Certamen 1
Progresiones y Trigonometría

Instrucciones

- Este certamen es individual.
- Debe prepararse un único documento pdf con imágenes con los desarrollos escritos a mano.
- El documento debe iniciar con el nombre y apellido del estudiante.
- Enviar el documento pdf al correo turing@emttec.cl
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV y solo se corregirá el primer correo recibido.
- El plazo de entrega máximo es el viernes 14 de mayo a las 21:00.
- Los puntajes se encuentran indicados, hay 1,0 puntos base si se respeten estas instrucciones.

1) Uno de los temas más demandados por la sociedad chilena para la elaboración de un nuevo pacto social, tiene relación con el salario mínimo y el sistema de pensiones. Técnicamente representa un problema muy complejo que para tener un acercamiento simplificaremos bastante y abordaremos con la ayuda de progresiones geométricas y el cálculo de porcentajes.

Consideremos como referencia un(a) joven chileno(a) que ingresó al sistema laboral en enero de 2021 con un contrato por el sueldo mínimo mensual de $350.000, reajustado anualmente según el IPC (Índice de precios del consumidor) y otros factores con una proyección del 2%.

Por otro lado, supongamos que al trabajador se le retiene el 10% de su sueldo mensual, para ingresarlo a un fondo capitalización individual de pensión y rentabilizarlo al momento de la jubilación. La tabla siguiente muestra parte de las progresiones del sueldo y el aporte mensuales al fondo de pensión:

Año	Sueldo mensual	Aporte mensual al fondo de pensión
2021	$\$350.000$	$\$350.000 \cdot 0{,}1 = \$35.000$
2022	$\$350.000 \cdot 1{,}02 = \$357.000$	$\$357.000 \cdot 0{,}1 = \$35.700$
2023	$\$350.000 \cdot 1{,}02^2 = \$364.140$	$\$364.140 \cdot 0{,}1 = \$36.414$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Supongamos que el sistema de capitalización aplica una rentabilidad del 5% sobre el total acumulado en el fondo al instante de jubilarse. Calcular cuánto dinero tendrá la persona en su fondo cuando jubile después de 40 años de trabajo. **(2,0 puntos)**

2) Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación: **(2,0 puntos)**

$$\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x) = \frac{1}{2}$$

3) Un triángulo tiene perímetro 10 m, área 3 m^2 y un ángulo interior 30°. Hallar aproximadamente su lado más largo. **(2,0 puntos)**

Solución

1) La columna derecha de la tabla nos entrega los aportes a la pensión, que siguen una PG con primer término $a_1 = \$35.000$, razón $r = 1{,}02$ y $n = 40$. Dado que representan sueldos por año, el aporte total se calcula como 12 veces la suma de la columna:

$$Aporte \;=\; 12 \cdot S_n \;=\; 12 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \right) =\; 12 \cdot \left(\$35.000 \cdot \frac{1{,}02^{40} - 1}{1{,}02 - 1} \right) \;=\; \$25.368.833$$

finalmente, si se suma una rentabilidad del 5% al momento de la jubilación, el monto final disponible será:

$$\$25.368.833 \cdot 1{,}05 = \$\mathbf{26.637.275}$$

2) Usando la identidad pitagórica, expresamos solo en término de cosenos:

$$\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x) = \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \cos^2(x)\right)^2 + \cos^4(x) = \frac{1}{2}$$

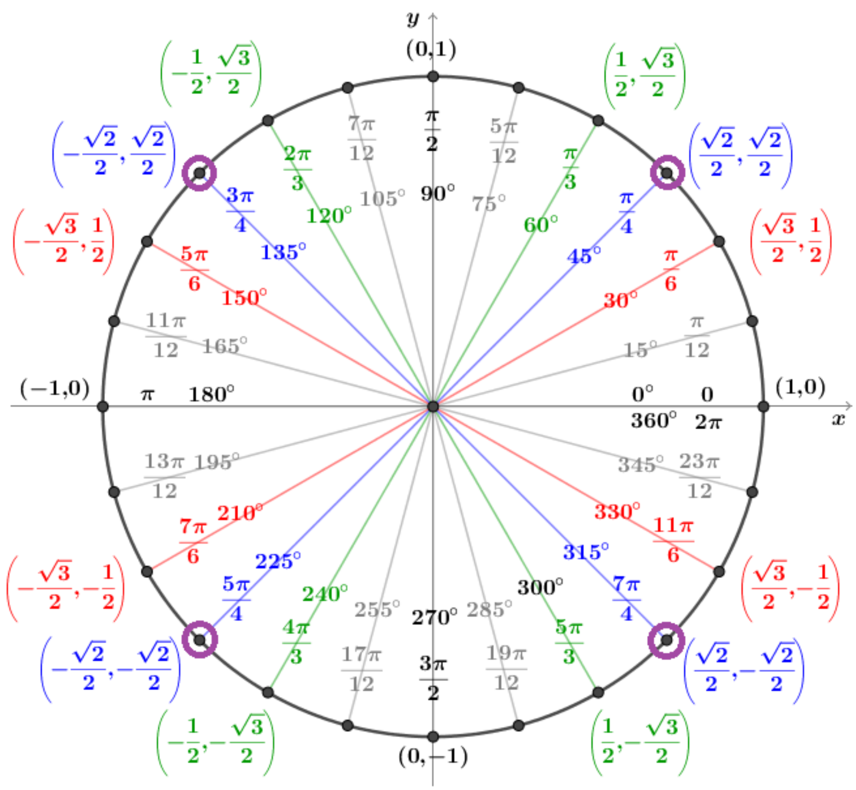
$$1 - 2\cos^2(x) + 2\cos^4(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^4(x) - \cos^2(x) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\cos^2(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

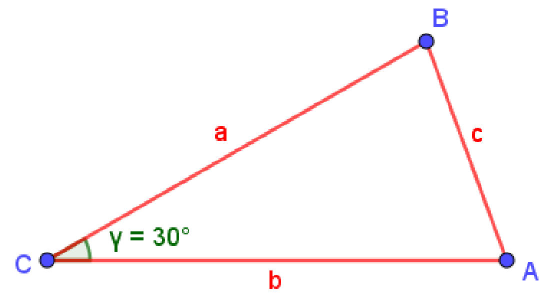
$$\cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Como se observa en la circunferencia unitaria, en la primera vuelta hay 4 soluciones equiespaciadas, por lo que podemos expresar la solución general como:

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

3) Consideremos que deseamos resolver el triángulo de la figura.



La condición de perímetro establece:

$$a + b + c = 10$$

la de área:

$$\frac{ab \cdot \overbrace{\operatorname{sen}(30°)}^{1/2}}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad ab = 12$$

y el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \overbrace{\cos(30°)}^{\sqrt{3}/2} \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - ab \cdot \sqrt{3}$$

Así reunimos 3 ecuaciones para 3 incógnitas: a, b y c.

De la ecuación de perímetro despejamos $c = 10 - (a + b)$ y reemplazamos en la última, remplazando además la condición de área $ab = 12$:

$$\left(10 - (a + b)\right)^2 = a^2 + b^2 - 12 \cdot \sqrt{3}$$

$$100 - 20(a + b) + (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 12 \cdot \sqrt{3}$$

$$100 - 20a - 20b + a^2 + 2\underbrace{ab}_{12} + b^2 = a^2 + b^2 - 12 \cdot \sqrt{3}$$

$$100 - 20a - 20b + 24 = -12 \cdot \sqrt{3}$$

$$25 - 5a - 5b + 6 + 3\sqrt{3} = 0$$

$$5a + 5b - 31 - 3\sqrt{3} = 0$$

Reemplazando la condición de área $b = \frac{12}{a}$:

$$5a + \frac{60}{a} - 31 - 3\sqrt{3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5a^2 - \left(31 + 3\sqrt{3}\right)a + 60 = 0$$

resolvemos la cuadrática:

$$a = \frac{31 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(31 + 3\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 60}}{2 \cdot 5} \approx \begin{cases} 2{,}57 & \Longrightarrow \quad b \approx 4{,}67 \\ 4{,}67 & \Longrightarrow \quad b \approx 2{,}57 \end{cases}$$

y para ambas combinaciones obtenemos $c = 10 - (a + b) \approx 2{,}76$, **así el lado más largo mide $\mathbf{4,67}$ m.**