Pauta - Prueba II - Métodos Matemáticos de la Física I

Licenciatura en Física - 2 - 2022
Daniel Salinas-Arizmendi

Intrucciones:

- ~~Todas las preguntas tiene el mismo puntaje~~. La exigencia de la prueba es de un 60 %.
- Justifique todas su respuestas.

Formulario:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$
$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z$$
$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z$$

5 pts.

1. Calcular la siguiente integral
$$\int_1^i \left(3z^4 - 2z^3\right) dz.$$

15 pts

2. (A) Demuestre la siguiente expresión
$$\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz.$$
(B) Usando lo anterior muestre que
$$\int_0^i z\cos z \; dz = \frac{1-e}{e},$$
donde e es el número de Euler.

3. Resuelva la siguiente integral

10 pts
$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(i+z)} dz.$$

4. Determine el valor de la integral

10 pts
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2iz}}{z^4} dz$$

5. Demostrar que

10 pts
$$\oint_C \frac{\sin^2 z - z^2}{(z-b)^3} dz = -4\pi i \sin^2 b$$

b esta contenido en C.

(1) Calcular la siguiente integral

$$I_1 = \int_1^i (3z^4 - 2z^3)\, dz.$$

el sub integral no presenta inconsistencias

$$I_1 = \left(\frac{3}{5} z^5 - \frac{1}{2} z^4 \right)\Big|_1^i = \frac{3}{5} i^5 - \frac{1}{2} i^4 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$$

$i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$$I_1 = \frac{3}{5} i - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5} + \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}(-1 + i)$$

(2 minutos)

(2.) (A) Demuestre la siguiente expresión

$$\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz.$$

(B) Usando lo anterior muestre que

$$I_2 = \int_0^i z \cos z \; dz = \frac{1-e}{e},$$

donde e es el número de Euler.

(A) $d\big(f(z)g(z)\big) = f(z)\, g'(z)\, dz + f'(z)\, g(z)\, dz$

luego integrando toda la expresión

$$\int d\big(f(z)g(z)\big) = \int f(z)\, g'(z)\, dz + \int f'(z)\, g(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \int f(z)\, g'(z)\, dz = f(z)\, g(z) - \int f'(z)\, g(z)\, dz$$

(B) si en I_2 se tiene $f(z) = z$, $g'(z) = \cos z$

$\Rightarrow g(z) = \operatorname{sen} z$, usando lo mostrado en (A) que es la integración por partes

$(\cos\theta)' = -\operatorname{sen}\theta$

$\int d(\cos\theta) = -\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$-\cos\theta = -\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$I_2 = z \operatorname{sen} z \Big|_0^i - \int_0^i 1 \cdot \operatorname{sen} z\, dz$$

$$= z \operatorname{sen} z \Big|_0^i + \cos z \Big|_0^i$$

$$= i \operatorname{sen} i + \cos i - \cancel{\cos 0}^{\,1}$$

Como $\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z$
$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z$
$\rightarrow \operatorname{sen} i = i \operatorname{senh}(1)$
$\rightarrow \cos i = \cosh(1)$

$$I_2 = i^2 \operatorname{senh}(1) + \cosh(1) - 1$$

Como $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$-\operatorname{senh} z + \cosh z = \frac{\cancel{-e^z} + e^{-z} + \cancel{e^z} + e^{-z}}{2} = e^{-z}$$

Entonces :

$$\Rightarrow \therefore I_2 = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$$

(10 minutos)

3. Resuelva la siguiente integral

$$I_3 = \oint_{\underbrace{|z|=2}_{C}} \frac{z}{(9-z^2)(i+z)} dz.$$

el sub integrado solo tiene un polo $z=-i$ en C

(obs. el valor $z = \pm 3$ no esta contenido por en C)

$$I_3 = \oint_C \frac{z/(9-z^2)}{z+i} dz = 2\pi i \, f(z)\Big|_{z=-i}$$

$$f(z) = \frac{z}{9-z^2} \Rightarrow f(-i) = \frac{-i}{9-i^2} = \frac{-i}{9+1}$$

$$\therefore \quad I_3 = \frac{-2\pi i^2}{10} = \frac{\pi}{5}$$

(4 minutos)

4. Determine el valor de la integral

$$I_4 = \oint_{|z|=1} \frac{e^{2iz}}{z^4} dz$$

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z_0)\, dz_0}{(z_0-z)^{n+1}}$$

$\Rightarrow n=3$, $z=0$ polo.

$$f(z) = e^{2iz} \rightarrow f'(z) = 2i e^{2iz}$$

$$f''(z) = 4i^2 e^{2iz}$$

$$f'''(z) = -8i\, e^{2iz}$$

$$f'''(0) = -8i$$

$$I_4 = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{3!}_{3}} f'''(0) = -\frac{8\pi i^2}{3}$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

(4 minuto)

5. Demostrar que

$$I_5 = \oint \frac{\sin^2 z - z^2}{(z-b)^3} dz = -4\pi i \sin^2 b$$

$n = 2$

$f(z) = \text{sen}^2 z - z^2$

$f'(z) = 2\,\text{sen}\, z \cos z - 2z$

$f''(z) = 2\cos^2 z - 2\,\text{sen}^2 z - 2$

$= 2(\cancel{1} - \text{sen}^2 z - \text{sen}^2 z) - \cancel{2}$

$= -4\,\text{sen}^2 z$

$f''(b) = -4\,\text{sen}^2 b.$

$$I_5 = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2!}} f''(b) = \pi i\,(-4\,\text{sen}^2 b)$$

$$= -4\pi i\,\text{sen}^2 b$$

(4 minuto)