Propiedades de los determinantes

Nota previa: Sólo se definen determinantes de matrices cuadradas.
Las matrices rectangulares no tienen definido un determinante.

Definición:
Para una matriz cuadrada $A = \left(a_{ij}\right)$ de dimensión $n \times n$, se define su **determinante** como:

$$\det A = \sum_{1}^{n!} (-1)^i \left(a_{1,p_1} . a_{2,p_2} . a_{3,p_3} \dots a_{n,p_n} \right)$$

donde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ son todas las permutaciones posibles de la n-úpla $1,2,3, \dots, n$ y la suma se realiza sobre el total de permutaciones de n elementos que pueden formarse siendo i el número de inversiones de cada permutación.

Propiedades:

1. Una **matriz cuadrada** con una **fila** o una **columna** en la que todos los elementos son cero tiene determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. El determinante de una matriz con dos filas o dos columnas iguales, es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

3. Al multiplicar todos los elementos de una fila o una columna de una matriz por un número, el determinante de la matriz resultante es igual al de la original multiplicado por ese mismo número.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

4. (consecuencia de las propiedades 2 y 3) Cuando dos filas o dos columnas de una matriz son proporcionales entre sí (una se puede obtener multiplicando la otra por un factor), su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

(primero aplicamos la **propiedad 3**, luego la **propiedad 2**)

5. Al intercambiar dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = +37 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -37$$

6. La suma de los determinantes de dos matrices que sólo difieren en una fila o columna es igual al determinante de la matriz que se obtiene copiando todos los elementos de las matrices originales y reemplazando esa fila o columna por la suma de los elementos respectivos.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} & \boldsymbol{b_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{c_{21}} & \boldsymbol{c_{22}} & \boldsymbol{c_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{b_{21}+c_{21}} & \boldsymbol{b_{22}+c_{22}} & \boldsymbol{b_{23}+c_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}$$

7. Cuando a una fila (o columna) de una matriz se le suma o resta una **combinación lineal** de otras filas (o columnas), el valor de su determinante no cambia (pero la fila sustituida sólo puede ser multiplicada por 1) (*esta propiedad permite escalerizar matrices sin que cambie su determinante*)

8. El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su **traspuesta**:

$$\det A = \det A^t$$

9. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz:

$$\det (A \,.\, B) = \det A \times \det B.$$

10. Si una matriz cuadrada es regular (es decir si $\det A \neq 0$), tiene inversa. El determinante de la matriz inversa A^{-1} es igual al inverso del determinante de la matriz.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

11. **Menores complementarios y adjuntos (o cofactores):**

Desarrollemos el determinante de una matriz 3×3:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}} -$$

$$-(\boldsymbol{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}})$$

Factorizemos los elementos de la primera fila en los términos donde aparecen:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33})} +$$

$$+ \boldsymbol{a_{13}} \cdot (\boldsymbol{a_{21}} \cdot \boldsymbol{a_{32}} - \boldsymbol{a_{22}} \cdot \boldsymbol{a_{31}})$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = + \boldsymbol{a_{11}} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{12}} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{13}} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{vmatrix}$$

Exploremos ahora un poco más como se construyen los adjuntos.

Las matrices de menor orden que aparecen se llaman **menores complementarios** de los elementos respectivos.

$$\boldsymbol{M_{11}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{11}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{12}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{12}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{13}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{13}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{pmatrix}$$

Observen además, en los términos del desarrollo, la alternancia $+, -, +, \ldots$ de los signos como si la matriz fuera un tablero de ajedrez. Si la suma del índice de fila "i" más el índice de columna "j" del elemento es par se asigna signo $+$. Si es impar signo $-$.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Los determinantes de esas matrices si se tiene en cuenta el signo mencionado se llaman **cofactores o adjuntos** del elemento respectivo. Es decir,

$$\boldsymbol{A_{ij}} = (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{i+j}} \cdot \mathbf{det}\, \boldsymbol{M_{ij}}$$

Advertencia: El concepto de adjunto (o cofactor) suele confundirse con el de menor complementario. Son ideas que se parecen pero son muy distintas: los menores complementarios son matrices; los cofactores son, por lo general, números.

Conclusión: Un determinante puede desarrollarse por los **cofactores** (también se dice **adjuntos**) de los elementos de una fila (o columna) de la siguiente manera. Por ejemplo, eligiendo la fila 1 de la siguiente matriz.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = + \boldsymbol{a_{11}} \times \boldsymbol{A_{11}} + \boldsymbol{a_{12}} \times \boldsymbol{A_{12}} + \boldsymbol{a_{13}} \times \boldsymbol{A_{13}}$$

donde $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ son los elementos de la primer fila y A_{11}, A_{12}, A_{13} sus adjuntos.

Finalmente, escribimos (si estamos desarrollando por la primera fila):

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{1j}} \cdot \boldsymbol{A_{1j}}$$

Y reemplazando la expresión obtenida para los adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det M_{1j}$$

Propiedades consecuencia:

12. La suma de los productos de los elementos de una fila o columna de una matriz por los **adjuntos de otra fila o columna** es siempre cero. ¿Porqué?

13. El determinante de una **matriz triangular** o una **matriz diagonal** es igual al **producto de los elementos de su diagonal principal.**

Ejemplo 1: En la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}$, el elemento $a_{12} = 5$

El **menor complementario** de ese elemento es $M_{12} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ (se quita la fila y la columna de ese 5)

El **cofactor o adjunto** es $A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = -82$

Si desarrollamos el siguiente determinante por la primer fila nos queda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 8 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

Finalmente:
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 8 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 25 - 5 \cdot 82 + 0 \cdot 34$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 8 & 7 & 11 \end{vmatrix} = -360$$

Se comprueba por la regla de Sarrus que el resultado está bien.

Ejemplo 2: Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

Volvemos a desarrollar por la primera columna de la matriz 3×3:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{7} \cdot (\mathbf{-1}) = \mathbf{-14}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{F'_1} &= \boldsymbol{F_1} \\ \boldsymbol{F'_2} &= \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} \\ \boldsymbol{F'_3} &= \boldsymbol{2F_1} + \boldsymbol{F_3} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{F'_1} &= \boldsymbol{F_1} \\ \boldsymbol{F'_2} &= \boldsymbol{F_2} \\ \boldsymbol{F'_3} &= -\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{3}} \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{13}$$

Nota: Ahora hay que tener más cuidado que cuando escalerizábamos las matrices de sistema, ya que, en las combinaciones lineales, la fila que va a ser sustituída no puede ser multiplicada por otro coeficiente que no sea 1 **(propiedad 7)**. Se pueden sumar combinaciones lineales de las otras filas pero sin multiplicar la que va a ser sustituída, de lo contrario el determinante quedará mutltiplicado también por ese número **(propiedad 3)**.

Ejercicios:

1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Halla el valor de k para que $\det A = 0$. ¿Se podría haber previsto ese resultado sin cálculo alguno?

2. Calcula el siguiente determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}$$

Resp: $\boldsymbol{(x-1)^3(x^2+3x+3)}$

3. (a) Calcula el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Podrías haber previsto dicho resultado mediante propiedades?

4. (a) Mediante ejemplos con matrices 2 x 2, comprueba que: $\det(A.B) = \det A.\det B$
(b) Comprueba que siendo I la matriz identidad 3 x 3, $\det I = 1$.

5. (a) Demuestra mediante desarrollos por adjuntos que en el caso de una matriz triangular,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

será:

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{44}$$

(b) Justifica porqué entonces, la condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es $\det A \neq 0$.

6. Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) comprueba que es invertible.

(b) Halla la matriz

$$adj\ A = (A_{ij})^t$$

(**matriz adjunta de *A***, la matriz traspuesta de aquella cuyas elementos son los adjuntos (o cofactores) de los elementos de A).

(c) Comprueba que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.(adj\ A)$$

(d) ¿Coincide esto con lo que encontramos para matrices 2 x 2 en clase?

7. Muestra que el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 2t = 2 \\ -y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 9z + 6t = -3 \\ 3x + 2y + 4z + 8t = -1 \end{cases}$$

es determinado, y encuentra x por el método de Cramer.

Sol: $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{160} \neq \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{10}}$