Erick C. Pastén
Ondas y óptica
May 27, 2024

Ecuaciones de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

Question 1. Resuelva la ecuación de onda unidimensional para una onda electromagnética que se propaga en el vacío en la dirección $+\hat{z}$ en una cavidad de largo L con las condiciones de borde:

$$\vec{E}(0,t) = 0 \tag{1}$$

$$\vec{E}(L,t) = 0 \tag{2}$$

Para un armónico n, exprese el campo magnético, el vector de Poynting y la densidad de Energía Electromagnética. ¿Está relacionada la energía electromagnética con los valores permitidos de frecuencia?

Question 2. Resuelva la ecuación de onda inhomogénea para una onda armónica que se propaga a la derecha con velocidad c, asumiendo una solución $\psi(x,t) \propto e^{i(kx-\omega t)}$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3}$$

¿Qué características tiene el número de onda?. Escriba la ecuación de onda para una onda electromanética unidimensional que se propaga en un material óhmico conductor donde no existe polarización interna ni carga libre. Encuentre la función de onda armónica para el campo eléctrico y grafique su magnitud cualitativamente.

Question 3. La fuerza de Lorentz que experimenta un electrón de carga e y masa m puede ser escrita como:

$$F_L = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{4}$$

Determine el movimiento en función del tiempo de un electrón ligado al núcleo por una fuerza proporcional a su desplazamiento $F_k \sim -kx$ en presencia de un campo eléctrico de magnitud oscilante de frecuencia ω:

$$E = E_0 \cos \omega t \tag{5}$$

¿Qué sucede si se agrega una fuerza de amortiguación $F_A = -b\dot{x}$ proporcional a velocidad del electrón?

Imagine ahora un medio repleto de este tipo de electrones, considerando su fuerza de ligadura y de amortiguación. Muestre que la permitividad eléctrica ϵ de este medio está dada por:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) \tag{6}$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural de un electrón sin amortiguación y N es la densidad de electrones . Una onda que se propaga en este medio puede ser escrita como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\frac{n\omega}{c}x - \omega t)} \tag{7}$$

Donde n es el índice de refracción del medio.

Question 4. Del ejercicio anterior, considere ahora la parte compleja del campo eléctrico oscilante, esto es:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \tag{8}$$

En este caso, la permitividad será una expresión compleja. Exprese esta permitividad. Debido a ésto, el índice de refracción tambien es un número complejo y puede ser representado por:

$$n = n_R - in_C \tag{9}$$

Donde n_R y n_C son números reales y positivos. Exprese una onda electromagnética que se propaga por este medio y describa cualitativamente el efecto de permitir una parte imaginaria en el índice de refracción.

La parte real n_R es el índice de refracción normal y la parte compleja n_C es llamada comunmente **coeficiente de extinción**. Este último coeficiente es importante cuando aparece el fenómeno de resonancia, debido a que el material disipa gran cantidad de energía (es decir, absorbe la onda). ¿Cómo podría relacionar este fenómeno con el color de un objeto?

Question 5. Una onda **sonora** esférica isotrópica puede ser escrita como:

$$\Psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t) \tag{10}$$

Encuentre la función de onda para la presión. ¿Qué sucede a largas distancias de la fuente?

Question 6. Debido a que las ondas perfectamente planas son imposibles de construir en la realidad, una aproximación de la ecuación de onda se puede usar para describir ondas aproximadamente planas (como un láser). Para una frente que viaja preferentemente hacia la dirección $+z$ podemos escribir la función de onda espacial como:

$$\psi(x,y,z) = \psi_0(x,y,z)e^{-ikz} \tag{11}$$

Si la función $\psi_0(x,y,z)$ varía lentamente con respecto a z, entonces se debe cumplir:

$$\left|\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\right| < \left|k\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right| \tag{12}$$

Demuestre que bajo estas condiciones, la función ψ_0 debe satisfacer la ecuación de onda *paraxial* dada por:

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

Argumente explicitamente los pasos que siguió al desarrollar los ejercicios

Universidad de Valparaíso