa m de la lámina por

$$m = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta f(w_i)\Delta x_i = \delta \int_a^b f(x)dx$$

El centro de masa de la *i-ésima* lámina rectangular ilustrada en la fura 8, se encuentra en el punto

$$C_i = \left(w_i, \frac{f(w_i)}{2}\right)$$

Si suponemos que la masa está concentrada en c_i , entonces su momento con respecto al eje X puede calcularse multiplicando la distancia $f(w_i)/2$ de C_i al eje X por la masa $\delta f(w_i)\Delta x_i$. Usando la propiedad aditiva de los momentos, obtiene que el momento del polígono de rectángulos asociado a la partición es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(w_i) \delta f(w_i) \Delta x_i$$

El momento M_x de la lámina se define como el límite de estas sumas, es decir

$$M_x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(w_i) \cdot \delta f(w_i) \Delta x_i = \delta \int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx$$

Análogamente, usando la distancia w_i del eje Y al centro de masa del *i-ésimo* rectángulo, se obtiene la definición del momento M_y de la lámina con respecto al eje Y , Concretamente

$$M_y = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \delta f(w_i) \Delta x_i = \delta \int_a^b x f(x) dx$$

La siguiente definición resume todo el análisis anterior .

Definición

Sea f una función continua y no negativa en $[a, b]$. Si una lámina homogénea con densidad superficial δ tiene la forma de la región bajo la gráfica de f entre a y b, entonces

i) la masa de la lámina es

$$\boldsymbol{m = \delta \int_a^b f(x) dx}$$

ii) los momentos M_x y M_y de la lámina son

$$\boldsymbol{M_x = \delta \int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx \quad \text{y} \quad M_y = \delta \int_a^b x f(x) dx}$$

iii) el centro de masa (o centro de gravedad) de la lámina es el punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\boldsymbol{m\bar{x} = M_y}$ **y** $\boldsymbol{m\bar{y} = M_x}$.

Obs:

Si sustituimos las formas integrales de i) , ii) en iii) de la definición y despejando $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se obtiene

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\delta \int_a^b x f(x) dx}{\delta \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\delta \int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx}{\delta \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Luego las coordenadas dependen sólo de la forma de la lámina no de su densidad . Por esta razón , el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama a veces el **centro de masa** de una región del plano o mejor dicho el **centroide** de la región. Se pueden obtener fórmulas para los momentos y los centroide tomando $\delta = 1$ en la definición anterior.

Ejemplo

Encontrar las coordenadas del centroide de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $x = 0, x = 1$ y $y = 0$.

Solución

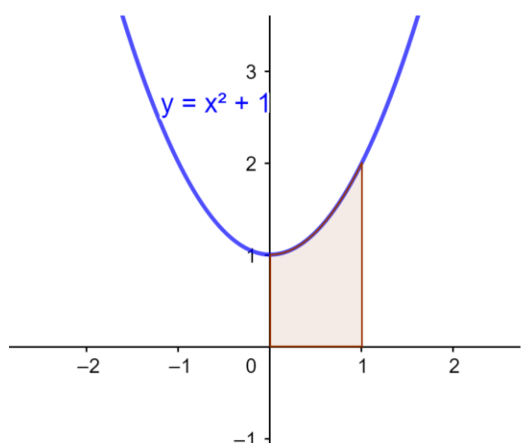

Figura 9

La región se indica en la figura 9 usando i) y ii) de la definición anterior con densidad $\delta = 1$,

$$m = \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{14}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 x(x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x^3 + x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

Por tanto, de la definición iii)

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{3/4}{4/3} = \frac{9}{16}\ ;$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{14/15}{4/3} = \frac{7}{10}$$

Por tanto, el centroide es:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{9}{16}, \frac{7}{10}\right) = (0.56, 0.7)\ (ver\ figura\ 10)$$

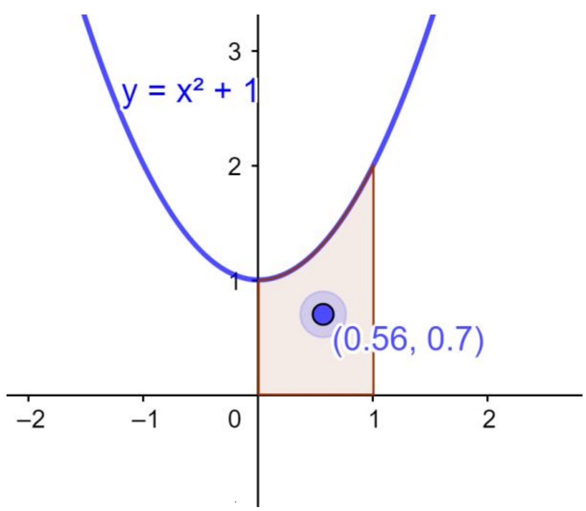

Figura 10

Obs:

Se pueden obtener fórmulas similares a las de la definición última para regiones más complicadas. Consideramos un lámina de densidad constante δ que tiene la forma que se muestra en la figura 10, donde f y g son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$. Tomando una partición de $[a, b]$, escogiendo w_i como antes y aplicando la fórmula del punto medio , se ve que el centro de masa de la i-ésima lámina rectangular indicada en la figura 10 es el punto

$$C_i\left(w_i, \frac{1}{2}[f(w_i) + g(w_i)]\right)$$

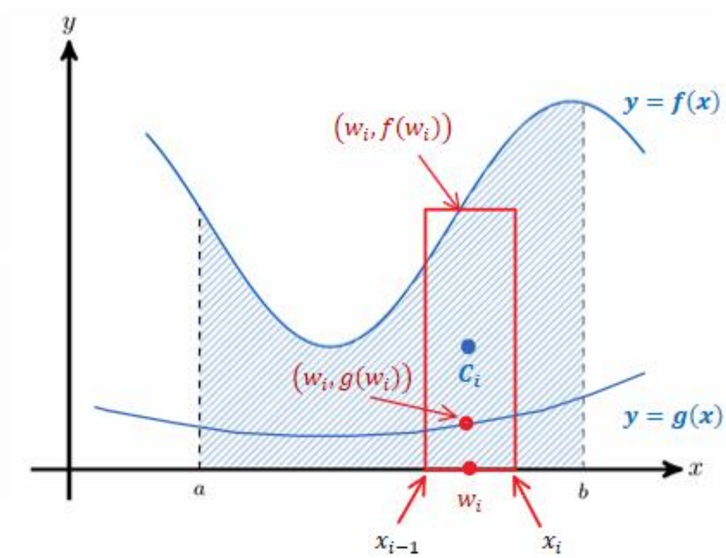

Figura 11

Razonando de manera análogo al anterior se obtiene que el momento del i-ésimo rectángulo con respecto al eje X es igual a la distancia de C_i al eje X multiplicada por la masa, es decir

$$\frac{1}{2}[f(w_i) + g(w_i)] \cdot \delta[f(w_i) - g(w_i)]\Delta x_i$$

Sumando y tomando el límite cuando n tiende a ∞, resulta

$$M_x = \delta \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]\,[f(x) - g(x)]dx$$

$$= \delta \int_a^b \frac{1}{2}(f(x)^2 - g(x)^2)dx$$

Resumiendo,

$$\boldsymbol{M_x = \delta \int_a^b \frac{1}{2}(f(x)^2 - g(x)^2)dx}$$

Análogamente,

$$\boldsymbol{M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}$$

Para calcular $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se pueden utilizar las fórmulas siguientes:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}}$$

$$\boldsymbol{\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}}$$

Ejemplo

Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

Solución

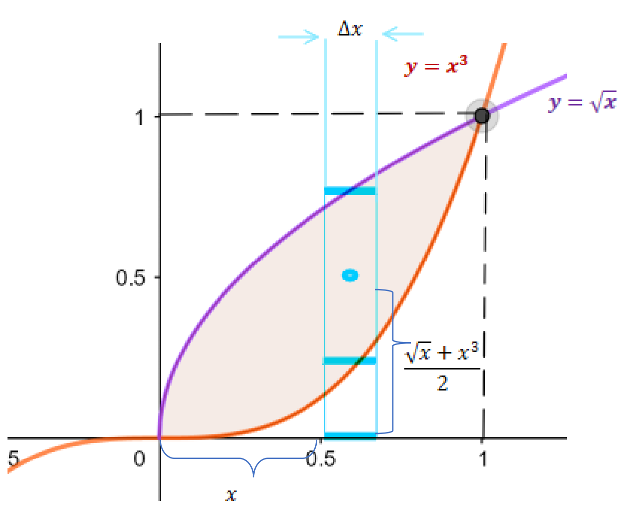

Figura 12

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}=\frac{\left[\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1}=\frac{1/5}{5/12}=\frac{12}{25}=0.48$$

$$\bar{y}=\frac{\int_0^1\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+x^3\right)\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-(x^3)^2\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1}{\frac{5}{12}}=\frac{5/28}{5/12}=\frac{3}{7}=0.43$$

Por tanto, el centroide es

$$(\bar{x},\bar{y})=(0.48,0.43\ )$$

Y que se muestra en la siguiente figura.

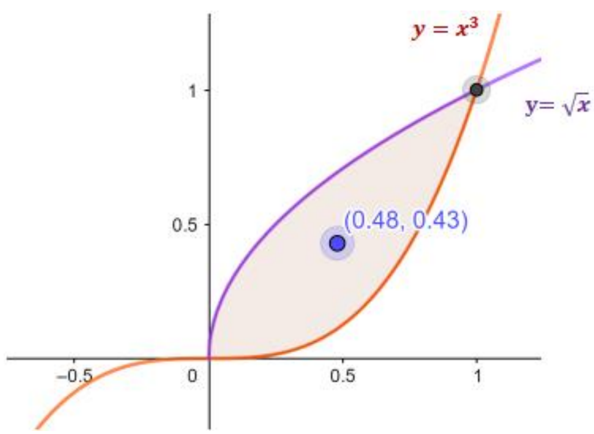

Figura 13

Ejercicios

1.- Encontrar las coordenadas del centroide de la región acotada por las gráficas de $y+x^2=6$; y $y+2x-3=0$.

R: $(1,13/5)$

2.- Encontrar el centro de masa de la región R con forma de semicírculo de radio a .

R: $(0,0.4a)$