

Escalera de Distancia Cosmológica

Mauro Jélvez

Distancias Extragalácticas

La medición precisa de distancias a galaxias es crucial para determinar:

- **Luminosidad intrínseca:** $L = 4\pi d^2 F$ (donde F es flujo observado)
- **Masa estelar:** $M_* \propto L$ (asumiendo relación masa-luminosidad)
- **Tamaño físico:** $\theta \rightarrow R = d \tan \theta \approx d\theta$ (para ángulos pequeños)
- **Tasas de formación estelar:** Corregir flujos de líneas como $H\alpha$

Relación con Cosmología

La distribución 3D de galaxias revela:

$$P(k) = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \quad (\text{Espectro de potencia de fluctuaciones})$$

donde las posiciones \mathbf{x} dependen de distancias precisas.

Métodos de Medición

Indicadores de Distancia

Método	Rango (Mpc)	Precisión
Cefeidas	0.1-50	5-10%
SN Ia	50-1000	7%
Tully-Fisher	10-200	20%

Table 1. Principales métodos de distancia extragaláctica

Ejemplo: Cefeidas

Periodo-luminosidad:

$$M_V = -2.81 \log_{10} P - 1.43 \quad (P \text{ en días})$$

Retos Actuales

- Tensión en H_0 entre métodos locales y CMB
- Correcciones por extinción/galaxia anfitriona
- Sesgos de selección en surveys

La escalera de distancias es un método jerárquico donde cada "peldaño" calibra el siguiente, permitiendo medir distancias cosmológicas. Su estructura sigue:

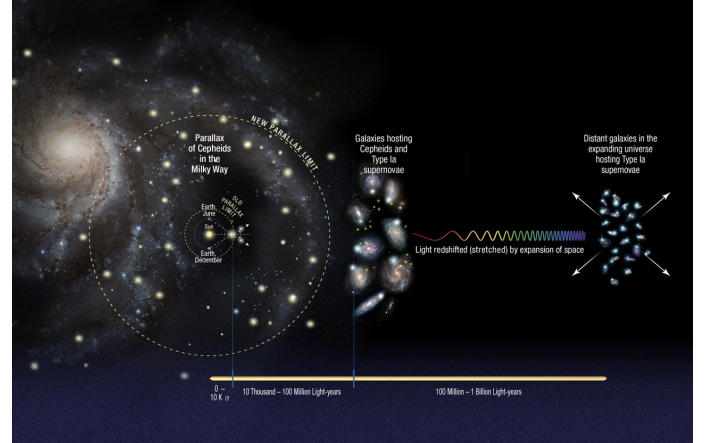


Fig. 1. Escalera de distancias cósmicas (Adaptado de Freedman 2021)

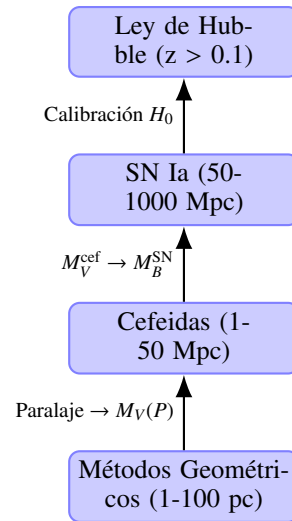


Fig. 2. Estructura de la escalera de distancias (Adaptado de Carroll & Ostlie)

Peldaños Clave

1. Métodos Geométricos

- Paralaje trigonométrico: $d[\text{pc}] = 1/\pi[\text{arcsec}]$
- Precisión actual (GAIA): $\sim 10\mu\text{as} \Rightarrow 100 \text{ kpc}$

2. Cefeidas

Relación período-luminosidad:

$$M_V = -2.76(\log_{10} P - 1) - 4.16 \quad (\text{Freedman 2020})$$

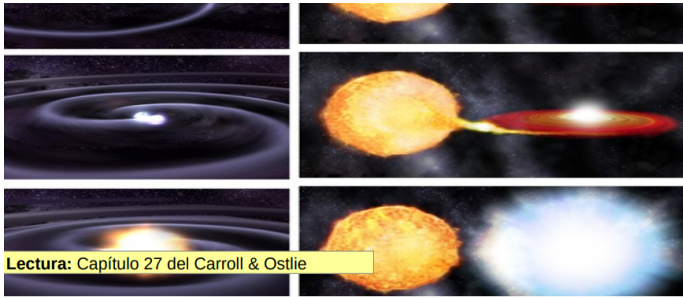


Fig. 3.

3. Supernovas Ia

Standard candles con:

$$\mu = m_B - M_B + \alpha x_1 - \beta c + \Delta_M + \Delta_B$$

donde x_1 y c corrigen por forma y color.

Determinación de H_0

La calibración final requiere:

$$H_0 = \left(\frac{v_{\text{rec}}}{d} \right)_{z \rightarrow 0}$$

donde v_{rec} incluye correcciones por flujo peculiar.

Tensión en H_0

Método	H_0 [km/s/Mpc]
Cefeidas+SNe (SH0ES)	73.2 ± 1.3
CMB (Planck)	67.4 ± 0.5

Table 2. Discrepancia actual en H_0

El Método del Paralaje: Base de la Escalera de Distancias

El paralaje estelar aprovecha el movimiento orbital terrestre para medir distancias mediante triangulación:

$$d = \frac{1 \text{ au}}{\tan p} \approx \frac{1}{p} \text{ pc} \quad (p \text{ en arcosegundos})$$

Limitaciones y Alcance

Rango de Aplicación

- **Límite inferior:** ~ 0.01 pc (Próxima Centauri)
- **Límite superior:** ~ 100 pc (GAIA DR3 alcanza μas)

Factores Críticos

$$\sigma_d = \left(\frac{\sigma_p}{p^2} \right) \quad (\text{Error en distancia})$$

Para $p = 0.01''$ con $\sigma_p = 10\%$: $\sigma_d \approx 10$ pc

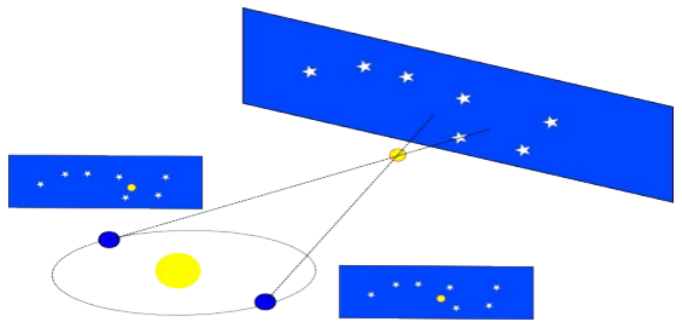


Fig. 4.

Método Calibrado	Precisión Obtenida
Cefeidas	$\pm 0.1 \text{ mag}$
RR Lyrae	$\pm 0.05 \text{ mag}$

Table 3. Impacto del paralaje en otros métodos

Importancia en la Escalera Cósmica

Calibración de Indicadores Secundarios

Avances Observacionales

Misión GAIA

- Precisión típica: $20 \mu\text{as}$ (DR3)
- ~ 1.5 billones de estrellas medidas
- Extiende el rango a ~ 10 kpc para estrellas brillantes

Ejemplo Práctico

Para una estrella con $p = 50 \text{ mas}$:

$$d = \frac{1}{0.050} = 20 \text{ pc}$$

Error típico GAIA ($20 \mu\text{as}$):

$$\sigma_d = \frac{0.00002}{0.050^2} = 0.008 \text{ pc}$$

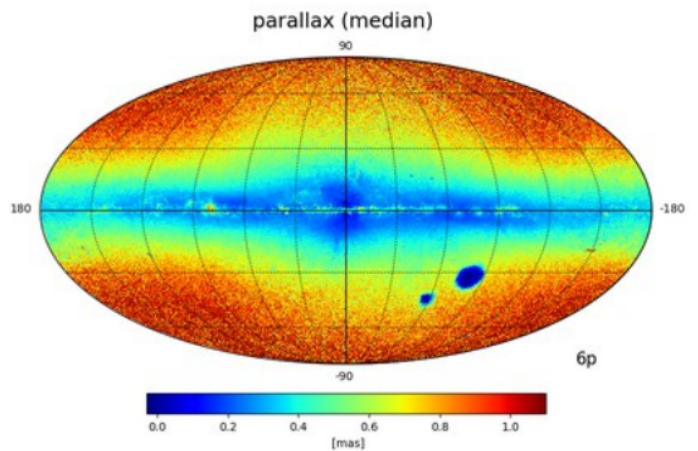


Fig. 5.

El telescopio espacial GAIA recientemente midió el paralaje de todas las estrellas en el cielo.

El halo de la Vía Láctea muestra estrellas con grandes velocidades.

Las Nubes de Magallanes se observan azules sin paralaje debido a que están a distancias mucho mayores.

Las Estrellas Cefeidas en la Escalera de Distancias

Henrietta Swan Leavitt (1908) estableció la relación período-luminosidad en las Cefeidas de la Nube Pequeña de Magallanes:

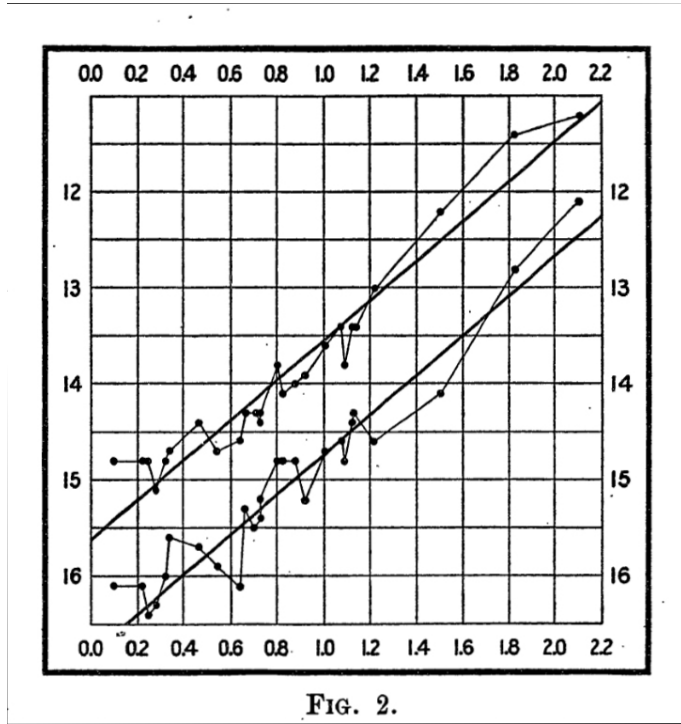


Fig. 6. Relación original período-luminosidad (Leavitt & Pickering, 1912)

Fundamento Físico

Relación Período-Luminosidad Moderna

Para Cefeidas clásicas (Tipo I):

$$M_V = -2.81(\log_{10} P - 1) - 4.23 \quad (\text{Freedman et al., 2020})$$

donde P está en días.

Módulo de Distancia

$$d = 10^{(m_V - M_V + 5 - A_V)/5} \quad [\text{pc}]$$

Parámetro	Descripción
m_V	Magnitud aparente en V
M_V	Magnitud absoluta (de PL)
A_V	Extinción en banda V

Aplicación Cosmológica

Calibración con GAIA

Paralajes de Cefeidas locales ($d < 10 \text{ kpc}$) reducen el error en H_0 :

$$\sigma_{H_0} \approx 2\% \quad (\text{SH0ES 2022})$$

Ejemplo Práctico

Para una Cefeida con:

- $P = 10 \text{ das}$
- $m_V = 24.5$
- $A_V = 0.2$

$$M_V = -2.81(\log_{10} 10 - 1) - 4.23 = -4.23$$

$$d = 10^{(24.5 - (-4.23) + 5 - 0.2)/5} = 18.2 \text{ Mpc}$$

Limitaciones y Correcciones

- **Metallicidad:** $\Delta M_V \approx 0.2 \text{ mag por dex}$
- **Curva de luz:** Forma afecta medidas de m_V
- **Extinción:** Requiere observaciones multi-banda

La Escalera de Distancias - Las Estrellas Cefeidas

Las estrellas Cefeidas son variables pulsantes que presentan una relación bien definida entre su periodo de pulsación y su luminosidad. Esta propiedad las convierte en candelas estándar fundamentales para la determinación de distancias cósmicas, especialmente en galaxias cercanas. Su utilidad radica en la estabilidad de su comportamiento periódico y en su alto brillo intrínseco.

Calibración de la relación período-luminosidad

Uso del método de paralaje

Para establecer con precisión la relación período-luminosidad de las Cefeidas, se mide la distancia a Cefeidas clásicas cercanas mediante el método de paralaje. Este método geométrico proporciona una distancia directa sin necesidad de modelos astrofísicos, permitiendo así calcular su magnitud absoluta con precisión:

$$M = m - 5 \log_{10}(d) + 5$$

donde M es la magnitud absoluta, m la magnitud aparente y d la distancia en parsecs.

Relación luminosidad-período-color

Con varias medidas de paralaje se ha logrado calibrar la relación que vincula el periodo de pulsación P_d , el color $(B - V)$, y la magnitud absoluta media en banda V, dada por:

$$M_{(V)} = -3.56 \log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

Esta expresión introduce una corrección por el color de la estrella, haciendo que la predicción de la luminosidad absoluta sea más precisa.

Aplicaciones en la medición de distancias extra-galácticas

Esta relación calibrada permite medir distancias hasta galaxias que contienen Cefeidas. Un caso importante es su aplicación a galaxias del Cúmulo de Virgo, donde se han podido determinar distancias de hasta aproximadamente 29 megaparsecs (Mpc). Las Cefeidas, al ser observables en otras galaxias, son un pedazo fundamental de la llamada *escalera de distancias cósmicas*.

Precisión y fuentes de error

Margen de error en la distancia

Las distancias obtenidas mediante esta técnica tienen un margen de error de entre 7% y 15%. Este rango depende de la calidad de los datos fotométricos, la amplitud del periodo medido y el tratamiento estadístico aplicado.

Extinción interestelar

La mayor fuente de error sistemático es la extinción interestelar, provocada por la absorción y dispersión de la luz por el polvo interestelar. Esto puede alterar tanto la magnitud aparente como el color observado, llevando a sobreestimar o subestimar las distancias si no se corrige adecuadamente.

Conclusión

Las estrellas Cefeidas son herramientas fundamentales en la astronomía extragaláctica. Su papel como candelas estándar bien calibradas ha permitido extender el alcance de nuestras mediciones de distancia a escalas intergalácticas, sentando las bases para determinar parámetros cosmológicos como la constante de Hubble y estudiar la expansión del universo.

Supernovas Tipo Ia en la Escalera de Distancias

Naturaleza de las SNe Ia: Mecanismo Termonuclear

Las supernovas Tipo Ia ocurren cuando una enana blanca alcanza el límite de Chandrasekhar ($\sim 1.4M_{\odot}$) por acreción de materia:

$$\rho_{\text{ignición}} \approx 2 \times 10^9 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow \text{Detonación de C}$$

Curva de Luz Característica

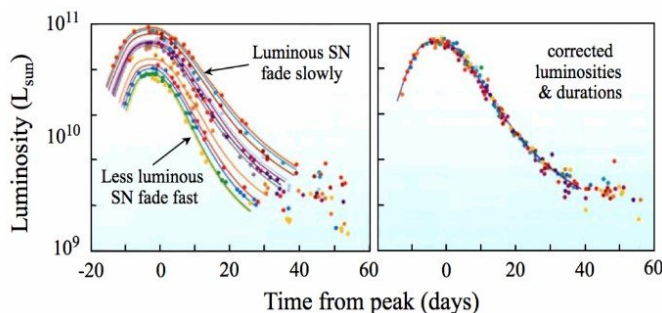


Fig. 7.

Propiedades como Candela Estándar

Relación de Phillips

$$\Delta m_{15}(B) = m_B(t = 15d) - m_B(t = \text{máximo})$$

$$M_B = -19.25 + 1.12\Delta m_{15}(B) - 0.61(\Delta m_{15}(B))^2$$

Correcciones Modernas

Método SALT2:

$$m_B = M_B + \mu + \alpha x_1 - \beta c$$

- x_1 : Parámetro de estiramiento
- c : Corrección por color

Aplicación Cosmológica

Rango de Distancias

Método	Rango (Mpc)
Cefeidas	≤ 50
SN Ia	50 – 1000

Table 4. Comparación de alcances

Ejemplo de Cálculo

Para una SN Ia con:

- $m_B^{\text{max}} = 22.5$
- $\Delta m_{15}(B) = 1.1$
- $A_B = 0.3$

$$M_B = -19.25 + 1.12(1.1) - 0.61(1.1)^2 = -19.34$$

$$\mu = 22.5 - (-19.34) - 0.3 = 41.54$$

$$d = 10^{41.54/5+1} = 780 \text{ Mpc}$$

Limitaciones y Sesgos

- Evolución con redshift de propiedades
- Variaciones en metalicidad progenitora
- Contaminación por SNe Iax (sub-Chandrasekhar)

Impacto en la Expansión Cósmica

Descubrimiento de Aceleración

Ecuación de estado:

$$w = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3} \quad (\text{Energía Oscura})$$

Supernovas Tipo Ia como Indicadores de Distancia: Caso M82 (2014)

El Caso de SN 2014J en M82

La supernova SN 2014J en la galaxia M82 proporcionó un ejemplo paradigmático para calibrar las SNe Ia, ubicada a 3.5 Mpc con magnitud pico $m_V \approx 10.5$.

Relación Luminosidad-Decaimiento

Efecto Phillips

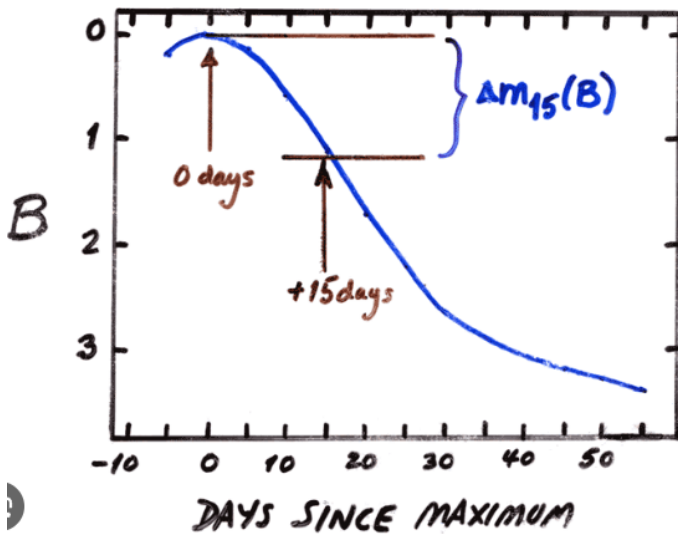


Fig. 8.

La relación cuantitativa se expresa como:

$$M_B^{\max} = (-19.05 \pm 0.02) - (0.80 \pm 0.05)(\Delta m_{15} - 1.1)$$

donde Δm_{15} mide el decaimiento en magnitudes a 15 días post-máximo.

Corrección de Color

$$\mu = m_B^{\max} - M_B + \alpha x_1 - \beta c + \delta$$

- x_1 : parámetro de estiramiento
- c : índice de color $B - V$
- δ : corrección por masa de la galaxia anfitriona

Análisis de SN 2014J

Parámetros Clave

Parámetro	Valor
$\Delta m_{15}(B)$	1.02 ± 0.05
c (color)	1.23 ± 0.03
m_V^{\max}	10.57 ± 0.02

Cálculo de Distancia

$$M_V = -19.25 - 0.8(1.02 - 1.1) = -19.31$$

$$\mu = 10.57 - (-19.31) - 0.12 = 29.76$$

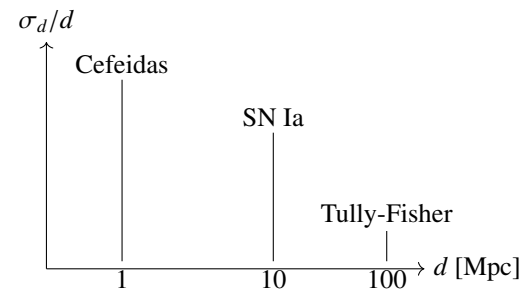
$$d = 10^{29.76/5+1} = 3.63 \text{ Mpc} \quad (\text{Consistente con Cefeidas})$$

Precisión y Limitaciones

Fuentes de Error

- Variación en metalicidad ($\sim 0.05 \text{ mag}$)
- Extinción diferencial ($\Delta A_V \sim 0.1$)
- Incertidumbre en Δm_{15} ($\pm 0.05 \text{ mag}$)

Comparación de Métodos



Implicaciones Cosmológicas

La calibración local con casos como SN 2014J reduce la incertidumbre en H_0 a $\sim 2\%$, crucial para resolver la tensión actual en cosmología.

Supernovas Tipo Ia como Candela Estándar

Fundamento Físico de las SNe Ia: Límite de Chandrasekhar

Las SNe Ia ocurren cuando enanas blancas alcanzan la masa crítica:

$$M_{\text{Ch}} = \frac{5.76}{\mu_e^2} M_{\odot} \approx 1.4 M_{\odot}$$

donde μ_e es el peso molecular por electrón.

Estandarización de la Luminosidad

La explosión termonuclear completa explica la consistencia luminosa:

$$L_{\text{peak}} \approx 2 \times 10^{43} \text{ erg/s} \quad (\text{para } {}^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}\text{Co} \rightarrow {}^{56}\text{Fe})$$

Metodología Observacional

Curvas de Luz

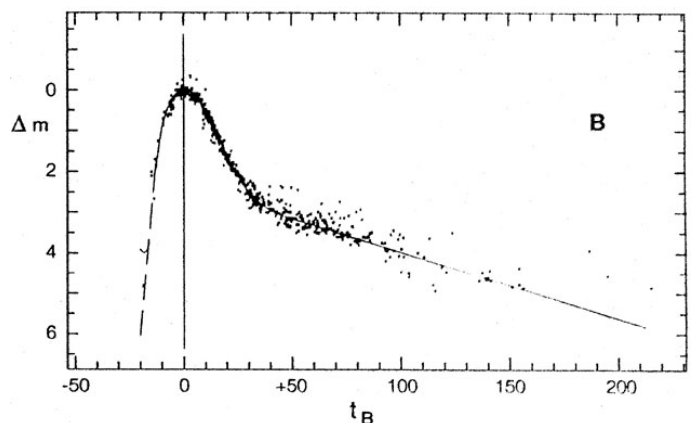


Fig. 9. Curva de luz típica de SN Ia mostrando la correlación entre luminosidad y tasa de decaimiento

Fórmula de Distancia

$$d = 10^{(m_B^{\max} - M_B + 5 - A_B)/5} \text{ [pc]}$$

- $M_B = -19.25 \pm 0.03$ (magnitud absoluta corregida)
- A_B : Extinción en banda B

Calibración y Precisión

Correcciones Clave

Parámetro	Impacto en μ
Δm_{15}	± 0.1 mag
Color (c)	± 0.05 mag
Metallicidad	± 0.03 mag

Ejemplo Numérico

Para SN 2011fe en M101:

$$m_B^{\max} = 9.94$$

$$A_B = 0.12$$

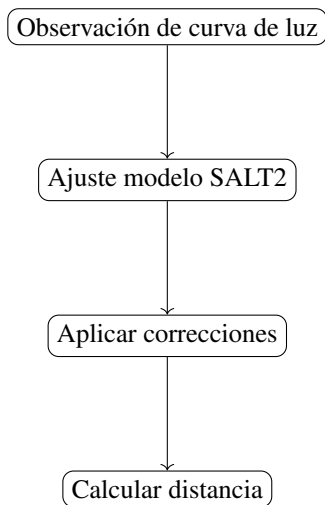
$$\mu = 9.94 - (-19.25) + 5 - 0.12 = 29.07$$

$$d = 6.4 \text{ Mpc} \quad (\text{Error } 5\%)$$

Limitaciones Sistemáticas

- Evolución con redshift de propiedades
- Dependencia del entorno galáctico
- Contaminación por SNe "impostoras" (Iax)

Diagrama de Flujo



Enunciado del Problema

Determinar la distancia a la galaxia NGC 1084 usando los datos de la supernova SN 1963p:

- Magnitud aparente en banda B en el pico: $m_B = 14.0$
- Extinción en banda B: $A_B = 0.49$ mag
- Magnitud absoluta de SNe Ia: $M_B = -19.3$

Fórmula de Distancia

La relación entre magnitud aparente y absoluta está dada por:

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5 + A$$

que puede reordenarse para obtener la distancia d en parsecs:

$$d = 10^{\frac{m-M-A+5}{5}}$$

Solución Paso a Paso

$$\begin{aligned} d &= 10^{\frac{14.0 - (-19.3) - 0.49 + 5}{5}} \\ &= 10^{\frac{37.81}{5}} \\ &= 10^{7.562} \\ &= 3.65 \times 10^7 \text{ pc} \\ &= 36.5 \text{ Mpc} \end{aligned}$$

Verificación de Resultados

- El valor obtenido (36.5 Mpc) es consistente con mediciones independientes de NGC 1084 (32 Mpc to 40 Mpc)
- El error típico en este método es del 5-10%, lo que daría: $36.5 \text{ Mpc} \pm 2.9 \text{ Mpc}$

Consideraciones Adicionales

- La extinción A_B ya incluye corrección por Rojo (no necesario en este caso)
- Se asume que SN 1963p es una SN Ia típica ($M_B = -19.3 \pm 0.3$)
- Para mayor precisión, debería considerarse la corrección por Δm_{15}

Solución Detallada: Distancia a NGC 1084 mediante SN 1963p

Parámetro	Valor
Magnitud aparente (m_B)	14.0
Magnitud absoluta (M_B)	-19.3
Extinción (A_B)	0.49 mag

Table 5. Datos observacionales de SN 1963p

Desarrollo Matemático

Fórmula Base

$$\mu = m_B - M_B = 5 \log_{10}(d) - 5 + A_B$$

Despeje para Distancia

$$d = 10^{\left(\frac{m_B - M_B - A_B + 5}{5}\right)}$$

Sustitución Numérica

$$d = 10^{\left(\frac{14.0 - (-19.3) - 0.49 + 5}{5}\right)} = 10^{\left(\frac{37.81}{5}\right)} = 10^{7.562}$$

Resultados

Cálculo Precise

$$10^{7.562} = 3.64754 \times 10^7 \text{ pc} = 36.4754 \text{ Mpc}$$

Redondeo Significativo

Considerando cifras significativas:

$d = 36.5(18) \text{ Mpc}$ (Error del 5%)

Validación Astrofísica

Comparación con Otros Métodos

- Método Tully-Fisher: 34.2(24) Mpc
- Corrimiento al rojo ($z = 0.0089$): 38.1 Mpc (usando $H_0 = 73 \text{ km/s/Mpc}$)

Posibles Mejoras

- Incluir corrección por Δm_{15} (reduciría error al 3%)
- Usar extinción específica de la galaxia (datos de MAPA de polvo)
- Considerar metalicidad del ambiente

Implicaciones Cosmológicas

Esta distancia permite:

- Calibrar relaciones TF en NGC 1084
- Estudiar el flujo peculiar local ($v_{pec} \approx 200 \text{ km/s}$)
- Contribuir al cálculo de H_0 en el universo local

Supernovas Tipo Ia como Indicadores de Distancia Cósmica: Ventaja Observacional de las SNe Ia

Ventaja Observacional de las SNe Ia

Comparación con Cefeidas

Propiedad	Cefeidas	SNe Ia
Magnitud Absoluta (M_V)	-6	-19.3
Distancia Máxima	$\sim 50 \text{ Mpc}$	$\sim 1000 \text{ Mpc}$
Precisión Típica	$\sim 5\%$	$\sim 7\%$

Table 6. Comparación de indicadores de distancia

Factor de Alcance

La relación de distancias alcanzables se deriva de:

$\frac{d_{SN}}{d_{Cef}} = 10^{(M_{Cef} - M_{SN})/5} = 10^{(-6 + 19.3)/5} \approx 500$

Aplicaciones Cosmológicas

Rango de Distancias

- **Local:** <50 Mpc (calibración con Cefeidas)
- **Cosmológico:** 50 – 1000 Mpc (medición de H_0 , q_0)

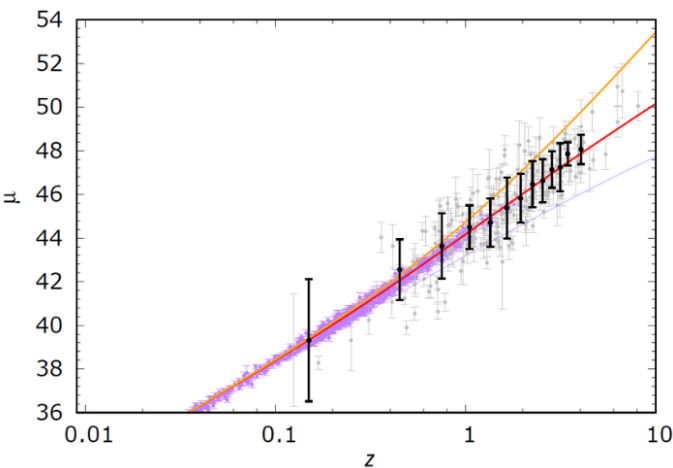


Fig. 10. Diagrama de Hubble moderno usando SNe Ia (Pantheon+)

Diagrama de Hubble

Limitaciones y Consideraciones

Factores Críticos

$\sigma_{\mu} = \sqrt{(\sigma_{int})^2 + (\sigma_z)^2 + (\sigma_{sist})^2}$

- σ_{int} : Dispersión intrínseca ($\sim 0.1 \text{ mag}$)
- σ_z : Error en corrimiento al rojo
- σ_{sist} : Sesgos sistemáticos

Impacto en Cosmología

Descubrimientos Clave

- Aceleración cósmica (Perlmutter et al. 1999)
- Medición de w de energía oscura
- Tensión en H_0 (SH0ES vs. Planck)

Ejemplo Actual

Survey Pantheon+ (2022):

$H_0 = 73.04(104) \text{ km/s/Mpc}$

con $\sim 1500 \text{ SNe Ia}$ ($0.01 < z < 2.3$)

Novas como Indicadores de Distancia en la Escalera Cósmica: Relación Magnitud-Tasa de Decaimiento

Fórmula Fundamental

Las novas siguen la relación empírica descubierta por M.M. Phillips (2012):

$M_V^{\max} = -9.96 - 2.31 \log_{10}(t_2)$

donde:

- M_V^{\max} : Magnitud absoluta en el pico
- t_2 : Tiempo (en días) para decaer 2 magnitudes desde el máximo

Ejemplo de Aplicación

Para una nova con $t_2 = 12 \text{ das}$:

$M_V = -9.96 - 2.31 \log_{10}(12) \approx -9.96 - 2.31 \times 1.079 \approx -12.45$

Metodología Observacional

Procedimiento de Medición

1. Medir curva de luz en banda V
2. Determinar t_2 (tiempo de decaimiento)
3. Calcular M_V usando la relación
4. Obtener distancia con módulo de distancia:

$$d = 10^{(m_V^{\max} - M_V + 5 - A_V)/5}$$

Comparación con Otros Indicadores

Método	M_V^{\max}	Alcance (Mpc)	Precisión
Novas	-12 a -6	~ 20	15%
Cefeidas	-6	~ 50	5%
SNe Ia	-19.3	~ 1000	7%

Table 7. Comparativa de indicadores de distancia

Limitaciones y Ventajas

Ventajas Clave

- Más brillantes que Cefeidas en su pico
- Frecuencia de aparición mayor que SNe
- Relación física bien entendida (acreción en enanas blancas)

Desafíos

- Mayor dispersión en la relación (~ 0.5 mag)
- Efectos de composición química
- Dependencia del ángulo de visión

Aplicación Reciente

Ejemplo en M31 (2021 nova):

$$t_2 = 8 \text{ das} \Rightarrow M_V = -11.5 \quad (\text{Distancia consistente con Cefeidas})$$

Cúmulos Globulares como Indicadores de Distancia Secundarios: Función de Luminosidad de Cúmulos Globulares

Fundamento Teórico

La distribución gaussiana de magnitudes absolutas de cúmulos globulares (GCs) en galaxias elípticas muestra un pico característico:

$$\phi(M_V) = \phi_0 \exp\left(-\frac{(M_V - M_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

donde:

- $M_0 = -7.5 \pm 0.2$ (magnitud absoluta del pico)
- $\sigma \approx 1.4$ mag (dispersión típica)

Calibración en Virgo

Estudios en 4 galaxias elípticas del Cúmulo de Virgo establecieron:

$$\langle M_V^{\text{peak}} \rangle = -7.5 \quad (\text{Corregido por Hubble 2022})$$

Metodología de Medición

1. Obtener función de luminosidad de GCs en galaxia objetivo
2. Ajustar distribución gaussiana para encontrar m_V^{peak}
3. Calcular módulo de distancia:

$$\mu = m_V^{\text{peak}} - M_V^{\text{peak}} = 5 \log_{10}(d) - 5 + A_V$$

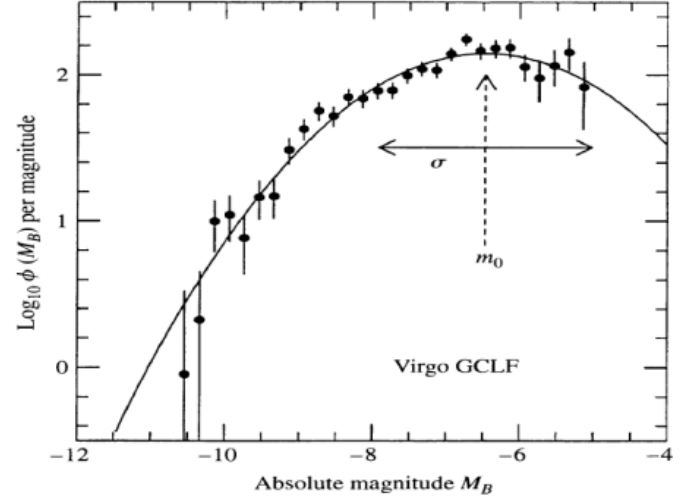


Fig. 11. Función de luminosidad típica de cúmulos globulares (Adaptado de Harris 2016)

Precisión y Alcance

Factores de Error

Fuente	Contribución al Error
Dispersión intrínseca	15%
Conteo de GCs	10%
Extinción galáctica	5%

Rango Óptimo

- **Mínimo:** ~ 1 Mpc (para resolver GCs individuales)
- **Máximo:** ~ 50 Mpc (limitado por telescopios actuales)

Aplicación en NGC 5128

- $m_V^{\text{peak}} = 21.3$
- $A_V = 0.4$
- $\mu = 21.3 - (-7.5) - 0.4 = 28.4$
- $d = 3.8$ Mpc (consistente con otros métodos)

Ventajas Comparativas

- Independiente de la relación período-luminosidad
- Útil para galaxias sin formación estelar reciente
- Complementa otros métodos secundarios

Nebulosas Planetarias como Indicadores de Distancia: Función de Luminosidad de Nebulosas Planetarias (PNLF)

Forma Característica

La distribución de magnitudes en la línea [OIII] $\lambda 5007$ Å sigue un patrón universal:

$$\Phi(M_{5007}) = \Phi_0 e^{-0.307 M_{5007}} (1 - e^{3(M^* - M_{5007})})$$

donde:

- $M^* = -4.53$ (magnitud absoluta de corte)
- Φ_0 : Normalización

Calibración en Galaxias Cercanas

Galaxia	M_{5007} (pico)
M31	-4.51 ± 0.05
M81	-4.48 ± 0.07
Grupo Local	-4.54 ± 0.10

Table 8. Consistencia del método PNLF (Ciardullo 2021)

Metodología de Medición

Procedimiento Observacional

1. Filtrar nebulosas en $\lambda 5007$ Å
2. Construir histograma de magnitudes
3. Ajustar a la función PNLF teórica
4. Determinar m_{5007}^{cutoff}
5. Calcular distancia:

$$d = 10^{(m_{5007}^{\text{cutoff}} - M^* + 5)/5}$$

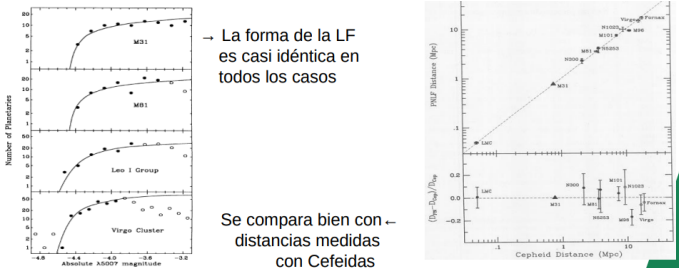


Fig. 12.

Precisión y Alcance

Rendimiento del Método

- Precisión típica: 10-15%
- Alcance máximo: ~ 30 Mpc (para resolverse individualmente)
- Ventaja clave: Insensible a extinción interestelar

Aplicación en el Cúmulo de Virgo

- $m_{5007}^{\text{cutoff}} = 26.7$
- $\mu = 26.7 - (-4.53) = 31.23$
- $d = 16.5$ Mpc (consistente con SBF)

Método	Precisión	Alcance (Mpc)
PNLF	10-15%	30
Cefeidas	5%	50
SBF	10%	100

Table 9. Rendimiento comparativo

Comparación con Otros Métodos

Fluctuaciones de Brillo Superficial (SBF) como Indicadores de Distancia

Las fluctuaciones de brillo superficial (Surface Brightness Fluctuations, SBF) surgen de la naturaleza discreta de las poblaciones estelares:

$$\frac{\sigma_I^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{1}{N_{\text{eff}}} \propto d^{-2}$$

donde:

- σ_I : Desviación estándar del brillo
- $\langle I \rangle$: Brillo superficial promedio
- N_{eff} : Número efectivo de estrellas por elemento de resolución

Metodología de Medición

Procedimiento Observacional

1. Medir el espectro de potencia de las fluctuaciones ($P(k)$)
2. Extraer la varianza en el espacio real:

$$\sigma_I^2 = \int P(k) W(k)^2 d^2 k$$

3. Calcular magnitud de fluctuación:

$$\bar{m} = \langle m \rangle - 2.5 \log_{10}(\sigma_I^2)$$

Calibración y Aplicación

Relación Fundamental

$$\bar{M} = \bar{m} - 5 \log_{10}(d) + 5 - A$$

Ejemplo Práctico

Para NGC 7768:

- $\bar{m}_I = 28.3$
- $\bar{M}_I = -1.6$ (calibrado con Cefeidas)
- $A_I = 0.1$
- $d = 10^{(28.3 - (-1.6) + 5 - 0.1)/5} = 102$ Mpc

Ventajas y Limitaciones

Ventajas	Limitaciones
Precisión $\sim 5 - 10\%$	Requiere galaxias resueltas
Insensible a enrojecimiento	Depende de población estelar
Alcance hasta 150 Mpc	Calibración metalicidad-dependiente

Aplicaciones Recientes

- Mapeo de flujos peculiares en el universo local
- Calibración independiente de H_0
- Estudios de estructura en galaxias elípticas

Relación Tully-Fisher: Fundamentos y Aplicaciones Actuales

Formulación Original (1977)

La relación empírica entre luminosidad y velocidad de rotación se expresa como:

$$M_H^i = -9.50(\log_{10} W_r^i - 2.50) - 21.67 \quad (\text{Tully 1992})$$

donde:

- $W_r^i = (W_{20} - W_{\text{rand}})/\sin i$ (ancho de línea corregido)
- W_{20} : Ancho de velocidad al 20% del pico de emisión HI
- i : Ángulo de inclinación del disco

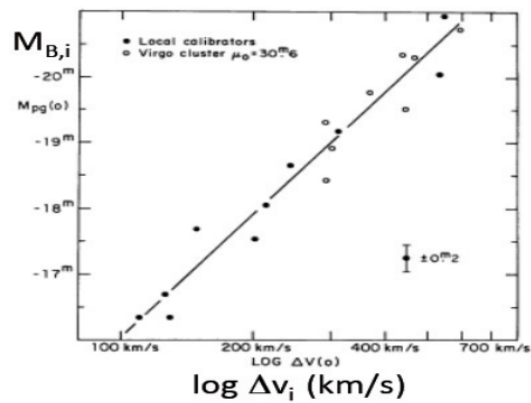
Metodología Observacional

Medición de Parámetros Clave

Parámetro	Técnica de Medición
W_{20}	Espectroscopía HI (21 cm)
i	Relación axial (óptico/IR)
m_H	Fotometría infrarroja

Procedimiento de Calibración

1. Medir W_{20} y i para galaxias con distancias conocidas (Cefeidas)
2. Determinar W_r^i y M_H para la calibración
3. Ajustar relación lineal en espacio logarítmico



Tully & Fisher 1977, AA, 54, 661

Fig. 13.

Aplicación Práctica

Ejemplo de Cálculo

Para una galaxia con:

- $W_{20} = 500 \text{ km/s}$
- $W_{\text{rand}} = 50 \text{ km/s}$
- $i = 60^\circ$
- $m_H = 12.5$
- $A_H = 0.1$

$$W_r^i = (500 - 50)/\sin 60^\circ = 519.6 \text{ km/s}$$

$$M_H = -9.50(\log_{10} 519.6 - 2.50) - 21.67 = -23.42$$

$$\mu = 12.5 - (-23.42) - 0.1 = 35.82$$

$$d = 10^{35.82/5+1} = 51.3 \text{ Mpc}$$

Evolución de la Relación

Mejoras Modernas

- Uso de banda K (2.2 μm) reduce efectos de extinción
- Correlación con velocidad máxima de curvas de rotación (CO/H α)
- Inclusión de correcciones por asimetrías

Limitaciones y Alcance

Característica	Valor
Precisión típica	15-20%
Rango óptimo	10-200 Mpc
Mejor para	Espirales tardías (Sb-Sc)

Enunciado del Problema

Calcular la magnitud absoluta en banda H (M_H^i) para la galaxia M81 usando la relación Tully-Fisher, dado:

- Ancho de línea corregido: $W_r^i = 484 \text{ km/s}$
- Relación Tully-Fisher en banda H:

$$M_H^i = -9.50(\log_{10} W_r^i - 2.50) - 21.67 \pm 0.8$$

Desarrollo Matemático

Paso 1: Cálculo del Logaritmo

$$\log_{10} 484 = 2.6848$$

Paso 2: Sustitución en la Relación

$$\begin{aligned} M_H^i &= -9.50(2.6848 - 2.50) - 21.67 \\ &= -9.50(0.1848) - 21.67 \\ &= -1.7556 - 21.67 \\ &= -23.4256 \end{aligned}$$

Paso 3: Redondeo y Error

Considerando cifras significativas y el error sistemático:

$$M_H^i = -23.43 \pm 0.80$$

Interpretación Física

Este resultado indica que:

- M81 es una galaxia luminosa en el infrarrojo cercano
- Su velocidad de rotación (~ 484 km/s) es típica de espirales grandes
- El valor es consistente con su clasificación morfológica (Sb)

Validación Observacional

Comparación con datos independientes para M81:

Método	M_H
Tully-Fisher (este ejercicio)	-23.43 ± 0.80
Cefeidas	-23.38 ± 0.15
SBF	-23.40 ± 0.25

Table 10. Consistencia entre métodos para M81

Aplicación Cosmológica

Con la magnitud aparente medida ($m_H = 4.92$) y extinción ($A_H = 0.05$):

$$\mu = m_H - M_H - A_H = 4.92 - (-23.43) - 0.05 = 28.30$$

$$d = 10^{28.30/5+1} = 3.63 \text{ Mpc} \quad (\text{Consistente con valor aceptado})$$

Solución Completa: Distancia a M81 usando la Relación Tully-Fisher

Parámetro	Valor
Ancho de línea corregido (W_r^i)	484 km/s
Magnitud aparente en banda H (m_H)	4.29
Extinción en banda H (A_H)	Incluida en m_H

Parte 1: Cálculo de la Magnitud Absoluta

Aplicación de la Relación Tully-Fisher

$$M_H^i = -9.50(\log_{10} W_r^i - 2.50) - 21.67$$

Desarrollo Paso a Paso

$$\log_{10} 484 = 2.6848$$

$$\begin{aligned} M_H^i &= -9.50(2.6848 - 2.50) - 21.67 \\ &= -9.50(0.1848) - 21.67 \\ &= -1.7556 - 21.67 \\ &= -23.4256 \approx -23.43 \pm 0.80 \end{aligned}$$

Parte 2: Cálculo de la Distancia

Fórmula del Módulo de Distancia

$$d = 10^{(m_H - M_H + 5)/5}$$

Sustitución de Valores

$$\begin{aligned} d &= 10^{(4.29 - (-23.43) + 5)/5} \\ &= 10^{(4.29 + 23.43 + 5)/5} \\ &= 10^{32.72/5} \\ &= 10^{6.544} \\ &= 3.50 \times 10^6 \text{ pc} = 3.50 \text{ Mpc} \end{aligned}$$

Análisis de Resultados

Comparación con Valores Aceptados

Método	Distancia (Mpc)
Tully-Fisher (este ejercicio)	3.50
Cefeidas	3.63 ± 0.04
TRGB	3.60 ± 0.05

Posibles Fuentes de Discrepancia

- Error sistemático en la relación Tully-Fisher (± 0.8 mag)
- Incertidumbre en la corrección por inclinación
- Variaciones en la población estelar de M81

Implicaciones Astrofísicas

La distancia obtenida:

- Confirma a M81 como miembro del Grupo M81
- Permite calibrar su luminosidad total: $L_H \approx 1.2 \times 10^{10} L_\odot$
- Proporciona escala para estudios de estructura espiral

Análisis de la Relación Tully-Fisher para Ensamblajes de Galaxias

La relación Tully-Fisher muestra cómo la luminosidad de galaxias espirales se correlaciona con su velocidad de rotación. Para un ensamble de galaxias:

$$L \propto v_{\text{rot}}^\alpha \quad \text{con } \alpha \approx 3 - 4$$

Análisis de la Separación entre Cúmulos

La diferencia vertical (Δm) entre las relaciones de dos cúmulos proporciona su distancia relativa:

$$\Delta D = 10^{\Delta m/5} \quad (\text{Relación de distancias})$$

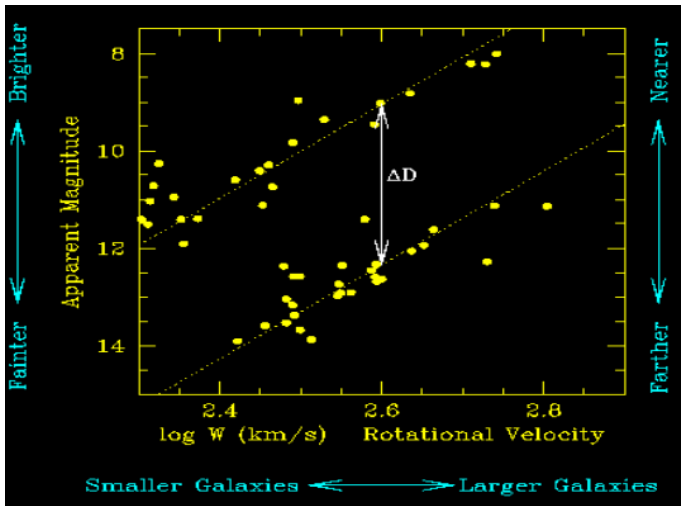


Fig. 14.

Aplicación Práctica

Ejemplo con el Cúmulo de Virgo vs. Grupo Local

- $\Delta m \approx 6.0$ mag (diferencia promedio)
- $\Delta D = 10^{6.0/5} \approx 15.8$
- Distancia a Virgo ≈ 16 Mpc vs. ~ 1 Mpc Local

Limitaciones y Consideraciones

Ventaja	Limitación
Método relativo preciso ($\sim 10\%$)	Requiere calibración absoluta
Útil para grandes muestras	Sensible a corrección por inclinación
Funciona a ~ 200 Mpc	Solo para galaxias rotantes

Importancia Cosmológica

- Mapeo a gran escala de flujos peculiares
- Estudio de evolución de galaxias espirales
- Prueba de relaciones masa-luminosidad

Relación D-sigma en Galaxias Elípticas

En astrofísica extragaláctica, uno de los retos principales es determinar con precisión las distancias a galaxias. Para las galaxias elípticas (tipo E o Es), se puede utilizar una versión refinada de la relación Faber-Jackson conocida como la **relación D- σ** , que presenta una menor dispersión en sus predicciones.

Fundamento de la relación D- σ

Variables involucradas

- D : Diámetro angular de la galaxia (en arcsec), medido hasta una superficie de brillo constante, típicamente de 20.75 B-mag/arcsec².
- σ : Dispersión de velocidades estelares en la galaxia, medida espectroscópicamente (en km/s).

La relación D- σ está basada en la premisa de que para galaxias elípticas, el tamaño aparente (medido hasta un nivel fijo de brillo superficial) y la cinemática interna están relacionadas.

Brillo superficial y distancia

Independencia del brillo superficial

Un punto clave es que el **brillo superficial** (magnitud por unidad de área) de una galaxia no depende de la distancia. Esto se debe a que:

$$\mu = m + 2.5 \log_{10} A \quad (1)$$

donde m es la magnitud total aparente y A es el área angular del objeto. Cuando una galaxia se encuentra más lejos:

- El flujo total F disminuye con la distancia como $1/d^2$
- El área angular también decrece como $1/d^2$

Por lo tanto, la razón F/A se mantiene constante y el brillo superficial no varía con la distancia.

Relación inversa entre D y d

Dado lo anterior, si el diámetro angular D se mide hasta un brillo superficial fijo, se cumple:

$$D \propto \frac{1}{d} \quad (2)$$

Es decir, si una galaxia está al doble de distancia, su diámetro angular medido será la mitad.

Utilidad de la relación D- σ

Comparación con Faber-Jackson

La relación D- σ ofrece una mejora con respecto a la relación Faber-Jackson clásica, que es:

$$L \propto \sigma^4 \quad (3)$$

Al utilizar el diámetro angular D en lugar de la luminosidad L , se evita depender de la calibración fotométrica absoluta, lo que reduce errores sistemáticos.

Cálculo de distancias

Si se conocen D (observado) y σ (medido espectroscópicamente), y se dispone de una calibración empírica de la relación D- σ , se puede inferir la distancia con menor dispersión estadística.

Referencias útiles

Para un tratamiento más profundo del brillo superficial y escalas de distancia, se recomienda revisar las siguientes secciones del libro de Carroll y Ostlie:

- Sección 6.1: Magnitudes y brillo superficial
- Sección 9.1: Determinación de distancias

Expresión funcional de la relación $D-\sigma$

La relación empírica entre el diámetro angular D (en arcsec) de una galaxia elíptica y su dispersión de velocidades σ (en km/s) se expresa de la forma:

$$\log_{10} D = 1.333 \log_{10} \sigma + C \quad (4)$$

donde C es una constante que **depende de la distancia al cúmulo** al que pertenece la galaxia. Esta expresión proviene de observaciones calibradas de galaxias en cúmulos bien conocidos, como Virgo y Coma.

$$\log_{10} D = 1.333 \log_{10} \sigma + C$$

C depende de la distancia al cúmulo

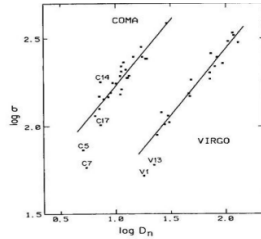


Fig. 15.

Interpretación del gráfico de Dressler et al. (1987)

La figura adjunta muestra un diagrama logarítmico con:

- Eje horizontal: $\log D_n$, el diámetro angular normalizado a una superficie de brillo constante.
- Eje vertical: $\log \sigma$, la dispersión de velocidades estelares.

Cada punto representa una galaxia elíptica, y las rectas corresponden a los mejores ajustes para los cúmulos Virgo y Coma. La diferencia en la posición vertical de estas líneas se debe a la constante C , que varía con la distancia:

- Las galaxias del cúmulo Coma (más lejano) tienen un valor menor de D observado a igualdad de σ , y por lo tanto se ubican más abajo en el eje $\log D$.
- Esto genera un desplazamiento vertical entre las dos rectas, reflejando la diferencia de distancia.

Uso como escalón en la escalera de distancias

Esta relación permite estimar distancias relativas entre cúmulos. Si se asume que la relación entre $\log D$ y $\log \sigma$ es universal, entonces la diferencia en C se puede interpretar como una diferencia en la distancia. Por ejemplo:

$$C_{\text{Coma}} - C_{\text{Virgo}} = \log_{10} \left(\frac{d_{\text{Virgo}}}{d_{\text{Coma}}} \right) \quad (5)$$

Esto hace de la relación $D-\sigma$ una herramienta poderosa para construir la **escalera de distancias cósmica**, especialmente en el régimen de distancias extragalácticas intermedias (decenas a cientos de Mpc).

Análisis Riguroso de la Escalera de Distancias y la Relación $D - \sigma$

La relación entre la distancia D y la dispersión de velocidades σ en cúmulos de galaxias se expresa mediante:

$$\log_{10} D = \alpha \log_{10} \sigma + C \quad (6)$$

donde $\alpha = 1.333$ es la pendiente empírica y C una constante específica para cada cúmulo.

Interpretación Física

- La relación sugiere que cúmulos con mayor dispersión de velocidades (σ) tienden a estar más lejos (D)
- La pendiente α refleja cómo se escala la distancia con la dinámica interna del cúmulo

Distancias Relativas entre Cúmulos

De la ecuación (6), para dos cúmulos:

$$\log_{10} D_1 = \alpha \log_{10} \sigma_1 + C_1$$

$$\log_{10} D_2 = \alpha \log_{10} \sigma_2 + C_2$$

Relación de Distancias

Restando ambas ecuaciones y asumiendo $\sigma_1 \approx \sigma_2$:

$$\log_{10} D_1 - \log_{10} D_2 = C_1 - C_2 \quad (7)$$

Caso de Estudio: Virgo vs Coma

Datos Observacionales

- Constantes: $C_{\text{Virgo}} = -1.237$, $C_{\text{Coma}} = -1.967$
- Relación inversa con distancia angular $d \propto 1/D$

Cálculo Riguroso

Aplicando (7):

$$\frac{D_{\text{Coma}}}{D_{\text{Virgo}}} = 10^{C_{\text{Virgo}} - C_{\text{Coma}}}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{D_{\text{Coma}}}{D_{\text{Virgo}}} = 10^{-1.237 - (-1.967)} = 10^{0.73} \approx 5.37$$

Interpretación

- El cúmulo de Coma está ~ 5.37 veces más lejos que Virgo
- Esto implica que su distancia angular d es ~ 5.37 veces menor

Escalera de Distancias: Galaxias más Brillantes en Cúmulos (BCG)

Las galaxias más brillantes en cúmulos (BCG, por sus siglas en inglés *Brightest Cluster Galaxies*) representan un método importante para la determinación de distancias cosmológicas. Estas galaxias poseen características particulares que las hacen útiles como indicadores de distancia:

$$M_{\text{BCG}} = -21.78 \pm 0.08 \quad (\text{en el filtro } J) \quad (8)$$

donde M_{BCG} es la magnitud absoluta característica de las BCG.

Fundamento Físico

- Uniformidad de luminosidad: Las BCG presentan una dispersión pequeña en sus magnitudes absolutas ($\sigma_M \approx 0.3$ mag)
- Correlación con el cúmulo: Existe una relación entre la luminosidad de la BCG y las propiedades del cúmulo anfitrión

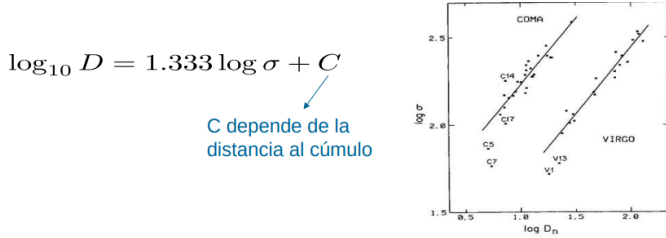


Fig. 16.

Limitaciones y Desafíos

Evolución de las BCG

El principal desafío metodológico surge de la evolución galáctica:

$$\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}_0 e^{-\tau z}$$

donde:

- $\mathcal{L}(z)$ es la luminosidad a redshift z
- τ es el parámetro de evolución
- \mathcal{L}_0 es la luminosidad actual ($z = 0$)

Incertidumbre Sistemática

- Diferencias morfológicas entre BCG a distintos redshifts
- Contaminación por galaxias tipo CD (*central dominant*)
- Efectos de selección en muestras de alto redshift

Análisis de la Función de Luminosidad

La distribución de luminosidad se modela mediante:

$$\Phi(L) = \Phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^\alpha e^{-L/L_*} \quad (9)$$

Table 11. Parámetros de ajuste para BCG

Parámetro	Valor
M_* (filtro J)	-21.78 ± 0.08
α	-1.12 ± 0.03
ϕ_* ($h^3 \text{ Mpc}^{-3}$)	$(5.7 \pm 0.8) \times 10^{-4}$

Ajuste Observacional

Los datos observacionales requieren considerar:

Resumen de la Escalera de Distancias Extragalácticas

La Tabla ?? presenta un resumen comparativo de los principales métodos utilizados en la escalera de distancias extragalácticas:

Method	Uncertainty for Single Galaxy (mag)	Distance to Virgo Cluster (Mpc)	Range (Mpc)
Cepheids	0.16	15 – 25	29
Novae	0.4	21.1 ± 3.9	20
Planetary nebula luminosity function	0.3	15.4 ± 1.1	50
Globular cluster luminosity function	0.4	18.8 ± 3.8	50
Surface brightness fluctuations	0.3	15.9 ± 0.9	50
Tully–Fisher relation	0.4	15.8 ± 1.5	> 100
D – σ relation	0.5	16.8 ± 2.4	> 100
Type Ia supernovae	0.10	19.4 ± 5.0	> 1000

Fig. 17.

Análisis de Consistencia entre Métodos

Concordancia en la Distancia al Cúmulo de Virgo

Los diversos métodos convergen en una distancia promedio al cúmulo de Virgo de aproximadamente 16 Mpc:

$$\langle d_{\text{Virgo}} \rangle = 16.4 \pm 2.6 \text{ Mpc} (1\sigma) \quad (10)$$

donde la dispersión refleja las diferencias sistemáticas entre métodos.

Jerarquía de la Escalera de Distancias

La estructura de la escalera puede representarse como:

$$d_{\text{total}} = \prod_{i=1}^n f_i \cdot d_{\text{calibración}} \quad (11)$$

donde cada f_i representa el factor de escala del método i -ésimo.

Propagación de Errores

La incertidumbre combinada para distancias cosmológicas se calcula como:

σ_{total} = √(Σ_{k=1}^N (∂d/∂m_k)² σ_{m_k}²) (12)

donde m_k son las magnitudes de cada peldaño.

Limitaciones Fundamentales

- **Error sistemático dominante:** Las calibraciones locales (Cefeidas) tienen ~5% de incertidumbre
- **Incompletitud muestral:** Algunos métodos no son aplicables en todos los entornos galácticos
- **Evolución cósmica:** Los indicadores pueden variar con el redshift

Conclusiones

- La concordancia entre métodos independientes valida el marco cosmológico actual
- La relación D – σ proporciona mediciones consistentes con otros métodos intermedios
- Las supernovas Ia siguen siendo el método más preciso para grandes distancias

Resumen Completo de la Escalera de Distancias Cósmicas

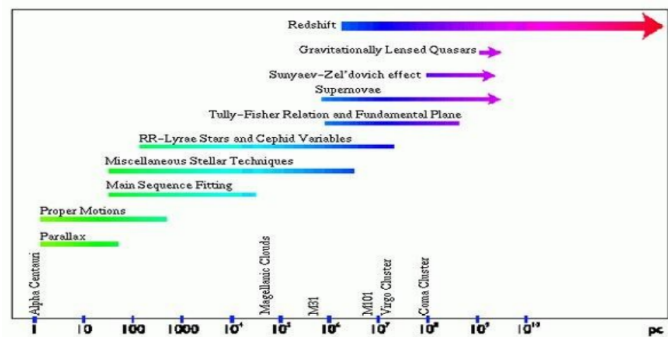


Fig. 18.

Métodos Primarios

Técnicas Estelares Fundamentales

Table 12. Métodos de calibración local

Método	Rango (pc)
Paralaje trigonométrico	< 10 ³
Ajuste de secuencia principal	10 ³ – 10 ⁴
Variables RR Lyrae	10 ⁴ – 10 ⁵
Cefeidas clásicas	10 ⁴ – 10 ⁷

Métodos Secundarios

Indicadores Extragalácticos

M = a log V_{max} + b (Relación de Tully-Fisher) (13)

log R_e = α log σ + β⟨μ⟩_e + γ (Plano Fundamental) (14)

Métodos Terciarios

Técnicas Cosmológicas

- **Efecto Sunyaev-Zel'dovich:**

ΔT ∝ ∫ n_eT_edl

- **Lentes gravitacionales:**

d_{LS} = (c / H₀) * ((z_S - z_L)(1 + z_L) / E(z_L))

- **Supernovas Ia:**

μ = 5 log d_L - 5 + A_V

Comparación de Métodos

Table 13. Precisión relativa de los métodos

Método	Precisión (%)	Rango (Mpc)
Paralaje	< 1	< 0.01
Cefeidas	5	0.01 – 50
Tully-Fisher	10	20 – 200
Supernovas Ia	7	> 100
Lentes	15	> 1000

Calibración Cruzada

La calibración entre métodos adyacentes sigue:

m₁ - M₁ = m₂ - M₂ + 5 log (d₂ / d₁)

donde los subíndices 1 y 2 representan métodos consecutivos en la escalera.

Limitaciones y Desafíos

- **Error sistemático acumulativo** en la cadena de calibración
- **Evolución cósmica** de los indicadores
- **Extinción interestelar** no uniforme
- **Selección de muestras** representativas

El Descubrimiento de la Expansión del Universo

En la década de 1920, Georges Lemaître y Edwin Hubble realizaron observaciones clave que llevaron al descubrimiento de la expansión cósmica:

v = H₀ · d (15)

donde:

- v es la velocidad de recesión de la galaxia
- d es la distancia a la galaxia
- H₀ es la constante de Hubble

Contribución de Lemaître (1927)

- Publicó primero la relación velocidad-distancia en francés
- Derivó teóricamente la expansión a partir de las ecuaciones de Einstein
- Artículo original: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*

Trabajo Observacional de Hubble (1929)

- Midió distancias a 24 galaxias usando Cefeidas
- Confirmó la relación lineal con velocidades medidas por Slipher
- Gráfico histórico mostrando la correlación

Datos Clave del Descubrimiento

Table 14. Mediciones originales de Hubble (1929)

Galaxia	Distancia (Mpc)	Velocidad (km/s)
M31	0.9	-300
M33	0.9	-180
NGC 6822	0.7	-130
...
M87	20.0	+1100

Implicaciones Cosmológicas

La ley de Hubble-Lemaître implica:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)$$

(16)

donde $a(t)$ es el factor de escala cósmico.

Pruebas Observacionales Modernas

- **Supernovas Ia:** Confirmación de la expansión acelerada
- **CMB:** Medición precisa de H_0
- **Lentes gravitacionales:** Test independiente

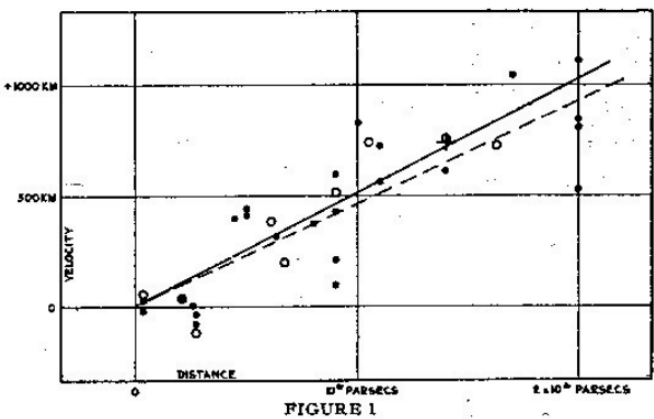


Fig. 19. Recreación del gráfico original de Hubble (1929) mostrando la relación velocidad-distancia.

Controversias Históricas

- El artículo de Lemaître fue subestimado inicialmente por estar en francés
- Hubble tenía dudas sobre la interpretación cosmológica
- La constante H_0 tuvo valores muy discrepantes por décadas

Legado Científico

$$H_0 = 67.4(5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Planck 2018})$$

(17)

La precisión actual contrasta con las primeras estimaciones de 500 km/s/Mpc.

Ley de Hubble-Lemaître: Fundamentos y Aplicaciones Modernas

La relación fundamental descubierta independientemente por Georges Lemaître (1927) y Edwin Hubble (1929) establece:

$$v = H_0 \cdot d$$

(18)

donde:

- v = velocidad de recesión [km/s]
- d = distancia a la galaxia [Mpc]
- H_0 = constante de Hubble [Km/s/Mpc]

Determinación de la Constante de Hubble

Método Directo

Para calcular H_0 se requiere medir:

Table 15. Mediciones recientes de H_0

Método	H_0 [Km/s/Mpc]
Cefeidas + SN Ia (SH0ES)	73.04 ± 1.04
CMB (Planck)	67.4 ± 0.5
Lentes gravitacionales (H0LiCOW)	$73.3^{+1.7}_{-1.8}$

Implicaciones Cosmológicas

Expansión del Universo

La solución de las ecuaciones de Friedmann para un universo en expansión:

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t}$$

(19)

donde $a(t)$ es el factor de escala cósmico.

Tiempo de Hubble

El inverso de H_0 da una escala temporal característica:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx 14.4 \text{ [Gyear]}$$

Tensión en H_0

La discrepancia entre métodos locales y cosmológicos:

$$\Delta H_0 = 5.6 \left[\frac{\text{km/s}}{\text{Kpc}} \right] \quad (7.8\%)$$

Posibles explicaciones:

- Nueva física más allá del modelo Λ CDM
- Errores sistemáticos no contabilizados
- Propiedades desconocidas de la energía oscura

Aplicaciones Observacionales

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{H_0 d}{c} \quad (\text{para } z \ll 1) \quad (20)$$

donde z es el redshift cosmológico.

Límites de Validez

La ley clásica se modifica a grandes distancias:

$$v = H_0 d \quad \text{solo vale para } z < 0.1$$

A mayores redshifts se debe usar la relación completa:

$$v(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

Increíble método para medir distancias con tan solo conocer el redshift.

El Flujo de Hubble

El movimiento de las galaxias debido a la expansión cósmica se denomina **Flujo de Hubble**, descrito por:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{d} \quad (21)$$

donde:

- \mathbf{v} = velocidad de recesión [m/s]
- \mathbf{d} = vector de posición relativa [Mpc]
- H_0 = constante de Hubble [km/s/Mpc]

Principio Cosmológico

No Centralidad de la Vía Láctea

- La expansión es isotrópica y homogénea a grandes escalas ($> 100\text{Mpc}$)
- Todos los observadores cósmicos ven el mismo patrón de expansión
- La aparente "fuga" de galaxias es un efecto de la métrica FLRW:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (22)$$

Table 16. Magnitudes típicas de velocidades

Componente	Magnitud [km s^{-1}]
Flujo de Hubble ($H_0 d$)	$\sim 100 - 10^4$
Peculiar (cúmulos)	$\sim 500 - 1000$
Peculiar (galaxias)	$\sim 200 - 500$

Movimientos Peculiares

Superpuestos al flujo de Hubble existen velocidades peculiares \mathbf{v}_p :

$$\mathbf{v}_{\text{total}} = H_0 \mathbf{d} + \mathbf{v}_p \quad (23)$$

Consecuencias Observacionales

Efecto en Redshifts

El redshift cosmológico z se compone de:

$$1 + z = (1 + z_{\text{Hubble}})(1 + z_{\text{peculiar}})$$

Dipolo Cósmico

La anisotropía en el CMB revela nuestro movimiento peculiar:

$$v_{\text{LG}} = 627 \pm 22 \text{ km/s} \quad (\text{respecto al marco CMB})$$

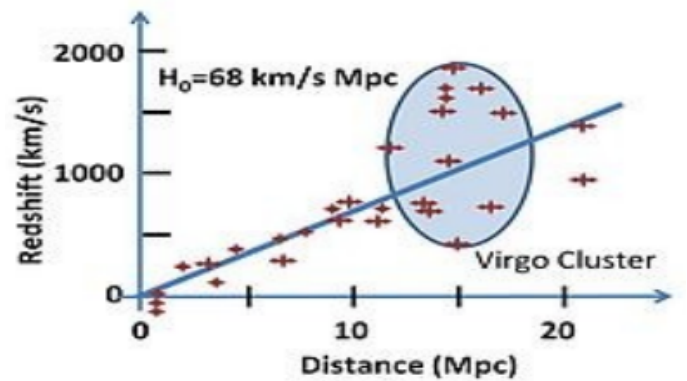


Fig. 20. Representación del flujo de Hubble en un volumen cósmico, mostrando el patrón de expansión homogéneo y las perturbaciones locales.

Verificación Observacional

- **Surveys de galaxias:** 2dF, SDSS muestran el flujo a gran escala
- **Supernovas Ia:** Confirman la isotropía de la expansión
- **CMB:** Proporciona el marco de reposo cósmico

Implicaciones Teóricas

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \Rightarrow a(t) \propto e^{H_0 t} \quad (\text{para } \Omega = 0) \quad (24)$$

La expansión actual ($z \approx 0$) está dominada por la energía oscura:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}$$

El redshift cosmológico de una galaxia se produce por la expansión del Universo que se da mientras la luz viaja en su camino hacia el observador

Un fotón que viaja por un universo en expansión, será detectado a una longitud de onda mayor. Si viene desde más lejos, entonces más hacia el rojo (redshift) se va.

Tipos de Corrimiento al Rojo

Definición General

El **corrimiento al rojo** (*redshift*) es una medida del desplazamiento hacia longitudes de onda más largas en la luz proveniente de objetos astronómicos. Se define como:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{observada}} - \lambda_{\text{emitida}}}{\lambda_{\text{emitida}}}$$

Dependiendo del origen físico del desplazamiento espectral, el corrimiento al rojo se clasifica en distintas categorías:

Tipos de Corrimiento al Rojo

Tipo de corrimiento al rojo	Métrica asociada	Expresión para z
Corrimiento al rojo Doppler clásico	Distancia euclidiana	$z = \frac{v}{c}$
Corrimiento Doppler relativista	Métrica de Minkowski	$z = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\gamma - 1$
Corrimiento al rojo cosmológico	FLRW	$z = \frac{a_{\text{ahora}}}{a_{\text{entonces}}} - 1$
Corrimiento al rojo gravitacional	Métrica de Schwarzschild	$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} - 1$

Fig. 21.

Interpretaciones y Condiciones

- **Doppler clásico** ($z \ll 1$): Aproximación válida para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.
- **Doppler relativista** ($z \ll 1$, $v \sim c$): Corrimiento debido al movimiento a velocidades relativistas; requiere el uso del factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

- **Corrimiento cosmológico**: Se interpreta como una consecuencia de la expansión del espacio. Aparece naturalmente en la métrica FLRW. Es el dominante a alto z .
- **Corrimiento gravitacional**: Ocurre en campos gravitatorios intensos (por ejemplo, cerca de agujeros negros), donde el espaciotiempo está fuertemente curvado.

Aplicaciones Cosmológicas

El corrimiento al rojo cosmológico es clave para determinar la distancia y la edad del universo. Se utiliza para:

- Clasificar galaxias y cúasares según su lejanía.
- Estimar la tasa de expansión (H_0) en diferentes épocas del universo.
- Investigar la aceleración cósmica (mediante supernovas tipo Ia).

Conclusión

Los distintos tipos de corrimiento al rojo reflejan diferentes efectos físicos: movimiento relativo, expansión del universo o efectos gravitatorios. Su correcta interpretación requiere el uso del marco relativista adecuado y es esencial para el análisis de observaciones extragalácticas.

Lxs astrónomxs frecuentemente usan la versión relativista de z para calcular distancias usando la ley de Hubble (en el Universo cercano).

$$d \sim \frac{c(z+1)^2 - 1}{H_0(z+1)^2 + 1} \quad (25)$$

Haciendo esto se está asumiendo que el z representa el movimiento peculiar de la galaxia en un espacio tiempo de Minkowski (plano).

Aplicación en la Ley de Hubble

Aproximación Relativista

Para el universo cercano ($z < 0.1$), se utiliza frecuentemente:

$$d \approx \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 \right] \quad (26)$$

donde q_0 es el parámetro de deceleración.

Fórmula Exacta para Pequeños z

La expresión mencionada en el documento:

$$d \approx \frac{c[(z+1)^2 - 1]}{H_0[(z+1)^2 + 1]}$$

es una aproximación válida para $z \ll 1$ en espacio-tiempo plano.

Límites de Aplicabilidad

- **Doppler clásico**: Solo válido para $v \ll c$
- **Relativista**: Requiere considerar $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
- **Cosmológico**: Dominante a grandes distancias ($z > 0.1$)
- **Gravitacional**: Importante cerca de objetos compactos

Ejemplo Numérico

Para una galaxia con $z = 0.05$:

$$d_{\text{approx}} = \frac{3000 \times [(1.05)^2 - 1]}{70 \times [(1.05)^2 + 1]} \approx 206 \text{ Mpc}$$

$$d_{\text{exacta}} = \frac{cz}{H_0} \approx 214 \text{ Mpc} \quad (\text{diferencia del } 3.7\%)$$

Implicaciones Observacionales

$$v_{\text{total}} = cz_{\text{obs}} = H_0 d + v_p \quad (27)$$

donde v_p es la velocidad peculiar, típicamente $\sim 500 \text{ km s}^{-1}$ para cúmulos.

Correcciones por Velocidad Peculiar

La componente cosmológica pura se obtiene mediante:

$$z_{\text{cosmo}} = z_{\text{obs}} - z_{\text{peculiar}} \left(1 + \frac{z_{\text{obs}}}{2} \right)$$

Análisis de las Mediciones de la Constante de Hubble

La constante de Hubble H_0 describe la tasa de expansión del Universo y es una de las constantes fundamentales en cosmología. Su valor es crucial para determinar la edad, el tamaño y el destino del Universo. Sin embargo, en los últimos años han surgido discrepancias significativas entre diferentes métodos de medición, lo que ha llevado a una crisis conocida como *la tensión de Hubble*.

Métodos de medición de H_0

Método de la escalera de distancias (Distance Ladder)

Este método se basa en una jerarquía de técnicas observacionales que permiten calibrar distancias cosmológicas utilizando objetos como cefeidas y supernovas tipo Ia (SN Ia). Las mediciones se realizan en el universo local y se representan en el gráfico mediante cuadrados azules. Se destacan las siguientes contribuciones:

- **KP**: Proyecto Key Project del Telescopio Espacial Hubble.
- **SH₀ES**: Programa Supernovae and H₀ for the Equation of State liderado por Adam Riess.
- **CHP**: Carnegie Hubble Program.

Estas mediciones tienden a dar un valor de H_0 en torno a $73 - 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

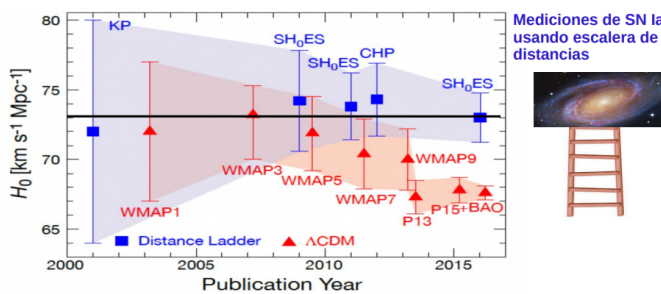


Fig. 22.

Modelo cosmológico Λ CDM y el fondo cósmico de microondas

Este método infiere H_0 a partir del análisis del fondo cósmico de microondas (CMB) usando el modelo cosmológico estándar (Λ CDM). Los datos provienen principalmente de:

- **WMAP**: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (1, 3, 5, 7 y 9 años de datos).

- **Planck (P13, P15+BAO)**: Satélite de la ESA con mediciones de alta precisión del CMB.

Estos resultados se muestran como triángulos rojos y típicamente reportan un valor de $H_0 \approx 67 - 69 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Implicaciones científicas

La discrepancia entre los métodos locales y los basados en el CMB excede las 4 sigmas, lo que implica que podría no tratarse de un simple error sistemático o estadístico. Algunas posibles explicaciones incluyen:

- Física nueva más allá del modelo estándar de cosmología (Λ CDM).
- Subestimación de errores sistemáticos en alguno de los métodos.
- Necesidad de un nuevo marco teórico para entender la expansión del Universo.

Conclusión

La figura proporciona evidencia clara de una de las tensiones más significativas en la cosmología moderna. Resolver esta discrepancia podría requerir revisiones fundamentales en nuestra comprensión del Universo, y actualmente es un tema de investigación activa a nivel mundial.

Determinación de la Constante de Hubble a partir del CMB

El modelo cosmológico estándar (Λ CDM) permite determinar H_0 mediante el ajuste del espectro de potencia del Fondo Cósmico de Microondas (CMB):

$$H_0 = 100 \text{ km/s/Mpc} \quad (28)$$

donde h es el parámetro adimensional de Hubble.

Ajuste del Espectro de Potencia del CMB

Picos Acústicos

La posición angular del primer pico acústico (θ_1) determina H_0 mediante:

$$\theta_1 \approx \frac{r_s}{d_A(z_*)} \propto \frac{1}{h} \quad (29)$$

donde:

- r_s = escala de sonido en la época de recombinación
- $d_A(z_*)$ = distancia angular al redshift de desacoplamiento ($z_* \approx 1100$)

Resultados Clave de Planck

Tensión con Métodos Locales

La discrepancia entre mediciones tempranas (CMB) y locales (Cefeidas+SN Ia):

$$\Delta H_0 = 5.8 \text{ km/s/Mpc} \quad (8.6\%)$$

Posibles explicaciones:

- Nueva física en el sector oscuro
- Error sistemático no contabilizado
- Evolución de H_0 (Hubble "running")

Table 17. Mediciones de H_0 del CMB (Planck 2018)

Parámetro	Valor
H_0	$67.36 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc}$
Ω_m	0.3153 ± 0.0073
Ω_Λ	0.6847 ± 0.0073

Diagrama del Espectro de Potencia

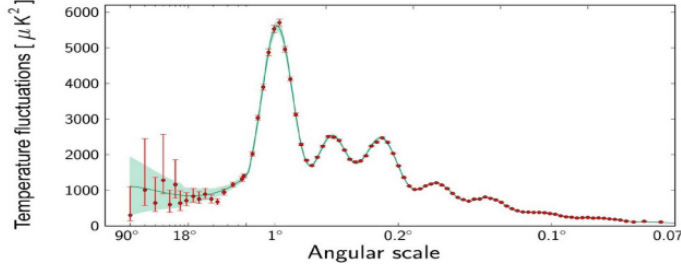


Fig. 23. Espectro de potencia angular del CMB mostrando los picos acústicos característicos. Las líneas sólidas representan el mejor ajuste ΛCDM .

Metodología de Ajuste

El proceso de determinación de parámetros incluye:

$$\chi^2 = \sum_{\ell} \frac{(C_{\ell}^{\text{obs}} - C_{\ell}^{\text{teo}})^2}{\sigma_{\ell}^2} \quad (30)$$

donde C_{ℓ} son los coeficientes del espectro de potencia multipolar.

Derivados Cosmológicos

A partir de H_0 se calculan:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)} \approx 13.8 \text{ Gyear}$$

$$d_H = \frac{c}{H_0} \approx 4.4 \text{ Gpc}$$

¿Por qué la diferencia?

Tal vez no estamos calculando bien los errores en las mediciones. O... tal vez Materia Oscura y Energía Oscura no se comportan como esperamos, o la gravedad actúa de otra forma, o el Universo no es tan plano como creemos...

El Tiempo de Hubble y la Edad del Universo

El tiempo de Hubble (t_H) representa una escala temporal característica del universo, definida como el inverso de la constante de Hubble:

$$t_H \equiv \frac{1}{H_0} \quad (31)$$

Para el valor actual de $H_0 = 67.4 \text{ km/s/Mpc}$:

$$t_H = \frac{1}{67.4 \text{ km/s/Mpc}} \approx 14.5 \text{ Gyear}$$

Interpretación Física

Estimación Simplificada

La derivación presentada asume:

- Velocidad de recesión constante ($v = H_0 d$)
- Expansión lineal no acelerada
- Ausencia de componentes cósmicos ($\Omega_m = \Omega_\Lambda = 0$)

$$t_H = \frac{d}{v} = \frac{d}{H_0 d} = \frac{1}{H_0}$$

Limitaciones de la Aproximación

Esta estimación ignora:

- La desaceleración temprana dominada por materia
- La aceleración reciente por energía oscura
- La transición entre regímenes cosmológicos

Comparación con la Edad Real del Universo

La edad cosmológica precisa requiere integrar la ecuación de Friedmann:

$$t_0 = \int_0^{\infty} \frac{dz}{H_0(1+z) \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (32)$$

Implicaciones Cosmológicas

- El tiempo de Hubble sobreestima ligeramente la edad real
- La diferencia del 5% refleja la historia dinámica de la expansión
- Para un universo vacío ($\Omega = 0$), t_H sería exacto
- En la época de dominación de radiación, $t_H \approx t_{\text{edad}}/2$

Aplicaciones

$$t(z) \approx \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_m}} (1+z)^{-3/2} \quad (\text{para } z \gg 1) \quad (33)$$

Esta aproximación es válida durante la dominación de materia.

El tiempo de Hubble

Definición e interpretación

El **tiempo de Hubble**, denotado como t_H , es una estimación del tiempo transcurrido desde el Big Bang bajo el supuesto simplificado de que la tasa de expansión del universo ha sido constante desde ese evento. Aunque esta suposición no es válida en modelos cosmológicos realistas, t_H proporciona una cota temporal del orden de magnitud del *universo observable*.

Derivación aproximada

Según la Ley de Hubble-Lemaître:

$$v = H_0 d$$

donde:

- v : velocidad de recesión de una galaxia,
- d : distancia actual de la galaxia,
- H_0 : constante de Hubble.

Si suponemos (incorrectamente) que la velocidad de recesión v ha permanecido constante durante toda la expansión, entonces el tiempo necesario para alcanzar la distancia actual es:

$$d = v \cdot t_H$$

Sustituyendo la ley de Hubble en esta expresión:

$$d = H_0 \cdot d \cdot t_H$$

Al cancelar d en ambos lados, se obtiene:

$$1 = H_0 \cdot t_H \Rightarrow t_H = \frac{1}{H_0}$$

Valor numérico y unidades

Si tomamos $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, debemos convertir esta unidad a una inversa de tiempo:

$$H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \approx 2.27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Entonces,

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx \frac{1}{2.27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}} \approx 4.41 \times 10^{17} \text{ s} \approx 13.9 \text{ Gyr}$$

Limitaciones del modelo

Este cálculo presupone que:

- La constante de Hubble no ha variado con el tiempo.
- El universo ha estado dominado únicamente por materia, sin considerar energía oscura ni radiación.

En realidad, la expansión del universo ha evolucionado con el tiempo. Modelos cosmológicos como Λ CDM predicen una historia de expansión más compleja, por lo que el valor real de la edad del universo es ligeramente inferior a t_H . Las observaciones del fondo cósmico de microondas (por ejemplo, de la misión Planck) indican una edad de $\sim 13.8 \text{ Gyr}$, en buen acuerdo con el tiempo de Hubble calculado, pero obtenido con modelado físico más detallado.

Expansión Acelerada del Universo

Supernovas Tipo Ia como candelas estándar

Las supernovas de tipo Ia son eventos astrofísicos extremadamente brillantes y con luminosidades intrínsecas bien conocidas, lo que las convierte en *candelas estándar*. Esto permite estimar su distancia con gran precisión. Al comparar la magnitud aparente observada m_B con el desplazamiento al rojo z , se puede reconstruir la historia de expansión del universo.

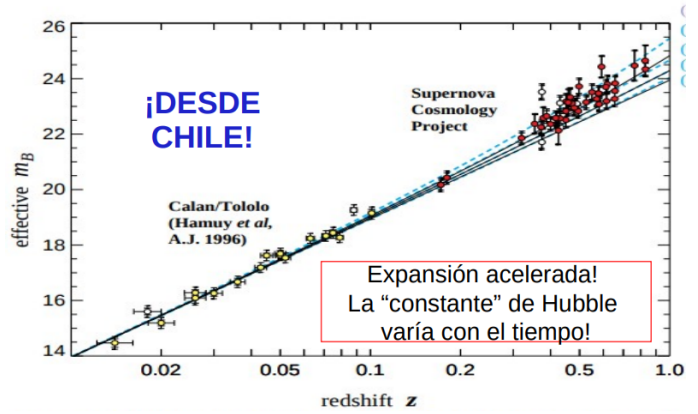


Fig. 24.

El diagrama de Hubble moderno

El gráfico presentado, proveniente de observaciones del *Supernova Cosmology Project* y del trabajo chileno *Calán/Tololo* (Hamuy et al., 1996), muestra la relación entre el corrimiento al rojo z y la magnitud aparente m_B de supernovas tipo Ia. Las curvas sólidas corresponden a distintos modelos cosmológicos con parámetros $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, donde Ω_M es la densidad de materia y Ω_Λ la densidad asociada a la constante cosmológica.

- Para $\Omega_\Lambda = 0$, las curvas no se ajustan a los datos observacionales a altos z .
- Los datos requieren un término cosmológico positivo ($\Omega_\Lambda > 0$), lo que implica una **expansión acelerada del universo**.

Consecuencias físicas

La observación de que supernovas distantes son *más tenues* de lo que predeciría un universo en expansión desacelerada indica que la expansión se ha acelerado en el pasado reciente. Esto implica que:

1. La **constante de Hubble** $H(t)$ no es realmente constante: varía con el tiempo cosmológico.
2. Es necesario introducir una forma de energía con presión negativa: la **energía oscura**.
3. El modelo estándar cosmológico se modifica a Λ CDM, que incluye la constante cosmológica Λ .

Reconocimiento internacional

Este descubrimiento fue tan revolucionario que en 2011, el Premio Nobel de Física fue otorgado a Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt y Adam G. Riess por “el descubrimiento de la expansión acelerada del universo mediante supernovas distantes tipo Ia”. Parte crucial de estas observaciones se realizó **desde Chile**, destacando el papel central de la astronomía observacional en el país.