Subespacios vectoriales - Dimensión

Definición:
Cuando contenido en un espacio vectorial $\mathbf{R}^n$, encontramos un subconjunto $\mathscr{S}$ en el cual las operaciones adición y multiplicación por un escalar son internas (es decir la suma de vectores de $\mathscr{S}$, o la multiplicación por un escalar de un vector de $\mathscr{S}$ también pertenece al subconjunto $\mathscr{S}$ se dice que el subconjunto $\mathscr{S}$ es un **subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$** .

Para demostrar que ese subconjunto $\mathscr{S}$ es un **subespacio vectorial** de un espacio vectorial $\mathscr{E}$ basta con demostrar que:

1) Dados $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ con

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{S} \qquad \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathscr{S} \qquad \alpha \text{ número real}$$

entonces

$$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathscr{S}$$
$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathscr{S}$$

2) El elemento neutro $\vec{\boldsymbol{o}} \in \mathscr{S}$

Ejemplo

Demuestre que el siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^4$ es un subespacio vectorial:

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y + 3z + 5w = 0\}$$

Hay que probar que:

1) Si $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in W$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in W \Rightarrow \alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \in W$

o, lo que es equivalente (y tal vez más fácil)

Si $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in W$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in W \Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \in W$ y $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \in W$

(siendo α, β números reales cualquiera)

Verdadero porque si $u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 5u_4 = 0$
y $v_1 - 2v_2 + 3v_3 + 5v_4 = 0$

entonces, sumando $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$

$$(u_1 + v_1) - 2(u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) + 5(u_4 + v_4) = 0$$

lo cual prueba que $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \in W$

y multiplicando $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$

$$(\alpha u_1) - 2(\alpha u_2) + 3(\alpha u_3) + 5(\alpha u_4) = 0$$

lo cual prueba que

$$\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \in W$$

2) $(0,0,0,0) \in W$.

Verdadero, porque 0 – 2.0 + 3.0 + 5.0 = 0

Generadores y bases de subespacios vectoriales

En la clase anterior ya fueron presentadas las dos siguientes definiciones …

Definición 1: Cuando todos los elementos de un subespacio vectorial $\mathscr{S}$ pueden ser expresados como combinación lineal de un conjunto de vectores

$$\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \ldots\}$$

del subespacio, diremos que ese conjunto $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \ldots\}$ es un **generador** del subespacio vectorial $\mathscr{S}$.

Definición 2: Si además, el conjunto $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \ldots\}$ es linealmente independiente (esto es, no hay vectores del mismo que puedan ser expresados como combinación lineal de otros), entonces diremos que ese conjunto $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \ldots\}$ es una **base** del subespacio vectorial $\mathscr{S}$.

Ejemplo 1:

El conjunto de vectores unitarios $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ es una **base** del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$**.** Cualquier vector de $\mathbf{R}^3$ puede ser escrito como combinación lineal de ellos.

Por ejemplo, el vector $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{3}, \mathbf{4}, -\mathbf{2})$ puede ser escrito como

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{4}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{k}}$$

Ejemplo 2:

El conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, (x-3)^2\}$ es un generador del conjunto de polinomios de grado menor o igual 2 (con el polinomio nulo). Cualquier polinomio de 2º. Grado puede ser expresado como combinación lineal de ellos, pero no es una base ya que el último polinomio:

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Puede ser escrito como combinación lineal de los otros tres.

En ese caso, la base de $\boldsymbol{P^2(x)}$ (el conjunto de polinomios en x, de grado menor o igual a 2, con el polinomio nulo) sería:

$$\{1, x, x^2\}$$

o alternativamente

$$\{1, x, (x-3)^2\}$$

lo que muestra que las bases tampoco son únicas.

Dimensión de un espacio vectorial

Definición: a la cantidad de elementos en la base de un espacio vectorial se le llama **dimensión del espacio vectorial** y no depende de la base elegida.

Así, por ejemplo, el conjunto $\boldsymbol{P^2(x)}$ del ejemplo anterior tiene **dimensión 3.**

Una recta tiene dimensión 1 ya que es generada por un único vector.

Un plano tiene dimensión 2 ya que es generado por un conjunto de 2 vectores linealmente independientes.

Nota: no cualquier plano o cualquier recta de $\mathbf{R}^3$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ ya que el vector (0, 0, 0) tiene que pertenecer a la recta o el plano. **Por tanto, sólo son subespacios de $\mathbf{R}^3$ las rectas y los planos que pasen por el origen de coordenadas. Es decir que pasen por (0,0,0).**

¿Cómo encontrar generadores y bases?

Volvamos al subespacio de $\mathbf{R}^4$ del ejemplo inicial.

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y + 3z + 5w = 0\}$$

¿Cómo encontrar un generador y cómo decidor si es una base?

Despejemos x:

$$x = 2y - 3z - 5w$$

Reemplacemos x en el vector (x, y, z, w):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z - 5w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gen } W = \{(2,1,0,0), (-3,0,1,0)(-5,0,0,1)\}$$

Pero ese generador, ¿es base?

Para decidirlo, debemos averiguar si ese conjunto es un conjunto linealmente independiente de vectores. Se puede hacer del siguiente modo …

Armamos la matriz formada por esos vectores como vectores columna.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la escalerizamos de la manera habitual,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos finalmente que en la matriz escalerizada, todas las columnas antes de los ceros terminan en filas diferentes. O dicho de otra forma, todas las columnas tienen pivote.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sí, el **conjunto original** es un conjunto linealmente independiente de vectores. Es **base**.

$$\text{Base } W = \{(2,1,0,0), (-3,0,1,0)(-5,0,0,1)\}$$

¿En qué caso no hubiera sido linealmente independiente? Cunado hubiera dos o más columnas cuyos elementos distintos de cero terminaran en la misma fila como en el ejemplo de abajo …

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ese caso como base deberíamos elegir el primer vector (cuyos elementos distintos de cero terminan en la primera fila y alguno de los vectores cuyo elementos distintos de cero terminan en la segunda fila, o sea que hubieran servido los conjuntos …

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \quad \text{o} \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$$

siempre con las componentes de los vectores originales, antes de la escalerización. Cuidado, que esa no es la única posibilidad, pero están seguros que esos conjuntos son linealmente independientes.

Ejercicios

1. Demuestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ son subespacios vectoriales y encuentre un conjunto de generadores:

(I) $W = \{(x, y) \in R^2 \mid x + 3y = 0\}$
(II) $W = \{(x, y) \in R^2 \mid 10x - 5y = 0\}$
(III) $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 5x + y - z = 0\}$
(IV) $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x + 2y + z = 0\}$
(V) $W = \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid x + y + 2z - w = 0\}$

2. En el espacio de las matrices cuadradas $M_{2x2}(R)$ consideramos la base canónica

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y la base

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en ambas bases.

Respuesta: (−4, 1, 0, 2) y (1, 1,−1,−1).

3. Clasifique los siguientes conjuntos como L.I. o L.D.

(a) $\{(2, 2, 2);\ (0, 0, 3);\ (0, 1, 1)\}$

(b) $\{4t^2 - t,\ \ 2t^2 + 6t + 3,\ \ -4t^2 + 10t + 2\}$