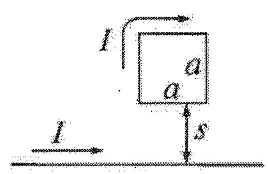
Prueba Recuperativa Módulo II
Electromagnetismo intermedio
Licenciatura en Física - 2023[1]

Nombre completo : ....

Problema I : Fuerza entre corrientes

Se tiene una espira cuadrada de arista a y de corriente I frente a una corriente filiforme recta e infinita de magnitud I. Las corrientes son coplanares y sus sentidos están indicados en la figura, por otro lado la arista más cercana a la corriente filiforme está a una distancia s:



1. (20%) Halle la fuerza total que realiza la corriente filiforme sobre la espira de corriente cuadrada. El campo de una corriente filiforme ya lo conoce, no es necesario deducirlo. Indique la fuerza que experimenta cada arista. Hint: $d\vec{F}_{\alpha\beta} = i_\alpha d\vec{\ell}_\alpha \times \vec{B}_\beta$.

2. (20%) Evalúe la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ donde $\vec{B}$ es el campo producido por la corriente filiforme y la trayectoria a considerar es la espira cuadrada. Justifique su resultado.

3. (20%) Evalúe la integral $\oint \vec{B} \times d\vec{\ell}$ (en sentido reloj) donde $\vec{B}$ es el campo producido por la corriente filiforme y la trayectoria a considerar es la espira cuadrada.

---

[1] Hora de INICIO: 12:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 14:00 hrs.

Problema II : Potencial vectorial magnético

1. (20%) Deduzca la ley de Biot-Savart a partir de la expresión dada para el potencial vectorial magnético $\vec{A}$ producido por una corriente filiforme I:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

2. (30%) Utilizando la expresión anterior evalúe el potencial vectorial magnético en el centro de una anillo de radio R y con un sistema de referencia ubicado en cualquier lugar del universo.

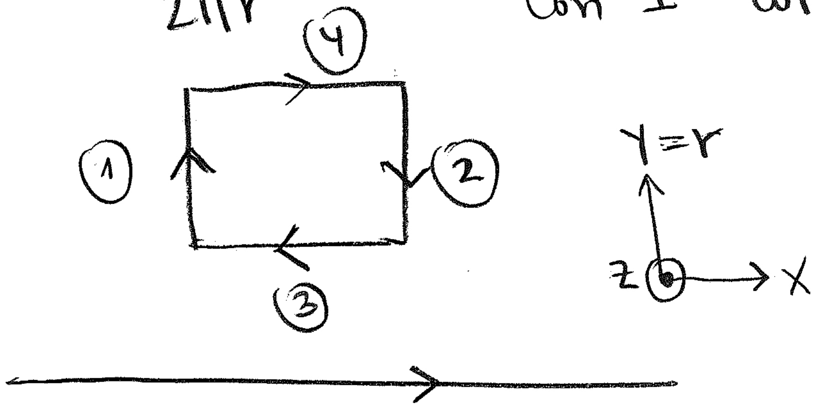
3. (25%) Evalúe la divergencia de la representación integral de $\vec{A}(\vec{r})$ dada anteriormente.

PROBL. I)

$$\vec{F} = i\int d\vec{l} \times \vec{B} \qquad i = \text{corriente de la espira} = I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k} \text{ (hacia afuera de la página)}$$

con I = corriente filiforme



para 1

$$d\vec{l} = dy\,\hat{j}$$

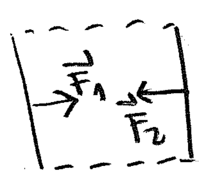
$$\therefore \vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\int_s^{s+a}\frac{dy}{y}(\hat{j}\times\hat{k}) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\hat{i}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)$$

para 2

$$d\vec{l} = -dy\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}(-\hat{i})\int_s^{s+a}\frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\hat{i}\ln\left(\frac{s+a}{a}\right)$$

Obs.



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

I'.2

para 3

$$d\vec{l} = (-\hat{\imath})\,dx$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\int_0^a \frac{dx}{s}\underbrace{(\hat{\imath}\times\hat{k})}_{-\hat{\jmath}}$$

$$\vec{F}_3 = +\frac{\mu_0 i\, a}{2\pi s}\hat{\jmath}$$

Para 4

$$d\vec{l} = \hat{\imath}\,dx$$

$$\vec{F}_4 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\int_0^a \frac{dx}{s+a}\overbrace{(\hat{\imath}\times\hat{k})}^{-\hat{\jmath}}$$

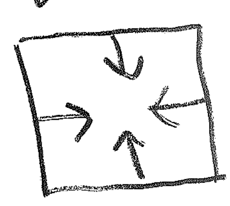
$$= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\frac{a}{s+a}\hat{\jmath}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{TOTAL} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)\hat{\jmath}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\left(\frac{s+a-s}{s(s+a)}\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_{TOTAL} = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi(s+a)s}\hat{\jmath}$$

fuerzas sobre la espira



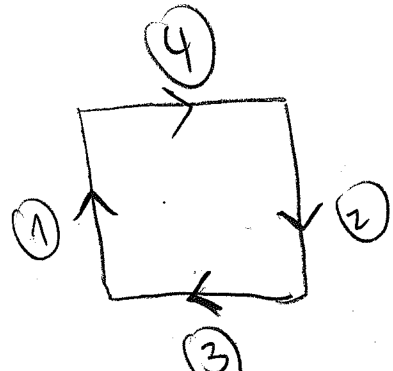
I.3

2) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

Razón 1 → $\vec{B} \perp$ a la trayectoria punto a punto

Razón 2 → De la ley de Ampere no hay corriente encerrada (I de cable filiforme no esta encerrada por esta trayectoria

3)



para 1

$$d\vec{l} = dy\,\hat{j}$$

$$\int_1 \vec{B}\times d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\hat{k}\times\hat{j})\int_s^{s+a}\frac{dy}{y}$$

$$= -\hat{i}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{s+a}{a}\right)$$

El resultado es (la integración es similar a la de item (1))

I.4

$\therefore$

$$\oint \vec{B} \times d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi (s+a) s}\,\hat{y}$$

PROBL. II)

1) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

luego $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right)$$

Por otro lado se tiene que $$\nabla \times (f\vec{g}) = \nabla f \times \vec{g} + f \nabla \times \vec{g}$$

Si $\vec{g} = d\vec{l}$

$$f = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) = \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right] \times d\vec{l}$$

Entonces: $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right] \times d\vec{l}$$

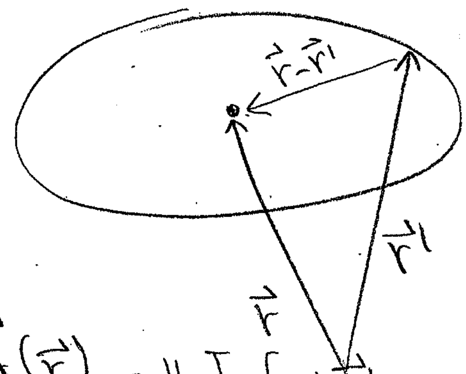
y $$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) = - \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\therefore \quad \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad // \quad \text{QED.}$$

2)



de la figura
$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = R.$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l}\,'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\underbrace{\oint d\vec{l}}_{\vec{0}} = \vec{0} \; //$$

integral sobre
el anillo completo.

3) $$\nabla_r \cdot \vec{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\,\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$$

$$\therefore \quad \nabla_r \cdot \left(\frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cancelto{0}{\nabla_r \cdot d\vec{l}'} + d\vec{l} \cdot \nabla_r \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$= -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\therefore$$

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad //$$