Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. **18**

# Números complejos

Planteamos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\boldsymbol{x^2 - 6x + 25 = 0}$$

Intentemos resolverla:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

Pero no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea $-64$, ya que:

$$(+8) \cdot (+8) = +64$$
$$(-8) \cdot (-8) = +64$$

Hemos chocado con un muro. No podemos avanzar. Debemos admitir que esa ecuación no tiene soluciones reales. Este problema lo tuvieron también los matemáticos de principios del siglo XIX.

Mostremos ahora que hay una puerta secreta en el muro.

Definimos un nuevo número, al cual llamaremos **la unidad imaginaria**, tal que:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

No es un número real.

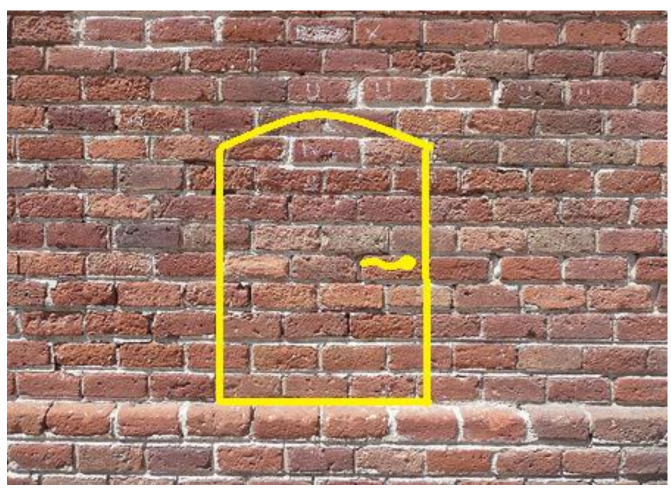
$$\mathbf{i} \notin \mathbf{R}$$

Luego:

$$(8i) \cdot (8i) = 64i^2$$

Pero como $i^2 = -1$:

$$(8i) \cdot (8i) = -64$$



Hemos descubierto la puerta secreta.

$$x = \frac{6 \pm 8i}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 3 + 4i} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{x = 3 - 4i}$$

La solución de la ecuación es: $\boldsymbol{S = \{3 + 4i,\ 3 - 4i\}}$

**Definición:**
Llamaremos número complejo a todo número de la forma

$$z = a + bi \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbf{R} \qquad \text{i = unidad imaginaria}$$

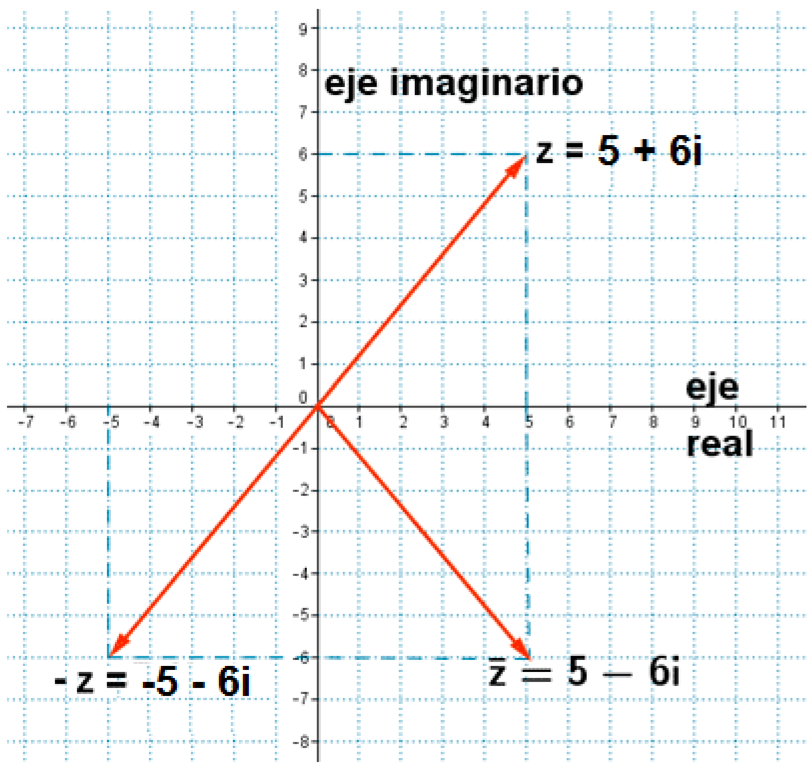
$a = Re\, z$ parte real del número complejo z.
$b = Im\, z$ parte imaginaria del número complejo z.

Si $b = 0$, z es un real puro $z = a + 0 \cdot i$
Si $a = 0$, z es un imaginario puro $z = 0 + bi$

La escritura de un número complejo como $z = a + bi$ se llama **forma binómica**. Luego veremos otras formas de escribirlos.

## Opuesto y conjugado de un número complejo

Los números complejos pueden ser graficados como se muestra en la figura. La parte real se busca en el eje real (horizontal) y l parte imaginaria en el eje imaginario (vertical) en un **diagrama de Argand-Euler.**




Consideremos ahora un número complejo,

$$\boldsymbol{z = a + bi}$$

Llamaremos **opuesto de z** al complejo

$$\boldsymbol{-z = -a - bi}$$

Y llamaremos **conjugado de z** al complejo,

$$\boldsymbol{\bar{z} = a - bi}$$

Volviendo a nuestro primer ejemplo se puede observar que las raíces complejas de una ecuación con coeficientes reales vienen siempre dadas por parejas de complejos conjugados. En nuestro primer ejemplo:

$$\boldsymbol{3 + 4i} \qquad \boldsymbol{3 - 4i}$$

## Operaciones con números complejos

Para mostrar cómo se opera con números complejos, intentemos verificar una de las soluciones obtenidas de la ecuación anterior.

$$\boldsymbol{x = 3 + 4i}$$

Reemplazando en la ecuación original,

$$(3 + 4i)^2 - 6(3 + 4i) + 25 = 0$$

Desarrollemos,

$$(3 + 4i)(3 + 4i) - 18 - 24i + 25 = 0$$

$$9 + 12i + 12i + 16i^2 - 18 - 24i + 25 = 0$$

Recordando que $i^2 = -1$ y simplificando las partes imaginarias que suman 0.

$$9 - 16 - 18 + 25 = 0$$

Evidentemente, la igualdad anterior se cumple. Observen que tenemos todos números reales. Hemos atravesado nuevamente la puerta secreta que se ha cerrado detrás de nosotros.

Resumiendo, para sumar, restar y multiplicar números complejos, operamos con ellos como si fueran expresiones algebraicas. Nos faltaría investigar más profundamente como dividir números complejos.

Entonces, dados dos números complejos, podemos definir la suma, la resta y el producto de ellos de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di}$$

Suma: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Resta: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

Recordando que $i^2 = -1$, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observen que todos ellos tienen forma de números complejos, por tanto diremos que las operaciones $+, -, \times$ son operaciones internas en el conjunto de los números complejos **C.**

**División de números complejos**

Lo haremos con un ejemplo. Supongamos que queremos dividir $z_1$ entre $z_2$ siendo,

$$z_1 = 2 + 7i \qquad z_2 = 3 - 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 7i}{3 - 4i}$$

La estrategia es amplificar la expresión por el conjugado de $z_2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{6+8i+21i+28i^2}{9+12i-12i-16i^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{6+8i+21i-28}{25} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{22}{25} + \frac{29}{25}i$$

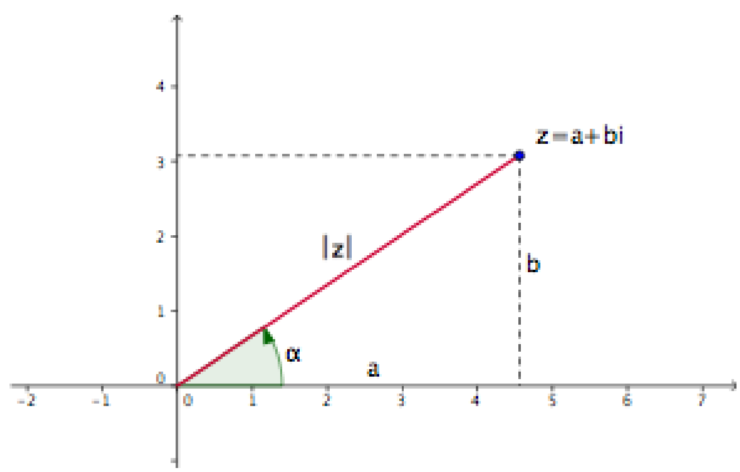
Se observa que tiene forma de número complejo. La aparición de fracciones es lógica dado que estábamos haciendo una división.

## Módulo y argumento de un número complejo

Siendo,

$$\boldsymbol{z = a + bi}$$

al segmento con extremos en los puntos (0,0) y (a,b) en el diagrama de Argand-Euler lo llamaremos **radio.vector** del número z.




A la longitud del radio vector, la llamaremos **módulo de z**. Con un simple Pitágoras vemos que,

$$\boldsymbol{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Y al ángulo $\alpha$ que forma el radio-vector de z con el semieje real positivo, lo llamaremos **argumento de z.** Obserevemos que:

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{b}{a}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha = Arctg\ \frac{b}{a}}$$

Algunas propiedades del módulo de un complejo z:

1) $|z| \in \mathbf{R}$ (es un número real) y $|z| \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathbf{C}$

2) $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 + 0i$

3) $|z| = |\bar{z}| \quad \forall\, z \in \mathbf{C}$

4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \forall\, z \in \mathbf{C}$

5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

**Ejercicio 1:**

Hallar el número complejo **z**, solución de la siguiente ecuación en C:

$$\boldsymbol{(3\bar{z} - 2z).(1 - 2i) = 43 + 14i}$$

**Solución:**

$$\boldsymbol{(3\bar{z} - 2z).(1 - 2i) = 43 + 14i}$$

Tomemos $z = a + bi$

por tanto $\bar{z} = a - bi$

Debemos encontrar $a$ y $b$ reales que cumplan:

$$[3(a - bi) - 2(a + bi)].(1 - 2i) = 43 + 14i$$

$$(3a - 3bi - 2a - 2bi).(1 - 2i) = 43 + 14i$$

$$(a - 5bi).(1 - 2i) = 43 + 14i$$

$$a - 2ai - 5bi - 10b = 43 + 14i$$

$$(a - 10b) + (-2a - 5b)i = 43 + 14i$$

Igualando partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} a - 10b = 43 \\ -2a - 5b = 14 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema,

$$a = 3 \qquad b = -4$$

La solución es:

$$z = 3 - 4i$$

**Ejercicio 2:**

*Resolver:*

$$(1+i)(2z+3i)+(2-i)(4+z)=5+2i.$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}(1+i)(2z+3i)+(2-i)(4+z)&=5+2i\\ 2z+3i+2iz-3+8+2z-4i-iz&=5+2i\\ 4z-i+iz+5&=5+2i\\ (4+i)z&=3i\\ z&=3i\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i\right)\\ z&=\frac{3}{17}+\frac{12}{17}i\end{aligned}$$

**Ejercicio 3:**

3) Graficar en el plano complejo las soluciones de la ecuación:

$$z\cdot \mathrm{Re}(z)=\frac{\bar{z}}{i}+1$$

3) Sea $z=a+bi$ solución de la ecuación, con $a,b\in\mathbb{R}$, al reemplazar y manipular queda:

$$z\cdot \mathrm{Re}(z)=\frac{\bar{z}}{i}+1$$

$$(a+bi)\cdot a=\frac{a-bi}{i}+1$$

$$a^2+ab\cdot i=\frac{a-bi}{i}+1$$

$$a^2\cdot i+ab\cdot i^2=a-bi+i$$

$$-ab+a^2\cdot i=a+(1-b)\cdot i$$

Igualando partes reales e imaginarias se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -ab = a \\ a^2 = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (b+1) = 0 \\ a^2 = 1 - b \end{cases}$$

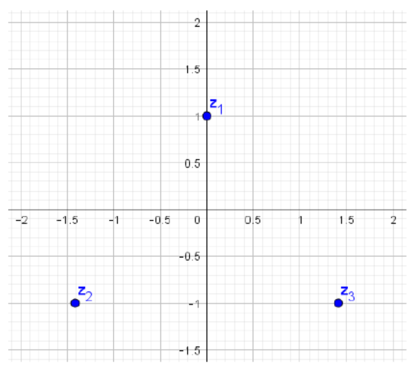
Si en la primera ecuación $a = 0$, entonces en la segunda ecuación $b = 1$.

Si ahora en la primera ecuación $b = -1$, en la segunda ecuación $a^2 = 2$, luego $a = \pm\sqrt{2}$.

Así la ecuación tiene 3 soluciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z_1 = i} \\ \boldsymbol{z_2 = -\sqrt{2} - i} \\ \boldsymbol{z_3 = +\sqrt{2} - i} \end{cases}$$

sus ubicaciones en el plano complejo son:




## Ejercicios

**1.** Resuelva las siguientes ecuaciones, verificando que las raíces encontradas las satisfagan $(x, y \in R, z \in C)$:

(a) $3(x+2) + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

(b) $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$

**Respuestas: (a)** $x = -\frac{23}{11}$; $y = \frac{16}{11}$ **(b)** $z = -1 - i$

**2.** Reduzca a la forma binómica $a + bi$:

$(a)$ $(3 + 5i) + (5 + 2i) - (4 + 7i)^2$

(b) $\dfrac{-5-2i}{4+i} + \dfrac{2+5i}{3i}$

**Respuestas: (a)** $41 - 49i$ **(b)** $\frac{57}{153} - \frac{129}{153}i$

**3.** Si $z = a + bi$, determine:

(a) $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{i\,\mathrm{Im}(z)}$ (b) $[1 - Re(z) + i\,.\,Im(z)] \cdot [1 - Re(z) - i\,.\,Im(z)]$

**Respuestas: (a) $-i\frac{a}{b}$ (b) $1 - 2a + a^2 + b^2$**

**4.** Siendo $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - i$, calcule

($a$) $2z_1 + 3z_2 + 3$ ($b$) $\dfrac{z_1}{iz_2}$ (c) $\dfrac{z_1 + z_3}{1 + z_2}$

**Respuestas: (a) $-1 + 7i$ (b) – 1 (c)$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$**

**5.** Siendo $z = a + bi$, con $a$ y $b$ reales no nulos a la vez, determine $Re(p)$ e $Im(p)$ si:

(a) $p = z^3$ (b) $p = 2i/z$

**Respuestas: (a) $Re(z^3) = a^3 - 3ab^2$; $Im(z^3) = 3a^2b - b^3$ (b) $Re\left(\frac{2i}{z}\right) = \frac{2b}{a^2+b^2}$; $Im\left(\frac{2i}{z}\right) = \frac{2a}{a^2+b^2}$**

**6.** Determine $z \in \mathrm{C}$ tal que:

(a) $|z|^2 - z = 11 - 3i$ (b) $z.\bar{z} + z = 3 + i$

**Respuestas: (a){2 + 3i, -1 + 3i} (b){2 + i, -1 + i}**

**7.** Calcule el módulo |z| siendo

(a) $z = (2 - 3i)(5 + 4i)(1 + i)$ (b) $z = \dfrac{a + bi}{a - bi}$

**Respuestas: (a) |z|=1066 (b) |z|=1**

**8.** La suma de dos números complejos es $-1 + 3i$. La parte real de uno de ellos es -2. El cociente entre ellos es imaginario puro. Hallar ambos números.

**Hay dos soluciones: {-2 + i, 1 + 2i}; {-2 + 2i, 1 + i}**

**9.** Calcular: $\dfrac{(2-i)^2}{3-4i}$ **Respuesta: 1**

**10.** Resuelva (siendo $z, w \in C$) el sistema de las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} (1 + i)z - iw = 5 - 2i \\ (2 + i)z + (2 - i)w = 10 + 5i \end{cases}$$

**Respuesta: z = $1 - i$, w = $2 + 3i$**