Tarea 2

Cálculo 2 – FOGEC
FC – UV
22/10/2021

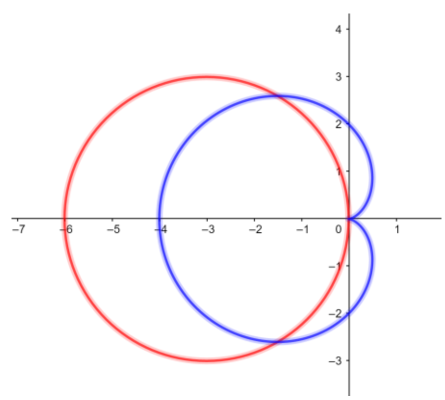
1.- (20 Puntos)
Dada la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 2 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
a) Grafique la región R y luego determine su área.
b) Determine el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor de Y.
c) Determine el volumen del sólido al rotar la región alrededor de $y = -2$

2.- (20 Puntos)
Hallar el volumen del solido de revolución generado al rotar la región encerrada por

$$y = x^3; y = \frac{x-1}{2} \text{ e } y = -x + 10$$

Alrededor de la recta $x = 8$

3.- (20 Puntos)
Hallar el área de la región que resulta al interceptar el interior de la circunferencia $r = -6\cos\theta$ con el interior del cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$ (ver figura).



Observaciones:

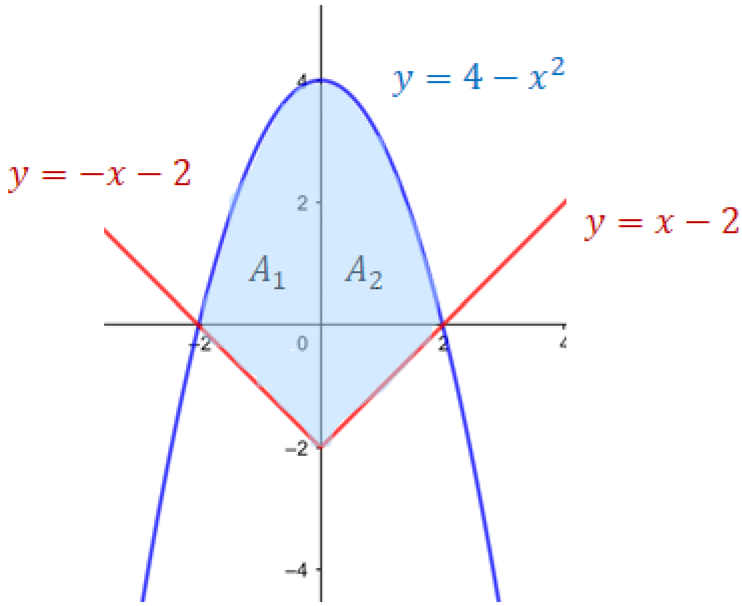
- Esta tarea es individual o grupal, máximo de cuatro alumnos.
- Fecha de entrega viernes 10 de septiembre hasta las 23:59 horas.
- Enviar documento de desarrollo al correo: ....

1.- a)

Graficamos :

$$y = |x| - 2 = \begin{cases} -x - 2, & x < 0 \\ x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = 4 - x^2$$



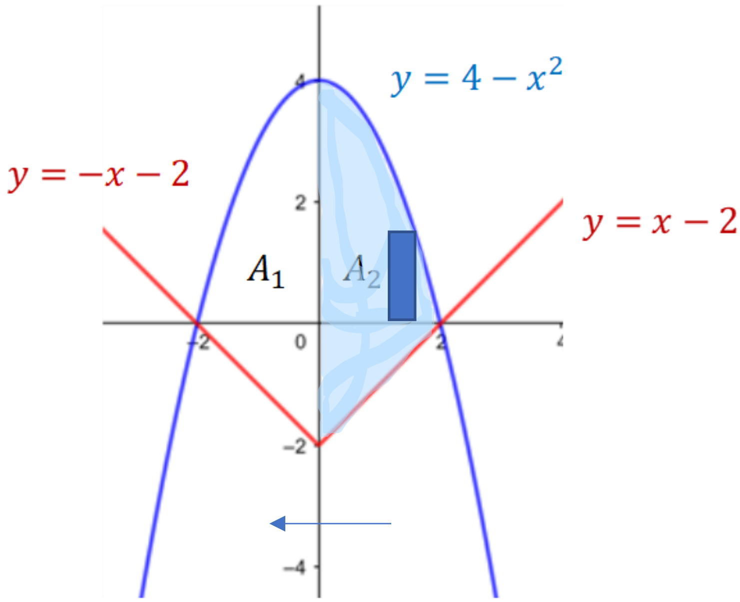
$$A = A_1 + A_2 = 2A_2 \text{ (por simetría de la región } A_1 = A_2\text{)}$$

Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \big((4 - x^2) - (x - 2)\big)\,dx \\ &= 2\int_0^2 (6 - x - x^2)\,dx \\ &= 2\left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 2\left[12 - 2 - \frac{8}{3}\right] \\ &= 2\left[10 - \frac{8}{3}\right] \\ &= 2\left[\frac{30 - 8}{3}\right] \\ &= \frac{44}{3}u^2 \end{aligned}$$

b)

Basta rotar el área A_2 alrededor del eje Y.



$$V_{anillo\ cil} = 2\pi\ \cdot x_i \cdot (parábola - recta) \cdot \Delta x_i$$

Distancia al eje de giro

$$V = 2\pi \int_0^2 x\left((4 - x^2) - (x - 2)\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x(6 - x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6x - x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \left[6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left(\left[12 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0\right)$$

$$= 2\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) =$$

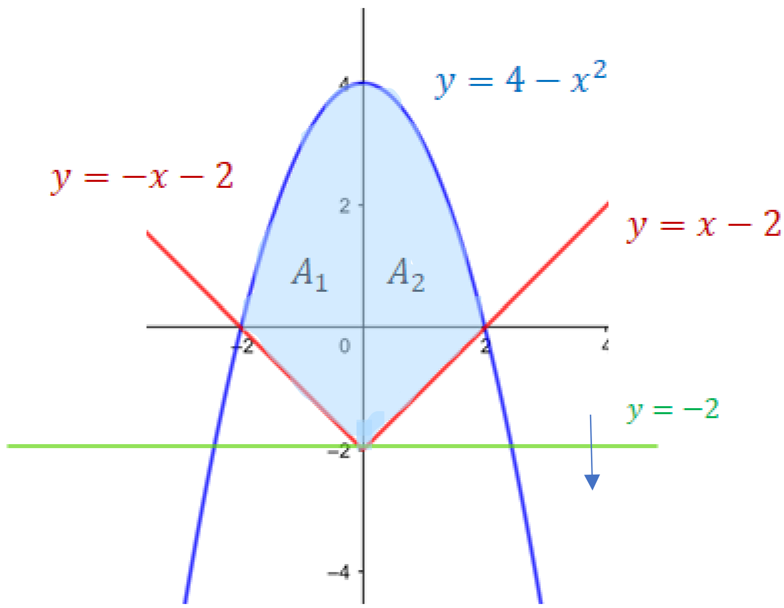
$$2\pi \left(\frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{32}{3}\pi\, u^3$$

c)

$$V_{arandela} = \pi[(r.e)^2 - (r.i)^2]\Delta x_i$$
$$= [(2 + 4 - x^2)^2 - (2 + x - 2)^2]\Delta x_i$$
$$= [(6 - {x_i}^2)^2 - {x_i}^2]\Delta x_i$$

Luego



$$V = 2\pi \int_0^2 ((6 - x^2)^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (36 - 12x^2 + x^4 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (36 - 13x^2 + x^4) dx$$

$$= 2\pi \left[36x - 13\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left(\left[36(2) - 13\frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right] - 0\right)$$

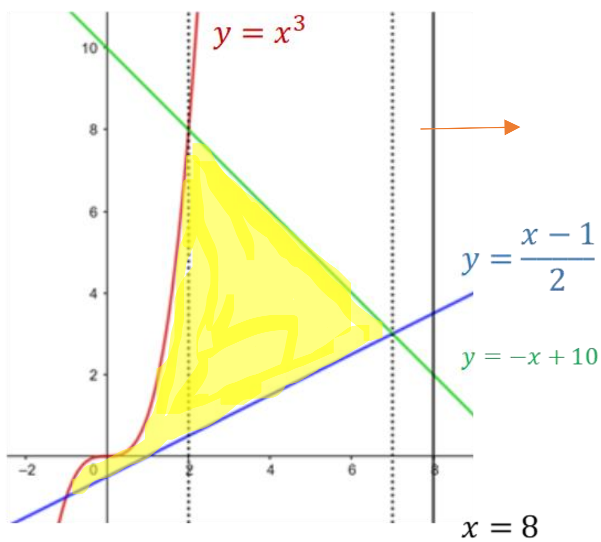
$$= \frac{1312}{15}\, u^3$$

2.- Gráfico:

$$\text{Rectas}: \; y = -x + 10 \; ; \; y = \frac{x-1}{2}$$

$$\text{Curva cúbica:} \quad y = x^3$$

Luego



De

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x + 10 \end{cases}$$

$$x^3 = -x + 10 \Leftrightarrow x^3 + x - 10 = 0$$

Tiene como única solución en $\mathbb{R}$ a $x = 2$

$$\Rightarrow (2{,}8) \text{ es el punto de intersección.}$$

De

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$x^3 = \frac{x-1}{2}$$

$$2x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (No hay otra solución en } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow (-1, -1) \text{ es el punto de intersección}$$

De

$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ y = \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{2} = -x + 10$$

$$x - 1 = -2x + 20$$

$$3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$\Rightarrow$ (7,3) punto de intersección

$$V = V_1 + V_2$$

Para V_1

Distancia al eje de giro

$$V_{anillo\ cil} = 2\pi\,(8 - x_i)\left(x_i{}^3 - \left(\frac{x_i - 1}{2}\right)\right)\Delta x_i$$

Entonces

$$V_1 = 2\pi\int_{-1}^{2}(8-x)\left(x^3 - \left(\frac{x-1}{2}\right)\right)dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(8-x)(2x^3 - x + 1)\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(16x^3 - 2x^4 - 8x + x^2 + 8 - x)\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(16x^3 - 2x^4 + x^2 - 9x + 8)\,dx$$

$$= \pi\left[16\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{603}{10}\pi\,u^3$$

Para V_2

Distancia al eje de giro

$$V_{anillo\ cil} = 2\pi\,(8 - x_i)\left((-x_i + 10) - \left(\frac{x_i - 1}{2}\right)\right)\Delta x_i$$

$$V_2 = 2\pi \int_2^7 (8 - x)\left(-x + 10 - \left(\frac{x - 1}{2}\right)\right) dx$$

$$= \pi \int_2^7 (8 - x)(-2x + 20 - x + 1)\, dx$$

$$= \pi \int_2^7 (8 - x)(-3x + 21)\, dx$$

$$= \pi \int_2^7 (-24x + 168 + 3x^2 - 21x)\, dx$$

$$= \pi \int_2^7 (168 - 45x + 3x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[168x - 45\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3}\right]_2^7$$

$$= \pi \left[168x - 45\frac{x^2}{2} + x^3\right]_2^7$$

$$= \frac{325}{2}\pi$$

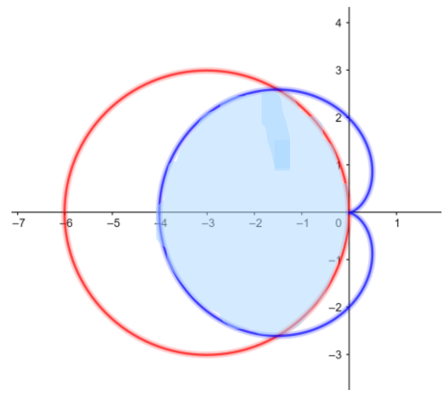
Por tanto,

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \frac{603}{10}\pi + \frac{325}{2}\pi$$

$$= \frac{603 + 1625}{10}\pi = \frac{2228}{10}\pi$$

3.- El área pedida es la región pintada en la figura siguiente:



Puntos de intersección:

$$r = -6\cos\theta$$

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

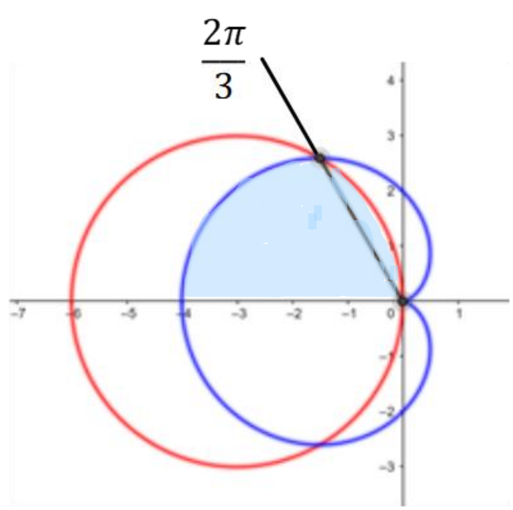
$$2 - 2\cos\theta = -6\cos\theta$$

$$2 - 2\cos\theta + 6\cos\theta = 0$$

$$2 + 4\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \theta = arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\ y\ \frac{4\pi}{3}$$

Tenemos simetría en la figura luego



$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(-6\cos\theta)^2 d\theta + 2\int_{2\pi/3}^{\pi}(2-2\cos\theta)^2 d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi/3}(-6\cos\theta)^2 d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi}(2-2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} 36\, cos^2\theta\ d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi}(4-8\cos\theta + 4cos^2\theta)d\theta$$

$$= 36\int_{\pi/2}^{2\pi/3} cos^2\theta\ d\theta + 4\int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta - 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\theta\ d\theta + 4\int_{2\pi/3}^{\pi} cos^2\theta\ d\theta$$

$$= 36\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta + 4\int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta - 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\theta\ d\theta$$
$$+ 4\int_{2\pi/3}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= 18\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(1+\cos 2\theta)d\theta + 4\int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta - 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\theta\ d\theta$$
$$+ 2\int_{2\pi/3}^{\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 18\int_{\pi/2}^{2\pi/3} d\theta + 18\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\cos 2\theta\ d\theta + 4\int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta - 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\theta\ d\theta$$
$$+ 2\int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta + 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos 2\theta\ d\theta$$
$$= 5\pi\ u^2$$