Clase nº10

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

20 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular integrales de Riemann

Ejemplo 43

Sea $c \in \mathbb{R}$ y la función

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c \end{array}$$

Veamos que f es integrable.

Ejemplo 43

Ejemplo 43

Observación

Cuando se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

A ese valor lo denotaremos por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y se llama **integral de Riemann de f sobre el intervalo** $[a, b]$

Ejemplo 44

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Demostrar que
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 44

Ejercicio propuesto

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x es racional} \\ 1 & \text{si x es irracional} \end{cases}$$

Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

(Utilizar densidad de números racionales e irracionales en $\mathbb{R}$)

Teorema 21 (Criterio de integrabilidad)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\epsilon$ de $[a, b]$ tal que $S(f, \mathcal{P}_\epsilon) - I(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$.

Teorema 22

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua o continua a tramos entonces, f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Teorema 23

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y

$$\mathcal{P}_n = \left\{ t_i, t_i = a + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0, ..., n \right\},$$

entonces

$$\lim_{n \to +\infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ejemplo 45

Consideremos $f(x) = x$ definida en $[a, b]$. Comprobar que f es integrable y su integral es

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2.}$$

Ejemplo 45

Ejemplo 45

Ejemplo 46

Consideremos $f(x) = x^3$, y $x \in [0, 1]$. Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Ejemplo 46

Ejemplo 46

Ejercicios propuestos

1. Probar que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es integrable en $[1, 2]$. (por medio del criterio de integrabilidad.)

2. Sea $f(x) = x$, definida en $[a, b]$,
$\mathcal{P}_n = \left\{ x_i, x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0, ..., n \right\}$,
$E_i = \dfrac{x_i + 2x_{i-1}}{3}, i = 1, 2, ..., n$. Utilizando el teorema 22, comprobar que
$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

3. Consideremos $f(x) = x^3$, $x \in [2, 3]$. Calcular $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.