Notación exponencial de números complejos

Potencias de i (de la clase pasada)

Hemos definido la unidad imaginaria como,

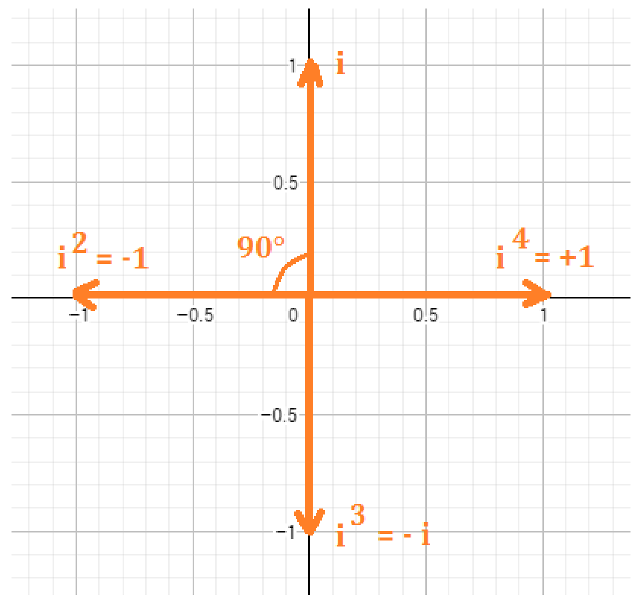
$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$$

$$\boldsymbol{i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1}$$

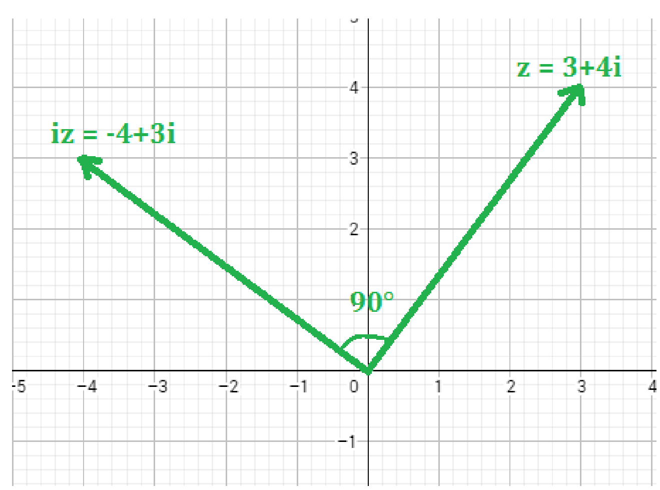
$$\boldsymbol{i^5 = i^4 \cdot i = i}$$



Por tanto, tenemos un ciclo de cuatro pasos:

$\boldsymbol{i^1 = i}$	$\boldsymbol{i^2 = -1}$	$\boldsymbol{i^3 = -i}$	$\boldsymbol{i^4 = 1}$
$\boldsymbol{i^5 = i}$	$\boldsymbol{i^6 = -1}$	$\boldsymbol{i^7 = -i}$	$\boldsymbol{i^8 = 1}$
$\boldsymbol{i^9 = i}$	$\boldsymbol{i^{10} = -1}$	$\boldsymbol{i^{11} = -i}$	$\boldsymbol{i^{12} = 1}$
...	...	...	...

Cada vez que multiplicamos por i, lo que hacemos es girar el radio-vector del número complejo 90° alrededor del origen en sentido antihorario. Esa regla se cumple para cualquier número complejo.



Ejemplo:

$$\boldsymbol{z = 3 + 4i}$$

Multiplicamos por i,

$$\boldsymbol{iz = i(3 + 4i)}$$

$$\boldsymbol{iz = -4 + 3i}$$

Propiedad: Multiplicar cualquier número complejo z por i es equivalente a girar el radio vector de z, 90° en sentido antihorario con centro en el origen.

Un poco de historia (este párrafo no es parte del curso, lo lee quien tenga curiosidad)

La clase pasada, hemos visto que cualquier número complejo z puede ser escrito en notación polar así:

$$\boldsymbol{z = \rho(cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha)}$$

Como en algún momento verán en cursos más avanzados, en ciertas condiciones que no investigaremos aquí, cualquier función puede ser escrita como sumas infinitas de potencias, esto es, ser desarrollada mediante polinomios. Oportunamente, verán eso en sus cursos. No lo desarrollamos aquí.

Euler, matemático suizo del siglo XIX, observó lo siguiente en esos desarrollos …

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$\cos x = 1 + - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Euler observó lo siguiente. Si efectuaba ese desarrollo para la siguiente función,

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{i^2\varphi^2}{2} + \frac{i^3\varphi^3}{6} + \frac{i^4\varphi^4}{24} + \frac{i^5\varphi^5}{120} + \cdots$$

Y recordando los resultados para las potencias de i obtuvo …

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{i\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^4}{24} + \frac{i\varphi^5}{120} + \cdots$$

Observen que ese desarrollo tiene términos reales e imaginarios alternados. Separándolos, Euler obtuvo …

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} + \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + \cdots\right)$$

Euler, una de las mentes más brillantes en el campo de las matemáticas de su época, reconoció inmediatamente lo que le había quedado …

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Notación exponencial de un número complejo

Como comentamos en el párrafo informativo anterior,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \text{sen}\,\varphi$$

Recordando que; $z = \rho(cos\,\varphi + i \cdot sen\,\varphi)$

escribimos, $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$

que a partir de este momento llamaremos **notación exponencial de un número complejo.**

Ejemplo de aplicación:

Algunas operaciones que antes resultaban difíciles, ahora las podemos entender con mayor naturalidad. Por ejemplo, multiplique los dos números complejos siguientes y exprese el resultado en notación binomial.

$$z_1 = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{16}} \qquad z_2 = 3 \cdot e^{\frac{3i\pi}{16}}$$

Será:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{16}} \cdot 3 \cdot e^{\frac{3i\pi}{16}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot e^{\frac{i\pi}{16}} \cdot e^{\frac{3i\pi}{16}}$$

Recordando que pasa multiplicar potencias de igual base, se deben sumar sus exponentes …

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot e^{\frac{4i\pi}{16}}$$

Finalmente, simplificando …

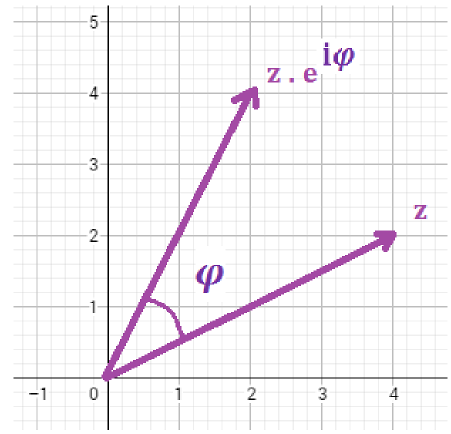
$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Volviendo ahora a la notación polar …

$$z_1 \cdot z_2 = 6\,(cos\,45° + i \cdot sen\,45°)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$$

El operador $e^{i\varphi}$



Propiedad: Investigando un poco las operaciones realizadas encontramos que:
Multiplicar un número complejo z por el operador $e^{i\varphi}$ es equivalente a girar el radio-vector de z un ángulo φ alrededor del origen y en sentido antihorario.

Notación exponencial abreviada

Hemos visto cómo escribir números complejos en tres notaciones posibles: binomial, polar y exponencial. Las dos últimas son absolutamente equivalentes.

$$\rho \cdot e^{i\varphi} = \rho(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)$$

Por un argumento práctico y para simplificar, en lugar de escribir

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

o

$$z = \rho(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)$$

escribiremos sencillamente

$$\boldsymbol{z = \rho_{\varphi}}$$

Lo cual requerirá algo de práctica para acostumbrase a ello.

Ejemplo:

$$z = 2_{60°}$$

$$z = 2(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$$

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z \approx 1 + \sqrt{2}\, i$$

Fórmula de Euler

Calculemos a qué es igual $e^{i\pi}$

Sabemos que … $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \text{sen}\,\varphi$

Reemplazando … $e^{i\pi} = \cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi$

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Esa es la **fórmula de Euler** que relaciona a los que podemos considerar los cinco números más importantes de la matemática, una foto de los Beatles y los Rolling Stones juntos.

Potencia en notación exponencial

Hemos visto en una clase anterior como calcular la potencia de un número complejo. Así, por ejemplo …

$$(z_1)^n = \rho_1{}^n[\cos{(n\varphi_1)} + i \cdot \text{sen}\,(n\varphi_1)]$$

Ejemplo:

Calcular z^4 siendo, $z = 2(\cos 60° + i\ \text{sen}\ 60°)$

Solución:

Será $z^4 = 2^4(\cos 240° + i\ \text{sen}\ 240°)$

$$z^4 = 16(\cos 240° + i\ \text{sen}\ 240°)$$

O simplemente, utilizando nuestra nueva notación …

Si $z = 2_{60°} \quad \Rightarrow \quad z^4 = 16_{240°}$

Raíces de un número complejo

Veamos ahora como efectuar las raíces de un número complejo. Supongamos justamente que tenemos el número complejo

$$\boldsymbol{w = 8_{60°}}$$

Y queremos encontrar las raíces cúbicas de ese número. Es decir queremos calcular

$$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{8(\cos 60° + i\ \mathrm{sen}\ 60°)}$$

Hacemos la raíz cúbica de 8 y dividimos 60° entre 3. A ese ángulo le sumamos tercios de 360°. Las soluciones serán:

$$\boldsymbol{z_1 = 2_{20°}} \qquad \boldsymbol{z_2 = 2_{140°}} \qquad \boldsymbol{z_3 = 2_{260°}}$$

Otro ejemplo:
Calcular $\sqrt[4]{-64}$

Solución:

$$z = \sqrt[4]{64_{180°}}$$

Habrá cuatro raíces que son:

$$\boldsymbol{z_1 = 2\sqrt{2}_{45°}}$$

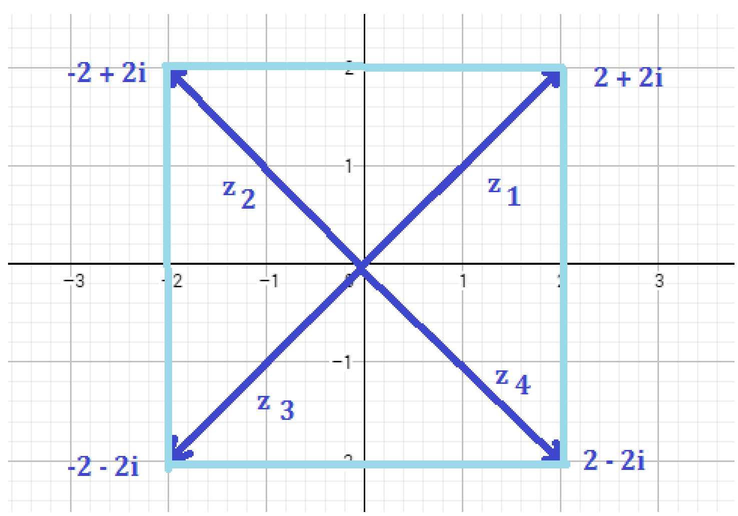
$$\boldsymbol{= 2\sqrt{2}(cos\ 45° + i\ sen\ 45°)}$$

$$\boldsymbol{= 2 + 2i}$$

$$\boldsymbol{z_2 = 2\sqrt{2}_{135°} = -2 + 2i}$$

$$\boldsymbol{z_3 = 2\sqrt{2}_{225°} = -2 - 2i}$$

$$\boldsymbol{z_4 = 2\sqrt{2}_{315°} = 2 - 2i}$$



Ejemplo 3:

Calcular z si se sabe que: $z^3 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

Solución:

El módulo de z, |z| (que también se escribe ||z||) es:

$$||z^3|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = 4\sqrt{2} \qquad b = -4\sqrt{2}$$

$$\left||z^3|\right| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2}$$

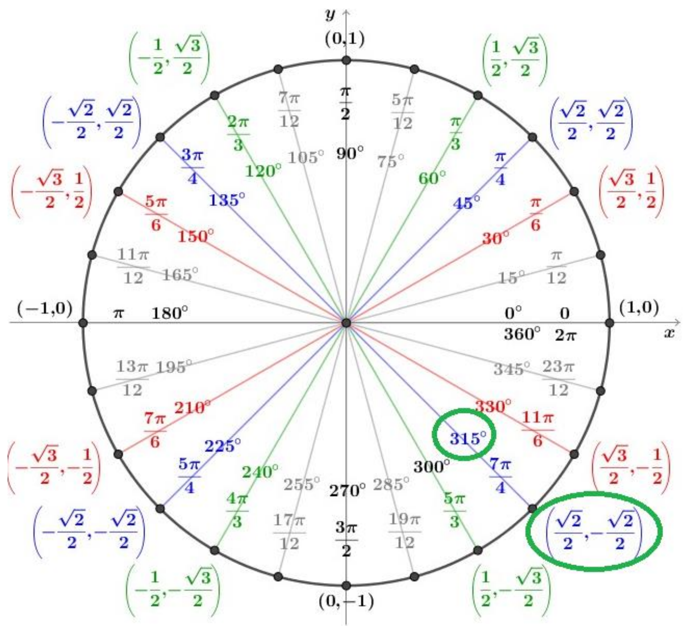
$$\rho = \left||z^3|\right| = \sqrt{32 + 32} = 8$$

$$z^3 = 8(\cos\alpha + i\ sen\ \alpha) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

de donde:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El argumento lo buscamos ocupando la circunferencia trigonométrica y obtenemos:



$$\alpha = 315°$$

En notación exponencial: $z^3 = 8 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Nota: en notación exponencial el argumento debe ponerse siempre en radianes, nunca en grados.

En notación polar: $z^3 = 8(\cos 315° + i \text{ sen } 315°)$

O abreviando:

$$z^3 = 8_{315°}$$

Por tanto, las raíces serán (hacemos raíz cúbica del módulo y dividimos 315 entre 3 (porque es raíz cúbica):

$$\boldsymbol{z_1 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 105° + i \text{ sen } 105°)}$$

$$\boldsymbol{z_1 = 2\,(\cos 105° + i \text{ sen } 105°)}$$

$$z_1 \approx 2(-0,26 + 0,97i)$$

$$z_1 \approx -0,52 + 1,94i$$

Sumamos la tercera parte de 360°:

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 225° + i \text{ sen } 225°)$$

$$z_2 \approx 2\,(-0,71 - 0,71i)$$

$$z_2 \approx -1,42 - 1,42i$$

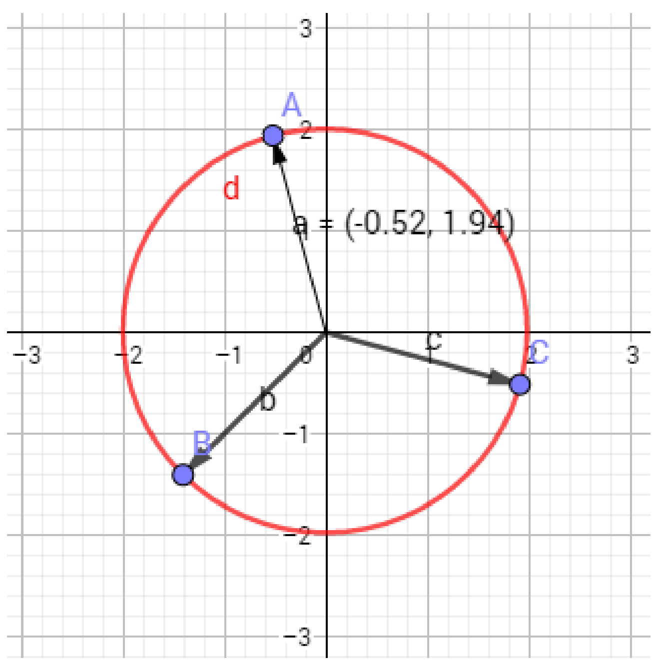
Sumamos la tercera parte de 360°:

$$z_3 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 345° + i \text{ sen } 345°)$$

$$z_3 \approx 2(0,97 - 0,26i)$$

$$z_3 \approx 1,94 - 0,52i$$

Finalmente, graficamos y vemos que forman un polígono regular, en este caso un triángulo equilátero porque, al ser raíces cúbicas, son tres soluciones:



Ejercicios

1. Demuestre las siguientes igualdades:

(a) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ (b) $sen\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (c) $e^{i\pi} + 1 = 0$

2. Exprese z en la forma *a* + *bi*:

(a) $z = \sqrt{-7 + 24i}$ (b) $z = \sqrt{-11 - 60i}$

Respuestas: (a) {3 + 4i, -3 – 4i}
(b) {5 - 6i, -5 + 6i}

3. Resuelva: (a) $\sqrt[3]{-1}$ (b) $\sqrt[4]{i}$ (c) $\sqrt[5]{1}$

Respuestas: (a) $\{1_{60°}; 1_{180°}; 1_{300°}\}$
(b) $\{1_{22,5°}; 1_{112,5°}; 1_{202,5°}; 1_{292,5°}\}$
(c) $\{1_{0°}; 1_{72°}; 1_{144°}; 1_{216°}; 1_{288°}\}$

4. Calcular: $z = \sqrt[3]{1 + i}$

Respuesta: $\{\sqrt[6]{2}_{\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}_{\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}_{\frac{17\pi}{12}}\}$

5. Calcular *z* sabiendo que: $z^4 = 2 + 2i$

Respuesta: $\{\sqrt[8]{8}_{11,25°}, \sqrt[8]{8}_{101,25°}, \sqrt[8]{8}_{191,25°}, \sqrt[8]{8}_{281,25°}\}$