Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 1

1. Mostrar que el producto punto es invariante bajo una rotación de los vectores.

   Solución: Se puede demostrar este resultado escribiendo todos los componentes de los vectores y aplicando una rotación arbitraria. Una forma más elegante es la siguiente. Podemos escribir el producto punto de dos vectores $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ en notación matricial considerando $\mathbf{a}^T$ (una matriz de fila, notar la transpuesta T) y $\mathbf{b}$ (matriz de columna):

   $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$$

   La rotación de un vector, en términos de una matriz de rotación S está dada por

   $$\mathbf{a}' = \mathsf{S}\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}'^T = (\mathsf{S}\mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T\mathsf{S}^T$$

   Entonces, aplicando la misma rotación al vector $\mathbf{b}$ y calculando el producto escalar tenemos:

   $$\mathbf{a}'^T\mathbf{b}' = \mathbf{a}^T\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$$

   donde hemos usado la propiedad $\mathsf{S}^T = \mathsf{S}^{-1}$ para una matriz ortogonal (una rotación). Entonces el producto escalar después de la rotación de los vectores es igual a su valor antes de la rotación: es invariante.

2. Demostrar la siguiente identidad (f y g son escalares):

   $$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\boldsymbol{\nabla} f)\cdot(\boldsymbol{\nabla} g)$$

   Solución:

   $$\nabla^2(fg) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}(fg) = \boldsymbol{\nabla}\cdot[g\boldsymbol{\nabla} f + f\boldsymbol{\nabla} g] = \boldsymbol{\nabla} g\cdot\boldsymbol{\nabla} f + g\nabla^2 f + \boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{\nabla} g + f\nabla^2 g$$

3. Mostrar que un vector de desplazamiento que es ortogonal al gradiente de ϕ es tangente a una superficie de $\phi =$ constante (a veces llamado *superficie equipotencial*).

   Solución: vimos en la clase que se puede escribir la variación infinitesimal en el campo escalar ϕ por un cambio infinitesimal $d\mathbf{r}$ en la posición en el espacio como

   $$d\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot d\mathbf{r}$$

   Si $d\mathbf{r}$ es ortogonal al gradiente de ϕ, entonces $d\phi = 0$, es decir, ϕ se mantiene constante en la dirección $d\mathbf{r}$.

4. Utilizando el resultado anterior, encontrar el vector unitario normal a la superficie equipotencial dada por $\phi(x,y,z) = 2x^2 + y + 4z^2 = 6$.

   Solución: De la respuesta a la pregunta anterior, sabemos que el vector normal a una superficie equipotencial es proporcional al gradiente. Así que solamente tenemos que evaluar el gradiente:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = 4x\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y + 8z\hat{\mathbf{e}}_z$$

   Notar que este es el gradiente de ϕ en *cualquier punto en el espacio*. Podemos normalizar el gradiente para encontrar un vector unitario:

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi}{|\boldsymbol{\nabla}\phi|} = \frac{4x\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y + 8z\hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{16x^2 + 64z^2 + 1}} \equiv \hat{\mathbf{n}}(x,y,z)$$

   Para determinar el vector unitario normal a la superficie especificada, hay que determinar una de las coordenadas en términos de las otras (quedamos con libertad en 2 coordenadas ya que es una superficie en un espacio de 3 dimensiones). Usamos la ecuación que define la superficie para obtener:

$$4z^2 = 6 - 2x^2 - y \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y}$$

   Entonces, el resultado final queda

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{4x\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y \pm 8\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y}\hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{-16x^2 - 16y + 97}}$$

   Podemos ver que existen puntos donde la superficie no existe: $2x^2 + y + 4z^2 = 6$ no tiene solución para todos los posibles valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5. Calcular $\mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})$ donde $\mathbf{A} = (y^2, x^2, 0)$.

   Solución: Este problema es "plug-and-chug"! El rotor primero:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_z(2x - 2y)$$

   Ahora el producto vectorial (usando el símbolo de Levi-Civita para mostrar un ejemplo):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} A_j B_k \\
(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 &= \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = x^2(2x - 2y) - 0 \\
(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2 &= \epsilon_{2jk} A_j B_k = \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{213} A_1 B_3 = 0 - y^2(2x - 2y) \\
(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 &= \epsilon_{3jk} A_j B_k = \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{321} A_2 B_1 = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_x(2x^2(x - y)) - \hat{\mathbf{e}}_y(2y^2(x - y)) \equiv \mathbf{C}
\end{aligned}$$

   Notar que $\mathbf{B}$ tiene solamente un componente en $\hat{\mathbf{e}}_z$, así que el producto cruz con este vector tiene que resultar en un vector **sin** componente en $\hat{\mathbf{e}}_z$ (es decir, un vector ortogonal). Además el resultado debe ser ortogonal al vector $\mathbf{A}$, que se puede verificar fácilmente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 2x^2(x - y)y^2 - 2y^2(x - y)x^2 = 0$$

6. Calcular el trabajo realizado contra una fuerza dada por

$$\mathbf{F} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_x x}{x^2 + y^2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_y y}{x^2 + y^2}$$

A lo largo del circulo unitario en el plano xy desde $\theta = 0$ (que es el punto $(1, 0)$) hasta $\theta = \pi/2$ (el punto $(0, 1)$).

Solución: Primero, podemos reconocer que la fuerza tiene una expresión más compacta usando $\vec{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y$. Es simplemente

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r}\vec{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

El camino de la integración es el círculo unitario, así que $d\mathbf{r}$ a lo largo de ese círculo siempre es ortogonal a $\mathbf{F}$ y el trabajo realizado es:

$$W = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{1}$$

Podemos demostrar este resultado explícitamente calculando la integral de línea. Tenemos $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x dx + \hat{\mathbf{e}}_y dy$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (xdx + ydy) \tag{2}$$

ya que $x^2+y^2 = 1$ en el círculo unitario. Hay que tener cuidado con los límites de las integrales:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 xdx + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^0 + \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

La integral sobre x comienza en $x = 1$ y termina en $x = 0$ (por recorrer el arco en el sentido antihorario). Si ponemos $x = 0$ como límite inferior y $x = 1$ como límite superior, estariamos integrando a lo largo de la línea $x = y$ (la dirección radial) que es paralela a la fuerza y el trabajo no sería nulo!

7. Dado un vector $\mathbf{t} = -\hat{\mathbf{e}}_x y + \hat{\mathbf{e}}_y x$, mostrar, con la ayuda del teorema de Stokes, que

$$\frac{1}{2}\oint_C \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = A$$

donde el camino C es un camino continuo y cerrado, y A es el área encerrada por la curva.

Solución: Evaluamos primero el producto escalar en el integrando:

$$\mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} = (-\hat{\mathbf{e}}_x y + \hat{\mathbf{e}}_y x) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x dx + \hat{\mathbf{e}}_y dy) = (xdy - ydx)$$

así que confirmamos la segunda integral en la pregunta. Ahora aplicamos el teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{t}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

donde S es la superficie que tiene el camino C como su contorno. El rotor de $\mathbf{t}$ es

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{t} = \hat{\mathbf{e}}_z(\partial_x x - \partial_y(-y)) = 2\hat{\mathbf{e}}_z \tag{3}$$

El integrando queda

$$2\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 2dA$$

ya que S tiene vector normal en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_z$. Entonces, tenemos

$$\oint_C \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} = 2\int_S dA = 2A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} = A$$

8. Una esféra de radio a está cargada uniformemente en todo su volumen. Encontrar el potencial electrostático $\varphi(r)$ para $0 \leq r < \infty$, donde

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y ρ es la densidad de carga.

Solución: La solución más rápida de problemas así es (típicamente) con la Ley de Gauss. Aquí resolveremos el problema directamente con la ecuación de Poisson. Definimos Q como la carga total de la esféra. La densidad de carga será:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

en cada punto de la esféra. Fuera de la esféra la densidad de carga es nula. Así que buscamos dos partes del potencial:

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{adentro de la esféra}$$
$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{afuera de la esféra}$$

Podemos fijar constantes con la condición de que φ y su derivada tienen que ser continuas en todos puntos.

Parentesis: Dada la simetría del problema, es mucho más fácil trabajar en coordenadas esféricas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi; \quad y = r\sin\theta\sin\phi; \quad z = r\cos\theta$$

Ahora usamos la regla de la cadena para obtener la parte del laplaciano que contiene derivadas en r. Ya que el sistema tiene simetría esférica, solamente puede depender de r (veremos más sobre este tema de coordenadas en la clase 7):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Ojo! Las ecuaciones arriba NO son generales! Suponen que vamos a derivar una función que solamente depende de r. El laplaciano es un operador diferencial escalar dado (en coordenadas cartesianas) por

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Entonces necesitamos obtener las derivadas de segundo orden en términos de derivadas en r:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}x\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\end{aligned} \tag{4}$$

con expresiones similares para las coordenadas y y z. Sumando las tres derivadas de segundo orden, llegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{y^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{z^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&=\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r^2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ahora que tenemos el laplaciano en coordenadas esféricas (para una función radial) podemos escribir

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\varphi=0 \quad \text{fuera de la esféra}$$

La única dependencia en r que satisface esta ecuación es

$$\varphi(r)=\frac{c_1}{r}+c_2$$

como ya vimos en la clase. Adentro de la esféra tenemos

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\varphi=-\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{adentro de la esféra}$$

El lado derecho es una constante. La única manera de obtener una constante después de aplicar el laplaciano es con

$$\varphi=\frac{1}{6}c_2r^2+c_3$$

El factor $1/6$ es para tener $\nabla^2\varphi=c_2$. Entonces, podemos fijar la constante c_2 inmediatemente:

$$c_2=-\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \tag{6}$$

Por lo tanto, la solución adentro de la esféra queda

$$\varphi=-\frac{1}{6}\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}r^2+c_3=-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3}r^2+c_3$$

Aplicamos la condición de contorno que la solución afuera es igual a cero en el infinito, así que $c_2=0$ (no es necesario, pero es una convención). Finalmente, fijamos las constantes c_1, c_3 por la condición de que la solución tiene que ser continua en el borde de la esfera $r=a$:

$$\varphi_{\text{adentro}}(r=a)=\varphi_{\text{afuera}}(r=a) \quad \Rightarrow \quad -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}+c_3=\frac{c_1}{a}$$

Pero tenemos **dos** constantes aquí. Para fijar ambas necesitamos otra condición, que es la continuidad de la *derivada*:

$$\varphi'_{\text{adentro}}(r=a)=\varphi'_{\text{afuera}}(r=a) \quad \Rightarrow \quad -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}=-\frac{c_1}{a^2}$$

Entonces tenemos

$$c_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Volviendo a la condición en los φ:

$$-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + c_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Entonces

$$c_3 = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Así que la solución completa es:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\right] & 0 \leq r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & a \leq r < \infty \end{cases}$$

9. Un alambre largo y recto que lleva una corriente I es fuente de un campo de inducción magnética $\mathbf{B}$ dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

Encontrar un potencial magnetico $\mathbf{A}$.

Solución: Aplicamos la construcción que vimos en la clase:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_y \int_{x_0}^{x} B_z(x, y', z)dy' + \hat{\mathbf{e}}_z\left[\int_{y_0}^{y} B_x(x_0, y', z)dy' - \int_{x_0}^{x} B_y(x', y, z)dx'\right]$$

El componente $B_z = 0$, así que la primera integral arriba es nula. Consideremos la segunda:

$$\int_{y_0}^{y} B_x(x_0, y', z)dy' = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{y_0}^{y} \frac{y'}{x_0^2 + y'^2}dy'$$

El integrando y la medida se puede escribir como

$$\frac{y'}{x_0^2 + y'^2}dy' = \frac{1}{2}\frac{du'}{u'}$$

Definimos como límite inferior u_0 (una constante) y límite superior u. Entonces, podemos evaluar la integral:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{y'}{x_0^2 + y'^2}dy' = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}\frac{du'}{u'} = \frac{1}{2}\ln u'\Big|_{u_0}^{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_1$$

donde escribimos la constante que viene del límite inferior como C_1. Por lo tanto:

$$\int_{y_0}^{y} B_x(x_0, y', z)dy' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln(x^2+y^2) + C_1$$

La tercera integral en la definición de $\mathbf{A}$ se puede evaluar en una manera similar, con la sustitución $u' = x'^2 + y^2$ (notar que la integral es sobre la variable x', así que y se trata como una constante en la integral):

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x'}{x'^2 + y^2}dx' = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}\frac{du'}{u'} = \frac{1}{2}\ln u'\Big|_{u_0}^{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + C_2$$

Así que

$$\int_{x_0}^{x} B_y(x', y, z)dx' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + C_2$$

Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{\mathbf{e}}_z \left[\ln(x^2 + y^2)\right]$$

donde hemos elegido la constante igual a cero.