# Clase nº19

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

13 de Octubre 2021

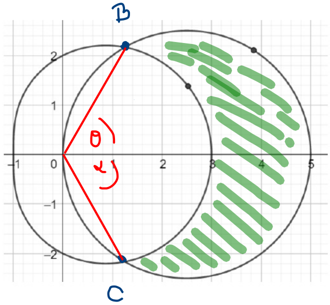
## Objetivo de la clase

- Calcular áreas en coordenadas polares.
- Calcular el volumen de un sólido de revolución.

# Cálculo de áreas en coordenadas polares

## Ejemplo 63

Encuentre el área en el interior del círculo $r = 5\cos\theta$ y fuera del cardioide $r = 2 + \cos(\theta)$.




Encontraremos el ángulo asociado a B y C.

$$5\cos\theta = 2 + \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\theta = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Luego los ángulos buscados son: $\theta = \frac{\pi}{3}$ v $\theta = \frac{-\pi}{3}$

El área buscada es :

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\cdot[5\cos\theta]^2\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\cdot[2+\cos\theta]^2\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4+4\cos\theta+\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{24}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 12\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta - 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\cdot\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 6\cdot\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) - 2\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 6\cdot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \frac{4\pi}{3} - 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$= \ \dots$ ejercicio.

$$= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

# Volúmenes de sólidos de revolución

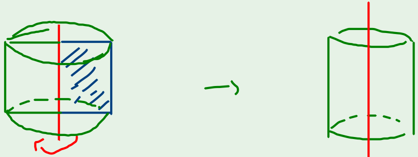
### Definición 31

Llamaremos sólido de revolución a la figura que se obtiene al girar una región plana (dos dimensiones) en torno a un eje de rotación que está fijo.

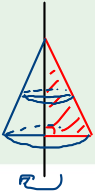
# Volúmenes de sólidos de revolución

## Ejemplo 64

a) El cilindro circular recto, que se obtiene al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados que se mantiene inmóvil.



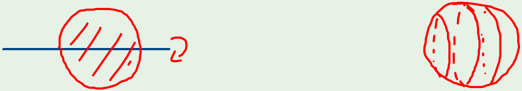
b) El cono circular recto, que se obtiene al girar un triángulo sobre uno de sus lados.



# Volúmenes de sólidos de revolución

## Ejemplo 65

a) La esfera se genera al girar una circunferencia en torno a su diámetro.



b) El toro se genera cuando un círculo rota en torno a un eje externo a él.

# Método de los discos

El siguiente teorema nos permitirá calcular el volumen de sólidos de revolución que se generan al girar una región del plano en torno al eje X.

## Teorema 32

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región $R$,

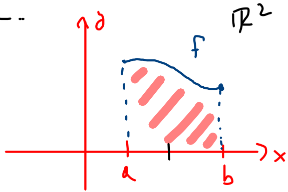
$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

en torno al eje $X$ está dado por la fórmula

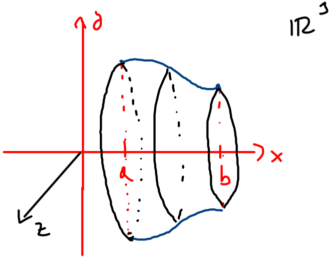
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

# Método de los discos

De..




Al rotar f correspondiente al eje x.




Al rotar f entorno al eje x obtenemos una superficie en el plano tridimensional,

$$S_f \subset \mathbb{R}^3.$$

Calcularemos el volumen de $S_f$.

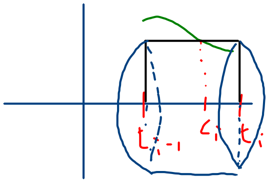
Sea $t_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$ con $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

En $[t_{i-1}, t_i]$ consideremos $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y el rectángulo de base $(t_i - t_{i-1})$ y altura $f(c_i)$.

# Método de los discos

Al rotar el rectángulo al rededor del eje x se obtiene un cilindro de volumen

$$\pi \cdot [f(c_i)]^2 (t_i - t_{i-1}).$$




Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \pi [f(c_i)]^2 (t_i - t_{i-1})$$ es una aproximación del volumen de $S_f$. En general $g(x) = \pi [f(x)]^2$ y denotando por $P_n$ la partición $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, entonces

$$I(P_n, g) \leq \sum_{i=1}^{n} \pi [f(c_i)]^2 (t_i - t_{i-1}) \leq S(P_n, g)$$

# Método de los discos

Si $n \to \infty$ entonces

$$\boxed{V(S_f) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx .}$$

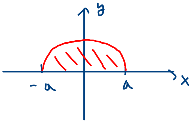
# Método de los discos

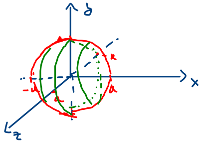
# Método de los discos

# Método de los discos

## Ejemplo 66

Calcular el volumen de una esfera generada al girar el semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, en torno a su diámetro.




Notar que $x \in [-a, a]$,

$$V(S_f) = \pi \int_{-a}^{a} [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} a^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^{a}$$

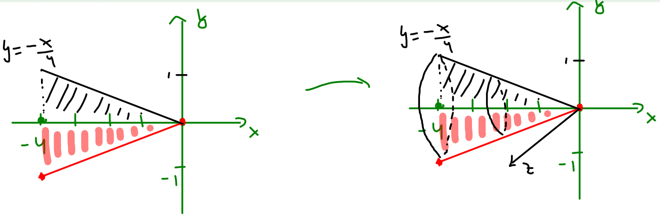
$$= \pi \left( a^2 \cdot a - \frac{a^3}{3} - \left( a^2 \cdot (-a) - \frac{(-a)^3}{3} \right) \right)$$

$$= \pi \left( 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

# Método de los discos

## Ejemplo 67

Encuentre el volumen del cono generado al rotar el triángulo formado por los segmentos de las rectas $y = \frac{x}{4}$ con $x \in [-4, 0], x = -4$ y el eje $X$, en torno al eje $X$.




Consideremos $f(x) = \frac{-x}{4}$ , $x \in [-4, 0]$. Luego.

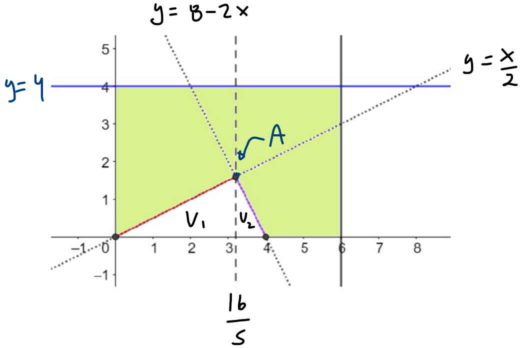
$$V(S_f) = \pi \int_{-4}^{0} \left[ -\frac{x}{4} \right]^2 dx$$

$$= \pi \int_{-4}^{0} \frac{x^2}{16} dx = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^{0}$$

$$= \frac{\pi}{48} \cdot \left( 0 - (-4)^3 \right) = \frac{4}{3} \pi .$$

## Ejemplo 68

Calcular el volumen generado al rotar la figura pintada en torno al eje $X$.




- Encontrar A.

$$\begin{cases} y = 8 - 2x \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = 8 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 16 - 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{5}, \quad y = \frac{8}{5}$$

Luego, $A = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Así:

$$V_1 = \pi \int_0^{16/5} \left[\frac{x}{2}\right]^2 dx = \frac{\pi}{4} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{16/5}$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \left(\frac{16}{5}\right)^3 .$$

$$V_2 = \pi \int_{\frac{16}{5}}^{4} (8-2x)^2 \, dx = \pi \int_{\frac{16}{5}}^{4} 64 - 32x + 4x^2 \, dx$$

$$= \pi \left(64x - \frac{32x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{16}{5}}^{4}$$

$= \ldots$ Ejercicio.

$$= \frac{256}{375}\pi .$$

$$V_3 = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{12}\left(\frac{16}{5}\right)^3 + \frac{256}{375}\pi .$$

$$V_4 = \pi \int_0^6 4^2 \, dx = 16\pi \, x \Big|_0^6 = 16 \cdot 6\pi = 96\pi .$$

$\therefore$, El volumen buscado es

$$V(S_v) = V_4 - V_3 = 96\pi - \frac{\pi}{12}\left(\frac{16}{5}\right)^3 - \frac{256}{375} \cdot \pi .$$

//

# Método de los discos

## Ejercicio propuesto

a) Calcular el volumen del paraboloide circular generado al rotar el segmento de parábola $y = \sqrt{2x}$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje $X$.

b) Sea la región

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -x^2 + 4 \geq y \quad \wedge \quad y \geq x^2 \quad \wedge \quad y \leq 3\}.$$

Determinar el volumen generado por $R$ al rotar con respecto al eje $X$.

## Bibliografía

| | Autor | Título | Editorial | Año |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Stewart, James | Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas | México: Cengage Learning | 2021 |
| 2 | Burgos Román, Juan de | Cálculo infinitesimal de una variable | Madrid: McGraw-Hill | 1994 |
| 3 | Zill Dennis G. | Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones | Thomson | 2007 |
| 4 | Thomas, George B. | Cálculo una variable | México: Pearson | 2015 |

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.