Tema 1

Nociones Topológicas básicas del espacio euclídeo

Introducción

Estudiaremos la topología usual de $\mathbb{R}^n$ y en este espacio definiremos los conceptos topológicos de, conjuntos abiertos y cerrados a partir de bolas abiertas (o vecindades abiertas) utilizando la distancia euclídea. Se entregarán ejemplos y algunas propiedades básicas.

El espacio vectorial normado $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1 , \dots , x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R} \ ; \ \forall i = 1, \dots , n\}$$

Operaciones entre vectores:

1. Suma

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \dots , x_n) + (y_1, \dots , y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots , x_n + y_n) \ ; \ \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

2. Producto por un escalar

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots , x_n) = (\alpha x_1, \dots , \alpha x_2) \ ; \forall \, x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \, \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Producto punto euclidiano

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ ; \ \forall \, x = (x_1, \dots , x_n) \ ; y = (y_1, \dots , y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Observación

$\mathbb{R}^n$ es llamado también espacio euclideano n - dimensional, esto es, un espacio de dimensión n.

Propiedades del producto punto euclídeo

1. $x \cdot x \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$
2. $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $x \cdot y = y \cdot x$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
4. $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$; $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot x &= x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0 \end{aligned}}$$

Norma euclidiana

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\ ; \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades de norma euclidiana

1. $\|x\| > 0$; $\forall\, x \neq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, \cdots, 0)$; donde x es el vector nulo de $\mathbb{R}^n$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad triangular)

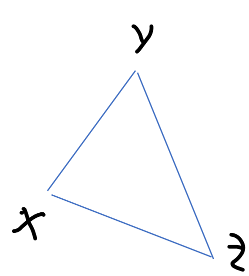
Distancia euclidiana

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}$$

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n)\ ; y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades de distancia euclidiana

1. $d(x, y) \geq 0$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ para $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $d(x, y) = d(y, x)$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$



Observación

1. En la recta real $\mathbb{R}$; la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ se define

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$$

2. Para $n = 1$, la norma euclidiana es precisamente el valor absoluto de él, dado que si $x = x_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \| x_1\| = \sqrt{x_1^2} = | x_1|$

3. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se dice unitario si $\| x\| = 1$

$i = e_1 = (1,0,0)$
$\Rightarrow \|e_1\| = 1$

$j = e_2 = (0,1,0)$
$\Rightarrow \|e_1\| = 1$

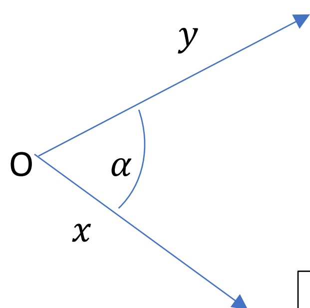
$k = e_3 = (0,0,1)$
$\Rightarrow \|e_1\| = 1$

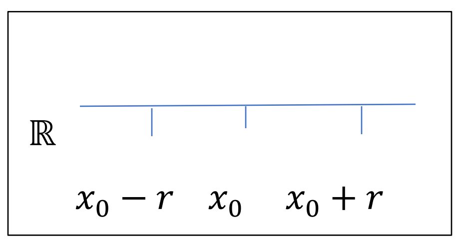
4. Angulo entre dos vectores
   Siempre se cumple que $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$$

Observación

Ortogonalidad (perpendicularidad) entre x e y, sucede cuando $x \cdot y = 0$ lo cual significa que $\cos\alpha = 0$ y por consiguiente $\alpha = \frac{\pi}{2}$.





Entornos de un punto

Definición

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, llamaremos entorno (o vecindad) del punto x_0 a cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ centrado en el punto x_0 el cual puede expresarse como sigue:

$$]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R}/x_0 - r < x < x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R}/| x - x_0 | < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}/d(x, x_0) < r\}$$

A partir de la expresión anterior, la definición de entorno puede extenderse a $\mathbb{R}^n$ simplemente tomando la distancia en $\mathbb{R}^n$ ya definida.

Bola abierta y bola cerrada en $\mathbb{R}^n$

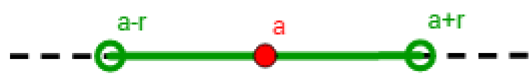
Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$, llamaremos bola abierta de centro x_0 y radio r al conjunto $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, x_0) < r\}$ (entorno abierto de x_0).

Hablaremos de bola cerrada de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ cuando $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, x_0) \leq r\}$ donde en $\mathbb{R}$, $\bar{B}(x_0, r)$ es un intervalo cerrado $[x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} / d(x, x_0) \leq r\}$.

Observación

Geométricamente tenemos,

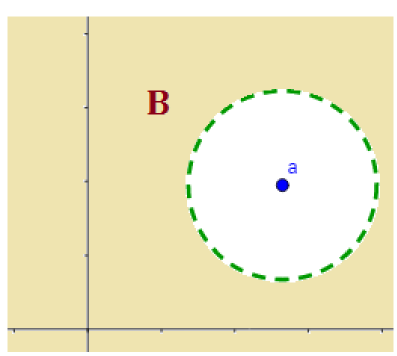
1. Para $n = 1$, $B(\mathrm{a}, r) = \,]\,\mathrm{a} - r\, , \mathrm{a} + r\,[$ es un intervalo abierto, así tanto $\mathrm{a} - r$ como $\mathrm{a} + r$ no pertenecen a $B(\mathrm{a}, r)$



$B(\mathrm{a}, r)$ en la recta real

$\bar{B}(\mathrm{a}, r) = [\,\mathrm{a} - r, \mathrm{a} + r\,]$ es un intervalo cerrado que posee extremos, esto es, tanto $\mathrm{a} - r$ como $\mathrm{a} + r$ pertenecen a $\bar{B}(\mathrm{a}, r)$

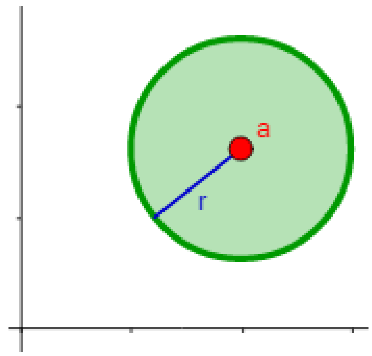
2. Para $n = 2$, $B(a, r)$ es el interior del circulo de centro el punto x_0 y radio r , esto es $B(x_0, r)$ es el circulo de centro $a = (x_0, y_0)$ y radio r de ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$.



$B = B(a, r)$ bola abierta de $\mathbb{R}^2$

$\bar{B}(a,r)$ también incluye a la circunferencia, esto es:

$$\bar{B}(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n / (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$$



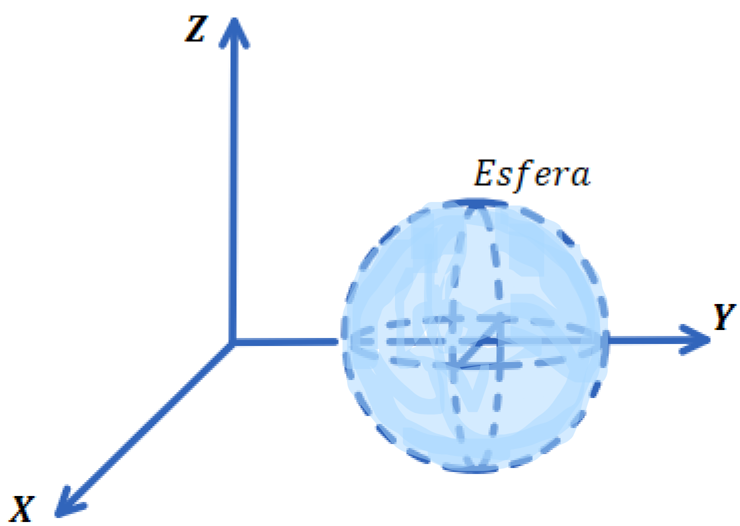
$\bar{B}(\mathrm{a},r)$ bola cerrada de $\mathbb{R}^2$

3. En $\mathbb{R}^3$, $B(x_0,r)$ es el interior de la esfera, sin la cascara, de centro el punto $x_0 = (a,b,c)$ y radio r , tal que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2$$

Mientras que $\bar{B}(x_0,r)$ también incluye a dicha esfera.

En la figura siguiente tenemos una esfera no centrada en el origen y sin la cascara.



Esfera en $\mathbb{R}^3$

3. La bola abierta , $B(x_0, r)$ siempre está contenida en la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$.
4. Hemos utilizado el término esfera para hacer referencia a la frontera de la bola tridimensional, pero se puede generalizar este concepto a cualquier dimensión mediante la siguiente definición.

Definición

Se define la esfera de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ y se anota por $S_r(x, x_0)$ como el conjunto

$$\begin{aligned} S_r(x, x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - x_0\| = r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x, x_0) = r\} \end{aligned}$$

Así para

1. $n = 2$,

$$\begin{aligned} S_r(x, x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x, x_0) = r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

donde $x_0 = (a, b)$.

2. $n = 3$,

$$\begin{aligned} S_r(x, x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^3 / d(x, x_0) = r\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

donde $x_0 = (a, b, c)$.

Interior, exterior y frontera de un conjunto de $\mathbb{R}^n$

Si los conjuntos admiten una representación gráfica resulta aconsejable dar las siguientes definiciones matemáticas.

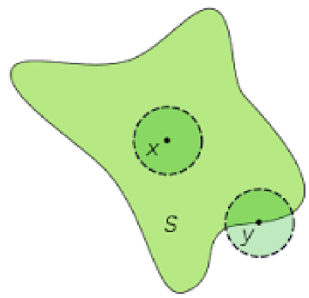
Consideremos $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ luego tenemos:

1.- x es un punto interior de S si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq S$

Observaciones

1. Al conjunto de puntos interiores de S lo anotaremos por $int(S)$

2. Es claro que $int(S) \subseteq S$
3. En la figura siguiente x es un punto interior de S pero y no es un punto interior de S



2.- x es un punto exterior de S si existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S^c$.

Observaciones

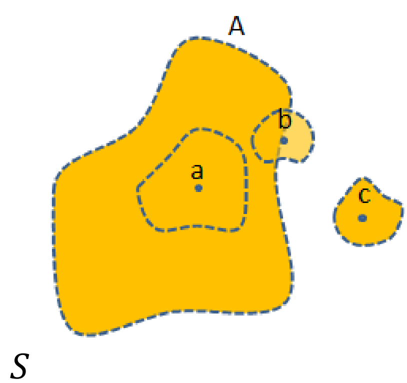
1. Al conjunto de puntos exteriores de S lo anotaremos por $ext(S)$
2. Es claro que $ext(S) = int(S^c) \subseteq S^c$

3.- x es un punto frontera de S si dado cualquier $r > 0$ se tiene que :

$$B(x,r) \cap S \neq \emptyset \text{ y } B(x,r) \cap S^c \neq \emptyset$$

Observación

1. Al conjunto de puntos frontera de S lo anotaremos por $Fr(S)$
2. En la figura anterior y es un punto frontera
3. En la siguiente figura tenemos que:



a es un punto interior de S , b es un punto frontera de S y c es un punto exterior de S .

A partir de la frontera de un conjunto, resulta muy fácil caracterizar cuando un conjunto es abierto y cerrado o ni abierto ni cerrado.

Definición (Conjunto abierto)

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si no contiene puntos de su frontera, es decir

A es abierto si y sólo si $A \cap Fr(A) = \emptyset$

Observación

También respecto a un conjunto abierto tenemos una definición equivalente:

A es abierto si y sólo si $int(A) = A$

En relación con lo anterior es obvio que $int\big(int(A)\big) = int(A)$

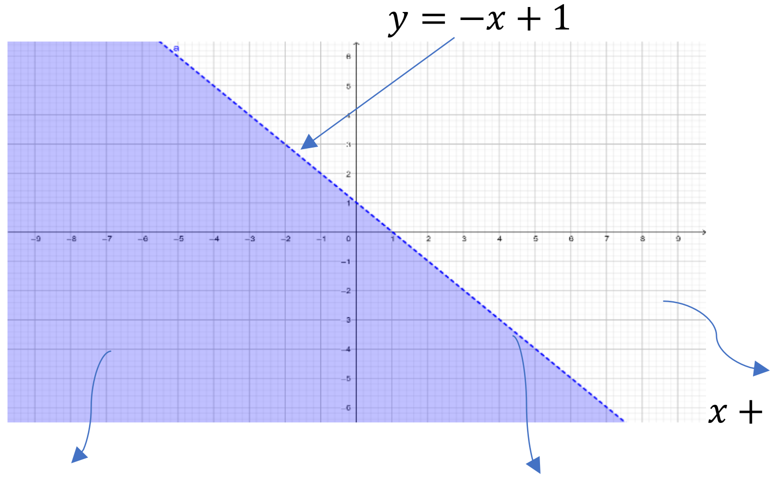
Ejemplos

1. $A = [0,3[\subset \mathbb{R}$
   $Fr(A) = \{0,3\}, int(A) =]0,3[\,, ext(A) =]-\infty, 0[\, \cup\,]3, \infty[$

   A no es abierto pues $A \cap Fr(A) = \{0\}$ esto es, $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

2. Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y < 1\}$ entonces
   $Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$
   Luego A es un conjunto abierto pues $A \cap Fr(A) = \emptyset$

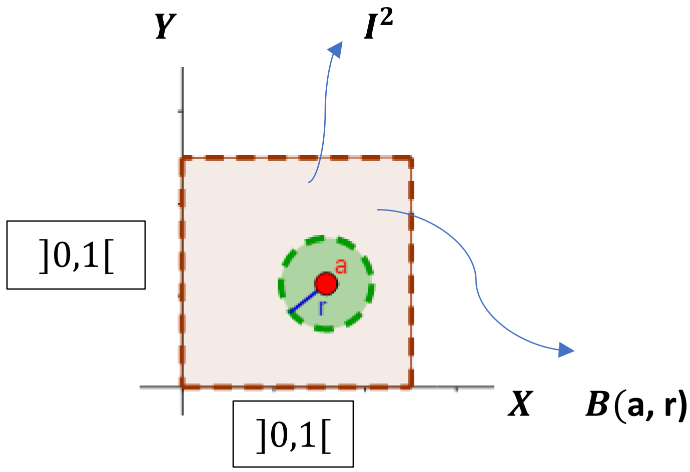
$y = -x + 1$



$x + y > 1(ext(A))$

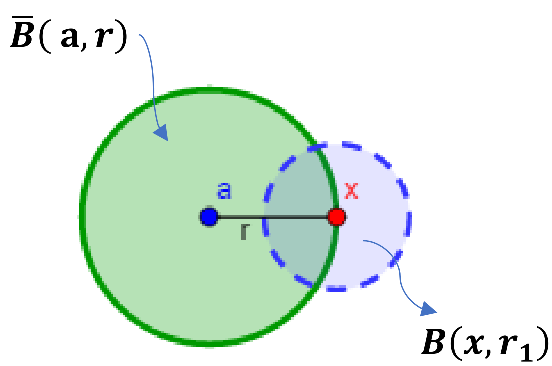
$x + y < 1 \;\; (A = int(A))$ $\qquad$ $x + y = 1\; (Fr(A))$

3. En general el producto finito de abiertos es abierto. Así, por ejemplo el cuadrado sin borde $I^2 =]0,1[\times]0,1[$ es un conjunto abierto del plano real.



4. Toda bola abierta $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

5. Las bolas cerradas $\bar{B}(\mathrm{a}, r)$ no son abiertos. En efecto, dado un punto x del borde de la bola, es decir un punto x cualquiera cumpliendo la condición $d(x, \mathrm{a}) = r$, luego se puede ver claramente que no existe ninguna bola abierta que contenga el punto x y que este contenido en la bola cerrada. En la figura la bola $B(x, r_1)$ no está contenida en $\bar{B}(\mathrm{a}, r)$



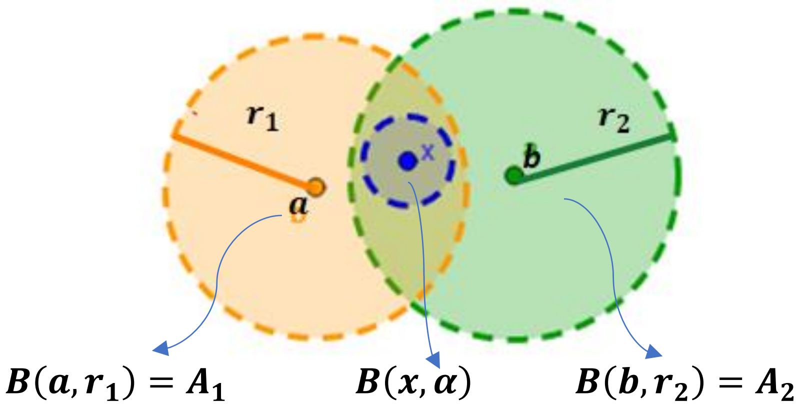
6. La unión de abiertos es un abierto. En efecto, veremos el caso finito. Supongamos que se trata de la unión dos abiertos A_1 y A_2 . Luego Sea $x \in A_1 \cup A_2$ entonces $x \in A_1 \vee x \in A_2$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A_1$, como A_1 es abierto, x es punto interior luego existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A_1$
Entonces

$$B(x,r) \subseteq A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$$

Esto significa que, x es un punto interior de $A_1 \cup A_2$, por tanto, se concluye que $A_1 \cup A_2$ es abierto.

7. La intersección finita de bolas abiertas es un abierto, en efecto



supongamos que tenemos dos bolas abiertas A_1 y A_2 y que x es un punto de la intersección $C = A_1 \cap A_2$.

Sean r_1 y r_2 los radios de las bolas A_1 y A_2 respectivamente y sean a y b sus respectivos centros, como $x \in C$ entonces $x \in A_1$ y también $x \in A_2$. Por tanto, la distancia de x a los centros de las bolas es menor que r_1 y r_2 .

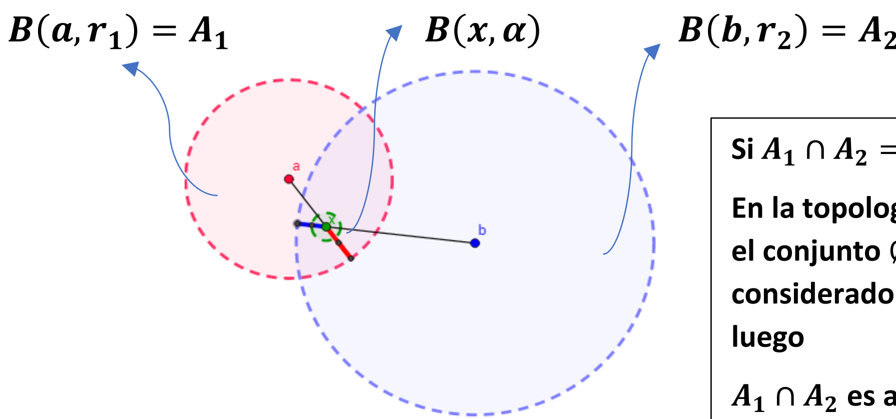
Sean

$$k_1 = r_1 - d(x,a)$$

$$k_2 = r_2 - d(x,b)$$

$$\alpha = mínimo\left\{\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right\}$$

entonces, la bola de centro x y de radio α está contenida estrictamente en las bolas A_1 y A_2 y, por consiguiente, en su intersección C , sigue entonces que $x \in B(x,\alpha) \subset A_1 \cap A_2 = C$. Esto prueba la afirmación. Observe de lo anterior, en la siguiente figura tenemos el esquema de la demostración.



Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

En la topología usual el conjunto $\emptyset$ es considerado abierto , luego

$A_1 \cap A_2$ es abierto

En la imagen, el disco rojo es la bola A_1 y el disco azul es la bola A_2 . El segmento rojo mide k_1 y el segmento azul mide k_2 , la bola verde tiene radio α .

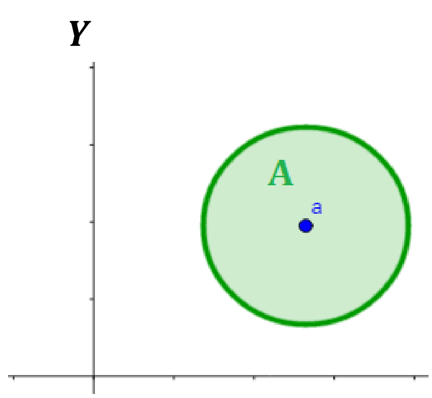
8. La intersección finita de abiertos es un abierto es consecuencia de que la intersección de bolas abiertas sea un abierto.

Definición (Conjuntos cerrados)

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento $B = \mathbb{R}^n - A = A^C$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto $B = \mathbb{R}^n - A = \{x \in \mathbb{R}^n / x \notin A\}$.

Propiedades

1. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.



Ejemplo en 2. En $\mathbb{R}$

$\{x\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ pues

$\{x\}^c =]-\infty, x[\cup]x, \infty[$

Es abierto pues es la unión de dos abiertos.

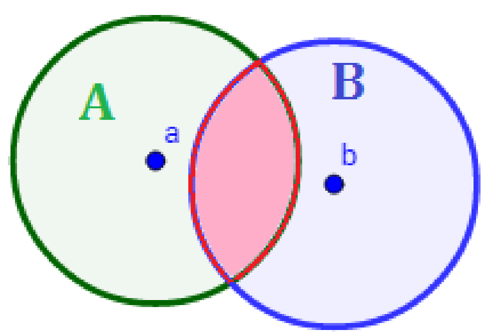
La figura representa una bola cerrada del plano real

2. Cualquier punto es un conjunto cerrado, ¿por qué?

3. Un conjunto puede ser abierto y cerrado. En la topología usual, los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados son el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total $\mathbb{R}^n$.

4. La unión finita de cerrados es un cerrado, en efecto:
   Sean A_1 y A_2 dos conjuntos cerrados y sea C su unión $C = A_1 \cup A_2$
   Los complementarios de A_1 y A_2 son:
   $$X_1 = \mathbb{R}^n - A_1 = A_1^c$$
   $$X_2 = \mathbb{R}^n - A_2 = A_2^c$$
   Los cuales son conjuntos abiertos pues A_1 y A_2 son cerrados, por tanto $Z = X_1 \cap X_2$ también es un abierto (es intersección finita de abiertos).
   Por leyes de Morgan, $Z^c = (X_1 \cap X_2)^c = X_1^c \cup X_2^c = A_1 \cup A_2 = C$.
   Como $Z = C^c$ es abierto entonces C es cerrado.

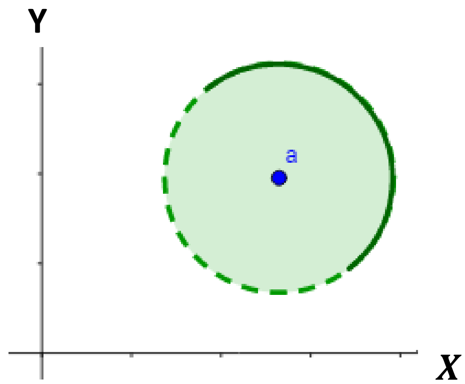
5. La intersección de cerrados es un cerrado. En efecto, veremos el caso de intersección finita

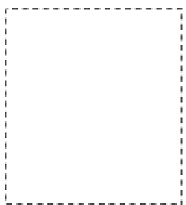


Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ $\emptyset^c = \mathbb{R}^2$ que es abierto por 3. Luego $A \cap B$ es cerrado.

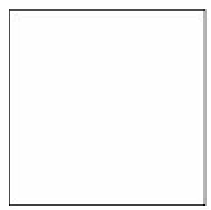
   Sean A y B dos cerrados, para probar que su intersección es cerrada hay que probar que su complemento es abierto. Por Morgan se cumple
   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
   es abierto pues es unión de abiertos luego $A \cap B$ es un conjunto cerrado.

6. Un conjunto puede ser ni abierto ni cerrado (ver figuras)

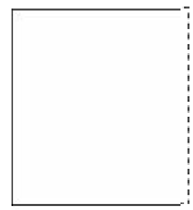




Cuadrado abierto



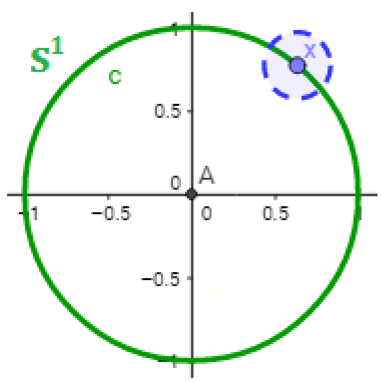
Cuadrado cerrado



Cuadrado ni abierto ni cerrado

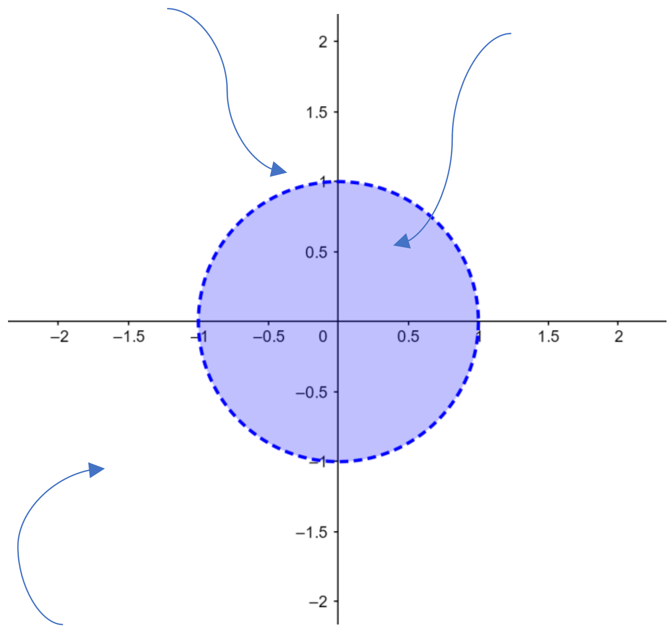
Ejemplos en general

1. La circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ es un conjunto cerrado.



Pues dado un punto x de la circunferencia, no existe ninguna bola abierta que lo contenga y que este contenida en la circunferencia. Además, el complemento de S^1 es $x^2 + y^2 > 1$ y $x^2 + y^2 < 1$ lo cual se ve en la siguiente figura siguiente que es abierto.

$x^2 + y^2 = 1$ (borde segmentado) $\quad x^2 + y^2 < 1$ (región en azul)



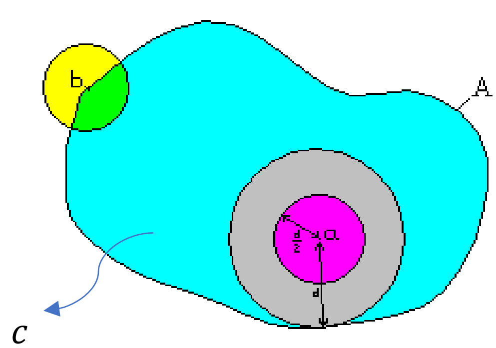
$x^2 + y^2 > 1$ (región en blanco)

2. $A = [a,b]$ es un conjunto cerrado pues $A^c =]-\infty, a[\ \cup\ ]b, \infty[$ es la unión de dos abiertos y por tanto el complemento de A es abierto.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que **$x \in A$ es un punto de acumulación de A** si para todo entorno de x, $B(x,r)$ se cumple que $(B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, esto es, x es punto de acumulación si todo entorno de x contiene al menos un punto de A diferente de x .

Llamaremos A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A .



En la figura, tanto a y b son puntos de acumulación, pero no el punto c .

Ejemplo

$A = [0,1[$ implica que $A' = [0,1]$

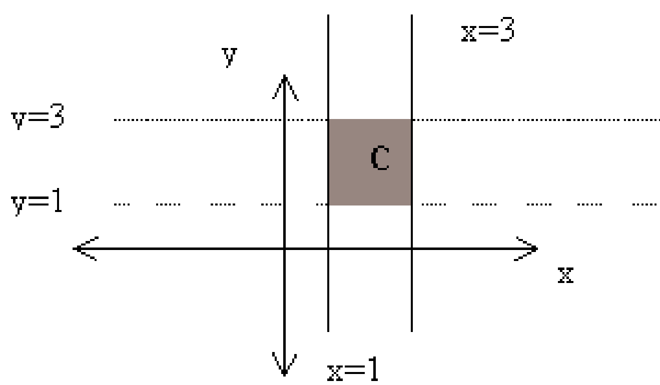
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < x^2\}$ implica que $B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2\}$

Un criterio que relaciona el concepto de punto de acumulación con los conjuntos cerrados es lo siguiente:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es cerrado si y solo si $A' \subseteq A$.

En los ejemplos anteriores ambos conjuntos no son cerrados dado que tanto A , B no contienen a todos sus puntos de acumulación.

Ejemplo



En la figura el conjunto C no es cerrado pues por ejemplo el punto $(3,3)$ es un punto de acumulación de C pero no pertenece a C .

Conjuntos compactos

Definición

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice:

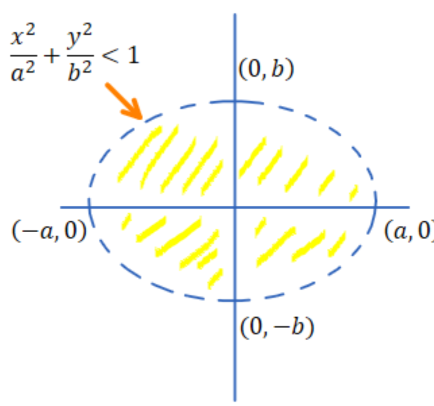
1. **acotado** si existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$.
2. **compacto** si es cerrado y acotado.

Ejemplos

1. $A = [a,b]$ es cerrado y acotado por $M = máx\{|a|,|b|\}$, luego A es compacto. ($[-5,2]$, es cerrado y acotado por $5 = máx\{|-5|,|2|\}$)

2. La bola cerrada $\bar{B}(x_0,r)$ es acotada pues si $x \in \bar{B}(x_0,r)$, entonces $d(x,x_0) = \|x - x_0\| \leq r$, como $\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\| \leq r$ implica que $\|x\| \leq M$ con $M = r + \|x_0\|$. Por tanto $\bar{B}(x_0,r)$ es compacto.

3. El conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$ con $a,b > 0$ es acotado ya que $\|x\|, \|y\| \leq máx\{|a|,|b|\}$ $\forall (x,y) \in A$, pero no es compacto ya que, por ejemplo, el punto $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ pertenece a $Fr(A)$ pero no al propio A, y por consiguiente no es cerrado.



Sea $u = (x,y) \in A \Rightarrow$ si por ejemplo $|a| > |b| \Rightarrow$

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{x^2} = \|x\|$$

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{y^2} = \|y\|$$

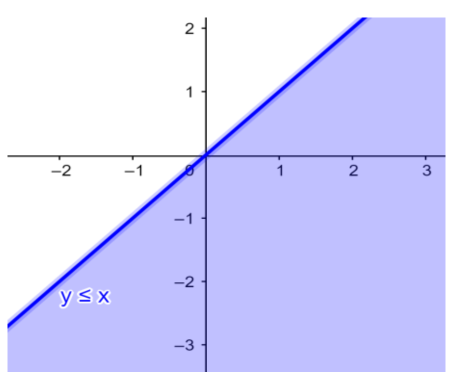
$\Rightarrow a^2 > x^2$ y $a^2 > y^2$

$\Rightarrow 2a^2 > x^2 + y^2$

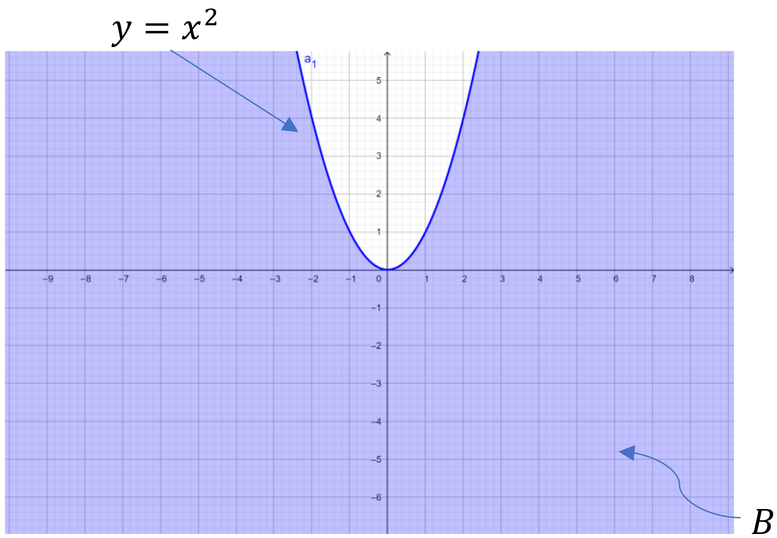
$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{2a^2}$ =M

$$\|u\| \leq M = \sqrt{2a^2}$$

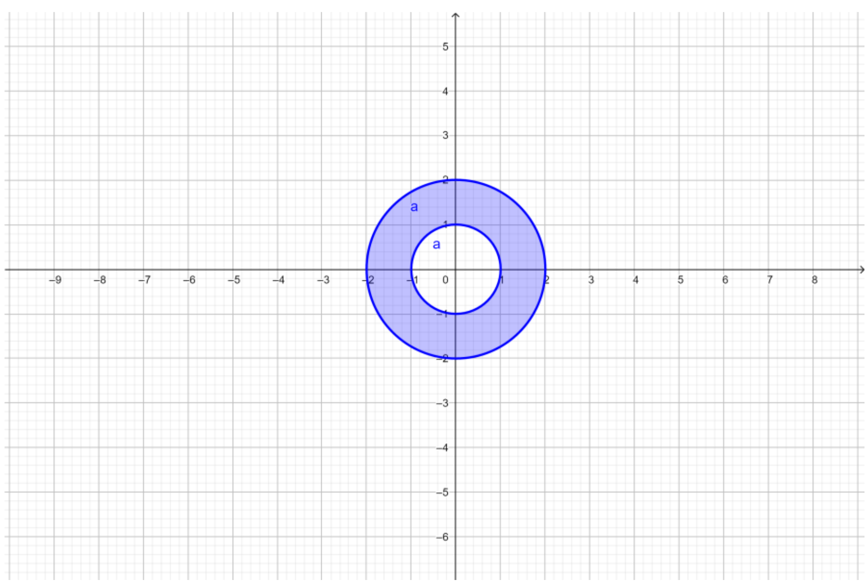
4. El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x\}$ es cerrado, pero no es compacto, basta observar que A no está acotado, A es una región infinita.



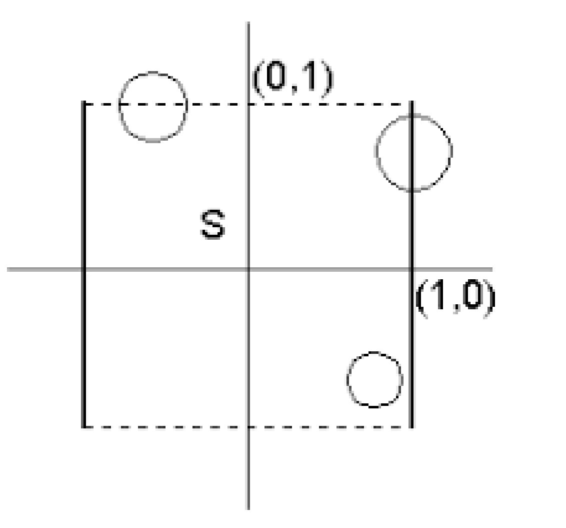
5. El conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2\}$ no es compacto, por las mismas razones dadas en ejemplo 4.



6. El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ es compacto pues en este caso $C = C'$ luego es cerrado y además es a acotada (región finita).



7. Sea $A = S \cup D$ donde $A = [-1,1]$ x $]-1,1[$ y D: $x = 2$



No es compacta dado que por ejemplo el punto (0,1) es un punto de acumulación de A pero que no está en A y por consiguiente A no es cerrado además no es acotado.

Definición (Diámetro de un conjunto)

El diámetro de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es el elemento:

$$D(A) = Sup\,\{d(a,b): a, b \in A\}$$

El diámetro de un conjunto es el supremo del conjunto todas las distancias entre pares de puntos del conjunto

Ejemplos

1.- Si $A = [1,5] \Rightarrow D(A) = 4$ (Aquí el diámetro es la distancia máxima)

2.- Si $B = [1,5[\Rightarrow D(B) = 4$ (Aquí el diámetro no es la distancia máxima)

3.- Si $C =]1,5[\Rightarrow D(C) = 4$ (Aquí el diámetro no es la distancia máxima)

4.- Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 9\} \Rightarrow D(D) = 6$

5.- Si $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 > 9\} \Rightarrow D(E) = \infty$

En términos simples el diámetro de un conjunto mide lo más ancho del conjunto.

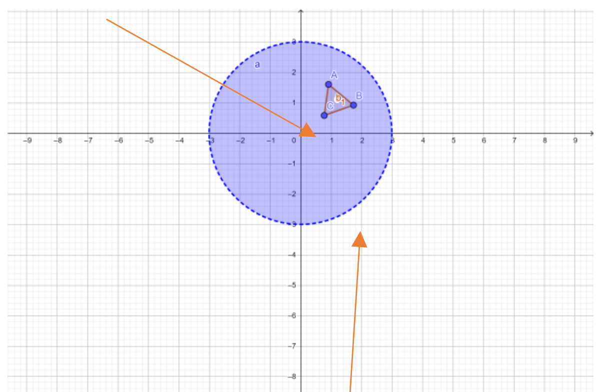
Otra definición complementaria sobre conjuntos acotados

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se dice que es acotado si y sólo si el conjunto está contenido en una bola centrada en el origen.

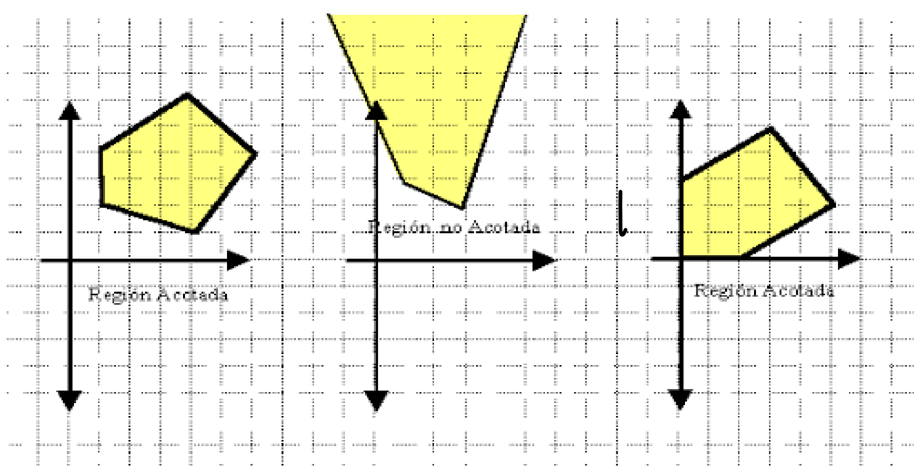
Decimos además que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado, cuando su diámetro es finito.

Cuando el supremo de la definición de diámetro de un conjunto no existe diremos que el conjunto tiene diámetro infinito. Y por tanto el conjunto no es acotado

$A \in \mathbb{R}^2$



$\boldsymbol{A \subset B((0,0),3)}$



Ejercicios:

1.- Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 5\}$.

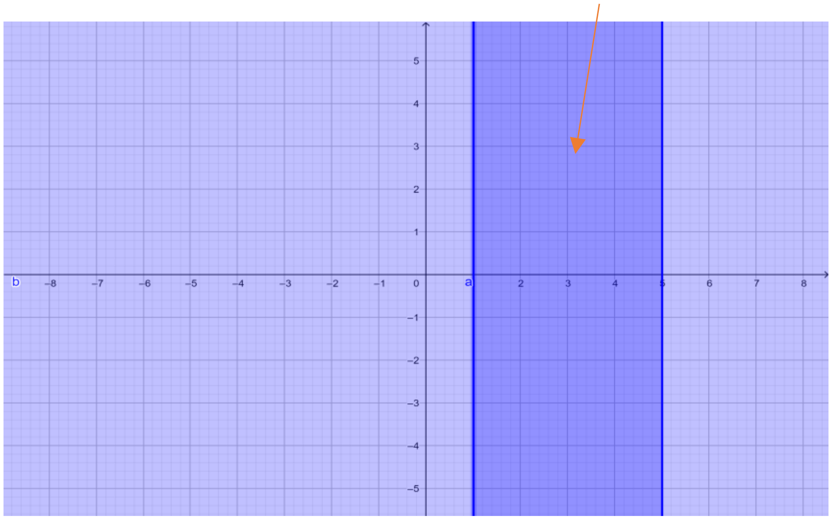
i) Dibujar el conjunto A

ii) Determine $int(A), ext(A)$ y $Fr(A)$

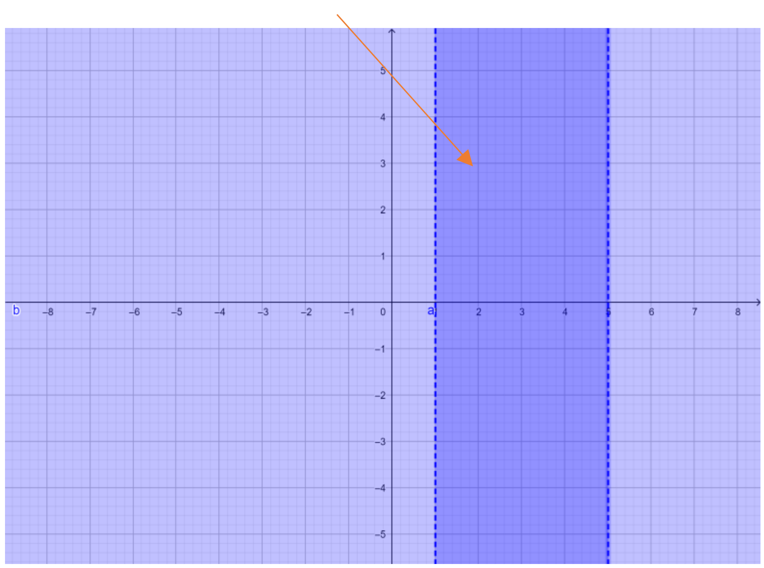
iii) ¿Es A $acotado$?

Solución

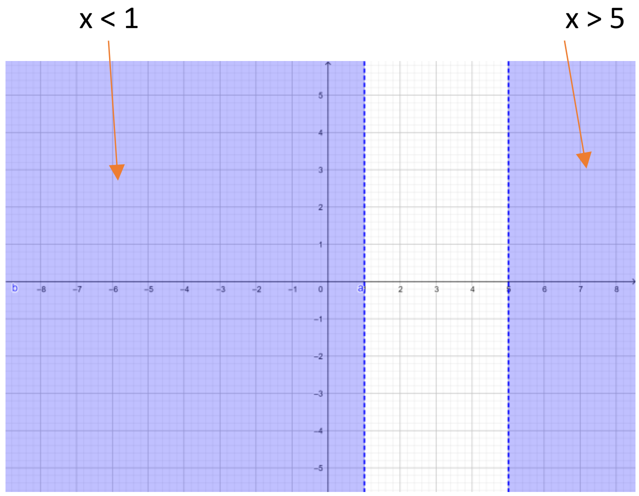
i) $\boldsymbol{A}$



ii) $int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < 5\}$



$ext(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1 \ \vee x > 5\}$



$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \ = 1 \ \vee x = 5\}$

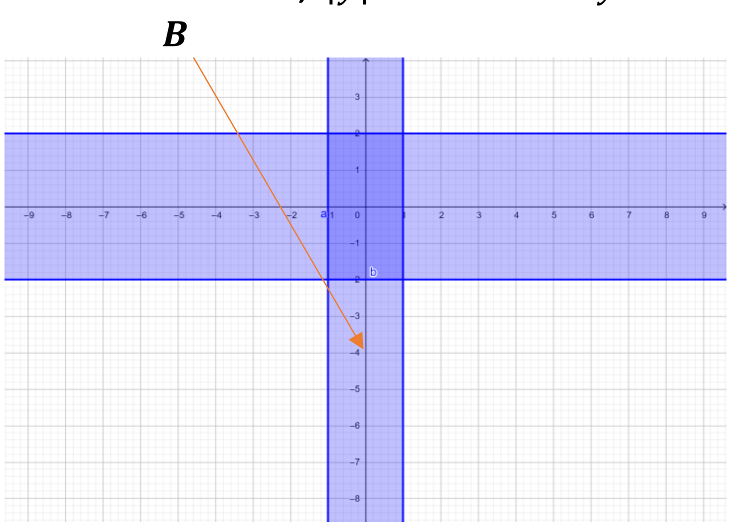
A no es acotado pues $D(A) = \infty$, A es una región infinita.

2.- Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 2\}$.

i) Dibuje el conjunto
ii) Determine $int(B), ext(B)$ y $Fr(B)$
iii) Determine $D(B)$
iv) ¿Es B $compacto$?

Solución

i) $|x| \leq 1 \ \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ **;** $|y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$



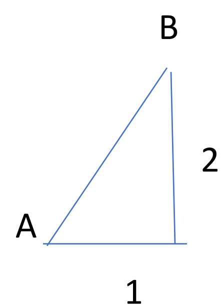
$int(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1 \wedge |y| < 2\}.$

$ext(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| > 1 \ \vee \ |y| > 2\}.$

$Fr(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (|x| = 1 \wedge -2 \leq y \leq 2)\} \cup$

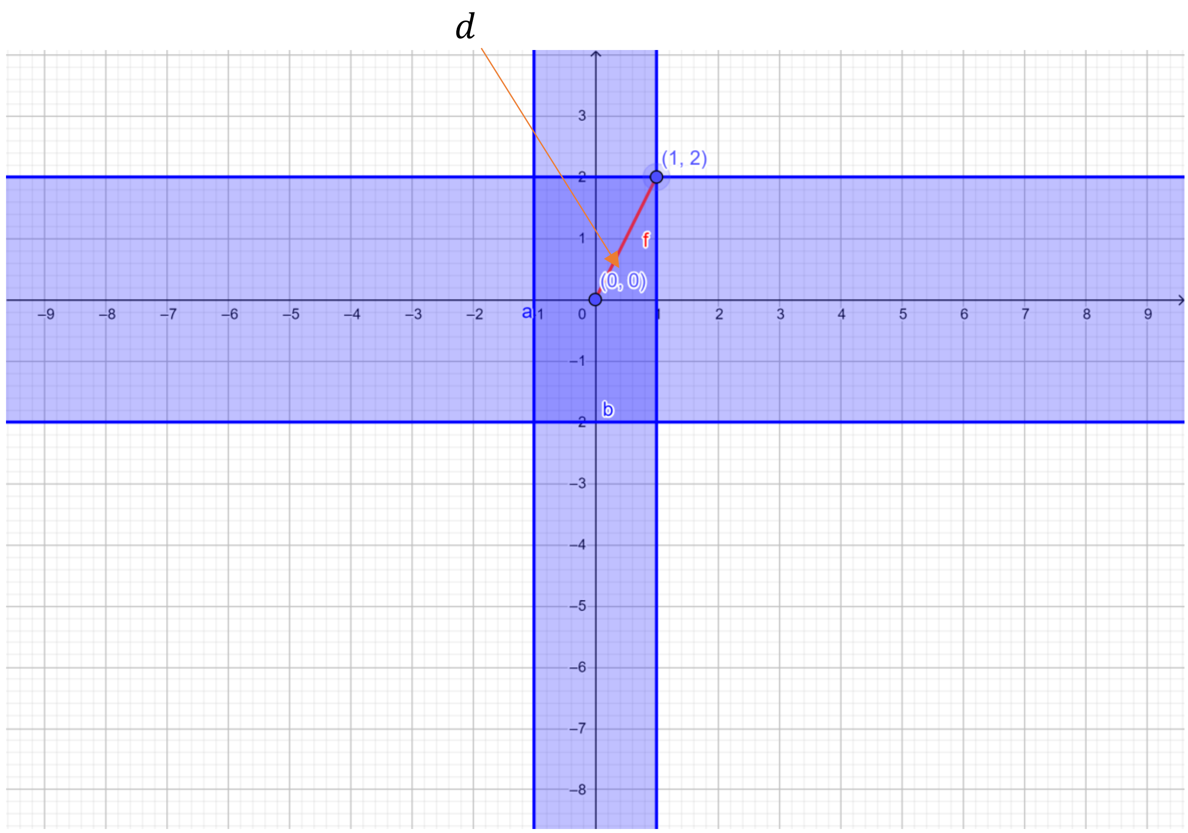
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (|y| = 2 \wedge -1 \leq x \leq 1)\}$

$\overline{AB} = d = \sqrt{1^2 + 2^2 =} \ \sqrt{5}$

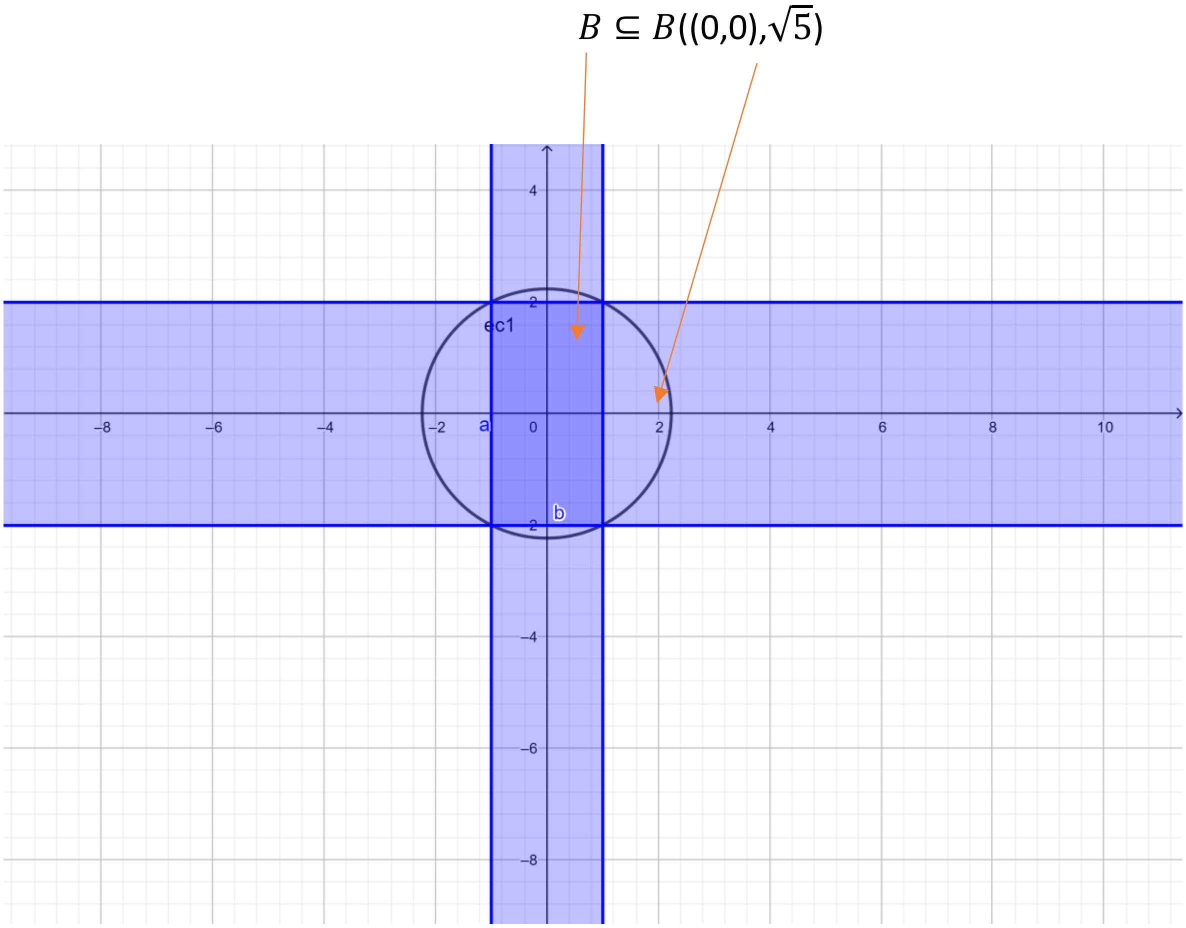


Por tanto

$D(B)$=2$\overline{AB}$=2d=2$\sqrt{5}$



ii) B es cerrado pues $B' = B$
A es acotado pues $B \subseteq B\big((0,0), d\big)$; $\forall d \geq \sqrt{5}$
Esto es, el conjunto B esta contenido en la bola centrada en el origen $(0,0)$ y de radio mayor o igual a $\sqrt{5}$ (ver figura siguiente). Por tanto, se concluye que B es compacto.



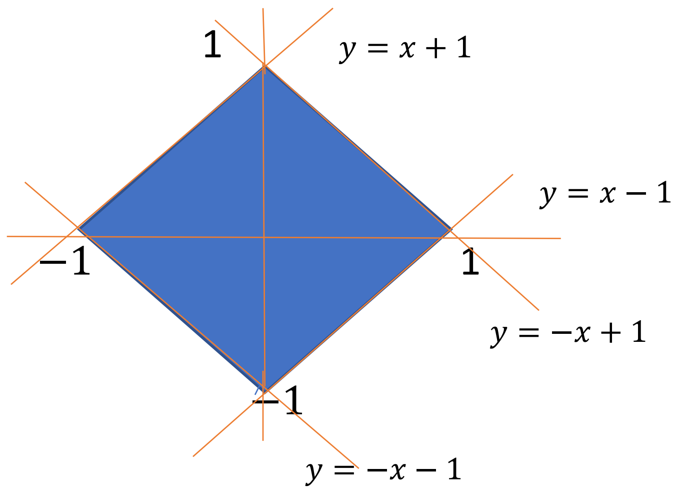
3.- Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + \ |y| \leq 1\}$.

i) Dibuje el conjunto
ii) Determine $int(C), ext(C)$ y $Fr(C)$
iii) Determine $D(C)$
iv) ¿Es $C\ compacto$?

Solución

i) $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 1 & \wedge & -x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 & \wedge & -x - y \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x + 1 & \wedge & y \leq x + 1 \\ y \geq x - 1 & \wedge & y \geq -x - 1 \end{cases}$



ii) $int(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y < -x + 1 \wedge y > -x - 1 \} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y < x + 1 \wedge y > x - 1 \}$

$ext(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > -x + 1 \; \vee \; y < -x - 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y > x + 1 \; \vee \; y < x - 1 \}$

$Fr(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x + 1 \wedge \; 0 \leq x \; \leq 1\} \cup$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / y = -x - 1 \wedge -1 \leq x \leq 0 \} \cup$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x + 1 \wedge -1 \leq x \; \leq 0\} \cup$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x - 1 \wedge 0 \leq x \; \leq 1\}$

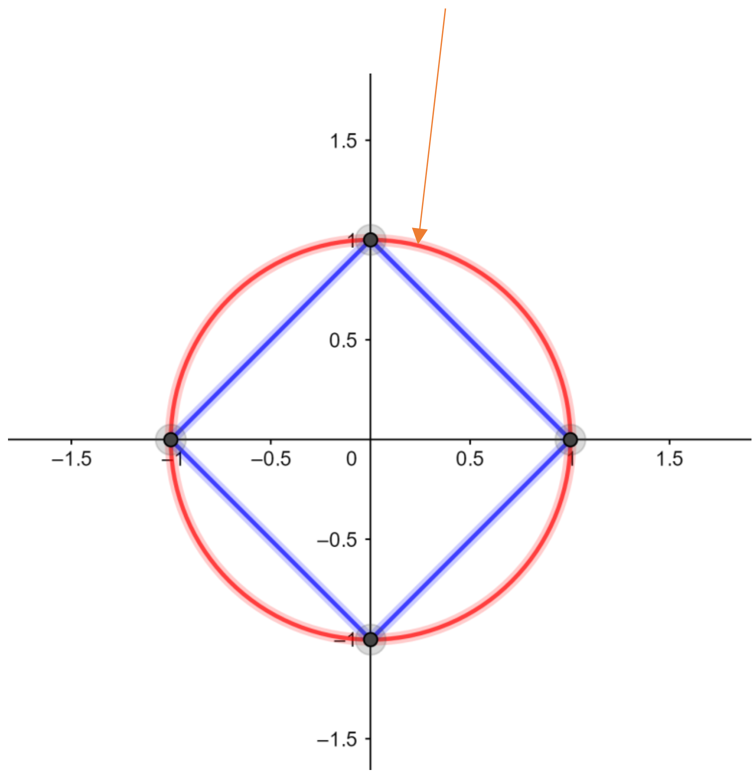
iii) $D(C) = 2$

iv) C es cerrado pues $C' = C$

C es acotado pues $C \subseteq B\big((0,0), d\big)\ \forall\ r \geq 1$
Por tanto C es compacto.

Ver figura siguiente.

$C \subseteq B\big((0,0), 1\big)$



4.- Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^3\}$.

i) Determine $int(D), ext(D)$ y $Fr(D)$
ii) Dibuje el conjunto D
iii) Determine $D(D)$
iv) ¿Es $D\ compacto?$

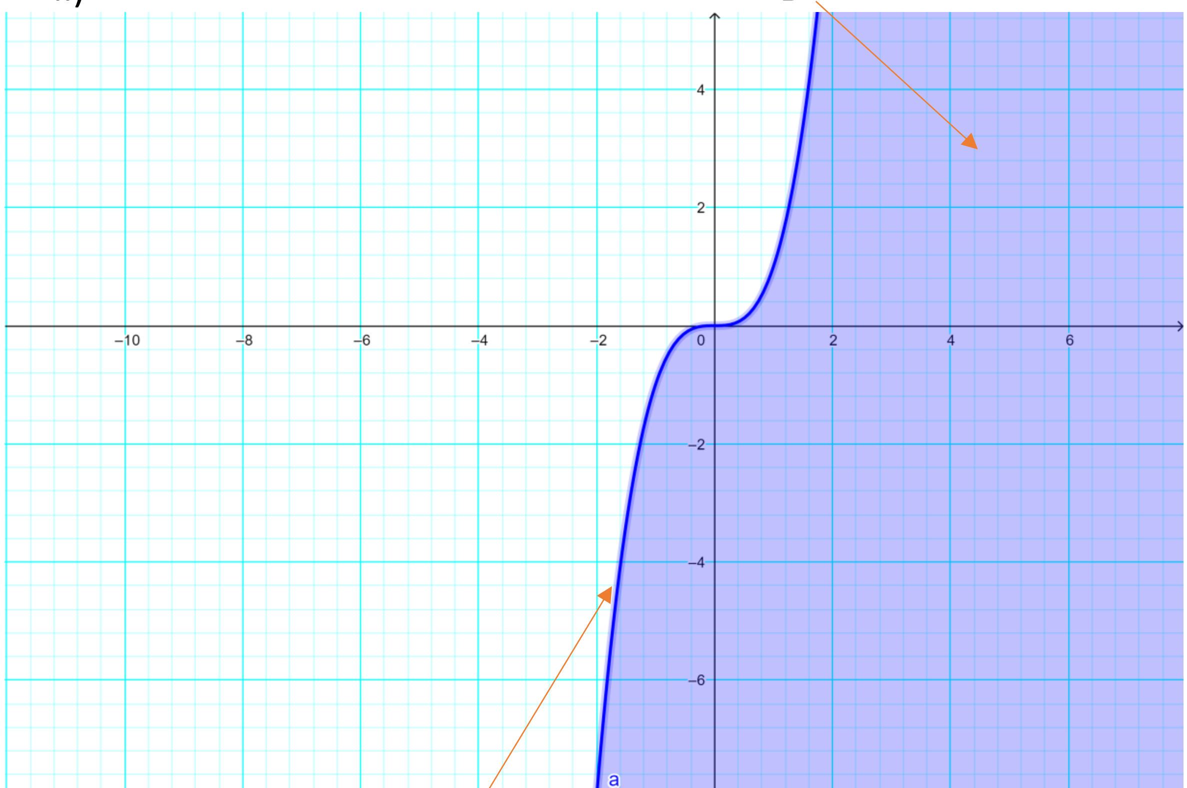
Solución

i) $int(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x^3\}$

$$ext(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^3\}$$

$$Fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3\}$$

ii) D



$y \leq x^3$

iii) $D(D) = \infty$, pues D es una región infinita

iv) D no es compacta pues no es acotada, dado que D es una región infinita.