

FÍSICA TEÓRICA

VOLÚMEN I

---

# MECÁNICA

*SEGUNDA EDICIÓN*

---

# LANDAU<sup>y</sup>LIFSHITZ

*CURSO DE FÍSICA TEÓRICA*

**Volumen 1**  
**MECÁNICA**



L. D. LANDAU      E. M. LIFSHITZ  
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

**MECÁNICA**  
**Volumen 1**  
del  
**CURSO DE FÍSICA TEÓRICA**

2.<sup>a</sup> edición corregida



**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**  
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

*Título de la obra original:*

**MEXAHNKA**

*Editada por:*

**MEZHDUNARODNAYA KNIGA, Moscou, 1965**

*Versión española por:*

**Eloísa López de Vázquez**

Profesor ayudante de Mecánica estadística de la Facultad de Ciencias de Madrid

*Revisada por:*

**Prof. Salvador Velayos**

Catedrático de Física teórica y experimental de la Facultad de Ciencias de Madrid

**Propiedad de:**

**EDITORIAL REVERTÉ, S.A.**

**Loreto, 13-15, Local B**

**08029 Barcelona**

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

**© EDITORIAL REVERTÉ, S.A., 1994**

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4080 - 8      Obra completa

ISBN - 84 - 291 - 4081 - 6      Tomo I

Depósito Legal: B - 21638 - 1994

Impreso por GERSA, Industria Gráfica

Tambor del Bruc, 6

08970 Sant Joan Despí (Barcelona)

## **PROLOGO A LA 2.<sup>a</sup> EDICION**

No ha sido necesario rehacer el libro para esta segunda edición. Se han añadido tan solo unos pocos comentarios y algunos problemas en diferentes sitios del mismo, y también se han corregido algunas erratas.

Para el estudio de este volumen por los físicos teóricos dentro del contenido «teórico mínimo», cabe recomendar que se prescinda de los §§ 27, 29, 30, 37.



# CAPÍTULO PRIMERO

## ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

### § 1. Coordenadas generalizadas

Uno de los conceptos fundamentales de la Mecánica es el de *punto material*<sup>1</sup>. Se denomina así un cuerpo cuyas dimensiones pueden despreciarse cuando se describe su movimiento. Por supuesto, esta posibilidad depende de las condiciones concretas del problema. Así, se pueden considerar los planetas como puntos materiales al estudiar su movimiento alrededor del Sol, pero no, evidentemente, cuando se considera su rotación alrededor de sus ejes.

La posición de un punto material en el espacio está determinada por su vector de posición  $\mathbf{r}$ , cuyas componentes coinciden con sus coordenadas cartesianas  $x, y, z$ . La derivada de  $\mathbf{r}$  con respecto al tiempo  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  se llama *velocidad* y la derivada segunda  $d^2\mathbf{r}/dt^2$ , *aceleración* del punto. En lo que sigue, como se acostumbra, indicaremos la derivación con respecto al tiempo por medio de un punto sobre la letra:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

Para determinar la posición de un sistema de  $N$  puntos materiales en el espacio, hace falta dar  $N$  vectores de posición, es decir,  $3N$  coordenadas. En general, el número de magnitudes independientes que determinan de manera unívoca la posición de un sistema se llama número de *grados de libertad* del sistema. En este caso, el número es igual a  $3N$ . Estas magnitudes no son forzosamente las coordenadas cartesianas del punto, y de las condiciones del problema depende la elección de otro sistema más cómodo de coordenadas.  $s$  magnitudes cualesquiera  $q_1, q_2, \dots, q_s$  que definen completamente la posición de un sistema (de  $s$  grados de libertad) se llaman sus *coordenadas generalizadas* y las derivadas  $\dot{q}_i$ , sus *velocidades generalizadas*.

Sin embargo, no basta dar las coordenadas generalizadas para determinar el *estado mecánico* del sistema en un instante dado, en el sentido de que esto no permite prever la posición del sistema en el instante siguiente. Para valores dados de las coordenadas, un sistema puede tener velocidades arbitrarias y, según el valor de éstas, la posición del sistema será distinta en el instante siguiente (es decir, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño  $dt$ ).

La experiencia demuestra que dadas simultáneamente las coordenadas y las velocidades se determina completamente el estado del sistema y permite, en

<sup>1</sup> En lugar de *punto material* emplearemos a menudo la palabra *partícula*.

principio, predecir su movimiento futuro. Matemáticamente, esto significa que dadas las coordenadas y las velocidades en un cierto instante quedan definidas únicamente las aceleraciones  $\ddot{q}$  en ese instante<sup>1</sup>.

Las relaciones entre las aceleraciones, las coordenadas y las velocidades se llaman *ecuaciones de movimiento*. Con respecto a las funciones  $q(t)$ , son ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya integración permite en principio determinar esas funciones, es decir, las trayectorias del sistema.

## § 2. El principio de la mínima acción

La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*). Según este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t),$$

o más brevemente  $L(q, \dot{q}, t)$ , y el movimiento del sistema satisface la siguiente condición:

Supongamos que en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$  el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ ; el sistema se mueve entre estas posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

tome el menor valor posible<sup>2</sup>. La función  $L$  se llama *lagrangiana* del sistema, y la integral (2.1), *acción*.

La función de Lagrange no contiene más que  $q$  y  $\dot{q}$ , y no las derivadas superiores  $\ddot{q}$ ,  $\dddot{q}$ , ... Esto es debido al hecho ya indicado de que el estado mecánico de un sistema está completamente definido por sus coordenadas y sus velocidades.

Establezcamos ahora las ecuaciones diferenciales que determinan el mínimo de la integral (2.1). Por simplicidad, empecemos suponiendo que el sistema no tiene más que un solo grado de libertad, de manera que hace falta determinar una sola función  $q(t)$ .

Sea precisamente  $q = q(t)$  la función para la cual  $S$  es un mínimo. Esto significa que  $S$  crece cuando se sustituye  $q(t)$  por una función cualquiera

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> Para simplificar, designaremos corrientemente por  $q$  al conjunto de todas las coordenadas  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (y por  $\dot{q}$  al conjunto de todas las velocidades).

<sup>2</sup> Conviene hacer notar que esta formulación del principio de la mínima acción no es siempre válida para la totalidad de la trayectoria del movimiento, sino solamente para cada parte suficientemente pequeña de ésta; para toda la trayectoria, la integral (2.1) debe ser un extremal, pero no necesariamente un mínimo. Sin embargo, este hecho no es esencial para la deducción de las ecuaciones del movimiento, que no utiliza más que una condición de extremal.

donde  $\delta q(t)$  es una función que es pequeña en todo el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  [se le llama *variación* de la función  $q(t)$ ]. Puesto que para  $t = t_1$  y  $t = t_2$  todas las funciones (2.2) deben tomar los mismos valores  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ , se tiene:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2.3)$$

Lo que varía  $S$  cuando se remplaza  $q$  por  $q + \delta q$  está dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

El desarrollo en serie de esta diferencia en potencias de  $\delta q$  y  $\delta \dot{q}$  (en la expresión bajo el signo integral) comienza por términos de primer orden. La condición necesaria de mínimo<sup>1</sup> de  $S$  es que el conjunto de estos términos se anule; se le llama primera variación (o simplemente variación) de la integral. Así, el principio de mínima acción puede escribirse:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.4)$$

o, efectuando la variación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $\delta \dot{q} = d/dt(\delta q)$ , integramos el segundo término por partes y se obtiene:

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.5)$$

En virtud de las condiciones (2.3), el primer término de esta expresión desaparece. Queda una integral, la cual debe anularse para todo valor de  $\delta q$ . Esto es solamente posible si el integrando es idénticamente nulo, y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

<sup>1</sup> En general: de extremal.

Si hay varios grados de libertad, las  $s$  funciones diferentes  $q_i(t)$  deben variar independientemente. Es evidente que entonces obtenemos  $s$  ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.6)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales buscadas; en Mecánica se las llama *ecuaciones de Lagrange*<sup>1</sup>. Si se conoce la lagrangiana de un sistema mecánico dado, entonces las ecuaciones (2.6) establecen la relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas, es decir, son las ecuaciones del movimiento del sistema.

Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones (2.6) forman un sistema de  $s$  ecuaciones diferenciales de segundo orden con  $s$  funciones desconocidas  $q_i(t)$ . La solución general del sistema contiene  $2s$  constantes arbitrarias. Para determinarlas y, por tanto, para definir completamente el movimiento del sistema mecánico, es necesario conocer las condiciones iniciales que caractericen el estado del sistema en un instante dado, por ejemplo los valores iniciales de las coordenadas y de las velocidades.

Sea un sistema mecánico compuesto de dos partes  $A$  y  $B$ , que siendo cerradas, cada una tendrá su respectivo lagrangiano  $L_A$  y  $L_B$ . Si se alejan estas partes una de la otra suficientemente, para que su interacción se haga despreciable, la lagrangiana del sistema en el límite tenderá a:

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2.7)$$

Esta aditividad de la lagrangiana expresa el hecho de que las ecuaciones del movimiento de cada una de las partes de un sistema que no interactúen con las otras, no pueden contener magnitudes pertenecientes a las otras partes del sistema.

Es evidente que la multiplicación de la lagrangiana de un sistema mecánico por una constante arbitraria no afecta a las ecuaciones del movimiento. Se podría pensar que de aquí resulta una indeterminación: las funciones de Lagrange de diferentes sistemas mecánicos aislados podrían multiplicarse por diferentes constantes arbitrarias; sin embargo, la propiedad de aditividad de la lagrangiana elimina esta indeterminación, puesto que no admite más que la multiplicación simultánea de las lagrangianas de todos los sistemas por una misma constante, lo que conduce simplemente a una arbitrariedad natural en la elección de las unidades de medida de esta magnitud física. Volveremos a tratar esto en § 4.

Se debe hacer una nueva consideración general. Sean dos funciones  $L'(q, \dot{q}, t)$  y  $L(q, \dot{q}, t)$  que sólo difieran en la derivada total con respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo  $f(q, t)$ :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (2.8)$$

<sup>1</sup> En el Cálculo de variaciones, que trata del problema formal de la determinación de extremales de las integrales de la forma (2.1), se llaman ecuaciones de Euler.

Las integrales (2.1), calculadas para estas dos funciones están ligadas por la relación

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

es decir, difieren en un término que desaparece al variar la acción. De modo que la condición  $\delta S' = 0$  coincide con la condición  $\delta S = 0$  y la forma de las ecuaciones de movimiento queda invariable. De esta manera, la función de Lagrange se define con la indeterminación aditiva de la derivada total con respecto al tiempo de cualquier función de las coordenadas y del tiempo.

### § 3. El principio de la relatividad de Galileo

Para estudiar los fenómenos mecánicos es preciso escoger un *sistema de referencia*. En los distintos sistemas de referencia las leyes del movimiento no tienen en general la misma forma. Al escoger un sistema de referencia arbitrario, puede ocurrir que las leyes que rigen fenómenos aún muy sencillos tomen una forma muy complicada. Naturalmente, debe escogerse un sistema de referencia en el cual las leyes de la Mecánica tomen su forma más sencilla.

Con respecto a un sistema de referencia arbitrario, el espacio es no homogéneo y anisótropo. Esto significa que aunque un cuerpo no interactúe con ningún otro, sus diferentes posiciones en el espacio y sus distintas orientaciones no serían mecánicamente equivalentes. Generalmente ocurrirá lo mismo con el tiempo, que no será homogéneo, es decir, diferentes instantes no serán equivalentes. Es evidente la complicación que se introduciría al describir los fenómenos mecánicos con estas propiedades del espacio y del tiempo. Por ejemplo, un cuerpo libre (es decir, no sometido a ninguna acción exterior) no estaría en reposo, pues aun cuando la velocidad del cuerpo fuese nula en un cierto instante, en un instante siguiente empezaría a moverse en determinada dirección. Sin embargo, siempre se puede encontrar un sistema de referencia para el cual el espacio sea homogéneo e isótropo y el tiempo homogéneo. A este sistema se le llama *inercial*. En particular, en un sistema inercial, un cuerpo libre y en reposo en un instante dado, permanecerá siempre en reposo.

Podemos ahora inferir algunas consecuencias acerca de la forma de la lagrangiana para una partícula que se mueve libremente en un sistema de referencia inercial. La homogeneidad del espacio y del tiempo significa que esta función no puede contener explícitamente ni el vector de posición  $\mathbf{r}$  de la partícula, ni el tiempo  $t$ ; es decir,  $L$  será sólo función de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Puesto que el espacio es isótropo, la lagrangiana no puede depender tampoco de la dirección del vector  $\mathbf{v}$ ; por tanto, será función solamente de su valor absoluto, es decir, de su cuadrado  $\mathbf{v}^2 = v^2$ :

$$L = L(v^2). \quad (3.1)$$

Como la lagrangiana es independiente de  $\mathbf{r}$ , tenemos  $\partial L/\partial \mathbf{r} = 0$ , y las ecuaciones de Lagrange toman la forma<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0,$$

de donde  $\partial L/\partial \mathbf{v} = \text{Cte.}$  Y puesto que  $\partial L/\partial \mathbf{v}$  es una función del cuadrado de la velocidad solamente, resulta que

$$\mathbf{v} = \text{constant.} \quad (3.2)$$

Llegamos así a la conclusión de que en un sistema de referencia inercial, todo movimiento libre se realiza con velocidad constante en magnitud y dirección. Esta afirmación es la *ley de la inercia*.

Si, al lado del sistema inercial dado, consideramos otro sistema que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme con respecto al primero, las leyes del movimiento libre en este nuevo sistema serán las mismas que en el sistema inicial. Un movimiento libre se efectuará también allí con velocidad constante.

Sin embargo, la experiencia demuestra que en éstos sistemas no solamente las leyes del movimiento libre serán las mismas, sino que los sistemas son completamente equivalentes desde el punto de vista mecánico. Así, existen una infinidad de sistemas de referencia inerciales, que se mueven los unos con respecto a los otros con movimiento rectilíneo y uniforme. En estos sistemas, las propiedades del espacio y del tiempo son las mismas, así como todas las leyes de la Mecánica. Esto constituye el *principio de relatividad de Galileo*, que es uno de los principios más importantes de la Mecánica.

Todo lo que se ha dicho muestra claramente que los sistemas de referencia inerciales tienen propiedades particulares, en virtud de las cuales se utilizan precisamente estos sistemas para el estudio de los fenómenos mecánicos. En lo que sigue, consideraremos solamente sistemas inerciales, a menos que se especifique lo contrario.

La completa equivalencia mecánica de todos estos sistemas demuestra que no existe ningún sistema de referencia «absoluto» que pudiera preferirse a los otros.

Las coordenadas  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  de un mismo punto en dos sistemas de referencia distintos  $K$  y  $K'$ , de los cuales el segundo se mueve respecto al primero con una velocidad  $\mathbf{V}$ , están ligadas por la relación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (3.3)$$

Se sobreentiende que el tiempo transcurre de la misma manera en los dos sistemas de referencia:

$$t = t'. \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> La derivada de un escalar con respecto a un vector es otro vector cuyas componentes son iguales a las derivadas de la magnitud escalar con respecto a las componentes correspondientes del vector.

La hipótesis del tiempo absoluto es uno de los fundamentos de la Mecánica clásica<sup>1</sup>.

Las fórmulas (3.3) y (3.4) constituyen la *transformación de Galileo*. Se puede formular el principio de la relatividad de Galileo asegurando la invariancia de las ecuaciones del movimiento con respecto a estas transformaciones.

#### § 4. Lagrangiana de una partícula libre

Determinemos ahora la forma de la función de Lagrange y consideremos primero el caso más simple: el movimiento libre de una partícula en un sistema inercial. Como ya se ha visto, la lagrangiana en este caso sólo depende del cuadrado del vector velocidad. Para poner de manifiesto esta dependencia, utilizaremos al principio de la relatividad de Galileo. Si un sistema de referencia inercial  $K$  se desplaza con una velocidad infinitamente pequeña  $\epsilon$  con respecto a otro sistema inercial  $K'$ , se tiene  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \epsilon$ . Puesto que las ecuaciones del movimiento deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia, la lagrangiana  $L(v^2)$  por esta transformación debe convertirse en una función  $L'$ , que, si difiere de  $L(v^2)$ , no será más que en la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y del tiempo (ver el fin del § 2).

Así, tenemos:

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \epsilon + \epsilon^2).$$

Desarrollando esta expresión en serie de potencias de  $\epsilon$  y despreciando los infinitésimos de orden superior al primero, obtenemos:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \epsilon.$$

El último término del segundo miembro de esta ecuación será una derivada total con respecto al tiempo, solamente si es una función lineal de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Por tanto,  $\partial L / \partial v^2$  no depende de la velocidad, es decir, la lagrangiana en este caso es proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$L = av^2$$

Del hecho de que una lagrangiana de esta forma satisface el principio de la relatividad de Galileo para una velocidad relativa infinitesimal, se deduce inmediatamente que la función de Lagrange es también invariante para una velocidad finita  $\mathbf{V}$  del sistema de referencia  $K$  con respecto al  $K'$ . En efecto,

$$\begin{aligned} L' &= av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + a\mathbf{V}^2 \\ L' &= L + d/dt(2a\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + a\mathbf{V}^2 t) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> No es cierta en la Mecánica relativista.

El segundo término es una derivada total con respecto al tiempo y por tanto puede omitirse. La constante  $a$  se la denomina habitualmente  $m/2$ , de manera que, finalmente, la lagrangiana de una partícula libre se escribe

$$L = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.1)$$

La magnitud  $m$  se llama *masa* de la partícula. Siendo la lagrangiana aditiva, se tiene, para un sistema de partículas no interactuantes<sup>1</sup>:

$$L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2. \quad (4.2)$$

Es preciso destacar que la definición dada de masa sólo adquiere un sentido real al tener en cuenta la propiedad aditiva. Como se ha visto en § 2, la lagrangiana siempre puede multiplicarse por una constante cualquiera sin que afecte a las ecuaciones del movimiento. Con respecto a la función (4.2), esta multiplicación lleva consigo un cambio en la unidad de medida de la masa; pero los cocientes de las masas de las distintas partículas, que son los únicos que tienen un sentido físico real, permanecen invariables con esta transformación.

Es fácil ver que la masa no puede ser negativa. En efecto, según el principio de la mínima acción, cuando una partícula se desplaza del punto 1 al punto 2 del espacio, la integral

$$S = \int_1^2 \frac{1}{2}mv^2 dt$$

pasa por un mínimo. Supongamos que la masa fuese negativa. Entonces, para una trayectoria a lo largo de la cual la partícula deja rápidamente el punto 1 y rápidamente se aproxima al punto 2, la integral de acción tomaría valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Es decir, no habría mínimo<sup>2</sup>.

Es útil observar que

$$v^2 = (dl/dt)^2 = (dl)^2/(dt)^2. \quad (4.3)$$

De aquí, para obtener la lagrangiana, es suficiente hallar el cuadrado del elemento de arco  $dl$  en el sistema de coordenadas correspondiente. En coordenadas cartesianas, por ejemplo,  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , de donde:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.4)$$

En coordenadas cilíndricas  $dl^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2$ , y así:

$$L = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> Para numerar las partículas, utilizaremos como índices las primeras letras del alfabeto, y para las coordenadas, las letras  $i, k, l, \dots$

<sup>2</sup> Esto no afecta a la reserva indicada en la primera nota de § 2, puesto que para  $m < 0$ , la integral no tendría tampoco mínimo para ningún elemento de trayectoria, por pequeño que sea.

En coordenadas esféricas  $dL^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2$ , y:

$$L = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta). \quad (4.6)$$

### § 5. Lagrangiana de un sistema de partículas

Consideremos ahora un sistema de partículas que actúan entre sí, pero aisladas de los otros cuerpos; a este sistema se le llama *cerrado*. Se puede describir la interacción de las partículas del sistema añadiendo a la lagrangiana (4.2), válida para partículas libres, una cierta función de las coordenadas (dependiente del carácter de la interacción)<sup>1</sup>. Designando esta función por —  $U$ , se tiene:

$$L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots), \quad (5.1)$$

(donde  $\mathbf{r}_a$  es el vector de posición de la partícula  $a$ ). Esta es la forma general de la función de Lagrange de un sistema cerrado.

La suma

$$T = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2$$

se llama *energía cinética*, y la función  $U$ , *energía potencial*. El significado de estos términos será explicado en § 6.

El hecho de que la energía potencial sólo dependa de la posición de las partículas en un instante dado, lleva consigo que un cambio de posición de una de ellas repercute instantáneamente en todas las otras; es decir, la interacción «se propaga» instantáneamente. Este carácter de las interacciones es inevitable en Mecánica clásica; resulta directamente de sus postulados fundamentales cuales son la existencia de un tiempo absoluto y el principio de relatividad de Galileo. Si la interacción se propagase, no instantáneamente, sino con una velocidad finita, esta velocidad sería diferente en los distintos sistemas de referencia (en movimiento relativo), ya que la existencia de un tiempo absoluto implica necesariamente que la regla ordinaria de composición de velocidades sea aplicable a todos los fenómenos. En consecuencia, las leyes del movimiento para cuerpos que interactúan serían diferentes en los distintos sistemas de referencia (inerciales), en contradicción con el principio de relatividad de Galileo.

En § 3 hablamos solamente de la homogeneidad del tiempo, pero la forma (5.1) de la función de Lagrange muestra que el tiempo no sólo es homogéneo, sino también isotropo, es decir, sus propiedades son las mismas en los dos sentidos. En efecto, el cambio de  $t$  por  $-t$  deja la lagrangiana y, por tanto, las ecuaciones de movimiento, invariables. En otras palabras, si un cierto movimiento del sistema es posible, también lo será el movimiento inverso, o sea, el movimiento según el cual el sistema pasa por los mismos estados, en orden inverso. En este sentido, todo movimiento que obedece las leyes de la Mecánica clásica es reversible.

<sup>1</sup> Esta afirmación se refiere a la Mecánica clásica, no relativista, expuesta en este libro.

Conociendo la lagrangiana podemos deducir las ecuaciones del movimiento.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5.2)$$

Sustituyendo (5.1) en (5.2) obtenemos:

$$m_a d\mathbf{v}_a/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a. \quad (5.3)$$

Bajo esta forma, las ecuaciones del movimiento se llaman *ecuaciones de Newton* y constituyen la base de la Mecánica de un sistema de partículas interactuantes. Al vector

$$\mathbf{F}_a = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a \quad (5.4)$$

se le denomina *fuerza* que actúa sobre la partícula  $a$ . Lo mismo que la energía potencial  $U$ , la fuerza sólo depende de las coordenadas de las partículas y no de sus velocidades. Las ecuaciones (5.3) demuestran que los vectores aceleraciones de las partículas son, análogamente, sólo funciones de sus coordenadas.

La energía potencial es una magnitud que se define con la arbitrariedad de una constante aditiva, que no afecta a las ecuaciones del movimiento (es un caso particular de la indeterminación de la lagrangiana, indicada en § 2). El modo más natural y más usual de elegir esta constante es tal que la energía potencial tienda a cero cuando las distancias entre las partículas tienden a infinito.

Si para describir el movimiento, empleamos coordenadas generalizadas,  $q_i$ , en lugar de las coordenadas cartesianas de las partículas, entonces, para obtener la lagrangiana, necesitaremos efectuar la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{\mathbf{x}}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \text{ etc.}$$

Sustituyendo estas expresiones en la función

$$L = \frac{1}{2} \sum m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

obtenemos la lagrangiana buscada:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5.5)$$

en la que, las  $a_{ik}$  sólo son funciones de las coordenadas. La energía cinética en coordenadas generalizadas es todavía función cuadrática de las velocidades, pero puede depender también de las coordenadas.

Hasta aquí sólo hemos hablado de sistemas cerrados. Consideraremos ahora un sistema  $A$  no cerrado, en interacción con otro sistema  $B$ , que realiza un cierto movimiento. Se dice en este caso que el sistema  $A$  se mueve en un campo exterior (creado por el sistema  $B$ ). Como las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir del principio de la mínima acción variando independientemente

cada una de las coordenadas (es decir, considerando las otras como magnitudes dadas), podemos, para encontrar la lagrangiana  $L_A$  del sistema  $A$ , utilizar la lagrangiana  $L$  del sistema total  $A + B$ , sustituyendo en él las coordenadas  $q_B$  por funciones dadas del tiempo.

Suponiendo el sistema  $A + B$  cerrado, se tiene:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

donde los dos primeros términos son las energías cinéticas de los sistemas  $A$  y  $B$ , y el tercero, la energía potencial común. Sustituyendo las  $q_B$  por funciones dadas del tiempo y omitiendo el término  $T[q_B(t), \dot{q}_B(t)]$ , ya que depende sólo de  $t$  (y es, por tanto, la derivada total respecto del tiempo de otra función del tiempo), obtenemos:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U[q_A, q_B(t)].$$

Así pues, el movimiento de un sistema en un campo exterior se describe por una lagrangiana de tipo usual, con la única diferencia de que la energía potencial puede ser una función explícita del tiempo.

Para el movimiento de una partícula en un campo externo, la forma general de la lagrangiana será:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{r}, t), \quad (5.6)$$

y las ecuaciones del movimiento

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\partial U / \partial \mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Un campo tal, que en todos sus puntos actúa la misma fuerza  $\mathbf{F}$  sobre una partícula, se le llama *campo uniforme*. En un campo uniforme, la energía potencial es evidentemente

$$U = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \quad (5.8)$$

Para concluir este tema debemos hacer una observación sobre la aplicación de las ecuaciones de Lagrange a distintos problemas concretos. A menudo se trata con sistemas mecánicos en que la interacción entre los cuerpos (o partículas) tiene un carácter de *ligadura*, es decir, limitaciones en su posición relativa. En la práctica, se crean estas ligaduras fijando los cuerpos entre ellos mediante varillas, hilos, charnelas, etc. Esta circunstancia introduce un nuevo factor en el problema: el movimiento se realiza con fricción en los puntos de contacto; en general, el problema se sale entonces del marco de la Mecánica pura (ver § 25). Sin embargo, en muchos casos, la fricción es suficientemente pequeña para que pueda despreciarse su influencia en el movimiento; si las masas de los «elementos de ligadura» son también despreciables, el papel de éstas consiste simplemente en reducir el número  $s$  de grados de libertad del sistema (con respecto al número  $3N$ ). Para determinar el movimiento, se puede usar nuevamente la forma (5.5) de la lagrangiana con un número de coordenadas generalizadas independientes igual al número real de grados de libertad.

## PROBLEMAS

Encontrar la lagrangiana de los siguientes sistemas, colocados en un campo gravitatorio (aceleración de la gravedad:  $g$ ).

1. Péndulo doble coplanario (fig. 1).

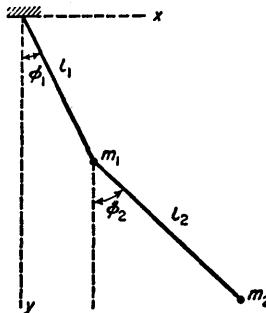


FIG. 1

*Solución:* Tomemos como coordenadas los ángulos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que forman los hilos  $l_1$  y  $l_2$  con la vertical. Tenemos entonces para la partícula  $m_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2, \quad U = -m_1gl_1 \cos \phi_1$$

Para hallar la energía cinética de la segunda partícula, expresamos sus coordenadas cartesianas  $x_2$ ,  $y_2$  (origen de coordenadas en el punto de suspensión, eje  $y$  dirigido verticalmente hacia abajo) en función de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2.$$

Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2]. \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2.$$

2. Péndulo plano de masa  $m_2$ , cuyo punto de suspensión (de masa  $m_1$ ) puede desplazarse en el mismo plano sobre una recta horizontal (fig. 2).

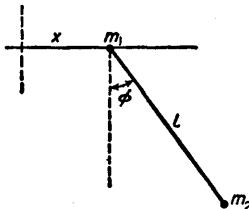


FIG. 2

*Solución:* Usando la coordenada  $x$  del punto  $m_1$  y el ángulo  $\phi$  entre el hilo del péndulo y la vertical, tenemos:

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\phi \cos \phi) + m_2gl \cos \phi.$$

3. Péndulo plano, cuyo punto de suspensión:

a) se desplaza uniformemente sobre una circunferencia vertical con una frecuencia constante  $\gamma$  (fig. 3);

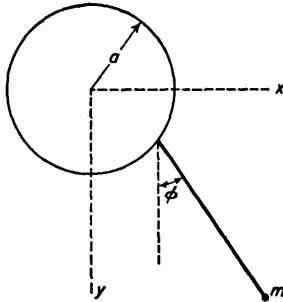


FIG. 3

- b) oscila horizontalmente en el plano del péndulo según la ley  $x = a \cos \gamma t$ ;  
 c) oscila verticalmente según la ley  $y = a \cos \gamma t$ .

*Solución:* a) coordenadas del punto  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \phi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \phi.$$

Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mlay^2 \operatorname{sen}(\phi - \gamma t) + mgl \cos \phi;$$

se han omitido los términos que sólo dependen del tiempo y eliminado la derivada total con respecto al tiempo de  $mlay^2 \operatorname{cos}(\phi - \gamma t)$ .

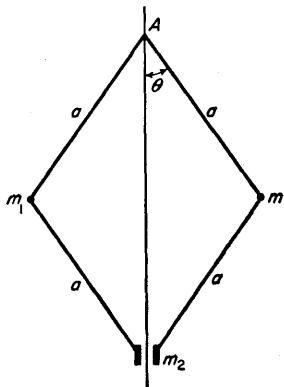


FIG. 4

b) Coordenadas del punto  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi.$$

Lagrangiana (omitiendo las derivadas totales con respecto al tiempo):

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mlay^2 \cos \gamma t \sin \phi + mgl \cos \phi.$$

c) De la misma manera:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mlay^2 \cos \gamma t \cos \phi + mgl \cos \phi.$$

4. En el sistema representado en la figura 4, el punto  $m_2$  se mueve sobre el eje vertical, y todo el sistema gira con velocidad angular constante  $\Omega$  alrededor de este eje.

*Solución:* Sea  $\theta$  el ángulo formado por el segmento  $a$  y la vertical, y  $\phi$  el ángulo de rotación del sistema alrededor del eje;  $\dot{\phi} = \Omega$ . Para cada partícula  $m_1$ , un desplazamiento elemental  $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2$ . La distancia de  $m_2$  al punto de suspensión  $A$  es  $2a \cos \theta$  y así,  $dl_2 = -2a \operatorname{sen} \theta d\theta$ . La lagrangiana:

$$L = m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + 2m_2a^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2(m_1 + m_2)ga \cos \theta.$$

## CAPÍTULO II

### TEOREMAS DE CONSERVACION

#### § 6. Energía

Durante el movimiento de un sistema mecánico, las  $2s$  magnitudes  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), que determinan el estado del sistema, varían con el tiempo. Existen, sin embargo, unas funciones de estas magnitudes cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, dependiendo solamente de las condiciones iniciales. A estas funciones se las denomina *integrales del movimiento*.

Para un sistema mecánico cerrado con  $s$  grados de libertad, el número de integrales del movimiento independientes es igual a  $2s - 1$ , lo que es evidente por las sencillas consideraciones siguientes. La solución general de las ecuaciones del movimiento contiene  $2s$  constantes arbitrarias [véase la discusión que sigue a la ecuación (2.6)]. Como las ecuaciones del movimiento para un sistema cerrado no contienen explícitamente el tiempo, es totalmente arbitraria la elección del origen de tiempos, y una de las constantes arbitrarias en la solución de las ecuaciones puede siempre considerarse como una constante aditiva  $t_0$  al tiempo. Eliminando  $t + t_0$  en las  $2s$  funciones

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}),$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}),$$

podemos expresar las  $2s - 1$  constantes arbitrarias  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  como funciones de  $q$  y  $\dot{q}$ , y estas funciones serán integrales del movimiento.

Sin embargo, no todas las integrales del movimiento tienen la misma importancia en Mecánica, pues hay algunas cuya constancia tiene un profundo significado, derivado de las propiedades fundamentales: homogeneidad e isotropía del espacio y del tiempo. Las magnitudes representadas por tales integrales del movimiento se dice que son conservativas y tienen una importante propiedad común: son aditivas, es decir, su valor para un sistema formado por varias partes cuya interacción es despreciable es igual a la suma de sus valores para cada una de las partes.

Precisamente, la especial importancia mecánica de estas magnitudes es debida a su aditividad. Supongamos, por ejemplo, que dos cuerpos interactúan durante un cierto intervalo de tiempo. Como cada una de las integrales aditivas

del sistema total es, tanto antes como después de la interacción, igual a la suma de sus valores para los dos cuerpos tomados separadamente, los teoremas de conservación para estas magnitudes hacen posible de modo inmediato deducir una serie de conclusiones referentes al estado de los cuerpos después de la interacción, si es conocido su estado antes de la interacción.

Consideremos primero el teorema de conservación que resulta de la *homogeneidad del tiempo*.

En virtud de esta homogeneidad, la lagrangiana de un sistema cerrado no depende explícitamente del tiempo. Entonces la derivada total respecto al tiempo de la lagrangiana puede escribirse:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

(si  $L$  fuese función explícita del tiempo, deberíamos añadir el término  $\partial L / \partial t$  al segundo miembro). Sustituyendo  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  por  $(d/dt) \partial L / \partial \dot{q}_i$  de acuerdo con las ecuaciones de Lagrange, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \end{aligned}$$

o:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

De donde se deduce que la magnitud

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (6.1)$$

permanece constante durante el movimiento de un sistema cerrado, es decir, es una integral del movimiento. A esta magnitud se la llama *energía E* del sistema. La aditividad de la energía es consecuencia de la aditividad de la lagrangiana, de la cual es función lineal según (6.1).

El teorema de la conservación de la energía es válido no sólo para sistemas cerrados, sino también para sistemas sometidos a un campo exterior constante (es decir, no dependiente del tiempo), ya que la única propiedad de la lagrangiana utilizada en el razonamiento anterior, la de que no contiene explícitamente el tiempo, sigue siendo válida en este caso. Los sistemas mecánicos cuya energía se conserva se suelen llamar *conservativos*.

Como se ha visto en § 5, la lagrangiana de un sistema cerrado (o colocado en un campo constante) es de la forma:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

siendo  $T$  una función cuadrática de las velocidades. Aplicando el teorema de Euler de las funciones homogéneas, se tiene:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Sustituyendo en (6.1):

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \quad (6.2)$$

y en coordenadas cartesianas:

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (6.3)$$

Es decir, la energía del sistema puede expresarse como la suma de dos términos esencialmente distintos: la energía cinética, que depende de las velocidades, y la energía potencial, que sólo depende de las coordenadas de las partículas.

### § 7. Impetu

De la *homogeneidad del espacio* se deduce un segundo teorema de conservación. En virtud de dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no varían por un desplazamiento paralelo de todo el sistema en el espacio. Consideremos, pues, un desplazamiento infinitesimal  $\epsilon$ , y busquemos la condición para que la lagrangiana no varíe.

Un desplazamiento paralelo es una transformación en la cual todas las partículas del sistema se desplazan un mismo segmento, o sea, los vectores de posición  $\mathbf{r}_a$  se convierten en  $\mathbf{r}_a + \epsilon$ . La variación de la función  $L$ , consecuencia de un cambio infinitesimal en las coordenadas (permaneciendo constantes las velocidades de las partículas), está dado por:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a = \epsilon \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

extendiendo la suma a todas las partículas del sistema. Como  $\epsilon$  es arbitrario, la condición  $\delta L = 0$  es equivalente a

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (7.1)$$

y, en virtud de las ecuaciones de Lagrange (5.2):

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Llegamos así a la conclusión de que en un sistema mecánico cerrado, la magnitud vectorial

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a \partial L / \partial \mathbf{v}_a \quad (7.2)$$

permanece constante durante el movimiento; el vector  $\mathbf{P}$  se llama *ímpetu*<sup>1</sup> del sistema. Derivando la función de Lagrange (5.1) encontramos que el ímpetu o cantidad de movimiento viene dado en función de las velocidades de las partículas por

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \quad (7.3)$$

La aditividad del ímpetu es evidente; además, en contraste con la energía, el ímpetu del sistema es igual a la suma de los ímpetus

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

de las partículas individuales, haya o no interacción entre ellas.

Las tres componentes del vector ímpetu se conservan sólo en ausencia de un campo exterior. Sin embargo, alguna de estas componentes puede conservarse aún en presencia de un campo externo, si la energía potencial en el campo no depende de todas las coordenadas cartesianas. Las propiedades mecánicas del sistema son evidentemente invariables frente a un desplazamiento a lo largo de un eje de coordenadas que no aparezca en la expresión de la energía potencial, y por tanto será conservativa la componente correspondiente del ímpetu. Así, en un campo uniforme dirigido según el eje  $z$ , se conservan las componentes  $x$  e  $y$  del ímpetu.

La ecuación (7.1) tiene un sencillo significado físico, pues la derivada  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a = - \partial U / \partial \mathbf{r}_a$  es la fuerza  $\mathbf{F}_a$  que actúa sobre la partícula  $a$ . La ecuación (7.1) nos dice entonces que la suma de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas en un sistema cerrado es nula:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (7.4)$$

En particular, si el sistema está formado por sólo dos partículas  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ : la fuerza que ejerce la primera partícula sobre la segunda es igual y opuesta a la ejercida por la segunda sobre la primera. Esta es la ley de la igualdad de la acción y de la reacción (tercera ley de Newton).

<sup>1</sup> O bien, cantidad de movimiento.—N. del T. La denominación de ímpetu es debida al profesor J. Palacios.

Si el movimiento se describe con coordenadas generalizadas  $q_i$ , las derivadas de la lagrangiana respecto a las velocidades generalizadas

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (7.5)$$

se llaman *ímpetus generalizados*, y las derivadas con respecto a las coordenadas generalizadas

$$F_i = \partial L / \partial q_i \quad (7.6)$$

se denominan *fuerzas generalizadas*. Con esta notación, las ecuaciones de Lagrange se escriben:

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7.7)$$

En coordenadas cartesianas los ímpetus generalizados son las componentes de los vectores  $\mathbf{p}_a$ , pero, en general, las magnitudes  $p_i$  son funciones lineales homogéneas de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , y no se reducen a productos de masa por velocidad.

### PROBLEMA

Una partícula de masa  $m$ , animada de una velocidad  $\mathbf{v}_1$ , abandona un semiespacio en el cual su energía potencial es constante e igual a  $U_1$ , y entra en otro en el cual su energía potencial es una constante distinta  $U_2$ . Determinar el cambio en la dirección del movimiento de la partícula.

*Solución* La energía potencial es independiente de las coordenadas cuyos ejes son paralelos al plano que separa los dos semiespacios. Por tanto, la componente del ímpetu de la partícula sobre este plano se conserva. Sean  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  las velocidades de la partícula antes y después de atravesar el plano, y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos formados por estas velocidades con la normal al plano; se tiene entonces  $v_1 \operatorname{sen} \theta_1 = v_2 \operatorname{sen} \theta_2$ . Como la relación entre  $v_1$  y  $v_2$  está dada por la ley de la conservación de la energía, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \sqrt{\left[ 1 + \frac{2}{mv_1^2} (U_1 - U_2) \right]}.$$

### § 8. Centro de masa

La cantidad de movimiento o ímpetu de un sistema mecánico cerrado tiene valores diferentes en los distintos sistemas de referencia (inerciales). Si un sistema de referencia  $K'$  se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  con respecto a otro sistema  $K$ , entonces las velocidades  $\mathbf{v}'_a$  y  $\mathbf{v}_a$  de las partículas en los dos sistemas de referencia son tales que  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ ; y los ímpetus  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  están relacionados por

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

o

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \quad (8.1)$$

En particular, hay siempre un sistema de referencia  $K'$  en el cual el ímpetu total es nulo. Haciendo  $\mathbf{P}' = 0$ , encontramos la velocidad de este sistema de referencia:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}/\sum m_a = \sum m_a \mathbf{v}_a / \sum m_a. \quad (8.2)$$

Si la cantidad de movimiento total de un sistema mecánico es cero en un cierto sistema de referencia, se dice que el sistema está en reposo respecto a dicho sistema de referencia; es una generalización natural de la noción de reposo para una partícula. La velocidad correspondiente  $\mathbf{V}$ , dada por la fórmula (8.2), define entonces la velocidad del movimiento de un sistema mecánico, considerado globalmente, cuyo ímpetu no es nulo. Es decir, que el teorema de conservación del ímpetu hace posible una definición natural de reposo y de velocidad de un sistema mecánico considerado globalmente.

La fórmula (8.2) demuestra que la relación entre el ímpetu  $\mathbf{P}$  y la velocidad  $\mathbf{V}$  del sistema es la misma que la existente entre el ímpetu y la velocidad de una sola partícula de masa  $\mu = \sum m_a$ , suma de las masas de todas las partículas del sistema. Se puede expresar este resultado diciendo que «la masa es aditiva».

El segundo miembro de la ecuación (8.2) puede escribirse como la derivada total respecto al tiempo de la expresión

$$\mathbf{R} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_a / \sum m_a. \quad (8.3)$$

Se puede decir que la velocidad del sistema, como conjunto, es la velocidad del punto cuyo vector de posición es (8.3); a este punto se le llama *centro de masa* del sistema.

El teorema de conservación del ímpetu para un sistema cerrado puede ser formulado estableciendo que su centro de masa está animado de un movimiento rectilíneo uniforme. En esta forma, es una generalización de la ley de la inercia, establecida en § 3, para una partícula material libre, cuyo centro de masa coincide con la misma partícula.

Cuando se estudian las propiedades mecánicas de un sistema cerrado, es natural utilizar un sistema de referencia en el cual el centro de masa esté en reposo, con lo que se prescinde del movimiento rectilíneo uniforme del conjunto del sistema.

La energía de un sistema mecánico que como conjunto está en reposo, se denomina usualmente *energía interna*  $E_i$ . En ella se incluyen la energía cinética del movimiento relativo de las partículas en el sistema y la energía potencial de su interacción. La energía total de un sistema, que como conjunto se mueve con velocidad  $V$ , se escribe:

$$E = \frac{1}{2}\mu V^2 + E_i. \quad (8.4)$$

Aunque este resultado es obvio, también se puede demostrar directamente. Las energías  $E$  y  $E'$  de un sistema mecánico en dos sistemas de referencia  $K$  y  $K'$  están ligadas por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U \\
 &= \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}_a' + \mathbf{V})^2 + U \\
 &= \frac{1}{2} \mu V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_a m_a \mathbf{v}_a' + \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a'^2 + U
 \end{aligned}$$

o bien

$$E = E' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2. \quad (8.5)$$

Esta es la expresión de la ley de la transformación de la energía al pasar de un sistema de referencia a otro; corresponde a la fórmula (8.1) para el ímpetu. Si en el sistema  $K'$  el centro de masa está en reposo, entonces  $\mathbf{P}' = 0$  y  $E' = E_i$ , y se obtiene la fórmula (8.4).

### PROBLEMA

Encontrar la ley de transformación de la acción  $S$  cuando se pasa de un sistema inercial a otro.

*Solución:* La lagrangiana, igual a la diferencia de las energías cinética y potencial, se transforma de acuerdo con una fórmula análoga a (8.5):

$$L = L' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2.$$

Integrando esta expresión con respecto al tiempo, se obtiene la ley de transformación de la acción:

$$S = S' + \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t,$$

donde  $\mathbf{R}'$  es el radio vector del centro de masa en el sistema de referencia  $K'$ .

### 9. Momento angular o cinético

Estudiemos ahora el teorema de conservación que se infiere de la *isotropía del espacio*.

Esta isotropía significa que las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no cambian en una rotación en el espacio de este sistema como conjunto. Consideremos, pues, una rotación infinitesimal del sistema, y busquemos la condición para que la lagrangiana no varíe.

Llamaremos vector de rotación infinitesimal  $\delta\phi$  al vector cuyo módulo es igual al ángulo de rotación  $\delta\phi$  y cuya dirección coincide con el eje de rotación (de tal modo que la rotación se realice según la regla del sacacorchos con respecto a la dirección de  $\delta\phi$ ).

Consideremos primero el incremento en el vector de posición correspondiente a una partícula del sistema, tomando un origen de coordenadas situado en el eje de rotación. El desplazamiento lineal del extremo del vector de posición en función del ángulo es

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \delta\phi$$

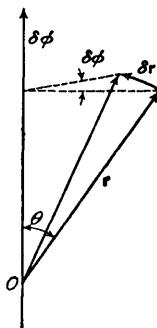


FIG. 5

(fig. 5). La dirección del vector  $\delta\mathbf{r}$  es perpendicular al plano definido por  $\mathbf{r}$  y  $\delta\phi$ , y, por tanto,

$$\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}. \quad (9.1)$$

La rotación del sistema no solamente modifica la dirección de los vectores de posición sino también las velocidades de las partículas, transformándose todos los vectores según la misma ley. El incremento de velocidad con respecto a un sistema fijo de coordenadas será, pues,

$$\delta\mathbf{v} = \delta\phi \times \mathbf{v}. \quad (9.2)$$

Llevemos estas expresiones a la condición de que la lagrangiana no varía por la rotación:

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) = 0$$

y sustituyendo, por definición, las derivadas  $\partial L / \partial \mathbf{v}_a$  por  $\mathbf{p}_a$ , y las derivadas  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$ , de acuerdo con las ecuaciones de Lagrange, por  $\dot{\mathbf{p}}_a$ ; obtenemos

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta\phi \times \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_a \cdot \delta\phi \times \mathbf{v}_a) = 0$$

o, permutando circularmente los factores y sacando  $\delta\phi$  fuera del signo suma:

$$\delta\phi \sum_a (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a) = \delta\phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0.$$

Puesto que  $\delta\phi$  es arbitrario, resulta

$$(d/dt) \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0,$$

y se concluye que en el movimiento de un sistema cerrado se conserva la magnitud vectorial

$$\mathbf{M} \equiv \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a, \quad (9.3)$$

*momento angular* (o *momento cinético*) del sistema. Igual que el ímpetu, esta magnitud es aditiva interactúen o no las partículas del sistema.

Ya no hay más integrales de movimiento que sean aditivas. En resumen, todo sistema cerrado tiene siete de tales integrales: la energía, las tres componentes del vector ímpetu y las tres componentes del vector momento angular.

Como la definición del momento angular contiene los vectores de posición de las partículas, su valor depende en general de la elección del origen de coordenadas. Si  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}'_a$  son los vectores de posición de una misma partícula con respecto a orígenes separados una distancia  $\mathbf{a}$ , estarán relacionados por  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \\ &= \sum_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{a} \times \sum_a \mathbf{p}_a \\ &= \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

De aquí se infiere que el momento angular depende de la elección del origen de coordenadas, excepto cuando el sistema como conjunto esté en reposo (es decir,  $\mathbf{P} = 0$ ). Es evidente que esta indeterminación no afecta al teorema de conservación del momento angular, puesto que en un sistema cerrado el ímpetu también se conserva.

Establezcamos igualmente la relación entre los valores del momento cinético en dos sistemas de referencia iniciales  $K$  y  $K'$ , de los cuales el segundo se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  respecto al primero. Supongamos que los orígenes de coordenadas en los sistemas  $K$  y  $K'$  coinciden en un instante dado; entonces los vectores de posición de las partículas son los mismos en los dos sistemas, y sus velocidades están relacionadas por  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Se tiene, pues:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}'_a + \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{V}.$$

La primera suma del segundo miembro es el momento angular  $\mathbf{M}'$  en el sistema  $K'$ ; usando en la segunda suma la expresión del vector de posición del centro de masa (8.3), se obtiene:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu \mathbf{R} \times \mathbf{V}. \quad (9.5)$$

Esta fórmula da la ley de transformación del momento angular cuando se pasa de un sistema de referencia a otro, correspondiente a las fórmulas (8.1) para el ímpetu y (8.5) para la energía.

Si el sistema de referencia  $K'$  es aquel para el cual el sistema está en reposo

como conjunto, entonces  $\mathbf{V}$  es la velocidad de su centro de masa y  $\mu\mathbf{V}$  su ímpetu total  $\mathbf{P}$  (respecto a  $K$ ), y:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (9.6)$$

En otras palabras, el momento angular  $\mathbf{M}$  de un sistema mecánico se compone de su «momento angular intrínseco» en un sistema de referencia en el cual está en reposo, y del momento angular  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  debido a su movimiento como conjunto.

Aunque el teorema de conservación de las tres componentes del momento angular (respecto a un origen arbitrario) es sólo válido para un sistema cerrado, el teorema de conservación puede aplicarse, de una forma más restringida, a sistemas en un campo exterior. Del razonamiento anterior, es evidente que la componente del momento angular según un eje que es eje de simetría del campo es siempre conservativa, porque las propiedades mecánicas del sistema no se alteran por una rotación alrededor de ese eje; por supuesto que aquí el momento angular debe estar definido con respecto a un punto (origen de coordenadas) situado sobre el eje.

El más importante de tales casos es el de un campo con simetría central o *campo central*, es decir, un campo en el que la energía potencial depende solamente de la distancia a un punto determinado del espacio (el centro). Es evidente que en el movimiento del sistema en un campo tal, se conserva la proyección del momento angular según cualquier eje que pase por el centro. En otras palabras, se conserva el vector momento angular  $\mathbf{M}$ , siempre que se defina no con respecto a un punto cualquiera, sino con respecto al centro del campo.

Otro ejemplo es el de un campo homogéneo en la dirección del eje  $z$ , pues en tal campo se conserva la componente  $M_z$  del momento, cualquiera que sea el punto tomado como origen.

La componente del momento angular según un eje cualquiera (por ejemplo el eje  $z$ ), se halla derivando la lagrangiana:

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad (9.7)$$

siendo la coordenada  $\phi$  el ángulo de rotación alrededor del eje  $z$ . Esto se infiere de la demostración anterior del teorema de la conservación del momento angular, pero puede verificarse con un cálculo directo. En coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$ , tenemos (sustituyendo  $x_a = r_a \cos \phi_a, y_a = r_a \sin \phi_a$ )

$$\begin{aligned} M_z &= \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) \\ &= \sum_a m_a r_a^2 \dot{\phi}_a. \end{aligned} \quad (9.8)$$

La lagrangiana, en función de estas coordenadas es

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\phi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

que, sustituida en (9.7), da la expresión (9.8).

## PROBLEMAS

1. Hallar las expresiones de las componentes cartesianas y el valor del módulo del momento angular de una partícula cuyas coordenadas cilíndricas son  $r, \phi, z$ .

*Solución:*

$$\begin{aligned} M_x &= m(r\dot{z} - z\dot{r}) \operatorname{sen} \phi - mrz\dot{\phi} \cos \phi, \\ M_y &= -m(r\dot{z} - z\dot{r}) \cos \phi - mrz\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi, \\ M_z &= mr^2\dot{\phi}, \\ M^2 &= m^2r^2\dot{\phi}^2(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2. \end{aligned}$$

2. La misma pregunta en coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$ .

*Solución:*

$$\begin{aligned} M_x &= -mr^2(\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi), \\ M_y &= mr^2(\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \phi), \\ M_z &= mr^2\dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta, \\ M^2 &= m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta). \end{aligned}$$

3. Indicar las componentes del ímpetu **P** y del momento cinético **M** que se conservan en un movimiento dentro de los siguientes campos:

- a) Campo plano homogéneo e indefinido.

*Solución:*  $P_x, P_y, M_z$  (siendo el plano indefinido el  $x, y$ ).

- b) Campo cilíndrico homogéneo indefinido.

*Solución:*  $M_z, P_z$  (el eje del cilindro:  $z$ ).

- c) Campo prismático homogéneo indefinido.

*Solución:*  $P_z$  (aristas del prisma paralelas al eje  $z$ ).

- d) Campo debido a dos puntos.

*Solución:*  $M_z$  (los puntos están situados sobre el eje  $z$ ).

- e) Campo de un semiplano homogéneo indefinido.

*Solución:*  $P_y$  (siendo el semiplano indefinido la parte del plano  $x, y$  limitada por el eje  $y$ ).

- f) Campo de un cono homogéneo.

*Solución:*  $M_z$  (eje del cono:  $z$ ).

- g) Campo de un toro circular homogéneo.

*Solución:*  $M_z$  (eje del toro:  $z$ ).

- h) Campo de una hélice cilíndrica homogénea indefinida.

*Solución:* La lagrangiana no cambia por un giro de ángulo  $\delta\phi$  alrededor del eje de la hélice (sea éste el eje  $z$ ) y de una traslación simultánea a lo largo de dicho eje en una distancia  $h\delta\phi/2\pi$  (siendo  $h$  el paso de la hélice). Por tanto,

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta z \frac{\partial L}{\partial z} + \delta\phi \frac{\partial L}{\partial \phi} = \delta\phi(hP_z/2\pi + M_z) \\ M_z + hP_z/2\pi &= \text{constant.} \end{aligned}$$

### § 10. Analogías mecánicas

La multiplicación de la función de Lagrange por una constante no afecta evidentemente a las ecuaciones del movimiento. Este hecho (ya mencionado en § 2) hace posible inferir, en muchos casos importantes, algunas conclusiones sobre las propiedades del movimiento, sin llegar a integrar las ecuaciones.

Sea, por ejemplo, el caso en que la energía potencial es una función homogénea de las coordenadas, es decir, satisface la condición:

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{r}_2, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (10.1)$$

siendo  $\alpha$  una constante cualquiera y  $k$  el grado de homogeneidad de la función.

Efectuemos una transformación según la cual las coordenadas se multiplican por un factor  $\alpha$  y el tiempo por un factor  $\beta$ :

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \alpha \mathbf{r}_a, t \rightarrow \beta t.$$

Todas las velocidades  $\mathbf{v}_a = d\mathbf{r}_a/dt$  quedarán multiplicadas por el factor  $\alpha/\beta$ , y la energía cinética por el factor  $\alpha^2/\beta^2$ . La energía potencial resultará multiplicada por el factor  $\alpha^k$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son tales que:

$$\alpha^2/\beta^2 = \alpha^k, \text{ es decir } \beta = \alpha^{1-k},$$

entonces, el resultado de esta transformación será multiplicar la lagrangiana por el factor constante  $\alpha^k$ , o sea, quedan inalteradas las ecuaciones del movimiento.

Un cambio de todas las coordenadas de las partículas por un mismo factor significa pasar de unas ciertas trayectorias a otras, geométricamente semejantes a las primeras, pero de tamaño diferente. Se llega así a la siguiente conclusión: si la energía potencial de un sistema es una función homogénea de grado  $k$  de las coordenadas (cartesianas), las ecuaciones del movimiento admiten una serie de trayectorias geométricamente semejantes; los tiempos del movimiento entre puntos correspondientes de las trayectorias estarán en la relación:

$$t'/t = (l'/l)^{1-k}, \quad (10.2)$$

siendo  $l'/l$  el cociente entre las dimensiones lineales de las dos trayectorias.

Igual que los tiempos, los valores de las distintas magnitudes mecánicas en puntos correspondientes de las trayectorias y en instantes correspondientes estarán en una relación que será una cierta potencia de  $l'/l$ . Así, para las velocidades, las energías y los momentos angulares, se tiene:

$$v'/v = (l'/l)^{1-k}, \quad E'/E = (l'/l)^k, \quad M'/M = (l'/l)^{1+k}. \quad (10.3)$$

He aquí algunos ejemplos.

Como se verá más adelante, en el caso de pequeñas oscilaciones, la energía potencial es una función cuadrática de las coordenadas ( $k = 2$ ). De la fórmula (10.2) se deduce que el período de las oscilaciones es independiente de su amplitud.

En un campo de fuerzas homogéneo la energía potencial es una función lineal de las coordenadas [véase (5.8)], es decir,  $k = 1$ . De (10.2) se tiene

$$t'/t = \sqrt{(l'/l)}.$$

Resulta así, por ejemplo, en la caída de un cuerpo en el campo de gravedad, los cuadrados de los tiempos de caída están en la misma relación que las alturas iniciales.

En la atracción newtoniana de dos masas o en la interacción culombiana de dos cargas, la energía potencial es inversamente proporcional a la distancia que las separa, es decir, es una función homogénea de grado  $k = -1$ . En este caso:

$$t'/t = (l'/l)^{3/2},$$

y así se puede decir que los cuadrados de los tiempos de revolución son proporcionales a los cubos de las dimensiones lineales de las órbitas (*tercera ley de Kepler*).

Si el movimiento de un sistema, cuya energía potencial es una función homogénea de las coordenadas, se realiza en una región limitada del espacio, existe una relación muy sencilla entre los valores medios, en el tiempo, de las energías potencial y cinética; a esta relación se la denomina *teorema del virial*.

Como la energía cinética  $T$  es una función cuadrática de las velocidades, por el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas, tendremos

$$\sum_a \mathbf{v}_a \cdot \partial T / \partial \mathbf{v}_a = 2T,$$

o, introduciendo los ímpetus  $\partial T / \partial \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$ :

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (10.4)$$

Tomemos los valores medios en el tiempo de esta igualdad. El valor medio de una función cualquiera del tiempo  $f(t)$  se define como:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Es fácil ver que si  $f(t)$  es la derivada respecto al tiempo  $f(t) = dF(t)/dt$  de una función  $F(t)$  acotada (es decir, que no toma valores infinitos), su valor medio se anula. En efecto,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Supongamos que el sistema se mueve en una región finita del espacio y con velocidades finitas. Entonces la magnitud  $\sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a$  es finita, y el valor medio del

primer término del segundo miembro de la ecuación (10.4) se anula. Sustituimos, de acuerdo con las ecuaciones de Newton,  $\dot{\mathbf{p}}_a$  por  $-\partial U/\partial \mathbf{r}_a$ , y obtenemos<sup>1</sup>

$$2\mathbf{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \partial U / \partial \mathbf{r}_a}. \quad (10.5)$$

Si la energía potencial es una función homogénea de grado  $k$  de los radios vectores  $\mathbf{r}_a$ , entonces, por el teorema de Euler, la ecuación (10.5) da la relación buscada:

$$2\mathbf{T} = k\bar{U}. \quad (10.6)$$

Puesto que  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , la relación (10.6) se puede escribir:

$$\bar{U} = 2E/(k+2), \quad \mathbf{T} = kE/(k+2), \quad (10.7)$$

que expresan  $\bar{U}$  y  $\bar{T}$  en función de la energía total del sistema.

En particular, para pequeñas oscilaciones ( $k = 2$ ), se tiene:

$$\mathbf{T} = \bar{U},$$

es decir, que los valores medios de las energías cinética y potencial son iguales. Para una interacción newtoniana ( $k = -1$ ):

$$2\mathbf{T} = -\bar{U},$$

y  $E = -\bar{T}$ , de acuerdo con el hecho de que en tal interacción; el movimiento tiene lugar en una región finita del espacio, sólo si la energía total es negativa (ver § 15).

## PROBLEMAS

1. Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas de diferentes masas pero igual energía potencial.

*Solución:*

$$t'/t = \sqrt{(m'/m)}.$$

2. Hallar el cociente de los tiempos en la misma trayectoria para partículas que tienen la misma masa, pero su energía potencial difiere en un factor constante.

*Solución:*

$$t'/t = \sqrt{(U/U')}.$$

<sup>1</sup> La expresión del segundo miembro de (10.5) se llama a veces virial del sistema.

## CAPÍTULO III

### INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

#### § 11. Movimiento lineal

Al movimiento de un sistema que tiene un grado de libertad se le llama lineal. La forma más general de la lagrangiana de tal sistema, colocado en condiciones exteriores constantes, es:

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q), \quad (11.1)$$

donde  $a(q)$  es una función de la coordenada generalizada  $q$ . En particular, si  $q$  es una coordenada cartesiana (por ejemplo,  $x$ )

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x). \quad (11.2)$$

Las ecuaciones del movimiento correspondientes a estas lagrangianas se integran de una forma general. Ni siquiera es necesario escribir la ecuación del movimiento, basta partir de la integral del movimiento que expresa el teorema de la conservación de la energía. Para la lagrangiana (11.2) se tiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E.$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden, que se integra por separación de variables. Puesto que:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2[E - U(x)]/m},$$

resulta:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{2}m\right)} \int \frac{dx}{\sqrt{[E - U(x)]}} + \text{cte.} \quad (11.3)$$

Las dos constantes arbitrarias en la solución de la ecuación del movimiento están aquí representadas por la energía total  $E$  y la constante de integración  $C$ .

Puesto que la energía cinética es una magnitud esencialmente positiva, la energía total es siempre mayor que la energía potencial, es decir, que el movimiento tiene lugar solamente en las regiones del espacio en que  $U(x) < E$ . Su-

pongamos, por ejemplo, que la función  $U(x)$  es de la forma representada en la figura 6; si dibujamos una recta horizontal correspondiente al valor dado de la energía total, encontramos inmediatamente las regiones en que es posible el movimiento. Así, en el caso de la figura 6, el movimiento no puede realizarse más que en la región  $AB$  o en la región situada a la derecha de  $C$ .

Los puntos en que la energía potencial es igual a la energía total

$$U(x) = E, \quad (11.4)$$

determinan los límites del movimiento. Son los *puntos de retorno*, puesto que allí la velocidad se anula. Si la región del movimiento está limitada por dos de estos puntos, el movimiento tiene lugar en una región limitada del espacio, y se dice que es *finito*. Si la región del movimiento está limitada en un solo lado, o en ninguno, entonces el movimiento es *infinito*, y la partícula se aleja hacia el infinito.

Un movimiento lineal finito se llama oscilatorio: La partícula efectúa un movimiento que se repite periódicamente entre dos puntos (en la figura 6 en el *pozo de potencial*  $AB$  entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$ ). Teniendo en cuenta la propiedad general de reversibilidad (§ 5), el tiempo transcurrido en ir de  $x_1$  a  $x_2$  es igual al tiempo de volver de  $x_2$  a  $x_1$ . Por lo tanto, el período  $T$ , es decir, el tiempo durante el cual la partícula va de  $x_1$  a  $x_2$  y vuelve, es igual al doble del tiempo necesario para ir de  $x_1$  a  $x_2$ , por (11.3):

$$T(E) = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{[E - U(x)]}}, \quad (11.5)$$

donde los límites  $x_1$  y  $x_2$  son las raíces de la ecuación (11.4) para el valor dado de  $E$ . Esta fórmula determina el período del movimiento en función de la energía total de la partícula.

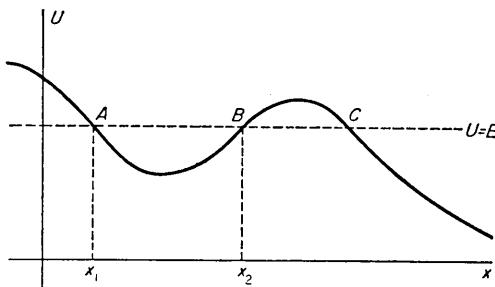


FIG. 6

### PROBLEMAS

- Determinar el período de las oscilaciones de un péndulo matemático plano (partícula de masa  $m$  suspendida por un hilo de longitud  $l$  en un campo gravitatorio) en función de su amplitud.

*Solución:* La energía del péndulo es:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi = -mgl \cos \phi_0,$$

donde  $\phi$  es el ángulo del hilo con la vertical, y  $\phi_0$  el valor máximo de  $\phi$ .

Calculando el período como el tiempo empleado en ir desde  $\phi = 0$  a  $\phi = \phi_0$ , multiplicado por cuatro, encontramos:

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{(\cos \phi - \cos \phi_0)}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{(\sin^2 \frac{1}{2}\phi_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\phi)}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\sin \xi = \sin \frac{1}{2}\phi / \sin \frac{1}{2}\phi_0$  esta integral se convierte en

$$T = 4\sqrt{(l/g)}K(\sin \frac{1}{2}\phi_0),$$

donde

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \xi)}}$$

que es una integral elíptica completa de primera clase. Si  $\sin \frac{1}{2}\phi_0 \approx \frac{1}{2}\phi_0 \ll 1$  (pequeñas oscilaciones) el desarrollo en serie de la función  $[K(k)]$  da:

$$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}(1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \dots);$$

el primer término de este desarrollo corresponde a la conocida fórmula elemental.

2. Determinar el período de oscilación, en función de la energía, del movimiento de una partícula de masa  $m$  en un campo cuya energía potencia es:

a)  $U = A|x|^n$ ,

*Solución:*

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{(2m)} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{(E-Ax^n)}} \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $y^n = u$ , la integral se reduce a una función beta que se expresa mediante funciones  $\Gamma$ :

$$T = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \cdot \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(\frac{1}{n} + 1/n)}.$$

La relación entre  $T$  y  $E$  corresponde a la ley de analogía mecánica (10.2) y (10.3).

b)  $U = -U_0/\cosh^2\alpha x$ ,  $-U_0 < E < 0$ ,

Solución:

$$T = (\pi/\alpha)\sqrt{(2m/|E|)}.$$

c)  $U = U_0 \operatorname{tg}^2\alpha x$ .

Solución:

$$T = (\pi/\alpha)\sqrt{[2m/(E+U_0)]}.$$

## § 12. Determinación de la energía potencial en función del período de las oscilaciones

Consideremos de qué modo puede deducirse la energía potencial  $U(x)$  de un campo en el cual una partícula está oscilando, si el período de oscilación  $T$  es una función conocida de la energía  $E$ . Desde el punto de vista matemático, se trata de resolver la ecuación integral (11.5), considerando  $U(x)$  como función desconocida y  $T(E)$  como conocida.

Supondremos primero que la función buscada  $U(x)$  tiene solamente un mínimo en la región del espacio considerada, dejando de lado la cuestión de saber si pueden existir soluciones de la ecuación integral que no satisfagan esta condición. Para simplificar, escogamos como origen de coordenadas la posición del mínimo de la energía potencial y tomemos este mínimo de energía como cero (fig. 7).

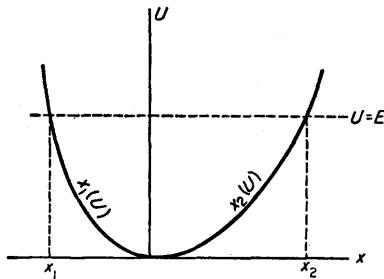


FIG. 7

Transformemos la integral (11.5) considerando la coordenada  $x$  como una función de  $U$ . La función  $x(U)$  no es unívoca: a cada valor de la energía potencial corresponden dos valores distintos de  $x$ . Consecuentemente, la integral (11.5), en la cual sustituimos  $dx$  por  $(dx/dU) dU$  se convierte en la suma de dos integrales: una de  $x = x_1$  a  $x = 0$  y la otra de  $x = 0$  a  $x = x_2$ ; llamaremos a la función  $x(U)$  en estos dos dominios  $x = x_1(U)$  y  $x = x_2(U)$ , respectivamente.

Los límites de integración con respecto a  $U$  serán evidentemente  $E$  y  $0$ , de modo que se tiene

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{(2m)} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{(E-U)}} + \sqrt{(2m)} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{(E-U)}} \\ &= \sqrt{(2m)} \int_0^E \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{(E-U)}}. \end{aligned}$$

Si se dividen los dos miembros de esta ecuación por  $\sqrt{\alpha - E}$ , siendo  $\alpha$  un parámetro, y se integra con respecto a  $E$  entre 0 y  $\alpha$ :

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{(\alpha-E)}} = \sqrt{(2m)} \int_0^\alpha \int_0^E \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU dE}{\sqrt{[(\alpha-E)(E-U)]}}$$

o, cambiando el orden de las integraciones:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{(\alpha-E)}} = \sqrt{(2m)} \int_0^\alpha \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{[(\alpha-E)(E-U)]}}.$$

El cálculo de la integral con respecto a  $E$  es elemental y su valor es  $\pi$ . La integración con respecto a  $U$  resulta entonces trivial y da:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{(\alpha-E)}} = \pi \sqrt{(2m)} [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)],$$

[ya que  $x_2(0) = x_1(0) = 0$ ]. Sustituyendo ahora  $\alpha$  por  $U$ , se obtiene finalmente:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi \sqrt{(2m)}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{(U-E)}}. \quad (12.1)$$

Así, conocida la función  $T(E)$ , se determina la diferencia  $x_2(U) - x_1(U)$ . Las funciones  $x_2(U)$  y  $x_1(U)$  quedan indeterminadas; esto significa que existe una infinidad de curvas  $U = U(x)$  que conducen a la relación dada entre el período y la energía, y que difieren unas de otras de manera tal que la diferencia entre los valores de  $x$  correspondientes a cada valor de  $U$  sea la misma para todas las curvas.

La indeterminación de la solución desaparece si se impone la condición de que la curva  $U = U(x)$  sea simétrica con respecto al eje  $U$ , es decir, que:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

En este caso, la fórmula (12.1) da para  $x(U)$  una expresión única

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2m)}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{(U-E)}}. \quad (12.2)$$

### § 13. Masa reducida

El problema de gran importancia, cual es el del movimiento de dos partículas interactuantes (*problema de los dos cuerpos*) admite una solución general completa.

Para resolver este problema vamos primeramente a demostrar que puede simplificarse considerablemente descomponiendo el movimiento del sistema en dos movimientos: uno el del centro de masa y otro el movimiento de las partículas con respecto al centro de masa.

La energía potencial de interacción de las partículas depende únicamente de la distancia entre ellas, es decir, del módulo de la diferencia entre sus vectores de posición. La lagrangiana del sistema será, pues,

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (13.1)$$

Sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  el vector distancia que separa las dos partículas, y coloquemos el origen de coordenadas en el centro de masa, lo que da

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0.$$

De estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{r}_1 = m_2\mathbf{r}/(m_1 + m_2), \quad \mathbf{r}_2 = -m_1\mathbf{r}/(m_1 + m_2). \quad (13.2)$$

Llevando estas expresiones a (13.1):

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r), \quad (13.3)$$

en la que

$$m = m_1m_2/(m_1 + m_2) \quad (13.4)$$

se llama *masa reducida*. La función (13.3) es formalmente idéntica a la lagrangiana de una partícula de masa  $m$  que se mueve en un campo exterior  $U(r)$  simétrico con respecto al origen de coordenadas fijo.

De esta manera, el problema del movimiento de dos partículas interactuantes se reduce al movimiento de una partícula en un campo exterior dado  $U(r)$ . De la solución  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  de este problema, se obtienen las trayectorias  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  de cada una de las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , tomadas separadamente con respecto a su centro de masa común, por medio de las fórmulas (13.2).

## PROBLEMA

Un sistema está compuesto por una partícula de masa  $M$  y  $n$  partículas de masa  $m$ . Eliminar el movimiento del centro de masa y reducir el problema al del movimiento de las  $n$  partículas.

*Solución:* Sea  $\mathbf{R}$  el vector de posición de la partícula de masa  $M$  y  $\mathbf{R}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) los vectores de posición de las partículas de masa  $m$ . Introduzcamos las distancias de la partícula  $M$  a las partículas  $m$

$$\mathbf{r}_a \equiv \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

y tomemos el origen de coordenadas en el centro de masa:

$$M\ddot{\mathbf{R}} + m\sum \mathbf{r}_a = 0.$$

De estas ecuaciones resulta:

$$\mathbf{R} = -m\sum \mathbf{r}_a / (M + nm), \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a.$$

Sustituyendo estas expresiones en la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m\sum \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U$$

obtenemos

$$L = \frac{1}{2}m \sum_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \frac{m^2}{2(M + nm)} \left( \sum_a \mathbf{r}_a \right)^2 - U.$$

La energía potencial depende solamente de las distancias entre las partículas y puede representarse como una función de los vectores  $\mathbf{r}_a$ .

### § 14. Movimiento en un campo central

Al reducir el «problema de los dos cuerpos» al del movimiento de uno solo, hemos llegado a la siguiente cuestión: determinar el movimiento de una partícula en un campo exterior cuya energía potencial dependa solamente de la distancia  $r$  a un punto fijo dado; a tal campo se le llama *central*. La fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = -\partial U(r)/\partial \mathbf{r} = -(dU/dr)\mathbf{r}/r;$$

su módulo es también una función de  $r$  solamente y su dirección es, en cada punto, la del vector de posición.

Como se ha visto en § 9, en el movimiento en un campo central, el momento angular del sistema con respecto al centro del campo se conserva. El momento angular para una partícula es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Puesto que  $\mathbf{M}$  es perpendicular a  $\mathbf{r}$ , la constancia de  $\mathbf{M}$  significa que, durante todo el movimiento, el vector de posición de la partícula permanece en un mismo plano, perpendicular a  $\mathbf{M}$ .

Entonces la trayectoria de una partícula en un campo central está contenida en un plano. Usando coordenadas polares  $r, \phi$ , en este plano, se puede escribir la lagrangiana en la forma [véase (4.5)]:

$$L = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r); \quad (14.1)$$

Esta función no contiene explícitamente la coordenada  $\phi$ . A toda coordenada  $q_i$ , que no aparece explícitamente en la lagrangiana se le llama *cíclica*. La ecuación de Lagrange relativa a una coordenada cíclica:

$$(d/dt) \partial L / \partial \dot{q}_i = \partial L / \partial q_i = 0,$$

es decir, que el ímpetu generalizado correspondiente  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  constituye una integral del movimiento. Esto conduce a una considerable simplificación del problema de la integración de las ecuaciones del movimiento cuando hay coordenadas cíclicas.

En el presente caso, el ímpetu generalizado

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

coincide con el momento angular  $M_z = M$  [véase (9.6)], de manera que volvemos a la ley de conservación del momento angular ya conocida.

$$M = mr^2\dot{\phi} = \text{cte.} \quad (14.2)$$

Esta ley tiene una sencilla interpretación geométrica en el movimiento plano de una partícula en un campo central. La expresión  $\frac{1}{2}r \cdot r d\phi$  es el área del sector formado por dos vectores de posición infinitamente próximos y el elemento de arco de la trayectoria (fig. 8). Designando esta área por  $df$ , se puede representar el momento angular de la partícula como:

$$M = 2mf, \quad (14.3)$$

donde la derivada  $f$  es la *velocidad areolar*. La conservación del momento angular implica, pues, la constancia de la velocidad areolar: en intervalos de tiempos iguales, los vectores de posición de la partícula móvil barren áreas iguales (*segunda ley de Kepler*<sup>1</sup>).

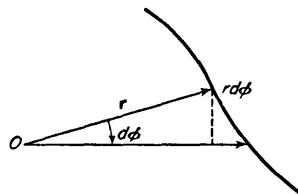


FIG. 8

<sup>1</sup> El teorema de conservación del momento angular para una partícula en un campo central se llama también *ley de las áreas*.

Para obtener la solución completa del problema del movimiento de una partícula en un campo central es más sencillo partir de los teoremas de conservación de la energía y del momento angular, sin escribir las ecuaciones del movimiento. Expresando  $\dot{\phi}$  en función de  $M$  de (14.2) y llevando este valor a la expresión de la energía, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}M^2/mr^2 + U(r). \quad (14.4)$$

Por lo tanto,

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left\{ \frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2} \right\}} \quad (14.5)$$

y separando las variables e integrando:

$$t = \int dr / \sqrt{\left\{ \frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2} \right\}} + \text{cte.} \quad (14.6)$$

Si escribimos ahora (14.2) en la forma

$$d\phi = M dt/mr^2,$$

y sustituimos  $dt$  de (14.5) e integramos, resulta:

$$\phi = \int \frac{M dr/r^2}{\sqrt{\{2m[E - U(r)] - M^2/r^2\}}} + \text{cte.} \quad (14.7)$$

Las fórmulas (14.6) y (14.7) dan la solución general del problema propuesto. La segunda define la relación entre  $r$  y  $\phi$ , es decir, la ecuación de la trayectoria. La fórmula (14.6) nos da la distancia  $r$  de la partícula al centro como una función implícita del tiempo. Notemos que el ángulo  $\phi$  varía siempre monótonamente con el tiempo, ya que (14.2) muestra que  $\dot{\phi}$  nunca cambia de signo.

La expresión (14.4) indica que la parte radial del movimiento puede considerarse como un movimiento lineal en un campo cuya «energía potencial efectiva» es:

$$U_{\text{ef}} = U(r) + M^2/2mr^2. \quad (14.8)$$

La magnitud  $M^2/2mr^2$  es la *energía centrífuga*. Los valores de  $r$  para los cuales

$$U(r) + M^2/2mr^2 = E \quad (14.9)$$

determinan los límites de la región de movimiento con respecto a la distancia al centro. Cuando la ecuación (14.9) se satisface, la velocidad radial  $\dot{r}$  se anula. Esto no significa que la partícula esté en reposo (como en un verdadero movimiento lineal) pues la velocidad angular  $\dot{\phi}$  no se anula. La ecuación  $\dot{r} = 0$  indica

un «punto de retorno» de la trayectoria, en que la función  $r(t)$  se convierte de creciente en decreciente o viceversa.

Si la región de posible variación de  $r$  está limitada solamente por la condición  $r \geq r$ , el movimiento de la partícula es infinito: su trayectoria comienza y termina en el infinito.

Si el dominio de variación de  $r$  tiene dos límites  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$ , el movimiento es finito, y la trayectoria está contenida enteramente en el interior de una corona limitada por las circunferencias  $r = r_{\max}$  y  $r = r_{\min}$ . Sin embargo, esto no significa que la trayectoria sea necesariamente una curva cerrada. Durante el tiempo que  $r$  tarda en variar de  $r_{\max}$  a  $r_{\min}$ , y otra vez a  $r_{\max}$ , el vector de posición gira un ángulo  $\Delta\phi$  que, de acuerdo con (14.7), vale

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{[2m(E-U)-M^2/r^2]}}. \quad (14.10)$$

La condición para que la trayectoria sea cerrada es que este ángulo sea una fracción racional de  $2\pi$ , es decir, que  $\Delta\phi = 2\pi m/n$  siendo  $m$  y  $n$  enteros. En efecto, entonces después de  $n$  períodos, el vector de posición de la partícula habrá hecho  $m$  revoluciones completas y volverá a tomar su valor inicial, es decir, la trayectoria será cerrada.

Tales casos son, sin embargo, excepcionales, y cuando la forma de  $U(r)$  es arbitraria, el ángulo  $\Delta\phi$  no es una fracción racional de  $2\pi$ . Por tanto, la trayectoria de una partícula que ejecuta un movimiento finito no es, en general, cerrada. Pasa por las distancias máxima y mínima una infinidad de veces (como, por ejemplo, la trayectoria de la figura 9), y al cabo de un tiempo infinito cubre toda la corona comprendida entre las dos circunferencias límites.

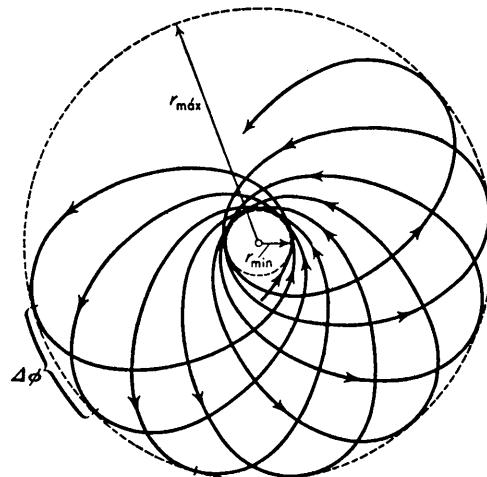


FIG. 9

Solamente hay dos tipos de campos centrales en los cuales todos los movimientos finitos se realizan en trayectorias cerradas. Son aquellos en los que la energía potencial de la partícula varía como  $1/r$  o como  $r^2$ . El primero de estos casos se discute en § 15, y el segundo corresponde a lo que se llama un *oscilador espacial* (véase problema 3 del § 23).

En un punto de retorno, la raíz cuadrada de (14.5) y, por lo tanto, los integrandos de (14.6) y (14.7) cambian de signo. Si el ángulo  $\phi$  se mide a partir de la dirección del vector de posición del punto de retorno, los arcos de trayectoria a uno y otro lado de este punto difieren solamente en el signo de  $\phi$  para cada valor de  $r$ , es decir, la trayectoria es simétrica con respecto a la línea  $\phi = 0$ . Partiendo, por ejemplo, de un punto  $r = r_{\max}$ , la partícula atraviesa un arco de trayectoria hasta un punto  $r = r_{\min}$ , después del cual hay una porción de trayectoria dispuesta simétricamente hasta el próximo punto en que  $r = r_{\max}$ , etcétera, o sea, que toda la trayectoria se obtiene repitiendo un ir y venir los mismos arcos. Esto se aplica también a las trayectorias infinitas formadas por dos ramas simétricas que van del punto de retorno  $r = r_{\min}$  al infinito.

La existencia de una energía centrífuga (cuando  $M \neq 0$ ) que tiende a infinito como  $1/r^2$  cuando  $r \rightarrow 0$ , conduce generalmente a la imposibilidad de que la partícula alcance el centro del campo, aun cuando sea un centro de atracción. La «caída» de una partícula en el centro sólo es posible si la energía potencial tiende lo suficientemente rápida a  $-\infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ . De la desigualdad

$$\frac{1}{2}mr^2 = E - U(r) - M^2/2mr^2 > 0,$$

o

$$r^2U(r) + M^2/2m < Er^2,$$

resulta que  $r$  puede tomar valores que tienden a cero solamente si

$$[r^2U(r)]_{r \rightarrow 0} < -M^2/2m, \quad (14.11)$$

es decir, que  $U(r)$  debe tender a  $-\infty$  o bien como  $-a/r^2$  siendo  $a > M^2/2m$ , o bien, proporcionalmente a  $-1/r^n$  siendo  $n > 2$ .

## PROBLEMAS

1. Integrar las ecuaciones del movimiento de un *péndulo esférico* (partícula de masa  $m$  que se mueve en la superficie de una esfera de radio  $l$  en el campo de la gravedad).

*Solución:* En coordenadas esféricas, con origen en el centro de la esfera y eje polar dirigido verticalmente hacia abajo, la lagrangiana del péndulo es:

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + mgl \cos \theta.$$

La coordenada  $\phi$  es cíclica, por tanto se conserva el ímpetu generalizado  $p_\phi$ , que coincide con la componente según el eje  $z$  del momento angular:

$$ml^2\dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta = M_z = \text{cte.} \quad (1)$$

La energía es:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) - mgl \cos\theta \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_z^2/ml^2 \operatorname{sen}^2\theta - mgl \cos\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Despejando  $\dot{\theta}$  y separando variables, se obtiene,

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2[E - U_{ef}(\theta)]/ml^2}}, \quad (3)$$

donde la «energía potencial efectiva» es:

$$U_{ef}(\theta) = \frac{1}{2}M_z^2/ml^2 \operatorname{sen}^2\theta - mgl \cos\theta.$$

De (1), para el ángulo  $\phi$ , se deduce:

$$\phi = \frac{M_z}{l\sqrt{(2m)}} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta \sqrt{[E - U_{ef}(\theta)]}}. \quad (4)$$

Las integrales (3) y (4) se reducen a integrales elípticas de primera y tercera especie, respectivamente.

La región de  $\dot{\theta}$  en que tiene lugar el movimiento está definida por la condición  $E > U_{ef}$ , y sus límites por la ecuación  $E = U_{ef}$ . Esta última es una ecuación de tercer grado en  $\cos\theta$ , que tiene dos raíces en el intervalo comprendido entre  $-1$  y  $+1$ ; estas raíces determinan la posición de dos circunferencias paralelas sobre la esfera, entre las que está comprendida toda la trayectoria.

2. Integrar las ecuaciones del movimiento de una partícula que se mueve sobre la superficie de un cono (de ángulo en el vértice  $2\alpha$ ), colocado verticalmente con el vértice hacia abajo en el campo de la gravedad.

*Solución:* En coordenadas esféricas, con origen en el vértice del cono y eje polar dirigido verticalmente hacia arriba, la lagrangiana es

$$\frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha) - mgr \cos\alpha.$$

La coordenada  $\phi$  es cíclica, de modo que se conserva la magnitud

$$M_z = mr^2\dot{\phi} \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Energía:

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}M_z^2/mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha + mgr \cos\alpha.$$

De la misma manera que en el problema n.<sup>o</sup> 1 se tiene:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dr}{\sqrt{2[E - U_{ef}(r)]/m}}, \\ \phi &= \frac{M_z}{\sqrt{(2m)\operatorname{sen}^2\alpha}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{[E - U_{ef}(r)]}}, \\ U_{ef}(r) &= \frac{M_z^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + mgr \cos\alpha. \end{aligned}$$

La condición  $E = U_{ef}(r)$  es (para  $M_z \neq 0$ ) una ecuación de tercer grado en  $r$  que tiene dos raíces positivas; estas raíces determinan la posición de dos circunferencias horizontales sobre la superficie del cono, entre las cuales está comprendida la trayectoria.

3. Integrar las ecuaciones del movimiento de un péndulo plano de masa  $m_2$ , cuyo punto de suspensión (de masa  $m_1$ ) puede desplazarse en el mismo plano sobre una recta horizontal (véase fig. 2).

*Solución:* En la lagrangiana obtenida en el problema 2 del § 5, la coordenada  $x$  es cíclica. Se conserva, pues, el ímpetu generalizado  $P_x$  que es la componente horizontal del ímpetu total del sistema:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi = \text{cte.} \quad (1)$$

Puede siempre considerarse que el sistema está en reposo como conjunto; entonces  $\text{cte.} = 0$ , y la integración de la ecuación (1) da:

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin \phi = \text{cte.} \quad (2)$$

relación que expresa el hecho de que el centro de masa del sistema no se mueve horizontalmente. Usando (1) se obtiene la energía en la forma

$$E = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \phi \right) - m_2 g l \cos \phi. \quad (3)$$

de donde

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \phi}{E + m_2 g l \cos \phi}} d\phi.$$

Expresando las coordenadas  $x_2 = x + l \sin \phi$ ,  $y_2 = l \cos \phi$  de la partícula  $m_2$  en función de  $\phi$  por medio de (2) obtenemos que su trayectoria es un arco de elipse de semieje horizontal  $l m_1 / (m_1 + m_2)$  y de semieje vertical  $l$ . Cuando  $m_1 \rightarrow \infty$ , volvemos al péndulo matemático, que oscila en un arco de circunferencia.

### § 15. El problema de Kepler

Un ejemplo importante de campo central es aquel en el que la energía potencial es inversamente proporcional a  $r$ , y, consecuentemente, la fuerza será inversamente proporcional a  $r^2$ . Este es el caso del campo gravitatorio de Newton y el de interacción electrostática de Coulomb; el primero es un campo de atracción y el segundo puede ser de atracción o de repulsión.

Consideremos primero un campo de atracción, en el cual:

$$U = -\alpha/r \quad (15.1)$$

siendo la constante  $\alpha$  positiva. La energía potencial «efectiva»

$$U_{\text{ef}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (15.2)$$

es de la forma representada en la figura 10. Cuando  $r \rightarrow 0$ ,  $U_{\text{ef}}$  tiende a  $+\infty$ , y cuando  $r \rightarrow \infty$ , tiende a cero desde valores negativos; para  $r = M^2/am$  pasa por un mínimo, igual a

$$U_{\text{ef}, \min} = -m\alpha^2/2M^2. \quad (15.3)$$

De la representación gráfica resulta evidente que para  $E > 0$  el movimiento será infinito, y finito para  $E < 0$ .

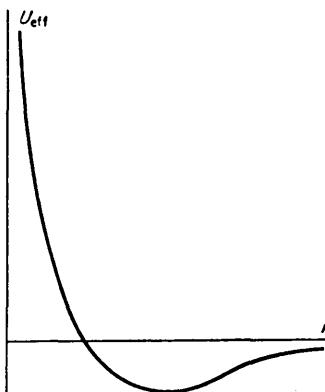


FIG. 10

La forma de la trayectoria está dada por la fórmula general (14.7). Sustituyendo en ella  $U = -a/r$  y efectuando una integración elemental, se obtiene

$$\phi = \cos^{-1} \frac{(M/r) - (m\alpha/M)}{\sqrt{\left(2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}\right)}} + \text{cte.}$$

Tomando el origen de  $\phi$  tal que la constante sea cero, y haciendo

$$p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{[1 + (2EM^2/m\alpha^2)]}, \quad (15.4)$$

se puede escribir la ecuación de la trayectoria en la forma

$$p/r = 1 + e \cos \phi. \quad (15.5)$$

Esta es la ecuación de una sección cónica con uno de sus focos en el origen de coordenadas;  $p$  y  $e$  se llaman respectivamente *parámetro* y *excentricidad* de la órbita. La elección del origen de  $\phi$  es tal, como se ve en (15.5), que el punto para el cual  $\phi = 0$  es el más próximo al centro (este punto se llama *perihelio* de la órbita).

En el problema equivalente de dos partículas interactuantes según la ley (15.1), la órbita de cada una de las partículas es una sección cónica, con uno de los focos en el centro de masa del sistema.

De (15.4) resulta que si  $E < 0$ , la excentricidad  $e < 1$ , es decir, que la órbita es una elipse (fig. 11) y el movimiento es finito, de acuerdo con lo que se ha dicho al principio del tema. Según fórmulas de geometría analítica los ejes mayor y menor de la elipse son:

$$a = p/(1-e^2) = \alpha/2|E|, \quad b = p/\sqrt{1-e^2} = M/\sqrt{2m|E|}. \quad (15.6)$$

El menor valor posible de la energía es (15.3) y entonces se tiene  $e = 0$ , es decir, que la elipse se convierte en una circunferencia. Conviene observar que el semieje mayor de la elipse depende solamente de la energía de la partícula, y no de

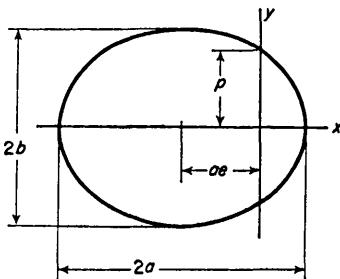


FIG. 11

su momento angular. Las distancias máxima y mínima al centro del campo (foco de la elipse) son

$$r_{\min} = p/(1+e) = a(1-e), \quad r_{\max} = p/(1-e) = a(1+e). \quad (15.7)$$

Estas expresiones, con  $a$  y  $e$  dados en (15.6) y (15.4), podían, por supuesto, obtenerse directamente, como raíces de la ecuación  $U_{ef}(r) = E$ .

El período de revolución  $T$  en una órbita elíptica se determina fácilmente usando el teorema de conservación del momento angular en la forma de la «ley de las áreas» (14.3). Integrando esta ecuación con respecto al tiempo de cero a  $T$ , se tiene:

$$2mf = TM$$

donde  $f$  es el área de la órbita. Para una elipse  $f = \pi ab$ , y con ayuda de las fórmulas (15.6) resulta:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi a^{3/2} \sqrt{(m/\alpha)} \\ &= \pi \alpha \sqrt{(m/2|E|^3)}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Esta proporcionalidad entre el cuadrado del período y el cubo de las dimensiones lineales de la órbita ha sido ya indicada en § 10. Observemos también que el período depende solamente de la energía de la partícula.

Para  $E \geq 0$  el movimiento es infinito. Si  $E > 0$ , la excentricidad  $e > 1$ , o sea, que la trayectoria es una hipérbola con el foco como centro del campo (fig. 12). La distancia del perihelio al centro es:

$$r_{\min} = p/(e+1) = a(e-1), \quad (15.9)$$

donde,

$$a = p/(e^2-1) = \alpha/2E$$

es el «semieje» de la hipérbola.

Si  $E = 0$ , la excentricidad  $e = 1$ , y la partícula se mueve sobre una parábola, con una longitud del perihelio  $r_{\min} = p/2$ . Este caso tiene lugar cuando la partícula parte del reposo en el infinito.

Las coordenadas de la partícula en la órbita en función del tiempo se hallan mediante la fórmula general (14.6). Se pueden representar en adecuada forma paramétrica, del siguiente modo.

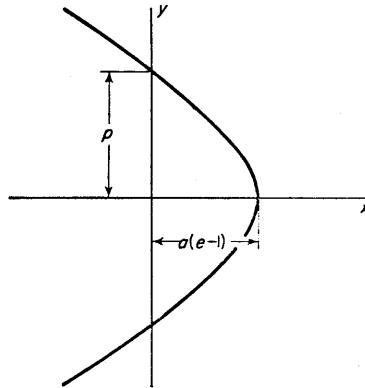


FIG. 12

Consideremos primero órbitas elípticas. Con  $a$  y  $e$  obtenidas en (15.6) y (15.4), se escribe la integral (14.6) que determina el tiempo

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{[-r^2 + (\alpha/|E|)r - (M^2/2m|E|)]}} \\ &= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{[a^2e^2 - (r-a)^2]}}. \end{aligned}$$

La sustitución natural

$$r - a = -ae \cos \xi$$

convierte la integral en

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{cte.}$$

Escogiendo el origen de tiempos de modo que la cte. se anule obtenemos finalmente la siguiente relación paramétrica, entre  $r$  y  $t$ :

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{(ma^3/\alpha)}(\xi - e \sin \xi), \quad (15.10)$$

encontrándose la partícula en el perihelio en el instante  $t = 0$ . Las coordenadas cartesianas  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  (estando los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente dirigidos según los semiejes mayor y menor de la elipse) pueden expresarse también en función del parámetro  $\xi$ . De (15.5) y (15.10) se tiene

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = ae(\cos \xi - e);$$

y como  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Resulta:

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a\sqrt{(1 - e^2)} \sin \xi. \quad (15.11)$$

A una revolución completa sobre la elipse corresponde una variación del parámetro  $\xi$  de 0 a  $2\pi$ .

Cálculos totalmente análogos conducen a los siguientes resultados para trayectorias hiperbólicas:

$$\begin{aligned} r &= a(e \cosh \xi - 1), & t &= \sqrt{(ma^3/\alpha)(e \operatorname{senh} \xi - \xi)}, \\ x &= a(e - \cosh \xi), & y &= a\sqrt{(e^2 - 1)} \operatorname{senh} \xi, \end{aligned} \quad (15.12)$$

donde el parámetro  $\xi$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Consideremos ahora el movimiento en un campo de repulsión donde

$$U = \alpha/r \quad (\alpha > 0). \quad (15.13)$$

En este caso, la energía potencial efectiva es

$$U_{\text{ef}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

y decrece monótonamente de  $+\infty$  a cero cuando  $r$  varía de cero a  $\infty$ . La energía de la partícula debe ser positiva y el movimiento es siempre infinito. Todos los cálculos son análogos a los realizados para el campo de atracción. La trayectoria es una hipérbola (o una parábola, si  $E = 0$ ):

$$p/r = -1 + e \cos \phi, \quad (15.14)$$

donde  $p$  y  $e$  están determinados por las fórmulas (15.4). La trayectoria pasa en la proximidad del centro del campo como indica la figura 13. La distancia del perihelio es:

$$r_{\min} = p/(e - 1) = a(e + 1). \quad (15.15)$$

Las relaciones en función del tiempo están dadas por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} r &= a(e \cosh \xi + 1), & t &= \sqrt{(ma^3/\alpha)(e \operatorname{senh} \xi + \xi)}, \\ x &= a(\cosh \xi + e), & y &= a\sqrt{(e^2 - 1)} \operatorname{senh} \xi. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Para concluir este tema, demostremos que hay una integral del movimiento que existe solamente en campos  $U = a/r$  (siendo  $a$  de cualquier signo). Es fácil comprobar por cálculo directo que la expresión,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{M} + \alpha \mathbf{r} / r \quad (15.17)$$

es constante. En efecto, su derivada total con respecto al tiempo es

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \alpha \mathbf{v} / r - \alpha \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) / r^3$$

o puesto que  $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ,

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \alpha \mathbf{v} / r - \alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) / r^3.$$

y poniendo  $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{r} / r^3$  según la ecuación del movimiento, encontramos que esta expresión se anula.

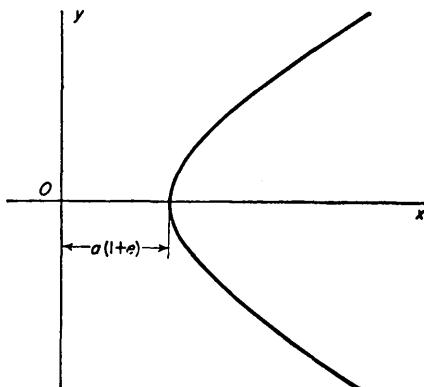


FIG. 13

El vector conservativo (15, 17) está dirigido según el eje mayor, del foco al perihelio y su magnitud es  $ae$ . Esto puede comprobarse considerando su valor en el perihelio.

Notemos que la integral del movimiento (15.17) igual que  $M$  y  $E$  es una función uniforme del estado (posición y velocidad) de la partícula. Se verá en § 50 que la existencia de tal integral de movimiento uniforme es debida a lo que se llama *degeneración* del movimiento.

### PROBLEMAS

1. Encontrar la relación entre las coordenadas y el tiempo para una partícula de energía  $E = 0$ , que se mueve en un campo  $U = -a/r$  (trayectoria parabólica).

*Solución:* Si en la integral

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{[(2\alpha/m)r - (M^2/m^2)]}}$$

sustituimos

$$r = M^2(1+\eta^2)/2m\alpha = \frac{1}{2}p(1+\eta^2),$$

se obtiene la siguiente forma paramétrica de la relación buscada:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}p(1+\eta^2), & t &= \sqrt{(mp^3/\alpha)} \cdot \frac{1}{2}\eta(1+\frac{1}{2}\eta^2), \\ x &= \frac{1}{2}p(1-\eta^2), & y &= p\eta. \end{aligned}$$

El parámetro  $\eta$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

## 2. Integrar las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo central

$$U = -\alpha/r^2 \quad (\alpha > 0).$$

*Solución:* De las fórmulas (14.6) y (14.7), eligiendo los orígenes de  $\phi$  y  $t$  convenientemente, se tiene

- a) para  $E > 0, M^2/2m > \alpha$ ,  $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}} \cos \left[ \phi \sqrt{\left( 1 - \frac{2m\alpha}{M^2} \right)} \right]$ ,
- b) para  $E > 0, M^2/2m < \alpha$ ,  $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}} \operatorname{senh} \left[ \phi \sqrt{\left( \frac{2m\alpha}{M^2} - 1 \right)} \right]$ ,
- c) para  $E < 0, M^2/2m < \alpha$ ,  $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}} \cosh \left[ \phi \sqrt{\left( \frac{2m\alpha}{M^2} - 1 \right)} \right]$ .

En los tres casos

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\left[ \frac{1}{2}m \left( Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha \right) \right]}.$$

En los casos b) y c) la partícula «cae» al centro a lo largo de una trayectoria que se aproxima al origen de coordenadas cuando  $\phi \rightarrow \infty$ . La caída, desde una cierta distancia  $r$ , se realiza en un tiempo finito, igual

$$\frac{1}{E} \sqrt{\left( \frac{1}{2}m \left( \sqrt{\left( \alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2 \right)} - \sqrt{\left( \alpha - \frac{M^2}{2m} \right)} \right) \right)}.$$

3. Cuando se añade a la energía potencial  $U = -a/r$  una pequeña corrección  $\delta U(r)$ , la trayectoria de un movimiento finito deja de ser cerrada y para cada revolución el perihelio de la órbita se desplaza un pequeño ángulo  $\delta\phi$ . Determinar  $\delta\phi$  para a)  $\delta U = \beta/r^2$ , b)  $\delta U = \gamma/r^3$ .

*Solución* Cuando  $r$  varía de  $r_{\min}$  a  $r_{\max}$  y vuelve a  $r_{\min}$ , el ángulo  $\phi$  varía en el valor dado por la fórmula (14.10), que escribiremos en la forma:

$$\Delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\left[ 2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2} \right]} dr,$$

con el fin de evitar integrales divergentes. Hagamos  $U = -a/r + \delta U$ , y desarrollemos el intervalo en potencias de  $\delta U$ ; el término de orden cero del desarrollo es  $2\pi$ , el término de primer orden da el desplazamiento  $\delta\phi$  buscado:

$$\delta\phi = \frac{\sigma}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U dr}{\sqrt{\left[ 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2} \right]}} = \frac{\sigma}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\phi \right), \quad (1)$$

donde, de la integración con respecto a  $r$ , hemos pasado a la integración con respecto a  $\phi$  a lo largo de la trayectoria del movimiento «no perturbado».

En el caso *a*) la integración en (1) es trivial y da:

$$\delta\phi = -2\pi\beta m/M^2 = -2\pi\beta/\alpha p,$$

[*p* es el parámetro de la elipse no perturbada definido en (15.4)]. En el caso *b*)  $r^2 \delta U = \gamma/r$ , y despejando  $1/r$  de (15.5), se tiene

$$\delta\phi = -6\pi\alpha\gamma m^2/M^4 = -6\pi\gamma/\alpha p^2.$$

## CAPÍTULO IV

### CHOQUE DE PARTICULAS

#### § 16. Desintegración de partículas

En muchos casos, usando sólo los teoremas de conservación del ímpetu y de la energía, se pueden obtener una serie de conclusiones importantes referentes a las propiedades de diversos procesos mecánicos. Es de esencial importancia el hecho de que estas propiedades no dependan de la clase de interacción de las partículas que intervienen en el proceso.

Consideremos la desintegración «espontánea» (o sea, no provocada por fuerzas exteriores) de una partícula en dos «componentes», es decir, en otras dos partículas que se mueven independientemente después de la desintegración.

Este proceso se describe en su forma más sencilla cuando se le considera en un sistema de referencia en el cual la partícula esté en reposo antes de la desintegración. En virtud de la ley de conservación del ímpetu la suma de los ímpetus de las dos partículas formadas en la desintegración es cero; esto es, las partículas se alejan entre sí con ímpetus iguales y opuestos, cuyo módulo común  $p_0$  se determina por la ley de la conservación de la energía.

$$E_i = E_{1i} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{p_0^2}{2m_2};$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de las partículas,  $E_{1i}$  y  $E_{2i}$  sus energías internas, y  $E_i$  la energía interna de la partícula inicial. Designemos por  $\epsilon$  la «energía de desintegración», es decir, la diferencia

$$\epsilon = E_i - E_{1i} - E_{2i}, \quad (16.1)$$

(es evidente que esta magnitud debe ser positiva, para que la desintegración sea posible). Se tiene entonces:

$$\epsilon = \frac{1}{2}p_0^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2m}, \quad (16.2)$$

que determina  $p_0$  ( $m$  es la masa reducida de las dos partículas); sus velocidades son

$$v_{10} = p_0/m_1, \quad v_{20} = p_0/m_2.$$

Pasemos ahora a un sistema de referencia en el cual la partícula inicial está animada de una velocidad  $V$  antes de la desintegración. Este sistema se llama habitualmente *sistema del laboratorio* (o sistema  $L$ ), por oposición al *sistema del centro de masa* (o sistema  $C$ ), en el cual el ímpetu total es nulo. Consideremos una de las partículas resultantes de la integración, y sean  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_0$  sus velocidades en los sistemas  $L$  y  $C$ , respectivamente. Evidentemente,  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ , o  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$  y así:

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2, \quad (16.3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo con que la partícula se separa de la dirección de la velocidad  $\mathbf{V}$ . Esta ecuación determina la velocidad de la partícula en función de la dirección de su movimiento en el sistema  $L$ . Se representa gráficamente en el diagrama de la figura 14; la velocidad  $\mathbf{v}$  está dada por un vector cuyo extremo es un punto cualquiera de la circunferencia<sup>1</sup> de radio  $v_0$ , y su origen el punto  $A$  situado a una distancia  $V$  del centro del círculo. Las figuras 14a) y b) corresponden, respectivamente, a los casos  $V < v_0$  y  $V > v_0$ . En el primer caso, el ángulo  $\theta$  puede tener un valor cualquiera, pero en el segundo, la partícula sólo puede moverse hacia adelante y con un ángulo  $\theta$  que no exceda del valor  $\theta_{\max}$  dado por

$$\operatorname{sen} \theta_{\max} = v_0/V; \quad (16.4)$$

(dirección de la tangente a la circunferencia trazada desde  $A$ ).

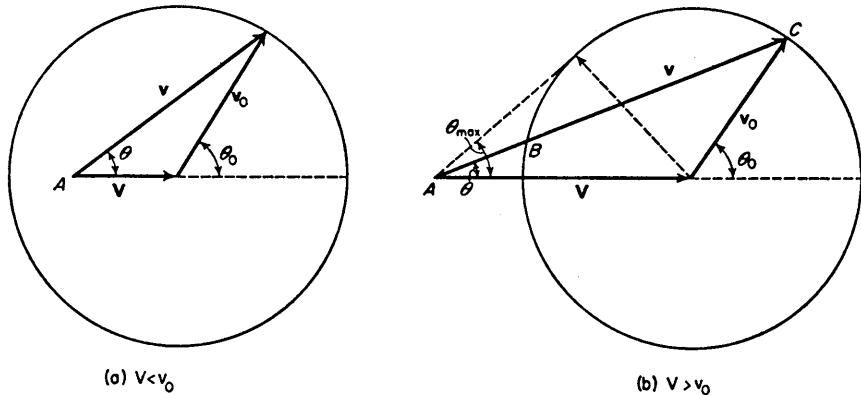


FIG. 14

La relación entre los ángulos  $\theta$  y  $\theta_0$  en los sistemas  $L$  y  $C$  resulta evidente de la figura 14; está dada por

$$\operatorname{tg} \theta = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 / (v_0 \cos \theta_0 + V). \quad (16.5)$$

<sup>1</sup> Más exactamente, un punto cualquiera de la esfera de radio  $v_0$ , de la que la figura 14 representa un círculo máximo.

Resolviendo esta ecuación para  $\cos \theta_0$ , se obtiene:

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \operatorname{sen}^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_0^2} \operatorname{sen}^2 \theta\right)}. \quad (16.6)$$

Si  $v_0 > V$  la relación entre  $\theta_0$  y  $\theta$  es unívoca, como lo muestra la figura 14a). En la fórmula (16.6) debe tomarse el signo más delante de la raíz (de modo que se tenga  $\theta_0 = 0$  para  $\theta = 0$ ). Sin embargo, para  $v_0 < V$  la relación entre  $\theta_0$  y  $\theta$  no es unívoca; para cada valor de  $\theta$  hay dos valores de  $\theta_0$  que en la figura 14b) corresponden a los vectores  $\mathbf{v}_0$  que van desde el centro del círculo a los puntos  $B$  y  $C$ ; estos vectores están definidos por los dos signos de la raíz en (16.6).

En las aplicaciones físicas se trata habitualmente no de la desintegración de una partícula, sino de la de numerosas partículas idénticas, y así aparece entonces el problema de la distribución de las partículas resultantes, según las direcciones, las energías, etc. En este caso, supondremos que las partículas iniciales están orientadas en el espacio al azar, es decir, isotrópicamente en promedio.

En el sistema  $C$  la solución de este problema es muy sencilla: todas las partículas resultantes (de la misma especie) tienen la misma energía y la distribución de sus direcciones de movimiento es isótropa. Este hecho es una consecuencia de la hipótesis de una orientación al azar de las partículas iniciales, y significa que la fracción de partículas que entran en un elemento de ángulo sólido  $d\omega_0$  es proporcional a la magnitud de este elemento, es decir, igual a  $d\omega_0/4\pi$ . La distribución según el ángulo  $\theta_0$  se obtiene poniendo  $d\omega_0 = 2\pi \operatorname{sen} \theta_0 d\theta_0$ , o sea, la fracción correspondiente es:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta_0 d\theta_0. \quad (16.7)$$

Las distribuciones en el sistema  $L$  se obtienen mediante una adecuada transformación de la expresión (16.7). Determinemos, por ejemplo, la distribución respecto a la energía cinética en el sistema  $L$ ; elevando al cuadrado la igualdad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$  se tiene,

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V \cos \theta_0,$$

de donde,

$$d(\cos \theta_0) = d(v^2)/2v_0 V.$$

Aplicando el valor de la energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$  ( $m$  es igual a  $m_1$  o  $m_2$  según la clase de partícula resultante considerada) y sustituyendo en (16.7), se obtiene la distribución buscada

$$(1/2mv_0 V) dT. \quad (16.8)$$

La energía cinética puede tomar todos los valores comprendidos entre  $T_{\min} = \frac{1}{2}m(v_0 - V)^2$  y  $T_{\max} = \frac{1}{2}m(v_0 + V)^2$ . En este intervalo las partículas están distribuidas uniformemente, según (16.8).

Cuando una partícula se desintegra en más de dos componentes, los teore-

mas de conservación del ímpetu y de la energía dejan evidentemente mucha más arbitrariedad a las velocidades y a las direcciones de las partículas resultantes. En particular, la energía de las partículas en el sistema  $C$  no tienen un valor determinado. Sin embargo, hay un límite superior para la energía cinética de cada partícula resultante. Para determinar este límite, consideremos el sistema formado por todas estas partículas, excepto una de ellas (cuya masa sea  $m_1$ ), y designemos la energía interna de este sistema  $E'_i$ . La energía cinética de la partícula  $m_1$  será entonces, por (16.1) y (16.2):

$$T_{10} = p_0^2/2m_1 = (M - m_1)(E_i - E_{1i} - E'_i)/M,$$

( $M$  masa de la partícula inicial). Es evidente que  $T_{10}$  tendrá su valor máximo cuando  $E'_i$  sea mínimo. Para esto hace falta que las partículas resultantes, a excepción de la partícula  $m_1$ , se muevan con la misma velocidad; entonces  $E'_i$  es simplemente la suma de sus energías internas, y la diferencia  $E_i - E_{1i} - E'_i$  es la energía de desintegración  $\epsilon$ . Así,

$$T_{10,\max} = (M - m_1)\epsilon/M. \quad (16.9)$$

### PROBLEMAS

1. Encontrar la relación entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (en el sistema  $L$ ) de las dos partículas resultantes de una desintegración.

*Solución:* En el sistema  $C$ , los ángulos de salida de las dos partículas están relacionados por  $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$ . Llamando a  $\theta_{10}$  simplemente  $\theta_0$ , y aplicando la fórmula (16.5) a cada una de las partículas, se tiene:

$$\begin{aligned} V + v_{10} \cos \theta_0 &= v_{10} \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1, \\ V - v_{20} \cos \theta_0 &= v_{20} \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_2. \end{aligned}$$

Se trata de eliminar  $\theta_0$  de estas dos ecuaciones; para ello, despejamos  $\cos \theta_0$  y  $\operatorname{sen} \theta_0$  y formamos la suma de sus cuadrados. Puesto que  $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$  y utilizando (16.2), encontramos finalmente:

$$\begin{aligned} (m_2/m_1) \operatorname{sen}^2 \theta_2 + (m_1/m_2) \operatorname{sen}^2 \theta_1 - 2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ = \frac{2\epsilon}{(m_1 + m_2)V^2} \operatorname{sen}^2(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

2. Hallar la distribución de las direcciones de las partículas resultantes en el sistema  $L$ .

*Solución:* Cuando  $v_0 > V$ , se sustituye (16.6), con signo más delante de la raíz, en (16.7) y se obtiene:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta d\theta \left[ 2 \frac{V}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + (V^2/v_0^2) \cos 2\theta}{\sqrt{[1 - (V^2/v_0^2) \operatorname{sen}^2 \theta]}} \right] \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Para  $v_0 < V$  se deben tener en cuenta las dos relaciones posibles entre  $\theta_0$  y  $\theta$ . Puesto que cuando  $\theta$  crece uno de los valores correspondientes de  $\theta_0$  aumenta y el otro disminuye,

es preciso tomar la diferencia (y no la suma) de las expresiones d  $\cos \theta$  con los dos signos de la raíz en (16.6). El resultado es:

$$\frac{1 + (V^2/v_0^2) \cos 2\theta}{\sqrt{[1 - (V^2/v_0^2) \sin^2 \theta]}} \quad (0 \leq \theta \leq \theta_{\max}).$$

3. Determinar el intervalo de valores que puede tomar el ángulo  $\theta$  entre las direcciones de las trayectorias de dos partículas resultantes, en el sistema  $L$ .

*Solución* El ángulo  $\theta$  es la suma  $\theta_1 + \theta_2$  de los ángulos definidos por la fórmula (16.5) (véase problema 1); lo más sencillo es calcular la tangente de este ángulo. Hallando los valores extremos de la expresión resultante se llega a los siguientes intervalos de  $\theta$ , en función de la magnitud relativa  $V$ , y de  $v_{10}$  y  $v_{20}$  (que para fijar ideas suponemos  $v_{20} > v_{10}$ ):

$$\begin{aligned} 0 < \theta < \pi \text{ si } v_{10} < V < v_{20}, \\ \pi - \theta_0 < \theta < \pi \text{ si } V < v_{10}, \\ 0 < \theta < \theta_0 \text{ si } V > v_{20}. \end{aligned}$$

El valor de  $\theta_0$  está dado por

$$\tan \theta_0 = V(v_{10} + v_{20})/(V^2 + v_{10}v_{20}).$$

### § 17. Choques elásticos

Se dice que el choque entre dos partículas es elástico cuando no lleva consigo cambio en su estado interno. En consecuencia, cuando se aplica el teorema de conservación de la energía a un choque de esta clase, no hay que tener en cuenta la energía interna de las partículas.

El choque se describe más sencillamente en un sistema de referencia en el que el centro de masa de las dos partículas esté en reposo (sistema  $C$ ); como en § 16, distinguiremos con el subíndice 0 los valores de las magnitudes en este sistema. Las velocidades de las partículas antes del choque en el sistema  $C$  están relacionadas con sus velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  en el sistema del laboratorio por

$$\mathbf{v}_{10} = m_2 \mathbf{v}/(m_1 + m_2), \quad \mathbf{v}_{20} = -m_1 \mathbf{v}/(m_1 + m_2),$$

donde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  [véase (13.2)].

En virtud del teorema de conservación del ímpetu, los ímpetus de las dos partículas continúan iguales y opuestos después del choque, y sus módulos permanecen también invariables por el teorema de conservación de la energía. Entonces, en el sistema  $C$  el resultado del choque se reduce simplemente a un giro de las velocidades de las dos partículas. Si designamos por  $\mathbf{n}_0$  el vector unitario en la dirección de la velocidad de la partícula  $m_1$  después del choque, las velocidades de las dos partículas después del choque serán:

$$\mathbf{v}_{10}' = m_2 \mathbf{v} \mathbf{n}_0 / (m_1 + m_2), \quad \mathbf{v}_{20}' = -m_1 \mathbf{v} \mathbf{n}_0 / (m_1 + m_2). \quad (17.1)$$

Para volver al sistema  $L$  hay que añadir a estas expresiones la velocidad  $\mathbf{V}$  del centro de masa. Las velocidades de las partículas después del choque en el sistema  $L$  resultan así:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1' &= m_2 \mathbf{v} \mathbf{n}_0 / (m_1 + m_2) + (\mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2), \\ \mathbf{v}_2' &= -\mathbf{m}_1 \mathbf{v} \mathbf{n}_0 / (m_1 + m_2) + (\mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2).\end{aligned}\quad (17.2)$$

A esto se limita la información que acerca de los choques se puede obtener de los teoremas de conservación del ímpetu y de la energía. La dirección del vector  $\mathbf{n}_0$  depende de la ley de interacción de las partículas y de su posición relativa en el choque.

Se pueden interpretar geométricamente los resultados obtenidos y para ello conviene utilizar los ímpetus en lugar de las velocidades. Multiplicando las ecuaciones (17.2) por  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1' &= m \mathbf{v} \mathbf{n}_0 + m_1 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / (m_1 + m_2), \\ \mathbf{p}_2' &= -m \mathbf{v} \mathbf{n}_0 + m_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / (m_1 + m_2),\end{aligned}\quad (17.3)$$

( $m = m_1 m_2 / m_1 + m_2$  es la masa reducida). Trazamos una circunferencia de radio  $m \mathbf{v}$  y realizamos la construcción indicada en la figura 15. Si el vector unitario  $\mathbf{n}_0$  está dirigido según  $\vec{OC}$ , los vectores  $\vec{AC}$  y  $\vec{CB}$  dan los ímpetus  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$ , respectivamente. Cuando se dan los vectores  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$ , el radio del círculo y la posición de los puntos  $A$  y  $B$  son fijos, pero el punto  $C$  puede tener cualquier posición sobre la circunferencia.

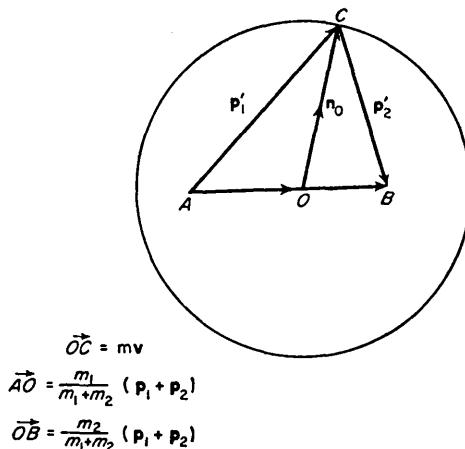


FIG. 15

Consideremos con más detalle el caso en que una de las partículas (por ejemplo,  $m_2$ ) esté en reposo antes del choque. En este caso, la distancia  $OB = m_2 / m_1 + m_2$   $\mathbf{p}_1 = m \mathbf{v}$  coincide con el radio, es decir, el punto  $B$  está sobre

la circunferencia. El vector  $\vec{AB}$  es entonces el ímpetu  $\mathbf{p}_1$  de la partícula  $m_1$  antes del choque. El punto  $A$  se encontrará dentro o fuera del círculo según que  $m_1 < m_2$  ó  $m_1 > m_2$ . Los diagramas correspondientes se representan en la figura 16 a) y b). Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en estos diagramas son los ángulos entre las direcciones de movimiento después del choque y la dirección del impacto (dirección de  $\mathbf{p}_1$ ). El ángulo en el centro, designado por  $\chi$ , que da la dirección de  $\mathbf{n}_0$ , es el ángulo de desviación de la partícula de masa  $m_1$  en el sistema ( $C$ ) del centro de masa. Resulta evidente de la figura que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  pueden expresarse en función del ángulo  $\chi$  por

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \operatorname{sen} \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \chi). \quad (17.4)$$

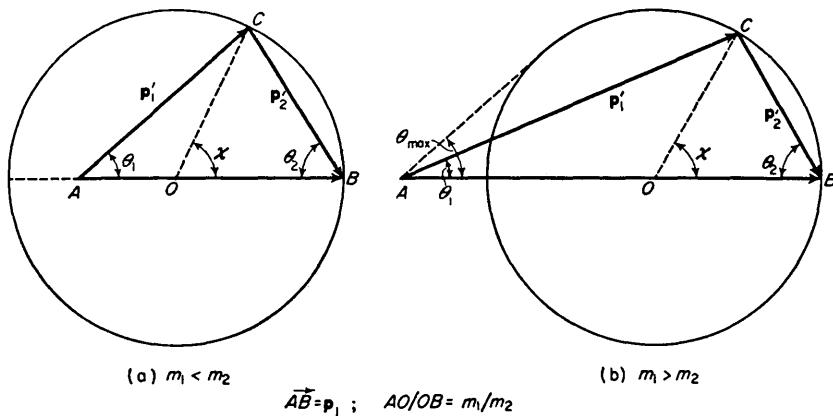


FIG. 16

Expresemos igualmente los módulos de las velocidades de las dos partículas después del choque en función del ángulo  $\chi$ :

$$v'_1 = \frac{\sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \chi)}}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi. \quad (17.5)$$

La suma  $\theta_1 + \theta_2$  es el ángulo entre las direcciones de movimiento de las dos partículas después del choque. Evidentemente,  $\theta_1 + \theta_2 > \frac{1}{2}\pi$  si  $m_1 < m_2$ , y,  $\theta_1 + \theta_2 < \frac{1}{2}\pi$  si  $m_1 > m_2$ .

En el caso en que las dos partículas después del choque se muevan en la misma recta («choque directo»), corresponde  $\chi = \pi$ , es decir, que el punto  $C$  estará situado sobre el diámetro a la izquierda del punto  $A$  (fig. 16 a;  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$  son entonces de sentido contrario) o entre los puntos  $A$  y  $O$  (fig. 16 b;  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$  son entonces del mismo sentido).

En este caso, las velocidades de las partículas después del choque son

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \quad (17.6)$$

Este valor de  $\mathbf{v}'_2$  es el mayor posible, y la energía máxima que puede adquirir en el choque la partícula que se encontraba en reposo, es, en consecuencia:

$$E_{2 \text{ máx}}' = \frac{1}{2} m_2 v_{2 \text{ máx}}'^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad (17.7)$$

donde  $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$  es la energía inicial de la partícula incidente.

Si  $m_1 < m_2$ , la velocidad de  $m_1$  puede tomar una dirección cualquiera. Si, en cambio,  $m_1 > m_2$ , el ángulo de desviación de la partícula no puede superar un valor máximo correspondiente a una posición del punto  $C$  (fig. 16 b), tal que la recta  $AC$  sea tangente a la circunferencia. Evidentemente,  $\sin \theta_{1 \text{ máx}} = OC/OA$ , o sea,

$$\sin \theta_{1 \text{ máx}} = OC/OA = m_2/m_1. \quad (17.8)$$

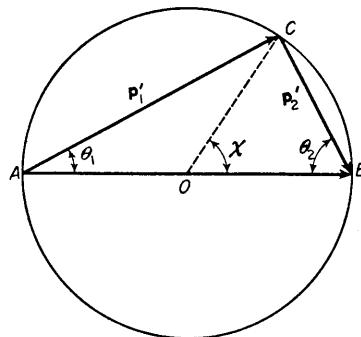


FIG. 17

El choque de partículas de la misma masa, de las cuales una está inicialmente en reposo, se expresa de modo particularmente sencillo. En este caso, los puntos  $B$  y  $A$  están los dos sobre la circunferencia (fig. 17) y se tiene,

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\chi, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \chi), \quad (17.9)$$

$$v_1' = v \cos \frac{1}{2}\chi, \quad v_2' = v \sin \frac{1}{2}\chi. \quad (17.10)$$

Indiquemos que después del choque las partículas se alejan en ángulo recto.

### PROBLEMA

Expresar en el sistema  $L$  las velocidades después del choque de dos partículas de las cuales una ( $m_1$ ) estaba en movimiento y la otra ( $m_2$ ) en reposo, en función de sus direcciones de movimiento.

*Solución:* De la figura 16 tenemos  $p'_2 = 2OB \cos \theta_2$ , o bien,

$$v_2' = 2v(m/m_2) \cos \theta_2.$$

El ímpetu  $p'_1 = AC$  está dado por

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' \cos \theta_1$$

o

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2} \frac{v_1'}{v} \cos \theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{(m_2^2 - m_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1)};$$

(para  $m_1 > m_2$  son válidos los dos signos delante de la raíz, y para  $m_2 > m_1$  debe tomarse el signo positivo).

### § 18. Dispersión de partículas

Como ya se ha visto en § 17, para determinar completamente el resultado del choque de dos partículas (es decir, el ángulo  $\chi$ ) deben resolverse las ecuaciones del movimiento teniendo en cuenta la forma particular de la ley de interacción de las partículas.

Consideremos primero el problema equivalente de la desviación de una partícula de masa  $m$  moviéndose en un campo  $U(r)$  cuyo centro está en reposo (y es el centro de masa de las dos partículas).

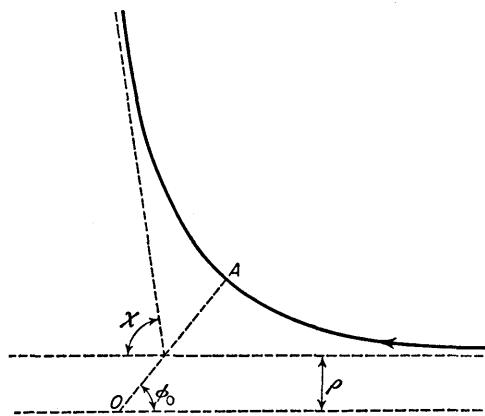


FIG. 18

Como se ha demostrado en § 14, la trayectoria de una partícula en un campo central es simétrica respecto a una recta que pasa por el centro y por el punto de la órbita más próximo a éste ( $OA$  en la fig. 18). Por tanto, las dos asíntotas

de la órbita forman ángulos iguales con esta recta. Si designamos este ángulo por  $\phi_0$ , el ángulo de desviación de la partícula cuando pasa frente al centro es, como se ve en la figura 18,

$$\chi = |\pi - 2\phi_0|. \quad (18.1)$$

El ángulo  $\phi_0$  está dado, de acuerdo con (14.7), por la integral

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(M/r^2) dr}{\sqrt{\{2m[E - U(r)] - M^2/r^2\}}}, \quad (18.2)$$

tomada entre la posición de la partícula más próxima al centro y el infinito. Recordemos que  $r_{\min}$  es un cero del radicando.

Para un movimiento infinito, tal como el considerado aquí, es conveniente utilizar en lugar de las constantes  $E$  y  $M$ , la velocidad  $v_\infty$  de la partícula en el infinito y lo que se llama *distancia de impacto*  $\rho$ . Esta distancia es la longitud de la perpendicular trazada desde el centro  $O$  a la dirección de  $v_\infty$ , es decir, la distancia a la cual la partícula pasaría del centro, si no existiera el campo de fuerza (fig. 18). La energía y el momento angular se expresan en función de estas magnitudes por

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2, \quad M = m\rho v_\infty, \quad (18.3)$$

y la fórmula (18.2) se convierte

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2) dr}{\sqrt{\{1 - (\rho^2/r^2) - (2U/mv_\infty^2)\}}}, \quad (18.4)$$

que con la (18.1) determina la relación entre  $\chi$  y  $\rho$ .

En las aplicaciones físicas se trata, a menudo, no de la desviación de una sola partícula, sino de la dispersión de un haz de partículas idénticas que inciden hacia el centro de dispersión con velocidad uniforme  $v_\infty$ . Las diferentes partículas del haz tienen distancias de impacto distintas y por tanto son dispersadas bajo distintos ángulos  $\chi$ . Sea  $dN$  el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo en ángulos comprendidos entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$ . No conviene utilizar este número para describir el proceso de dispersión, ya que es proporcional a la densidad del haz incidente. Entonces introducimos el cociente

$$d\sigma = dN/n, \quad (18.5)$$

donde  $n$  es el número de partículas que por unidad de tiempo atraviesan la unidad de superficie de una sección recta del haz (se supone que el haz es uniforme en toda su sección recta). Este cociente tiene las dimensiones de una superficie y se le llama *sección eficaz de dispersión*. Está completamente determinada por la forma del campo de dispersión y constituye la característica más importante del proceso de dispersión.

Supondremos que la correspondencia entre  $\chi$  y  $\rho$  es biunívoca; esto es así

si el ángulo de dispersión es una función monótona decreciente de la distancia de impacto. En este caso sólo se dispersan en ángulos del intervalo  $(\chi, \chi + d\chi)$  aquellas partículas cuyas distancias de impacto están comprendidas entre  $\varrho(\chi)$  y  $\varrho(\chi + d\chi)$ . El número de estas partículas es igual al producto de  $n$  por el área de la corona comprendida entre los círculos de radios  $\varrho$  y  $\varrho + d\varrho$ , es decir,  $dN = 2\pi\varrho d\varrho \cdot n$ . La sección eficaz es, pues,

$$d\sigma = 2\pi\rho d\varrho. \quad (18.6)$$

Para encontrar la relación entre esta sección y el ángulo de dispersión, basta escribir esta expresión en la forma

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)|d\rho(\chi)/d\chi| d\chi. \quad (18.7)$$

Aquí empleamos el valor absoluto de la derivada  $d\varrho/d\chi$ , porque esta derivada puede ser (y habitualmente lo es) negativa<sup>1</sup>. Frecuentemente,  $d\sigma$  se refiere a un elemento de ángulo sólido  $d\omega$ , en lugar de a un elemento de ángulo plano  $d\chi$ . El ángulo sólido entre dos conos de ángulos en el vértice  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  vale  $d\omega = 2\pi \operatorname{sen} \chi d\chi$ . Se tiene entonces de (18.7):

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)|d\rho|}{\operatorname{sen} \chi |d\chi|} d\omega. \quad (18.8)$$

Volviendo al problema de la dispersión de un haz de partículas no por un centro de fuerzas fijo, sino por otras partículas inicialmente en reposo, se puede demostrar que la fórmula (18.7) define la sección eficaz en función del ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa. Para hallar la sección eficaz en función del ángulo  $\theta$  en el sistema del laboratorio, se debe sustituir en (18.7)  $\chi$  en función de  $\theta$  mediante las fórmulas (17.4). Se obtienen así las expresiones de la sección eficaz de dispersión del haz de partículas incidentes ( $\chi$  en función de  $\theta_1$ ) y la de las partículas inicialmente en reposo ( $\chi$  en función de  $\theta_2$ ).

## PROBLEMAS

- Determinar la sección eficaz en la dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de radio  $a$  (es decir, con una ley de interacción tal que  $U = \infty$  si  $r < a$  y  $U = 0$  si  $r > a$ ).

*Solución:* Puesto que la partícula se mueve libremente en el exterior de la esfera y no puede penetrar en el interior, la trayectoria se compone de dos rectas simétricas con respecto al radio que pasa por el punto en que la partícula toca a la esfera (fig. 19). Es evidente de la figura,

$$\rho = a \operatorname{sen} \phi_0 = a \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - \chi) = a \cos \frac{1}{2}\chi.$$

Sustituyendo en (18.7) o (18.8) se tiene

$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \operatorname{sen} \chi d\chi = \frac{1}{2}a^2 d\omega, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Si la función  $\varrho(\chi)$  es multiforme, hace falta evidentemente tomar la suma de tales expresiones para todas las ramas de la función.

es decir, que en el sistema  $C$  la dispersión es isotrópica. Integrando  $d\sigma$  para todos los ángulos comprobamos que la sección total  $\sigma = \pi a^2$ , de acuerdo con el hecho de que el área de impacto, sobre la cual debe caer la partícula para ser dispersada, es el área de sección de la esfera.

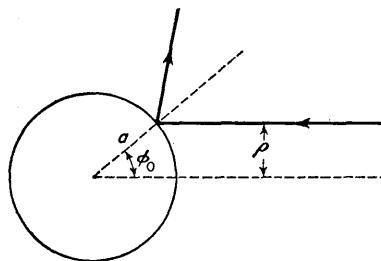


FIG. 19

Para pasar al sistema  $L$  hay que expresar  $\chi$  en función de  $\theta_1$  según (17.4). Los cálculos son completamente análogos a los efectuados en el problema 2, § 16, en concordancia con la analogía formal entre las expresiones (17.4) y (16.5). Para  $m_1 < m_2$  ( $m_1$  masa de la partícula,  $m_2$  masa de la esfera) se tiene,

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}a^2 \left[ 2(m_1/m_2) \cos \theta_1 + \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{[1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \theta_1]}} \right] d\omega_1,$$

( $d\omega_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$ ). Si  $m_1 > m_2$ , entonces,

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}a^2 \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{[1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \theta_1]}} d\omega_1.$$

Para  $m_1 = m_2$  tenemos,

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\omega_1,$$

lo que puede obtenerse sustituyendo directamente  $\chi$  por su valor  $\chi = 2\theta_1$  [según (17.9)] en (1).

Si la esfera está inicialmente en reposo,  $\chi = \pi - 2\theta_2$  en todos los casos, y la sustitución en (1) conduce a

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \theta_2| d\omega_2.$$

2. Expresar en el caso del problema 1 la sección eficaz en función de la pérdida de energía  $\epsilon$ , de las partículas dispersadas.

*Solución:* La energía perdida por una partícula de masa  $m_1$ , es igual a la energía adquirida por la esfera de masa  $m_2$ . De (17.5) y (17.7):

$$\epsilon = E_2' = [2m_1^2 m_2 / (m_1 + m_2)^2] v_\infty^2 \sin^2 \frac{1}{2}\chi = \epsilon_{\max} \sin^2 \frac{1}{2}\chi,$$

por tanto,

$$d\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_{\max} \sin \chi d\chi;$$

y sustituyendo en (1) del problema 1, se tiene

$$d\sigma = \pi a^2 d\epsilon/\epsilon_{\max}.$$

La distribución según los valores de  $\epsilon$  de las partículas dispersadas es, pues, homogénea en todo el intervalo de  $\epsilon$  comprendido entre 0 y  $\epsilon_{\max}$ .

3. Hallar la relación entre la sección eficaz y la velocidad  $v_\infty$  de las partículas dispersadas en un campo  $U \sim r^{-n}$ .

*Solución:* De acuerdo con (10.3), si la energía potencial es una función homogénea de orden  $k = -n$ , se tiene para trayectorias semejantes  $\varrho \sim v^{-2/n}$ , o

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi),$$

(para trayectorias semejantes los ángulos de desviación  $\chi$  son los mismos). Sustituyendo en (18.6), se encuentra

$$d\sigma \sim v_\infty^{-4/n} d\omega.$$

4. Determinar la sección eficaz para la «caída» de partículas en el centro de un campo  $U = -\alpha/r^2$ .

*Solución:* Las partículas que «caen» en el centro son aquellas que verifican la condición  $2a > mg^2 v_\infty^2$  [véase (14.11)], es decir, aquellas cuya distancia de impacto no sobrepasa el valor  $\varrho_{\max} = \sqrt{2a/mv_\infty^2}$ . La sección eficaz buscada es, pues,

$$\sigma = \pi \varrho_{\max}^2 = 2\pi a/mv_\infty^2$$

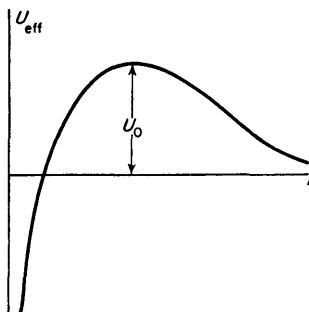


FIG. 20

5. El mismo problema para un campo  $U = -\alpha/r^n$  ( $n > 2$ ,  $\alpha > 0$ ).

*Solución:* La energía potencial eficaz

$$U_{\text{ef}} = m\rho^2 v_\infty^2 / 2r^2 - \alpha/r^n$$

en función de  $r$  está representada en la figura 20; su valor máximo es:

$$U_{\text{ef}, \max} = U_0 = \frac{1}{2}(n-2)\alpha(m\rho^2 v_\infty^2 / \alpha n)^{n/(n-2)}.$$

Las partículas que «caen» en el centro son aquellas para las cuales  $U_0 < E$ . Determinando  $\varrho_{\max}$  de la condición  $U_0 = E$ , se tiene:

$$\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n} (\alpha/mv_\infty^2)^{2/n}.$$

6. Determinar la sección eficaz para una caída de partículas (de masa  $m_1$ ) sobre la superficie de una esfera (de masa  $m_2$  y radio  $R$ ), que las atrae según la ley de Newton.

*Solución:* La condición de caída es que  $r_{\min} < R$ , siendo  $r_{\min}$  el punto de la trayectoria de la partícula más próximo al centro de la esfera. El valor máximo de  $\varrho$  está determinado por la condición  $r_{\min} = R$  que es equivalente a resolver la ecuación  $U_{ef}(R) = E$ , o,

$$\frac{1}{2}m_1v_\infty^2\rho_{\max}^2/R^2 - \alpha/R = \frac{1}{2}m_1v_\infty^2,$$

con  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  ( $\gamma$  constante de la gravitación), y donde se ha hecho  $m \approx m_1$ , considerando  $m_2 \gg m_1$ . Despejando  $\rho_{\max}^2$ , se tiene

$$\sigma = \pi R^2 (1 + 2\gamma m_2 / R v_\infty^2).$$

Cuando  $v_\infty \rightarrow \infty$ , la sección eficaz tiende, evidentemente, a la sección máxima de la esfera.

7. Deducir la forma de un campo de dispersión  $U(r)$ , dada la sección eficaz en función del ángulo de dispersión para una cierta energía  $E$ ; se supone que  $U(r)$  es una función monótona decreciente de  $r$  (campo de repulsión) con  $U(0) > E$ ,  $U(\infty) = 0$  (O. Firsov, 1953).

*Solución:* La integración de  $d\sigma$  con respecto al ángulo de dispersión

$$\int_x^\pi (d\sigma/d\chi) d\chi = \pi \rho^2, \quad (1)$$

determina el cuadrado de la distancia de impacto, de modo que  $\varrho(\chi)$ , y por lo tanto,  $\chi(\varrho)$ , se pueden considerar también como datos.

Hagamos

$$s = 1/r, \quad x = 1/\rho^2, \quad w = \sqrt{[1 - (U/E)]}. \quad (2)$$

Entonces, las fórmulas (18.1) y (18.2) se convierten en

$$\frac{1}{2}[\pi - \chi(x)] = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{(xw^2 - s^2)}}, \quad (3)$$

donde  $s_0(x)$  es raíz de la ecuación

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

La ecuación (3) es una ecuación integral para la función  $w(s)$ , y puede resolverse por un método análogo al utilizado en § 12. Dividiendo ambos miembros de (3) por  $\sqrt{\alpha - x}$  e integrando con respecto a  $x$  de 0 a  $\alpha$  se encuentra:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\pi - \chi(x)}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\alpha - x)}} &= \int_0^{\alpha} \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{\sqrt{[(xw^2 - s^2)(\alpha - x)]}} \\ &= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{dx ds}{\sqrt{[(xw^2 - s^2)(\alpha - x)]}} \\ &= \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}, \end{aligned}$$

o, integrando el primer miembro por partes:

$$\pi\sqrt{\alpha - \int_0^\alpha \sqrt{(\alpha-x)} \frac{dx}{dx} dx} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

Diferenciando con respecto a  $\alpha$ ; y escribiendo  $s$  en lugar de  $s_0(\alpha)$  ( $\alpha$  se sustituye por  $s^2/w^2$ ) el resultado, en forma diferencial, es:

$$\pi d(s/w) - \frac{1}{2}d(s^2/w^2) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x) dx}{\sqrt{[(s^2/w^2)-x]}} = (\pi/w) ds$$

O

$$\pi d \ln w = d(s/w) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x) dx}{\sqrt{[(s^2/w^2)-x]}}.$$

Esta ecuación se integra inmediatamente si en el segundo miembro se cambia el orden de integración. Teniendo en cuenta que para  $s = 0$  (es decir, para  $r \rightarrow \infty$ ) debe tenerse  $w = 1$  (o sea,  $U = 0$ ), y volviendo a los variables  $r$  y  $\rho$ , se obtiene finalmente el resultado siguiente en dos formas equivalentes:

$$\begin{aligned} w &= \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \cosh^{-1}(\rho/rw) (d\chi/d\rho) d\rho \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho) d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - r^2 w^2)}} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Esta fórmula determina de modo implícito la función  $w(r)$  [y por tanto  $U(r)$ ] para  $r > r_{\min}$ , es decir, para todo el dominio de valores de  $r$  que puede tener una partícula dispersada de energía dada  $E$ .

### § 19. Fórmula de Rutherford

Una de las aplicaciones más importantes de las fórmulas obtenidas anteriormente es la dispersión de partículas cargadas en un campo de Coulomb. Poniendo en (18.4)  $U = a/r$ , y realizando una integración elemental, se obtiene:

$$\phi_0 = \cos^{-1} \frac{\alpha/mv_\infty^2 \rho}{\sqrt{[1 + (\alpha/mv_\infty^2 \rho)^2]}},$$

de donde,

$$\rho^2 = (\alpha^2/m^2 v_\infty^4) \operatorname{tg}^2 \phi_0,$$

o haciendo,  $\phi_0 = \pi - \chi/2$  según (18.1):

$$\rho^2 = (\alpha^2/m^2 v_\infty^4) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\chi. \quad (19.1)$$

Diferenciemos esta expresión con respecto a  $\chi$  y sustituymos en (18.7) o (18.8), resultará

$$d\sigma = \pi(\alpha/mv_\infty^2)^2 \cos \frac{1}{2}\chi d\chi / \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\chi \quad (19.2)$$

$$d\sigma = (\alpha/2mv_\infty^2)^2 d\omega / \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}\chi. \quad (19.3)$$

Esta es la *fórmula de Rutherford*. Debe observarse que la sección eficaz no depende del signo  $a$ , de modo que el resultado obtenido es igualmente válido para un campo culombiano de repulsión o de atracción.

La fórmula (19.3) da la sección eficaz en un sistema de referencia en el cual el centro de masa de las partículas que chocan está en reposo. La transformación al sistema del laboratorio se efectúa mediante la fórmula (17.4). Para partículas inicialmente en reposo, sustituyendo  $\chi = \pi - 2\theta_2$  en (19.2), se obtiene

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= 2\pi(\alpha/mv_\infty^2)^2 \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 / \cos^3 \theta_2 \\ &= (\alpha/mv_\infty^2)^2 d\omega_2 / \cos^3 \theta_2. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Pero para las partículas incidentes, esta transformación conduce en general a una fórmula muy complicada. Trataremos solamente dos casos particulares.

Si la masa  $m_2$  de la partícula dispersante es grande respecto a la masa  $m_1$  de la partícula dispersada,  $\chi \approx \theta_1$  y  $m \approx m_1$ , de modo que

$$d\sigma_1 = (\alpha/4E_1)^2 d\omega_1 / \operatorname{sen}^{4\frac{1}{2}} \theta_1, \quad (19.5)$$

donde  $E_1 = \frac{1}{2}m_1 v_\infty^2$  es la energía de la partícula incidente.

Si las masas de las dos partículas son iguales ( $m_1 = m_2$ ;  $m = \frac{1}{2}m_1$ ), se tiene de (17.9)  $\chi = 2\theta_1$ , que, sustituido en (19.2), da

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= 2\pi(\alpha/E_1)^2 \cos \theta_1 d\theta_1 / \operatorname{sen}^3 \theta_1 \\ &= (\alpha/E_1)^2 \cos \theta_1 d\omega_1 / \operatorname{sen}^4 \theta_1. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Si las partículas son completamente idénticas, no pueden distinguirse después de la dispersión las partículas inicialmente en movimiento de las que inicialmente estaban en reposo. Se obtiene la sección eficaz para todas las partículas sumando  $d\sigma_1$  y  $d\sigma_2$ , y remplazando  $\theta_1$  y  $\theta_2$  por su valor común  $\theta$ .

$$d\sigma = (\alpha/E_1)^2 \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \cos \theta d\omega. \quad (19.7)$$

Volvamos a la fórmula general (19.2) y determinemos con ayuda de esta expresión la distribución de las partículas dispersadas con respecto a la energía perdida a consecuencia del choque. Cuando la masa  $m_1$  de la partícula dispersada y la masa  $m_2$  de la partícula dispersante son arbitrarias, la velocidad adquirida por esta última se expresa en función del ángulo de dispersión en el sistema  $C$  por

$$v_2' = [2m_1/(m_1+m_2)]v_\infty \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi;$$

[véase (17.5)]. La energía adquirida por esta partícula y por tanto, la perdida por la partícula  $m_1$ , es:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = (2m^2/m_2)v_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\chi.$$

Despejando  $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi$  en función de  $\epsilon$  y sustituyendo en (19.2), resulta,

$$d\sigma = 2\pi(\alpha^2/m_2v_\infty^2) d\epsilon/\epsilon^2. \quad (19.8)$$

Esta es la expresión buscada, ya que determina la sección eficaz como función de la pérdida de energía  $\epsilon$ ; esta energía toma todos los valores de 0 a  $\epsilon_{\max} = 2m^2v_\infty^2/m_2$ .

### PROBLEMAS

1. Hallar la sección eficaz de la dispersión en un campo  $U = a/r^2$  ( $a > 0$ ).

*Solución:* Ángulo de desviación

$$\chi = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\{1+2\alpha/m\rho^2v_\infty^2\}}} \right].$$

La sección eficaz,

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \cdot \frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2} \cdot \frac{d\omega}{\sin \chi}.$$

2. Encontrar la sección eficaz de la dispersión en un «pozo de potencial» esférico de radio  $a$  y «profundidad»  $U_0$  (es decir, un campo  $U = 0$  para  $r > a$ ,  $U = -U_0$  para  $r < a$ ).

*Solución:* La trayectoria rectilínea de la partícula es «refractada» al entrar y salir del pozo. De acuerdo con el problema del § 7, los ángulos de incidencia  $\alpha$  y refracción  $\beta$  (fig. 21) son tales que

$$\text{en } \alpha/\operatorname{sen} \beta = n, \quad n = \sqrt{(1+2U_0/mv_\infty^2)}.$$

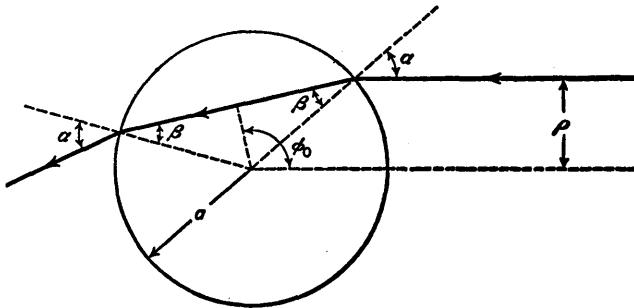


FIG. 21

El ángulo de desviación es  $\chi = 2(\alpha - \beta)$ . Por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \frac{1}{2}\chi)}{\operatorname{sen} \alpha} = \cos \frac{1}{2}\chi - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi = \frac{1}{n}.$$

Eliminando  $\alpha$  entre esta ecuación y la igualdad  $a \operatorname{sen} \alpha = \varrho$ , que es evidente observando el diagrama, se obtiene la relación entre  $\varrho$  y  $\chi$ :

$$\varrho^2 = a^2 \frac{n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\chi}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi}.$$

Finalmente, diferenciando esta ecuación, hallamos la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{1}{2}\chi} \frac{(n \cos \frac{1}{2}\chi - 1)(n - \cos \frac{1}{2}\chi)}{(n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi)^2} d\omega.$$

El ángulo  $\chi$  varía desde 0 (para  $\varrho = 0$ ) hasta  $\chi_{\max}$  (para  $\varrho = a$ ), siendo

$$\cos \frac{1}{2}\chi_{\max} = 1/n.$$

La sección eficaz total que se obtiene integrando  $d\sigma$  para todos los ángulos dentro del cono  $\chi < \chi_{\max}$ , es, por supuesto, igual al área de la sección geométrica  $\pi a^2$ .

## § 20. Dispersión bajo pequeños ángulos

El cálculo de la sección eficaz se simplifica notablemente si se consideran solamente aquellos choques cuya distancia de impacto es grande, es decir, en los que el campo  $U$  es débil y los ángulos de desviación pequeños. En este caso, se puede efectuar directamente el cálculo en el sistema del laboratorio, sin pasar por el sistema del centro de masa.

Tomemos el eje  $x$  en la dirección del ímpetu inicial de las partículas  $m_1$ , y el plano  $xy$  en el plano de la dispersión. Sea  $\mathbf{p}'_1$  el ímpetu de la partícula después de la dispersión; evidentemente tenemos

$$\operatorname{sen} \theta_1 = p_{1y}' / p'_1.$$

Para pequeñas desviaciones se puede sustituir aproximadamente  $\operatorname{sen} \theta_1$  por  $\theta_1$ , y en el denominador  $p'_1$  por el ímpetu inicial  $p_1 = m_1 v_\infty$ :

$$\theta_1 \approx p_{1y}' / m_1 v_\infty. \quad (20.1)$$

Además, puesto que  $\dot{p}_y = F_y$ , el incremento total del ímpetu en la dirección del eje  $y$  es:

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt, \quad (20.2)$$

siendo la fuerza

$$F_y = -\partial U / \partial y = -(dU/dr) \partial r / \partial y = -(dU/dr) y / r.$$

Como la integral (20.2) ya contiene la pequeña magnitud  $U$ , puede calcularse, con la misma aproximación, suponiendo que la partícula no se desvía de su dirección inicial, es decir, que está animada de un movimiento rectilíneo

(a lo largo de la recta  $y = \rho$ ) y uniforme (con la velocidad  $v_\infty$ ). Sustituimos entonces en (20.2)

$$F_y = -(dU/dr)\rho/r, \quad dt = dx/v_\infty,$$

resulta:

$$\dot{p}_{1y}' = -\frac{\rho}{v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r}.$$

Finalmente pasemos de la integración respecto a  $x$  a la integración respecto a  $r$ . Puesto que, para una trayectoria rectilínea  $r^2 = x^2 + \rho^2$ ,  $r$  varía de  $\infty$  a  $\rho$  y de nuevo a  $\infty$  cuando  $x$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ ; la integral respecto a  $x$  se reemplaza por el doble de la integral respecto a  $r$  de  $\rho$  a  $\infty$ , sustituyendo  $dx$  por

$$dx = r dr / \sqrt{(r^2 - \rho^2)}.$$

Se obtiene para el ángulo de dispersión (20.1) la siguiente expresión<sup>1</sup>:

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)}}, \quad (20.3)$$

que determina la relación buscada entre  $\theta_1$  y  $\rho$  para pequeñas desviaciones. La sección eficaz de la dispersión (en el sistema  $L$ ) resulta de (18.8) con  $\theta_1$  en lugar de  $\chi$ , pudiendo sustituirse ahora sen  $\theta_1$  por  $\theta_1$ :

$$d\sigma = \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\omega_1. \quad (20.4)$$

## PROBLEMAS

- Deducir la fórmula (20.3) de (18.4).

*Solución:* Para evitar integrales divergentes, escribimos (18.4) en la forma

$$\phi_0 = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^R \sqrt{\left[ 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2} \right]} dr,$$

donde se ha tomado como límite superior una cantidad finita grande  $R$ , para después pasar al límite cuando  $R \rightarrow \infty$ . Como  $U$  es pequeño, se desarrolla la raíz en potencias de  $U$ , y se sustituye aproximadamente  $r_{\min}$  por  $\rho$ :

$$\phi_0 = \int_{\rho}^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{U(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}}.$$

<sup>1</sup> Si se realiza todo el razonamiento en el sistema  $C$ , se obtiene para  $\chi$  la misma expresión, con  $m$  en lugar de  $m_1$ , considerando que los pequeños ángulos  $\theta_1$  y  $\chi$  están relacionados (17.4) por  $\theta_1 = m_2 \chi / (m_1 + m_2)$ .

Cuando  $R \rightarrow \infty$ , la primera integral tiende a  $\frac{1}{2}\pi$ . La segunda se integra por partes y se tiene

$$\chi = \pi - 2\phi_0 = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sqrt{(r^2 - \rho^2)}}{mv_{\infty}^2} \frac{dU}{dr} dr$$

$$= - \frac{2\rho}{mv_{\infty}^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)}}.$$

que es equivalente a (20.3).

2. Determinar la sección eficaz en la dispersión para pequeños ángulos, en un campo  $U = a/r^n$  ( $n > 0$ ).

*Solución:* De (20.3) se tiene,

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_{\infty}^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{(r^2 - \rho^2)}}.$$

Haciendo  $\rho^2/r^2 = u$ , la integral se convierte en una función beta, que puede expresarse por medio de funciones gamma:

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_{\infty}^2 \rho^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}.$$

Despejando  $\rho$  en función de  $\theta_1$ , y sustituyendo en (20.4), se obtiene

$$d\sigma = \frac{1}{n} \left[ \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \cdot \frac{\alpha}{m_1 v_{\infty}^2} \right]^{2/n} \theta_1^{-2-2/n} d\omega_1.$$

## CAPÍTULO V

# PEQUEÑAS OSCILACIONES

### § 21. Oscilaciones lineales libres

Una forma muy corriente del movimiento de los sistemas mecánicos son las *pequeñas oscilaciones* de un sistema alrededor de su posición de equilibrio estable. Estudiaremos estos movimientos empezando por el caso más sencillo: el de un sistema con un solo grado de libertad.

Un sistema está en equilibrio estable cuando su energía potencial  $U(q)$  es mínima; al separarlo de esta posición se origina una fuerza  $-dU/dq$  que tiende a devolver el sistema al equilibrio. Sea  $q_0$  el valor de la coordenada generalizada correspondiente a la posición de equilibrio. Al desarrollar  $U(q) - U(q_0)$  en serie de potencias de  $q - q_0$  para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio, basta conservar el primer término no nulo; en general, este término es de segundo orden

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{1}{2}k(q - q_0)^2,$$

donde  $k$  es un coeficiente positivo (el valor de la segunda derivada  $U''(q)$  para  $q = q_0$ ). En lo que sigue mediremos la energía potencial a partir de su valor mínimo (esto es, haremos  $U(q_0) = 0$ ) y designaremos por

$$x = q - q_0 \quad (21.1)$$

la separación de la coordenada de su valor de equilibrio. Entonces,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (21.2)$$

La energía cinética de un sistema con un grado de libertad es en general de la forma.

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

En la misma aproximación, es suficiente sustituir la función  $a(q)$  por su valor para  $q = q_0$ . Escribiendo para simplificar<sup>1</sup>

$$a(q_0) = m,$$

<sup>1</sup> Observemos que la magnitud  $m$  coincide con la masa solamente si  $x$  es la coordenada cartesianas de la partícula.

se tiene la siguiente expresión para la lagrangiana de un sistema que realiza pequeñas oscilaciones lineales<sup>1</sup>:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (21.3)$$

La ecuación de movimiento correspondiente a esta función es:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (21.4)$$

o

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0, \quad (21.5)$$

donde,

$$\omega = \sqrt{(k/m)}. \quad (21.6)$$

La ecuación diferencial lineal (21.5) tiene dos soluciones independientes:  $\cos \omega t$ , y  $\sin \omega t$ , por lo tanto su solución general es

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (21.7)$$

Esta expresión también puede escribirse en la forma

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (21.8)$$

Puesto que  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , la comparación con (21.7) muestra que las constantes arbitrarias  $a$  y  $\alpha$  están relacionadas con  $c_1$  y  $c_2$  por

$$a = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -c_2/c_1. \quad (21.9)$$

Entonces, en las proximidades de su posición de equilibrio estable, un sistema ejecuta un movimiento oscilatorio armónico. El coeficiente  $a$  del factor periódico en (21.8) se llama *amplitud* de las oscilaciones, y el argumento del coseno su *fase*;  $\alpha$  es el valor inicial de la fase, y depende evidentemente de la elección del origen de tiempos. La magnitud  $\omega$  es la *frecuencia angular* de las oscilaciones; sin embargo, en física teórica se le acostumbra a llamar simplemente *frecuencia*, denominación que emplearemos en adelante.

La frecuencia, que no depende de las condiciones iniciales del movimiento, es la característica fundamental de las oscilaciones. De acuerdo con (21.6) está completamente determinada por las propiedades del sistema mecánico. Observemos, sin embargo, que esta propiedad de la frecuencia es válida en la hipótesis de pequeñas oscilaciones, y desaparece cuando se pasa a aproximaciones superiores. Matemáticamente significa que es válida si la energía potencial es una función cuadrática de la coordenada<sup>2</sup>.

La energía de un sistema que realiza pequeñas oscilaciones es:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2x^2)$$

<sup>1</sup> A tal sistema se le llama frecuentemente *oscilador* lineal.

<sup>2</sup> En consecuencia, no es valedera si para  $x = 0$  la función  $U(x)$  tiene un mínimo de orden más elevado, es decir, si  $U \sim x^n$ ,  $n > 2$  (véase problema 2, a, § 11).

o, sustituyendo aquí (21.8)

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2a^2. \quad (21.10)$$

La energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones.

A menudo es cómodo representar la relación entre la coordenada del sistema oscilante y el tiempo por la parte real de una expresión compleja

$$x = \operatorname{re}[A \exp(i\omega t)], \quad (21.11)$$

donde  $A$  es una constante compleja; haciendo

$$A = a \exp(i\alpha), \quad (21.12)$$

volvemos a la expresión (21.8). La constante  $A$  se llama *amplitud compleja*; su módulo es la amplitud ordinaria, y su argumento es la fase inicial.

El uso de factores exponenciales es matemáticamente más sencillo que el de los factores trigonométricos, ya que la diferenciación no cambia su forma. Así, mientras se efectúan operaciones lineales (suma, multiplicación por coeficientes constantes, diferenciación, integración), puede omitirse el signo  $\operatorname{re}$ , tomando la parte real en el resultado final de los cálculos.

### PROBLEMAS

1. Expresar la amplitud y la fase inicial de las oscilaciones en función de los valores iniciales  $x_0$  y  $v_0$  de la coordenada y de la velocidad.

*Solución:*  $a = \sqrt{(x_0^2 + v_0^2/\omega^2)}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -v_0/\omega x_0$ .

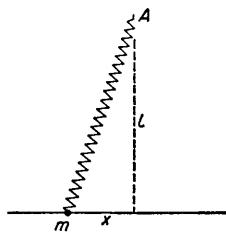


FIG. 22

2. Encontrar la razón de frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$  de dos moléculas diatómicas compuestas de átomos de diferentes isótopos, siendo las masas de los átomos respectivamente iguales a  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m'_1$ ,  $m'_2$ .

*Solución:* Puesto que los átomos de los isótopos interactúan del mismo modo  $k = k'$ . Las masas reducidas de las moléculas son aquí los coeficientes  $m$  en las energías cinéticas. De (21.6), se tiene,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m'_1 m'_2 (m_1 + m_2)}}.$$

3. Hallar la frecuencia de las oscilaciones de una partícula de masa  $m$ , que puede moverse sobre una recta y está unida a un resorte cuyo otro extremo está fijo al punto  $A$  (figura 22) a una distancia  $l$  de la recta. El resorte, cuando su longitud es igual a  $l$  está tensado por una fuerza  $F$ .

*Solución:* La energía potencial del resorte es igual (sin los infinitésimos de orden superior) al producto de la fuerza  $F$  por el alargamiento  $\delta l$  del resorte. Para  $x \ll l$  se tiene

$$\delta l = \sqrt{(l^2+x^2)} - l = x^2/2l,$$

de modo que  $U = Fx^2/2l$ . Y puesto que la energía cinética es  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ , obtenemos

$$\omega = \sqrt{(F/ml)}.$$

4. El mismo problema, moviéndose la partícula de masa  $m$  sobre una circunferencia de radio  $r$  (fig. 23).

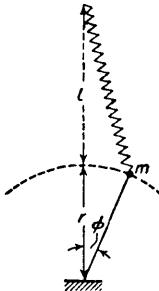


FIG. 23

*Solución:* En este caso, el alargamiento del resorte es (si  $\phi \ll 1$ )

$$\delta l = \sqrt{[r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r) \cos \phi]} - l \approx r(l+r)\phi^2/2l.$$

La energía cinética es  $T = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2r^2$ , y por lo tanto la frecuencia

$$\omega = \sqrt{[F(r+l)/mr]}.$$

5. Hallar la frecuencia de las oscilaciones del péndulo representado en la figura 2, cuyo punto de suspensión de masa  $m_1$  puede moverse sobre una recta horizontal.

*Solución:* Para  $\phi \ll 1$ , la expresión obtenida en el problema 3, § 14, da

$$T = \frac{1}{2}m_1m_2l^2\dot{\phi}^2/(m_1+m_2), \quad U = \frac{1}{2}m_2gl\phi^2.$$

de donde,

$$\omega = \sqrt{[g(m_1+m_2)/m_1l]}.$$

6. Determinar la forma de una curva tal que la frecuencia de las oscilaciones de una partícula en ella, bajo un campo gravitatorio, sea independiente de la amplitud.

*Solución:* La condición impuesta será satisfecha por una curva a lo largo de la cual la partícula tendrá una energía potencial  $U = \frac{1}{2}ks^2$ , siendo  $s$  la longitud del arco contada a partir de la posición de equilibrio; la energía cinética será entonces  $T = \frac{1}{2}ms^2$  ( $m$  masa

de la partícula) y la frecuencia de las oscilaciones  $\omega = \sqrt{(k/m)}$  independientemente del valor inicial de  $s$ .

En un campo gravitatorio,  $U = mgy$ , siendo  $y$  la coordenada vertical. Se tiene por tanto  $ks^2/2 = mgy$ , o bien,

$$y = \omega^2 s^2 / 2g.$$

Por otra parte,  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , de donde,

$$x = \int \sqrt{[(ds/dy)^2 - 1]} dy = \int \sqrt{[(g/2\omega^2 y) - 1]} dy.$$

Para facilitar la integración hacemos:

$$y = g(1 - \cos \xi)/4\omega^2,$$

Se tiene entonces,

$$x = g(\xi + \sin \xi)/4\omega^2.$$

Estas dos ecuaciones dan, en forma paramétrica, la ecuación de la curva buscada, que es una cicloide.

## § 22. Oscilaciones forzadas

Consideremos ahora las oscilaciones de un sistema sometido a la acción de un campo exterior variable; se las llama *oscilaciones forzadas*, a diferencia de las oscilaciones *libres* estudiadas en § 21. Puesto que las oscilaciones se suponen siempre pequeñas, esto implica que el campo exterior debe ser suficientemente débil, de otro modo podría provocar un desplazamiento  $x$  demasiado grande.

Además de su energía potencial propia  $\frac{1}{2}kx^2$ , el sistema posee en este caso una energía potencial  $U_e(x, t)$  debida al campo exterior. Desarrollando esta última en serie de potencias de la pequeña magnitud  $x$ , se obtiene,

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x[\partial U_e / \partial x]_{x=0}.$$

El primer término es solamente función del tiempo y puede omitirse en la lagrangiana como derivada total respecto al tiempo de otra función del tiempo. En el segundo término —  $[\partial U_e / \partial x]_{x=0}$  es la fuerza exterior que actúa sobre el sistema en su posición de equilibrio, y es una función dada del tiempo que designaremos por  $F(t)$ . Así, en la energía potencial aparece el término  $-xF(t)$ , de modo que la lagrangiana del sistema será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t). \quad (22.1)$$

La ecuación de movimiento correspondiente es:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

o

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)/m, \quad (22.2)$$

donde se ha introducido otra vez la frecuencia de las oscilaciones libres.

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes es  $x = x_0 + x_1$ , donde  $x_0$  es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y  $x_1$  una integral particular de la ecuación no homogénea. En este caso,  $x_0$  representa las oscilaciones libres estudiadas en § 21.

Consideremos el caso de especial interés en el que la fuerza exterior es también una función periódica simple del tiempo, de frecuencia  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.3)$$

Busquemos la integral particular de la ecuación (22.2) en la forma  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  con el mismo factor periódico. Sustituyendo en la ecuación, da  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ . Añadiendo la solución de la ecuación homogénea, se obtiene la integral general siguiente:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + [f/m(\omega^2 - \gamma^2)] \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.4)$$

Las constantes arbitrarias  $a$  y  $\alpha$  se determinan por las condiciones iniciales.

De este modo, bajo la acción de una fuerza exterior periódica, el sistema realiza un movimiento que es una combinación de dos oscilaciones, una con la frecuencia propia  $\omega$  del sistema y la otra con la frecuencia  $\gamma$  de la fuerza exterior.

La solución (22.4) no es aplicable en el caso de *resonancia*, esto es, cuando la frecuencia de la fuerza que provoca las oscilaciones del sistema coincide con la frecuencia propia de éste. Para hallar en este caso la solución general de la ecuación del movimiento, escribimos (22.4) en la forma

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + [f/m(\omega^2 - \gamma^2)][\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)],$$

en la que  $a$  tiene, naturalmente, un valor diferente.

Cuando  $\gamma \rightarrow \omega$  el segundo término es indeterminado, del tipo 0/0. Resolviendo esta indeterminación por la regla de L'Hôpital:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + (f/2m\omega) t \operatorname{sen}(\omega t + \beta). \quad (22.5)$$

Entonces, en el caso de resonancia, la amplitud de las oscilaciones crece linealmente con el tiempo (en tanto que las oscilaciones no dejen de ser pequeñas y toda la teoría expuesta continúe válida).

Veamos ahora cómo se expresan las pequeñas oscilaciones en las proximidades de la resonancia, es decir, cuando  $\gamma = \omega + \epsilon$  siendo  $\epsilon$  pequeño. Escribamos la solución general en forma compleja

$$x = A \exp(i\omega t) + B \exp[i(\omega + \epsilon)t] = [A + B \exp(i\epsilon t)] \exp(i\omega t). \quad (22.6)$$

Puesto que la magnitud  $A + B \exp(i\epsilon t)$  varía poco a lo largo de un período  $2\pi/\omega$  del factor  $\exp(i\omega t)$ , puede considerarse el movimiento en las proximidades de la resonancia como pequeñas oscilaciones de amplitud variable<sup>1</sup>. Sea  $C$  esta amplitud, se tiene:

$$C = |A + B \exp(i\epsilon t)|.$$

<sup>1</sup> El término «constante» en la fase de las oscilaciones también varía.

Designando respectivamente  $A$  y  $B$  por  $a \exp(i\alpha)$  y  $b \exp(i\beta)$ , obtenemos:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \quad (22.7)$$

Entonces la amplitud varía periódicamente con frecuencia  $\epsilon$  entre los límites

$$|a - b| \leq C \leq a + b.$$

Este es el fenómeno de las *pulsaciones*.

La ecuación del movimiento (22.2) puede integrarse en una forma general para una fuerza exterior arbitraria  $F(t)$ . Esto es fácil si se escribe previamente la ecuación en la forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

o

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = F(t)/m, \quad (22.8)$$

donde hemos introducido la magnitud compleja

$$\xi = \dot{x} + i\omega x \quad (22.9)$$

La ecuación (22.8) es de primer orden. Si el segundo miembro fuese cero, su solución sería  $\xi = A \exp(i\omega t)$  con  $A$  constante. Como antes, busquemos una solución de la ecuación no homogénea del tipo  $\xi = A(t) \exp(i\omega t)$ ; para la función  $A(t)$  se obtiene la ecuación

$$\dot{A}(t) = F(t) \exp(-i\omega t)/m.$$

integrándola, obtenemos como solución de (22.9)

$$\xi = \exp(i\omega t) \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-i\omega t) dt + \xi_0 \right\}, \quad (22.10)$$

donde la constante de integración  $\xi_0$  es el valor de  $\xi$  en el instante  $t = 0$ . Esta es la solución general buscada; la función  $x(t)$  está dada por la parte imaginaria de (22.10) dividida por  $\omega$ .<sup>1</sup>

La energía de un sistema que realiza oscilaciones forzadas evidentemente no se conserva, puesto que el sistema adquiere energía a expensas de la fuente del campo externo. Determinemos la energía total transmitida al sistema durante todo el tiempo que actúa la fuerza (de  $-\infty$  a  $+\infty$ ), suponiendo nula la energía inicial. Según la fórmula (22.10), con  $-\infty$  en lugar de cero como límite inferior de integración y con  $\xi(-\infty) = 0$ , se tiene para  $t \rightarrow \infty$ :

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2.$$

<sup>1</sup> Por supuesto la fuerza  $F$  debe escribirse aquí en forma real.

La energía del sistema está dada por la expresión

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2x^2) = \frac{1}{2}m|\xi|^2. \quad (22.11)$$

Sustituyendo  $|\xi(\infty)|^2$ , se obtiene para la energía transferida

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2; \quad (22.12)$$

está pues determinada por el cuadrado del módulo de la componente de Fourier de la fuerza  $F(t)$  cuya frecuencia es la frecuencia propia del sistema.

En particular, si la fuerza exterior actúa durante un corto intervalo de tiempo (pequeño en comparación con  $1/\omega$ ) se puede poner  $\exp(-i\omega t) \cong 1$ . Entonces,

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2.$$

Este resultado es evidente: expresa el hecho de que una fuerza de corta duración comunica al sistema un impulso  $\int F dt$  sin provocar un desplazamiento perceptible.

### PROBLEMAS

1. En el instante inicial  $t = 0$  un sistema está en reposo y en equilibrio ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ). Determinar las oscilaciones forzadas del sistema, debidas a una fuerza  $F(t)$ , en los siguientes casos:

a)  $F = \text{Cte.} = F_0$ .

*Solución:*

$$x = (F_0/m\omega^2)(1 - \cos \omega t),$$

la acción de una fuerza constante da lugar a un desplazamiento de la posición de equilibrio alrededor de la cual se realizan las oscilaciones.

b)  $F = at$ .

*Solución:*

$$x = (a/m\omega^2)(\omega t - \sin \omega t).$$

c)  $F = F_0 \exp(-at)$ .

*Solución:*

$$x = [F_0/m(\omega^2 + \alpha^2)][\exp(-\alpha t) - \cos \omega t + (\alpha/\omega) \sin \omega t].$$

d)  $F = F_0 \exp(-at) \cos \beta t$ .

*Solución:*

$$\begin{aligned} x = & F_0 \{ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \omega t + (\alpha/\omega)(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + \\ & + \exp(-\alpha t)[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] \} / m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2], \end{aligned}$$

(se llega más fácilmente a esta solución escribiendo la fuerza en forma compleja)

$$F = F_0 \exp[(-\alpha + i\beta)t].$$

2. Determinar la amplitud final de las oscilaciones de un sistema bajo la acción de una fuerza exterior tal que  $F = 0$  para  $t < 0$ ,  $F = F_0 t/T$  para  $0 < t < T$ ,  $F = F_0$  para  $t > T$  (fig. 24), si antes del instante  $t = 0$  el sistema se encontraba en reposo y en equilibrio.

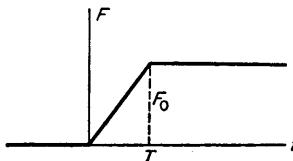


FIG. 24

*Solución:* En el intervalo de tiempo  $0 < t < T$ , las oscilaciones que satisfacen la condición inicial, son de la forma

$$x = (F_0/mT\omega^3)(\omega t - \operatorname{sen} \omega t).$$

Para  $t > T$  buscamos una solución del tipo

$$x = c_1 \cos \omega(t-T) + c_2 \operatorname{sen} \omega(t-T) + F_0/m\omega^3.$$

La condición de continuidad de  $x$  y  $\dot{x}$  para  $t = T$  da,

$$c_1 = -(F_0/mT\omega^3) \operatorname{sen} \omega T, \quad c_2 = (F_0/mT\omega^3) (1 - \cos \omega T).$$

La amplitud de las oscilaciones

$$a = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)} = (2F_0/mT\omega^3) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega T.$$

Observemos que es tanto más pequeña cuanto más lentamente se aplique la fuerza  $F_0$  (es decir, cuando  $T$  es más grande).

3. El mismo problema en el caso de una fuerza  $F_0$  constante que actúa durante un tiempo limitado  $T$  (fig. 25).

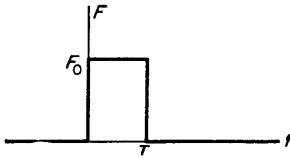


FIG. 25

*Solución:* Se puede seguir el mismo método que en el problema 2, pero es más sencillo utilizar la fórmula (22.10). Para  $t > T$  se tienen oscilaciones libres alrededor de la posición  $x = 0$ ; por tanto,

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{F_0}{m} \exp(i\omega t) \int_0^T \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{F_0}{i\omega m} [1 - \exp(-i\omega T)] \exp(i\omega t).\end{aligned}$$

y el cuadrado del módulo de  $\xi$  da la amplitud a partir de la relación  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$ . Finalmente,

$$a = (2F_0/m\omega^2) \sin \frac{1}{2}\omega T.$$

4. El mismo problema en el caso de una fuerza que actúa durante un intervalo de tiempo entre 0 y  $T$ , y de valor  $F = F_0 t/T$  (fig. 26).

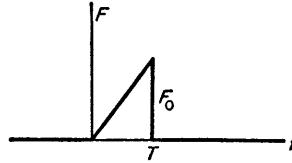


FIG. 26

*Solución:* Por el mismo método se obtiene

$$a = (F_0/Tm\omega^3) \sqrt{[\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)]}.$$

5. El mismo problema en el caso de una fuerza que actúa en el intervalo de tiempo entre 0 y  $T = 2\pi/\omega$ , y tal que  $F = F_0 \sin \omega t$  (fig. 27).

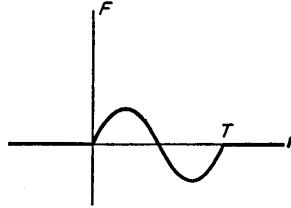


FIG. 27

*Solución:* Sustituyendo en (22.10)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = F_0 [\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)]$$

e integrando de cero a  $T$ , se obtiene,

$$a = F_0 \pi / m \omega^2.$$

### § 23. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad

La teoría de las oscilaciones libres de un sistema con  $s$  grados de libertad es análoga a la de las oscilaciones lineales estudiada en § 21.

Supongamos que la energía potencial  $U$  de un sistema en función de sus coordenadas generalizadas  $q_i (i = 1, 2, \dots, s)$  tiene un mínimo para  $q_i = q_{i0}$ . Introduciendo los pequeños desplazamientos

$$x_i = q_i - q_{i0} \quad (23.1)$$

y desarrollando  $U$  con respecto a  $x_i$  hasta los términos de segundo orden, se obtiene la energía potencial como forma cuadrática definida positiva:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k, \quad (23.2)$$

donde tomamos de nuevo el valor mínimo de la energía potencial como cero. Puesto que los coeficientes  $k_{ik}$  y  $k_{ki}$  de (23.2) multiplican a la misma cantidad  $x_i x_k$ , está claro que se les puede considerar simétricos con respecto a sus índices.

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

En la energía cinética, que en general es de la forma

$$\frac{1}{2} \sum a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

[véase (5.5)], hacemos  $q_i = q_{i0}$  en los coeficientes  $a_{ik}$ , y designando  $a_{ik}(q_0)$  por  $m_{ik}$ , se obtiene la energía cinética como forma cuadrática definida positiva

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (23.3)$$

Los coeficientes  $m_{ik}$  también se pueden considerar siempre simétricos con respecto a sus índices

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Entonces, la lagrangiana de un sistema que ejecuta pequeñas oscilaciones libres es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \quad (23.4)$$

Deduzcamos ahora las ecuaciones del movimiento. Para determinar las derivadas que ellas implican, escribimos la diferencia total de la lagrangiana:

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i dx_k + m_{ik} \dot{x}_k dx_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Puesto que el valor de la suma no depende evidentemente de la elección de los índices, intercambiamos  $i$  con  $k$  en el primer y tercer término del paréntesis; teniendo en cuenta la simetría de los coeficientes  $m_{ik}$  y  $k_{ik}$ , se obtiene

$$dL = \sum (m_{ik} \dot{x}_k dx_i - k_{ik} x_k dx_i).$$

De donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \ddot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_k k_{ik} x_k.$$

Consecuentemente, las ecuaciones de Lagrange son:

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \quad (23.5)$$

Constituyen un sistema de  $s$  ( $i = 1, \dots, s$ ) ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Siguiendo la regla general de resolución de estas ecuaciones, busquemos  $s$  funciones incógnitas  $x_k(t)$  de la forma

$$x_k = A_k \exp(i\omega t), \quad (23.6)$$

siendo las  $A_k$  constantes a determinar. Sustituyendo (23.6) en el sistema (23.5) y dividiendo todo por  $\exp(i\omega t)$ , se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas, a las que deben satisfacer las constantes  $A_k$ :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (23.7)$$

Para que este sistema tenga soluciones distintas de cero, el determinante de sus coeficientes debe anularse.

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (23.8)$$

Esta es la *ecuación característica* y es de grado  $s$  con respecto a  $\omega^2$ . En general, tiene  $s$  raíces distintas reales y positivas  $\omega_a^2$  ( $a = 1, 2, \dots, s$ ); en ciertos casos particulares algunas de estas raíces pueden coincidir. Las magnitudes  $\omega_a$  así definidas, se llaman *frecuencias propias* del sistema.

De consideraciones físicas resulta evidente el carácter real y positivo de las raíces de la ecuación (23.8). En efecto, supongamos que  $\omega$  tuviese una parte imaginaria; las relaciones (23.6) que dan las coordenadas  $x_k$  en función del tiempo (y, por lo tanto, también las velocidades  $\dot{x}_k$ ) tendrían entonces un factor exponencial creciente o decreciente. Pero la existencia de tal factor es inadmisible ya que conduciría a una variación con el tiempo de la energía total  $E = U + T$  del sistema, y por lo tanto no se conservaría.

Se puede llegar a la misma conclusión por un método puramente matemático. Multiplicando la ecuación (23.7) por la magnitud conjugada  $A_i^*$  y sumando sobre  $i$ , se tiene,

$$\sum (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

de donde,

$$\omega^2 = \sum k_{ik} A_i^* A_k / \sum m_{ik} A_i^* A_k.$$

Como los coeficientes  $k_{ik}$  y  $m_{ik}$  son reales y simétricos, las formas cuadráticas del numerador y denominador de esta expresión son reales; en efecto

$$(\sum k_{ik} A_i^* A_k)^* = \sum k_{ik} A_i A_k^* = \sum k_{ik} A_i A_k^* = \sum k_{ik} A_i A_k^*.$$

y al ser esencialmente positivas,  $\omega^2$  es igualmente positivo<sup>1</sup>.

Una vez determinadas las frecuencias  $\omega_\alpha$ , se sustituyen en las ecuaciones (23.7), y obtenemos los coeficientes correspondientes  $A_k$ . Si todas las raíces  $\omega_\alpha$  de la ecuación característica son distintas, los coeficientes  $A_k$  son proporcionales a los menores del determinante (23.8), en el que  $\omega$  se ha sustituido por sus valores  $\omega_\alpha$ ; sean  $\Delta_{ka}$  estos menores. Se tiene entonces como solución particular del sistema (23.5)

$$x_k = \Delta_{ka} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t),$$

siendo  $C_\alpha$  una constante compleja arbitraria.

La solución general es la suma de estas  $s$  soluciones particulares. Tomando la parte real escribimos,

$$x_k = \operatorname{re} \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{ka} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t) \equiv \sum_\alpha \Delta_{ka} \Theta_\alpha, \quad (23.9)$$

donde,

$$\Theta_\alpha = \operatorname{re}[C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)]. \quad (23.10)$$

Así, la variación con el tiempo de cada coordenada del sistema es una superposición de  $s$  oscilaciones periódicas simples  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$ , de amplitudes y fases arbitrarias, pero de frecuencias completamente determinadas.

Surge la cuestión natural de si es posible escoger las coordenadas generalizadas de modo tal que cada una de ellas realice una oscilación simple. La forma de la integral general (23.9) indica el medio de resolver el problema. En efecto, considerando las  $s$  relaciones (23.9) como un sistema de ecuaciones de  $s$  incógnitas  $\Theta_\alpha$ , se puede, resolviendo este sistema, expresar las magnitudes  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  en función de las coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Las magnitudes  $\Theta_\alpha$  pueden, por lo tanto, considerarse como nuevas coordenadas generalizadas, llamadas coordenadas *normales* (o principales), y las oscilaciones periódicas simples que realizan se llaman oscilaciones normales del sistema.

<sup>1</sup> El carácter definido positivo de la forma cuadrática construida con los coeficientes  $k_{ik}$  es evidente de su definición en (23.2) para valores reales de las variables. Si se escriben las magnitudes complejas en forma explícita  $a_k + ib_k$ , se obtiene, haciendo uso de nuevo de la simetría de las  $k_{ik}$ :

$$\Sigma k_{ik} A_i^* A_k = \Sigma k_{ik} (a_i - ib_i) \times (a_k + ib_k) = \Sigma k_{ik} a_i a_k + \Sigma k_{ik} b_i b_k,$$

que es la suma de dos formas definidas positivas.

Las coordenadas normales  $\Theta_\alpha$  satisfacen, como consecuencia de su definición, a las ecuaciones

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \quad (23.11)$$

Esto significa que en coordenadas normales las ecuaciones del movimiento se convierten en  $s$  ecuaciones independientes. La aceleración de cada coordenada normal sólo depende del valor de esta misma coordenada, y para determinar completamente su dependencia con el tiempo, basta conocer los valores iniciales de la coordenada y de la velocidad correspondiente. En otras palabras, las oscilaciones normales del sistema son totalmente independientes.

De todo esto, resulta evidente que la lagrangiana expresada en coordenadas normales es una suma de expresiones, cada una de las cuales corresponde a una oscilación lineal de frecuencia  $\omega_\alpha$ , es decir, toma la forma

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \quad (23.12)$$

donde las  $m_\alpha$  son constantes positivas. Matemáticamente quiere decir que por la transformación (23.9) las dos formas cuadráticas, energía cinética (23.3) y energía potencial (23.2), toman simultáneamente la forma diagonal.

Se escogen ordinariamente las coordenadas normales de manera que los coeficientes de los cuadrados de las velocidades en la lagrangiana sean iguales a un medio. Para ello basta definir unas nuevas coordenadas normales  $Q_\alpha$  por las igualdades

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha. \quad (23.13)$$

Entonces,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

La discusión anterior debe modificarse ligeramente en el caso en que la ecuación característica tiene una o varias raíces múltiples. La forma general (23.9), (23.10) de la integral de las ecuaciones de movimiento permanece invariable, con el mismo número  $s$  de términos, y la única diferencia es que los coeficientes  $\Delta_{ka}$  correspondientes a las frecuencias múltiples no son los menores del determinante, que en este caso se anulan<sup>1</sup>.

A cada frecuencia múltiple (también se dice *degenerada*) corresponde un número de coordenadas normales distintas igual al grado de degeneración, pero la elección de estas coordenadas no es única. Puesto que en la energía cinética y en la energía potencial las coordenadas normales (de igual  $\omega_\alpha$ ) entran en forma de sumas  $\sum \dot{Q}_\alpha^2$  y  $\sum Q_\alpha^2$  que se transforman de la misma manera, se las puede

<sup>1</sup> La imposibilidad de que en la integral general aparezcan al lado de los factores exponenciales del tiempo, factores algebraicos, es evidente de las mismas consideraciones físicas que excluyen la existencia de «frecuencias» complejas: la presencia de tales factores violaría la ley de conservación de la energía.

someter a cualquier transformación lineal que deje invariante estas sumas de cuadrados.

En las oscilaciones tridimensionales de una partícula en un campo exterior constante, la determinación de las coordenadas normales es muy sencilla. Tomaendo el origen de las coordenadas cartesianas en el punto en que la energía potencial  $U(x, y, z)$  es mínima, se obtiene esta energía como una forma cuadrática de las variables  $x, y, z$ ; la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

( $m$  es la masa de la partícula) no depende de la orientación de los ejes coordenados. Por tanto, basta reducir, por una elección conveniente de los ejes, la energía potencial a una forma diagonal. Entonces

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \quad (23.14)$$

y las oscilaciones normales tienen lugar a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , con frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{(k_1/m)}, \quad \omega_2 = \sqrt{(k_2/m)}, \quad \omega_3 = \sqrt{(k_3/m)}.$$

En el caso particular de un campo central ( $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ,  $U = \frac{1}{2}kr^2$ ) estas tres frecuencias coinciden (véase problema 3).

El uso de las coordenadas normales hace posible la reducción del problema de oscilaciones forzadas de un sistema de varios grados de libertad a una serie de problemas de oscilaciones forzadas lineales. Teniendo en cuenta la acción de las fuerzas exteriores variables, la lagrangiana del sistema se escribe

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k, \quad (23.15)$$

donde  $L_0$  es la lagrangiana de las oscilaciones libres. Sustituyendo las coordenadas  $x_k$  por las coordenadas normales, se obtiene,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} f_{\alpha}(t)Q_{\alpha}, \quad (23.16)$$

donde,

$$f_{\alpha}(t) = \sum_k F_k(t)\Delta_{k\alpha}/\sqrt{m_{\alpha}}.$$

Las ecuaciones de movimiento son entonces,

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \quad (23.17)$$

y cada una sólo contiene una función incógnita  $Q_{\alpha}(t)$ .

## PROBLEMAS

1. Determinar las oscilaciones de un sistema con dos grados de libertad cuya lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(dos sistemas lineales idénticos de frecuencia propia  $\omega_0$  acoplados por una interacción  $-\alpha xy$ ).

*Solución:* Las ecuaciones del movimiento son:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

La sustitución (23.6) da:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \quad (1)$$

la ecuación característica es:  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$  de donde,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Para  $\omega = \omega_1$  las ecuaciones (1) dan  $A_x = A_y$ , y para  $\omega = \omega_2$ ,  $A_x = -A_y$ . Por lo tanto,

$$x = (Q_1 + Q_2)/\sqrt{2}, \quad y = (Q_1 - Q_2)/\sqrt{2},$$

(los coeficientes  $1/\sqrt{2}$  corresponden a la normalización de las coordenadas indicada en el texto).

Para  $\alpha \ll \omega_0^2$  (acoplamiento débil) se tiene,

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}\alpha, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha.$$

La variación de  $x$  e  $y$  es, en este caso, la superposición de dos oscilaciones de frecuencias próximas, es decir, pulsaciones de frecuencia  $\omega_2 - \omega_1 = \alpha$  (véase § 22). En el instante en que la amplitud de la coordenada  $x$  pasa por su máximo, la amplitud de  $y$  pasa por su mínimo y viceversa.

2. Determinar las pequeñas oscilaciones de un péndulo doble coplanario (fig. 1).

*Solución:* Para pequeñas oscilaciones ( $\phi_1 \ll 1, \phi_2 \ll 1$ ) la lagrangiana hallada en el problema 1, § 5 toma la forma

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\phi_2^2.$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\phi}_1 + m_2l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g\phi_1 = 0, \quad l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0.$$

De la sustitución de (23.6):

$$A_1(m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) - A_2\omega^2m_2l_2 = 0, \quad -A_1l_1\omega^2 + A_2(g - l_2\omega^2) = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1l_1l_2}((m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)\sqrt{[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1l_1l_2]}}).$$

Cuando  $m_1 \rightarrow \infty$ , las frecuencias tienden hacia los límites  $\sqrt{(g/l_1)}$  y  $\sqrt{(g/l_2)}$  que corresponden a las oscilaciones independientes de los dos péndulos.

3. Encontrar la trayectoria de una partícula en un campo central  $U = \frac{1}{2}kr^2$  (*oscilador espacial*).

*Solución:* Como en todo campo central, el movimiento se efectúa en un plano. Sea  $x, y$  este plano. La variación de cada coordenada  $x, y$  es una oscilación simple con la misma frecuencia  $\omega = \sqrt{(k/m)}$ :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta),$$

o

$$x = a \cos \phi, \quad y = b \cos(\phi + \delta) = b \cos \delta \cos \phi - b \sin \delta \sin \phi,$$

donde se ha hecho  $\phi = \omega t + \alpha$ ,  $\delta = \beta - \alpha$ . Despejando de aquí  $\cos \phi$  y  $\sin \phi$  y formando la suma de los cuadrados, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Es una elipse con su centro en el origen de coordenadas<sup>1</sup>. Para  $\delta = 0$  ó  $\pi$ , la trayectoria degenera en un segmento de recta.

## § 24. Vibraciones de las moléculas

Si tenemos un sistema de partículas interactuantes que no se encuentran en un campo exterior, no todos sus grados de libertad se refieren a las oscilaciones. Un ejemplo típico de tales sistemas es el de las moléculas. Además de los movimientos constituidos por las oscilaciones de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio en el interior de la molécula, ésta, en conjunto, puede realizar movimientos de traslación y de rotación.

Al movimiento de traslación corresponden tres grados de libertad, y, en general, el mismo número para la rotación, de modo que de los  $3n$  grados de libertad de una molécula de  $n$  átomos,  $3n - 6$  corresponden a vibraciones. Una excepción es la de las moléculas cuyos átomos están alineados, para los cuales hay sólo dos grados de libertad de rotación (ya que la rotación alrededor de la línea de átomos no tiene sentido), y por lo tanto hay  $3n - 5$  grados de libertad vibratorios.

Para resolver el problema mecánico de las vibraciones de una molécula, es conveniente excluir desde el principio los grados de libertad correspondientes a los movimientos de traslación y de rotación. Para eliminar el movimiento de traslación, hace falta igualar a cero el ímpetu total de la molécula. Puesto que esta condición implica que el centro de masa de la molécula esté en reposo, puede expresarse escribiendo que las tres coordenadas del centro de masa son constantes. Poniendo  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ , donde  $\mathbf{r}_{a0}$  es el radio vector de la posición

<sup>1</sup> El hecho de que la trayectoria en un campo con energía potencial  $U = \frac{1}{2}kr^2$  es una curva cerrada, ha sido ya mencionado en § 14.

de equilibrio del átomo  $a$ , y  $\mathbf{u}_a$  su separación de esta posición, se tiene la condición

$$\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{cte} = \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$$

o bien,

$$\sum m_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (24.1)$$

Para eliminar la rotación de la molécula, hace falta anular su momento angular total. Como el momento angular no es la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas, la condición de que se anule no puede expresarse en general haciendo que una tal función sea igual a cero. Sin embargo, en el caso de pequeñas oscilaciones, puede hacerse. En efecto, escribiendo de nuevo  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$  y despreciando los infinitésimos de segundo orden en los desplazamientos  $\mathbf{u}_a$ , se puede escribir el momento angular de la molécula de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \sum m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \cong \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \dot{\mathbf{u}}_a = (\text{d}/\text{dt}) \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a.$$

Por tanto, la condición de que se anule es, con la misma aproximación,

$$\sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a = 0, \quad (24.2)$$

pudiendo escogerse arbitrariamente el origen de coordenadas.

Las vibraciones normales de la molécula pueden clasificarse según el movimiento correspondiente de los átomos, en virtud de consideraciones ligadas a la simetría de las posiciones de equilibrio de los átomos en la molécula. Hay un método general de hacerlo, basado en el uso de la teoría de grupos, que será expuesto en otro volumen de este curso<sup>1</sup>. Aquí consideraremos solamente algunos ejemplos elementales.

Si los  $n$  átomos de la molécula están situados en un mismo plano, se pueden distinguir las oscilaciones normales en que los átomos permanecen en el plano, de aquellas en las que los átomos salen del plano. El número de unas y otras se determina fácilmente. Puesto que para el movimiento en un plano hay  $2n$  grados de libertad, de los cuales dos son de traslación y uno de rotación, el número de vibraciones normales que dejan los átomos en su plano es  $2n - 3$ . Los  $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$  grados de libertad vibratorios restantes corresponden a las oscilaciones en las que los átomos salen de su plano.

En el caso de una molécula lineal, se pueden distinguir las vibraciones longitudinales que mantienen la forma lineal de la molécula, de las vibraciones que separan los átomos de la recta. Puesto que al movimiento de  $n$  partículas en una recta corresponden  $n$  grados de libertad, de los cuales uno es de traslación, el número de vibraciones que dejan los átomos en la recta es  $n - 1$ . Como el número de grados de libertad vibratorios de una molécula lineal es  $3n - 5$ , se tendrán  $2n - 4$  vibraciones en las que los átomos saldrán de la recta. Sin embargo, a estas  $2n - 4$  vibraciones solamente corresponden  $n - 2$  fre-

<sup>1</sup> Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, cap. XII.

cuencias distintas, ya que cada vibración puede efectuarse en dos planos perpendiculares (que pasan por el eje de la molécula); es evidente por simetría que cada par de vibraciones normales así obtenidas tienen la misma frecuencia.

## PROBLEMAS

1. Determinar la frecuencia de las vibraciones de una molécula simétrica lineal triatómica  $ABA$  (fig. 28). Se supone que la energía potencial de la molécula depende solamente de las distancias  $AB$  y  $BA$  y del ángulo  $ABA$ .

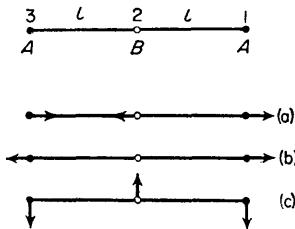


FIG. 28

*Solución:* Los desplazamientos longitudinales  $x_1, x_2, x_3$  de los átomos están relacionados, según (24.1) por

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0.$$

Con la ayuda de esta ecuación, eliminamos  $x_2$  de la lagrangiana del movimiento longitudinal de la molécula

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

y utilizando las nuevas coordenadas

$$Q_a = x_1 + x_3, Q_s = x_1 - x_3.$$

obtenemos,

$$L = \frac{\mu m_A}{4m_B} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2} Q_a^2 - \frac{k_1}{4} Q_s^2,$$

( $\mu = 2m_A + m_B$  masa de la molécula). Es evidente que  $Q_a$  y  $Q_s$  son coordenadas normales (todavía no normalizadas). La coordenada  $Q_a$  corresponde a una vibración antisimétrica alrededor del centro de la molécula ( $x_1 = x_3$ ; fig. 28, a) y de frecuencia

$$\omega_a = \sqrt{(k_1 \mu / m_A m_B)}.$$

La coordenada  $Q_s$  corresponde a una vibración simétrica ( $x_1 = -x_3$ ; fig. 28, b) de frecuencia

$$\omega_{s1} = \sqrt{(k_1 / m_A)}.$$

Los desplazamientos transversales de los átomos  $y_1, y_2, y_3$  están relacionados, según (24.1) y (24.2) por

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, y_1 = y_3$$

(vibraciones simétricas de curvatura de la molécula; fig. 28, c). Sea  $\frac{1}{2}k_2l^2\delta^2$  la energía potencial de curvatura de la molécula, donde  $\delta$  es la desviación del ángulo  $ABA$  con respecto a  $\pi$ ; su expresión en función de los desplazamientos es

$$\delta = [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]/l.$$

Expresando  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  en función de  $\delta$ , se obtiene la lagrangiana del movimiento transversal de la molécula

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_A(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_2l^2\delta^2 \\ &= \frac{m_A m_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}k_2l^2\delta^2, \end{aligned}$$

de donde la frecuencia

$$\omega_{s2} = \sqrt{(2k_2\mu/m_A m_B)}.$$

2. El mismo problema para una molécula  $ABA$  de forma triangular (fig. 29).

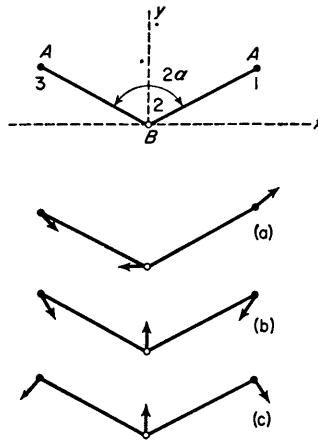


FIG. 29

*Solución:* Según (24.1) y (24.2) las componentes  $x$  e  $y$  de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de los átomos están relacionados por

$$\begin{aligned} m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2 &= 0, \\ m_A(y_1+y_3)+m_By_2 &= 0, \\ (y_1-y_3)\sin\alpha-(x_1+x_3)\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Las variaciones  $\delta l_1$  y  $\delta l_2$  en las distancias  $AB$  y  $BA$  se obtienen proyectando los vectores  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$  sobre las rectas  $AB$  y  $BA$ :

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= (x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha, \\ \delta l_2 &= -(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha. \end{aligned}$$

La variación del ángulo  $ABA$  se obtiene proyectando los mismos vectores sobre las direcciones perpendiculares a los segmentos  $AB$  y  $BA$ :

$$\delta = \frac{1}{l}[(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha] + \frac{1}{l}[-(x_3 - x_2) \cos \alpha - (y_3 - y_2) \sin \alpha].$$

La lagrangiana de la molécula es:

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{\mathbf{u}}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{1}{2}k_2l^2\delta^2.$$

Introducimos las nuevas coordenadas

$$Q_a = x_1 + x_3, q_{s1} = x_1 - x_3, q_{s2} = y_1 + y_3.$$

Las componentes de los vectores  $\mathbf{u}$  se expresan en función de estas coordenadas por

$$x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1}), x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1}), x_2 = -m_A Q_a / m_B,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a \operatorname{ctg} \alpha), y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a \operatorname{ctg} \alpha), y_2 = -m_A q_{s2} / m_B.$$

La lagrangiana obtenida es:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_A\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)\dot{Q}_a^2 + \frac{1}{2}m_A\dot{q}_{s1}^2 + \frac{\mu m_A}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2 - \\ & - \frac{1}{2}k_1Q_a^2\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\operatorname{sen}^2 \alpha\right) - \\ & - \frac{1}{2}q_{s1}^2(k_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2k_2 \operatorname{cos}^2 \alpha) - \frac{1}{2}q_{s2}^2\frac{\mu^2}{m_B^2}(k_1 \operatorname{cos}^2 \alpha + 2k_2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + \\ & + q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha. \end{aligned}$$

Esta relación muestra que la coordenada  $Q_a$  corresponde a una vibración normal antisimétrica, alrededor del eje  $y$  ( $x_1 = x_3$ ;  $y_1 = -y_3$ ; fig. 29. a), con frecuencia

$$\omega_a = \sqrt{\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\operatorname{sen}^2 \alpha\right)\right]}.$$

Las coordenadas  $q_{s1}$  y  $q_{s2}$  corresponden a un conjunto de dos vibraciones simétricas alrededor del eje  $y$  ( $x_1 = -x_3$ ,  $y_1 = y_3$ ; fig. 29, b y c) cuyas frecuencias  $\omega_{s1}$  y  $\omega_{s2}$  están definidas como las raíces de la ecuación característica de segundo grado respecto a  $\omega^2$ :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \operatorname{cos}^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_A^2 m_B} = 0.$$

Cuando  $2\alpha = \pi$ , estas tres frecuencias coinciden con las deducidas en el problema 1.

3. El mismo problema para una molécula lineal asimétrica  $ABC$  (fig. 30).

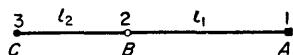


FIG. 30

*Solución:* Los desplazamientos longitudinales ( $x$ ) y los transversales ( $y$ ) están ligados por las relaciones

$$m_Ax_1 + m_Bx_2 + m_Cx_3 = 0, \quad m_Ay_1 + m_By_2 + m_Cy_3 = 0, \\ m_Al_1y_1 = m_Cl_2y_3.$$

La energía potencial de extensión y de curvatura puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{2}k_1(\delta l_1)^2 + \frac{1}{2}k_1'(\delta l_2)^2 + \frac{1}{2}k_2l^2\delta^2,$$

( $2l = l_1 + l_2$ ). Cálculos análogos a los del problema 1 dan,

$$\omega_t^2 = \frac{k_2l^2}{l_1^2l_2^2} \left( \frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

para la frecuencia de las vibraciones transversales, y la ecuación de segundo grado (en  $\omega^2$ )

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k_1 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k_1' \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C} = 0$$

para las frecuencias  $\omega_{l1}$  y  $\omega_{l2}$  de las vibraciones longitudinales.

### § 25. Oscilaciones amortiguadas

Hasta aquí hemos supuesto que el movimiento tenía lugar en el vacío o que la influencia del medio en el movimiento era despreciable. En realidad, cuando un cuerpo se mueve en un medio, éste ofrece una resistencia que tiende a retardar el movimiento. La energía del cuerpo que se mueve se disipa finalmente, convirtiéndose en calor.

En estas condiciones, el movimiento no es ya un proceso puramente mecánico, y su estudio exige que se tenga en cuenta el movimiento del medio y el estado térmico interno del medio así como el del cuerpo. Observemos que, en general, no se puede asegurar que la aceleración del cuerpo en movimiento sea solamente una función de sus coordenadas y de su velocidad en el instante considerado; es decir, no hay ecuaciones del movimiento en el sentido mecánico. Así, el problema de un cuerpo que se mueve en un medio no es un problema de Mecánica.

Sin embargo, existe una cierta clase de casos en los que el movimiento en un medio puede describirse aproximadamente con la ayuda de las ecuaciones mecánicas del movimiento, introduciendo en ellas ciertos términos adicionales. Entre tales casos se incluye el de oscilaciones de frecuencias pequeñas comparadas con las frecuencias de los procesos disipativos del medio. Cuando se cumple esta condición, se puede considerar que el cuerpo está sometido a la acción de una «fuerza de rozamiento» que depende solamente (para un medio homogéneo dado) de su velocidad.

Se puede además desarrollar la fuerza de rozamiento en potencias de la velocidad si ésta es suficientemente pequeña. El término de orden cero del desarrollo es nulo, ya que ninguna fuerza de rozamiento actúa sobre un cuerpo en reposo, y así, el primer término que no se anula es proporcional a la velo-

cidad. Entonces la fuerza de rozamiento generalizada  $f_r$ , que actúa sobre un sistema que realiza pequeñas oscilaciones lineales puede escribirse

$$f_r = -\alpha \dot{x},$$

donde  $x$  es la coordenada generalizada y  $\alpha$  un coeficiente positivo; el signo menos indica que la fuerza actúa en sentido opuesto al de la velocidad. Añadiendo esta fuerza al segundo miembro de la ecuación del movimiento obtenemos [véase (21.4)]:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (25.1)$$

Dividimos esta expresión por  $m$  y hacemos

$$k/m = \omega_0^2, \quad \alpha/m = 2\lambda; \quad (25.2)$$

$\omega_0$  es la frecuencia de las oscilaciones libres del sistema en ausencia de rozamiento y  $\lambda$  se llama *coeficiente de amortiguamiento* (o *decremento*).<sup>1</sup>

Se tiene, pues, la ecuación,

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (25.3)$$

Siguiendo las reglas generales de resolución de ecuaciones lineales con coeficientes constantes, hacemos  $x = \exp(rt)$  y se obtiene para  $r$  la ecuación característica

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0,$$

de donde,

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}.$$

La solución general de la ecuación (25.3) es:

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t).$$

Conviene distinguir dos casos. Si  $\lambda < \omega_0$ , se tienen para  $r$  dos valores complejos conjugados. La solución general de la ecuación del movimiento puede entonces escribirse,

$$x = \text{re}\{A \exp[-\lambda t + i\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)}t]\},$$

siendo  $A$  una constante compleja arbitraria. Se puede escribir también,

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)} \quad (25.4)$$

donde  $a$  y  $\alpha$  son constantes reales. El movimiento descrito por estas fórmulas constituye las *oscilaciones amortiguadas*. Una oscilación amortiguada puede considerarse como una oscilación armónica cuya amplitud decrece exponencialmente. La rapidez de disminución de la amplitud está determinada por el exponente  $\lambda$  y la «frecuencia»  $\omega$  es menor que la de las oscilaciones libres en ausencia de rozamiento; si  $\lambda \ll \omega_0$  la diferencia entre  $\omega$  y  $\omega_0$  es un infinitésimo

<sup>1</sup> El producto sin dimensiones  $\lambda T$  (donde  $T = 2\pi/\omega$  es el período) se llama decremento logarítmico de amortiguamiento.

de segundo orden. *A priori* era de esperar esta disminución de la frecuencia como resultado del rozamiento, ya que éste retarda el movimiento.

Si  $\lambda \ll \omega_0$ , la amplitud de la oscilación amortiguada casi no varía en el curso de un período  $2\pi/\omega$ . En este caso, es significativo considerar el valor medio (en un período) de los cuadrados de las coordenadas y velocidades, despreciando, al tomar este valor medio, la variación del factor  $\exp(-\lambda t)$ . Estos valores medios de los cuadrados son evidentemente proporcionales a  $\exp(-2\lambda t)$ . Por lo tanto, la energía media del sistema disminuye según

$$\bar{E} = E_0 \exp(-2\lambda t), \quad (25.5)$$

donde  $E_0$  es el valor inicial.

Sea ahora  $\lambda > \omega_0$ . Entonces los dos valores de  $r$  son reales y negativos. La forma general de la solución es:

$$x = c_1 \exp\{-[\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}]t\} + c_2 \exp\{-[\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}]t\}. \quad (25.6)$$

Se ve en este caso, que se presenta si el rozamiento es suficientemente grande, que el movimiento consiste en una disminución monótona de  $x$ , que tiende asintóticamente (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) a la posición de equilibrio (sin oscilación). Este tipo de movimiento se llama *amortiguado aperiódico*.

Finalmente, en el caso particular en que  $\lambda = \omega_0$ , la ecuación característica tiene una raíz doble  $r = -\lambda$ . La solución general de la ecuación diferencial es entonces,

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\lambda t). \quad (25.7)$$

Este es un caso especial del amortiguamiento aperiódico.

Para un sistema de varios grados de libertad, las fuerzas de rozamiento generalizadas correspondientes a las coordenadas  $x_i$  son funciones lineales de las velocidades

$$f_{r,i} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.8)$$

Con argumentos puramente mecánicos no se puede llegar a conclusiones en cuanto a las propiedades de simetría de los coeficientes  $\alpha_{ik}$  con respecto a los índices  $i$  y  $k$ . Pero los métodos de física estadística<sup>1</sup> permiten demostrar que en todos los casos

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (25.9)$$

Por tanto, las expresiones (25.8) pueden escribirse como las derivadas

$$f_{r,i} = - \partial F / \partial \dot{x}_i \quad (25.10)$$

de la forma cuadrática

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (25.11)$$

que se llama *función disipativa*.

<sup>1</sup> Véase vol. V, *Física estadística*, § 123.

Las fuerzas (25.10) deben añadirse al segundo miembro de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (25.12)$$

La función disipativa posee por sí misma un importante significado físico: determina la intensidad de la disipación de energía en el sistema.

Puede verificarse fácilmente calculando la derivada con respecto al tiempo de la energía mecánica del sistema. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) \\ &= \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \\ &= - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \end{aligned}$$

Puesto que  $F$  es una función cuadrática de las velocidades, el teorema de Euler para las funciones homogéneas muestra que la suma del segundo miembro es igual a  $2F$ . Así,

$$dE/dt = -2F, \quad (25.13)$$

es decir, que la velocidad de variación de la energía del sistema es igual al doble del valor de la función disipativa. Como el proceso de disipación lleva consigo una pérdida de energía, se tiene siempre  $F > 0$ , es decir, que la forma cuadrática (25.11) es esencialmente positiva.

Las ecuaciones de pequeñas oscilaciones con rozamiento se obtienen añadiendo las fuerzas (25.8) al segundo miembro de las ecuaciones (23.5):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.14)$$

Haciendo en estas ecuaciones:

$$x_k = A_k \exp(rt),$$

se obtiene, dividiendo todo por  $\exp(rt)$ , el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales para las constantes  $A_k$ :

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0. \quad (25.15)$$

Igualando a cero el determinante de este sistema, encontramos la ecuación característica, que determina los posibles valores de  $r$ :

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0. \quad (25.16)$$

Es una ecuación en  $r$  de grado  $2s$ . Como todos sus coeficientes son reales, sus raíces son o bien reales, o pares de complejas conjugadas. Las raíces reales deben ser negativas, y las raíces complejas deben tener la parte real negativa, ya que de otro modo las coordenadas, las velocidades y la energía del sistema aumentarían exponencialmente con el tiempo, mientras que las fuerzas disipativas conducen a una disminución de la energía.

### § 26. Oscilaciones forzadas con rozamiento

El estudio de las oscilaciones forzadas con rozamiento es enteramente análogo al de las oscilaciones sin rozamiento (ver § 22). Consideremos aquí con detalle el caso particularmente interesante en que la fuerza que provoca las oscilaciones forzadas es periódica.

Añadiendo al segundo miembro de la ecuación (25.1) la fuerza exterior  $f \cos \gamma t$  y dividiendo por  $m$ , se obtiene la ecuación de movimiento siguiente:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \cos \gamma t. \quad (26.1)$$

Conviene resolver esta ecuación en forma compleja; sustituymos en el segundo miembro  $\cos \gamma t$  por  $\exp(i\gamma t)$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \exp(i\gamma t).$$

Sea  $x = B \exp(i\gamma t)$  una integral particular; se obtiene para  $B$ :

$$B = f/m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma). \quad (26.2)$$

Escribiendo  $B = b \exp(i\delta)$ , resulta para  $b$  y  $\delta$ :

$$b = f/m\sqrt{[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}, \quad \operatorname{tg} \delta = 2\lambda\gamma/(\gamma^2 - \omega_0^2). \quad (26.3)$$

Tomando la parte real de la expresión  $B \exp(i\gamma t) = b \exp[i(\gamma t + \delta)]$ , se obtiene una integral particular de la ecuación (26.1); añadiéndole la solución general de la ecuación sin segundo miembro (que escribimos, para fijar ideas, en el caso  $\omega_0 > \lambda$ ), se tiene finalmente

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.4)$$

El primer término disminuye exponencialmente con el tiempo, de modo que al cabo de un intervalo de tiempo suficientemente grande, sólo queda el segundo término

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.5)$$

La expresión (26.3), que da la amplitud de la oscilación forzada aumenta cuando  $\gamma$  se acerca a  $\omega_0$ , pero no tiende a infinito como en el caso de la reso-

nancia en ausencia de rozamiento. Para una amplitud dada de la fuerza  $f$ , la amplitud de las oscilaciones es máxima cuando  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ; si  $\lambda \ll \omega_0$ , este valor sólo difiere de  $\omega_0$  en un infinitésimo de segundo orden.

Consideremos las proximidades de la resonancia. Hagamos  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$  siendo  $\epsilon$  pequeño; supongamos también que  $\lambda \ll \omega_0$ . Se puede entonces escribir aproximadamente en (26.2):

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

de modo que

$$B = -f/2m(\epsilon - i\lambda)\omega_0 \quad (26.6)$$

o

$$b = f/2m\omega_0\sqrt{(\epsilon^2 + \lambda^2)}, \quad \operatorname{tg} \delta = \lambda/\epsilon. \quad (26.7)$$

Observemos el carácter particular de la variación de la diferencia de fase entre la oscilación del sistema y la fuerza exterior cuando la frecuencia de esta última varía. Esta diferencia de fase es siempre negativa, es decir, que la oscilación «retrasa» con respecto a la fuerza exterior. Lejos de la resonancia, para valores de  $\gamma < \omega_0$ ,  $\delta$  tiende a cero, y para los valores  $\gamma > \omega_0$ , hacia  $-\pi$ . La variación de  $\delta$  de cero a  $-\pi$  tiene lugar en un estrecho dominio de frecuencias (de ancho  $\cong \lambda$ ), próximas a  $\omega_0$ ; para  $\gamma = \omega_0$  la diferencia de fase pasa por el valor  $-\frac{1}{2}\pi$ . En ausencia de rozamiento, la fase de la oscilación forzada varía discontinuamente en  $\pi$  para  $\gamma = \omega_0$  [el segundo miembro de (22.4) cambia de signo]; cuando existe rozamiento, la discontinuidad se «suaviza».

En el movimiento estacionario, cuando el sistema ejecuta oscilaciones forzadas (26.5), su energía permanece invariable. El sistema absorbe continuamente energía (a expensas de la fuente de la fuerza exterior), energía que se disipa a causa del rozamiento.

Sea  $I(\gamma)$  el valor medio de la energía absorbida por unidad de tiempo, que depende de la frecuencia de la fuerza exterior. De (25.13) se tiene,

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

donde  $\bar{F}$  es el valor medio (en un período de oscilación) de la función disipativa. Para un movimiento lineal, la expresión (25.11) de la función disipativa se reduce a  $F = \frac{1}{2}ax^2 = \lambda m\dot{x}^2$ . Sustituyendo (26.5) se obtiene:

$$F = \lambda mb^2\gamma^2 \operatorname{sen}^2(\gamma t + \delta).$$

El valor medio en el tiempo del cuadrado del seno es  $\frac{1}{2}$ , de modo que

$$I(\gamma) = \lambda mb^2\gamma^2. \quad (26.8)$$

En las proximidades de la resonancia, sustituyendo de (26.7) la amplitud de la oscilación, se tiene,

$$I(\epsilon) = f^2\lambda/4m(\epsilon^2 + \lambda^2). \quad (26.9)$$

Esta dependencia de la absorción de energía con la frecuencia se llama *dispersión*. La *semianchura* de la curva de resonancia (fig. 31) es el valor de  $|\epsilon|$  para el cual  $I(\epsilon)$  es igual a la mitad de su valor máximo (que tiene lugar para  $\epsilon = 0$ ). Es evi-

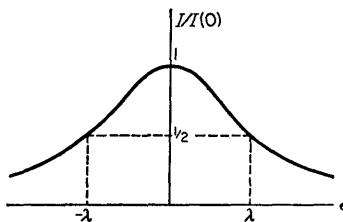


FIG. 31

dente, de (26.9), que en el caso presente esta semianchura coincide con el coeficiente de amortiguamiento  $\lambda$ . La altura del máximo

$$I(0) = f^2/4m\lambda,$$

es inversamente proporcional a  $\lambda$ . Entonces, cuando el coeficiente de amortiguamiento decrece, la curva de resonancia se hace más estrecha y más alta, es decir, su máximo resulta más agudo. Pero el área encerrada por la curva de resonancia permanece invariable.

Este área viene dada por la integral

$$\int_0^\infty I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\epsilon) d\epsilon.$$

Puesto que  $I(\epsilon)$  decrece rápidamente cuando  $|\epsilon|$  aumenta, de modo que la región de los  $|\epsilon|$  grandes no tiene importancia, el límite inferior puede sustituirse por  $-\infty$  y escribir  $I(\epsilon)$  en la forma (26.9). Se tiene entonces

$$\int_{-\infty}^\infty I(\epsilon) d\epsilon = \frac{f^2\lambda}{4m} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (26.10)$$

### PROBLEMA

Determinar las oscilaciones forzadas debidas a una fuerza exterior  $f = f_0 \exp(at) \cos \gamma t$  en presencia de rozamiento.

*Solución:* Resolvemos la ecuación de movimiento en forma compleja

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f_0/m) \exp(at + i\gamma t)$$

y tomamos la parte real de la solución. Se obtiene como resultado

$$x = b \exp(at) \cos(\gamma t + \delta),$$

donde,

$$b = f_0/m\sqrt{[(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2]},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -2\gamma(\alpha + \lambda)/(\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda).$$

### § 27. Resonancia paramétrica

Existen sistemas oscilantes que no son cerrados, en los cuales el resultado de la acción exterior se reduce a una variación en el tiempo de los parámetros del sistema<sup>1</sup>.

Los parámetros de un sistema lineal son los coeficientes  $m$  y  $k$  de la lagrangiana (21.3); si éstos son funciones del tiempo, la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \quad (27.1)$$

Sustituimos  $t$  por una nueva variable independiente  $\tau$  tal que  $d\tau = dt/m(t)$ ; la ecuación toma la forma

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + m\dot{x} = 0.$$

Por tanto, y sin perder generalidad el razonamiento, basta considerar la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0 \quad (27.2)$$

que se obtendría de (27.1) haciendo  $m = \text{cte}$ .

La forma de la función  $\omega(t)$  está dada por las condiciones del problema; supongamos esta función periódica de frecuencia  $\gamma$  (y período  $T = 2\pi/\gamma$ ). Esto significa que

$$\omega(t+T) = \omega(t),$$

y, por tanto, toda ecuación del tipo (27.2) es invariante con respecto a la transformación  $t \rightarrow t + T$ . Luego si  $x(t)$  es una solución de la ecuación, la función  $x(t+T)$  es también una solución. Esto es, si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son dos integrales independientes de la ecuación (27.2), deben transformarse en combinación lineal de ellas mismas cuando se sustituye  $t$  por  $t + T$ . Es posible escoger  $x_1$  y  $x_2$  de modo tal que, cuando se remplaza  $t$  por  $t + T$ , queden simplemente multiplicadas por un factor constante<sup>2</sup>:

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t).$$

La forma más general de las funciones que tienen esta propiedad es:

$$x_1(t) = \mu_1 e^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2 e^{t/T} \Pi_2(t), \quad (27.3)$$

<sup>1</sup> Un ejemplo sencillo es el de un péndulo cuyo punto de suspensión efectúa un movimiento periódico dado en una dirección vertical (véase problema 3).

<sup>2</sup> Se supone aquí que las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  no coinciden.

donde  $\Pi_1(t)$  y  $\Pi_2(t)$  son funciones puramente periódicas del tiempo (de período  $T$ ).

Las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  en estas funciones deben estar ligadas por una cierta relación. En efecto, multiplicando las ecuaciones

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

respectivamente por  $x_2$  y  $x_1$ , y restándolas miembro a miembro, se tiene

$$\ddot{x}_1x_2 - \ddot{x}_2x_1 = d(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)dt = 0,$$

o

$$\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2 = \text{cte} \quad (27.4)$$

Pero para cualquier función  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  del tipo (27.3), el primer miembro de esta igualdad está multiplicado por  $\mu_1\mu_2$  cuando se sustituye  $t$  por  $t + T$ . Por tanto, es evidente que para que la igualdad (27.4) se satisfaga en todos los casos, hace falta que

$$\mu_1\mu_2 = 1. \quad (27.5)$$

Pueden obtenerse otras conclusiones acerca de las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  partiendo del hecho de que los coeficientes de la ecuación (27.2) son reales. Si  $x(t)$  es una integral de esta ecuación, la función compleja conjugada  $x^*(t)$  debe ser también una integral. Esto conduce a que las constantes  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  deben coincidir con  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2^*$ , es decir, que, o bien  $\mu_1 = \mu_2^*$ , o bien  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son reales. En el primer caso, teniendo en cuenta (27.5), resulta  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , es decir,  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ ; los módulos de las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son iguales a la unidad.

En el segundo caso, las dos integrales independientes de la ecuación (27.2) son de la forma

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T}\Pi_2(t), \quad (27.6)$$

donde  $\mu$  es un número real positivo o negativo distinto de la unidad. Una de estas funciones (la primera o la segunda, según que  $|\mu| > 1$  ó  $|\mu| < 1$ ) crece exponencialmente con el tiempo. Esto significa que el estado de reposo del sistema (en la posición de equilibrio  $x = 0$ ) es inestable: bastará una separación de esta posición por pequeña que sea para provocar un desplazamiento  $x$  rápidamente creciente con el tiempo. Este fenómeno se llama *resonancia paramétrica*.

Debe observarse que si los valores iniciales de  $x$  y  $\dot{x}$  son exactamente nulos, permanecerán nulos, lo que no ocurre en la resonancia ordinaria (§ 22), en que el desplazamiento crece con el tiempo (proporcionalmente a  $t$ ) aun si el valor inicial es igual a cero.

Determinemos las condiciones en que aparece la resonancia paramétrica en el caso importante de que la función  $\omega(t)$  difiere poco de un valor constante  $\omega_0$  y es una función periódica simple

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (27.7)$$

donde la constante  $h \ll 1$  (consideraremos  $h$  positivo, lo que siempre puede obtenerse con una elección conveniente del origen de tiempos). Como se verá más adelante, la resonancia paramétrica tiene una intensidad máxima cuando la frecuencia de la función  $\omega(t)$  es aproximadamente el doble de la frecuencia  $\omega_0$ . Hagamos, pues,

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon,$$

donde  $\epsilon \ll \omega_0$ .

Buscamos la solución de la ecuación del movimiento<sup>1</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega_0 + \epsilon)t]x = 0 \quad (27.8)$$

de la forma,

$$x = a(t) \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + b(t) \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t, \quad (27.9)$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones del tiempo que varían lentamente en comparación con los factores trigonométricos. Esta forma de solución, evidentemente, no es exacta. En realidad, la función  $x(t)$  contiene también términos con frecuencias que difieren de  $\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon$  en un múltiplo entero de  $2\omega_0 + \epsilon$ ; sin embargo, estos términos son infinitésimos de orden superior con respecto a  $h$ , y se pueden despreciar en una primera aproximación (véase problema 1).

Sustituyamos (27.9) en (27.8) y efectuemos los cálculos no conservando más que los términos de primer orden en  $\epsilon$ . Supongamos que  $\dot{a} \sim \epsilon a$ ,  $\dot{b} \sim \epsilon b$  (la validez de esta hipótesis en las condiciones de resonancia será confirmada por el resultado). Los productos de factores trigonométricos se sustituyen por sumas,

$$\cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t \cdot \cos(2\omega_0 + \epsilon)t = \frac{1}{2} \cos 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t,$$

etcétera, y de acuerdo con lo que se dijo anteriormente se omiten los términos de frecuencias  $3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$ . Finalmente se obtiene

$$-(2a + b\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0 b)\omega_0 \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + (2b - a\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0 a)\omega_0 \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t = 0.$$

Esta igualdad es válida a condición de que los coeficientes de cada uno de los factores seno y coseno se anulen simultáneamente. Se obtiene entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales para las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$ . Siguiendo la regla general, buscamos una solución proporcional a  $\exp(st)$ . Entonces,

$$sa + \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0)b = 0, \quad \frac{1}{2}(\epsilon - \frac{1}{2}h\omega_0)a - sb = 0,$$

y para que puedan resolverse simultáneamente estas dos ecuaciones algebraicas es preciso que:

$$s^2 = \frac{1}{4}[(\frac{1}{2}h\omega_0)^2 - \epsilon^2]. \quad (27.10)$$

<sup>1</sup> Una ecuación de este tipo (con  $\gamma$  y  $h$  arbitrarios) se llama en física matemática ecuación de Mathieu.

La condición de resonancia paramétrica es que  $s$  sea real (o sea,  $s^2 > 0$ )<sup>1</sup>. Así, la resonancia paramétrica tiene lugar en el intervalo

$$-\frac{1}{2}h\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\omega_0 \quad (27.11)$$

a ambos lados de la frecuencia  $2\omega_0$ <sup>2</sup>. El ancho de este intervalo es proporcional a  $h$ , y los valores del coeficiente de amplificación  $s$  en el intervalo son también del orden de  $h$ .

La resonancia paramétrica también ocurre cuando la frecuencia  $\gamma$  de variación del parámetro del sistema es próxima a valores tales como  $2\omega_0/n$ , donde  $n$  es un número entero cualquiera. Sin embargo, el ancho de la región de resonancia (región de inestabilidad) disminuye rápidamente, como  $h^n$ , al aumentar  $n$  (véase problema 2). El valor del coeficiente de amplificación de las oscilaciones también disminuye.

El fenómeno de resonancia paramétrica se mantiene en presencia de un débil rozamiento en el sistema, pero la región de inestabilidad se estrecha un poco. Como se ha visto en § 25, el rozamiento lleva consigo un amortiguamiento de la amplitud de las oscilaciones según la ley  $\exp(-\lambda t)$ . Por lo tanto, la amplificación de las oscilaciones en la resonancia paramétrica es como  $\exp[(s - \lambda)t]$ , con el signo de  $s$  positivo, dado por la solución del problema sin rozamiento, y el límite de la región de inestabilidad está determinado por la ecuación  $s - \lambda = 0$ . Así, despejando  $s$  de (27.10), se obtiene para la región de resonancia, en lugar de 27.11,

$$-\sqrt{[(\frac{1}{2}h\omega_0)^2 - 4\lambda^2]} < \epsilon < \sqrt{[(\frac{1}{2}h\omega_0)^2 - 4\lambda^2]}. \quad (27.12)$$

Observemos que la resonancia no es posible para una amplitud  $h$  arbitrariamente pequeña, sino solamente para amplitud superior a un determinado valor «umbral»  $h_k$ , que en el caso de (27.12) es igual a

$$h_k = 4\lambda/\omega_0.$$

Puede demostrarse que para resonancias en las proximidades de las frecuencias  $2\omega_0/n$ , el valor umbral  $h_k$  es proporcional a  $\lambda^{1/n}$ , es decir, crece con  $n$ .

## PROBLEMAS

1. Obtener una expresión aproximada hasta los términos en  $h^2$  de los límites de la región de inestabilidad para una resonancia en las proximidades de  $\gamma = 2\omega_0$ .

*Solución:* Busquemos una solución de la ecuación (27.8) del tipo

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + a_1 \cos 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + b_1 \sin 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t,$$

<sup>1</sup> La constante  $\mu$  en (27.6) está ligada a  $s$  por la relación  $\mu = -\exp(s\pi/\omega_0)$ ; cuando se sustituye  $t$  por  $t + T$ , el seno y el coseno en (27.9) cambian de signo.

<sup>2</sup> Si interesan solamente los límites de la región de resonancia (y no los valores de  $s$  en ella) pueden simplificarse los cálculos observando que en estos límites  $s = 0$ , es decir, que los coeficientes  $a$  y  $b$  en (27.9) son constantes; esto da inmediatamente los valores  $\epsilon = \pm \frac{1}{2}h\omega_0$  correspondientes a los límites de la región (27.11).

que incluye términos en  $h$  de un orden mayor que (27.9). Puesto que sólo interesan los límites de la región de inestabilidad, consideraremos los coeficientes  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  como constantes de acuerdo con la última nota al pie del § 27. Sustituimos en (27.8), convirtiendo los productos trigonométricos en sumas y omitiendo los términos de frecuencias  $5(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$  que no se necesitan para esta aproximación. El resultado es:

$$\begin{aligned} & [-a_0(\omega_0\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2) + \frac{1}{2}h\omega_0^2a_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2a_1] \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \\ & + [-b_0(\omega_0\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2) - \frac{1}{2}h\omega_0^2b_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2b_1] \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \\ & + [\frac{1}{2}h\omega_0^2a_0 - 8\omega_0^2a_1] \cos 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \\ & + [\frac{1}{2}h\omega_0^2b_0 - 8\omega_0^2b_1] \sin 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t = 0. \end{aligned}$$

En los términos de frecuencia  $\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon$  hemos conservado los infinitésimos de primero y segundo orden, y en los términos de frecuencia  $3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$  solamente los de primer orden. Las expresiones entre corchetes deben anularse independientemente; las dos últimas dan:

$$a_1 = ha_0/16, \quad b_1 = hb_0/16,$$

y las dos primeras

$$\omega_0\epsilon \pm \frac{1}{2}h\omega_0^2 + \frac{1}{4}\epsilon^2 - h^2\omega_0^2/32 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación aproximando hasta términos del orden  $h^2$ , se obtienen los valores límites de  $\epsilon$  buscados:

$$\epsilon = \pm \frac{1}{2}h\omega_0 - h^2\omega_0/32.$$

2. Determinar los límites de la región de inestabilidad para una resonancia en las proximidades de  $\gamma = \omega_0$ .

*Solución:* Haciendo  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ , se obtiene la ecuación del movimiento

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(\omega_0 + \epsilon)t]x = 0.$$

Puesto que los valores de los límites pedidos son del orden de  $h^2 (\epsilon \sim h^2)$ , buscamos una solución del tipo,

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \epsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \epsilon)t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + c_1,$$

que incluye términos de los dos primeros órdenes. Para determinar los límites de la región de inestabilidad, consideraremos otra vez los coeficientes como constantes, y se obtiene

$$\begin{aligned} & [-2\omega_0\epsilon a_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2a_1 + h\omega_0^2c_1] \cos(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + [-2\omega_0\epsilon b_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2b_1] \sin(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + [-3\omega_0^2a_1 + \frac{1}{2}h\omega_0^2a_0] \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + [-3\omega_0^2b_1 + \frac{1}{2}h\omega_0^2b_0] \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + [c_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}h\omega_0^2a_0] = 0. \end{aligned}$$

De donde resulta

$$a_1 = ha_0/6, \quad b_1 = hb_0/6, \quad c_1 = -\frac{1}{2}ha_0,$$

y los dos límites

$$\epsilon = -5h^2\omega_0/24, \quad \epsilon = h^2\omega_0/24$$

3. Encontrar las condiciones de resonancia paramétrica para las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple cuyo punto de suspensión oscila verticalmente en el mismo plano.

*Solución:* La función de Lagrange obtenida en el problema 3, c, § 5 da para pequeñas oscilaciones ( $\phi \ll 1$ ) la ecuación del movimiento

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 [1 + (4a/l) \cos(2\omega_0 t + \epsilon)] \phi = 0,$$

donde  $\omega_0^2 = g/l$ . Es evidente que el parámetro  $h$  está aquí representado por  $4a/l$ . La condición (27.11), por ejemplo, toma la forma

$$|\epsilon| < 2a\sqrt{(g/l^3)}.$$

## § 28. Oscilaciones anarmónicas

Toda la teoría de las pequeñas oscilaciones expuesta más arriba está basada en un desarrollo en serie de las energías potencial y cinética del sistema con respecto a las coordenadas y a las velocidades, donde se conservan solamente los términos de segundo orden; las ecuaciones del movimiento son pues lineales, y esto es lo que nos permite en esta aproximación hablar de oscilaciones *lineales*. Aunque este desarrollo sea completamente legítimo cuando las amplitudes de las oscilaciones son suficientemente pequeñas, al tener en cuenta aproximaciones más elevadas (es decir, la *anarmonicidad o no linealidad* de las oscilaciones), aparecen particularidades del movimiento que, aunque débiles, son cualitativamente nuevas.

Consideremos el desarrollo de la lagrangiana hasta los términos de tercer orden. En la energía potencial aparecen entonces términos de tercer grado en las coordenadas  $x_i$ , y en la energía cinética términos que contienen productos de velocidades y coordenadas de la forma  $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ ; esta diferencia con la expresión (23.3) es debida a que se han retenido términos de primer orden con respecto a  $x$  en el desarrollo de las funciones  $a_{ik}(q)$ . Entonces la lagrangiana es de la forma

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \end{aligned} \quad (28.1)$$

donde  $n_{ikl}$ ,  $l_{ikl}$  son los nuevos coeficientes constantes.

Si se pasa de las coordenadas arbitrarias  $x_i$  a las coordenadas normales  $Q_\alpha$  de la aproximación lineal, como consecuencia del carácter lineal de esta transformación, la tercera y la cuarta suma de (28.1) se transformarán en sumas análogas con  $Q_\alpha$  y  $\dot{Q}_\alpha$  en lugar de las coordenadas  $x_i$  y de las velocidades  $\dot{x}_i$ . Designando los coeficientes de estas nuevas sumas  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  y  $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ , se tiene para la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (28.2)$$

No escribiremos todas las ecuaciones del movimiento que se deducen de esta lagrangiana; lo esencial es que son de la forma

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28.3)$$

donde las  $f_\alpha$  son funciones homogéneas, de segundo grado, de las coordenadas  $Q$  y de sus derivadas con respecto al tiempo.

Aplicando el método de las aproximaciones sucesivas, busquemos una solución de estas ecuaciones del tipo

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (28.4)$$

donde  $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ , y las funciones  $Q_\alpha^{(1)}$  satisfacen a las ecuaciones «no perturbadas»

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

es decir, representan oscilaciones armónicas ordinarias

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (28.5)$$

En la siguiente aproximación, no conservando en el segundo miembro de las expresiones (28.3) más que los términos de segundo orden, se obtienen para las  $Q_\alpha^{(2)}$  las ecuaciones

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28.6)$$

donde deben sustituirse en el segundo miembro las expresiones (28.5). Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, no homogéneas, cuyos segundos miembros pueden representarse como sumas de funciones periódicas simples. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}. \end{aligned}$$

Así, los segundos miembros de las ecuaciones (28.6) contienen términos correspondientes a oscilaciones cuyas frecuencias son sumas y diferencias de las frecuencias propias del sistema. Debe buscarse la solución de estas ecuaciones en una forma que contenga los mismos factores periódicos y se llega a la conclusión de que, en la segunda aproximación, a las oscilaciones normales del sistema, de frecuencias  $\omega_\alpha$ , se superponen oscilaciones suplementarias con frecuencias

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta, \quad (28.7)$$

(en particular, las frecuencias dobles  $2\omega_\alpha$  y la frecuencia cero correspondiente a un desplazamiento constante). Estas frecuencias se llaman *frecuencias combinatorias*. Las amplitudes de las oscilaciones combinatorias son proporcionales a los productos  $a_\alpha a_\beta$  (o a los cuadrados  $a_\alpha^2$ ) correspondientes a las oscilaciones normales.

En las siguientes aproximaciones, donde se incluyen términos de orden má-

elevado en el desarrollo de la lagrangiana, aparecen oscilaciones combinatorias cuyas frecuencias son sumas y diferencias de un mayor número de frecuencias  $\omega_a$ . Además, también aparece un nuevo fenómeno. En efecto, a partir de la aproximación de tercer orden, encontramos entre las frecuencias combinatorias, algunas que coinciden con las frecuencias originales  $\omega_a$  (es decir,  $\omega_a + \omega_\beta - \omega_\beta$ ). Aplicando el método descrito, el segundo miembro de las ecuaciones del movimiento incluirá términos de resonancia que darán lugar en la solución a términos cuya amplitud crecerá con el tiempo. Sin embargo, es físicamente evidente que en un sistema cerrado, en ausencia de fuentes exteriores de energía, no puede producirse un incremento espontáneo de la intensidad de las oscilaciones.

En realidad, en las aproximaciones superiores, las frecuencias fundamentales  $\omega_a$  no son iguales a sus valores no perturbados  $\omega_a^{(0)}$  que figuran en la expresión cuadrática de la energía potencial. La aparición de términos crecientes en la solución surge de un desarrollo del tipo

$$\cos(\omega_a^{(0)} + \Delta\omega_a)t \approx \cos\omega_a^{(0)}t - t\Delta\omega_a \sin\omega_a^{(0)}t,$$

que evidentemente no es legítimo cuando  $t$  es bastante grande.

Por lo tanto, cuando se pasa a las siguientes aproximaciones, el método de aproximaciones sucesivas debe modificarse de modo que los factores periódicos que figuren en la solución contengan desde el principio valores exactos, y no aproximados, de las frecuencias. Los cambios de las frecuencias se determinan, en la solución de las ecuaciones, precisamente por la condición de que no haya términos de resonancia.

Apliquemos este método a oscilaciones anarmónicas con un grado de libertad; escribimos la lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 - \frac{1}{3}mx^3 - \frac{1}{4}m\beta x^4. \quad (28.8)$$

La correspondiente ecuación del movimiento es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28.9)$$

Busquemos su solución en forma de una serie de aproximaciones sucesivas

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

siendo

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (28.10)$$

con un valor exacto de  $\omega$  que buscaremos a continuación en forma de una serie  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$ . (La fase inicial en  $x^{(1)}$  siempre puede anularse escogiendo convenientemente el origen del tiempo.) La forma (28.9) de la ecuación del movimiento no es la más conveniente, ya que cuando se sustituye (28.10) en ella, el primer miembro no es exactamente nulo. Escribimos esta ecuación en la forma equivalente

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \quad (28.11)$$

Haciendo  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  y despreciando términos de orden superior, se obtiene para  $x^{(2)}$  la ecuación,

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t \\ &= -\frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{2}\alpha a^2 \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t.\end{aligned}$$

La condición de que no haya término de resonancia en el segundo miembro da simplemente  $\omega^{(1)} = 0$ , de acuerdo con la segunda aproximación expuesta al principio de este tema. Resolviendo del modo habitual esta ecuación lineal no homogénea, se tiene

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (28.12)$$

A continuación, hacemos en (28.11)  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$ , y obtenemos para  $x^{(3)}$  la ecuación,

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} \dot{x}^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

o, sustituyendo en el segundo miembro las expresiones (28.10) y (28.12) y efectuando una sencilla transformación,

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} &= a^3 \left[ \frac{1}{4}\beta - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + \\ &+ a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta \right] \cos \omega t.\end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente del factor de resonancia  $\cos \omega t$ , encontramos una corrección de la frecuencia fundamental la cual es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones:

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \quad (28.13)$$

La oscilación combinatoria del tercer orden es:

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{1}{2}\beta \right) \cos 3\omega t. \quad (28.14)$$

## § 29. Resonancia en oscilaciones no lineales

Los términos no armónicos en las oscilaciones forzadas de un sistema llevan consigo la aparición de propiedades esencialmente nuevas en los fenómenos de resonancia.

Añadiendo al segundo miembro de la ecuación (28.9) una fuerza exterior periódica (de frecuencia  $\gamma$ ) se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3, \quad (29.1)$$

donde se ha incluido también la fuerza de rozamiento, de coeficiente de amortiguamiento  $\lambda$  (que luego supondremos pequeño). Hablando estrictamente, cuando se tienen en cuenta los términos no lineales en la ecuación de las oscilaciones libres, deben considerarse también los términos de órdenes superiores en la amplitud de la fuerza exterior, términos que corresponden a una posible dependencia de ésta con respecto al desplazamiento  $x$ . Si omitimos estos términos, es solamente con el fin de simplificar las fórmulas, ya que no afectan al aspecto cualitativo de los fenómenos.

Sea,

$$\gamma = \omega_0 + \epsilon$$

(con  $\epsilon$  pequeño), es decir, nos encontramos en las proximidades de la resonancia ordinaria. Para averiguar el carácter del movimiento no es necesario un estudio directo de la ecuación (29.1) si se hacen las siguientes consideraciones.

En la aproximación lineal, la relación entre la amplitud  $b$  de la oscilación forzada, la amplitud  $f$  y la frecuencia  $\gamma$  de la fuerza exterior, en las proximidades de la resonancia, está dada por la fórmula (26.7), que puede escribirse:

$$b^2(\epsilon^2 + \lambda^2) = f^2/4m^2\omega_0^2. \quad (29.2)$$

El carácter no lineal de las oscilaciones conduce a una relación entre su frecuencia propia y la amplitud, que escribimos de la forma

$$\omega_0 + \kappa b^2, \quad (29.3)$$

donde la constante  $\kappa$  es una función de los coeficientes de anarmonicidad [véase (28.13)]. En consecuencia, remplazamos  $\omega_0$  por  $\omega_0 + \kappa b^2$  en la fórmula (29.2) (más exactamente, en la pequeña diferencia  $\gamma - \omega_0$ ). Conservando la notación  $\epsilon = \gamma - \omega_0$ , se obtiene finalmente la ecuación

$$b^2[(\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = f^2/4m^2\omega_0^2 \quad (29.4)$$

o

$$\epsilon = \kappa b^2 \pm \sqrt{[(f/2m\omega_0 b)^2 - \lambda^2]}.$$

La ecuación (29.4) es de tercer grado con respecto a  $b^2$ , y sus raíces reales determinan la amplitud de las oscilaciones forzadas. Examinemos la relación entre esta amplitud y la frecuencia de la fuerza exterior para una amplitud  $f$  dada de ésta.

Para valores suficientemente pequeños de  $f$ , la amplitud  $b$  es también pequeña, de modo que en (29.4) se pueden despreciar las potencias de  $b$  superiores a la segunda, lo que conduce a la función  $b(\epsilon)$  (29.2) representada por una curva simétrica que tiene su máximo en el punto  $\epsilon = 0$  (fig. 32, a). A medida que  $f$  crece la curva se deforma, al principio conservando un solo máximo (figu-

ra 32, b) que se desplaza en el sentido de las  $\epsilon$  positivas (para  $\alpha > 0$ ). De las tres raíces de la ecuación (29.4) una sola es real aquí.

Sin embargo, cuando  $f$  alcanza un cierto valor  $f = f_k$  (que se definirá más tarde), el carácter de la curva cambia. Para cada valor de  $f > f_k$  hay una región determinada de frecuencias en la cual la ecuación (29.4) tiene tres raíces reales; a esta región corresponde la parte BCDE de la curva de la figura 32, c.

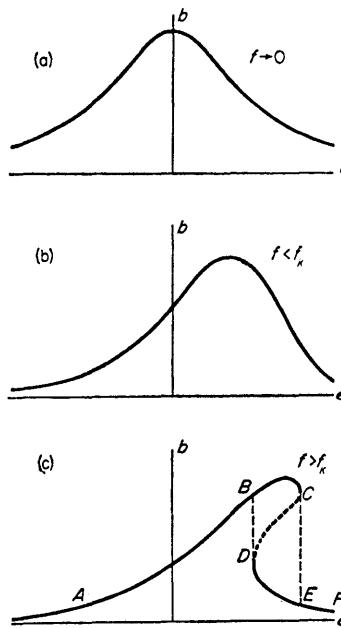


FIG. 32

Los límites de esta región están determinados por la condición  $db/d\epsilon = \infty$  que se verifica en los puntos  $D$  y  $C$ . Derivando la ecuación (29.4) con respecto a  $\epsilon$  se obtiene

$$db/d\epsilon = (-\epsilon b + \kappa b^3)/(\epsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\epsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4).$$

Se determina la posición de los puntos  $D$  y  $C$  por la solución simultánea de la ecuación

$$\epsilon^2 - 4\kappa b^2 \epsilon + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (29.5)$$

y la ecuación (29.4); los valores correspondientes de  $\epsilon$  son ambos positivos. El valor máximo de la amplitud se alcanza en el punto en que  $db/d\epsilon = 0$ . Esto da  $\epsilon = \alpha b^2$ , y de (29.4) se tiene,

$$b_{\max} = f/2m\omega_0\lambda; \quad (29.6)$$

este valor coincide con el máximo dado por la relación (29.2).

Puede demostrarse (aunque aquí no nos detendremos en ello<sup>1</sup>) que de las tres raíces de la ecuación (29.4) la del medio (es decir, la parte *CD* de la curva, representada en puntos en la fig. 29, *c*) corresponde a las oscilaciones inestables del sistema; cualquier acción, por débil que sea, sobre un sistema que se encuentra en este estado, conduciría a un régimen oscilatorio correspondiente a la raíz máxima o a la raíz mínima (es decir, a las partes *BC* o *DE* de la curva). Así, pues, sólo las ramas *ABC* y *DEF* corresponden a oscilaciones reales del sistema. Una notable particularidad es el hecho de que existe una región de frecuencias en la cual son posibles dos amplitudes de oscilación distintas. Por ejemplo, cuando la frecuencia de la fuerza exterior aumenta gradualmente, la amplitud de las oscilaciones forzadas crece según la curva *ABC*. En el punto *C* hay una discontinuidad de la amplitud, la cual cae bruscamente al valor correspondiente al punto *E*, después disminuye a lo largo de la curva *EF* cuando la frecuencia sigue aumentando. Si ahora se disminuye la frecuencia, la amplitud de las oscilaciones forzadas varía según la curva *FD*, aumenta discontinuamente del punto *D* al punto *B*, y después disminuye según *BA*.

Para calcular el valor de  $f_k$ , observemos que representa el valor de  $f$  para el cual las dos raíces de la ecuación (29.5), cuadrática en  $b^2$ , coinciden; para  $f = f_k$  la parte *CD* se reduce a un punto de inflexión. Igualando a cero el discriminante de la ecuación (29.5), se tiene  $\epsilon^2 = 3\lambda^2$ , y la raíz doble correspondiente es  $\kappa b^2 = \frac{2}{3}\epsilon$ . Sustituyendo estos valores de  $b$  y  $\epsilon$  en (29.4), resulta

$$f_k^2 = 32 m^2 \omega_0^2 \lambda^3 / 3 \sqrt{3} |\kappa| \quad (29.7)$$

Además del cambio de carácter de los fenómenos de resonancia en frecuencias  $\gamma \approx \omega_0$ , la no linealidad de las oscilaciones conduce también a la aparición de nuevas resonancias, en las cuales, oscilaciones de frecuencia próxima a  $\omega_0$  se excitan por una fuerza exterior de frecuencia considerablemente distinta de  $\omega_0$ .

Sea  $\gamma \approx \frac{1}{2}\omega_0$  la frecuencia de la fuerza exterior, es decir,

$$\gamma = \frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon.$$

En la primera aproximación (aproximación lineal) provoca en el sistema oscilaciones de la misma frecuencia y amplitud proporcional a la de la fuerza:

$$x^{(1)} = (4f/3m\omega_0^2) \cos(\frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon)t$$

[de acuerdo con 22.4)]. Cuando se consideran los términos no lineales, en la segunda aproximación, estas oscilaciones hacen aparecer en el segundo miembro de la ecuación de movimiento (29.1) un término de frecuencia  $2\gamma \approx \omega_0$ . Sustituyendo  $x^{(1)}$  en la ecuación

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

introduciendo el coseno del ángulo doble y no conservando en el segundo miembro más que el término de resonancia, se obtiene:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -(8\alpha f^2/9m^2\omega_0^4) \cos(\omega_0 + 2\epsilon)t. \quad (29.8)$$

<sup>1</sup> La demostración puede encontrarse, por ejemplo, en el libro por N. N. Bogoliuvov e In. A. Mityropol'skiy «Asimptoticheskie metody ov teorii nelineinyj kolebaniij» (Métodos asintóticos en teoría de oscilaciones no lineales), Fizmatgiz, 1958.

Esta ecuación sólo difiere de (29.1) en que la amplitud  $f$  de la fuerza está remplazada por una expresión proporcional a  $f^2$ . Esto significa que la resonancia resultante es del mismo tipo que la considerada antes para frecuencias  $\gamma \approx \omega_0$ , pero de menor intensidad. La función  $b(\epsilon)$  se obtiene sustituyendo  $f$  por  $-8af^2/9m\omega_0^4$ , y  $\epsilon$  por  $2\epsilon$ , en (24.9)

$$b^2[(2\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = 16\alpha^2 f^4 / 81m^4 \omega_0^{10}. \quad (29.9)$$

Sea ahora,

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon.$$

la frecuencia de la fuerza exterior. En la primera aproximación tenemos,

$$x^{(1)} = -(f/3m\omega_0^2) \cos(2\omega_0 + \epsilon)t.$$

Sustituyendo  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  en la ecuación (29.1) no se obtienen términos que tengan el carácter de una fuerza exterior en resonancia como ocurría en el caso anterior. Sin embargo, hay una resonancia paramétrica que resulta del término de tercer orden proporcional al producto  $x^{(1)}x^{(2)}$ . Si de todos los términos no lineales conservamos sólo éste, se obtiene para  $x^{(2)}$  la ecuación

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

o

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \epsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29.10)$$

esto es, una ecuación del tipo (27.8) (teniendo en cuenta el rozamiento), que conduce, como ya se ha visto, a una inestabilidad de las oscilaciones en un cierto intervalo de frecuencias.

Sin embargo, esta ecuación no es suficiente para determinar la amplitud resultante de las oscilaciones. Esta amplitud depende de los efectos de no linealidad; para tenerlos en cuenta, es preciso conservar en la ecuación del movimiento los términos no lineales con respecto a  $x^{(2)}$ :

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = (2\alpha f/3m\omega_0^2)x^{(2)} \cos(2\omega_0 + \epsilon)t. \quad (29.11)$$

El problema puede simplificarse considerablemente en virtud del siguiente hecho. Poniendo en el segundo miembro de (29.11)

$$x^{(2)} = b \cos[(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \delta],$$

(donde  $b$  es la amplitud buscada de las oscilaciones de resonancia y  $\delta$  una diferencia de fase constante que no es esencial en lo que sigue) y escribiendo el producto de cosenos en forma de suma, obtenemos aquí el término de resonancia ordinaria

$$(\alpha fb/3m\omega_0^2) \cos[(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t - \delta]$$

(con respecto a la frecuencia propia  $\omega_0$  del sistema). Por lo tanto, el problema se reduce al de la resonancia ordinaria en un sistema no lineal, estudiado al comienzo de este tema, con la única diferencia de que la amplitud de la fuerza exterior está aquí representada por  $af/3\omega_0^2$ , y en lugar de  $\epsilon$  se tiene  $\frac{1}{2}\epsilon$ . Haciendo este cambio en la ecuación (29.4), resulta,

$$b^2[(\frac{1}{2}\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \alpha^2 f^2 b^2 / 36m^2 \omega_0^6.$$

Resolviendo esta ecuación para  $b$ , se encuentran los posibles valores de la amplitud

$$b = 0, \quad (29.12)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} [\frac{1}{2}\epsilon + \sqrt{(\alpha f / 6m\omega_0^3)^2 - \lambda^2}], \quad (29.13)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} [\frac{1}{2}\epsilon - \sqrt{(\alpha f / 6m\omega_0^3)^2 - \lambda^2}]. \quad (29.14)$$

La dependencia entre  $b$  y  $\epsilon$  así obtenida está representada en la figura 33 para  $\kappa > 0$ ; si  $\kappa < 0$  las curvas son las simétricas respecto al eje  $b$  de las representadas. Los puntos  $B$  y  $C$  corresponden a los valores

$$\epsilon = \pm \sqrt{(\alpha f / 3m\omega_0^3)^2 - 4\lambda^2}.$$

A la izquierda del punto  $B$  sólo es posible el valor  $b = 0$ , es decir, no hay resonancia y las oscilaciones de frecuencias próximas a  $\omega_0$  no son excitadas. En el intervalo entre  $B$  y  $C$  tenemos dos raíces  $b = 0$  (segmento  $BC$  de la fig. 33) y la expresión (29.13) (rama  $BE$ ). Finalmente, a la derecha del punto  $C$  existen las tres raíces (29.12), (29.13) y (29.14). Sin embargo, no todos estos valores corresponden a un régimen de oscilación estable. El valor  $b = 0$  es inestable en la parte  $BC^1$  y se puede demostrar que el régimen correspondiente a la raíz (29.14) (raíz intermedia) es siempre inestable. En la figura 33 los valores inestables de  $b$  están representados por líneas de puntos.

Examinemos, por ejemplo, el comportamiento de un sistema inicialmente «en reposo»<sup>2</sup> cuando se disminuye gradualmente la frecuencia de la fuerza exterior. Hasta que se alcance el punto  $C$ , se tiene siempre  $b = 0$ , pero en  $C$  el estado del sistema pasa discontinuamente a la rama  $EB$ . A medida que  $\epsilon$  disminuye, la amplitud de las oscilaciones decrece hasta cero, en el punto  $B$ . Si entonces se aumenta la frecuencia, la amplitud de las oscilaciones crecerá según la curva  $BE^3$ .

<sup>1</sup> Este intervalo corresponde a la región de resonancia paramétrica (27.12) y comparando (29.10) y (27.8) se tiene  $|h| = 2af/3m\omega_0^4$ . La condición  $|2af/3m\omega_0^3| > 4\lambda$  para la existencia del fenómeno considerado corresponde a la desigualdad  $h > h_k$ .

<sup>2</sup> Recordemos que estamos considerando aquí solamente las oscilaciones de resonancia. Su ausencia no significa literalmente que el sistema esté en reposo, sino que realiza oscilaciones forzadas débiles de frecuencia  $\gamma$ .

<sup>3</sup> No hay que olvidar que todas estas fórmulas sólo son válidas mientras la amplitud  $b$  (y también  $\epsilon$ ) sean suficientemente pequeñas. En realidad, las curvas  $BE$  y  $CF$  no son indefinidas, se encuentran en un cierto punto; cuando se alcanza éste, el régimen de oscilación cesa y se tiene  $b = 0$ .

Los casos de resonancia discutidos son los fundamentales que ocurren en un sistema de oscilaciones no lineales. En aproximaciones superiores aparecen fenómenos de resonancia también en otras frecuencias. Estrictamente hablando, debe producirse resonancia para toda frecuencia  $\gamma$  tal que  $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$  ( $n, m$  enteros), o sea, para todo  $\gamma = p\omega_0/q$  con  $p$  y  $q$  enteros. Sin embargo, a

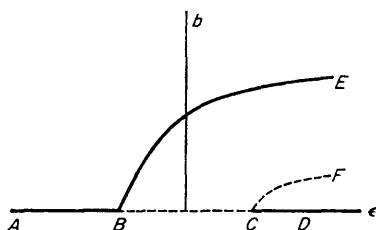


FIG. 33

medida que aumenta el grado de aproximación, la intensidad de los fenómenos de resonancia (así como el ancho de las regiones de frecuencias en las que tienen lugar) disminuye tan rápidamente que en la práctica solamente son observables las resonancias para frecuencias  $\gamma \approx p\omega_0/q$  con  $p$  y  $q$  pequeños.

### PROBLEMA

Determinar la función  $b(\epsilon)$  para una resonancia en las frecuencias  $\gamma \approx 3\omega_0$ .

*Solución:* En la primera aproximación

$$x^{(1)} = -(f/8m\omega_0^2) \cos(3\omega_0 + \epsilon)t.$$

Para la segunda aproximación  $x^{(2)}$ , se tiene de (29.1) la ecuación

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

donde sólo se ha escrito en el segundo miembro el término que da la resonancia buscada. Haciendo  $x^{(2)} = b \cos [(\omega_0 + \frac{1}{3}\epsilon)t + \delta]$  y separando el término de resonancia del producto de los tres cosenos, obtenemos en el segundo miembro de la ecuación la expresión

$$(3\beta b^2 f / 32m\omega_0^2) \cos[(\omega_0 + \frac{1}{3}\epsilon)t - 2\delta].$$

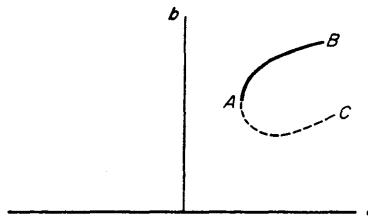


FIG. 34

Por tanto, es evidente que  $b(\epsilon)$  se obtiene sustituyendo en (29.4)  $f$  por  $3\beta b^2 f / 32\omega_0^2$  y  $\epsilon$  por  $\frac{1}{3}\epsilon$ :

$$b^2[(\frac{1}{3}\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = (9\beta^2 f^2 / 2^{12} m^2 \omega_0^6) b^4 \equiv Ab^4.$$

Las raíces de estas ecuaciones son:

$$b = 0, \quad b^2 = \frac{\epsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\left( \frac{\epsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2 \right)}.$$

En la figura 34 está representada gráficamente la función  $b(\epsilon)$  para  $\kappa > 0$ . Únicamente el valor  $b = 0$  (eje de abscisas) y la rama  $AB$  corresponden a regímenes estables. Al punto  $A$  corresponden los valores

$$\epsilon_k = 3(4\kappa^2\lambda^2 - A^2)/4\kappa A, \quad b_k^2 = (4\kappa^2\lambda^2 + A^2)/4\kappa^2 A.$$

El régimen oscilatorio existe solamente para  $\epsilon > \epsilon_k$ , con una amplitud  $b > b_k$ . Puesto que el estado  $b = 0$  es siempre estable, hace falta un «impulso» inicial para provocar las oscilaciones.

Las fórmulas obtenidas sólo son válidas para valores pequeños de  $\epsilon$ . Esta condición se satisface si  $\lambda$  es pequeño y la amplitud de la fuerza es tal que  $\kappa\lambda^2/\omega_0 \ll A \ll \kappa\omega_0$ .

### § 30. Movimiento en un campo rápidamente oscilante

Consideremos el movimiento de una partícula sometida simultáneamente a la acción de un campo, independiente del tiempo, de energía potencial  $U$  y de una fuerza

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t \quad (30.1)$$

que varía en el tiempo con una frecuencia elevada  $\omega$  ( $f_1$  y  $f_2$  son funciones de las coordenadas únicamente). Entendemos por frecuencia «elevada» una frecuencia que verifique  $\omega \gg 1/T$ , donde  $T$  es del orden de magnitud del período del movimiento que ejecutaría la partícula sólo en el campo  $U$ . La magnitud de la fuerza  $f$  no se supone pequeña en comparación con las fuerzas debidas al campo  $U$ ; sin embargo, admitiremos que la oscilación (que luego designaremos por  $\xi$ ) provocada por esta fuerza es pequeña.

Para simplificar los cálculos, consideremos primero el movimiento lineal en un campo que dependa solamente de una coordenada del espacio, por ejemplo,  $x$ . La ecuación del movimiento de la partícula es entonces<sup>1</sup>

$$m\ddot{x} = -dU/dx + f. \quad (30.2)$$

De la naturaleza del campo que actúa sobre la partícula, es evidente *a priori* que ésta se moverá a lo largo de una trayectoria «no perturbada» y al mismo tiempo realizará pequeñas oscilaciones (de frecuencia  $\omega$ ) alrededor de esta trayectoria. En consecuencia, escribimos la función  $x(t)$  de la forma

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (30.3)$$

donde  $\xi(t)$  corresponde a estas pequeñas oscilaciones.

<sup>1</sup> La coordenada  $x$  no es necesariamente cartesiana y el coeficiente  $m$  no es necesariamente la masa de la partícula, ni necesita ser constante. Sin embargo, esta hipótesis no influye en el resultado final (véase más adelante).

El valor medio de la función  $\xi(t)$  en un período  $2\pi/\omega$  es cero, y durante el mismo tiempo la función  $X(t)$  varía muy poco. Designando este valor medio con un trazo encima de la letra, se tiene,  $\bar{x} = \bar{X}(t)$ , es decir, que la función  $X(t)$  describe el movimiento «no perturbado» de la partícula considerando la media sobre las oscilaciones rápidas. Deduzcamos la ecuación que determina la función  $X(t)$ <sup>1</sup>.

Sustituyendo (30.3) en (30.2) y desarrollando en potencias de  $\xi$  (hasta los términos de primer orden), se obtiene

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dx} - \xi \frac{d^2U}{dx^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (30.4)$$

En esta ecuación figuran dos grupos de términos de distinto carácter: oscilatorios y «no perturbados», que evidentemente deben ser iguales por separado. Para los términos oscilatorios basta escribir:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t); \quad (30.5)$$

los otros términos contienen el pequeño factor  $\xi$ , y por lo tanto son pequeños con respecto a los que hemos escrito (la derivada  $\dot{\xi}$  es proporcional a  $\omega^2$  que es grande, y no puede considerarse como pequeña). Integrando la ecuación (30.5) con la función  $f$  dada por (30.1) (considerando  $X$  como constante), resulta:

$$\xi = -f/m\omega^2. \quad (30.6)$$

Calculemos ahora el valor medio en el tiempo de la ecuación (30.4) (en el sentido ya indicado). Puesto que los valores medios de las primeras potencias de  $f$  y  $\xi$  son cero, se obtiene la ecuación

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi \frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f \frac{\partial f}{\partial X}},$$

que contiene solamente la función  $X(t)$ . Esta ecuación puede escribirse

$$m\ddot{X} = -dU_{\text{ef}}/dX, \quad (30.7)$$

donde la energía potencial efectiva está definida por<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} U_{\text{ef}} &= U + \bar{f^2}/2m\omega^2 \\ &= U + (f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2. \end{aligned} \quad (30.8)$$

Comparando esta expresión con (30.6), se ve fácilmente que el término añadido al campo  $U$  representa la energía cinética media del movimiento oscilatorio:

$$U_{\text{ef}} = U + \frac{1}{2}m\bar{\xi^2}. \quad (30.9)$$

<sup>1</sup> La idea de este método se debe a P. L. Kapitsa (1951).

<sup>2</sup> Si  $m$  depende de  $x$ , es fácil de verificar, con cálculos algo más largos, que las fórmulas (30.7) y (30.8) continúan válidas.

Así, el movimiento medio de la partícula con respecto a las oscilaciones se realiza como si, además del campo constante  $U$ , actuase un campo suplementario, también constante, proporcional al cuadrado de la amplitud del campo variable.

Se puede fácilmente generalizar el resultado obtenido al caso de un sistema con un número cualquiera de grados de libertad, representado por sus coordenadas generalizadas  $q_i$ . La energía potencial efectiva tiene entonces [en lugar de (30.8)] la expresión

$$\begin{aligned} U_{\text{ef}} &= U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a^{-1}_{ik} f_i f_k \\ &= U + \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k, \end{aligned} \quad (30.10)$$

donde las  $a_{ik}^{-1}$  (en general funciones de las coordenadas) son los elementos de la matriz inversa de la matriz de los coeficientes  $a_{ik}$  de la energía cinética del sistema [véase (5.5)].

### PROBLEMAS

1. Determinar las posiciones de equilibrio estable de un péndulo cuyo punto de suspensión oscila verticalmente con una frecuencia elevada  $\gamma$  [ $\gamma \gg \sqrt{(g/l)}$ ].

*Solución:* De la lagrangiana obtenida en el problema 3, c del § 5, se ve que la fuerza variable es:

$$f = -m l a \gamma^2 \cos \gamma t \sin \phi$$

(la magnitud  $x$  está representada aquí por el ángulo  $\phi$ ). La energía potencial efectiva es, por tanto,

$$U_{\text{ef}} = mgl[-\cos \phi + (a^2 \gamma^2 / 4gl) \sin^2 \phi].$$

Las posiciones de equilibrio estable corresponden a los mínimos de esta función. La dirección vertical hacia abajo ( $\phi = 0$ ) es siempre estable. Si se cumple la condición

$$a^2 \gamma^2 > 2gl$$

la posición vertical hacia arriba ( $\phi = \pi$ ) será también estable.

2. El mismo problema para un péndulo cuyo punto de suspensión oscila horizontalmente.

*Solución:* De la lagrangiana obtenida en el problema 3, b, § 5, encontramos  $f = m l a \gamma^2 \cos \gamma t \cos \phi$ , y

$$U_{\text{ef}} = mgl[-\cos \phi + (a^2 \gamma^2 / 4gl) \cos^2 \phi].$$

Si  $a^2 \gamma^2 < 2gl$ , la posición  $\phi = 0$  es estable. Pero si  $a^2 \gamma^2 > 2gl$ , el valor

$$\cos \phi = 2gl/a^2 \gamma^2.$$

corresponde a un equilibrio estable.

## CAPÍTULO VI

### MOVIMIENTO DEL SOLIDO

#### § 31. Velocidad angular

En Mecánica se puede definir un *cuerpo sólido rígido* como un sistema de partículas tal que las distancias entre ellas no varíen. Por supuesto, los sistemas que existen realmente en la naturaleza sólo pueden satisfacer esta condición de un modo aproximado. Sin embargo, para la mayoría de los cuerpos sólidos en condiciones ordinarias los cambios de forma y tamaño son lo suficientemente pequeños para que puedan despreciarse, cuando se estudian las leyes del movimiento de un sólido considerado como un todo.

En lo que sigue simplificaremos a menudo los razonamientos considerando el sólido rígido como un conjunto discreto de partículas; esto no está en contradicción con el hecho de que, en Mecánica, habitualmente puede considerarse un cuerpo sólido como continuo, dejando de lado su estructura interna. El paso de las fórmulas que contienen sumas sobre las partículas discretas a las fórmulas del cuerpo continuo se efectúa simplemente sustituyendo las masas de las partículas por la masa  $\rho dV$  contenida en un elemento de volumen  $dV$  ( $\rho$  densidad de masa), e integrando para todo el volumen del cuerpo.

Para describir el movimiento de un sólido rígido, utilizaremos dos sistemas de coordenadas: un sistema fijo, es decir, inercial  $XYZ$  y un sistema móvil de coordenadas  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , que supondremos rígidamente ligado al cuerpo y participe de su movimiento. Es conveniente tomar el origen de coordenadas del sistema móvil en el centro de masa del cuerpo.

La posición del cuerpo con respecto al sistema fijo de coordenadas está completamente determinada si se conoce la posición del sistema móvil. Sea  $\mathbf{R}$  el vector de posición del origen  $O$  del sistema móvil (fig. 35). La orientación de los ejes de este sistema con respecto al sistema fijo está definida por tres ángulos independientes, que junto con las tres componentes del vector  $\mathbf{R}$  hacen en total seis coordenadas. Entonces, un sólido rígido es un sistema mecánico de seis grados de libertad.

Consideremos un desplazamiento arbitrario infinitesimal del sólido; se le puede representar como la suma de dos partes. Una de ellas es una traslación paralela infinitesimal del cuerpo, por la que el centro de masa se mueve hasta su posición final, sin cambiar la orientación de los ejes del sistema móvil. La

otra es una rotación infinitesimal alrededor del centro de masa, por la cual el cuerpo se coloca en su posición final.

Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto arbitrario  $P$  del sólido en el sistema de coordenadas móvil, y  $\mathbf{r}'$  el vector de posición del mismo punto en el sistema fijo. Entonces, el desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}'$  del punto  $P$  consta de un desplazamiento  $d\mathbf{R}$  igual al del centro de masa, y un desplazamiento  $d\phi \times \mathbf{r}$  con respecto al centro de masa resultado de un giro de ángulo infinitesimal  $d\phi$  [véase (9.1)]

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{R} + d\phi \times \mathbf{r}.$$

Dividiendo esta igualdad por el tiempo  $dt$  empleado en realizar el desplazamiento considerado, e introduciendo las velocidades

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (31.1)$$

se obtiene la relación

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (31.2)$$

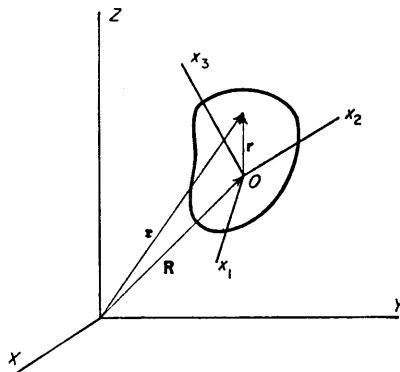


FIG. 35

El vector  $\mathbf{V}$  es la velocidad del centro de masa del sólido; se le llama también velocidad de su movimiento de *traslación*. El vector  $\boldsymbol{\Omega}$  se denomina *velocidad angular* de rotación del cuerpo; su dirección (igual que la de  $d\phi$ ) coincide con la del eje de rotación. De modo que la velocidad  $\mathbf{v}$  de un punto cualquiera del cuerpo (con respecto al sistema fijo de coordenadas) puede expresarse en función de la velocidad de traslación y de su velocidad angular de rotación.

Debe observarse que para deducir la fórmula (31.2) no se ha tenido en cuenta el hecho de que el origen de coordenadas está localizado en el centro de masa. La ventaja de esta elección del origen aparecerá más tarde, cuando se estudie la energía del cuerpo en movimiento.

Supongamos ahora que el sistema de coordenadas ligado al sólido rígidamente es tal que su origen no esté en el centro de masa  $O$ , sino en un punto  $O'$  situado a una distancia  $\mathbf{a}$  del punto  $O$ . Sea  $\mathbf{V}'$  la velocidad de desplazamiento del

origen  $O'$  y  $\Omega'$  la velocidad angular de rotación de este nuevo sistema. Consideremos otra vez un punto cualquiera  $P$  del sólido y sea  $\mathbf{r}'$  su radio vector con respecto al origen  $O'$ . Entonces se tiene  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ , y sustituyendo en (31.2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{a} + \Omega \times \mathbf{r}'.$$

La definición de  $\mathbf{V}$  y  $\Omega'$  muestra que  $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \Omega' \times \mathbf{r}'$ . Por lo tanto, se sigue que:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{a}, \quad \Omega' = \Omega. \quad (31.3)$$

La segunda de estas ecuaciones es muy importante, pues nos dice que la velocidad angular de rotación, en cualquier instante, de un sistema de coordenadas ligado al cuerpo es independiente del sistema elegido. En un instante dado, todos estos sistemas giran con velocidades angulares  $\Omega$ , que son iguales en módulo y paralelas en dirección. Esto nos permite llamar a  $\Omega$  la velocidad angular del cuerpo sólido. La velocidad del movimiento de traslación no tiene este carácter «absoluto».

Está claro de la primera fórmula (31.3) que si en un instante dado  $\mathbf{V}$  y  $\Omega$  son perpendiculares en un sistema de coordenadas de origen  $O$ ,  $\mathbf{V}'$  y  $\Omega'$  son perpendiculares en el sistema de origen  $O'$ . La fórmula (31.2) muestra que en este caso las velocidades  $\mathbf{v}$  de todos los puntos del cuerpo son perpendiculares a  $\Omega$ . Entonces se puede siempre escoger un origen  $O'$  cuya velocidad  $\mathbf{V}'$  sea nula, de modo que el movimiento del sólido en el instante considerado sea una rotación pura alrededor de un eje que pase por  $O'$ . Este eje se llama *eje instantáneo de rotación*<sup>2</sup> del cuerpo.

A continuación elegiremos siempre el origen del sistema móvil de coordenadas en el centro de masa del cuerpo, de modo que el eje de rotación pasará por el centro de masa. En general, tanto el módulo como la dirección de  $\Omega$  varían durante el movimiento.

### § 32. Tensor de inercia

Para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido, consideremos éste como un sistema discreto de puntos materiales y escribamos

$$T = \sum \frac{1}{2} m v^2,$$

donde la suma está tomada sobre todas las partículas del cuerpo. En lo que sigue, como aquí, se omitirán los índices que numeran estas partículas para simplificar la escritura.

Teniendo en cuenta (31.2), se tiene,

$$T = \sum \frac{1}{2} m (\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r})^2 = \sum \frac{1}{2} m V^2 + \sum m \mathbf{V} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \sum \frac{1}{2} m (\Omega \times \mathbf{r})^2.$$

<sup>1</sup> Evidentemente,  $O'$  puede estar situado fuera del cuerpo.

<sup>2</sup> En el caso general en que  $\mathbf{V}$  y  $\Omega$  no sean perpendiculares, puede escogerse el origen de coordenadas de modo tal que  $\mathbf{V}$  y  $\Omega$  resulten paralelas, es decir, que (en un instante dado) el movimiento consista en una rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo eje.

Las velocidades  $\mathbf{V}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  son las mismas para todos los puntos del sólido. Por lo tanto, en el primer término  $\frac{1}{2}V^2$  puede salir fuera del signo suma, y la suma  $\Sigma m$  es la masa del cuerpo que designaremos por  $\mu$ . En el segundo término ponemos

$$\Sigma m\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Sigma m\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} \cdot \Sigma m\mathbf{r}.$$

Como se ha tomado el origen de coordenadas del sistema móvil en el centro de masa, este término se anula, ya que  $\Sigma m\mathbf{r} = 0$ . Finalmente, en el tercer término, se desarrolla el cuadrado del producto vectorial y el resultado es

$$T = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2} \sum m[\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2]. \quad (32.1)$$

Así, la energía cinética de un cuerpo rígido puede escribirse como la suma de dos términos. El primero de ellos en (31.2) es la energía cinética del movimiento de traslación, y tiene la misma forma que si toda la masa del cuerpo estuviese concentrada en el centro de masa. El segundo término es la energía cinética de la rotación con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  alrededor de un eje que pasa por el centro de la masa. Observemos que esta división de la energía cinética en dos partes es posible solamente porque el origen del sistema de coordenadas ligado al cuerpo se ha tomado en el centro de masa de éste.

Escribamos la energía cinética de rotación en forma tensorial, es decir, en función de las componentes  $x_i$ ,  $\Omega_i$  de los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$ <sup>1</sup>. Se obtiene,

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum m(\Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum m(\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k) \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

Se ha utilizado aquí la identidad  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , donde  $\delta_{ik}$  es el tensor unidad (cuyas componentes son iguales a la unidad para  $i = k$  y cero para  $i \neq k$ ). Introduciendo el tensor

$$I_{ik} = \sum m(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (32.2)$$

se tiene finalmente la siguiente expresión para la energía cinética de un sólido rígido:

$$T = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (32.3)$$

La lagrangiana del cuerpo sólido se obtiene restando la energía potencial:

$$L = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (32.4)$$

<sup>1</sup> En este capítulo, las letras  $i$ ,  $k$ ,  $l$  designan los índices tensoriales que toman los valores 1, 2, 3. La regla de suma se usará como siempre, es decir, se omiten los signos suma y la suma con respecto a los valores 1, 2, 3 está implicada siempre que un índice se repita dos veces en una expresión; a tales índices se les llama «mudos». Por ejemplo,  $A_i B_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $A_i^2 = A_i A_i = \mathbf{A}^2$ , etc. Es evidente que se pueden sustituir los índices mudos por otros índices iguales cualesquiera, a condición de que éstos no coincidan con otros índices tensoriales que figuren en la expresión.

La energía potencial es en general función de las seis variables que determinan la posición del cuerpo, por ejemplo, las tres coordenadas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  del centro de masa y los tres ángulos que definen la orientación de los ejes de coordenadas móviles con respecto a los ejes fijos.

El tensor  $I_{ik}$  se llama *tensor de inercia* del cuerpo. Por su definición (32.2) es evidentemente simétrico:

$$I_{ik} = I_{ki}, \quad (32.5)$$

Escribamos sus componentes

$$I_{ik} = \begin{bmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{bmatrix}. \quad (32.6)$$

Las componentes  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  se llaman *momentos de inercia* con respecto a los ejes correspondientes.

El tensor de inercia es evidentemente aditivo: los momentos de inercia de un cuerpo son iguales a las sumas de los momentos de inercia de sus partes.

Si el cuerpo se considera como continuo, la suma de la definición (32.2) se sustituye por una integral extendida a todo el volumen del cuerpo.

$$I_{ik} = \int \rho(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV. \quad (32.7)$$

Como todo tensor simétrico de segundo rango, el tensor de inercia puede reducirse a forma diagonal por una elección apropiada de los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Estas direcciones se llaman *ejes principales de inercia*, y los valores correspondientes de las componentes del tensor, *momentos principales de inercia*; designemos a éstos por  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Con una tal elección de los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , la energía cinética de rotación toma una forma particularmente sencilla:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \quad (32.8)$$

Observemos que ninguno de los tres momentos principales de inercia puede ser mayor que la suma de los otros dos. Por ejemplo,

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (32.9)$$

Un cuerpo cuyos tres momentos principales de inercia son distintos se llama *peonza asimétrica*. Si dos de estos momentos son iguales ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) tendremos una *peonza simétrica*. En este caso, la dirección de uno de los ejes principales en el plano  $x_1x_2$  puede elegirse arbitrariamente. Si los tres momentos principales de inercia coinciden, el cuerpo se llama *peonza esférica*, y los tres ejes principales de inercia pueden escogerse arbitrariamente; como a tales pueden tomarse tres ejes cualesquiera perpendiculares entre sí.

La determinación de los ejes principales de inercia se simplifica mucho si

el cuerpo es simétrico, pues es evidente que la posición del centro de masa y las direcciones de los ejes principales deben tener la misma simetría que el cuerpo.

Así, si el cuerpo tiene un plano de simetría, el centro de masa debe encontrarse en este plano, que contiene también dos de los ejes principales de inercia, mientras el tercero es perpendicular al plano. Un sistema de partículas coplanares es evidentemente un caso de este género. Hay aquí una sencilla relación entre los tres momentos principales de inercia. Si se toma el plano del sistema como plano  $x_1x_2$ , se tiene entonces, ya que  $x_3 = 0$  para todas las partículas,

$$I_1 = \sum mx_2^2, I_2 = \sum mx_1^2, I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2),$$

de modo que,

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (32.10)$$

Si el cuerpo tiene un eje de simetría de cualquier orden, su centro de masa estará situado en este eje, que será también uno de los ejes principales de inercia, mientras que los otros dos serán perpendiculares a él. Si el orden del eje de simetría es superior al segundo, el cuerpo es una peonza simétrica. En efecto, entonces los ejes principales perpendiculares al eje de simetría pueden girarse un ángulo distinto de  $180^\circ$  alrededor de este último, es decir, la elección de estos ejes perpendiculares no es única y esto sólo ocurre si el cuerpo es una peonza simétrica.

Un caso particular es el de un sistema de partículas colineales. Si la línea del sistema se toma como eje  $x_3$ , se tendrá entonces para todas las partículas  $x_1 = x_2 = 0$ , de modo que dos de los momentos principales de inercia coinciden y el tercero es cero:

$$I_1 = I_2 = \sum mx_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (32.11)$$

A un sistema tal se le llama *rotor*. La propiedad característica que distingue un rotor de los otros cuerpos es que tiene solamente dos (y no tres) grados de libertad de rotación, correspondientes a las rotaciones alrededor de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ ; hablar de rotación de una recta alrededor de sí misma evidentemente no tiene ningún sentido.

Finalmente, una observación relativa al cálculo del tensor de inercia. Aunque se ha definido este tensor con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el centro de masa [como es necesario para que la fórmula (32.3) sea válida], a veces puede resultar más cómodo calcular primero el tensor análogo

$$I'_{ik} = \sum m(x'_i)^2 \delta_{ik} - x'_i x'_{ik},$$

definido con respecto a otro origen  $O'$ . Si la distancia  $OO'$  está representada por un vector  $\mathbf{a}$ , se tiene  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ , y  $x_i = x'_i + a_i$ ; teniendo en cuenta que  $\sum m\mathbf{r} = 0$  por definición del punto  $O$ , se tiene:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(\mathbf{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (32.12)$$

Usando esta fórmula, puede calcularse fácilmente  $I_{ik}$  si se conoce  $I'_{ik}$ .

## PROBLEMAS

1. Determinar los momentos principales de inercia para los siguientes tipos de moléculas, consideradas como sistemas de partículas situados a distancias invariables:

- a) Molécula de átomos colineales.

*Solución:*

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \quad I_3 = 0,$$

donde  $m_a$  es la masa del átomo  $a$ , la  $l_{ab}$  la distancia entre los átomos  $a$  y  $b$ , y la suma incluye un término por cada par de átomos en la molécula.

Para una molécula diatómica la suma se reduce a un solo término, y el resultado es obvio: es el producto de la masa reducida de los átomos por el cuadrado de la distancia entre ellos.

$$I_1 = I_2 = m_1 m_2 l^2 / (m_1 + m_2).$$

- b) Molécula triatómica con la forma de un triángulo isósceles (fig. 36).

*Solución:* El centro de masa está en el eje de simetría del triángulo, a una distancia  $X_2 = m_2 h / \mu$  de su base. Los momentos de inercia son:

$$I_1 = 2m_1 m_2 h^2 / \mu, \quad I_2 = \frac{1}{2} m_1 a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

- c) Molécula tetratómica cuyos átomos están situados en los vértices de una pirámide triangular recta (fig. 37).

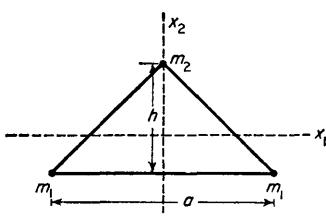


FIG. 36

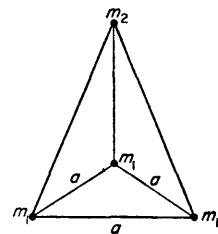


FIG. 37

*Solución:* El centro de masa está en el eje de simetría de la pirámide a una distancia  $X_3 = m_2 h / \mu$  de su base ( $h$ , altura de la pirámide). Los momentos de inercia son:

$$I_1 = I_2 = 3m_1 m_2 h^2 / \mu + \frac{1}{2} m_1 a^2, \quad I_3 = m_1 a^2.$$

si  $m_1 = m_2$ ,  $h = a\sqrt{(2/3)}$ , se obtiene una molécula tetraédrica de momentos de inercia

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2.$$

2. Determinar los momentos principales de inercia de los cuerpos homogéneos siguientes.

- a) Varilla delgada de longitud  $l$ .

*Solución:*

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2, I_3 = 0$$

(se desprecia el espesor de la varilla).

b) Esfera de radio  $R$ .

*Solución:*

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

(debe calcularse la suma  $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$ ).

c) Cilindro circular de radio  $R$  y altura  $h$ .

*Solución:*

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\mu(R^2 + \frac{1}{3}h^2), I_3 = \frac{1}{2}\mu R^2$$

( $x_3$  eje del cilindro).

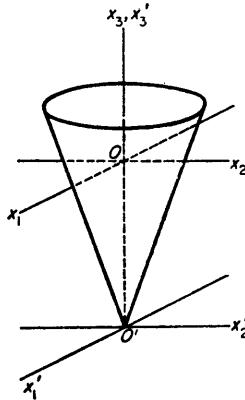


FIG. 38

d) Paralelepípedo rectángulo de aristas  $a, b, c$ .

*Solución:*

$$I_1 = \frac{1}{12}\mu(b^2 + c^2), I_2 = \frac{1}{12}\mu(a^2 + c^2), I_3 = \frac{1}{12}\mu(a^2 + b^2)$$

(los ejes  $x_1, x_2, x_3$  son paralelos a las aristas  $a, b, c$ ).

e) Cono circular de altura  $h$  y radio de la base  $R$ .

*Solución:* Calculemos primero el tensor  $I'_{ik}$  con respecto a los ejes cuyo origen está en el vértice del cono (fig. 38). El cálculo se realiza fácilmente en coordenadas cilíndricas y el resultado es:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu(\frac{1}{3}R^2 + h^2), I'_3 = \frac{3}{5}\mu R^2.$$

El centro de masa, como lo muestra un cálculo sencillo, se encuentra en el eje del cono a una distancia  $a = \frac{3}{5}h$  del vértice. Utilizando la fórmula (32.12) se obtiene finalmente:

$$I_1 = I_2 = I' - \mu a^2 = \frac{3}{5}\mu(R^2 + \frac{1}{4}h^2), \quad I_3 = I' - \frac{3}{5}\mu R^2.$$

f) Elipsoide de semiejes  $a, b, c$ .

*Solución:* El centro de masa coincide con el centro del elipsoide y los ejes principales de inercia con sus ejes. La integración extendida al volumen del elipsoide puede reducirse a una integración con respecto al volumen de una esfera por medio del cambio de coordenadas  $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ , que transforma la ecuación de la superficie del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en la ecuación de la superficie de la esfera unidad

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Por ejemplo, el momento de inercia relativo al eje de las  $x$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{5}abcI'(b^2 + c^2), \end{aligned}$$

donde  $I'$  es el momento de inercia de la esfera de radio unidad. Puesto que el volumen del elipsoide es  $4\pi abc/3$ , se obtienen finalmente los momentos de inercia

$$I_1 = \frac{1}{5}\mu(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{1}{5}\mu(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{1}{5}\mu(a^2 + b^2).$$

3. Determinar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de un péndulo físico (cuerpo rígido que oscila alrededor de un eje horizontal fijo, en el campo de la gravedad).

*Solución:* Sea  $l$  la distancia del centro de masa del péndulo al eje de rotación, y  $\alpha, \beta, \gamma$  los ángulos formados por los ejes principales de inercia y el eje de rotación. Tomamos como coordenada variable el ángulo  $\phi$  entre la vertical y la recta perpendicular al eje de rotación que pasa por el centro de masa. La velocidad del centro de masa es  $V = l\dot{\phi}$ , y las proyecciones de la velocidad angular sobre los ejes principales de inercia:  $\dot{\phi} \cos \alpha, \dot{\phi} \cos \beta, \dot{\phi} \cos \gamma$ . Considerando el ángulo  $\phi$  pequeño, se tiene la energía potencial en la forma

$$U = \mu gl(1 - \cos \phi) \approx \frac{1}{2}\mu gl\phi^2.$$

La lagrangiana es por lo tanto

$$L = \frac{1}{2}\mu l^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma)\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\mu gl\phi^2.$$

En consecuencia, la frecuencia de las pequeñas oscilaciones

$$\omega^2 = \mu gl/(\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma).$$

4. Hallar la energía cinética del sistema representado en la figura 39;  $OA$  y  $AB$  son varillas delgadas homogéneas, de longitud  $l$  unidas por una bisagra en el punto  $A$ . La varilla  $OA$  gira (en el plano de la figura) alrededor del punto  $O$ , y el extremo  $B$  de la varilla  $AB$  se desliza a lo largo del eje  $Ox$ .

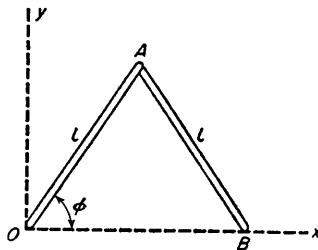


FIG. 39

*Solución:* La velocidad del centro de masa de la varilla OA (que está en el centro de ésta) es  $\frac{1}{2}l\dot{\phi}$ , donde  $\phi$  es el ángulo  $AOB$ . La energía cinética de la varilla OA es, pues,

$$T_1 = \frac{1}{2}\mu l^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2,$$

( $\mu$ , masa de cada varilla).

Las coordenadas cartesianas del centro de masa de la varilla AB son  $X = \frac{3}{2}l \cos \phi$ ,  $Y = \frac{1}{2}l \sen \phi$ . Como la velocidad angular de rotación de esta varilla es también igual a  $\dot{\phi}$ , su energía cinética es:

$$T_2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\mu l^2(1 + 8\sen^2\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2.$$

de donde la energía cinética total del sistema

$$T = \frac{1}{2}\mu l^2(1 + 3\sen^2\phi)\dot{\phi}^2,$$

(puesto que  $I = \frac{1}{12}\mu l^2$ , véase problema 2, a).

5. Encontrar la energía cinética de un cilindro de radio  $R$  que rueda sobre un plano. La masa del cilindro está distribuida de modo tal que uno de los ejes principales de inercia es paralelo al eje del cilindro y está a una distancia  $a$  de éste; el momento de inercia relativo a dicho eje principal es  $I$ .

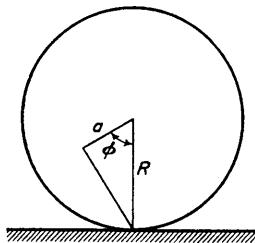


FIG. 40

*Solución:* Sea  $\phi$  el ángulo entre la vertical y la perpendicular trazada desde el centro de masa al eje del cilindro (fig. 40). El movimiento del cilindro en cualquier instante puede considerarse como una rotación pura alrededor del eje instantáneo que coincide con la línea de contacto del cilindro con el plano fijo: la velocidad angular de esta rotación es  $\dot{\phi}$ , ya que la velocidad angular de rotación alrededor de todos los ejes paralelos es la misma.

El centro de masa está a una distancia  $\sqrt{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi)}$  del eje instantáneo, y su velocidad es, por tanto,  $V = \dot{\phi}\sqrt{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi)}$ . La energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2}\mu(a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2.$$

6. Hallar la energía cinética de un cilindro homogéneo de radio  $a$  que rueda en el interior de una superficie cilíndrica de radio  $R$  (fig. 41).

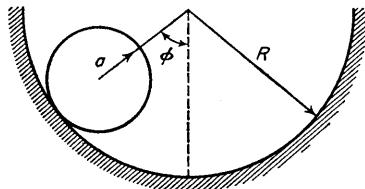


FIG. 41

*Solución:* Utilizamos el ángulo  $\phi$  entre la vertical y la línea que une los centros de los dos cilindros. El centro de masa del cilindro rodante está en su eje, y su velocidad es  $V = \dot{\phi}(R - a)$ . Calculamos la velocidad angular como la velocidad de rotación pura alrededor del eje instantáneo que coincide con la línea de contacto de los dos cilindros; es igual a

$$\Omega = V/a = \dot{\phi}(R - a)/a.$$

Si  $I_3$  es el momento de inercia alrededor del eje del cilindro, entonces,

$$T = \frac{1}{2}\mu(R - a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_3(R - a)^2\dot{\phi}^2/a^2 = \frac{3}{4}\mu(R - a)^2\dot{\phi}^2,$$

( $I_3$  dado por el problema 2, c).

7. Hallar la energía cinética de un cono homogéneo que rueda sobre un plano.

*Solución:* Sea  $\theta$  el ángulo formado por la línea  $OA$  de contacto entre el cono y el plano y una dirección fija cualesquiera en este plano (fig. 42). El centro de masa está en el eje del

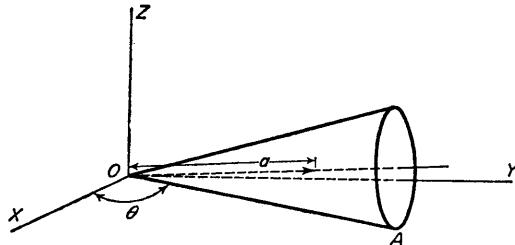


FIG. 42

cono, y su velocidad es  $V = a \cos \alpha \dot{\theta}$ , siendo  $2\alpha$  el ángulo del cono, y  $a$  la distancia del centro de masa al vértice. La velocidad angular puede calcularse como velocidad de rotación pura alrededor del eje instantáneo  $OA$ :

$$\Omega = V/a \operatorname{sen} \alpha = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Uno de los ejes principales de inercia (eje  $x_3$ ) coincide con el eje del cono; escogemos otro ( $x_2$ ) perpendicular al eje del cono y a la recta  $OA$ . Entonces las componentes del vector  $\Omega$  (que es paralelo a  $OA$ ) sobre los ejes principales de inercia son:  $\Omega \sin \alpha$ , 0,  $\Omega \cos \alpha$ . La energía cinética buscada es, pues:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\mu a^2\theta^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_1\theta^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_3\theta^2 \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= 3\mu h^2\theta^2(1+5\cos^2\alpha)/40, \end{aligned}$$

( $h$  altura del cono,  $I_1$ ,  $I_3$  y  $\alpha$  dados por el problema 2, e).

8. Hallar la energía cinética de un cono homogéneo cuya base rueda en un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano igual al radio de la base (de modo que el eje del cono es paralelo al plano).

*Solución:* Utilizamos el ángulo  $\theta$  entre una dirección dada en el plano y la proyección sobre éste del eje del cono (fig. 43). Entonces, la velocidad del centro de masa es  $V = a\dot{\theta}$ ,

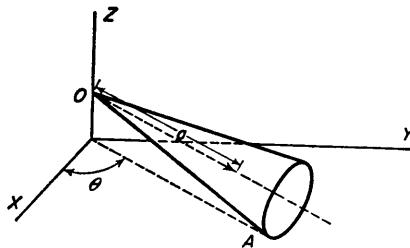


FIG. 43

con la misma notación que en el problema 7. El eje instantáneo de rotación es la generatriz  $OA$  que pasa por el punto donde el cono toca al plano. El centro de masa está a la distancia  $a \sin \alpha$  de este eje, y, por tanto,

$$\Omega = V/a \sin \alpha = \dot{\theta}/\sin \alpha.$$

Las proyecciones del vector  $\Omega$  sobre los ejes principales de inercia son, si el eje  $x_2$  se toma perpendicularmente al eje del cono y a la dirección  $OA$ :  $\Omega \sin \alpha = \dot{\theta}$ , 0,  $\Omega \cos \alpha = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha$ . Consecuentemente, la energía cinética es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\mu a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ &= 3\mu h^2\dot{\theta}^2(\sec^2 \alpha + 5)/40. \end{aligned}$$

9. Hallar la energía cinética de un elipsoide homogéneo que gira alrededor de uno de sus ejes ( $AB$  en la fig. 44), a la vez que este eje gira alrededor de la perpendicular  $CD$  que pasa por el centro del elipsoide.

*Solución* Sea  $\theta$  el ángulo de giro alrededor del eje  $CD$  y  $\phi$  el ángulo de giro alrededor del eje  $AB$  (esto es, el ángulo entre  $CD$  y el eje de inercia  $x_1$ , que es perpendicular a  $AB$ ). Las componentes de  $\Omega$  según los ejes principales de inercia son entonces,

$$\theta \cos \phi, \theta \sin \phi, \phi,$$

(el eje  $x_3$  coincide con  $AB$ ). Puesto que el centro de masa del elipsoide está en reposo, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \cos^2\phi + I_2 \sin^2\phi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\phi}^2.$$

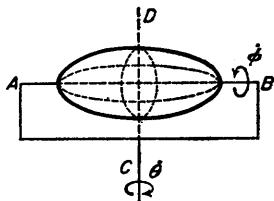


FIG. 44

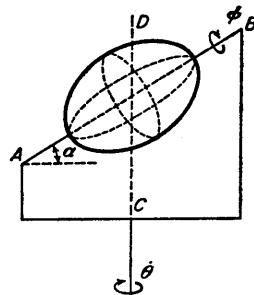


FIG. 45

10. El mismo problema, pero para el caso en que el eje  $AB$  esté inclinado, y el elipsoide sea simétrico con respecto a este eje (fig. 45).

*Solución:* Las componentes de  $\Omega$  a lo largo del eje  $AB$  y de los otros dos ejes principales de inercia, que son perpendiculares a  $AB$  (y pueden escogerse arbitrariamente) son:

$$\theta \cos \alpha \cos \phi, \theta \cos \alpha \sin \phi, \phi + \theta \sin \alpha.$$

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_3(\phi + \theta \sin \alpha)^2.$$

### § 33. Momento cinético del sólido rígido

El momento angular o cinético de un sistema depende, como sabemos, del punto con respecto al cual se define. En la mecánica del sólido rígido, lo más racional es escoger este punto en el origen del sistema de coordenadas móvil, es decir, en el centro de masa del cuerpo, y en lo que sigue designaremos por  $\mathbf{M}$  al momento angular así definido.

Según la fórmula (9.6), cuando se escoge el origen de coordenadas en el centro de masa del cuerpo, el momento angular  $\mathbf{M}$  es igual al momento angular «intrínseco» resultante del movimiento de los puntos del cuerpo con relación al centro de masa. En la definición  $\mathbf{M} = \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  puede sustituirse entonces  $\mathbf{v}$  por  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{M} = \sum m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum m[r^2\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})],$$

o, en notación tensorial,

$$M_i = \sum m(x_j^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k) = \Omega_k \sum m(x_i^2\delta_{ik} - x_i x_k).$$

Teniendo en cuenta la definición (32.2) del tensor de inercia, se tiene, finalmente,

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \quad (33.1)$$

Si los ejes  $x_1, x_2, x_3$  están dirigidos según los ejes principales de inercia, la fórmula (33.1) da:

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \quad (33.2)$$

En particular, para una peonza esférica cuyos tres momentos principales de inercia son iguales, se tiene simplemente:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}, \quad (33.3)$$

es decir, que el vector momento angular es proporcional al vector velocidad angular y de la misma dirección.

En general, para un cuerpo cualquiera, la dirección del vector  $\mathbf{M}$  no coincide con la del vector  $\boldsymbol{\Omega}$ ; solamente cuando el cuerpo gira alrededor de uno de sus ejes principales de inercia  $\mathbf{M}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  tienen la misma dirección.

Consideremos el movimiento libre de un cuerpo rígido, es decir, no sometido a ninguna fuerza exterior. Suponemos excluido el movimiento de traslación uniforme, ya que aquí no tiene interés, de modo que sólo consideraremos la rotación libre del sólido.

Como en todo sistema cerrado, el momento cinético del cuerpo que gira libremente es constante. Para una peonza esférica la condición  $\mathbf{M} = \text{cte.}$  lleva consigo  $\boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$ ; esto significa que en el caso general la rotación libre de una peonza esférica es simplemente una rotación uniforme alrededor de un eje constante.

El caso de un rotor es también sencillo. Se tiene igualmente aquí  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ , siendo el vector  $\boldsymbol{\Omega}$  perpendicular al eje del rotor. Por lo tanto, la rotación libre de un rotor es una rotación uniforme en un plano alrededor de un eje perpendicular a ese plano.

La ley de conservación del momento angular basta también para definir la rotación libre más compleja de una peonza simétrica. Aprovechando el hecho de que pueden elegirse arbitrariamente las direcciones de los ejes principales de inercia  $x_1, x_2$  (perpendiculares al eje de simetría  $x_3$  de la peonza), tomamos el eje  $x_2$  perpendicular al plano definido por el vector constante  $\mathbf{M}$  y la posición instantánea del eje  $x_3$ . Entonces  $M_2 = 0$ , y las fórmulas (33.2) dan  $\Omega_2 = 0$ . Esto significa que, en cada instante, las direcciones de  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  y el eje de la peonza están en el mismo plano (fig. 46). Por eso, se deduce que también en cada instante, las velocidades  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  de todos los puntos del eje de la peonza son perpendiculares al plano en cuestión; en otras palabras, el eje de la peonza gira uniformemente (véase más abajo) alrededor de la dirección de  $\mathbf{M}$  describiendo un cono circular. Esto se llama *precesión regular* de la peonza. Al mismo tiempo, la peonza gira uniformemente alrededor de su propio eje.

Las velocidades angulares de estas dos rotaciones pueden expresarse fácilmente en función del valor dado del momento angular  $\mathbf{M}$  y del ángulo  $\theta$  entre el eje de la peonza y la dirección de  $\mathbf{M}$ . La velocidad angular de rotación de la

peonza alrededor de su eje es justamente la proyección  $\Omega_3$  del vector  $\Omega$  sobre este eje:

$$\Omega_3 = M_3/I_3 = (M/I_3) \cos \theta. \quad (33.4)$$

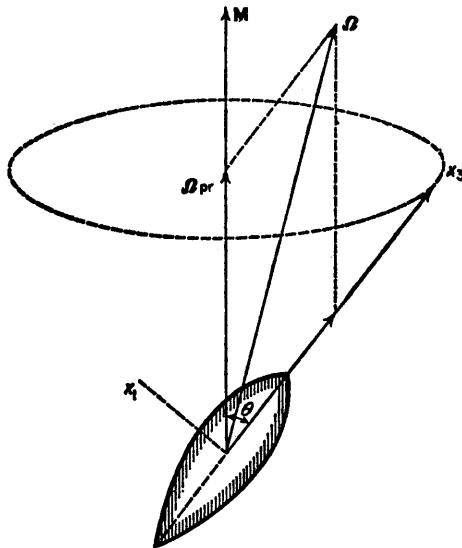


FIG. 46

Para determinar la velocidad de precesión  $\Omega_{pr}$ , debe descomponerse el vector  $\Omega$  en sus componentes según  $x_3$  y según  $\mathbf{M}$ . La primera de éstas no conduce a ningún desplazamiento del eje de la peonza y, en consecuencia, la segunda componente da la velocidad angular de precesión buscada. La figura 46 muestra que  $\Omega_{pr} \sin \theta = \Omega_1$ , y como  $\Omega_1 = M_1/I_1 = (M/I_1) \sin \theta$ , se tiene:

$$\Omega_{pr} = M/I_1. \quad (33.5)$$

### § 34. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido

Puesto que un cuerpo rígido tiene, en general, seis grados de libertad, el sistema general de las ecuaciones del movimiento debe contener seis ecuaciones independientes. Pueden expresarse en una forma dada por las derivadas con respecto al tiempo de dos vectores: el ímpetu y el momento angular del cuerpo.

La primera de estas ecuaciones se obtiene simplemente sumando las ecuaciones  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$  para cada una de las partículas del cuerpo, siendo  $\mathbf{p}$  el ímpetu de la partícula y  $\mathbf{f}$  la fuerza que actúa sobre ella. En función del ímpetu total del cuerpo

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

y de la fuerza total  $\Sigma \mathbf{f} = \mathbf{F}$  que actúa sobre él, se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (34.1)$$

Aunque se ha definido  $\mathbf{F}$  como la suma de todas las fuerzas  $\mathbf{f}$  que actúan sobre cada partícula, incluidas las fuerzas debidas a las otras partículas, de hecho  $\mathbf{F}$  incluye solamente las fuerzas exteriores: las fuerzas de interacción entre las partículas que componen el cuerpo se anulan recíprocamente, ya que en ausencia de fuerzas exteriores, el ímpetu del cuerpo, como el de todo sistema cerrado, debe conservarse, es decir, debe tenerse  $\mathbf{F} = 0$ .

Si  $U$  es la energía potencial del cuerpo rígido en un campo exterior, la fuerza  $\mathbf{F}$  se obtiene derivando  $U$  con respecto a las coordenadas del centro de masa del cuerpo:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \quad (34.2)$$

En efecto, para una pequeña traslación  $\delta \mathbf{R}$  del cuerpo, los radios vectores  $\mathbf{r}$  de cada uno de sus puntos varían en  $\delta \mathbf{R}$  y la variación en la energía potencial es:

$$\delta U = \sum (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \cdot \sum \partial U / \partial \mathbf{r} = -\delta \mathbf{R} \cdot \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Observemos que la ecuación (34.1) puede obtenerse también como la ecuación de Lagrange para las coordenadas del centro de masa

$$(\frac{d}{dt}) \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}},$$

con la lagrangiana (32.4), por la que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Deduzcamos ahora la segunda ecuación del movimiento que determina la derivada con respecto al tiempo del momento angular o cinético  $\mathbf{M}$ . Para simplificar los cálculos, es conveniente elegir el sistema de referencia «fijo» (inercial), de modo que el centro de masa esté en reposo en este sistema, en el instante considerado.

Se tiene:

$$\dot{\mathbf{M}} = (\frac{d}{dt}) \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \sum \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \sum \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Nuestra elección de sistema de referencia (en el que  $\mathbf{V} = 0$ ), significa que el valor de  $\dot{\mathbf{r}}$  en el instante considerado coincide con  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Puesto que los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  son paralelos,  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$ . Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}$  por la fuerza  $\mathbf{f}$ , se obtiene finalmente

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (34.3)$$

donde,

Dado que  $\mathbf{M}$  se ha definido como momento cinético respecto del centro de masa (véase al principio del § 33), no cambia al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. Que así es puede verse a partir de la fórmula (9.5) con  $\mathbf{R} = 0$ . Por lo tanto, si bien la ecuación del movimiento (34.3) se ha deducido para un sistema de referencia particular, dicha ecuación es válida en cualquier otro sistema de referencia inercial en virtud del principio de relatividad de Galileo.

El vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$  se llama *momento de la fuerza*  $\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{K}$  momento resultante, es decir, la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Igual que para la fuerza total  $\mathbf{F}$ , no deben tenerse en cuenta en la suma (34.4) más que las fuerzas exteriores; de acuerdo con la ley de conservación del momento cinético, la suma de los momentos de las fuerzas internas en un sistema cerrado es nula.

El momento de la fuerza, igual que el momento angular, depende en general de la elección del origen con respecto al cual se define. En (34.3) y (34.4) los momentos se definen con respecto al centro de masa del cuerpo.

Si se desplaza el origen una distancia  $\mathbf{a}$ , los nuevos vectores de posición  $\mathbf{r}'$  de los puntos del cuerpo estarán relacionados con las anteriores  $\mathbf{r}$  por  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \sum \mathbf{r}' \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{a} \times \mathbf{f} \\ &\quad \text{o} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}' + \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (34.5)$$

Resulta que, en particular, el valor del momento resultante es independiente de la elección del origen si la fuerza total  $\mathbf{F} = 0$ . En este caso se dice que el cuerpo está sometido a un *par de fuerzas*.

La ecuación (34.3) puede considerarse como ecuación de Lagrange

$$(d/dt) \partial L / \partial \Omega = \partial L / \partial \phi$$

para las «coordenadas de rotación». En efecto, derivando la función de Lagrange (32.4) con respecto a las componentes del vector  $\Omega$ , se obtiene,

$$\partial L / \partial \Omega_i = I_{ik} \Omega_k = M_i.$$

La variación de la energía potencial  $U$ , consecuencia de una rotación infinitesimal  $\delta\phi$  del cuerpo es:

$$\delta U = - \sum \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = - \sum \mathbf{f} \cdot \delta \phi \times \mathbf{r} = - \delta \phi \cdot \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = - \mathbf{K} \cdot \delta \phi,$$

de donde,

$$\mathbf{K} = - \partial U / \partial \phi, \quad (34.6)$$

de modo que,

$$\partial L / \partial \phi = - \partial U / \partial \phi = \mathbf{K}.$$

Supongamos que los vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{K}$  son perpendiculares; entonces siempre puede encontrarse un vector  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathbf{K}'$  se anule en la fórmula (34.5) y se tenga

$$\mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (34.7)$$

La elección de  $\mathbf{a}$  no es única, ya que si se le suma un vector cualquiera paralelo a  $\mathbf{F}$ , no cambiará la igualdad (34.7); de suerte que la condición  $\mathbf{K}' = 0$  dará una recta, y no un punto, en el sistema de coordenadas móviles. Así, cuando  $\mathbf{K}$  es perpendicular a  $\mathbf{F}$ , el efecto de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo puede reducirse al de una fuerza única  $\mathbf{F}$  actuando a lo largo de una recta determinada.

Tal es en particular el caso de un campo de fuerzas homogéneo, en el cual la fuerza que actúa sobre una partícula es  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ , donde  $\mathbf{E}$  es un vector constante que caracteriza el campo y  $e$  una magnitud característica de las propiedades de la partícula en el campo dado<sup>1</sup>. Entonces,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\sum e, \quad \mathbf{K} = \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{E}.$$

Suponiendo que  $\sum e \neq 0$ , definimos un radio vector  $\mathbf{r}_0$  tal que

$$\mathbf{r}_0 = \sum e\mathbf{r}/\sum e. \quad (34.8)$$

Entonces, el momento resultante es, simplemente,

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}. \quad (34.9)$$

Cuando un cuerpo rígido se mueve en un campo uniforme, el efecto del campo se reduce, pues, a la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada en el punto cuyo radio vector es (34.8). La posición de este punto está completamente determinada por las propiedades del mismo cuerpo; en un campo gravitatorio, por ejemplo, este punto es el centro de masa.

### § 35. Angulos de Euler

Como ya se ha mencionado, el movimiento de un cuerpo rígido puede describirse por medio de las tres coordenadas de su centro de masa y de tres ángulos que definen la orientación de los ejes  $x_1, x_2, x_3$  del sistema de coordenadas móvil con relación al sistema fijo  $X, Y, Z$ . Habitualmente conviene tomar para estos ángulos los *ángulos de Euler*.

Como aquí interesan solamente los ángulos entre los ejes de coordenadas, tomaremos el origen de los dos sistemas en el mismo punto (fig. 47). El plano móvil  $x_1, x_2$  corta al plano fijo  $XY$  según la recta  $ON$  llamada *línea nodal*. Esta línea es evidentemente perpendicular simultáneamente al eje  $Z$  y al eje  $x_3$ ; se tomará como sentido positivo aquel que corresponde al del producto vectorial  $\mathbf{z} \times \mathbf{x}_3$  (siendo  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{x}_3$  los vectores unitarios según los ejes  $Z$  y  $x_3$ ).

Tomamos como magnitudes que determinan la posición de los ejes  $x_1, x_2, x_3$  con respecto a los ejes  $X, Y, Z$  los siguientes ángulos: el ángulo  $\theta$  entre los ejes  $Z$  y  $x_3$ , el ángulo  $\phi$  entre el eje  $X$  y  $ON$ , y el ángulo  $\psi$  entre el eje  $x_1$  y  $ON$ . Los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  se miden en el sentido definido por la regla del sacacorchos,

<sup>1</sup> Por ejemplo, en un campo eléctrico uniforme,  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo y  $e$  la carga de la partícula. En un campo gravitacional uniforme,  $\mathbf{E}$  es la aceleración ( $\mathbf{g}$ ) debida a la gravedad, y  $e$  es la masa de la partícula ( $m$ ).

respectivamente alrededor de los ejes  $Z$  y  $x_3$ . El ángulo  $\theta$  toma valores de cero a  $\pi$  y los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  de cero a  $2\pi^1$ .

Expresemos ahora las componentes del vector velocidad angular  $\Omega$  sobre los ejes móviles  $x_1, x_2, x_3$  en función de los ángulos de Euler y de sus derivadas.

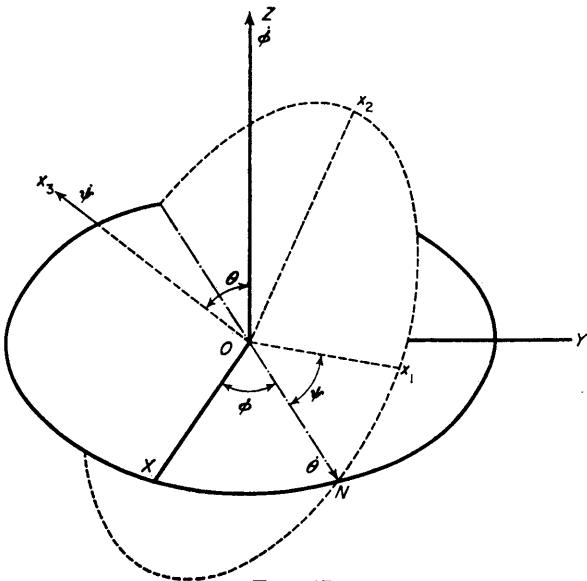


FIG. 47

Para ello, debemos hallar las componentes según esos ejes de las velocidades angulares  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ . La velocidad angular  $\dot{\theta}$  está dirigida según la línea nodal  $ON$  y sus componentes sobre los ejes  $x_1, x_2, x_3$  son

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \dot{\theta}_3 = 0.$$

La velocidad angular  $\dot{\phi}$  está dirigida según el eje  $Z$ ; su componente según  $x_3$  es  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$ , y su proyección en el plano  $x_1, x_2$  es  $\dot{\phi} \sin \theta$ . Descomponiendo esta última sobre los ejes  $x_1$  y  $x_2$  se obtiene:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi.$$

Finalmente, la velocidad angular  $\dot{\psi}$  está dirigida según el eje  $x_3$ .

Reuniendo las componentes a lo largo de cada eje, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

<sup>1</sup> Los ángulos  $\theta$  y  $\phi - \frac{1}{2}\pi$  son, respectivamente, el ángulo polar y el azimut de la dirección  $x_3$  con respecto a los ejes  $X, Y, Z$ . Los ángulos  $\theta$  y  $\frac{1}{2}\pi - \psi$  son, respectivamente, el ángulo polar y el azimut de la dirección  $z$  con respecto a los ejes  $x_1, x_2, x_3$ .

Si se hacen coincidir los ejes  $x_1, x_2, x_3$  con los ejes principales de inercia del sólido, la energía cinética de rotación, expresada en función de los ángulos de Euler se obtiene sustituyendo (35.1) en (32.8).

Para una peonza simétrica ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ), una simple reducción da:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (35.2)$$

Esta expresión se puede obtener más sencillamente utilizando el hecho de que la elección de las direcciones de los ejes principales  $x_1, x_2$  es arbitraria en una peonza simétrica. Si el eje  $x_1$  se toma a lo largo de la línea nodal  $ON$ , es decir,  $\psi = 0$ , las componentes de la velocidad angular son simplemente

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (35.3)$$

Como ejemplo de aplicación de los ángulos de Euler determinemos con su ayuda el movimiento libre de una peonza simétrica, que ya tratamos en § 33. Tomemos el eje  $Z$  del sistema fijo de coordenadas en la dirección del momento angular constante  $\mathbf{M}$  de la peonza. El eje  $x_3$  del sistema móvil está dirigido según el eje de la peonza, y admitimos que el eje  $x_1$  coincide con la línea de nodos en el instante considerado. Entonces, las componentes del vector  $\mathbf{M}$  son, por las fórmulas (35.3):

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \quad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta, \quad M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Por otro lado, como el eje  $x_1$  (línea nodal) es perpendicular al eje  $Z$ , se tiene,

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \operatorname{sen} \theta, \quad M_3 = M \cos \theta.$$

Igualando estas expresiones, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1\dot{\phi} = M, \quad I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta. \quad (35.4)$$

La primera de estas ecuaciones da  $\theta = \text{cte.}$ , es decir, que el ángulo entre el eje de la peonza y la dirección de  $\mathbf{M}$  es constante. La segunda ecuación define [de acuerdo con (33.5)] la velocidad angular de precesión  $\dot{\phi} = M/I_1$ . Finalmente, la tercera ecuación determina la velocidad angular de rotación de la peonza alrededor de su propio eje  $\Omega_3 = M \cos \theta/I_3$ .

### PROBLEMAS

- Reducir a cuadraturas el problema del movimiento de una peonza simétrica pesada cuyo punto inferior está fijo (fig. 48).

*Solución:* Tomamos el origen común de los sistemas de coordenadas fijo y móvil en el punto fijo  $O$  de la peonza, y el eje  $Z$  según la vertical (fig. 48). La lagrangiana de la peonza en el campo de la gravedad es:

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + \mu l^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - \mu gl \cos \theta,$$

(siendo  $\mu$  la masa de la peonza, y  $l$  la distancia de su punto fijo al centro de masa).

Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas. Se tienen, por tanto, dos integrales del movimiento:

$$p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi} = I_3(\dot{\psi} + \phi \cos \theta) = \text{cte} \equiv M_3, \quad (1)$$

$$p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = (I'_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{cte} \equiv M_z, \quad (2)$$

donde  $I'_1 = I_1 + \mu l^2$  (las magnitudes  $p_\psi$  y  $p_\phi$  son las componentes, según los ejes  $x_3$  y  $Z$ , respectivamente, del momento angular de rotación, definido con respecto al punto  $O$ ).

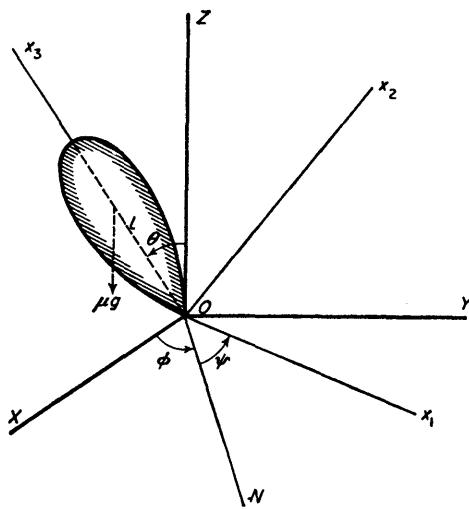


FIG. 48

La energía

$$E = \frac{1}{2} I'_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \phi \cos \theta)^2 + \mu g l \cos \theta \quad (3)$$

también se conserva.

Las ecuaciones (1) y (2) nos dan:

$$\dot{\phi} = (M_z - M_3 \cos \theta) / I'_1 \sin^2 \theta, \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

Eliminando  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  en la expresión (3) de la energía mediante las ecuaciones (4) y (5), se obtiene:

$$E' = \frac{1}{2} I'_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta),$$

donde

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2 I_3} - \mu g l, \quad (6)$$

$$U_{\text{ef}} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2 I'_1 \sin^2 \theta} - \mu g l (1 - \cos \theta).$$

Despejando  $\dot{\theta}$  y separando variables, se tiene:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2[E' - U_{ef}(\theta)]/I_3}}; \quad (7)$$

que es una integral elíptica. Los ángulos  $\psi$  y  $\phi$  se expresan entonces como funciones de  $\theta$  por medio de integrales obtenidas de las ecuaciones (4) y (5).

El dominio de variación del ángulo  $\theta$  durante el movimiento está determinado por la condición  $E' \geq U_{ef}(\theta)$ . La función  $U_{ef}(\theta)$  tiende a infinito (si  $M_3 \neq M_z$ ) para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , y tiene un mínimo en el intervalo comprendido entre estos dos valores. La ecuación  $E' = U_{ef}(\theta)$  tiene por tanto dos raíces que determinan los ángulos límites  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de la inclinación del eje de la peonza sobre la vertical.

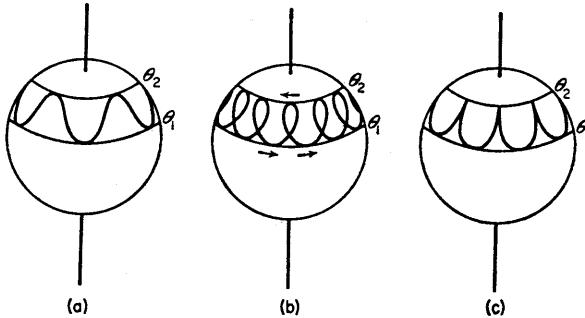


FIG. 49

Cuando  $\theta$  varía de  $\theta_1$  a  $\theta_2$ , la derivada  $\dot{\phi}$  cambia de signo solamente si la diferencia  $M_z - M_3 \cos \theta$  cambia de signo en ese intervalo de  $\theta$ . Si no cambia de signo, el eje de la peonza está animado de un movimiento de precesión monótono alrededor de la vertical, y al mismo tiempo oscila de arriba a abajo (movimiento de *nutación*); véase figura 49, b, donde la curva representa el trazo que dejaría el eje de la peonza sobre la superficie de una esfera con centro en el punto fijo de la peonza. Si  $\dot{\phi}$  cambia de signo, la dirección de la precesión es opuesta en los dos círculos límites, y el eje de la peonza se desplaza alrededor de la vertical describiendo bucles (fig. 49, b). Finalmente, si uno de los valores  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  hace cero la diferencia  $M_z - M_3 \cos \theta$ , se anulan las dos derivadas  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\theta}$  en el círculo límite correspondiente, y la trayectoria del eje de la peonza es la representada en la figura 49, c.

2. Hallar la condición para que la rotación de una peonza alrededor de un eje vertical sea estable.

*Solución:* Para  $\theta = 0$  los ejes  $x_3$  y  $Z$  coinciden, así que  $M_3 = M_z$ ,  $E' = 0$ . La rotación alrededor de este eje será estable si el valor  $\theta = 0$  corresponde a un mínimo de  $U_{ef}(\theta)$ . Para pequeños  $\theta$  se tiene:

$$U_{ef} \approx (M_3^2/8I_1 - \frac{1}{2}\mu gl)\theta^2,$$

por lo tanto, la condición de estabilidad:  $M_3^2 > 4I_1'\mu gl/I_3^2$ , o sea:

$$\Omega_3^2 > 4I_1'\mu gl/I_3^2.$$

3. Determinar el movimiento de una peonza en el caso de que la energía cinética de rotación alrededor de su eje sea grande con respecto a su energía en el campo de la gravedad (caso de la *peonza rápida*).

*Solución:* En una primera aproximación, despreciando la gravedad, hay una precesión libre del eje de la peonza alrededor de la dirección del momento angular (correspondiendo en este caso a la nutación de la peonza); de acuerdo con (33.5), la velocidad angular de esta precesión es:

$$\Omega_{\text{nut}} = \mathbf{M}/I_1. \quad (1)$$

En la segunda aproximación, aparece una precesión lenta del momento  $\mathbf{M}$  alrededor de la vertical (fig. 50). Para determinar la velocidad de esta precesión, se calcula la media, sobre un período de la nutación, de la ecuación del movimiento exacta (34.3).

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{K}$$

El momento de la fuerza de la gravedad que actúa sobre la peonza es  $\mathbf{K} = \mu l \mathbf{n}_3 \times \mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{n}_3$  es el vector unitario a lo largo del eje de la peonza. Consideraciones de simetría mues-

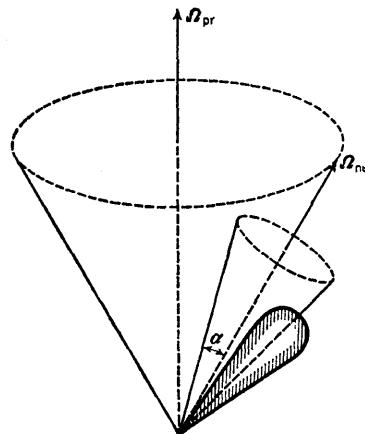


FIG 50

tran evidentemente que el resultado del valor medio de  $\mathbf{K}$  sobre el «cono de nutación» consiste en sustituir  $\mathbf{n}_3$  por su componente  $(\mathbf{M}/M) \cos \alpha$  en la dirección de  $\mathbf{M}$  (siendo  $\alpha$  el ángulo entre  $\mathbf{M}$  y el eje de la peonza). Se obtiene así la ecuación

$$\overline{d\mathbf{M}/dt} = -(\mu l/M) \mathbf{g} \times \mathbf{M} \cos \alpha.$$

Esto significa que el vector  $\mathbf{M}$  está animado de un movimiento de precesión alrededor de la dirección de  $\mathbf{g}$  (es decir, la vertical) con una velocidad angular media

$$\bar{\Omega}_{\text{pr}} = -(\mu l/M) \mathbf{g} \cos \alpha \quad (2)$$

que es pequeña comparada con  $\Omega_{\text{nut}}$ .

En esta aproximación las magnitudes  $M$  y  $\cos \alpha$  de las fórmulas (1) y (2) son constantes (aunque no sean exactamente integrales del movimiento). Con la misma aproximación están ligadas a las magnitudes estrictamente conservativas  $E$  y  $M_3$  por las relaciones

$$M_3 = M \cos \alpha,$$

$$E \approx \frac{1}{2}M^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{I_3} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_1} \right).$$

### § 36. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones del movimiento descritas en § 34 están referidas a un sistema de coordenadas fijo: las derivadas  $d\mathbf{P}/dt$  y  $d\mathbf{M}/dt$  en las ecuaciones (34.1) y (34.3) son las velocidades de variación de los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  con respecto a ese sistema. Sin embargo, la relación más sencilla entre las componentes del momento angular de rotación  $\mathbf{M}$  del cuerpo rígido y las componentes de la velocidad angular tiene lugar en un sistema de coordenadas móvil cuyos ejes son los ejes principales de inercia. Para poder utilizar esta relación, se deben transformar primero las ecuaciones del movimiento refiriéndolas a un sistema móvil de coordenadas  $x_1, x_2, x_3$ .

Sea  $d\mathbf{A}/dt$  la velocidad de variación de un vector  $\mathbf{A}$  con respecto al sistema fijo. Si el vector  $\mathbf{A}$  no cambia en un sistema que gira, su velocidad de variación relativa al sistema fijo será debida únicamente a la rotación, y se tendrá entonces,

$$d\mathbf{A}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A};$$

[véase § 9, donde se ha puntualizado que fórmulas tales como (9.1) y (9.2) son válidas para todo vector]. En el caso general, debe añadirse al segundo miembro de esta igualdad la velocidad de variación del vector  $\mathbf{A}$  con respecto al sistema móvil; designando esta velocidad por  $d'\mathbf{A}/dt$ , se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (36.1)$$

Usando esta fórmula general, pueden escribirse inmediatamente las ecuaciones (34.1) y (34.3) en la forma

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} = \mathbf{K}. \quad (36.2)$$

Puesto que la derivación respecto al tiempo se efectúa aquí en el sistema móvil de coordenadas, pueden proyectarse directamente las ecuaciones sobre los ejes de este sistema, escribiendo,

$$(d'\mathbf{P}/dt)_1 = dP_1/dt, \dots, (d'\mathbf{M}/dt)_1 = dM_1/dt, \dots,$$

donde los índices 1, 2, 3, designan las componentes sobre los ejes  $x_1, x_2, x_3$ .

Sustituyendo en la primera ecuación  $\mathbf{P}$  por  $\mu\mathbf{V}$  obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \mu \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) = F_1, \\ \mu \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) = F_2, \\ \mu \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) = F_3. \end{array} \right\} \quad (36.3)$$

Si los ejes  $x_1, x_2, x_3$  coinciden con los ejes principales de inercia, se puede poner  $M_1 = I_1 \Omega_1$ , etc., en la segunda ecuación de (36.2), obteniéndose:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1, \\ I_2 d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2, \\ I_3 d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3. \end{array} \right\} \quad (36.4)$$

Las ecuaciones (36.4) se llaman *ecuaciones de Euler*.

En la rotación libre  $\mathbf{K} = 0$ , de modo que las ecuaciones de Euler toman la forma:

$$\left. \begin{array}{l} d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3/I_1 = 0, \\ d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1/I_2 = 0, \\ d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2/I_3 = 0. \end{array} \right\} \quad (36.5)$$

A título de ejemplo, apliquemos estas ecuaciones a la rotación de la peonza simétrica ya estudiada. Poniendo  $I_1 = I_2$ , la tercera ecuación da  $\dot{\Omega}_3 = 0$ , es decir,  $\Omega_3 = \text{cte}$ . Escribimos entonces las dos primeras ecuaciones en la forma

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1,$$

donde se ha introducido la magnitud constante

$$\omega = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1 \quad (36.6)$$

Multiplicando la segunda ecuación por  $i$  y sumándola a la primera, resulta:

$$d(\Omega_1 + i\Omega_2)/dt = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2),$$

así que

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A \exp(i\omega t),$$

siendo  $A$  una constante, que puede considerarse como real (eligiendo convenientemente el origen de tiempos), y se tiene entonces,

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t. \quad (36.7)$$

Este resultado muestra que la proyección de la velocidad angular sobre un plano perpendicular al eje de la peonza gira en este plano con una velocidad angular  $\omega$ , permaneciendo constante en módulo ( $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$ ). Puesto que la componente  $\Omega_3$  sobre el eje de la peonza es también constante, concluimos que el vector  $\boldsymbol{\Omega}$  gira uniformemente con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje de la peonza, conservando su módulo invariable. Teniendo en cuenta las relaciones  $M_1 = I_1\Omega_1$ ,  $M_2 = I_2\Omega_2$ ,  $M_3 = I_3\Omega_3$  entre las componentes de los vectores  $\mathbf{M}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$ , es evidente que el vector momento angular  $\mathbf{M}$  realiza el mismo movimiento con respecto al eje de la peonza.

Naturalmente que esta descripción representa sencillamente otro aspecto del movimiento de la peonza, ya estudiado en § 33 y § 35 con respecto al sistema de coordenadas fijo. En particular, la velocidad angular de rotación del vector  $\mathbf{M}$  (eje  $Z$  en la fig. 48) alrededor de la dirección de  $x_3$ , en función de los ángulos de Euler, coincide con la velocidad angular  $-\dot{\psi}$ . Usando las ecuaciones (35.4), se tiene:

$$\dot{\psi} = \frac{M \cos \theta}{I_3} - \phi \cos \theta = M \cos \theta \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right),$$

o

$$-\dot{\psi} = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1,$$

de acuerdo con (36.6).

### § 37. La peonza asimétrica

Apliquemos ahora las ecuaciones de Euler al problema más complejo de la rotación libre de una peonza asimétrica, cuyos tres momentos de inercia son diferentes. Para fijar ideas, suponemos

$$I_3 > I_2 > I_1. \quad (37.1)$$

Dos integrales de las ecuaciones de Euler son ya conocidas, pues están dadas por las leyes de la conservación de la energía y del momento angular:

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \quad (37.2)$$

donde la energía  $E$  y el valor absoluto  $M$  del momento angular son constantes dadas. Estas dos ecuaciones expresadas en función de las componentes del vector  $\mathbf{M}$  son:

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \quad (37.3)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \quad (37.4)$$

Pueden ya deducirse algunas conclusiones relativas a la naturaleza del movimiento de la peonza. Para ello, observemos que, geométricamente, en los ejes  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , las ecuaciones (37.3) y (37.4) son, respectivamente, la ecuación de un elipsoide de semiejes

$$\sqrt{(2EI_1)}, \sqrt{(2EI_2)}, \sqrt{(2EI_3)}$$

y la de una esfera de radio  $M$ . Cuando el vector  $\mathbf{M}$  se mueve (con respecto a los ejes de inercia de la peonza), su extremo se desplaza a lo largo de la línea de intersección de estas dos superficies (la fig. 51 representa un cierto número de estas líneas de intersección de un elipsoide con esferas de distintos radios). La existencia de una intersección está asegurada por las desigualdades evidentes

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \quad (37.5)$$

que geométricamente significan que el radio de la esfera (37.4) está comprendido entre el más pequeño y el mayor de los semiejes del elipsoide (37.3).

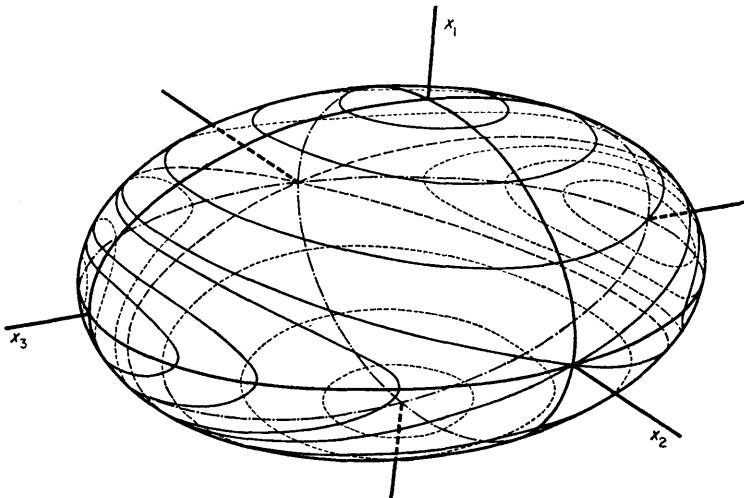


FIG. 51

Examinemos el cambio de carácter de estas «trayectorias» del extremo del vector  $\mathbf{M}^1$ , cuando  $M$  varía (para una energía dada  $E$ ). Cuando  $M^2$  es sólo ligeramente superior a  $2EI_1$ , la esfera corta al elipsoide en dos pequeñas curvas cerradas que rodean al eje  $x_1$  en las proximidades de los dos polos correspondientes del elipsoide (cuando  $M^2 \rightarrow 2EI_1$ , estas curvas tienden a confundirse con los polos). A medida que  $M^2$  crece, las curvas se ensanchan, y para  $M^2 = 2EI_2$  se convierten en dos curvas planas (elipses) que se cortan en los polos del eje  $x_2$ . Cuando  $M^2$  continúa creciendo, aparecen de nuevo dos trayectorias

<sup>1</sup> Las curvas análogas descritas por el extremo del vector  $\Omega$  se llaman *polodias*.

cerradas distintas, pero que ahora rodean los polos del eje  $x_3$ , y se confunden con estos polos para  $M^2 \rightarrow 2EI_3$ .

Observamos primeramente que, puesto que las trayectorias son cerradas, el movimiento del vector  $\mathbf{M}$  relativo a la peonza es periódico; durante un período el vector  $\mathbf{M}$  describe una superficie cónica, volviendo a su posición inicial.

Seguidamente observamos el carácter esencialmente distinto de las trayectorias en las proximidades de los diferentes polos del elipsoide. En las proximidades de los ejes  $x_1$  y  $x_3$ , las trayectorias rodean completamente los polos correspondientes, pero las trayectorias que pasan cerca de los polos del eje  $x_2$  se separan en seguida a una gran distancia de estos puntos. Esta diferencia corresponde a la diferente estabilidad de la rotación de la peonza alrededor de sus tres ejes de inercia. La rotación alrededor de sus ejes  $x_3$  y  $x_1$  (correspondientes al mayor y al menor de los tres momentos de inercia) es estable, en el sentido de que, para una pequeña perturbación de estos estados, el movimiento resultante es próximo al movimiento inicial. Sin embargo, la rotación alrededor del eje  $x_2$  es inestable: una pequeña desviación basta para provocar un movimiento que lleva a la peonza lejos de su posición inicial.

Para determinar la dependencia con el tiempo de las componentes de  $\Omega$  (o de las de  $\mathbf{M}$  que son proporcionales a las de  $\Omega$ ) utilizaremos las ecuaciones de Euler (36.5). Expresando  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$  en función de  $\Omega_2$  por medio de las ecuaciones (37.2) y (37.3):

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= [(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2]/I_1(I_3 - I_1), \\ \Omega_3^2 &= [(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]/I_3(I_3 - I_1),\end{aligned}\quad (37.6)$$

y sustituimos en la segunda ecuación (36.5), obteniendo:

$$\begin{aligned}d\Omega_2/dt &= (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3/I_2 \\ &= \sqrt{\{(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2\}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\{(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2\}}/I_2\sqrt{(I_1I_3)}.\end{aligned}\quad (37.7)$$

Separando variables e integrando, se obtiene la función  $t(\Omega_2)$  como una integral elíptica. Para reducir ésta a la forma normal, supondremos, para fijar ideas

$$M^2 > 2EI_2;$$

(en el caso contrario se deben intercambiar los índices 1 y 3 en las fórmulas siguientes). En lugar de  $t$  y  $\Omega_2$  tomamos las nuevas variables

$$\begin{aligned}\tau &= t\sqrt{[(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)/I_1I_2I_3]}, \\ s &= \Omega_2\sqrt{[I_2(I_3 - I_2)/(2EI_3 - M^2)]},\end{aligned}\quad (37.8)$$

y definiendo el parámetro positivo<sup>1</sup>  $k^2 < 1$  por

$$k^2 = (I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)/(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1),\quad (37.9)$$

<sup>1</sup> Denominado *módulo* de las funciones elípticas definidas a continuación.

obtenemos

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{[(1-s^2)(1-k^2s^2)]}},$$

(el origen de tiempos se elige de modo tal que  $\Omega_2 = 0$  para  $t = 0$ ). La función inversa  $s(\tau)$  constituye una función elíptica de Jacobi:

$$s = \operatorname{sn} \tau,$$

que determina  $\Omega_2$  en función del tiempo. Las funciones  $\Omega_1(t)$  y  $\Omega_3(t)$  son funciones algebraicas de  $\Omega_2(t)$  dadas por (37.6). Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones elípticas

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 \tau)}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tau)},$$

se obtiene, finalmente,

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{[(2EI_3 - M^2)/I_1(I_3 - I_1)]} \operatorname{cn} \tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{[(2EI_3 - M^2)/I_2(I_3 - I_2)]} \operatorname{sn} \tau, \\ \Omega_3 &= -\sqrt{[(M^2 - 2EI_1)/I_3(I_3 - I_1)]} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (37.10)$$

Las funciones (37.10) son periódicas, y su período con respecto a la variable  $\tau$  es  $4K$ , donde  $K$  es una integral elíptica completa de primera especie:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{[(1-s^2)(1-k^2s^2)]}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}. \quad (37.11)$$

El período con respecto a  $t$  es, por lo tanto,

$$T = 4K\sqrt{[I_1 I_2 I_3 / (I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)]}. \quad (37.12)$$

Al cabo de un tiempo  $T$  el vector  $\boldsymbol{\Omega}$  vuelve a su posición inicial con relación a los ejes de la peonza. (Sin embargo, la propia peonza no vuelve a su posición inicial con relación al sistema de coordenadas fijo: ver más abajo.)

Para  $I_1 = I_2$ , las fórmulas (37.10) evidentemente se reducen a las obtenidas en § 36 para una peonza simétrica. En efecto, cuando  $I_1 \rightarrow I_2$ , el parámetro  $k^2 \rightarrow 0$  y las funciones elípticas degeneran en funciones circulares:

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \operatorname{sen} \tau, \quad \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1,$$

y volvemos a las fórmulas (36.7).

Cuando  $M^2 = 2EI_3$ , se tiene  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 = \text{cte.}$ , es decir, que el vector  $\boldsymbol{\Omega}$  está constantemente dirigido según el eje  $x_3$ . Este caso corresponde a una rotación uniforme de la peonza alrededor del eje  $x_3$ . De la misma manera, para  $M^2 = 2EI_1$  (cuando  $\tau = 0$ ) se tiene una rotación uniforme alrededor del eje  $x_1$ .

Determinemos ahora el movimiento absoluto de la peonza en el espacio en función del tiempo (es decir, el movimiento con respecto al sistema fijo de coordenadas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ). Para ello, utilizamos los ángulos de Euler  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , entre los ejes de la peonza y los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , tomando el eje  $Z$  en la dirección del vector constante  $\mathbf{M}$ . Puesto que el ángulo polar y el azimut del eje  $Z$  con respecto a los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  son, respectivamente,  $\theta$  y  $\frac{1}{2}\pi - \psi$  (véase la nota al pie de la pág. 133), se obtiene tomando las componentes de  $\mathbf{M}$  sobre los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ :

$$\left. \begin{aligned} M \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi &= M_1 = I_1 \Omega_1, \\ M \operatorname{sen} \theta \cos \psi &= M_2 = I_2 \Omega_2, \\ M \cos \theta &= M_3 = I_3 \Omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (37.13)$$

De donde,

$$\cos \theta = I_3 \Omega_3 / M, \quad \operatorname{tg} \psi = I_1 \Omega_1 / I_2 \Omega_2, \quad (37.14)$$

y teniendo en cuenta las fórmulas (37.10)

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{[I_3(M^2 - 2EI_1)/M^2(I_3 - I_1)]} \operatorname{dn} \tau, \\ \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{[I_1(I_3 - I_2)/I_2(I_3 - I_1)]} \operatorname{cn} \tau / \operatorname{sn} \tau, \end{aligned} \quad (37.15)$$

que determinan  $\theta$  y  $\psi$  en función del tiempo; igual que las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$ , son funciones periódicas de período (37.12).

El ángulo  $\phi$  no aparece en las fórmulas (37.13), y para calcularlo es preciso volver a las fórmulas (35.1), que expresan las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  en función de las derivadas de los ángulos de Euler. Eliminando  $\dot{\theta}$  entre las ecuaciones

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi,$$

obtenemos,

$$\dot{\phi} = (\Omega_1 \operatorname{sen} \psi + \Omega_2 \cos \psi) / \operatorname{sen} \theta,$$

y, entonces, usando las fórmulas (37.13),

$$d\phi/dt = (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2) M / (I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2). \quad (37.16)$$

La función  $\phi(t)$  está determinada por una integral, pero el integrando contiene funciones elípticas en una forma complicada. Por medio de algunas transformaciones bastante complejas, se puede expresar la integral en términos de la «función thêta». Sin efectuar los cálculos, indicamos solamente el resultado final<sup>1</sup>.

La función  $\phi(t)$  puede representarse (aparte de una constante aditiva arbitraria) por una suma de dos términos:

$$\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t), \quad (37.17)$$

<sup>1</sup> Los cálculos pueden verse en el libro por E. T. Whittaker, «Analytical Dynamics», 4.<sup>a</sup> edición, Cambridge Univ. Press, 1937 (reimpresión: Dover Pub., New York, 1945).

uno de los cuales está dado por

$$\exp[2i\phi_1(t)] = \vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} - i\alpha\right) / \vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} + i\alpha\right), \quad (37.18)$$

donde  $\vartheta_{01}$  es la función thêta, y  $\alpha$  una constante real definida por la igualdad

$$\operatorname{sn}(2i\alpha K) = i\sqrt{[I_3(M^2 - 2EI_1)/I_1(2EI_3 - M^2)]}; \quad (37.19)$$

[ $K$  y  $T$  están dados por (37.11) y (37.12)]. La función del segundo miembro de (37.18) es periódica, de período  $\frac{1}{2}T$ , de modo que  $\phi_1(t)$  varía  $2\pi$  durante un tiempo  $T$ . El segundo término de (37.17) está dado por

$$\phi_2(t) = 2\pi t/T', \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T} \frac{\vartheta_{01}'(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)}. \quad (37.20)$$

Esta función aumenta en  $2\pi$  durante el tiempo  $T'$ , así que el movimiento en relación con el ángulo  $\phi$  se presenta como la combinación de dos movimientos periódicos; uno de los períodos ( $T$ ) coincide con el período de variación de los ángulos  $\psi$  y  $\theta$ , mientras que el otro ( $T'$ ) es incommensurable con el primero. Esta última circunstancia lleva consigo que la peonza no vuelva nunca exactamente a su posición inicial.

### PROBLEMAS

- Determinar la rotación libre de una peonza alrededor de un eje cercano al eje de inercia  $x_3$  (o al  $x_1$ ).

*Solución:* Sea el eje  $x_3$  próximo a la dirección de  $\mathbf{M}$ . Entonces las componentes  $M_1$  y  $M_2$  son pequeñas, y la componente  $M_3 \approx M$  (prescindiendo de los infinitésimos de segundo orden). Con la misma aproximación, las dos primeras ecuaciones de Euler (36.5), se escriben

$$dM_1/dt = \Omega_0 M_2 (1 - I_3/I_2),$$

$$dM_2/dt = \Omega_0 M_1 (I_3/I_1 - 1),$$

donde se ha introducido la constante  $\Omega_0 = M/I_3$ . Siguiendo la regla general, buscamos para  $M_1$  y  $M_2$  soluciones proporcionales a  $\exp(i\omega t)$ , y se obtiene para la frecuencia  $\omega$  el valor

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left[\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)\right]}. \quad (1)$$

Los valores de  $M_1$  y  $M_2$  son:

$$M_1 = Ma \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)} \cos \omega t, \quad M_2 = Ma \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)} \sin \omega t, \quad (2)$$

donde  $a$  es una constante arbitraria pequeña. Estas fórmulas determinan el movimiento del vector  $\mathbf{M}$  relativo a la peonza; en la figura 51, el extremo del vector  $\mathbf{M}$  describe, con la frecuencia  $\omega$ , una pequeña elipse alrededor del polo del eje  $x_3$ .

Para determinar el movimiento absoluto de la peonza en el espacio, calculemos sus ángulos de Euler. En el presente caso, el ángulo  $\theta$  entre el eje  $x_3$  y el eje  $Z$  (dirección de  $\mathbf{M}$ ) es pequeño, y por las fórmulas (37.14)

$$\operatorname{tg} \psi = M_1/M_2,$$

$\theta^2 \approx 2(1 - \cos \theta) = 2(1 - M_3/M) \approx (M_1^2 + M_2^2)/M^2$ ; sustituyendo (2), se obtiene,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \psi &= \sqrt{[I_1(I_3 - I_2)/I_2(I_3 - I_1)]} \operatorname{ctg} \omega t, \\ \theta^2 &= a^2 \left[ \left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right) \cos^2 \omega t + \left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right) \sin^2 \omega t \right].\end{aligned}\quad (3)$$

Para calcular el ángulo  $\phi$ , observemos que, por la tercera fórmula (35.1), se tiene, para  $\theta \ll 1$ :

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \psi + \phi.$$

Por tanto,

$$\phi = \Omega_0 t - \psi, \quad (4)$$

(omitiendo una constante de integración arbitraria).

Se obtendrá una idea clara de la naturaleza del movimiento de la peonza si se consideran los cambios de dirección de sus tres ejes de inercia. Sean  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_3$  los vectores unitarios a lo largo de estos ejes. Los vectores  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  giran uniformemente en el plano  $XY$  con frecuencia  $\Omega_0$ , y al mismo tiempo realizan pequeñas oscilaciones transversales de frecuencia  $\omega$ ; estas oscilaciones están determinadas por las componentes  $Z$  de los vectores en cuestión:

$$\begin{aligned}n_{1Z} &\approx M_1/M = a\sqrt{(I_3/I_2 - 1)} \cos \omega t, \\ n_{2Z} &= M_2/M = a\sqrt{(I_3/I_1 - 1)} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Para el vector  $\mathbf{n}_3$  se tiene, con la misma precisión:

$$n_{3x} \approx \theta \sin \phi, \quad n_{3y} \approx -\theta \cos \phi, \quad n_{3z} \approx 1.$$

(el ángulo polar y el azimut de la dirección de  $\mathbf{n}_3$  con respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  son  $\theta$  y  $\phi - \frac{1}{2}\pi$ ; véase la nota al pie de la pág. 133). Escribimos también, utilizando las fórmulas (37.13):

$$\begin{aligned}n_{3x} &= \theta \sin(\Omega_0 t - \psi) \\ &= \theta \sin \Omega_0 t \cos \psi - \theta \cos \Omega_0 t \sin \psi \\ &= (M_2/M) \sin \Omega_0 t - (M_1/M) \cos \Omega_0 t \\ &= a \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right)} \sin \Omega_0 t \sin \omega t - a \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right)} \cos \Omega_0 t \cos \omega t\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}n_{3x} &= -\frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right)} + \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right)} \right] \cos(\Omega_0 + \omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right)} - \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right)} \right] \cos(\Omega_0 - \omega)t.\end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}n_{3y} &= -\frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right)} + \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right)} \right] \sin(\Omega_0 + \omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right)} - \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right)} \right] \sin(\Omega_0 - \omega)t.\end{aligned}$$

Está claro por ello que el movimiento del vector  $\mathbf{n}_3$  es una superposición de dos rotaciones alrededor del eje  $Z$  con frecuencias  $\Omega_0 \pm \omega$ .

2. Determinar la rotación libre de una peonza para la cual  $M^2 = 2EI_2$ .

*Solución:* Este caso corresponde al movimiento del extremo del vector  $\mathbf{M}$  a lo largo de una curva que pasa por el polo del eje  $x_2$  (fig. 51). La ecuación (37.7) toma la forma

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = i\sqrt{[(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)/I_1 I_3]} \Omega_0, \quad s = \Omega_2/\Omega_0,$$

donde  $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$ . Integrando esta ecuación, y utilizando después las fórmulas (37.6), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 \sqrt{[I_2(I_3 - I_2)/I_1(I_3 - I_1)]} \operatorname{sech} \tau, \\ \Omega_2 &= \Omega_0 \operatorname{th} \tau, \\ \Omega_3 &= \Omega_0 \sqrt{[I_2(I_2 - I_1)/I_3(I_3 - I_1)]} \operatorname{sech} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Para describir el movimiento absoluto de la peonza, se hacen intervenir los ángulos de Euler, definiendo  $\theta$  como el ángulo entre el eje  $Z$  (dirección de  $\mathbf{M}$ ) y el eje  $x_2$  de la peonza (no el eje  $x_3$  como antes). En las fórmulas (37.14) y (37.16), que ligan las componentes del vector  $\Omega$  a los ángulos de Euler, deben permudarse cíclicamente los índices 1, 2, 3  $\rightarrow$  3, 1, 2. Sustituyendo (1) en esas fórmulas, tenemos,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \operatorname{th} \tau, \quad \phi = \Omega_0 t + \text{cte} \\ \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{[I_3(I_2 - I_1)/I_1(I_3 - I_2)]}. \end{aligned}$$

Las fórmulas obtenidas muestran que, cuando  $t \rightarrow \infty$ , el vector  $\Omega$  se aproxima asintóticamente al eje  $x_2$ , el cual tiende también asintóticamente al eje  $Z$ .

### § 38. Cuerpos rígidos en contacto

Las ecuaciones del movimiento (34.1) y (34.3) muestran que las *condiciones de equilibrio* de un cuerpo rígido se pueden formular anulando la resultante general y el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él.

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0. \quad (38.1)$$

La suma se extiende a todas las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo, y  $\mathbf{r}$  es el radio vector del «punto de aplicación» de estas fuerzas; el origen, con respecto al cual se definen los momentos, puede escogerse arbitrariamente, ya que si  $\mathbf{F} = 0$  el valor de  $\mathbf{K}$  no depende de esta elección [véase (34.5)].

Si se tiene un sistema de cuerpos rígidos en contacto, existe equilibrio cuando las condiciones (38.1) se satisfacen separadamente para cada cuerpo. Las fuerzas consideradas deben entonces incluir aquellas fuerzas ejercidas sobre cada cuerpo por los que están en contacto con él. Estas fuerzas están aplicadas en los puntos de contacto y se llaman *reacciones*. Es evidente que las reacciones mutuas de dos cuerpos son iguales y de sentido contrario.

En general, los valores y las direcciones de las reacciones se determinan resolviendo el sistema de las ecuaciones de equilibrio (38.1) para todos los cuerpos a la vez. Sin embargo, en ciertos casos las direcciones de las fuerzas de

reacción están dadas por las condiciones del problema. Por ejemplo, si dos cuerpos pueden deslizar libremente uno sobre otro, la reacción entre ellos es normal a la superficie de contacto.

Si los cuerpos en contacto están en movimiento relativo, aparecerán, además de las fuerzas de reacción, *fuerzas de rozamiento* que tienen un carácter disipativo.

Hay dos tipos posibles de movimiento de los cuerpos en contacto: *deslizamiento* y *rodadura*. En el deslizamiento, la reacción es perpendicular a las superficies en contacto, y la fuerza de rozamiento es tangencial. La rodadura pura está caracterizada por el hecho de que no hay movimiento relativo de los cuerpos en el punto de contacto; esto es, el cuerpo que rueda está en cada instante como si fuese fijo en el punto de contacto. La dirección de la reacción puede ser cualquiera, es decir, no es necesariamente normal a las superficies de contacto. El rozamiento aquí aparece como un momento suplementario que se opone a la rodadura.

Si el rozamiento en el deslizamiento es lo suficientemente pequeño para que pueda despreciarse, las superficies de los cuerpos se dicen *perfectamente lisas*. Al contrario, si las propiedades de la superficie de los cuerpos no admiten más que rodadura pura, sin deslizamiento, y el rozamiento en la rodadura puede despreciarse, las superficies se dicen *perfectamente rugosas*.

En estos dos casos las fuerzas de rozamiento no figuran explícitamente en el problema del movimiento de los cuerpos, que es por lo tanto puramente mecánico. El movimiento no será un proceso puramente mecánico si las propiedades del rozamiento juegan un papel esencial en él (véase § 25).

El contacto entre los cuerpos disminuye el número de sus grados de libertad comparado con el caso del movimiento libre. Hasta el presente, estudiando tales problemas, se ha tenido en cuenta esta reducción haciendo intervenir las coordenadas que correspondían directamente al número real de grados de libertad. Sin embargo, en la rodadura una elección tal de las coordenadas puede ser imposible.

La condición impuesta en el movimiento de rodadura es que las velocidades de los puntos de contacto deben ser iguales; por ejemplo, cuando un cuerpo rueda sobre una superficie fija, la velocidad del punto de contacto debe ser nula. En el caso general, esta condición está expresada por *ecuaciones de ligadura* del tipo

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0, \quad (38.2)$$

donde las  $c_{\alpha i}$  son funciones de las coordenadas solamente (el índice  $\alpha$  numera las ecuaciones de ligadura). Si los primeros miembros de estas ecuaciones no son derivadas totales con respecto al tiempo de funciones de las coordenadas, estas ecuaciones no pueden ser integradas. En otras palabras, no pueden reducirse a relaciones entre las coordenadas solamente, que podrían utilizarse para expresar la posición de los cuerpos por un número menor de coordenadas, correspondiente al número real de grados de libertad. Tales ligaduras se llaman *no holónomas* (en oposición a las ligaduras *holónomas*, que relacionan solamente las coordenadas del sistema).

Consideremos, por ejemplo, una esfera que rueda sobre una superficie plana. Como de costumbre, llamaremos  $\mathbf{V}$  a la velocidad de traslación (velocidad del centro de la esfera), y  $\boldsymbol{\Omega}$  a la velocidad angular de rotación. La velocidad del punto de contacto con el plano se obtiene poniendo  $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$  en la fórmula general  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  ( $a$  es el radio de la esfera y  $\mathbf{n}$  el vector unitario de la normal al plano en el punto de contacto). La ligadura buscada está dada por la condición de que no haya deslizamiento en el punto de contacto, es decir,

$$\mathbf{V} - a\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (38.3)$$

Esta ecuación no es integrable: aunque la velocidad  $\mathbf{V}$  es la derivada total respecto al tiempo del radio vector del centro de la esfera, la velocidad angular no es en general la derivada total de una coordenada respecto al tiempo, de modo que la ligadura (38.3) es no holónoma<sup>1</sup>.

Puesto que no pueden utilizarse las ecuaciones de ligaduras no holónomas para reducir el número de coordenadas, entonces cuando se presentan tales ligaduras es necesario usar coordenadas que no son todas independientes. Para establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, volveremos al principio de mínima acción.

La presencia de ligaduras del tipo (38.2) impone ciertas restricciones en los valores posibles de las variaciones de las coordenadas: multiplicando las ecuaciones (38.2) por  $\delta t$ , se encuentra que las variaciones  $\delta q_i$  no son independientes, sino están relacionadas por

$$\sum_i c_{ai} \delta q_i = 0. \quad (38.4)$$

Esto debe tenerse en cuenta cuando se varía la acción. Según el método de Lagrange para hallar extremales condicionados, deben añadirse al integrando de la variación de la acción

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt$$

los términos de la izquierda de las ecuaciones (38.4) multiplicados por coeficientes indeterminados<sup>2</sup>  $\lambda_a$  (funciones de las coordenadas), y después igualar el integrando a cero. Entonces pueden considerarse todas las variaciones  $\delta q_i$  como independientes, y se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_a \lambda_a c_{ai}. \quad (38.5)$$

<sup>1</sup> Observemos que la ligadura análoga en la rodadura de un cilindro sería holónoma. En este caso, el eje de rotación tiene una dirección fija en el espacio, y, por lo tanto,  $\boldsymbol{\Omega} = d\phi/dt$  es una derivada total del ángulo  $\phi$  de rotación del cilindro alrededor de su eje. La condición (38.3) puede entonces integrarse y da una relación entre el ángulo  $\phi$  y la coordenada del centro de masa.

<sup>2</sup> Denominados *multiplicadores de Lagrange*.

Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones de ligadura (38.2), constituyen un sistema de ecuaciones completo para las incógnitas  $q_i$  y  $\lambda_a$ .

En el método expuesto no figuran las fuerzas de reacción; el contacto de los cuerpos está representado globalmente por las ecuaciones de ligadura. Existe sin embargo otro método para establecer las ecuaciones del movimiento de cuerpos en contacto, en el cual se introducen explícitamente las reacciones. Este método, que constituye el *principio de d'Alembert*, consiste esencialmente en escribir para cada uno de los cuerpos en contacto las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (38.6)$$

estando comprendidas las fuerzas de reacción en el conjunto de las fuerzas  $\mathbf{f}$  que actúan sobre el cuerpo; estas fuerzas son desconocidas *a priori* y se determinarán, a la vez que el movimiento del cuerpo, resolviendo las ecuaciones. Este método es igualmente aplicable para ambas clases de ligaduras, holónomas y no holónomas.

### PROBLEMAS

1. Utilizando el principio de d'Alembert, hallar las ecuaciones del movimiento de una esfera homogénea que rueda sobre un plano bajo la acción de una fuerza exterior  $\mathbf{F}$  y de un momento  $\mathbf{K}$ .

*Solución:* La ecuación de ligadura es (38.3). Llamando a la fuerza de reacción en el punto de contacto entre la esfera y el plano  $\mathbf{R}$ , se escriben las ecuaciones (38.6):

$$\mu \frac{dV}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{K} - a\mathbf{n} \times \mathbf{R}, \quad (2)$$

(teniendo en cuenta que  $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$  y que para una peonza esférica  $\mathbf{M} = I\Omega$ ). Derivando con respecto al tiempo la ecuación de ligadura (38.3), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{V}} = a\dot{\Omega} \times \mathbf{n}.$$

Sustituyendo en (1) y eliminando  $\dot{\Omega}$  por medio de (2), se encuentra,

$$(I/a\mu)(\mathbf{F} + \mathbf{R}) = \mathbf{K} \times \mathbf{n} - a\mathbf{R} + a(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}),$$

que relaciona la fuerza de reacción con  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{K}$ . Escribiendo esta ecuación en componentes y sustituyendo  $I = \frac{2}{5}\mu a^2$  (véase problema 2 b, § 32), se tiene

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \quad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = -F_z,$$

(se ha tomado el plano como plano  $xy$ ). Finalmente, sustituyendo estas expresiones en (1), se obtienen las ecuaciones del movimiento conteniendo solamente los datos, fuerza exterior y momento:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right),$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_y - \frac{K_x}{a} \right).$$

Las componentes  $\Omega_x$  y  $\Omega_y$  de la velocidad angular se expresan en función de  $V_x$  y  $V_y$  por la ecuación de ligadura (38.3), y para  $\Omega_z$  se tiene,

$$\frac{2}{3}\mu a^2 d\Omega_z/dt = K_z,$$

[componente  $z$  de la ecuación (2)].

2. Una varilla homogénea  $BD$  de peso  $P$  y longitud  $l$  está apoyada contra una pared (fig. 52); su extremo inferior  $B$  está mantenido por un hilo  $AB$ . Calcular la reacción de la pared y la tensión del hilo.

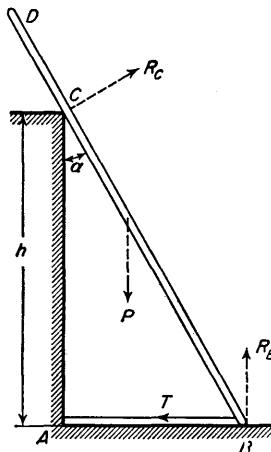


FIG. 52

*Solución:* El peso de la varilla puede representarse por una fuerza  $P$  aplicada en su punto medio y dirigida verticalmente hacia abajo. Las reacciones  $R_B$  y  $R_C$  están respectivamente dirigidas verticalmente hacia arriba y perpendicularmente a la varilla; la tensión  $T$  del hilo está dirigida de  $B$  hacia  $A$ . La resolución de las ecuaciones de equilibrio da

$$R_C = (Pl/4h)\sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha,$$

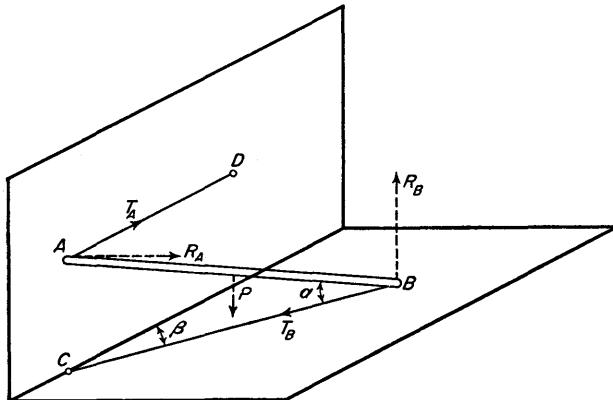


FIG. 53

3. Una varilla  $AB$  de peso  $P$  tiene un extremo sobre un plano horizontal y el otro en un plano vertical, y se mantiene en esta posición por dos hilos horizontales  $AD$  y  $BC$ ; el hilo  $BC$  se halla en el mismo plano vertical que la varilla. Determinar las reacciones de los planos y las tensiones en los hilos.

*Solución:* Las tensiones de los hilos  $T_A$  y  $T_B$  están dirigidas de  $A$  hacia  $D$  y de  $B$  a  $C$ , respectivamente. Las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  son perpendiculares a los planos correspondientes. La resolución de las ecuaciones de equilibrio da:

$$R_B = P, T_B = \frac{1}{2}P \operatorname{ctg} \alpha, R_A = T_B \operatorname{sen} \beta, T_A = T_B \cos \beta.$$

4. Dos varillas de longitud  $l$  y peso despreciable están unidas por una articulación, y sus extremos se apoyan en un plano conectados por un hilo  $AB$  (fig. 54). En el centro de una de las varillas se aplica una fuerza  $F$ . Determinar las reacciones.

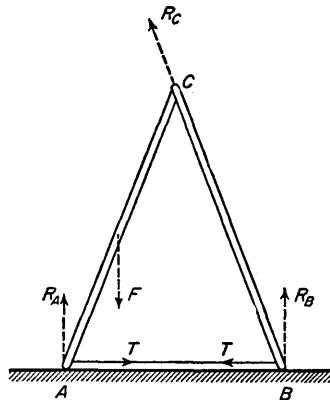


FIG. 54

*Solución:* La tensión  $T$  del hilo actúa en el punto  $A$  de  $A$  hacia  $B$ , y en el punto  $B$  de  $B$  hacia  $A$ . Las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  son perpendiculares al plano. Sea  $R_C$  la reacción sobre la varilla  $AC$  en la articulación; entonces, sobre la varilla  $BC$  actúa una reacción  $-R_C$ . La condición de que la suma de los momentos de las fuerzas  $R_B$ ,  $T$  y  $-R_C$  sobre la varilla  $BC$  sea nula muestra que  $R_C$  actúa a lo largo de  $BC$ . Las otras condiciones de equilibrio (para las dos varillas por separado) dan:

$$R_A = \frac{1}{2}F, R_B = \frac{1}{2}F, R_C = \frac{1}{2}F \operatorname{cosec} \alpha, T = \frac{1}{2}F \operatorname{ctg} \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo  $CAB$ .

### § 39. Movimiento en un sistema de referencia no inercial

Hasta aquí, siempre se han utilizado sistemas de referencia inerciales al discutir el movimiento de los sistemas mecánicos. Por ejemplo, la lagrangiana de una partícula en un campo exterior

$$L_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - U, \quad (39.1)$$

y la ecuación del movimiento correspondiente

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\partial U / \partial \mathbf{r},$$

son válidas solamente en un sistema inercial. (En esta sección se designará con el índice 0 las magnitudes referidas a un sistema inercial.)

Veamos ahora qué forma toman las ecuaciones del movimiento de una partícula en un sistema no inercial. El punto de partida para resolver este problema es otra vez el principio de la mínima acción, cuya validez no depende del sistema de referencia elegido. Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (39.2)$$

son igualmente válidas. Sin embargo, la lagrangiana no toma la forma (39.1), y para calcularla debe transformarse adecuadamente la función  $L_0$ .

Esta transformación se realiza en dos etapas. Consideraremos, primero un sistema de referencia  $K'$  que se mueve con una velocidad de traslación  $\mathbf{V}(t)$  con respecto al sistema de referencia inercial  $K_0$ . Las velocidades  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}'$  de una partícula, en los sistemas  $K_0$  y  $K'$  respectivamente, están relacionadas por

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (39.3)$$

Sustituyendo en (39.1) se obtiene la lagrangiana en el sistema  $K'$ :

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 - U.$$

Pero  $\mathbf{V}^2(t)$  es una función dada del tiempo, y puede escribirse como la derivada total respecto a  $t$  de otra función, y por tanto puede omitirse el tercer término de  $L'$ . Por otro lado,  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ , donde  $\mathbf{r}'$  es el vector de posición de la partícula en el sistema de coordenadas  $K'$ ; en consecuencia,

$$m\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{v}' = m\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}'/dt = d(m\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}')/dt - m\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{V}/dt.$$

Sustituyendo en la lagrangiana y omitiendo de nuevo la derivada total con respecto al tiempo, se tiene finalmente

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - m\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{r}' - U, \quad (39.4)$$

donde  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$  es la aceleración del movimiento de traslación del sistema  $K'$ .

La ecuación de Lagrange que se deduce de (39.4) es:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \quad (39.5)$$

Desde el punto de vista de su influencia en la ecuación del movimiento de la partícula, un movimiento de traslación acelerado del sistema de referencia es equivalente a la aplicación de un campo de fuerzas homogéneo en el que la fuerza es igual a la masa de la partícula multiplicada por la aceleración  $\mathbf{W}$ , y en sentido contrario a esta aceleración.

Introduzcamos ahora otro sistema de referencia  $K$ , cuyo origen coincide con el de  $K'$ , pero que gira con relación a  $K'$  con velocidad angular  $\Omega(t)$ ; con respecto al sistema inercial  $K_0$ , el sistema  $K$  efectúa a la vez una traslación y una rotación.

La velocidad  $\mathbf{v}'$  de la partícula con relación al sistema  $K'$  se compone de su velocidad  $\mathbf{v}$  relativa al sistema  $K$  y de la velocidad  $\Omega \times \mathbf{r}$  del movimiento de su rotación con  $K$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}$$

(los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  de la partícula en los sistemas  $K$  y  $K'$  coinciden). Sustituyendo en la lagrangiana (39.4), se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{mv} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\Omega \times \mathbf{r})^2 - \mathbf{mW} \cdot \mathbf{r} - U. \quad (39.6)$$

Esta es la forma general de la lagrangiana de una partícula en un sistema de referencia arbitrario, no necesariamente inercial. Observemos que la rotación del sistema de referencia hace aparecer en la lagrangiana un término lineal con respecto a la velocidad de la partícula.

Para calcular las derivadas que entran en la ecuación de Lagrange, escribimos la diferencial total:

$$\begin{aligned} dL &= \mathbf{mv} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{mv} \cdot \Omega \times d\mathbf{r} + \\ &\quad + m(\Omega \times \mathbf{r}) \cdot (\Omega \times d\mathbf{r}) - \mathbf{mW} \cdot dr - (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot dr \\ &= \mathbf{mv} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + m dr \cdot \mathbf{v} \times \Omega + \\ &\quad + m(\Omega \times \mathbf{r}) \times \Omega \cdot dr - \mathbf{mW} \cdot dr - (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot dr. \end{aligned}$$

Reuniendo por separado los términos que contienen  $d\mathbf{v}$  y  $dr$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \partial L / \partial \mathbf{v} &= \mathbf{mv} + m\Omega \times \mathbf{r}, \\ \partial L / \partial \mathbf{r} &= \mathbf{mv} \times \Omega + m(\Omega \times \mathbf{r}) \times \Omega - \mathbf{mW} - \partial U / \partial \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Sustituidas estas expresiones en (39.2), nos dan la ecuación del movimiento buscada:

$$mdv/dt = -\partial U / \partial \mathbf{r} - \mathbf{mW} + mr \times \dot{\Omega} + 2mv \times \Omega + m\Omega \times (r \times \Omega). \quad (39.7)$$

Se ve que las «fuerzas de inercia» debidas a la rotación del sistema se componen de tres partes. La fuerza  $mr \times \dot{\Omega}$  es debida a la no uniformidad de la rotación, pero los otros dos términos existen aun cuando la rotación sea uniforme. La fuerza  $2mv \times \Omega$  se llama *fuerza de Coriolis*; a diferencia de todas las fuerzas (no dissipativas) consideradas hasta aquí, depende de la velocidad de la partícula. La fuerza  $m\Omega \times (r \times \Omega)$  se llama *fuerza centrífuga*; está en el plano formado por  $\mathbf{r}$  y  $\Omega$ , es perpendicular al eje de rotación (es decir, a  $\Omega$ ) alejándose de él. El módulo de esta fuerza es  $m\varrho\Omega^2$ , siendo  $\varrho$  la distancia de la partícula al eje de rotación.

Consideremos ahora el caso particular de un sistema de coordenadas animado de una rotación uniforme y sin aceleración en el movimiento de traslación.

Haciendo en (39.6) y (39.7)  $\Omega = \text{cte.}$ ,  $\mathbf{W} = 0$ , se obtiene la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{mv} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U \quad (39.8)$$

y la ecuación del movimiento

$$m\mathbf{dv}/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (39.9)$$

La energía de la partícula en este caso se obtiene sustituyendo

$$\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v} = m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (39.10)$$

en  $E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$ , obteniéndose,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + U. \quad (39.11)$$

Observemos que la expresión de la energía no contiene término lineal en la velocidad. La rotación del sistema añade simplemente a la energía un término que depende solamente de las coordenadas de la partícula y es proporcional al cuadrado de la velocidad angular. Este término adicional  $-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$  se llama *energía potencial centrífuga*.

La velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula con respecto al sistema que gira uniformemente está relacionada con su velocidad  $\mathbf{v}_0$  con respecto al sistema inercial  $K_0$  por

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (39.12)$$

El ímpetu  $\mathbf{p}$  (39.10) de la partícula en el sistema  $K$  coincide por lo tanto con su ímpetu  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$  en el sistema  $K_0$ . Los momentos angulares  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  son también iguales. Sin embargo, las energías de la partícula en los sistemas  $K$  y  $K_0$  son diferentes. Sustituyendo  $\mathbf{v}$  de (39.12) en (39.11), se obtiene

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathbf{mv}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + U - m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

Los dos primeros términos son la energía  $E_0$  en el sistema  $K_0$ . Utilizando el momento angular, se tiene

$$E = E_0 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (39.13)$$

Esta fórmula define la ley de transformación de la energía cuando se pasa a un sistema de coordenadas animado de una rotación uniforme. Aunque se ha deducido para una sola partícula, es evidente que el razonamiento puede generalizarse inmediatamente a un sistema cualquiera de partículas, y conduce a la misma fórmula (39.13).

## PROBLEMAS

1. Encontrar la separación con respecto a la vertical, provocada por la rotación de la Tierra, de un cuerpo que cae libremente. (La velocidad angular de rotación se considera pequeña.)

*Solución:* En el campo de la gravedad  $U = -m\mathbf{g}\mathbf{r}$  donde  $\mathbf{g}$  es el vector aceleración de la gravedad; despreciando en la ecuación (39.9) la fuerza centrífuga que contiene el cuadrado de  $\Omega$ , se tiene la ecuación del movimiento

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}. \quad (1)$$

Esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas. Para ello ponemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , donde  $\mathbf{v}_1$  es la solución de la ecuación  $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$ , es decir,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$  (siendo  $\mathbf{v}_0$  la velocidad inicial). Sustituyendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  en (1) y conservando solamente  $\mathbf{v}_1$  en el segundo miembro, se obtiene para  $\mathbf{v}_2$  la ecuación

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega} = 2t\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}.$$

La integración da

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + t^2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{h}$  es el vector de posición inicial de la partícula.

Tomemos el eje  $z$  verticalmente hacia arriba y el eje  $x$  hacia el polo; entonces

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \operatorname{sen} \lambda,$$

donde  $\lambda$  es la latitud (que tomamos norte para fijar ideas). Haciendo  $\mathbf{v}_0 = 0$  en (2), resulta,

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}t^3g\Omega \cos \lambda.$$

Sustituyendo el tiempo de caída  $t \approx \sqrt{(2h/g)}$ , encontramos finalmente,

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}(2h/g)^{3/2}g\Omega \cos \lambda,$$

(el signo menos indica un desplazamiento hacia el este).

2. Determinar la separación de la trayectoria de un cuerpo lanzado desde la superficie de la Tierra con velocidad  $\mathbf{v}_0$ , respecto del plano inicial.

*Solución:* Sea el plano  $xz$  tal que contenga la velocidad  $\mathbf{v}_0$ . La altura inicial es  $h = 0$ . La desviación lateral dada por la ecuación (2) del problema 1 es:

$$y = -\frac{1}{3}t^2g\Omega_x + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x})$$

o, sustituyendo la duración de la trayectoria  $t \approx 2v_{0z}/g$ :

$$y = 4v_{0z}^2(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z)/g^2.$$

3. Determinar la influencia de la rotación de la Tierra en las pequeñas oscilaciones de un péndulo (problema del *péndulo de Foucault*).

*Solución:* Despreciando el desplazamiento vertical del péndulo, como infinitésimo de segundo orden, puede considerarse que el movimiento tiene lugar en el plano horizontal  $xy$ . Omitiendo los términos que contienen  $\Omega^2$ , se tienen las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del péndulo si no se tuviese en cuenta la rotación de la Tierra. Multiplicando la segunda ecuación por  $i$  y sumando, se obtiene la ecuación única

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

en la magnitud compleja  $\xi = x + iy$ . Para  $\Omega_z \ll \omega$  la solución de esta ecuación es:

$$\xi = \exp(-i\Omega_z t) [A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)]$$

o

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \exp(-i\Omega_z t),$$

donde las funciones  $x_0(t)$  e  $y_0(t)$  dan la trayectoria del péndulo cuando se desprecia la rotación de la Tierra. El efecto de esta rotación es, por lo tanto, un giro de la trayectoria alrededor de la vertical con una velocidad angular  $\Omega_z$ .

## CAPÍTULO VII

### ECUACIONES CANONICAS

#### § 40. Ecuaciones de Hamilton

La formulación de las leyes de la Mecánica con la ayuda de la lagrangiana (y de las ecuaciones de Lagrange que de ella se deducen), presupone que el estado mecánico del sistema está determinado dando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Sin embargo, éste no es el único método posible; la descripción del estado de un sistema en función de sus coordenadas e ímpetus generalizados presenta un cierto número de ventajas, especialmente en el estudio de diferentes problemas generales de Mecánica. Entonces se deben deducir las ecuaciones del movimiento correspondientes a esta formulación.

El paso de un conjunto de variables independientes a otro puede realizarse mediante lo que se llama en matemáticas *transformación de Legendre*. En el presente caso esta transformación toma la forma siguiente. La diferencial total de la lagrangiana como función de las coordenadas y de las velocidades es:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Esta expresión puede escribirse,

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i, \quad (40.1)$$

puesto que las derivadas  $\partial L / \partial \dot{q}_i$ , son, por definición, los ímpetus generalizados, y  $\partial L / \partial q_i = \dot{p}_i$  por las ecuaciones de Lagrange. Escribiendo el segundo término de (40.1) en la forma

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

llevando la diferencial total  $d(\sum_i p_i \dot{q}_i)$  al primer miembro, y cambiando los signos, se obtiene de (40.1):

$$d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

La cantidad bajo el signo diferencial es la energía del sistema (véase § 6); expresada en función de las coordenadas y de los ímpetus, se llama *función de Hamilton o hamiltoniana* del sistema:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (40.2)$$

De la ecuación

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i, \quad (40.3)$$

en la cual las variables independientes son las coordenadas y los ímpetus, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = - \partial H / \partial q_i. \quad (40.4)$$

Estas son las deseadas ecuaciones del movimiento en las variables  $p$  y  $q$ , y se llaman *ecuaciones de Hamilton*. Constituyen un conjunto de  $2s$  ecuaciones diferenciales de primer orden, entre las  $2s$  funciones incógnitas  $p_i(t)$  y  $q_i(t)$ , que sustituyen a las  $s$  ecuaciones de segundo orden obtenidas por el método de Lagrange. A causa de su sencillez y simetría de forma se les llama *ecuaciones canónicas*.

La derivada total con respecto al tiempo de la hamiltoniana es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Sustituyendo  $\dot{q}_i$  y  $\dot{p}_i$  de las ecuaciones (40.4) los dos últimos términos se eliminan, de modo que

$$dH/dt = \partial H / \partial t. \quad (40.5)$$

En particular, si la función de Hamilton no depende explícitamente del tiempo, entonces  $dH/dt = 0$ , y se tiene la ley de la conservación de la energía.

Además de las variables dinámicas  $q$ ,  $\dot{q}$  o  $q$ ,  $p$ , las funciones de Lagrange y de Hamilton contienen varios parámetros, los cuales se refieren bien a las propiedades del sistema mecánico o bien al campo exterior que actúa sobre él. Sea  $\lambda$  uno de estos parámetros. Considerándole como una variable, se tiene en lugar de (40.1):

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + (\partial L / \partial \lambda) d\lambda,$$

y en lugar de (40.3):

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - (\partial L / \partial \lambda) d\lambda,$$

de donde

$$(\partial H / \partial \lambda)_{p,q} = - (\partial L / \partial \lambda)_{\dot{q},q}, \quad (40.6)$$

lo que relaciona las derivadas parciales con respecto al parámetro  $\lambda$  de la lagrangiana y de la hamiltoniana; los subíndices de las derivadas son las magnitudes que deben permanecer constantes en la derivación.

Este resultado puede expresarse de otro modo. Sea la lagrangiana  $L = L_0 + L'$ , siendo  $L'$  una pequeña corrección a la función fundamental  $L_0$ . La correspondiente adición  $H'$  en la hamiltoniana  $H = H_0 + H'$  está relacionada con  $L'$  por

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \quad (40.7)$$

Puede observarse que en la transformación de (40.1) en (40.3), no se ha escrito un término en  $dt$ , que tendría en cuenta una posible dependencia explícita del tiempo de la lagrangiana; el tiempo, en efecto, representaría en este caso sólo el papel de un parámetro que nada tiene que ver con la transformación. Las derivadas parciales con respecto al tiempo de  $L$  y de  $H$  están ligadas por la relación

$$(\partial H / \partial t)_{p,q} = -(\partial L / \partial t)_{\dot{q},q}. \quad (40.8)$$

análoga a la fórmula (40.6).

### PROBLEMAS

1. Hallar la función de Hamilton de una partícula, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

*Solución:* En coordenadas cartesianas  $x, y, z$ :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z);$$

En coordenadas cilíндricas  $r, \phi, z$ :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \phi, z);$$

En coordenadas esféricas

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}\right) + U(r, \theta, \phi).$$

2. Hallar la hamiltoniana de una partícula en un sistema de referencia animado de un movimiento de rotación uniforme.

*Solución:* Expresando en la energía (39.11) la velocidad  $\mathbf{v}$  en función del ímpetu  $\mathbf{p}$  por (39.10), se obtiene:

$$H = \mathbf{p}^2/2m - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} + U.$$

3. Hallar la función de Hamilton de una partícula de masa  $M$  y  $n$  partículas de masas  $m$ , excluido el movimiento del centro de masa (véase el problema en § 13).

*Solución.* La energía  $E$  se obtiene a partir de la función de Lagrange hallada en el problema del § 13 cambiando en ella el signo de  $U$ . Los ímpetus generalizados son:

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m\mathbf{v}_a - \frac{m^2}{\mu} \sum_a \mathbf{v}_a$$

De aquí se sigue:

$$\sum \mathbf{p}_a = m \sum \mathbf{v}_a - \frac{nm^2}{\mu} \sum \mathbf{v}_a = \frac{mM}{\mu} \sum \mathbf{v}_a,$$

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m} + \frac{1}{M} \sum \mathbf{p}_a.$$

Sustituyendo en  $E$ , encontramos

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \right)^2$$

### § 41. Función de Routh

En ciertos casos es conveniente, cuando se pasa a las nuevas variables, no sustituir todas las velocidades generalizadas por los ímpetus, sino solamente algunas de ellas. La transformación correspondiente es completamente análoga a la realizada en § 40.

Para simplificar las fórmulas, empecemos por suponer que sólo hay dos coordenadas  $q$  y  $\xi$ , y efectuemos la transformación que hace pasar de las variables  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  a las variables  $q$ ,  $\xi$ ,  $p$ ,  $\dot{\xi}$ , siendo  $p$  el ímpetu generalizado correspondiente a la coordenada  $q$ .

La diferencial de la lagrangiana  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  es:

$$\begin{aligned} dL &= (\partial L / \partial q) dq + (\partial L / \partial \dot{q}) d\dot{q} + (\partial L / \partial \xi) d\xi + (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi} \\ &= \dot{p} dq + p d\dot{q} + (\partial L / \partial \xi) d\xi + (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p} dq - \dot{q} dp + (\partial L / \partial \xi) d\xi + (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}.$$

Si se define la función de Routh como

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \quad (41.1)$$

en la cual la velocidad  $\dot{q}$  está expresada en función del ímpetu  $p$  mediante la ecuación  $p = \partial L / \partial \dot{q}$ ; su diferencial será:

$$dR = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - (\partial L / \partial \xi) d\xi - (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (41.2)$$

De aquí se deduce

$$\dot{q} = \partial R / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial R / \partial q, \quad (41.3)$$

$$\partial L / \partial \xi = -\partial R / \partial \xi, \quad \partial L / \partial \dot{\xi} = -\partial R / \partial \dot{\xi}. \quad (41.4)$$

Sustituyendo estas igualdades en las ecuaciones de Lagrange para la coordenada  $\xi$ , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \quad (41.5)$$

Entonces la función de Routh es una hamiltoniana con respecto a la coordenada  $q$  [ecuaciones (41.3)] y una lagrangiana para la coordenada  $\xi$  [ecuación (41.5)].

De acuerdo con la definición general, la energía del sistema es:

$$E = \dot{q} \partial L / \partial \dot{q} + \dot{\xi} \partial L / \partial \dot{\xi} - L = p\dot{q} + \dot{\xi} \partial L / \partial \dot{\xi} - L.$$

Se expresa mediante la función de Routh sustituyendo (41.1) y (41.4)

$$E = R - \dot{\xi} \partial R / \partial \dot{\xi}, \quad (41.6)$$

La generalización de estas fórmulas para el caso de varias coordenadas  $q$  y  $\xi$  es inmediata.

En particular, puede ser conveniente el uso de la función de Routh cuando algunas de las coordenadas son cíclicas. Si las coordenadas  $q$  son cíclicas, no aparecen en la lagrangiana, ni por tanto en la función de Routh, de modo que ésta será función solamente de  $p$ ,  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$ . Los ímpetus  $p$  correspondientes a las coordenadas cíclicas son constantes [como también se deduce de la segunda ecuación (41.3), la cual en este sentido no proporciona nueva información]. Cuando los ímpetus  $p$  se sustituyen por sus valores constantes dados, las ecuaciones (41.5)

$$(d/dt) \partial R(p, \xi, \dot{\xi}) / \partial \dot{\xi} = \partial R(p, \xi, \dot{\xi}) / \partial \xi$$

se reducen a ecuaciones que sólo contienen las coordenadas  $\xi$ , quedando así eliminadas las coordenadas cíclicas. Si se resuelven estas ecuaciones para las funciones  $\xi(t)$ , basta sustituir estas últimas en el segundo miembro de las ecuaciones

$$\dot{q} = \partial R(p, \xi, \dot{\xi}) / \partial p$$

para obtener las funciones  $q(t)$  por integración directa.

### PROBLEMA

Encontrar la función de Routh de una peonza simétrica en un campo exterior  $U(\phi, \theta)$ , eliminando la coordenada cíclica  $\psi$  (donde  $\psi, \phi, \theta$  son los ángulos de Euler).

*Solución:* La lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) - U(\phi, \theta)$$

(véase problema 1, § 35). La función de Routh,

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \phi \cos \theta - \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + U(\phi, \theta)$$

el primer término de esta expresión es una constante que puede omitirse.

### § 42. Paréntesis de Poisson

Sea  $f(p, q, t)$  una función de las coordenadas, ímpetus y tiempo. La derivada total con respecto al tiempo es:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Sustituyendo  $\dot{q}_k$  y  $\dot{p}_k$  por los valores dados por las ecuaciones de Hamilton (40.4), se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], \quad (42.1)$$

donde

$$[H, f] \equiv \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (42.2)$$

La expresión (42.2) se llama *paréntesis de Poisson* para  $H$  y  $f$ .

Recordando que llamamos integrales del movimiento a aquellas funciones de las variables dinámicas, que permanecen constantes durante el movimiento del sistema, de la ecuación (42.1) se deduce que la condición para que la magnitud  $f$  sea una integral del movimiento ( $df/dt = 0$ ) puede escribirse

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0. \quad (42.3)$$

Si la integral del movimiento no depende explícitamente del tiempo

$$[H, f] = 0, \quad (42.4)$$

es decir, el paréntesis de Poisson formado con la hamiltoniana debe anularse.

Para dos magnitudes cualesquiera  $f$  y  $g$ , los paréntesis de Poisson se definen del mismo modo que en (42.2):

$$[f, g] \equiv \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (42.5)$$

Los paréntesis de Poisson tienen las siguientes propiedades que se deducen fácilmente de su definición.

Si se intercambian las dos funciones, el paréntesis cambia de signo; si una de las funciones es constante ( $c$ ), el paréntesis es cero:

$$[f, g] = -[g, f], \quad (42.6)$$

$$[f, c] = 0. \quad (42.7)$$

Además,

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \quad (42.8)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \quad (42.9)$$

Tomando la derivada parcial de (42.5) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \quad (42.10)$$

Si una de las funciones  $f$  ó  $g$  coincide con un ímpetu o con una coordenada, los paréntesis de Poisson se reducen simplemente a una derivada parcial:

$$[f, q_k] = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad (42.11)$$

$$[f, p_k] = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (42.12)$$

La fórmula (42.11), por ejemplo, se obtiene haciendo  $g = q_k$  en (42.5); la suma se reduce a un solo término, puesto que  $\partial q_k / \partial q_l = \delta_{kl}$  y  $\partial q_k / \partial p_l = 0$ . Haciendo en (42.11) y (42.12) la función  $f$  igual a  $q_i$  y  $p_i$ , se tiene, en particular,

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}. \quad (42.13)$$

Entre los paréntesis de Poisson formados por tres funciones existe la relación

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \quad (42.14)$$

llamada *identidad de Jacobi*. Para demostrarla empecemos por observar que según la definición (42.5) los paréntesis de Poisson  $[f, g]$  son funciones homogéneas bilineales de las primeras derivadas de  $f$  y  $g$ . Entonces el paréntesis  $[h, [f, g]]$ , por ejemplo, será una función lineal homogénea de las segundas derivadas de  $f$  y  $g$ . Todo el primer miembro de la igualdad (42.14) es pues una función homogénea lineal de las derivadas segundas de las tres funciones  $f, g, h$ . Agrupemos los términos que contienen las derivadas segundas de  $f$ . El primer paréntesis no contiene tales derivadas, ya que sólo encierra primeras derivadas de  $f$ . La suma del segundo y tercer paréntesis puede escribirse en forma simbólica utilizando los operadores diferenciales lineales  $D_1$  y  $D_2$  definidos por

$$D_1(\phi) = [g, \phi], \quad D_2(\phi) = [h, \phi].$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= [g, [h, f]] - [h, [g, f]] \\ &= D_1[D_2(f)] - D_2[D_1(f)] \\ &= (D_1 D_2 - D_2 D_1)f. \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta combinación de operadores diferenciales lineales no puede contener derivadas segundas de  $f$ . En efecto, la forma general de los operadores diferenciales lineales es:

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

donde  $\xi_k$  y  $\eta_k$  son funciones arbitrarias de las variables  $x_1, x_2, \dots$ . Entonces,

$$D_1 D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

y su diferencia

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left( \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l},$$

es, de nuevo, un operador que sólo contiene derivadas primeras. Así, en el primer miembro de la ecuación (42.14), todos los términos con derivadas segundas de  $f$  se anulan recíprocamente, y puesto que ocurre análogamente con las funciones  $g$  y  $h$ , la expresión entera es idénticamente nula.

Una propiedad importante de los paréntesis de Poisson es que, si  $f$  y  $g$  son integrales del movimiento, su paréntesis de Poisson es también una integral del movimiento:

$$[f, g] = \text{cte.} \quad (42.15)$$

Este es el *teorema de Poisson*. La demostración de este teorema es muy sencilla si  $f$  y  $g$  no dependen explícitamente del tiempo. Haciendo  $h = H$  en la identidad de Jacobi, se tiene:

$$[H, [f, g]] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = 0.$$

Por lo tanto, si  $[H, g] = 0$  y  $[H, f] = 0$ , entonces  $[H, [f, g]] = 0$ , que es lo que se quería demostrar.

Si las integrales del movimiento  $f$  y  $g$  dependen explícitamente del tiempo, partiendo de (42.1) escribimos:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [H, [f, g]].$$

Utilizando la fórmula (42.10) y expresando el paréntesis  $[H, [f, g]]$  en función de los otros dos por medio de la identidad de Jacobi, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f, g] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [f, [g, H]] - [g, [H, f]] \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} + [H, g] \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[ \frac{df}{dt}, g \right] + \left[ f, \frac{dg}{dt} \right], \quad (42.16)$$

que evidentemente demuestra el teorema de Poisson en el caso general.

Por supuesto, aplicando el teorema de Poisson no siempre se obtendrán nuevas integrales del movimiento, ya que su número es limitado ( $2s - 1$ , siendo  $s$  el número de grados de libertad). En algunos casos se puede obtener un resultado trivial: el paréntesis de Poisson es una constante. En otros casos, la integral obtenida es simplemente una función de las integrales originales  $f$  y  $g$ . Si no se trata de ninguno de estos casos, el paréntesis de Poisson es una nueva integral del movimiento.

## PROBLEMAS

1. Determinar los paréntesis de Poisson formados por las componentes cartesianas del ímpetu  $\mathbf{p}$  y del momento angular  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  de una partícula

*Solución:* Por medio de la fórmula (42.12) se tiene:

$$[M_x, p_y] = -\partial M_x / \partial y = -\partial(y p_z - z p_y) / \partial y = -p_z,$$

y de la misma manera:

$$[M_x, p_x] = 0, [M_z, p_z] = p_y.$$

Los restantes paréntesis se obtienen por permutación circular de los índices  $x, y, z$ .

2. Determinar los paréntesis de Poisson formados por las componentes de  $\mathbf{M}$ .

*Solución:* Un cálculo inmediato de la fórmula (42.5) da

$$[M_x, M_y] = -M_z, [M_y, M_z] = -M_x, [M_z, M_x] = -M_y.$$

Puesto que los ímpetus y las coordenadas de diferentes partículas son variables independientes entre sí, es fácil ver que las fórmulas deducidas en los problemas 1 y 2 son también válidas para el ímpetu total y el momento angular total de un sistema de partículas cualesquiera.

3. Demostrar que

$$[\phi, M_z] = 0,$$

siendo  $\phi$  una función escalar de las coordenadas y del ímpetu de una partícula.

*Solución:* Una función escalar sólo puede depender de las componentes de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  a través de las combinaciones  $\mathbf{r}^2, \mathbf{p}^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ . Por lo tanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \phi}{\partial (\mathbf{r}^2)} \cdot 2\mathbf{r} + \frac{\partial \phi}{\partial (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \cdot \mathbf{p},$$

y análogamente para  $\partial \phi / \partial \mathbf{p}$ . La relación pedida se verifica inmediatamente por el cálculo directo de la fórmula (42.5), teniendo en cuenta estas fórmulas para las derivadas parciales.

4. Demostrar que

$$[\mathbf{f}, M_z] = \mathbf{n} \times \mathbf{f},$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función vectorial de las coordenadas y del ímpetu de una partícula y  $\mathbf{n}$  el vector unitario del eje  $z$ .

*Solución:* Todo vector  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  puede escribirse en la forma  $\mathbf{f} = \mathbf{r}\phi_1 + \mathbf{p}\phi_2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\phi_3$ , siendo  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  funciones escalares. La relación pedida se verifica directamente, mediante las fórmulas (42.9), (42.11), (42.12) y la fórmula del problema 3.

### § 43. La acción como una función de las coordenadas

Al formular el principio de la mínima acción, consideramos la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt, \quad (43.1)$$

tomada a lo largo de una trayectoria entre dos posiciones dadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$  que ocupa el sistema en dos instantes dados  $t_1$  y  $t_2$ . Cuando se hacía variar la acción, se comparaban los valores de esta integral para trayectorias vecinas con los mismos límites  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$ . Sólo una de estas trayectorias corresponde al movimiento real: aquella para la cual la integral  $S$  tiene su valor mínimo.

Tratemos ahora otro aspecto del concepto de acción, considerando  $S$  como una magnitud que caracteriza el movimiento a lo largo de las trayectorias reales, y comparando los valores de  $S$  para trayectorias que tienen un origen común  $q(t_1) = q^{(1)}$ , pero que en el instante  $t_2$  pasan por posiciones distintas. En otras palabras, consideraremos la integral de acción para las trayectorias reales como una función de las coordenadas del límite superior de la integral.

La variación de la acción cuando se pasa de una trayectoria a otra trayectoria vecina está dada (si sólo hay un grado de libertad) por la expresión (2.5):

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt.$$

Como las trayectorias de un movimiento real satisfacen las ecuaciones de Lagrange, la integral de la expresión anterior es nula. En el primer término hacemos  $\delta q(t_1) = 0$  y designamos a  $\delta q(t_2)$  simplemente por  $\delta q$ . Sustituyendo  $\partial L / \partial \dot{q}$  por  $p$ , se tiene finalmente  $\delta S = p \delta q$ , o en el caso de varios grados de libertad

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (43.2)$$

Esta relación lleva consigo que las derivadas parciales de la acción con respecto a las coordenadas son iguales a los ímpetus correspondientes:

$$\partial S / \partial q_i = p_i. \quad (43.3)$$

De modo análogo, se puede considerar la acción como una función explícita del tiempo, considerando trayectorias que parten en un instante dado  $t_1$  de un punto dado  $q^{(1)}$  y terminan en el punto dado  $q^{(2)}$  en diferentes instantes  $t_2 = t$ . La derivada  $\partial S / \partial t$  así obtenida puede hallarse por una adecuada variación de la integral. Sin embargo, es más sencillo emplear la fórmula (43.3), procediendo como sigue.

De la definición de acción se sigue que su derivada total respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria es:

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43.4)$$

Por otra parte, considerando  $S$  como una función de las coordenadas y del tiempo, en el sentido anteriormente indicado, y aplicando la fórmula (43.3) se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Comparando las dos expresiones, se deduce

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

o sea,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (43.5)$$

Las fórmulas (43.3) y (43.5) pueden reunirse en una expresión

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (43.6)$$

que da la diferencial total de la acción como función de las coordenadas y del tiempo en el límite superior de la integral (43.1). Supongamos ahora que las coordenadas (y el tiempo) son variables no sólo al final, sino también al iniciarse el movimiento. Es evidente que la correspondiente variación de  $S$  estará dada por la diferencia de las expresiones (43.6) para el principio y el final de la trayectoria, es decir,

$$dS = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \quad (43.7)$$

Esta relación demuestra que, cualesquiera que sean las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema durante el movimiento, su estado final no puede ser una función arbitraria del estado inicial; sólo son posibles aquellos movimientos para los cuales la expresión (43.7) sea una diferencial exacta. Entonces, el principio de la mínima acción, independientemente de la forma particular de la función de Lagrange, impone ciertas restricciones sobre el alcance de los posibles movimientos. En particular, se puede deducir un conjunto de propiedades generales (independientes de la forma de los campos exteriores) para haces de partículas que se propagan a partir de puntos dados del espacio. El estudio de estas propiedades es problema de la *óptica geométrica*<sup>1</sup>.

Es de interés observar que las ecuaciones de Hamilton se pueden deducir, de modo formal, de la condición de mínimo de la acción, si se representa ésta por la integral

$$S = \int (\sum_i p_i dq_i - H dt), \quad (43.8)$$

<sup>1</sup> Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, cap. VII.

deducida de (43.6), siempre que las coordenadas y los ímpetus se varíen independientemente. Suponiendo de nuevo, por simplicidad, que sólo hay una coordenada y un ímpetu, escribimos la variación de la acción

$$\delta S = \int [\delta p \, dq + p \, d\delta q - (\partial H/\partial q)\delta q \, dt - (\partial H/\partial p)\delta p \, dt].$$

Una integración por partes del segundo término da

$$\delta p\{dq - (\partial H/\partial p) \, dt\} + [p\delta q] - \int \delta q\{dp + (\partial H/\partial q) \, dt\}.$$

En los límites de la integral debemos poner  $\delta q = 0$ , de modo que el término integrado es cero. La expresión residual sólo puede ser nula si los dos integrandos se anulan separadamente, pues las variaciones  $\delta p$  y  $\delta q$  son independientes y arbitrarias:

$$dq = (\partial H/\partial p) \, dt, \quad dp = -(\partial H/\partial q) \, dt,$$

que, divididas por  $dt$  nos dan las ecuaciones de Hamilton.

#### § 44. Principio de Maupertuis

El movimiento de un sistema mecánico está completamente determinado por el principio de mínima acción: resolviendo las ecuaciones del movimiento que se deducen de este principio, se puede hallar la forma de la trayectoria, así como la posición sobre la trayectoria en función del tiempo.

Si se restringe el problema a determinar únicamente la trayectoria (sin hacer referencia al tiempo) se puede emplear una forma simplificada del principio de la mínima acción. Suponemos que la lagrangiana, y por tanto la hamiltoniana, no dependen explícitamente del tiempo, de modo que la energía del sistema se conserva

$$H(p, q) = E = \text{cte.}$$

De acuerdo con el principio de la mínima acción, la variación de la acción, para valores iniciales y finales dados de las coordenadas y del tiempo (sean  $t_0$  y  $t$ ), es nula. Pero si se permite la variación del tiempo final  $t$ , permaneciendo fijas las coordenadas inicial y final, se tiene [véase (43.7)]

$$\delta S = -H\delta t. \quad (44.1)$$

Vamos a comparar ahora, no todos los desplazamientos virtuales del sistema, sino solamente aquellos que satisfacen la ley de la conservación de la energía. Para tales trayectorias, podemos sustituir  $H$  en (44.1) por la constante  $E$ , lo que da

$$\delta S + E\delta t = 0. \quad (44.2)$$

Escribiendo la acción en la forma (43.8) y remplazando de nuevo  $H$  por  $E$ , resulta

$$S = \int \sum_i p_i \, \delta q_i - E(t - t_0). \quad (44.3)$$

El primer término en esta expresión,

$$S_0 = \int \sum_i p_i \delta q_i, \quad (44.4)$$

se denomina *acción abreviada*. Sustituyendo (44.3) en (44.2) se encuentra que

$$\delta S_0 = 0. \quad (44.5)$$

Así, pues, la acción abreviada tiene un mínimo con respecto a todas las trayectorias que satisfacen la ley de la conservación de la energía y pasan por el punto final en un instante arbitrario. Para aplicar este principio variacional, los ímpetus y todo el integrando de (44.2) deben expresarse en función de las coordenadas  $q$  y de sus diferenciales  $dq$ ; para ello empleamos la definición del ímpetu

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \quad (44.6)$$

y la ley de la conservación de la energía

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E. \quad (44.7)$$

Despejando de (44.7) la diferencial  $dt$  en función de las coordenadas  $q$  y de sus diferenciales  $dq$ , y sustituyendo en las fórmulas (44.6) expresamos los ímpetus en función de  $q$  y  $dq$ , con la energía  $E$  como un parámetro. El principio variacional así obtenido determina la trayectoria del sistema, y usualmente se le llama *principio de Maupertius* (aunque su formulación exacta es debida a Euler y Lagrange).

Los cálculos anteriores pueden realizarse explícitamente cuando la lagrangiana tiene su forma habitual (5.5) como diferencia entre las energías cinética y potencial:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

Los ímpetus son entonces,

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

y la energía,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

De esta ecuación se deduce,

$$dt = \sqrt{[\sum a_{ik} dq_i dq_k / 2(E - U)]}; \quad (44.8)$$

que sustituido en

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i,$$

da la siguiente expresión de la acción abreviada:

$$S_0 = \int \sqrt{[2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k]}. \quad (44.9)$$

En particular, para una sola partícula la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} m(\mathrm{d}l/\mathrm{d}t)^2,$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\mathrm{d}l$  un elemento de longitud de su trayectoria; el principio variacional que determina la trayectoria es:

$$\delta \int \sqrt{[2m(E-U)]} \, \mathrm{d}l = 0, \quad (44.10)$$

tomando la integral entre dos puntos dados del espacio. (Esta forma es debida a Jacobi.)

En el movimiento libre de una partícula  $U = 0$ , y (44.10) da el resultado trivial

$$\delta \int \mathrm{d}l = 0,$$

es decir, la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria más corta entre dos puntos dados: una línea recta.

Volvamos ahora a la expresión (44.3) de la acción y hallemos su variación con respecto al parámetro  $E$ . La condición de que esta variación sea nula da

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E - E \delta t;$$

Sustituyendo en (44.2) se obtiene:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \quad (44.11)$$

Cuando la acción abreviada tiene la forma (44.9), esta igualdad conduce a la relación

$$\int \sqrt{[\sum a_{ik} \, \mathrm{d}q_i \, \mathrm{d}q_k / 2(E-U)]} = t - t_0, \quad (44.12)$$

que es precisamente la integral de la ecuación (44.8), y que junto con la ecuación de la trayectoria determina totalmente el movimiento.

### PROBLEMA

Deducir la ecuación de la trayectoria del principio variacional (44.10).

*Solución:* Efectuando la variación, se tiene

$$\delta \int \sqrt{(E-U)} \, \mathrm{d}l = - \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{2\sqrt{(E-U)}} \, \mathrm{d}l - \sqrt{(E-U)} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \cdot \mathrm{d}\delta \mathbf{r} \right\}.$$

En el segundo término se ha tenido en cuenta que  $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}^2$  y que por lo tanto  $\mathrm{d}l \mathrm{d}\delta l = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\delta \mathbf{r}$ ; integrando por partes este segundo término e igualando a cero el coeficiente de  $\delta \mathbf{r}$  en el integrando, se obtiene la ecuación diferencial de la trayectoria

$$2\sqrt{(E-U)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l} \left[ \sqrt{(E-U)} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \right] = - \partial U / \partial \mathbf{r}.$$

Efectuando la derivación en el primer miembro de esta igualdad e introduciendo la fuerza  $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{r}$ , se puede escribir esta ecuación en la forma

$$d^2\mathbf{r}/dl^2 = [\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}]/2(E - U),$$

donde  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$  es el vector unitario de la tangente a la trayectoria. La diferencia  $\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$  es la componente  $\mathbf{F}_n$  de la fuerza normal a la trayectoria. La derivada  $d^2\mathbf{r}/dl^2 = dt/dl$  es igual, como se sabe por geometría diferencial, a  $\mathbf{n}/R$ , siendo  $R$  el radio de curvatura de la trayectoria, y  $\mathbf{n}$  el vector unitario de la normal principal. Sustituyendo  $E - U$  por  $\frac{1}{2}mv^2$ , se tiene

$$(mv^2/R)\mathbf{n} = \mathbf{F}_n,$$

de acuerdo con la conocida expresión de la aceleración normal en un movimiento a lo largo de una trayectoria curva.

### § 45. Transformaciones canónicas

La elección de las coordenadas generalizadas  $q$  no está limitada por ninguna condición; pueden ser  $s$  magnitudes cualesquiera que definan únicamente la posición del sistema en el espacio. El aspecto formal de las ecuaciones de Lagrange no depende de esta elección, y en este sentido puede decirse que las ecuaciones de Lagrange son invariantes respecto a una transformación de las coordenadas  $q_1, q_2, \dots$ , en otras magnitudes independientes  $Q_1, Q_2, \dots$ . Las nuevas coordenadas  $Q$  son funciones de las antiguas  $q$ , y admitimos que pueden depender explícitamente del tiempo, es decir, que la transformación es de la forma

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (45.1)$$

(denominadas a veces *transformaciones puntuales*).

Puesto que las ecuaciones de Lagrange son invariantes por la transformación (45.1), también son invariantes las ecuaciones de Hamilton (40.4). Sin embargo, estas últimas ecuaciones admiten en realidad un margen mucho más amplio de transformaciones. Esto es, por supuesto, porque en el método de Hamilton los ímpetus  $p$  son variables independientes con igual categoría que las coordenadas  $q$ , y, por tanto, puede ampliarse la transformación para incluir las 2s variables independientes  $p$  y  $q$  que pasarán a  $P$  y  $Q$  según las fórmulas

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t). \quad (45.2)$$

Esta ampliación de las posibles transformaciones constituye una de las ventajas esenciales del método de Hamilton en Mecánica.

Sin embargo, las ecuaciones del movimiento no conservan su forma canónica para toda transformación del tipo (45.2). Por ello vamos a deducir ahora las condiciones que deben satisfacerse para que las ecuaciones del movimiento en las nuevas variables  $P$  y  $Q$  sean de la forma

$$\dot{Q}_i = \partial H'/\partial P_i, \quad \dot{P}_i = -\partial H'/\partial Q_i \quad (45.3)$$

con una nueva hamiltoniana  $H'(P, Q)$ . Cuando esto ocurre, la transformación se dice que es *canónica*.

Las fórmulas para las transformaciones canónicas pueden obtenerse del modo siguiente. Se ha demostrado al final del § 43 que las ecuaciones de Hamilton pueden deducirse del principio de la mínima acción en la forma

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0, \quad (45.4)$$

en la cual la variación se aplica a todas las coordenadas y los ímpetus independientemente. Si las nuevas variables  $P$  y  $Q$  satisfacen también a las ecuaciones de Hamilton, deben verificar igualmente el principio de la mínima acción:

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right) = 0 \quad (45.5)$$

Las dos formas (45.4) y (45.5) son equivalentes solamente si sus integrandos difieren en la diferencial total de una función arbitraria  $F$  de las coordenadas, de los ímpetus y del tiempo; la diferencia entre las dos integrales (diferencia de los valores de  $F$  en los límites de integración) será entonces una constante cuya variación es nula. Consecuentemente se debe tener:

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF.$$

Toda transformación canónica está caracterizada por su función  $F$ , denominada *función generatriz de la transformación*. Escribiendo la relación anterior en la forma

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (45.6)$$

se tiene,

$$p_i = \partial F / \partial q_i, \quad P_i = -\partial F / \partial Q_i, \quad H' = H + \partial F / \partial t; \quad (45.7)$$

aquí se ha supuesto que la función generatriz está dada como una función de las antiguas y nuevas coordenadas y del tiempo:  $F = F(q, Q, t)$ . Cuando  $F$  es conocida, las fórmulas (45.7) nos dan la relación entre las antiguas variables ( $p, q$ ) y las nuevas ( $P, Q$ ), así como la nueva hamiltoniana.

Puede ser conveniente expresar la función generatriz no mediante las variables  $q$  y  $Q$ , sino en función de las antiguas coordenadas  $q$  y de los nuevos ímpetus  $P$ . Para deducir en este caso las fórmulas de las transformaciones canónicas debemos realizar la adecuada transformación de Legendre en la relación (45.6), volviendo a escribirla como:

$$d(F + \sum_i P_i Q_i) = \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt.$$

El argumento de la diferencial del primer miembro, expresada en función de las variables  $q$  y  $P$ , es una nueva función generatriz. Denominémosla  $\Phi(q, P, t)$ , y se tiene<sup>1</sup>:

$$p_i = \partial\Phi/\partial q_i, \quad Q_i = \partial\Phi/\partial P_i, \quad H' = H + \partial\Phi/\partial t. \quad (45.8)$$

De modo análogo se pueden obtener las fórmulas para las transformaciones canónicas que encierran funciones generatrices dependientes de las variables  $p$  y  $Q$ , o de las  $p$  y  $P$ .

La relación entre la nueva y la antigua hamiltoniana es siempre de la misma forma: la diferencia  $H' - H$  es la derivada parcial de la función generatriz respecto al tiempo. En particular, si la función generatriz es independiente del tiempo, entonces  $H' = H$ ; es decir, en este caso la nueva hamiltoniana se obtiene sustituyendo en  $H$  las magnitudes  $p$  y  $q$  por sus valores en función de las nuevas variables  $P$  y  $Q$ .

El amplio alcance de las transformaciones canónicas en el método de Hamilton priva a la noción de coordenadas e ímpetus generalizados gran parte de su significado inicial. Puesto que las transformaciones (45.2) relacionan cada una de las magnitudes  $P, Q$  tanto a las coordenadas  $q$  como a las ímpetus  $p$ , no se pueden considerar las variables  $Q$  como coordenadas estrictamente espaciales, y la diferencia entre los dos grupos de variables  $P$  y  $Q$  se convierte esencialmente en cuestión de nomenclatura. Esto se ve muy claramente en la transformación<sup>2</sup>  $Q_i = p_i, P_i = -q_i$ , que evidentemente no cambia la forma canónica de las ecuaciones, y se reduce simplemente a intercambiar los nombres de las coordenadas y de los ímpetus.

Teniendo en cuenta esta arbitrariedad de terminología, a las variables  $p$  y  $q$  en el método de Hamilton se les denomina habitualmente *magnitudes canónicamente conjugadas*. Las condiciones para que las variables sean canónicamente conjugadas pueden expresarse con ayuda de los paréntesis de Poisson. Demostremos primero un teorema general sobre la invarianza de los paréntesis de Poisson con respecto a las transformaciones canónicas.

Sea  $[f, g]_{p, q}$  el paréntesis de Poisson de las magnitudes  $f$  y  $g$ , en el cual la diferenciación se hace respecto a las variables  $p$  y  $q$ , y  $[f, g]_{P, Q}$ , el paréntesis de Poisson de las mismas magnitudes diferenciadas con respecto a las variables canónicas  $P$  y  $Q$ . Entonces

$$[f, g]_{p, q} = [f, g]_{P, Q}. \quad (45.9)$$

Esta relación puede demostrarse por cálculo directo, empleando las fórmulas de las transformaciones canónicas; sin embargo, pueden evitarse los cálculos mediante el razonamiento siguiente.

Empecemos por observar que en las transformaciones canónicas (45.7) y

<sup>1</sup> Observemos que tomando la función generatriz de la forma  $\Phi = \sum_i f_i(q, t)P_i$ , siendo  $f_i$  funciones arbitrarias, obtenemos una transformación en la cual las nuevas coordenadas son  $Q_i = f_i(q, t)$ , es decir, están expresadas solamente en función de las antiguas coordenadas (y no de los ímpetus). Estas son transformaciones puntuales, que constituyen, por supuesto, un caso particular de las transformaciones canónicas.

<sup>2</sup> Cuya función generatriz es  $F = \sum_i q_i Q_i$ .

(45.8), el tiempo aparece como un parámetro; por lo tanto, es suficiente demostrar el teorema (45.9) para magnitudes que no dependan explícitamente del tiempo. Consideremos ahora, de modo puramente formal, a la magnitud  $g$  como la hamiltoniana de un sistema ficticio; entonces, de la fórmula (42.1)  $[f, g]_{p,q} = df/dt$ . La derivada  $df/dt$  sólo puede depender de las propiedades del movimiento del sistema ficticio, y no de la elección particular de las variables. De aquí que el paréntesis de Poisson  $[f, g]$  sea inalterable por el paso de un conjunto de variables canónicas a otro.

De las fórmulas (42.13) y del teorema (45.9) se tiene:

$$[Q_i, Q_k]_{p,q} = 0, \quad [P_i, P_k]_{p,q} = 0, \quad [P_i, Q_k]_{p,q} = \delta_{ik}. \quad (45.10)$$

Estas son las condiciones, expresadas en función de los paréntesis de Poisson, que deben satisfacer las nuevas variables para que la transformación  $p, q \rightarrow P, Q$  sea canónica.

Es interesante observar que la variación de las magnitudes  $p, q$  durante el movimiento del sistema puede ser considerada por sí misma como una serie de transformaciones canónicas. El significado de esta afirmación es el siguiente; sean  $q_t, p_t$  los valores de las variables canónicamente conjugadas en el instante  $t$ , y  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  sus valores en el instante  $t + \tau$ . Estas últimas son funciones de las primeras (y del valor  $\tau$  del intervalo como parámetro):

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau).$$

Si se consideran estas fórmulas como una transformación de las variables  $q_t, p_t$  en  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ , entonces esta transformación será canónica; esto es evidente si se considera la expresión  $dS = \sum(p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t)$  para la diferencial de la acción  $S(q_{t+\tau}, q_t)$  calculada a lo largo de la trayectoria real que pasa por los puntos  $q_t$  y  $q_{t+\tau}$  en los instantes dados  $t$  y  $t + \tau$  [cf. (43.7)]. La comparación de esta fórmula con (45.6) prueba que  $-S$  es la función generatriz de la transformación.

## § 46. Teorema de Liouville

En la interpretación geométrica de los fenómenos mecánicos se hace frecuente uso del concepto de *espacio fásico*; es un espacio de  $2s$  dimensiones cuyos ejes coordenados corresponden a las  $s$  coordenadas generalizadas y a los  $s$  ímpetus del sistema mecánico considerado. Cada punto en este espacio corresponde a un estado definido del sistema. Cuando el sistema se mueve, el punto representativo en el espacio fásico describe una línea denominada *trayectoria fásica*.

El producto de diferenciales

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

puede considerarse como un elemento de volumen en el espacio de las fases. Consideremos ahora la integral  $\int d\Gamma$  extendida a una región cualquiera de este espacio y que representa el volumen de dicha región. Vamos a demostrar que

esta integral tiene la propiedad de ser invariante con respecto a las transformaciones canónicas, es decir, si las variables  $p, q$  se transforman canónicamente en las variables  $P, Q$ , los volúmenes de las regiones correspondientes de los espacios  $p, q$  y  $P, Q$  serán los mismos:

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s. \quad (46.1)$$

Como es sabido, la transformación de variables en una integral múltiple se realiza por la fórmula

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s,$$

en la que

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \quad (46.2)$$

es el jacobiano de la transformación. Consecuentemente, la demostración del teorema (46.1) queda reducida a probar que el jacobiano de toda transformación canónica es igual a la unidad:

$$D = 1. \quad (46.3)$$

Haremos uso de la conocida propiedad de los jacobianos por la cual pueden ser tratados como si fuesen fracciones. «Dividiendo numerador y denominador» por  $\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)$ , se obtiene:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)}.$$

Otra propiedad de los jacobianos es que cuando las mismas magnitudes aparecen en el «numerador» y «denominador», el jacobiano se reduce a otro con menor número de variables, y en el cual las magnitudes repetidas se consideran como constantes y salen fuera de los símbolos de derivación. De aquí que:

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \right\}_{P=\text{cte.}} / \left\{ \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \right\}_{q=\text{cte.}} \quad (46.4)$$

El jacobiano del numerador es, por definición, un determinante de orden  $s$  cuyo elemento de la fila  $i$  y columna  $k$  es  $\partial Q_i / \partial q_k$ . Representando la transformación canónica por la función generatriz  $\Phi(q, P)$  en la forma (45.8), se obtiene

$$\partial Q_i / \partial q_k = \partial^2 \Phi / \partial q_k \partial P_i.$$

Análogamente se encuentra que el elemento de la fila  $i$  y columna  $k$  del determinante del denominador es igual a  $\partial^2 \Phi / \partial q_i \partial P_k$ . Esto quiere decir que ambos determinantes sólo difieren en el intercambio de filas y columnas; por tanto serán iguales, de modo que el cociente (46.4) es igual a la unidad, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que cada punto en la región considerada del espacio

fásico se mueve en el curso del tiempo de acuerdo con las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico; la región también se moverá como un todo, sin que cambie su volumen:

$$\int d\Gamma = \text{cte.} \quad (46.5)$$

Este resultado, conocido como *teorema de Liouville*, es consecuencia inmediata de la invariancia del volumen del espacio fásico en las transformaciones canónicas, y del hecho de que la variación de  $p$  y  $q$  durante el movimiento, puede ser considerada como una transformación canónica (como se ha demostrado al final de § 45).

De modo análogo puede demostrarse la invariancia de las integrales

$$\iint \sum_i dq_i dp_i, \quad \iiint \sum_{i \neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k, \dots,$$

en las que la integración se extiende a variedades bidimensionales, cuadrimensionales, etc., del espacio fásico.

### § 47. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Al considerar en § 43 la acción  $S$  como función de las coordenadas y del tiempo se ha demostrado que la derivada parcial respecto al tiempo de esta función  $S(q, t)$  está relacionada con la hamiltoniana por la expresión

$$\partial S / \partial t + H(q, p, t) = 0,$$

y que sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas son los ímpetus. Sustituyendo entonces en la hamiltoniana los ímpetus  $p$  por las derivadas  $\partial S / \partial q$ , se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0 \quad (47.1)$$

a la que debe satisfacer la función  $S(q, t)$ . Esta ecuación de primer orden en derivadas parciales se denomina *ecuación de Hamilton-Jacobi*.

Lo mismo que las ecuaciones de Lagrange y que las ecuaciones canónicas, la ecuación de Hamilton-Jacobi es la base de un método general de integrar las ecuaciones del movimiento.

Antes de exponer este método, recordemos que toda ecuación en derivadas parciales de primer orden tiene una solución dependiente de una función arbitraria; a esta solución se la denomina integral *general* de la ecuación. En las aplicaciones mecánicas la integral general de la ecuación de Hamilton-Jacobi es menos importante que una integral *completa*; se llama así a la solución de una ecuación en derivadas parciales que contiene tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes existan.

Las variables independientes en la ecuación de Hamilton-Jacobi son las

coordenadas y el tiempo y, por tanto, en un sistema con  $s$  grados de libertad, una integral completa de esta ecuación debe contener  $s + 1$  constantes arbitrarias. Como la función  $S$  sólo interviene en la ecuación por sus derivadas, una de dichas constantes arbitrarias será aditiva, o sea, que una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi es de la forma

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A, \quad (47.2)$$

siendo  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  y  $A$  constantes arbitrarias<sup>1</sup>.

Busquemos ahora la relación entre la integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi y la solución de las ecuaciones del movimiento que nos interesa. Para ello, efectuemos una transformación canónica de las variables  $p, q$  a las nuevas variables, eligiendo la función  $f(t, q; a)$  como función generatriz, y las magnitudes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  como los nuevos ímpetus. Designemos a las nuevas coordenadas por  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Como la función generatriz depende de las antiguas coordenadas y de los nuevos ímpetus, debemos utilizar las fórmulas (45.8):

$$p_i = \partial f / \partial q_i, \quad \beta_i = \partial f / \partial \alpha_i, \quad H' = H + \partial f / \partial t.$$

Pero como la función  $f$  satisface a la ecuación de Hamilton-Jacobi, se ve que la nueva hamiltoniana es nula:

$$H' = H + \partial f / \partial t = H + \partial S / \partial t = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones canónicas en las nuevas variables son  $\dot{\alpha}_i = 0$ ,  $\dot{\beta}_i = 0$ , de donde resulta que

$$\alpha_i = \text{cte.}, \quad \beta_i = \text{cte.} \quad (47.3)$$

Por otra parte, las  $s$  ecuaciones

$$\partial f / \partial \alpha_i = \beta_i,$$

permiten expresar las  $s$  coordenadas  $q$  en función del tiempo y de las  $2s$  constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . Así, obtenemos la integral general de las ecuaciones del movimiento.

Entonces la solución del problema del movimiento de un sistema mecánico por el método de Hamilton-Jacobi es como sigue. A partir de la hamiltoniana, formamos la ecuación de Hamilton-Jacobi y hallamos una integral completa (47.2).

<sup>1</sup> Aunque aquí no se necesita la integral general de la ecuación de Hamilton-Jacobi, vamos a demostrar cómo puede hallarse si se cortoce una integral completa. Para ello, consideraremos a  $A$  como una función arbitraria de las otras constantes:

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Remplazando aquí las  $\alpha$  por funciones de las coordenadas y del tiempo dadas por las  $s$  condiciones

$$\partial S / \partial \alpha_i = 0,$$

se obtiene una integral general dependiente de la función arbitraria  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . En efecto, para la función  $S$  así obtenida, tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha + \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha.$$

Las magnitudes  $(\partial S / \partial q_i)_\alpha$  satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi, pues se ha supuesto que la función  $S(t, q; a)$  es una integral completa de dicha ecuación. Las derivadas  $\partial S / \partial q_i$  satisfacen, pues, la misma ecuación.

Derivándola respecto a las constantes arbitrarias  $\alpha$  e igualando estas derivadas a nuevas constantes  $\beta$ , obtenemos un sistema de  $s$  ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (47.4)$$

cuya solución da las coordenadas  $q$  como funciones del tiempo y de las  $2s$  constantes arbitrarias. Se encuentran entonces las relaciones entre los ímpetus y el tiempo mediante las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Si se tiene una integral incompleta de la ecuación de Hamilton-Jacobi dependiente de un número de constantes arbitrarias inferior a  $s$ , aunque no se pueda por medio de esta integral hallar la integral general de las ecuaciones del movimiento, se puede sin embargo simplificar algo este problema. Por ejemplo, si la función  $S$  conocida contiene una constante arbitraria  $a$ , la relación

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{cte.}$$

nos dará una ecuación entre  $q_1, \dots, q_s$  y  $t$ .

La ecuación de Hamilton-Jacobi toma una forma algo más sencilla en el caso en que la función  $H$  no dependa explícitamente del tiempo, es decir, si el sistema es conservativo. La dependencia de la acción con respecto al tiempo se reduce entonces al término —  $Et$ :

$$S = S_0(q) - Et \quad (47.5)$$

(véase § 44), y sustituyendo en (47.1), se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi con la acción reducida  $S_0(q)$  en la forma

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \quad (47.6)$$

### § 48. Separación de variables

En algunos casos importantes, se puede hallar una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi por el método de *separación de variables*.

Supongamos que alguna coordenada, por ejemplo la  $q_1$ , y la correspondiente derivada  $\partial S / \partial q_1$  aparecen en la ecuación de Hamilton-Jacobi formando solamente una combinación del tipo  $\phi(q_1, \partial S / \partial q_1)$ , en la cual no entran las otras coordenadas, ni las derivadas, ni el tiempo, es decir, suponemos que la ecuación sea de la forma

$$\Phi\left(q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right) = 0, \quad (48.1)$$

en la que  $q_i$  designa todas las coordenadas menos la  $q_1$ .

En este caso se busca una solución en la forma de una suma

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1); \quad (48.2)$$

que sustituida en la ecuación (48.1):

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \phi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\} = 0. \quad (48.3)$$

Supongamos que ha sido hallada la solución (48.2); al sustituirla en la ecuación (48.3), esta última se convierte en una identidad, válida en particular para cualquier valor de la coordenada  $q_1$ . Cuando varíe  $q_1$ , sólo es afectada la función  $\phi$ ; por tanto, para que la expresión (48.3) sea una identidad,  $\phi$  debe ser una constante. Entonces la ecuación (48.3) da dos ecuaciones:

$$\phi(q_1, dS_1/dq_1) = \alpha_1, \quad (48.4)$$

$$\Phi\{q_i, t, \partial S'/\partial q_i, \partial S'/\partial t, \alpha_1\} = 0, \quad (48.5)$$

donde  $\alpha_1$  es una constante arbitraria. La primera de estas ecuaciones es una ecuación diferencial ordinaria de la que puede obtenerse  $S_1(q_1)$  por simple integración. Queda entonces la ecuación en derivadas parciales (48.5), que contiene un número menor de variables independientes.

Si de este modo se pueden separar sucesivamente las  $s$  coordenadas y el tiempo, el cálculo de la integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a cuadraturas. Para un sistema conservativo, se trata únicamente de separar  $s$  variables (las coordenadas) en la ecuación (47.6), y cuando esta separación es completa, la integral buscada es:

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t, \quad (48.6)$$

en la que cada una de las funciones  $S_k$  depende sólo de una coordenada; la energía  $E$  como función de las constantes arbitrarias  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , se obtiene sustituyendo  $S_0 = \sum S_k$  en la ecuación (47.6).

Un caso particular es la separación de una variable cíclica; una coordenada cíclica  $q_1$  no aparece explícitamente en la hamiltoniana ni, por tanto, en la ecuación de Hamilton-Jacobi. La función  $\phi(q_1, \partial S/\partial q_1)$  se reduce simplemente a  $\partial S/\partial q_1$ , y de la ecuación (48.4), se obtiene  $S_1 = \alpha_1 q_1$ , de modo que

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \quad (48.7)$$

La constante  $\alpha_1$  es precisamente el valor constante del ímpetu  $p_1 = \partial S/\partial q_1$  correspondiente a la coordenada cíclica. Observemos que la presencia del tiempo en el término  $-Et$  para un sistema conservativo corresponde a la separación de la «variable cíclica»  $t$ .

Entonces, el método de separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi engloba todos los casos ya tratados de simplificación de la integración de las ecuaciones del movimiento por el uso de las variables cíclicas. A aquéllos

se añaden todos los casos en los cuales pueden separarse las variables aunque no sean cíclicas. En consecuencia, el método de Hamilton-Jacobi es el más eficaz para hallar la integral general de las ecuaciones del movimiento.

Para separar las variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi, es esencial elegir apropiadamente las coordenadas. Consideremos algunos ejemplos de separación de variables en diferentes coordenadas, que pueden ser de interés físico en relación con los problemas del movimiento de una partícula en distintos campos exteriores.

1. *Coordenadas esféricas.* En estas coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  la hamiltoniana es:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi),$$

y las variables pueden ser separadas si:

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta},$$

donde  $a(r)$ ,  $b(\theta)$  y  $c(\phi)$  son funciones arbitrarias. El último término en esta expresión de  $U$  apenas presenta interés desde el punto de vista físico y, por tanto, sólo consideraremos

$$U = a(r) + b(\theta)/r^2. \quad (48.8)$$

En este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función  $S_0$  es:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 = E.$$

Como la coordenada  $\phi$  es cíclica, buscamos una solución en la forma

$$S_0 = p_\phi \phi + S_1(r) + S_2(\theta),$$

obteniendo para las funciones  $S_1(r)$  y  $S_2(\theta)$  las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} &= \beta, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} &= E. \end{aligned}$$

Su integración da finalmente

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{[\beta - 2mb(\theta) - p_\phi^2/\operatorname{sen}^2 \theta]} d\theta + \\ + \int \sqrt{[2m[E - a(r)] - \beta/r^2]} dr. \end{aligned} \quad (48.9)$$

Aquí las constantes arbitrarias son  $p_\phi$ ,  $\beta$  y  $E$ ; derivando con respecto a ellas e igualando el resultado a otras constantes, se obtiene la solución general de las ecuaciones del movimiento.

2. *Coordenadas parabólicas.* Se pasa de las coordenadas cilíndricas (que aquí designamos por  $\rho, \phi, z$ ) a las parabólicas  $\xi, \eta, \phi$  mediante las fórmulas:

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{(\xi\eta)}. \quad (48.10)$$

Las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  pueden tomar los valores de 0 a  $\infty$ ; se comprueba fácilmente que las superficies  $\xi = \text{cte.}$  y  $\eta = \text{cte.}$  son dos familias de paraboloides de revolución (con el eje  $z$  como eje de simetría). Las relaciones (48.10) pueden expresarse en función del radio

$$r = \sqrt{(z^2 + \rho^2)} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad (48.11)$$

Se tiene entonces,

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48.12)$$

Deduzcamos ahora la lagrangiana de una partícula con las coordenadas  $\xi, \eta, \phi$ . Derivando las expresiones (48.10) respecto al tiempo y sustituyendo en

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \phi, z),$$

(lagrangiana en coordenadas cilíndricas), se obtiene

$$L = \frac{1}{8}m(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \frac{1}{2}m\xi\eta\dot{\phi}^2 - U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.13)$$

Los ímpetus son:

$$p_\xi = \frac{1}{4}m(\xi + \eta)\dot{\xi}/\xi, p_\eta = \frac{1}{4}m(\xi + \eta)\dot{\eta}/\eta, p_\phi = m\xi\eta\dot{\phi},$$

y la hamiltoniana

$$H = \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.14)$$

Los casos físicamente interesantes de separación de variables en estas coordenadas corresponden a una energía potencial del tipo

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r+z) + b(r-z)}{2r}. \quad (48.15)$$

Se tiene la ecuación,

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E.$$

La coordenada cíclica  $\phi$  se separa en la forma  $p_\phi\dot{\phi}$ . Multiplicando la ecuación por  $m(\xi + \eta)$  y reagrupando los términos se obtiene:

$$2\xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} + 2\eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} = 0.$$

Haciendo

$$S_0 = p_\phi \phi + S_1(\xi) + S_2(\eta),$$

se tienen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\xi \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} &= \beta, \\ 2\eta \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} &= -\beta, \end{aligned}$$

cuya integración da finalmente

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\left[ \frac{1}{2}mE + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2} \right]} d\xi + \\ + \int \sqrt{\left[ \frac{1}{2}mE - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2} \right]} d\eta. \end{aligned} \quad (48.16)$$

con  $p_\phi$ ,  $\beta$ ,  $E$  como constantes arbitrarias.

3. *Coordenadas elípticas.* Estas coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$  están definidas por las fórmulas

$$\rho = \sigma \sqrt{[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]}, \quad z = \sigma \xi \eta. \quad (48.17)$$

La constante  $\sigma$  es un parámetro de la transformación. La coordenada  $\xi$  toma valores de 1 a  $\infty$  y la coordenada  $\eta$  de -1 a +1. Se obtienen relaciones geométricamente más claras introduciendo las distancias  $r_1$  y  $r_2$  a los puntos  $A_1$  y  $A_2$  del eje  $z$  cuyas coordenadas son  $z = \sigma$  y  $z = -\sigma$ :  $r_1 = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$ .

Sustituyendo aquí las expresiones (48.17) se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi - \eta), & r_2 &= \sigma(\xi + \eta), \\ \xi &= (r_2 + r_1)/2\sigma, & \eta &= (r_2 - r_1)/2\sigma. \end{aligned} \quad (48.18)$$

Transformando la lagrangiana de coordenadas cilíndricas a coordenadas elípticas, se encuentra

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \\ + \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}^2 - U(\xi, \eta, \phi). \end{aligned} \quad (48.19)$$

<sup>1</sup> Las superficies  $\xi = \text{cte}$  representan la familia de elipsoides

$$z^2/\sigma^2 \xi^2 + \rho^2/\sigma^2(\xi^2 - 1) = 1,$$

cuyos focos son  $A_1$  y  $A_2$ , y las superficies  $\eta = \text{cte}$ , la familia de hiperboloides

$$z^2/\sigma^2 \eta^2 - \rho^2/\sigma^2(1 - \eta^2) = 1,$$

cuyos focos son también  $A_1$  y  $A_2$ .

Por lo tanto, la hamiltoniana es:

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1) \dot{p}_\xi^2 + (1 - \eta^2) \dot{p}_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \dot{p}_\phi^2 \right] + U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.20)$$

Los casos físicamente interesantes de separación de variables corresponden a la energía potencial

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left( a \left( \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \right) \right), \quad (48.21)$$

donde  $a(\xi)$  y  $b(\eta)$  son funciones arbitrarias. El resultado de la separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi es:

$$S = -Et + \dot{p}_\phi \phi + \int \sqrt{\left[ 2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{\dot{p}_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right]} d\xi + \int \sqrt{\left[ 2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{\dot{p}_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2} \right]} d\eta. \quad (48.22)$$

## PROBLEMAS

1. Hallar una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento de una partícula en un campo

$$U = \alpha/r - Fz$$

(superposición de un campo culombiano y de un campo uniforme).

*Solución:* El campo es del tipo (48.15) con

$$a(\xi) = \alpha - \frac{1}{2}F\xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{1}{2}F\eta^2.$$

La fórmula (48.16) da:

$$S = -Et + \dot{p}_\phi \phi + \int \sqrt{\left[ \frac{1}{2}mE - \frac{m\alpha - \beta}{2\xi} - \frac{\dot{p}_\phi^2}{4\xi^2} + \frac{mF\xi}{4} \right]} d\xi + \int \sqrt{\left[ \frac{1}{2}mE - \frac{m\alpha + \beta}{2\eta} - \frac{\dot{p}_\phi^2}{4\eta^2} - \frac{mF\eta}{4} \right]} d\eta,$$

con las constantes arbitrarias  $p_\phi$ ,  $E$ ,  $\beta$ . La constancia de  $\beta$  en este caso quiere decir que la función uniforme de las coordenadas y de los ímpetus de la partícula

$$\beta = -m \left[ \frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m} (z p_\phi - \rho p_z) \right] - \frac{1}{2} m F \rho^2$$

se conserva. La expresión entre paréntesis es una integral del movimiento para un campo culombiano puro (véase § 15).

## 2. El mismo problema para un campo

$$U = \alpha_1/r_1 + \alpha_2/r_2$$

(campo culombiano de dos puntos fijos separados una distancia  $2\sigma$ ).

*Solución:* El campo es del tipo (48.21) con

$$a(\xi) = (\alpha_1 + \alpha_2)\xi/\sigma, b(\eta) = (\alpha_1 - \alpha_2)\eta/\sigma.$$

La fórmula (48.22) da:

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\left[ 2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)\xi}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right]} d\xi + \\ + \int \sqrt{\left[ 2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)\eta}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2} \right]} d\eta. \end{aligned}$$

La constante  $\beta$  expresa aquí la conservación de la magnitud

$$\beta = \sigma^2 p_\phi^2 - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2),$$

donde  $M$  es el momento cinético total de la partícula, y  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , los ángulos indicados en la figura 55.

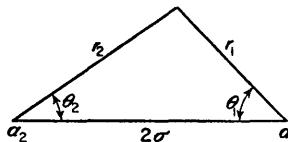


FIG. 55

### § 49. Invariantes adiabáticos

Consideremos un sistema mecánico que realiza un movimiento finito unidimensional, y caracterizado por un parámetro  $\lambda$  que especifica las propiedades del sistema o del campo exterior en el que está colocado. Supongamos que bajo la influencia de ciertas causas exteriores, el parámetro  $\lambda$  varía lentamente (*adiabáticamente*) con el tiempo; entendemos por «lenta» una transformación en la cual  $\lambda$  varía sólo ligeramente durante el período  $T$  del movimiento del sistema:

$$T d\lambda/dt \ll \lambda. \quad (49.1)$$

Un tal sistema no es cerrado y no se conserva su energía  $E$ . Sin embargo, como  $\lambda$  varía lentamente, el ritmo de variación  $\dot{E}$  de la energía es proporcional al ritmo de variación  $\dot{\lambda}$  del parámetro  $\lambda$ . Esto significa que cuando  $\lambda$  varía, la energía del sistema se comporta como si fuese una cierta función de  $\lambda$ ; en otras palabras, existirá una relación entre  $E$  y  $\lambda$  que permanece constante durante el movimiento del sistema; esta magnitud se denomina *invariante adiabático*.

Sea  $H(p, q; \lambda)$  la hamiltoniana del sistema la cual depende del parámetro  $\lambda$ . De acuerdo con (40.5), la derivada total de la energía con respecto al tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = \partial H / \partial t = (\partial H / \partial \lambda)(d\lambda/dt).$$

Tomemos el valor medio de esta ecuación durante un período del movimiento; teniendo en cuenta que  $\lambda$  (y por consiguiente  $\dot{\lambda}$ ) varía lentamente, no es necesario tomar el valor medio de  $\dot{\lambda}$ :

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = (d\lambda/dt) \overline{(\partial H / \partial \lambda)},$$

y, en la función  $(\partial H / \partial \lambda)$  que se promedia, podemos considerar como variables  $p$  y  $q$ , y no  $\lambda$ . Es decir, en un movimiento de este tipo, se toman los valores medios como si el movimiento tuviese lugar con  $\lambda$  constante.

El valor medio de la energía puede escribirse explícitamente:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

De acuerdo con la ecuación de Hamilton  $\dot{q} = \partial H / \partial p$ , tenemos:

$$dt = dq / (\partial H / \partial p).$$

La integración respecto al tiempo puede por tanto remplazarse por una integración respecto a la coordenada, expresando el período  $T$  en la forma

$$T = \int_0^T dt = \oint [dq / (\partial H / \partial p)];$$

el signo  $\oint$  se refiere aquí a una integración sobre el intervalo completo («ida y vuelta») de la coordenada durante un período<sup>1</sup>. Entonces,

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial H / \partial \lambda) dq / (\partial H / \partial p)}{\oint dq / (\partial H / \partial p)}. \quad (49.2)$$

Como ya se ha indicado, las integrales de esta fórmula deben tomarse sobre la trayectoria para un valor dado constante de  $\lambda$ . A lo largo de tal trayectoria, la hamiltoniana tiene un valor constante  $E$ , y el ímpetu es una función definida de la coordenada variable  $q$  y de los dos parámetros constantes independientes  $E$  y  $\lambda$ . Poniendo, por lo tanto,  $p = p(q; E, \lambda)$  y derivando  $H(p, q; \lambda) = E$  con respecto al parámetro  $\lambda$ , se obtiene,

$$\partial H / \partial \lambda + (\partial H / \partial p)(\partial p / \partial \lambda) = 0,$$

<sup>1</sup> Si el movimiento del sistema es una rotación y la coordenada  $q$  es un ángulo de rotación  $\phi$ , la integración con respecto a  $\phi$  debe extenderse a una «vuelta completa», es decir, de 0 a  $2\pi$ .

o

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

Sustituyendo esta expresión en el numerador de (49.2) y escribiendo el integrando del denominador en la forma  $\partial p/\partial E$ , se tiene:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{d\lambda \oint (\partial p/\partial\lambda) dq}{dt \oint (\partial p/\partial E) dq} \quad (49.3)$$

o

$$\oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \overline{\frac{dE}{dt}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Finalmente, esta igualdad puede escribirse:

$$\overline{dI/dt} = 0, \quad (49.4)$$

siendo,

$$I \equiv \oint p dq / 2\pi, \quad (49.5)$$

extendida la integral a la trayectoria, siendo  $E$  y  $\lambda$  constantes dadas. Este resultado muestra que, en la aproximación aquí considerada, la magnitud  $I$  permanece constante cuando varía el parámetro  $\lambda$ , o sea, es un invariante adiabático<sup>1</sup>.

La magnitud  $I$  es una función de la energía del sistema (y del parámetro  $\lambda$ ). Su derivada parcial respecto a la energía

$$2\pi \partial I/\partial E = \oint (\partial p/\partial E) dq$$

[la integral es la del denominador de (49.3)] es, salvo un factor  $2\pi$ , el período del movimiento:

$$2\pi \partial I/\partial E = T. \quad (49.6)$$

La integral (49.5) tiene un significado geométrico en relación con la trayectoria del sistema en el espacio fásico. En el caso considerado (un solo grado de libertad) el espacio fásico se reduce a un espacio bidimensional de coordenadas  $p$  y  $q$ , y la trayectoria fásica de un sistema que realiza un movimiento periódico es una curva cerrada en el plano. La integral (49.5), tomada a lo largo de esta curva es el área encerrada. Evidentemente puede escribirse también, ya como integral curvilínea

$$I = -\oint q dp / 2\pi$$

<sup>1</sup> Puede demostrarse que si la función  $\lambda(t)$  no presenta singularidades, la diferencia entre  $I$  y un valor constante es una cantidad exponencialmente pequeña.

ya como integral de superficie

$$I = \iint dp dq / 2\pi.$$

Como ejemplo, determinemos el invariante adiabático para un oscilador lineal. Su hamiltoniana es:

$$H = \frac{1}{2}p^2/m + \frac{1}{2}m\omega^2q^2,$$

siendo  $\omega$  la frecuencia propia del oscilador. La ecuación de la trayectoria fásica está dada por la ley de la conservación de la energía  $H(p, q) = E$ ; es una elipse de semiejes  $\sqrt{2mE}$  y  $\sqrt{2E/m\omega^2}$ , y su área, dividida por  $2\pi$ , es:

$$I = E/\omega. \quad (49.7)$$

La invariancia adiabática de esta magnitud significa que, cuando los parámetros del oscilador varían lentamente, la energía es proporcional a la frecuencia<sup>1</sup>.

Las ecuaciones del movimiento de un sistema cerrado con parámetros constantes pueden volver a formularse en función de  $I$ . Efectuemos una transformación canónica de las variables  $p, q$ , tomando  $I$  como nuevo «ímpetu»; la función generatriz es la acción abreviada  $S_0$ , expresada como función de  $q$  e  $I$ . Puesto que  $S_0$  está definida para una energía dada del sistema, y en un sistema cerrado  $I$  sólo es función de la energía,  $S_0$  puede escribirse también como una función  $S_0(q, I)$ . La derivada parcial  $(\partial S_0 / \partial q)_E = p$  coincidirá con la derivada  $(\partial S_0 / \partial q)$  para  $I$  constante. En consecuencia, se tiene

$$p = \partial S_0(q, I) / \partial q, \quad (49.8)$$

lo que corresponde a la primera de las fórmulas para una transformación canónica (45.8). La segunda de estas fórmulas nos da la nueva «coordenada» que designamos por  $w$ :

$$w = \partial S_0(q, I) / \partial I. \quad (49.9)$$

Las variables  $I$  y  $w$  se llaman *variables canónicas*,  $I$  es denominada *variable acción* y  $w$  *variable angular*.

<sup>1</sup> La cuestión de hasta qué punto se conserva el invariante adiabático (49.7) queda reducida a establecer la relación que existe entre los coeficientes  $c_{\pm}$  en las expresiones asintóticas (para  $t \rightarrow \pm\infty$ )  $q = \operatorname{Re}(c_{\pm} e^{i\omega_{\pm} t})$  de la solución de la ecuación del movimiento  $\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0$ , en la que la frecuencia  $\omega$  es una función del tiempo lentamente variable (que tiende a los límites constantes  $\omega_{\pm}$  para  $t \rightarrow \pm\infty$ ); los valores límite de  $I$  se expresan en función de estos coeficientes por la igualdad  $I_{\pm} = \frac{1}{2}\omega_{\pm} |c_{\pm}|^2$ . La solución de este problema puede tomarse de la mecánica cuántica observando la coincidencia formal de aquella ecuación del movimiento con la ecuación de Schrödinger  $\Psi'' + k^2(x)\Psi = 0$  correspondiente al movimiento unidimensional de una partícula ante una «pared de potencial» que varía lentamente (de manera cuasiclásica); el problema de determinar la relación entre las expresiones asintóticas (para  $x \rightarrow \pm\infty$ ) de  $\Psi$  es el de hallar «el coeficiente de reflexión» en la pared de potencial (véase vol. III, *Mecánica cuántica*, § 52).

Esta manera de resolver el problema del grado en que se conserva el invariante adiabático de un oscilador se debe a L. P. Pitaevskii. Los cálculos correspondientes se presentan en el trabajo de A. M. Dyjne, ZhETF 38, 570 (1960).

Puesto que la función generatriz  $S_0(q, I)$  no depende explícitamente del tiempo, la nueva hamiltoniana  $H'$  coincide con la antigua  $H$  expresada en función de las nuevas variables. En otras palabras,  $H'$  representa la energía  $E(I)$  expresada en función de la variable acción. Consecuentemente, las ecuaciones de Hamilton con las nuevas variables canónicas son:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{w} = dE(I)/dI. \quad (49.10)$$

La primera ecuación da  $I = \text{cte.}$ , como era de esperar, ya que es constante la energía. De la segunda ecuación se deduce que la variable angular es función lineal del tiempo

$$w = (dE/dI)t + \text{cte.} \quad (49.11)$$

La acción  $S_0(q, I)$  es una función multiforme de las coordenadas. Al cabo de cada período, esta función no toma su valor inicial, sino que aumenta en

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \quad (49.12)$$

como es evidente de la fórmula  $S_0 = \int p dq$  y de la definición (49.5). Durante el mismo tiempo la variable angular se incrementa por tanto en

$$\Delta w = \Delta(\partial S_0 / \partial I) = \partial(\Delta S_0) / \partial I = 2\pi, \quad (49.13)$$

[lo que puede verificarse inmediatamente de la fórmula (49.11) y de la expresión (49.6) del período].

Recíprocamente, si expresamos  $q$  y  $p$  [o cualquier función uniforme  $F(p, q)$  de estas variables] en función de las variables canónicas, permanecerán invariables cuando  $w$  aumenta en  $2\pi$  (para un valor dado de  $I$ ). Es decir, cualquier función uniforme  $F(p, q)$ , expresada por medio de las variables canónicas es una función periódica de  $w$ , de período  $2\pi$ .

## § 50. Propiedades generales del movimiento en el espacio

Consideremos un sistema con varios grados de libertad, realizando un movimiento finito (con respecto a todas las coordenadas), y supongamos que el problema admite una separación completa de las variables por el método de Hamilton-Jacobi. Esto significa que, por una elección apropiada de las coordenadas, la acción reducida puede escribirse como una suma de funciones

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i), \quad (50.1)$$

cada una de las cuales depende de una sola coordenada.

Siendo los ímpetus generalizados

$$p_i = \partial S_0 / \partial q_i = dS_i / dq_i,$$

cada función  $S_i$  puede escribirse

$$S_i = \int p_i dq_i. \quad (50.2)$$

Estas funciones no son uniformes. Como el movimiento del sistema es finito, cada coordenada sólo puede tomar valores en un intervalo finito, y cuando las  $q_i$  varían «ida y vuelta» en este intervalo, la acción aumenta en

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \quad (50.3)$$

siendo

$$I_i \equiv \oint p_i dq_i / 2\pi, \quad (50.4)$$

extendida la integral a la mencionada variación de  $q_i^1$ .

Realicemos ahora una transformación canónica análoga a la considerada en § 49 para el caso de un solo grado de libertad. Las nuevas variables son las «variables de acción»  $I_i$  y las «variables angulares»

$$w_i = \partial S_0(q, I) / \partial I_i = \sum_k \partial S_k(q_k, I) / \partial I_i, \quad (50.5)$$

donde la función generatriz es nuevamente la acción, expresada en función de las coordenadas y de las  $I_i$ ; las ecuaciones del movimiento en estas variables

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \partial E(I) / \partial I_i,$$

dan

$$I_i = \text{cte.}, \quad (50.6)$$

$$w_i = [\partial E(I) / \partial I_i]t + \text{cte.} \quad (50.7)$$

También encontramos, análogamente a (49.13), que a una variación completa («ida y vuelta») de la coordenada  $q_i$  corresponde un cambio de  $2\pi$  en  $w_i$ :

$$\Delta w_i = 2\pi. \quad (50.8)$$

En otras palabras, las magnitudes  $w_i(q, I)$  son funciones multiformes de las coordenadas: cuando estas últimas varían y vuelven a sus valores iniciales, los  $w_i$  pueden variar en un múltiplo de  $2\pi$ . Esta propiedad puede también formularse como una propiedad de la función  $w_i(p, q)$  (expresada mediante las coordenadas y los ímpetus) en el espacio fásico del sistema. Como las  $I_i$  son funciones uniformes con respecto a las variables  $p$  y  $q$ , se obtiene, sustituyendo  $I_i(p, q)$  en  $w_i(q, I)$  una función  $w_i(p, q)$ , la cual puede variar en un múltiplo entero de  $2\pi$  (incluyendo el cero) al recorrer cualquier trayectoria cerrada en el espacio fásico.

<sup>1</sup> Sin embargo, se debe observar que aquí se trata de la variación formal de la coordenada  $q_i$  en todo el intervalo de valores posibles, y no de su variación durante el período del movimiento real (como en el caso del movimiento lineal). Un movimiento finito real de un sistema con varios grados de libertad no sólo no es en general periódico en conjunto, sino que la variación en el tiempo de cada coordenada tampoco es periódica (véase más adelante).

De aquí se deduce que cualquier función uniforme  $F(p, q)$  del estado del sistema<sup>1</sup>, cuando se expresa en función de las variables canónicas, es una función periódica de las variables angulares de período  $2\pi$  respecto de cada una de ellas. Puede, por lo tanto, ser desarrollada en serie múltiple de Fourier

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp\{i(l_1 w_1 + \dots + l_s w_s)\}, \quad (50.9)$$

(donde  $l_1, l_2 \dots, l_s$  son números enteros). Sustituyendo las variables angulares por sus expresiones en función del tiempo, se encuentra que la dependencia de  $F$  con el tiempo viene dada por una suma de la forma

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp\left\{i\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \dots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s}\right)\right\}. \quad (50.10)$$

Cada término de esta suma es una función periódica del tiempo de frecuencia

$$l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \dots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s}. \quad (50.11)$$

Como en general estas frecuencias no son comensurables, la suma no es una función estrictamente periódica, ni, en particular, lo son las coordenadas  $q$  ni los ímpetus  $p$ .

Entonces, el movimiento del sistema no es en general rigurosamente periódico, ni globalmente, ni respecto a cualquier coordenada. Esto significa que habiendo pasado por un cierto estado, el sistema no vuelve a pasar por el mismo estado en un tiempo finito. Sin embargo, se puede afirmar que, al cabo de un tiempo suficientemente largo, el sistema pasará tan cerca como se quiera (arbitrariamente cerca) del estado considerado. Por esta razón un tal movimiento se dice que es *quasi periódico* (*condicionalmente periódico*).

En algunos casos particulares, dos (o más) de las frecuencias fundamentales  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$  son comensurables para valores arbitrarios de  $I_i$ . Estos son casos de *degeneración*, y si las  $s$  frecuencias son comensurables el movimiento del sistema se denomina *completamente degenerado*; en este último caso el movimiento es evidentemente periódico, y por lo tanto las trayectorias de todas las partículas son cerradas.

La existencia de degeneración lleva consigo, ante todo, una reducción del número de magnitudes independientes ( $I_i$ ) de las cuales depende la energía del sistema. Si dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son tales que

$$\omega_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = \omega_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \quad (50.12)$$

<sup>1</sup> Las coordenadas de rotación  $\phi$  (véase la nota al pie de la pág. 186) no están en relación única con el estado del sistema, pues la posición de éste es la misma para todos los valores de  $\phi$  que difieren en un múltiplo entero de  $2\pi$ . Por tanto, si entre las coordenadas  $q$  figuran tales ángulos, sólo pueden aparecer en la función  $F(p, q)$  en expresiones tales como  $\cos \phi$  y  $\sin \phi$ , cuya correspondencia con el estado del sistema es única.

donde  $n_1$  y  $n_2$  son números enteros, se deduce entonces que  $I_1$  e  $I_2$  sólo aparecen en la energía en forma de la suma  $n_2 I_1 + n_1 I_2$ .

Una particularidad muy importante del movimiento degenerado es el aumento del número de integrales del movimiento uniformes respecto al número de ellas en el caso general de un sistema no degenerado (con igual número de grados de libertad). En este último caso, entre las  $(2s - 1)$  integrales del movimiento, sólo  $s$  funciones del estado del sistema son uniformes; éstas pueden ser, por ejemplo, las  $s$  magnitudes  $I_i$ . Las  $s - 1$  integrales restantes pueden escribirse como las diferencias

$$w_i \partial E / \partial I_k - w_k \partial E / \partial I_i. \quad (50.13)$$

La constancia de estas magnitudes se deduce inmediatamente de la fórmula (50.7), pero no son funciones uniformes del estado del sistema, porque las variables angulares no son uniformes.

En los casos de degeneración, la situación es diferente. Así, teniendo en cuenta (50.12), aunque la integral

$$w_1 n_2 - w_2 n_1 \quad (50.14)$$

no es uniforme, su no uniformidad se reduce a la adición de un múltiplo arbitrario de  $2\pi$ . Por tanto, basta tomar una función trigonométrica de esta magnitud para obtener una nueva integral uniforme del movimiento.

Como ejemplo de degeneración tenemos el movimiento en un campo  $U = -a/r$  (véase problema). La degeneración conduce a la aparición de una nueva integral del movimiento (15.17) uniforme, peculiar de este campo, al lado de las dos (pues el movimiento es bidimensional) integrales uniformes ordinarias, el momento angular  $\mathbf{M}$  y la energía  $E$ , propias del movimiento en cualquier campo central.

Se puede observar que la aparición de un mayor número de integrales uniformes nos lleva, a su vez, a otra propiedad de los movimientos degenerados: admiten una separación completa de las variables para diferentes elecciones de las coordenadas, y no para una sola elección determinada<sup>1</sup>. En efecto, las magnitudes  $I_i$  son integrales uniformes del movimiento en las coordenadas que permiten la separación de las variables; cuando ocurre la degeneración, el número de integrales uniforme es mayor que  $s$ , y así la elección de las que se desean tomar por magnitudes  $I_i$  deja de ser unívoca.

A título de ejemplo, se puede citar de nuevo el movimiento de Kepler que permite la separación de variables tanto en coordenadas esféricas como en parabólicas.

En § 49 se ha demostrado que para un movimiento finito unidimensional, la variable acción es un invariante adiabático. Esta afirmación es también válida para un sistema con varios grados de libertad, y vamos a dar aquí una demostración para el caso general.

Sea de nuevo  $\lambda(t)$  un parámetro del sistema lentamente variable<sup>2</sup>. En la transformación canónica de las variables  $p, q$  a las variables  $I, w$ , la función

<sup>1</sup> Prescindimos aquí de los cambios triviales de coordenadas como  $q'_1 = q'_1(q_1), q'_2 = q'_2(q_2)$ .

<sup>2</sup> Para simplificar las fórmulas supondremos que sólo hay un tal parámetro, pero la demostración es enteramente válida cualquiera que sea su número.

generatriz es, como sabemos, la acción  $S_0(q, I)$ . Esta depende de  $\lambda$  como parámetro, y si  $\lambda$  es una función del tiempo, la función  $S_0[q, I; \lambda(t)]$  depende explícitamente del tiempo. En este caso la nueva hamiltoniana  $H'$  no es la misma que  $H$ , es decir, la energía  $E(I)$ , y, por las fórmulas generales (45.8) de las transformaciones canónicas, se tendrá

$$H' = E(I) + \partial S_0 / \partial t = E(I) + \Lambda \dot{\lambda},$$

siendo:

$$\Lambda \equiv (\partial S_0 / \partial \lambda)_I.$$

Las ecuaciones de Hamilton dan

$$\dot{I}_i = -\partial H' / \partial w_i = -(\partial \Lambda / \partial w_i) \dot{\lambda}. \quad (50.15)$$

Tomemos el valor medio de esta ecuación en un tiempo que sea grande respecto a los períodos fundamentales del sistema, pero pequeño comparado al que necesita el parámetro  $\lambda$  para variar apreciablemente. A causa de esta última condición no necesitamos tomar el valor medio de  $\dot{\lambda}$ , y tomando los valores medios de  $\partial \Lambda / \partial w_i$  se puede considerar como si el movimiento del sistema se efectuase a  $\lambda$  constante y tuviese, por lo tanto, las propiedades de los movimientos *quasi periódicos* indicados anteriormente.

La acción  $S_0$  no es una función uniforme de las coordenadas; cuando  $q_i$  vuelve a su valor inicial,  $S_0$  aumenta en un múltiplo de  $2\pi I_i$ . Pero la derivada  $\Lambda = \partial S_0 / \partial \lambda$ , es una función uniforme, pues la derivación se realiza a  $I_i$  constante, y no hay por tanto aumento de  $S_0$ . En consecuencia  $\Lambda$ , expresada como función de las variables angulares  $w_i$ , es periódica. Como el valor medio de las derivadas  $\partial \Lambda / \partial w_i$  de una tal función es cero, teniendo en cuenta (50.15), se tiene:

$$\partial I_i / \partial t = -\overline{(\partial \Lambda / \partial w_i)} \dot{\lambda} = 0,$$

que demuestra la invariancia adiabática de las  $I_i$ .

Para concluir podemos discutir brevemente las propiedades del movimiento finito de sistemas cerrados con  $s$  grados de libertad en el caso más general, cuando se supone que las variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi no son separables.

La propiedad fundamental de los sistemas con variables separables es que las integrales del movimiento  $I_i$ , cuyo número es igual al número de grados de libertad, son uniformes. Pero en el caso general de sistemas con variables no separables, las integrales del movimiento uniformes se limitan a aquellas cuya constancia expresa las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio y del tiempo, es decir, a las leyes de la conservación de la energía, del ímpetu y del momento angular.

La trayectoria física de un sistema atraviesa aquellas regiones del espacio físico definidas por los valores constantes dados de las integrales uniformes del movimiento. Para un sistema con variables separables y  $s$  integrales uniformes, estas condiciones definen una variedad de  $s$  dimensiones (hipersuperficie) en el espacio de las fases. Al cabo de un tiempo suficientemente largo, la trayectoria del sistema cubrirá esta hipersuperficie de manera tan densa como queramos.

En un sistema en el que las variables no son separables, el número de integrales uniformes es menor que  $s$ , y la trayectoria fásica cubrirá (total o parcialmente) regiones de más de  $s$  dimensiones en el espacio fásico.

Indiquemos que si la hamiltoniana de un sistema difiere solamente en pequeños términos de otra la cual admite la separación de las variables, las propiedades del movimiento serán próximas a aquellas de los movimientos *quasi periódicos*; las diferencias serán infinitésimos del orden mucho más elevado que la de los términos adicionales en la hamiltoniana.

### PROBLEMA

Calcular las variables acción para un movimiento elíptico en un campo  $U = -a/r$ .

*Solución:* En coordenadas polares  $r, \phi$  en el plano del movimiento se tiene:

$$\begin{aligned} I_\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = M, \\ I_r &= 2\frac{1}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\left[ 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2} \right]} dr \\ &= -M + \alpha \sqrt{(m/2|E|)}, \end{aligned}$$

de donde resulta que la energía expresada en función de las variables acción es:

$$E = -m\alpha^2/2(I_r + I_\phi)^2.$$

Depende solamente de la suma  $I_r + I_\phi$ , lo que significa que el movimiento es degenerado: las dos frecuencias fundamentales (con respecto a  $\phi$  y a  $r$ ) coinciden.

Los parámetros  $p$  y  $e$  de la órbita [véase (15.4)] se expresan en función de  $I_r$  e  $I_\phi$  por

$$p = \frac{I_\phi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left( \frac{I_\phi}{I_\phi + I_r} \right)^2.$$

Como consecuencia de la invariancia adiabática de  $I_r$  e  $I_\phi$ , la excentricidad de la órbita permanece constante cuando el coeficiente  $\alpha$  o la masa  $m$  varían lentamente, y sus dimensiones varían en proporción inversa a  $m$  y  $\alpha$ .

## INDICE ALFABETICO

- Absorción dispersiva, 96.  
Acción, 2.  
— abreviada, 170.  
—, derivada parcial con respecto al tiempo, 167.  
—, derivada total con respecto al tiempo, 168.  
Aditividad de la lagrangiana, 4, 16.  
— de la energía, 16.  
— del ímpetu, 18.  
— de las integrales del movimiento, 15.  
— del momento angular o cinético, 22.  
Amortiguamiento aperiódico, 92.  
Amplitud, 70.  
— compleja, 71.  
— de las oscilaciones amortiguadas, 91.  
— de las oscilaciones forzadas, 77, 78, 94.  
Analogías mecánicas, 26.  
— en un campo homogéneo, 26.  
— newtoniano, 28.  
— para pequeñas oscilaciones, 26.  
Ángulos de Euler, 132.  
  
Caída libre, 155, 156.  
Campo rápidamente oscilante, 112.  
— central, 24, 35.  
— uniforme, 11.  
  
Centro de masa, 20.  
Cicloide, 72, 73.  
Coeficiente de amortiguamiento, 91.  
Condición de «caída» de una partícula al centro, 39.  
Condiciones de equilibrio del sólido, 147.  
Coordenada cíclica, 162, 180.  
Coordenadas elípticas, 183.  
— generalizadas, 1.  
— normales, 81, 82.  
— parabólicas, 182.  
Cuerpo sólido, 115.  
— —, desplazamiento infinitesimal, 115.  
  
Choque de partículas de la misma masa, 56.  
— directo, 55.  
— elástico de dos partículas, 53.  
— — —, ángulo de separación máximo de la partícula móvil, 55, 56.  
— — —, energía máxima recibida por la partícula inicialmente en reposo, 55, 56.  
  
Decremento (coeficiente de amortiguamiento), 91.  
Desintegración de una partícula, 49.  
Deslizamiento, 148.  
  
Dispersión de partículas, 57.  
«Distancia de impacto», 58.  
Distribución de las partículas desintegradas según las direcciones, 51, 52, 53.  
— — — según las energías, 51, 52.  
  
Ecuación de Hamilton, 158, 169.  
— de Hamilton-Jacobi, 177.  
— de Lagrange, 3, 4.  
— — de las pequeñas oscilaciones de un sistema, 79, 80.  
— — — — en presencia de rozamiento, 93.  
— — en el caso de ligaduras no holónomas, 149.  
— — en un sistema no inercial, 153, 154, 155.  
— de la trayectoria en un campo central, 35.  
— del movimiento 2.  
— — de un cuerpo sólido, 129, 130.  
— — en un campo central, 35.  
Ecuaciones canónicas, 158, 159.  
Eje de rotación instantánea, 117.  
Ejes principales de inercia, 119.

- Energía, 16, 17.  
 — centrífuga, 37.  
 — cinética, 9.  
 — del movimiento de rotación de un cuerpo sólido, 118, 134.  
 — del movimiento de traslación de un cuerpo sólido, 118.  
 — de un cilindro, 124, 125.  
 — de un cono, 125, 126.  
 — de un cuerpo sólido, 117.  
 — de un elipsoide, 126, 127.  
 — de desintegración de una partícula, 49.  
 — interna de un sistema mecánico, 20.  
 — potencial, 9.  
 — centrífuga, 37, 155.  
 — «efectiva», 37.  
 — en un campo uniforme, 11.  
 Equilibrio estable, 69.  
 — de un péndulo, 114.  
 Espacio de las fases, 175.  
 Estado mecánico, 2, 4.  
 Excentricidad, 42.
- Fase, 70.
- Fórmula de Rutherford, 63.
- Frecuencia, 70.  
 — angular, 70.  
 — propia, 80.
- Frecuencias combinatorias, 103.
- Fuerza, 10.  
 — centrífuga, 154.  
 — de Coriolis, 154.  
 — de reacción, 147.  
 — de rozamiento, 91, 148.  
 — generalizada, 91 92.  
 — generalizada, 19.
- Función de Hamilton (véase Hamiltoniana).  
 — de Lagrange (véase Lagrangiana).  
 — de Routh, 161.  
 — de una peonza simétrica, 162.

- Función disipativa, 92.  
 — de las oscilaciones forzadas lineales, 95.  
 — energía potencial, 9, 18.  
 — de pequeñas oscilaciones, 79.  
 — de un campo newtoniano, 27.
- Grado de libertad, 1.
- Grados de libertad de un cuerpo sólido, 115.  
 — de traslación, 85, 86.  
 — oscilatorios, 85, 86.  
 — para una molécula lineal, 86.  
 — para una molécula plana, 86.  
 — rotatorios, 85.
- Hamiltoniana (función de Hamilton), 159.  
 — de un punto material, 160.  
 — — en un sistema de coordenadas que gira uniformemente, 160.
- Homogeneidad de la función energía potencial, 26.  
 — del espacio, 5, 17.  
 — del tiempo, 5, 16.
- Identidad de Jacobi, 164.
- Ímpetu, 17.  
 — generalizado, 19.
- Integral de las áreas, 36.  
 — del movimiento, 15.  
 — elíptica de primera especie, 31.
- Invariante adiabático, 185.  
 — de un oscilador lineal, 188.
- Isotropía del espacio, 5, 21.
- Lagrangiana (función de Lagrange), 2.  
 — de las pequeñas oscilaciones de un sistema, 79.  
 — — — en coordenadas normales, 82.  
 — de una partícula libre, 7.
- Lagrangiana de una partícula libre en coordenadas cartesianas, 8.  
 — — — en coordenadas cilíndricas, 8.  
 — — — en coordenadas esféricas, 9.  
 — de un cuerpo sólido, 118.  
 — de un sistema cerrado, 9, 10.  
 — de puntos no interac- tuantes, 8.  
 — — no cerrado, 11.
- Ley de Kepler, segunda, 36.  
 — — tercera, 27.
- de la igualdad de la acción y de la reacción, 18.  
 — de la inercia, 6.  
 — de transformación de la energía, 21, 155.  
 — del ímpetu, 19.  
 — del momento angular o cinético, 23.
- Ligaduras, 11, 148.  
 — holónomas, 148.  
 — no holónomas, 148.
- Línea nodal, 132.
- Masa de un punto material, 8.  
 — — —, imposibilidad de una masa negativa, 8.  
 — reducida, 34.
- Momento angular o cinético, 21.  
 — — componentes, 24, 25.  
 — — de rotación, 21.  
 — — «intrínseco», 23.  
 — de inercia, 119.  
 — de una fuerza, 131.
- Momentos principales de inercia, 119.
- Movimiento completamente degenerado, 191.  
 — degenerado, 46, 191.  
 — de rotación de una molécula, 86.  
 — de traslación de una molécula, 86.  
 — en un campo central, 35.  
 — rápidamente oscilante, 112.

Movimiento finito, 30.  
 —, condición de cierre de la trayectoria, 38.  
 —infinito, 30.  
 —libre de una peonza, 128.  
 —lineal, 29.  
 —, lagrangiana, 29.  
 —quasi periódico, 191.

Nutación, 136.

Óptica geométrica, 168.  
 Oscilación anarmónica o no lineal, 121.  
 — con un grado de libertad, 104.  
 —, dominio de inestabilidad, 126, 127.  
 Oscilaciones a lo largo de una cicloide en el campo de la gravedad, 72.  
 —amortiguadas, 90.  
 —, amplitud, 91.  
 —, energía, 92.  
 —, frecuencia, 91.  
 —de una molécula triatómica lineal asimétrica, 89.  
 —simétrica, 87.  
 —forzadas, 73.  
 —con rozamiento, 94.  
 —, energía, 75, 76.  
 —lineales libres, 69.  
 —normales, 81.  
 Oscilador, 70.  
 —, energía, 70.  
 —espacial, 85.

Par de fuerzas, 131.

Parámetro de una órbita, 42.  
 —de un sistema mecánico, 97, 159.  
 Paréntesis de Poisson, 162.  
 —formados por las componentes del ímpetu y del momento angular, 166.  
 —, propiedades, 163, 164, 165.  
 Péndulo, 12, 13.  
 —de Foucault, 156.  
 —doble coplanario, 12.  
 —esférico, 39.

Péndulo físico, 123.  
 —plano, 13, 14, 41.  
 ——, lagrangiana, 12.  
 ——, pequeñas oscilaciones, 84.  
 —rotación de la Tierra, 156.  
 Peonza asimétrica, 119, 140.  
 —esférica, 119.  
 —«rápida», 137.  
 —simétrica, 119, 134.  
 —, movimiento libre, 128.  
 Pequeñas oscilaciones, 69.

Perihelio, 42.  
 —, desplazamiento, 47.  
 Período de las oscilaciones, 26, 30.  
 —, determinación de la energía potencial, 32, 33.  
 —de un péndulo plano, 30, 31.  
 —relación con la energía, 31.

Pozó de potencial, 30.  
 Precesión regular, 128.  
 Principio de d'Alembert, 150.  
 —de Hamilton, 2.  
 —de la mínima acción, 2.  
 —de la relatividad de Galileo, 5.  
 —de Maupertuis, 170.  
 —, ecuación de la trayectoria, 171.  
 —para una partícula libre, 171.

Problema de Kepler, 41.  
 —, trayectoria del movimiento, 42.

Problemas de los dos cuerpos, 34.  
 ——, lagrangiana, 34.

Punto de retorno, 30.  
 —material, 1.

Repartición isótropa, 51.  
 Resonancia, 74.  
 —con débil amortiguamiento, 95.  
 —de oscilaciones no lineales, 105.  
 —paramétrica, 98.

Resonancia paramétrica, condiciones, 100, 101, 102.

Rodadura, 148.  
 —de un cilindro, 149.  
 —de una esfera, 149.  
 Rotación estable, 136, 142.  
 Rotor, 120.  
 —, rotación libre, 128.

Sección eficaz de caída de una partícula en el centro del campo, 61.

— de una partícula por una esfera, 62.  
 — de dispersión, 62, 63.  
 ——, campo de dispersión, 62, 63.  
 ——en función de la energía, 60.  
 ——en un pozo de potencial esférico, 65, 66.  
 —— para pequeños ángulos, 66, 67.

— por una bola perfectamente rígida, 59.  
 Semianchura de la curva de resonancia, 96.  
 Sistema conservativo, 16.  
 —cerrado, 9.  
 —del centro de masa, 50.  
 —del laboratorio, 50.  
 —de referencia inercial, 5.  
 Superficie perfectamente lisa, 148.  
 —rugosa, 148.

Tensor de inercia, 119.

Teorema de conservación del ímpetu, 17, 18.  
 — del momento angular, 21, 22.  
 ——en un campo central, 24.  
 ————de simetría axial, 24.  
 ————uniforme, 24.  
 —de Liouville, 117.  
 —del virial, 27.  
 —de Poisson, 165.

Teorema de Poisson para la interacción newtoniana, 28.  
para pequeñas oscilaciones, 28.  
Transformación canónica, 172.  
—, función generatriz, 173.  
—de Galileo, 7.  
—de Legendre, 158.

Transformación puntual, 172.  
Trayectoria del movimiento, 42.  
—en el espacio de las fases, 175.  
  
Variable angular, 188.  
—de acción, 188.  
—para un movimiento elíptico en un campo newtoniano, 194.

Variables canónicas, 188.  
—dinámicas, 159.  
Variación de una función, 3.  
—de una integral, 3.  
Velocidad angular, 37.  
—de rotación de un cuerpo sólido, 116.  
—de un punto, 1.  
—generalizada, 1.  
—radial, 37.  
Virial, 27.

## INDICE GENERAL

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO I. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.</b>	
1. Coordenadas generalizadas . . . . .	1
2. El principio de la mínima acción . . . . .	2
3. El principio de relatividad de Galileo . . . . .	5
4. Lagrangiana de una partícula libre. . . . .	7
5. Lagrangiana de un sistema de partículas . . . . .	9
<b>CAPÍTULO II. TEOREMAS DE CONSERVACIÓN.</b>	
6. Energía . . . . .	15
7. Ímpetu . . . . .	17
8. Centro de masa. . . . .	19
9. Momento angular o cinético . . . . .	21
10. Analogías mecánicas. . . . .	26
<b>CAPÍTULO III. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO</b>	
11. Movimiento lineal. . . . .	29
12. Determinación de la energía potencial en función del período de las oscilaciones . . . . .	32
13. Masa reducida . . . . .	34
14. Movimiento en un campo central . . . . .	35
15. El problema de Kepler . . . . .	41
<b>CAPÍTULO IV. CHOQUE DE PARTÍCULAS.</b>	
16. Desintegración de partículas . . . . .	49
17. Choques elásticos . . . . .	53
18. Dispersión de partículas . . . . .	57
19. Fórmula de Rutherford . . . . .	63
20. Dispersión bajo pequeños ángulos. . . . .	66
<b>CAPÍTULO V. PEQUEÑAS OSCILACIONES.</b>	
21. Oscilaciones lineales libres . . . . .	69
22. Oscilaciones forzadas . . . . .	73
23. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad . . . . .	78
24. Vibraciones de las moléculas . . . . .	85
25. Oscilaciones amortiguadas . . . . .	90

	Pág.
26. Oscilaciones forzadas con rozamiento . . . . .	94
27. Resonancia paramétrica . . . . .	97
28. Oscilaciones anarmónicas. . . . .	102
29. Resonancia en oscilaciones no lineales . . . . .	105
30. Movimiento en un campo rápidamente oscilante. . . . .	112
 <b>CAPÍTULO VI. MOVIMIENTO DEL SÓLIDO.</b>	
31. Velocidad angular. . . . .	115
32. Tensor de inercia . . . . .	117
33. Momento cinético del sólido rígido . . . . .	127
34. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido . . . . .	129
35. Ángulos de Euler . . . . .	132
36. Ecuaciones de Euler. . . . .	138
37. La peonza asimétrica . . . . .	140
38. Cuerpos rígidos en contacto . . . . .	147
39. Movimiento en un sistema de referencia no inercial . . . . .	152
 <b>CAPÍTULO VII. ECUACIONES CANÓNICAS.</b>	
40. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	158
41. Función de Routh . . . . .	161
42. Paréntesis de Poisson . . . . .	162
43. La acción como una función de las coordenadas . . . . .	167
44. Principio de Maupertuis . . . . .	169
45. Transformaciones canónicas . . . . .	172
46. Teorema de Liouville . . . . .	175
47. Ecuación de Hamilton-Jacobi. . . . .	177
48. Separación de variables . . . . .	179
49. Invariantes adiabáticas. . . . .	185
50. Propiedades generales del movimiento en el espacio . . . . .	189
<b>ÍNDICE ALFABÉTICO . . . . .</b>	<b>195</b>