Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2025

Tarea 8

---

1. Obtener la función de Green que satisface

$$\frac{d^2G}{dx^2} - \lambda^2 G = \delta(x-\xi) \qquad G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0 \tag{1}$$

donde λ es real, $x \in [0,1]$, $\xi \in (0,1)$. Mostrar que la solución a la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = f(x) \tag{2}$$

sujeta a las mismas condiciones de contorno es

$$y = -\frac{1}{\lambda \sinh\lambda}\left[\sinh(\lambda x)\int_x^1 f(\xi)\sinh[\lambda(1-\xi)]d\xi + \sinh[\lambda(1-x)]\int_0^x f(\xi)\sinh(\lambda\xi)d\xi\right] \tag{3}$$

2. Un operador diferencial lineal está definido por

$$\mathcal{L}_x y = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y \tag{4}$$

Por el uso de la sustición $y = z/x$ (o por cualquier método) encontrar las soluciones de $\mathcal{L}_x y = 0$ que son (a) acotada cuando $x \to 0$, o (b) acotada cuando $x \to \infty$. Encontrar la función de Green $G(x,a)$ que satisface

$$\mathcal{L}_x G(x,a) = \delta(x-a) \tag{5}$$

y ambas condiciones (a) y (b). Utilizar $G(x,a)$ para resolver

$$\mathcal{L}_x y(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,R] \\ 0 & x > R \end{cases} \tag{6}$$

sujeta a ambas condiciones (a) y (b). Mostrar que la solución tiene la forma

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{A}{x}\sinh x & x \in [0,R] \\ \frac{B}{x}e^{-x} & x > R \end{cases} \tag{7}$$

para constantes apropiadas A y B.