Electromagnetismo (LFIS 211)

Licenciatura en Física mención Astronomía / Ciencias Atmosféricas / Computación Científica
Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 1: Métodos matemáticos para la teoría electromagnética.

A. Problemas

1. Sean los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, y $\vec{C} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$. Calcular:
   (a) la suma de los vectores $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$;
   (b) las magnitudes y los cosenos directores de los tres vectores;
   (c) los vectores unitario en la dirección de los tres vectores;
   (d) los productos escalares $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$ y $\vec{B} \cdot \vec{C}$ y el ángulo entre cada par de vectores;
   (e) los productos vectoriales $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$ y $\vec{B} \times \vec{C}$;
   (f) el triple producto $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ (¿son coplanares los vectores?);
   (g) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}$
2. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

   e interpretando el resultado geométricamente, demuestre la *ley de los cosenos*.
3. Demuestre la *ley de los senos* para un triángulo mediante el uso del producto cruz de un vector con $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B}$.
4. Pruebe que la proyección de la suma de dos vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de los vectores sobre el mismo eje.
5. Dado cuatro puntos con radios vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$, suponga

$$[(\vec{D} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A})] \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = 0.$$

   Pruebe que los puntos son coplanares.
6. Pruebe que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (AB)^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

7. Un vector $\vec{A}$ es descompuesto en un vector radial $\vec{A}_r$ y un vector tangencial $\vec{A}_t$. Si $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial, muestre que

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \vec{A}_r = \hat{r}(\vec{A}\cdot\hat{r}),\\
(b) \quad & \vec{A}_t = -\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{A}).
\end{aligned}$$

8. Si $\vec{A}$ es un vector constante y $\vec{r}$ es el vector desde el origen hasta el punto (x, y, z),

   (a) demuestre que la ecuación de un plano es

$$(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{A} = 0,$$

   (b) demuestre que la ecuación de una esfera es

$$(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{r} = 0.$$

9. Demuestre que

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \hat{\imath}\cos\alpha + \hat{\jmath}\sin\alpha\\
\vec{B} &= \hat{\imath}\cos\beta + \hat{\jmath}\sin\beta
\end{aligned}$$

   son vectores unitarios en el plano xy formando ángulos α, β con el eje x. Por medio de un producto escalar, obtenga la fórmula para $\cos(\alpha-\beta)$.

10. Sean $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_1$ una base ortonormal. ¿Es

$$\vec{a}_1 = 2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_3, \quad \vec{a}_3 = 4\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3$$

    una base?, ¿Lo es

$$\vec{b}_1 = \hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3, \quad \vec{b}_2 = 2\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 - \hat{e}_3, \quad \vec{b}_3 = 3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3?$$

11. Resolver

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int \frac{dx}{1+x^2}\\
(b) \quad & \int \frac{x\,dx}{1+x^2}\\
(c) \quad & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\
(d) \quad & \int \frac{dx}{[a^2+(z-x)^2]^{3/2}}\\
(e) \quad & \int \sin^2\theta\, d\theta.\\
(f) \quad & \int \frac{(z-r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(z^2+r^2-2zr\cos\theta)^{3/2}}.\\
(g) \quad & \int r(1+r)e^{-br}\,dr.
\end{aligned}$$

12. Calcular $\vec{\nabla} f$, donde f es una función escalar dada por

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \\
(b) & f(x,y,z) = x^2+y^3+z^4. \\
(c) & f(x,y,z) = x^2y^3z^4. \\
(d) & f(x,y,z) = e^x \sin(y)\ln(z). \\
(e) & f(r,\theta,\phi) = (a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{-1/2}. \\
(f) & f(r,\theta,\phi) = \dfrac{\sin\theta e^{i\phi}}{r^2}. \\
(g) & f(r,\theta,\phi) = 2\arcsin(r-a\theta)\sinh(\phi). \\
(h) & f(r,\theta,\phi) = e^{\phi}\sin(\theta)\ln(a/r). \\
(i) & f(\rho,z,\phi) = \rho z\sin(\phi) + z^2\cos^2(\phi) + \rho^2.
\end{array}
$$

13. Calcular $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ y $\vec{\nabla}\times\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es una función vectorial dada por

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \vec{v}(x,y,z) = x^2\,\hat{i} + 3xz^2\,\hat{j} - 2xz\,\hat{k}. \\
(b) & \vec{v}(x,y,z) = xy\,\hat{i} + 2yz\,\hat{j} + 3xz\,\hat{k}. \\
(c) & \vec{v}(x,y,z) = y^2\,\hat{i} + (2xy+y^2)\,\hat{j} + 2yz\,\hat{k}. \\
(d) & \vec{v}(r,\theta,\phi) = \dfrac{\cos\theta}{r^2}\,\hat{r} + r\sin\theta\cos\phi\,\widehat{\theta} + \cos\theta\,\widehat{\phi}. \\
(e) & \vec{v}(r,\theta,\phi) = r(\sin^2\phi\sin\theta\,\hat{r} - \sin\theta\cos\phi\,\widehat{\theta} + \cos\theta\,\widehat{\phi}). \\
(g) & \vec{v}(\rho,z,\phi) = \rho\sin\phi\widehat{\rho} + \rho^2 z\widehat{\phi} + z\cos\phi\widehat{z}. \\
(h) & \vec{v}(\rho,z,\phi) = \rho^2\cos\phi\,\widehat{\rho} + \rho^2\sin\phi\widehat{\phi}.
\end{array}
$$

14. Dibuje la función vectorial

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2},$$

y calcule su divergencia. Explique el resultado.

15. Si $\vec{r}$ es un vector que va del origen al punto (x,y,z), demuestre las fórmulas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{r} = 0; \qquad (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{u},$$

donde $\vec{u}$ es un vector arbitrario.

16. (a) Encuentre las constantes a, b, c, tal que

$$\vec{A} = (x_1+2x_2+ax_3)\hat{e}_1 + (bx_1-3x_2-x_3)\hat{e}_2 + (4x_1+cx_2+2x_3)\hat{e}_3$$

sea irrotacional.

(b) Muestre que $\vec{A}$ puede ser expresado como el gradiente de una función escalar.

17. Si $\vec{A}$ es un vector constante y $\vec{r}$ es el vector desde el origen hasta el punto (x, y, z), demuestre que

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}.$$

18. Demuestre que el vector unitario normal a la superficie $\varphi(\vec{r}) =$ constante es

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}.$$

Encuentre $\hat{n}$ para el elipsoide

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

19. Sean f y g funciones escalares, y $\vec{A}$ y $\vec{B}$ funciones vectoriales, demuestre las siguientes identidades vectoriales

(a) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$,
(b) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$,
(c) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}f)$,
(d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$,
(e) $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla}f)$,
(f) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$.

20. ¿Es $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ necesariamente perpendicular a $\vec{F}$ para cualquier función vectorial $\vec{F}$? Justifique su respuesta.

21. Para dos funciones escalares cualesquiera Φ y Ψ, demuestre que

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + \Psi\nabla^2\Phi + 2\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi.$$

22. Evaluar el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{\imath} + (y^2 + e^{xz^2})\hat{\jmath} + \sin xy\hat{k},$$

a través de la superficie frontera de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.

23. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores constantes, muestre que

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{r}) = \vec{A} \times \vec{B}$$

24. (a) Muestre que $\vec{u} \times \vec{v}$ es solenoidal si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son irrotacionales.
(b) Si $\vec{A}$ es irrotacional, muestre que $\vec{A} \times \vec{r}$ es solenoidal.
(c) Si una función vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ es de vorticidad (es decir, no irrotacional) pero el producto de $\vec{f}$ y una función escalar $g(x, y, z)$ es irrotacional, muestre que

$$\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$$

25. Estudia si los siguientes campos son conservativos en el dominio A que se indica en cada caso. Cuando el campo sea conservativo calcula la función potencial que se anula en el origen

    (a) $\vec{F}(x,y) = (x-y)\hat{\imath} + (y+y^2x)\hat{\jmath}, \quad A = \mathbb{R}^2.$

    (b) $\vec{F}(x,y) = (x^3+3y^2x)\hat{\imath} + (-y^3+3yx^2)\hat{\jmath}, \quad A = \mathbb{R}^2.$

    (c) $\vec{F}(x,y) = (2x\cos y - y\cos x)\hat{\imath} + (-x^2\sin y - \sin x)\hat{\jmath}, \quad A = \mathbb{R}^2.$

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = 2xy^3z^4\hat{\imath} + 3x^2y^2z^4\hat{\jmath} + 4x^2y^3z^3\hat{k}, \quad A = \mathbb{R}^3.$

26. Si r es la magnitud del vector que va desde el origen al punto (x,y,z) y $f(r)$ es una función arbitraria de r, demuestre que

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \quad \vec{\nabla} \times [f(r)\vec{r}] = \vec{0}.$$

27. Demuestre que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}r}.$$

28. Si $\xi = \vec{A} \cdot \vec{r}$, demuestre que

$$\vec{\nabla}\varphi(\xi) = \vec{A}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}.$$