

# Interiores Estelares

Mauro Jélvez

June 2024

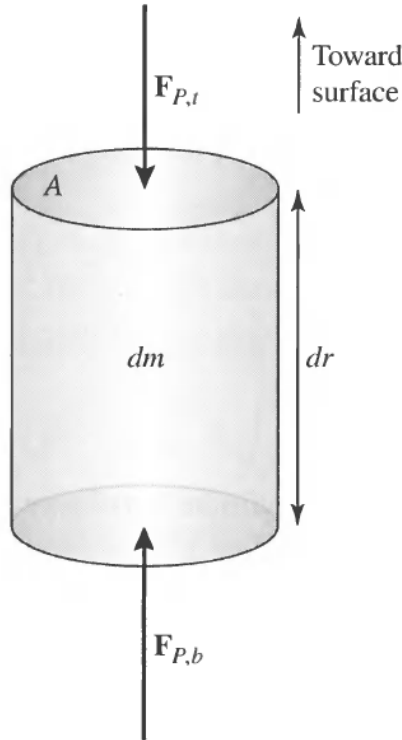
## Ecuación de Equilibrio Hidrostático

La fuerza gravitacional es siempre atractiva, por lo tanto la otra fuerza la fuerza opuesta si existe debe ser negativa para evitarse el colapso. Esta fuerza es la presión.

Consideremos en un cilindro un volumen de gas con densidad  $\rho$  y de masa  $dm$  cuya base está ubicada a una distancia  $r$  del centro de la estrella esférica. Asumiremos que las únicas fuerzas actuantes sobre el cilindro son la gravedad y la presión (siempre es normal a la superficie):

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = F_G + F_{P,t} + F_{P,b}$$

Donde  $F_g < 0$  es la gravedad en dirección al interior y las otras fuerzas las presiones en la parte de la base y la tapa del cilindro la cual debe ser negativa.



Si sabemos que la fuerza en la tapa es igual a la de la base y una corrección debido a la reducción en la dirección radial.  $F_{P,t} = -(F_{P,b} + dF_P)$

$$dF_P = AdP$$

Por lo que tendremos:

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_r dm}{r^2}$$

Donde  $dm = \rho A dr$  Si tenemos que la aceleración es cero en el equilibrio hidrostático, obtenemos la ecuación:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} = -\rho g$$

Así obtenemos la ecuación de equilibrio hidrostático, para que una estrella se encuentre en este estado, debe existir un gradiente de presión que balancee la gravedad. Por lo que tendremos que la presión aumenta a medida que disminuye el radio.

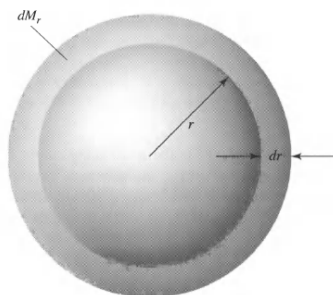
## Ecuación de conservación de la masa

Tenemos que para una capa de una estrella simétricamente esférica de masa  $dM$  con grosor  $dr$  a una distancia  $r$  del centro de la estrella.

$$dM_r = \rho(4\pi r^2 dr)$$

Por lo que tendremos:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$



La cual es la ecuación de la conservación de la masa. La cual dictamina como la masa del interior de la estrella cambia con la distancia hacia el centro.

## Ecuación de estado

Esta ecuación viene de la Ley de Gases ideales, para poder describir la presión a escala macroscópica:

$$PV = NkT$$

Donde  $V$  es el volumen,  $N$  el número de partículas,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura.

## Ecuación de presión

Tendremos que la contribución total de la fuerza  $dF(p)$  por todas las partículas en ese rango de momentum colisionando

$$F = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{N_p}{\Delta x} p v dp$$

Dividiendola por el área y si sabemos que el número de partículas con momentum  $p$  por unidad de volumen:

$$n_p dp = \frac{N_p}{\Delta V} dp$$

Por lo que tendremos la integral para la presión:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_p p v dp$$

## Ley de Gas Ideal en términos de peso molecular medio

La integral de presión es valida para partículas con y sin masa, tendremos que para partículas más grandes no relativistas podemos usar  $p = mv$ :

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_v m v^2 dv$$

$n_v$  es una función de la naturaleza física del sistema estudiado en nuestro caso un gas ideal, para ese caso tenemos que  $n_v dv$  es la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann:

$$n_v dv = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

Permitiendo la variedad de partículas de diferentes masas, entonces es posible expresar n como:

$$n = \frac{\rho}{\bar{m}}$$

Donde  $\bar{m}$  es la masa promedio de las partículas en el gas, por lo que para la ley de Gases Ideales:

$$P_g = \frac{\rho kT}{\bar{m}}$$

Ahora definimos el peso molecular medio como:

$$\mu \equiv \frac{\bar{m}}{m_H}$$

En donde  $m_H = 1.673532499 \times 10^{-27} [kg]$  es la masa del átomo de hidrógeno. El peso molecular medio es solamente el promedio de la masa de partículas libres en el gas, en unidades de masa de hidrógeno. Por lo que la Ley de Gases Ideales puede ser escrita como:

$$P_g = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

El peso molecular medio depende de la composición del gas como también del estado de ionización de las partículas que lo componen.

Para un gas completamente neutral:

$$\bar{m}_n = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j}$$

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

Donde  $A_j \equiv m_j/m_H$ . Similarmente tendremos que para gas completamente ionizado.

$$\mu_i \approx \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j (1 + z_j)}$$

Invirtiendo la expresión para  $\bar{m}$ , es posible escribir  $\mu$  en términos de fracciones de masa, recordando que para un gas neutral  $\bar{m} = \mu m_H$ , por lo que para un gas neutral tendremos:

$$\frac{1}{\mu_n m_H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{Número total de partículas}}{\text{Masa total del gas}} = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j$$

Donde  $X_j$  es la fracción de masa de átomos de tipo  $j$ , finalmente tendremos que la masa molecular media:

$$\frac{1}{\mu_n} = X + \frac{1}{4}Y + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n Z$$

Donde el último término es el promedio ponderado de todos los elementos en gases más pesados que el hidrógeno y el helio.

Para un gas ionizado:

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_j \frac{1+z_j}{A_j} X_j$$

$$\frac{1}{\mu_i} \approx 2X + \frac{3}{4}Y + \left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i Z$$

Para elementos más pesados que el  $H$  y  $He$ :

$$\left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i \approx \frac{1}{2}$$

## Resumen Parte 1

Ecuación de Equilibrio Hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} = -\rho g$$

Integral de Presión

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_p p v dp$$

Ecuación de estado para Gas Ideal

$$P_g = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

Ecuación de Conservación de la Masa

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Peso molecular medio

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H}$$

Peso molecular medio para un gas neutral

$$\frac{1}{\mu_n} = X + \frac{1}{4}Y + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n Z$$

Peso molecular medio de un gas ionizado

$$\frac{1}{\mu_i} \approx 2X + \frac{3}{4}Y + \left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i Z$$

Con

$$\left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i \approx \frac{1}{2}$$

## Energía cinética promedio por partícula

$$nkT = \frac{1}{3} \int_0^\infty m n_v v^2 dv$$

La cual puede ser reescrita como

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty n_v v^2 dv = \frac{3kT}{m}$$

De la cual podemos reconocer la distribución media de velocidades Maxwell-Boltzmann

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}$$

O también:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

# Fermi-Dirac and Bose-Einstein Statistics

## Maxwell-Boltzmann

Esta distribución se le aplica a gases ideales en equilibrio termodinámico. Lo cual pasa por alto los efectos de la mecánica cuántica (Principio de incertidumbre de Heisenberg)

## Fermi-Dirac

Esta distribución incluye los efectos de la mecánica cuántica y nos lleva a otra ecuación de estado. La cual es importante para densidades extremas en núcleos estelares, como enanas blancas, estrellas de neutrones y describe el comportamiento de fermiones tales como electrones, fotones y neutrones.

## Bose-Einstein

Estadística aplicada al comportamiento de los bosones (fotones)

Las distribuciones Fermi-Dirac y Bose-Einstein se reducen a la distribución Maxwell-Boltzmann en los límites clásicos.

## Presión de Radiación

La presión de radiación será:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}aT^4$$

Donde  $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.565767 \times 10^{-16} [Jm^{-3}K^{-5}]$  Y la presión total, ejercida por el gas y la radiación:

$$P_{tot} = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3}aT^4$$

## Solar Data

Calculando la temperatura del núcleo del sol ignorando la presión de radiación:

$$T_c \approx 1.44 \times 10^7 K$$

Y para el modelo estándar del sol tenemos:

$$T = 1.57 \times 10^7 K$$

$$\bar{\rho}_{sun} = 1410 [kgm^{-3}]$$

$$\mu_{ionizada} = 0.62$$

$$P_{central} = 2.34 \times 10^{16} [Nm^{-2}]$$

Para el caso del sol tendremos que:

$$P_{rad} = 1.53 \times 10^{13} [Nm^{-2}] = 0.065\% P_{gas}$$

La cual es una pequeña contribución de la presión de radiación, por lo tanto la aproximación es razonable.

## Fuentes de Energía Estelares

Si sabemos que:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle$$

Y que la energía potencial gravitatoria:

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

Del teorema del Virial, la mitad del cambio en la energía gravitacional está disponible para ser irradiada, la otra mitad suministra energía térmica que calienta la estrella.

## Gravitación

La fuerza gravitacional en una partícula de masa  $dm$ , fuera de una masa simétricamente esférica de masa  $M$  es:

$$dF_{g,j} = G \frac{M_r dm_i}{r^2}$$

$$dU_{g,j} = -G \frac{M_r dm_i}{r} = -G \frac{M_r 4\pi r^2 \rho}{r} dr$$

Ahora considerando en vez de masas puntuales, asumimos que las masas puntuales están distribuidas uniformemente a través de una cáscara de esfera de grosor  $dr$  y masa  $dm$ . Para encontrar la energía gravitacional integramos sobre todas las masas de la cáscara desde el centro de la estrella hasta la superficie, tendremos:

$$U_g = -4\pi \int_0^R M_r \rho r dr$$

Un cálculo exacto de  $U_g$  requiere conocer como varía  $\rho$  y consecuentemente  $M_r$ , para simplificar usaremos densidad constante:

$$\rho \approx \bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Aproximando la masa también tendremos:

$$M_r \approx \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}$$

Sustituyendo estos valores en la energía potencial gravitatoria:

$$U_g \approx -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Y aplicando teorema del Virial, la energía mecánica total de la estrella es:

$$E \approx -\frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

## Escala de tiempo Kelvin-Helmholtz

Se basa en la radiactividad de los isótopos. Esta escala nos indica cuanto tiempo podría dar la energía gravitacional para mantener el sol.

$$t_{KH} = \frac{\Delta E_g}{L_\odot}$$

Para el sol tenemos que  $t_{KH} \approx 10^7 [\text{yr}]$  lo cual no nos da la fuente principal de energía de una estrella, ya que se ha encontrado que rocas en las superficie de la luna tienen sobre  $4 \times 10^9 [\text{yr}]$ .

Otras fuentes de energía pueden ser reacciones químicas. Las cuales están basadas en interacciones de electrones en los orbitales de un átomo. La cantidad de energía disponible para ser liberada por átomo no debería ser más que  $1 - 10[\text{eV}]$  típicos de las energías de los niveles de energía de átomos de  $H$  y  $He$ , pero debido a la cantidad de átomos en la estrella, la cantidad de energía química disponible está lejos de ser una fuente sustentable a largo plazo de para la luminosidad del sol.

## Escala de tiempo Nuclear

Si sabemos que:

$$\begin{cases} m_p = 1.67262158 \times 10^{-27} \text{kg} = 1.00727646688 \text{ u} \\ m_n = 1.67492716 \times 10^{-27} \text{kg} = 1.00866491578 \text{ u} \\ m_e = 9.10938188 \times 10^{-31} \text{kg} = 0.0005485799110 \text{ u} \end{cases}$$

Donde:

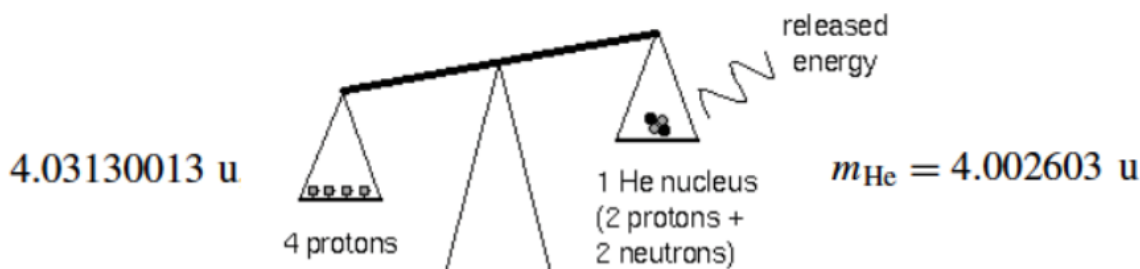
$$1 \text{ u} = 1.66053873 \times 10^{-27} \text{kg} = 931.494013 [\text{MeV}/c^2]$$

Los núcleos de los átomos pueden ser considerados también como fuentes de energía. En donde se hacen transiciones orbitales de los electrones (eV), los procesos nucleares pueden ser millones de veces más energéticos (MeV). Siendo las reacciones químicas las que transforman átomos en moléculas o una molécula en otra, y las reacciones nucleares cambia un tipo de núcleo a otro.

El núcleo de cada elemento en particular viene dado por el número de protones  $Z$  el cual cada protón en el núcleo tiene una carga  $+e$ .

Definimos un átomo **neutro** cuando el número de electrones es igual al número de protones. Un **isótopo** son átomos con el mismo número de protones en el núcleo siendo el mismo elemento pero con diferente número de neutrones y colectivamente nos referimos como **nucleones** a los protones y neutrones.

Si el isótopo más simple de hidrógeno está compuesto por un electrón y protón y tiene una masa de  $m_H = 1.00782503214 \text{ u}$ . Esta masa es menor que la masa combinada de un protón y neutrón tomadas separadamente. De hecho, el átomo está en su estado fundamental, la diferencia de es de  $13.6[\text{eV}]$  (usando  $E = mc^2$ ), la cual es el potencial de ionización, siempre y cuando la energía del sistema se conserve.



La energía liberada va acompañada de una pérdida en la masa cuando los nucleones son combinados en los núcleos. Un núcleo de helio compuesto por dos protones y dos neutrones, pueden ser formados con una serie de reacciones nucleares que originalmente empieza con 4 átomos de hidrógeno ( $4H \rightarrow He +$  remanente de la pérdida de masa). Estas reacciones se conocen como **Fusión Nuclear**, dado que las partículas más ligeras se "fusionan" entre sí para formar una partícula más pesada. Por otro lado tenemos la **Fisión nuclear** la cual ocurre cuando átomos pesados son divididos en átomos más ligeros. Tendremos que:

$$4m_H = 4.03130013 \text{ u}$$

$$m_{He} = 4.002603 \text{ u}$$

Tenemos que esta pérdida en la masa es debido a los neutrinos liberados. Tendremos que:

$$\Delta m = 0.028697 = 0.7\%$$

Finalmente podemos obtener que la energía necesaria para formar un núcleo de helio es de 26.731[MeV] la cual es conocida como la energía de ligadura del átomo de helio. Si se quisiera separar en fisión se necesitaría una cantidad de 26.731[MeV] para hacerlo.

Si asumimos que el sol es 100% hidrógeno y sólo el 10% de la masa del sol logra calentarse para fusionar hidrógeno.

$$E_{nuclear} = 1.3 \times 10^{44} \text{ J}$$

Tendremos que la escala de tiempo nuclear para el sol será

$$t_{nuclear} = \frac{E_{nuclear}}{L_{\odot}} \approx 10^{10} \text{ yr}$$

El cual es tiempo suficiente para que sea consistente con el modelo actual del universo.

## Túnel mecánico cuántico

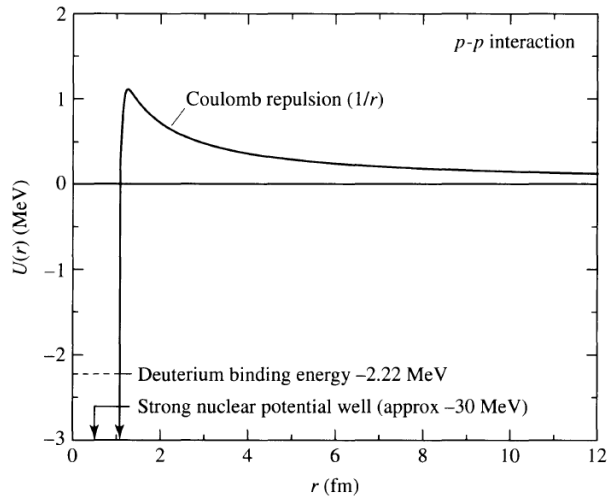
Recordemos que la única forma viable para proveer energía a una estrella de acuerdo a su luminosidad y expectativa de vida es la fusión nuclear.

Si asumimos que la energía necesaria para superar el potencial de Coulumb viene dada por la energía térmica. Para el caso del sol tendremos:

$$\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT_{classical} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1Z_2e^2}{r}$$

$$T_{classical} = \frac{Z_1Z_2e^2}{6\pi\epsilon_0kr} \approx 10^{10} \text{ K}$$

Tenemos que la temperatura del núcleo del sol es sólo de  $1.57 \times 10^7 \text{ K}$  mucho más pequeña que la necesaria ahí.





Incluso con la distribución de velocidades MB no es suficiente energía para tener un rango de fusión. Pero el QM tunneling permite hacer aproximaciones más cercanas.

Según el principio de incertidumbre de Heisenberg, en la mecánica cuántica no es posible saber a la vez la posición y el momentum de una partícula con total precisión.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

La incertidumbre en la posición del protón colisionando con otro es tan grande que la energía cinética de las colisiones es insuficiente para superar la barrera de Coulomb.

Como estimación aproximada del efecto de la tunelización sobre la temperatura necesaria, supongamos que un protón debe estar dentro de aproximadamente una longitud de onda de De Broglie de su objetivo para poder atravesar la barrera de Coulomb. Recordando que la longitud de onda para partículas masivas está dada por  $\lambda = h/p$  y reescribiendo la energía en términos de momentum. Y establecer la distancia de máxima aproximación igual a una longitud de onda (donde la altura de la barrera de energía potencial es igual a la energía cinética original)

$$\frac{1}{2}\mu_m v^2 = \frac{p^2}{2\mu_m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\lambda} = \frac{(h/\lambda)^2}{2\mu_m}$$

Sustituyendo  $\lambda = r$  en  $T_{classical}$  encontramos la estimación mecánica cuántica de la temperatura requerida para que ocurra esta reacción.

$$T_{quantum} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu_m}{12\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 k}$$

De nuevo asumiendo la colisión de dos protones,  $\mu_m = m_p/2$  y  $Z_1 = Z_2$ . Encontramos que:

$$T_{quantum} \approx 10^7 \text{ K}$$

En este caso si asumimemos los efectos mecánicos cuánticos, la temperatura necesaria para reacciones nucleares es consistente con la estimación de la temperatura central del sol.

## Tasas de reacción nuclear

Ahora que la posibilidad de energía nuclear como fuente de energía ha sido establecida, necesitamos más detalles de las tasas de reacción nuclear.

Sabemos que no todas las partículas del gas a temperatura  $T$  tendrá suficiente energía cinética y la longitud de onda necesaria para tunelizar la barrera de Coulomb exitosamente. En consecuencia, la tasa de reacciones por intervalo de energía deberá ser descrito en términos de la densidad de partículas teniendo energías en un rango específico, combinado con la probabilidad de que esas partículas puedan realmente tunelizar la barrera de Coulomb del núcleo.

Asumiendo que las partículas están suficientemente lejos inicialmente que la energía potencial gravitatoria es despreciable, la energía cinética no relativista describe la energía del total de partículas

$$K = E = \frac{1}{2}\mu_m v^2$$

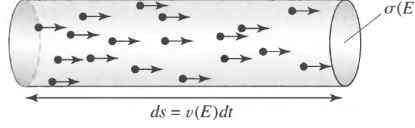
Resolviendo para la velocidad, podemos escribir la distribución de MB en términos de las partículas con energía cinética entre  $E$  y  $E + dE$  como:

$$n_E dE = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-E/kT} dE$$

## Nuclear cross section

La ecuación obtenida anteriormente nos da el número de partículas por unidad de volumen que tienen energías en cierto rango, pero no describe la probabilidad de que estas partículas siquiera interactúen. Para tener en cuenta ese factor, se usa una área transversal. La definimos como:

$$\sigma(E) = \frac{\text{number of reactions/nucleus/time}}{\text{number of incident particles/area/time}}$$



**FIGURE 10.5** The number of reactions per unit time between particles of type  $i$  and a target  $x$  of cross section  $\sigma(E)$  may be thought of in terms of the number of particles in a cylinder of cross-sectional area  $\sigma(E)$  and length  $ds = v(E) dt$  that will reach the target in a time interval  $dt$ .

Tenemos que  $\sigma(E)$  es estrictamente una medida de probabilidad.

Ahora para encontrar el número de reacciones por unidad de volumen y tiempo. Asumimos un número de partículas golpeando una superficie  $\sigma(E)$ , también asumiendo que todas las partículas incidentes están moviéndose en la misma dirección. Si denotamos como  $x$  como la partícula objetivo e  $i$  la partícula incidente. Si el número de partículas incidentes tiene energías entre  $E$  y  $E + dE$  entonces viene dado por  $n_E dE$ , entonces el número de reacciones,  $dN_E$ , es el número de partículas que puede golpear a  $x$  en intervalo de tiempo  $dt$  con una velocidad  $v(E) = \sqrt{2E/\mu_m}$

El número de partículas incidentes viene dado por el número de partículas contenidos dentro de un cilindro de volumen  $\sigma(E)v(E)dt$ :

$$dN_E = \sigma(E)v(E)n_{iE}dE dt$$

Por lo que el número incidente de partículas por unidad de volumen con la velocidad apropiada es:

$$n_{iE}dE = \frac{n_i}{n}n_E dE$$

Donde  $n_i = \int_0^\infty n_{iE}dE$  y  $n = \int_0^\infty n_E dE$ . Por lo que el número de reacciones por núcleo por intervalo de tiempo  $dt$  teniendo energías entre  $E$  y  $E + dE$  es:

$$\frac{\text{reacciones por núcleo}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{dN_E}{dt} = \sigma(E)v(E)\frac{n_i}{n}n_E dE$$

Si tenemos  $n_x$  objetivos por unidad de volumen, el número total de reacciones por unidad de volumen y por unidad de tiempo, integrada en todas las posibles energías es:

$$r_{ix} = \int_0^\infty n_x n_i \sigma(E) v(E) \frac{n_E}{n} dE$$

Tenemos que la sección transversal del núcleo  $\sigma(E) \propto \pi \lambda^2 \propto \pi \left(\frac{h}{p}\right)^2 \propto \frac{1}{E}$ . Considerando la probabilidad de el efecto túnel, tenemos forma exponencial tendiendo a 0 cuando el potencial de Coulomb tiende a infinito.

$$\sigma(E) \propto e^{-2\pi^2 U_c/E}$$

Asumiendo  $r \approx \lambda = h/p$  y tomando el coeficiente entre el potencial de la barrera de la partícula y su energía cinética:

$$\frac{U_c}{E} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r}{\mu_m v^2 / 2}$$

Encontramos que:

$$\sigma(E) \propto e^{-bE^{-1/2}}$$

Donde

$$b \equiv \frac{\pi \mu_m^{1/2} Z_1 Z_2 e^2}{2^{1/2} \epsilon_0 \hbar}$$

Combinando con resultados anteriores y definiendo  $S(E)$  como una función que varía lentamente con la energía, ahora podemos expresar la sección transversal como:

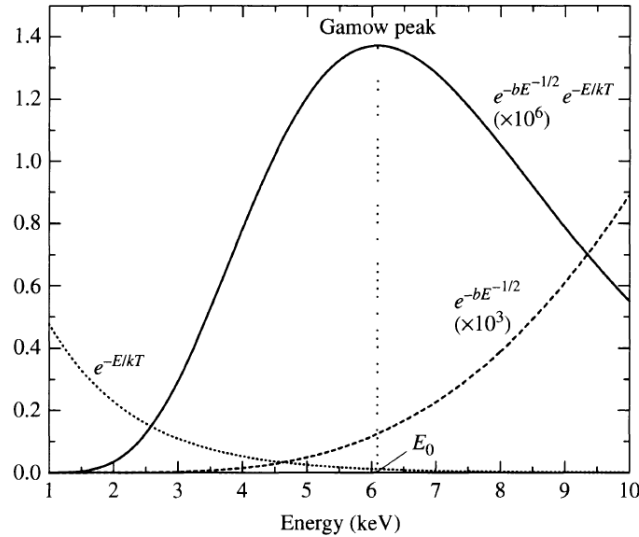
$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-bE^{-1/2}}$$

Por lo que tendremos que la tasa de reacciones será:

$$r_{ix} = \left( \frac{2}{kT} \right)^{3/2} \frac{n_i n_x}{(\mu_m \pi)^{1/2}} \int_0^\infty S(E) e^{-bE^{-1/2}} e^{-E/kT} dE$$

## Peak de Gamow

La primera exponencial es debido a la probabilidad de tunelización y la segunda viene de la distribución MB, el producto de estas dos exponenciales produce un peak muy marcado conocido como peak de Gamow



**FIGURE 10.6** The likelihood that a nuclear reaction will occur is a function of the kinetic energy of the collision. The Gamow peak arises from the contribution of the  $e^{-E/kT}$  Maxwell-Boltzmann high-energy tail and the  $e^{-bE^{-1/2}}$  Coulomb barrier penetration term. This particular example represents the collision of two protons at the central temperature of the Sun. (Note that  $e^{-bE^{-1/2}}$  and  $e^{-E/kT}$  have been multiplied by  $10^3$  and  $10^6$ , respectively, to more readily illustrate the functional dependence on energy.)

Este gráfico representa la colisión de dos protones a la temperatura central del Sol.

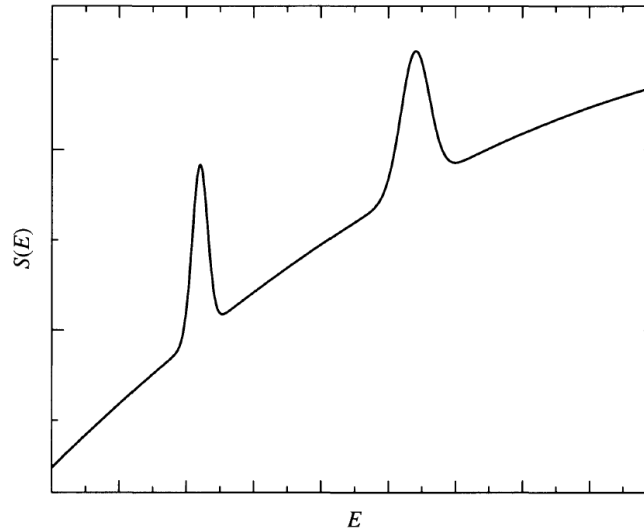
La probabilidad de reacciones nucleares depende de la energía cinética de las colisiones. El peak de Gamow surge de las altas energías de la distribución de MB y del término de la barrera de Coulomb.

Tenemos que el máximo de energía en la curva ocurre a la energía:

$$E_0 = \left( \frac{bkT}{2} \right)^{2/3}$$

## Resonancia

En algunos casos puede existir resonancia entre la energía de la partícula incidente y la energía del nivel orbital del núcleo, por lo que  $S(E)$  puede variar rápidamente, peaking en energías específicas.



**FIGURE 10.7** A hypothetical example of the effect of resonance on  $S(E)$ .

También es posible bajar el potencial de la barrera de Coulomb por el electrón scattering, el cual ocurre cuando hay varios electrones libres (átomos ionizados a la alta temperatura central)

## Reglas de potencias para tasas de rxn

Las tasas de rxn pueden ser escritas como regla de potencias centradas a una temperatura en particular. En el caso de la interacción de dos partículas:

$$r_{ix} \approx r_0 X_i X_x \rho^{\alpha'} T^{\beta}$$

Donde  $r_0$  es constante y:

$$\begin{matrix} X_i \\ X_x \end{matrix}$$

Son las fracciones de masa de las partículas incidentes y objetivo respectivamente,  $\alpha' = 2$ , y  $\beta$  para colisiones de dos cuerpos puede variar desde 1 a 40 aproximadamente.

Combinando la tasa de rxn con la energía por rxn para encontrar la cantidad de energía por segundo por kilogramo. Donde  $\varepsilon_0$  es la cantidad de energía liberada por reacción.

$$\epsilon_{ix} = \left( \frac{\varepsilon_0}{\rho} \right) r_{ix}$$

O en la forma de reglas de potencias:

$$\epsilon_{ix} = \epsilon'_0 X_i X_x \rho^{\alpha} T^{\beta} [\text{W kg}^{-1}]$$

Donde  $\alpha = \alpha' - 1$ , lo que nos dice esta relación es que la suma de energía liberada por segundo y por kilogramo es la tasa de generación de energía nuclear total.

## Gradiente de Luminosidad

La luminosidad total es la suma de toda la energía (nuclear, química, gravitacional) generada por la estrella, por lo que la contribución a la luminosidad total debido a una masa  $dm$  es:

$$dL = \epsilon dm$$

Donde  $\epsilon = \epsilon_{\text{nuclear}} + \epsilon_{\text{gravity}}$  es la energía total por kg y por segundo.

Ahora definiendo  $L_r$  como la luminosidad interior al interior del radio  $r$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

## Nucleosíntesis y leyes de conservación

Llamamos nucleosíntesis a la secuencia a la cual un elemento se convierte en otro, y en estos procesos la carga eléctrica se conserva, nucleones y leptones (electrones, positrones, neutrinos, anti-neutrinos, etc)

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

Un electrón más un positrón producen dos fotones de altas energías.

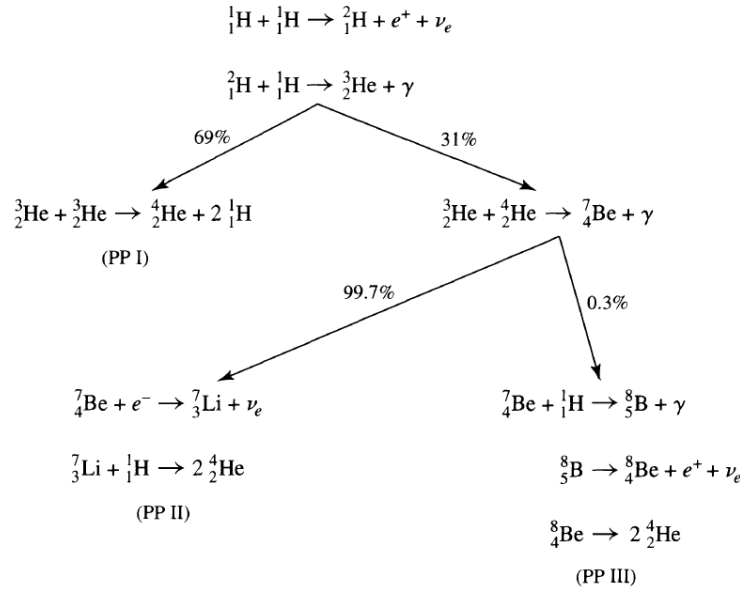
### Notación

$${}^A_Z X$$

Aquí  $X$  es el elemento,  $Z$  es el número de protones,  $A$  es el número de nucleones (protones + neutrones)

## Cadena PP

El primer paso en la cadena involucra el decaimiento de un protón a un neutrón. Tenemos que cada paso de la cadena pp tiene diferentes tasas de rxn porque tanto la barrera de Coulomb y la sección transversal cambian. El siguiente ejemplo son para la tasas de reacción a la temperatura central del Sol.



**FIGURE 10.8** The three branches of the pp chain, along with the branching ratios appropriate for conditions in the core of the Sun.

## Branching Ratios

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} \rho X^2 f_{pp} \Phi_{pp} C_{pp} T_6^4$$

$$\varepsilon_0 \approx 1.08 \times 10^{-12} \text{ Wm}^3 \text{kg}^{-2}$$

Donde

$$T_6 \equiv T/10^6 \text{ K}$$

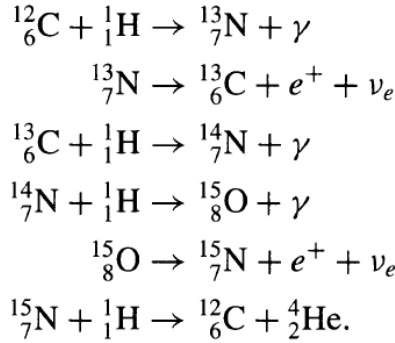
$$f_{pp} = f_{pp}(X, Y, \rho, T) \approx 1$$

$$\Phi_{pp} = \Phi_{pp}(X, Y, T) \approx 1$$

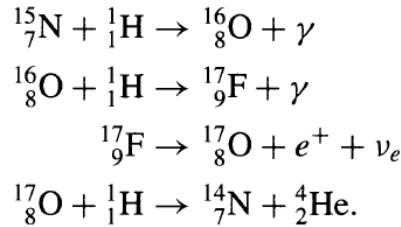
$$C_{pp} \approx 1$$

## Ciclo CNO

En este ciclo el carbono, nitrógeno y oxígeno son usados como catalizadores, siendo consumidos y regenerados durante el proceso, al igual que la cadena PP tiene ramas, La primera de ellas culmina con la producción de carbono-12 y helio-4.



La segunda rama tiene una ocurrencia de aproximadamente 0.04% de las veces y ocurre cuando la última parte de la primera rama se produce oxígeno-16 y un fotón, en vez de carbono-12 y helio-4:



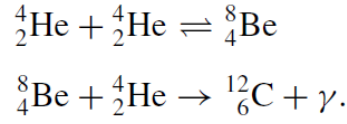
La tasa de generación de energía del ciclo CNO viene dada por:

$$\epsilon_{\text{CNO}} = 8.67 \times 10^{20} \rho X X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} e^{-152.26 T_6^{-1/3}} \text{ Wkg}^{-1}$$

Como se puede ver el ciclo CNO es mucho más dependiente a la temperatura que la cadena PP. Esta propiedad impide que estrellas de baja masa las cuales no tienen temperaturas centrales altas, sean dominadas por la cadena PP durante la quema de hidrógeno, y para estrellas más masivas el ciclo CNO es mucho más eficiente que la cadena PP quemando hidrógeno.

## Proceso Triple Alpha para la quema de Hélio

Proceso en cual el helio es convertido en carbono



La tasa de generación de energía nuclear viene dada por:

$$\varepsilon_{3\alpha} = 50.9 \rho^2 Y^3 T_8^{-3} f_{3\alpha} e^{-44.027 T_8^{-1}} \text{ Wkg}^{-1}$$

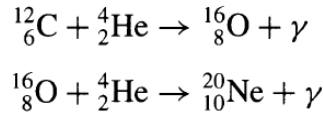
Donde  $T_8 \equiv T/10^8$  K y  $f_{3\alpha}$  es el factor de screening del proceso triple alpha:

$$\varepsilon_{3\alpha} \approx \epsilon'_{0,3\alpha} \rho^2 Y^3 f_{3\alpha} T_8^{41.0}$$

Con una dependencia tan fuerte, incluso pequeños aumentos en la temperatura producen un gran aumento en la cantidad de energía generada por segundo. Por ejemplo, un aumento de sólo el 10% en la temperatura aumenta la tasa de producción de energía en más de 50 veces.

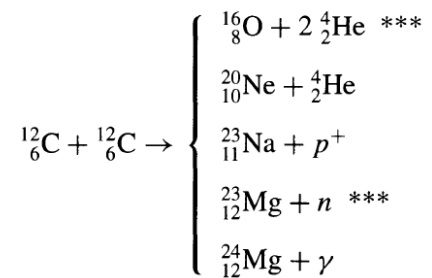
## Quema de carbono y oxígeno

En las altas temperaturas de la quema de helio, otros procesos también están siendo involucrados. Después de que se ha generado suficiente carbono por el proceso triple alpha, es posible que los núcleos de carbono capturen partículas alpha, produciendo oxígeno. Algo del oxígeno generado puede capturar partículas alpha y producir neón.

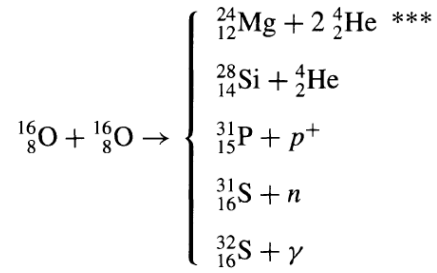


A las altas temperaturas de la quema de helio, la continua captura de partículas alpha sigue aumentando el núcleo rápidamente hasta un punto que la barrera de Coulomb es más fuerte.

Si la estrella es suficientemente masiva, las altas temperaturas y otros procesos nucleares pueden suceder. Tenemos que la quema de carbono son cercanas a los  $6 \times 10^8$  K



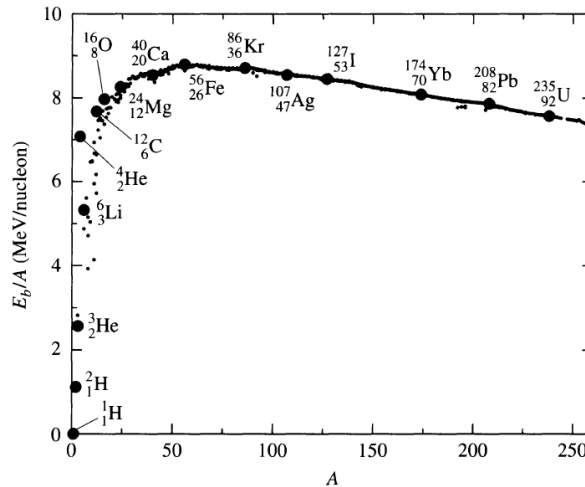
Y la quema de oxígeno está cercana a los  $10^9$  K



## Energía de enlace por nucleón

Una cantidad útil en entender la cantidad de energía liberada en reacciones nucleares es la energía de enlace por nucleón  $E_b/A$ , donde  $A$  es el número de nucleones, incluyendo  $Z$  protones, la energía de enlace por nucleón:

$$E_b = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{núcleo}}]c^2$$



**FIGURE 10.9** The binding energy per nucleon,  $E_b/A$ , as a function of mass number,  $A$ . Notice that several nuclei, most notably  ${}^4_2\text{He}$  (see also  ${}^{12}_6\text{C}$  and  ${}^{16}_8\text{O}$ ), lie well above the general trend of the other nuclei, indicating unusual stability. At the peak of the curve is  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ , the most stable of all nuclei.

Podemos ver que se llega a un peak cerca de  $A = 56$  en un isótopo de hierro, en el cuál la energía liberada no es suficiente para seguir fusionando.

## Transporte de energía

**Radiación:** Permite a la energía generada por las reacciones nucleares y energía gravitacional ser llevada a la superficie por medio de los fotones, siendo estos absorbidos y re-emitidos en direcciones aleatorias a medida que interacciona con materia. Lo que sugiere que la opacidad del material juega un rol importante.

**Convección:** Puede ser un mecanismo de transporte muy eficiente en varias regiones de las estrellas con elementos de masa calientes y flotantes que transportan el exceso de energía hacia afuera mientras que los elementos fríos caen hacia adentro.



**Conducción** Transporta calor por medio de las colisiones de partículas. De hecho, la conducción puede jugar un rol importante en algunas atmósferas estelares.

## Gradiente de temperatura radiativa

El gradiente de temperatura para transporte radiativo tiene la forma:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

A medida que aumenta el flujo o la opacidad, el gradiente de temperatura debe decrecer si la radiación debe transportar toda la luminosidad requerida hacia el exterior. Gradientes empinados promueven la convección.

## Pressure Scale Height

Si el gradiente de temperatura se vuelve muy empinado, la convección puede tomar un rol fundamental en el transporte de energía. Puede ser complicado describir matemáticamente la convección, existe una escala longitud característica para la convección la cual la llamamos escala de altura para la presión.

Para estimar el tamaño de la región convectiva de una estrella, tenemos:

$$\frac{1}{H_P} \equiv -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$$

Si asumimos  $H_P$  cte, podemos encontrar la presión:

$$P = P_0 e^{-r/H_P}$$

De donde podemos finalmente definir:

$$H_P = \frac{P}{\rho g}$$

## Primera Ley de la Termodinámica

Nos dice que el cambio en la energía es igual al calor empleado menos el trabajo realizado:

$$dU = dQ - dW$$

La energía interna es el promedio de la energía térmica por masa del elemento.  $U$  es una función de estado, que sólo depende de las condiciones que componen el gas. Es función de su composición  $\mu$  y la temperatura  $T$ . Asumiendo un gas monoatómico ideal:

$$U = \frac{3}{2} \left( \frac{k}{\mu m_H} \right) T = \frac{3}{2} n R T$$

Donde  $n$  es el número de moles y  $R = 8.314472 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$

$$nR = \frac{k}{\mu m_H}$$

## Gradiente de temperatura adiabático

Asumiendo gas ideal:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_r}{r^2} = - \frac{g}{C_P}$$

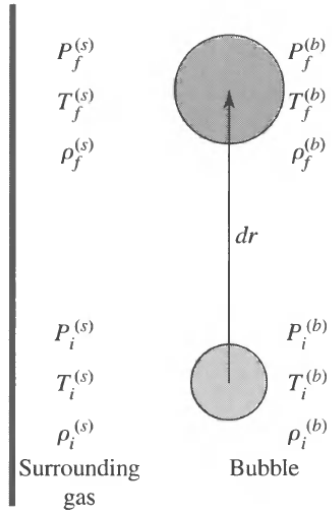
Con  $g = GM_r/r^2$ ,  $nR = k/\mu m_H$  y  $C_P - C_V = nR$

## Condición para convección

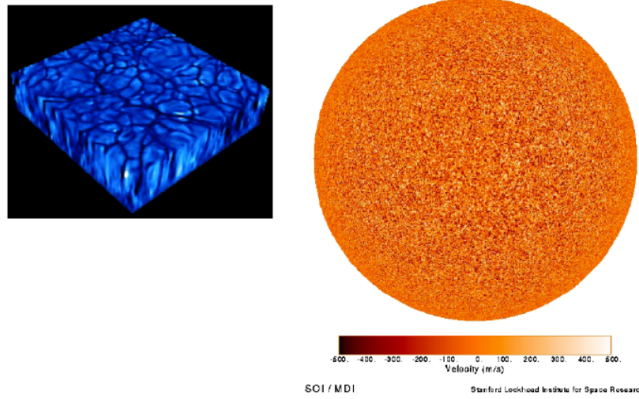
La célula convectiva debe permanecer flotando en todos los niveles para seguir aumentando. Si la densidad de la burbuja es menor que la densidad del gas circundante en la estrella, entonces la burbuja ascenderá.

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{star}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad bbl}}$$

El transporte radiativo siempre estará presente, la convección puede estar activa o no dependiendo de la profundidad dentro de la estrella, etapa de evolución, etc.



Altos gradientes de temperatura son causados por alta opacidad. Las capas opacas impiden el flujo de calor desde el centro.



Para un gas monoatómico, la condición para atmósfera estelar puede ser escrita como:

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rightarrow 2.5$$

Cuando  $d \ln P / d \ln T > 2.5$ , la estrella es estable a la convección.

Generalmente la convección ocurre cuando:

- 1) La opacidad estelar es muy grande.
- 2) La ionización provoca un gran calor específico y un bajo gradiente de temperatura adiabático.
- 3) La dependencia en la temperatura de la energía nuclear es mas grande (ciclo CNO)

## Mixing length theory of superadiabatic convection

Un criterio fundamental para la convección: La densidad de la burbúja ascendente es menor que la densidad del gas circundante.

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{star}} - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad bbl}} > 0$$

Dado que los gradientes de temperatura son siempre negativos

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{bbl}} - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{star}} > 0$$

## Construcción de Modelos Estelares

Equilibrio hidrostático: presión vs gravedad

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} = -\rho g$$

Conservación de la masa

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Gradiente de luminosidad

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon$$

Gradiente de temperatura (radiativo)

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho L_r}{T^3 4\pi r^2}$$

Gradiente de temperatura (convectivo)

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_r}{r^2} = -\frac{g}{C_p}$$

Si la estrella es estática la energía viene de reacciones nucleares.

El modelo de una atmósfera consta de una tabla de números que indican la función fuente (o la temperatura) y la presión en función de la profundidad óptica. Dependiendo de la aplicación, un modelo también especifica:

- Densidad
- Profundidad geométrica
- Coeficiente de absorción
- Presión de electrones
- Intensidad media
- Velocidad
- Propiedades magnéticas

A partir del modelo, se puede calcular el flujo en la superficie. Para calcular la luminosidad, se necesita el radio estelar determinado independientemente.

También a partir de las cinco ecuaciones estelares básicas, más información es necesaria acerca de la composición de la estrella en cada capa.

$$P = P(\rho, T, \text{composición}) \rightarrow \text{La aproximamos con gas ideal y presión de radiación}$$

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\rho, T, \text{composición}) \rightarrow \text{Calcular explícitamente interpolando una cuadrícula de } \rho T$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \text{composición}) \rightarrow \text{Utilizar reglas de potencia para la cadena PP o el ciclo CNO}$$

La composición cambia con el tiempo y más rápido para elementos pesados. Las reacciones toman lugar en el núcleo donde la presión es máxima.

Objetos con masa  $< 0.072 M_{\text{SUN}}$  no tienen suficiente temperatura/presión para la cadena PP. Estrellas con masas mayores a  $90 M_{\text{SUN}}$  son inestables a oscilaciones termáles.

También las condiciones de contorno son útiles para construir modelos estelares:

En el centro de la estrella:

$$\begin{cases} M_r \rightarrow 0 \\ L_r \rightarrow 0 \end{cases}$$

En la superficie de la estrella:

$$\begin{cases} T \rightarrow 0 \\ P \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0 \end{cases}$$

Dadas las ecuaciones de estructura estelar, las dependencias de la composición de  $P, \bar{\kappa}, \epsilon$ , masa estelar, radio y luminosidad y hacer las condiciones de contorno, es posible computacionalmente derivar una estructura estelar en capas radial bajo la superficie.

## Límite de luminosidad de Eddington

La presión en una estrella normalmente está dominada por el término de la presión de el gas. Pero para masas y temperaturas mayores, las regiones de baja densidad pueden ser dominadas por la presión de radiación.

$$L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi c G}{\bar{\kappa}} M$$

Para estrellas en la secuencia principal superior con  $T \approx 50.000 \text{ K}$  (muy ionizadas). ¿Cuál es la fuente principal de opacidad?

$$L \approx 1.5 \times 10^{31} \frac{M}{M_{\text{SUN}}}$$

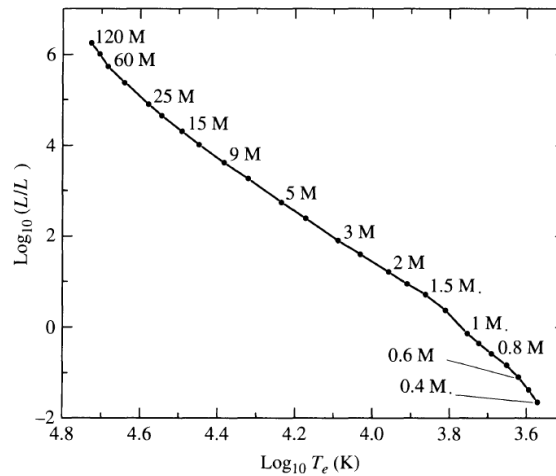
$$\frac{L_{\text{Ed}}}{L_{\text{SUN}}} \approx 3.8 \times 10^4 \frac{M}{M_{\text{SUN}}}$$

$$L_{\text{Ed}} \approx 3.5 \times 10^6 L_{\text{SUN}}$$

Para estrellas de approx  $90 M_{\text{SUN}}$ , se excede la luminosidad de Eddington.

## Relación Masa-Luminosidad

La relación Masa-Luminosidad puede ser calculada para estrellas mientras que el rango de luminosidad abarque desde  $10^{-4}L_{\text{SUN}}$  hasta  $10^6L_{\text{SUN}}$ , el rango de masa es sólo un factor de  $\approx 1000$



**FIGURE 10.13** The locations of stellar models on a theoretical H-R diagram. The models were computed using the stellar structure equations and constitutive relations. (Data from Schaller, et al., *Astron. Astrophys. Suppl.*, 96, 269, 1992, and Charbonnel, et al., *Astron. Astrophys. Suppl.*, 135, 405, 1999.)

Las estrellas de gran masa superan con creces la producción de energía de las estrellas de baja masa y, por tanto, tienen vidas mucho más cortas.