Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 2

---

1. Encontrar una solución al siguiente conjunto de ecuaciones lineales homogéneas:

$$x + 3y + 3z = 0; \quad x - y + z = 0; \quad 2x + y + 3z = 0$$

Solución: Primero, confirmamos que hay una solución no trivial.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3-1) - 3(3-2) + 3(1-(-2)) = 2 \tag{1}$$

Ya que el determinante no es cero, la única solución es la solución trivial $x = y = z = 0$.

2. Verificar la identidad de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

Solución: Podemos resolver este problema simplemente expandiendo los conmutadores.

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, (BC - CB)] = ABC - ACB - BCA + CBA \\ [C, [A, B]] &= [C, (AB - BA)] = CAB - CBA - ABC + BAC \\ [B, [C, A]] &= [B, (CA - AC)] = BCA - BAC - CAB + ACB \end{aligned} \tag{2}$$

Sumando todas las ecuaciones arriba llegamos al resultado.

3. Las matrices de Pauli (usadas en el contexto de partículas con *spin*) son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices gamma de Dirac (usadas en el contexto de la física de electrones), γ^μ, son:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \gamma \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $i = 1, 2, 3$. Mostrar que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ *anticonmuta* con todas las matrices de Dirac γ^μ (es decir, su anticonmutador es cero).

Solución: Del libro (o de la pregunta siguiente) vemos que las matrices de Dirac satisfacen:

$$(\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^i)^2 = -1 \qquad \gamma^\mu\gamma^i = -\gamma^i\gamma^\mu \quad (\mu \neq i) \tag{3}$$

Primero consideramos el producto $\gamma^5\gamma^0$:

$$\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^5 \tag{4}$$

donde hemos usado $\gamma^i\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^i$ multiples veces. Ahora consideramos el producto con γ^3:

$$\begin{aligned} &\gamma^5\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \\ &\gamma^3\gamma^5 = i\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^5\gamma^3 \end{aligned} \tag{5}$$

donde hemos usado $\gamma^3\gamma^3 = -1$. El producto con γ^2 es similar:

$$\begin{aligned} &\gamma^5\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 \\ &\gamma^2\gamma^5 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^5\gamma^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Y finalmente tenemos el producto con γ^1:

$$\begin{aligned} &\gamma^5\gamma^1 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 \\ &\gamma^1\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^5\gamma^1 \end{aligned} \tag{7}$$

4. Mostrar que las matrices gamma de Dirac satisfacen las siguientes propiedades:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \qquad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$$
$$\gamma^\mu\gamma^i + \gamma^i\gamma^\mu = 0 \ \mu \neq i$$

Notar que la segunda línea arriba dice que las matrices gamma de Dirac son *anticonmutativas*.

Solución: De la definición de las matrices gamma tenemos

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \tag{8}$$

$$(\gamma^i)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i \cdot \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \cdot \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} \tag{9}$$

donde hemos usado $(\sigma_i)^2 = \mathbf{1}_2$. Aquí estamos aplicando productos de matrices por bloques. Ahora calculamos el anticonmutador de γ^0 con γ^i:

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^i &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^i\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Así que $\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0$. Ahora hacemos lo mismo pero para el producto $\gamma^i\gamma^j$ con $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \gamma^i\gamma^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} \\ \gamma^j\gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Sumando ambas ecuaciones arriba tenemos

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -\begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

donde hemos usado $\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$.

5. Encontrar los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices. Ortogonalizar cualquier vector propio degenerado:

   (a) $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Solución: La ecuación característica para obtener los autovalores es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

   Evaluando el determinante tenemos

$$\begin{aligned} (1-\lambda)[(-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 1[1(1-\lambda)] &= -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0 \\ &= (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda) - 2] = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

   El primer factor es cero si $\lambda = 1$. Si el segundo es cero tenemos $-\lambda(1-\lambda) = 2$ así que las otras raices son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$. Los autovectores $|v\rangle_i$ satisfacen

$$\mathsf{A}\,|v\rangle_i = \lambda\,|v\rangle_i \tag{15}$$

   Para $\lambda = 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

   Así que $v_1 + v_2 = v_1$, $v_1 + v_3 = v_2$ y $v_2 + v_3 = v_3$. De la primera y la tercera ecuación tenemos $v_2 = 0$. De la segunda ecuación tenemos $v_1 = -v_3$, así que

$$|v\rangle_1 = (v, 0, -v)^T \tag{17}$$

   donde v es una constante arbitraria. Podemos fijar su valor si normalizamos el autovector. El segundo autovalor es $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

   Así que tenemos $v_1 + v_2 = 2v_1$, $v_1 + v_3 = 2v_2$ y $v_2 + v_3 = 2v_3$. De la primera y la tercera ecuación tenemos $v_1 = v_2 = v_3$. La segunda no nos da más información. El segundo autovector es

$$|v\rangle_2 = (v, v, v)^T \tag{19}$$

   El último autovalor es $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Así que $v_1 + v_2 = -v_1$, $v_1 + v_3 = -v_2$ y $v_2 + v_3 = -v_3$. De la primera ecuación sacamos $v_1 = -(1/2)v_2$. De la tercera sacamos $v_3 = -(1/2)v_2$. De nuevo la segunda no nos da mas información, así que el tercer autovalor es

$$|v\rangle_3 = (-\frac{1}{2}v, v, -\frac{1}{2}v)^T \tag{21}$$

(b) $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Esta matriz tiene una fila y una columna con puros ceros, así que es una matriz degenerada, por lo tanto vamos a tener autovectores degenerados. La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

que conduce a

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - 1(-\lambda) &= 0 \\ -\lambda[(1-\lambda)^2 - 1] &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Ya identificamos la raiz $\lambda = 0$. El otro factor es cero cuando

$$\lambda = \mp 1 + 1 \tag{24}$$

Es decir, $\lambda = 0$ (de nuevo) o $\lambda = 2$. Consideremos el último autovalor primero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

De eso tenemos $v_1 + v_2 = 2v_1$, $v_1 + v_2 = 2v_2$ y $0 = 2v_3$, así que $v_3 = 0$ y $v_1 = v_2$:

$$|v\rangle_{\lambda=2} = (v, v, 0)^T \tag{26}$$

El autovalor degenerado es $\lambda = 0$, que implica, para su autovector, $v_1 + v_2 = 0$ y ninguna restricción en v_3. Por lo tanto

$$|v\rangle_{\lambda=0} = (v, -v, w)^T \tag{27}$$

donde v y w son constantes arbitrarias. Tenemos un plano entero de autovectores. Podemos relacionar v con w imponiendo la condición de tener autovectores ortogonales. Considerando dos vectores del conjunto:

$$|a\rangle = (v_a, -v_a, w_a)^T \qquad |b\rangle = (v_b, -v_b, w_b)^T \tag{28}$$

$$\langle a|b\rangle = v_a v_b + v_a v_b + w_a w_b = 2v_a v_b + w_a w_b = 0 \tag{29}$$

Una opción (entre el número infinito de posibilidades) es elegir $v_a = -w_a$ y $2v_b = w_b$:

$$|a\rangle = (v_a, -v_a, -v_a)^T \qquad |b\rangle = (v_b, -v_b, 2v_b)^T \tag{30}$$

Ahora tenemos un conjunto de 3 autovectores ortogonales.

6. Demostrar que una matriz hermitiana y unitaria tiene valores propios todos igual a ± 1.

   Solución: Una matriz hermitiana M satisface $M^\dagger = M$, es decir la matriz transpuesta conjugada es igual a la matriz original. Si la matriz es también unitaria significa que $M^\dagger = M^{-1}$. Combinando ambas propiedades tenemos $M = M^{-1}$ que implica $M^2 = \mathbf{1}$. Matrices así actúan como proyectores a subespacios del espacio vectorial completo. Escribimos la ecuación de autovalores de la matriz M:

$$M |c_i\rangle = \lambda_i |c_i\rangle \tag{31}$$

   Tomando la transpuesta conjugada tenemos

$$\langle c_i| M^\dagger = \langle c_i| M = \lambda_i^* \langle c_i| \tag{32}$$

   donde hemos usado el hecho de que la matriz M es hermitiana. Multiplicando la primera ecuación arriba de la izquierda por $\langle c_i|$ y la segunda de la derecha por $|c_i\rangle$ tenemos

$$\langle c_i|M|c_i\rangle = \lambda_i \langle c_i|c_i\rangle = \lambda_i^* \langle c_i|c_i\rangle \tag{33}$$

   Ya que $\langle c_i|c_i\rangle > 0$ tenemos $\lambda_i^* = \lambda^i$, los autovalores de una matriz hermitiana son reales (un resultado que vimos en clase). Ahora multiplicamos la primera ecuación arriba por la segunda:

$$\langle c_i| M^\dagger M |c_i\rangle = \langle c_i|c_i\rangle = \lambda_i \lambda_i^* \langle c_i|c_i\rangle = |\lambda_i|^2 \langle c_i|c_i\rangle \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i|^2 = 1 \tag{34}$$

   donde hemos usado el hecho de que M es unitaria. Entonces una matriz unitaria tiene (generalmente) autovalores complejos con módulo unitario. Por lo tanto una matriz unitaria y hermitiana tiene autovalores reales con módulo 1, así que $\lambda_i = \pm 1$.

7. Dos matrices U y H están relacionadas por

$$\mathsf{U} = e^{ia\mathsf{H}}$$

   con a real.

   (a) Si H es hermitiana, mostrar que U es unitaria.

   Solución: Tomando la transpuesta conjugada tenemos

$$\mathsf{U}^\dagger = e^{-ia\mathsf{H}^\dagger} = e^{-ia\mathsf{H}} \quad \Rightarrow \quad U^\dagger U = e^{ia\mathsf{H}} e^{-ia\mathsf{H}} = \mathbf{1} \tag{35}$$

   donde hemos usado la propiedad hermitiana para H.

   (b) Si U es unitaria, mostrar que H es hermitiana (H no depende de a)

   Solución: Ahora argumentamos al revés. Tomando la transpuesta conjugada de U y usando la popiedad unitaria tenemos

$$\mathsf{U}^\dagger \mathsf{U} = e^{-ia\mathsf{H}^\dagger} e^{ia\mathsf{H}} = \exp(ia(\mathsf{H} - \mathsf{H}^\dagger)) = \mathbf{1} \tag{36}$$

   La única forma de obtener la matriz de identidad de la exponencial es con $\mathsf{H} = \mathsf{H}^\dagger$, es decir, H es hermitiana.

   (c) Si $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$ mostrar que $\det(\mathsf{U}) = +1$.

   Solución: Vimos en clase la relación $\det(\exp(\mathsf{H})) = \exp(\mathrm{Tr}(\mathsf{H}))$. Aplicada a la situación actual tenemos

$$\det(\exp(ia\mathsf{H})) = \exp(ia\,\mathrm{Tr}(\mathsf{H})) \tag{37}$$

   ya que $\mathrm{Tr}(a\mathsf{A}) = a\,\mathrm{Tr}(\mathsf{A})$. Entonces si $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$ tenemos $\exp(0) = \det(\mathsf{U}) = +1$.

(d) Si $\det(\mathsf{U}) = +1$, mostrar que $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$.

Solución: Usando la misma relación, si $\det(\mathsf{U}) = +1$, tenemos $\exp(ia\,\mathrm{Tr}(\mathsf{H})) = +1$ y la única manera de obtener este valor es con $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$.

8. Considerar un espacio vectorial de dos dimensiones, con vectores de base $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Existe un operador hermitiano Ω que satisface:

$$\langle 1|\,\Omega\,|1\rangle = 0, \quad \langle 1|\,\Omega\,|2\rangle = 1, \quad \langle 2|\,\Omega\,|1\rangle = 1, \quad \langle 2|\,\Omega\,|2\rangle = 0$$

(a) Escribir una representación como matriz de Ω en esa base.

Solución: Las expresiones arriba definen los elementos de la matriz Ω en esta base:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

También podemos ver la representation de los vectores:

$$|1\rangle = (1,0)^T \qquad |2\rangle = (0,1)^T \tag{39}$$

Confirmamos estas expresiones por calcular los elementos de la matriz:

$$\begin{aligned}
\langle 1|\Omega|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle 1|\Omega|2\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle 2|\Omega|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle 2|\Omega|2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{40}$$

(b) Calcular los valor propios y vectores propios de Ω usando el resultado de (a). Expresar los vectores propios en términos de los vectores de la base (en notación de Dirac).

Solución: La ecuación característica para los autovalores es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \tag{41}$$

Así que $\lambda = \pm 1$. El autovector asociado a $\lambda = +1$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{42}$$

así que $v_2 = v_1$ y tenemos

$$|v\rangle_1 = c_1(1,1)^T \tag{43}$$

donde c_1 es una constante arbitraria. El otro autovector es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

así que $v_2 = -v_1$ y tenemos

$$|v\rangle_{-1} = c_2(1,-1)^T \tag{45}$$

El primer autovector se puede escribir en términos de los vectores de base así:

$$|v\rangle_1 = c_1(|1\rangle + |2\rangle) \tag{46}$$

El segundo autovector es

$$|v\rangle_{-1} = c_2(|1\rangle - |2\rangle) \tag{47}$$

Normalizando los autovectores (para construir la matriz de transformación en la siguiente parte) tenemos

$$|v\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \qquad |v\rangle_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \tag{48}$$

(c) Calcular la matriz de transformación U para cambiar de la base original a la base que ocupa los vectores propios de Ω como vectores de base. Demostrar que $\mathsf{U}^\dagger\Omega\mathsf{U}$ es una matriz diagonal con elementos diagonales igual a los valores propios de Ω.

Solución: Podemos diagonalizar la matriz Ω usando la matriz de autovectores (cada columna es un autovector):

$$\mathsf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathsf{U}^\dagger \tag{49}$$

Notamos que esta matriz es unitaria (ortogonal, ya que es real):

$$\mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \tag{50}$$

Transformamos Ω:

$$\begin{aligned} \mathsf{U}^\dagger\Omega\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{51}$$

Los elementos diagonales son ± 1, los autovalores.