Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

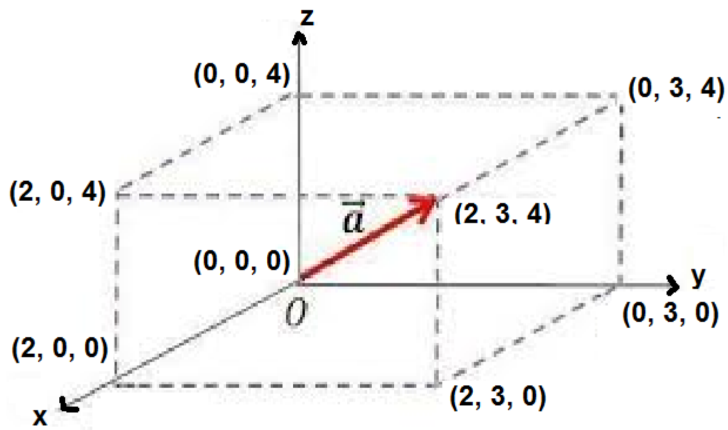
CLASE No. **10**

Geometría vectorial: el espacio R^3

Puntos y vectores en el espacio

Ahora trabajaremos en el espacio $\mathbf{R^3}$**,** por tanto tanto puntos como vectores tendrán tres coordenadas (o componentes)

En la figura vemos al punto de coordenadas (2, 3, 4) y sus proyecciones sobre los ejes como sobre los planos XY, YZ y XZ.



El el representante canónico del vector $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 2,3,4 \rangle$ tiene origen en el punto (0,0,0) y extremo en el punto (2,3,4).

Supongan que el dibujo de la figura representa la esquina de la sala de clases, más exactamente representa un ángulo triedro, esto es el sector delimitado por tres planos.

Observen los cuatros puntos sobre el plano vertical del fondo, todos tienen $x = 0$, es el plano YZ (los ejes Y y Z pertencen a ese plano).

Observen los cuatros puntos sobre el plano vertical de la izquierda, todos tienen $y = 0$, es el plano XZ (los ejes X y Z pertencen a ese plano).

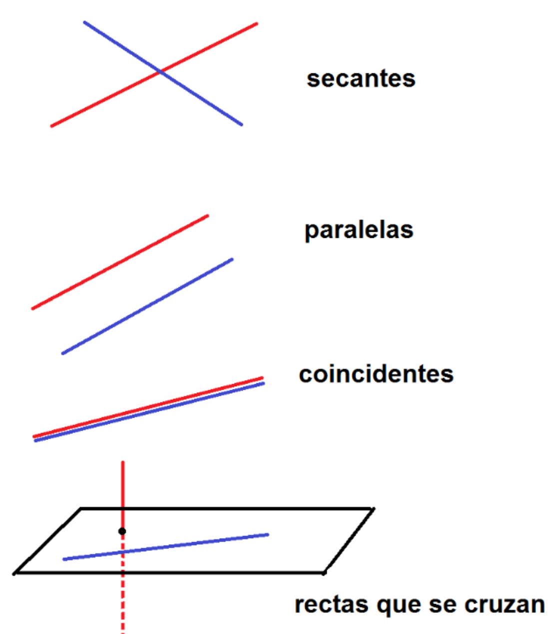
Observen los cuatros puntos sobre el plano horizontal del piso, todos tienen $z = 0$, es el plano XY (los ejes X y Y pertencen a ese plano).

Posiciones relativas de rectas, de planos, y de rectas y planos en el espacio

Recta con recta

Sabemos si tenemos dos rectas en el plano, éstas pueden:

1) intersectarse en un punto. Son **rectas secantes.**
2) no intersectarse en ningún punto. Son **rectas paralelas.**
3) intersectarse en infinitos puntos. Son **rectas paralelas.**



4) En el espacio, se agrega una posibilidad más, rectas que sin ser paralelas, tampoco se intersectan. Son **rectas que se cruzan o alabeadas**.

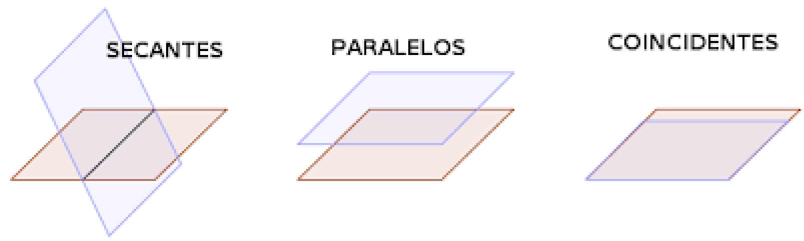
Plano con plano

En el caso de los planos, éstos pueden ser:

1) **secantes** (se intersectan a lo largo de una recta)

2)**paralelos** (no tiene puntos en común)

3)**coincidentes** (el piso y una alfombra, por ejemplo).



Recta con plano

En este caso, la recta y el plano pueden ser:

1) **secantes**
2) recta **contenida** en el plano
3) recta **paralela** al plano

Ecuaciones vectorial y paramétrica de una recta en el espacio

Dado un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, la ecuación de la recta L que pasa por el punto P y tiene la dirección de $\vec{d}$ tiene la siguiente **ecuación vectorial**:

$$L: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \ \alpha(v_x, v_y, v_z)$$

donde α es un número real.

En lenguaje de columnas, esto puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Se obtienen las siguientes **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha v_x \\ y = y_1 + \alpha v_y \\ z = z_1 + \alpha v_z \end{cases}$$

Despejando α e igualando, queda la siguiente **ecuación continua de la recta**:

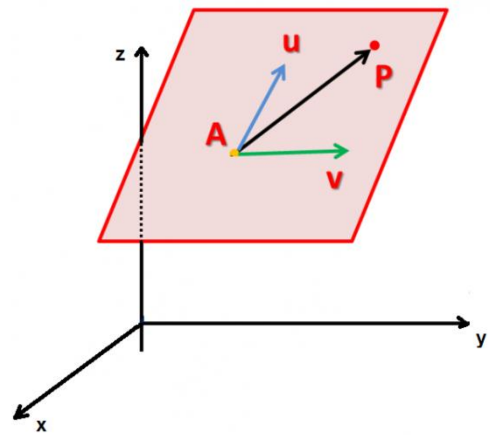
$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y} = \frac{z - z_1}{v_z}$$

Ecuaciones vectorial y paramétrica de un plano en el espacio

Para determinar un plano en el espacio, se necesitan tres puntos, o lo que es lo mismo, un punto y dos vectores. La **ecuación vectorial de un plano** en el espacio se escribe entonces como la de una recta, pero en lugar de un vector, tiene dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \alpha(u_x, u_y, u_z) + \beta(v_x, v_y, v_z)$$

donde α y β son números reales.



En lenguaje de columnas, esto puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Trabajando en cada coordenada, se obtienen las siguientes **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha u_x + \beta v_x \\ y = y_1 + \alpha u_y + \beta v_y \\ z = z_1 + \alpha u_z + \beta v_z \end{cases}$$

Eliminando α y β, se llega a la **ecuación general del plano**:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ejemplo 1:

¿Pasa por el punto (-3, -15, -42) la recta $(x, y, z) = (-2, -10, -28) + \alpha(1,5,14)$?

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = -2 + \alpha \\ y = -10 + 5\alpha \\ z = -28 + 14\alpha \end{cases}$$

Ahora se reemplazan las coordenadas del punto,

$$\begin{cases} -3 = -2 + \alpha \\ -15 = -10 + 5\alpha \\ -42 = -28 + 14\alpha \end{cases}$$

Finalmente, despejamos α en las tres ecuaciones. En las tres ecuaciones, es $\alpha = -1$. Por tanto, la respuesta es "Sí, el punto pertenece a la recta". Finalmente, observamos que:

$$(-3, -15, -42) = (-2, -10, -28) - 1 \cdot (1,5,14)$$

Ejemplo 2:

Encontremos ahora el punto de intersección (si existe) de la recta de ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (2,0,3) + k \cdot \langle 1, -2, 0 \rangle$$

con el plano de ecuación:

$$x + 2y - z = 2$$

Comencemos por escribir las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 0 - 2k \\ z = 3 \end{cases}$$

Ahora reemplacemos (x, y, z) en la ecuación del plano,

$$2 + k + 2(-2k) - 3 = 2$$

$$-3k = 3$$

$$k = -1$$

Finalmente el punto es:

$$\begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = 0 - 2(-1) \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$P(1,2,3)$$

Ejemplo 3:

¿Son coplanares las siguientes rectas? En caso afirmativo, encuentre la ecuación general del plano que las contiene:

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + s(1, 1, 1)$$
$$(x, y, z) = (2, 0, 2) + t(4, 2, -2)$$

Observemos primero que los vectores directores no son colineales, ya que en ese caso sus componentes debieran ser proporcionales. Por ejemplo (2,3,4) y (4,6,8). Por tanto, que sean paralelas o concidentes queda descartado. O son secantes o no son coplanares. Busquemos el punto de intersección.

Las ecuaciones paramétricas de la primer recta son:

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 + s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Las ecuaciones de la segunda recta son:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Igualamos x, y, z:

$$\begin{cases} 1+s=2+4t \\ -1+s=2t \\ 1+s=2-2t \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$s=1 \qquad t=0$$

El punto de intersección es (2,0,2).

Finalmente, escribamos la ecuación vectorial del plano. Como las rectas son coplanares, tanto el punto (2,0,2) como el (1,-1,1) sirven para plantear su ecuación vectorial ya que ambos pertenecen al plano definido por las dos rectas. Los dos vectores <1,1,1> y <4,2,-2> pertenecen también al plano y no son colineales, por tanto la ecuación vectorial del plano puede escribirse como:

$$(x,y,z)= (1,-1,1)+s\langle 1,1,1\rangle + t\langle 4,2,-2\rangle$$

Escribimos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=1+s+4t \\ y=-1+s+2t \\ z=1+s-2t \end{cases}$$

La etapa que sigue es eliminar “s” y “t”.

Sumemos la segunda y la tercera ecuación,

$$y+z=2s \qquad \Rightarrow \qquad s=\frac{y+z}{2}$$

Restemos la segunda y la tercera:

$$y-z=-2+4t \qquad \Rightarrow \qquad t=\frac{y-z+2}{4}$$

Reemplazando en la primera ecuación (que aún no ocupamos):

$$x=1+\frac{y+z}{2}+\frac{4(y-z+2)}{4}$$

Multiplicando ambos miembros por 2:

$$2x=1+y+z+2y-2z+4$$

Finalmente, la ecuación general del plano es:

$$2x-3y+z-6=0$$

El último proceso lo podemos simplificar con otra técnica. Para ello, necesitamos definir el producto cruz. Lo haremos la clase que viene.

Ejemplo 4:

Encuentre la ecuación de la recta intersección de los planos:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 11 \end{cases}$$

Sabemos resolver un problema como éste. Basta con resolver el sistema dado. Armamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = -2F_1 + F_2 \end{array}}$$

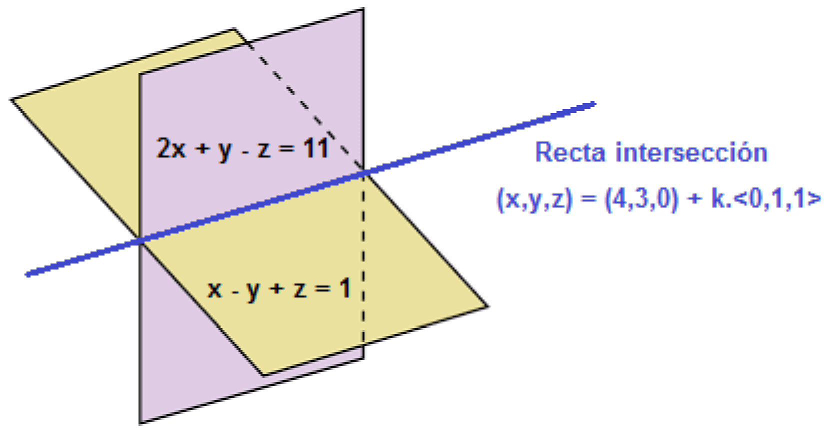
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

Observamos que "x" e "y" tienen pivote, pero "z" no. El sistema tiene un grado de libertad.

$$z = k$$

$$3y = 9 + 3k \quad \Rightarrow \quad y = 3 + k$$

$$x - (3 + k) + k = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$



Finalmente escribimos:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 + k \\ z = \quad\; k \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$(x, y, z) = (4,3,0) + \ k \cdot \langle 0,1,1 \rangle$$

Ejercicios:

1. Si se conocen las ecuaciones vectoriales de dos rectas en el espacio, ¿cómo es posible determinar si son paralelas?

2. (a) ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-8}{-1}$$

(b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto sobre la recta con abscisa $x = 0$?

Respuesta: (0,0,6)

3. ¿Cuál es una posible ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos $A(4,0,-1)$, $B(0,-1,1)$ y $C(3,2,0)$?

Respuesta: $\boldsymbol{(x, y, z) = (4, 0, -1) + \lambda(-4, -1, 2) + \mu(-1, 2, 1)}$

4. Sean $A(3,-1,-2), B(1,1,1)$ y $C(0,0,1)$ tres puntos en el espacio. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones sobre estos puntos es (son) verdaderas?

I. Los tres puntos son colineales.

II. Una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A y B es

$$(x,y,z) = (3,-1,-2) + t(2,-2,-3).$$

III. La ecuación del plano que contiene a los tres puntos es:

$$-3x + 3y - 4z = -4.$$

Respuesta: II y III

5. ¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a la ecuación vectorial del plano dado?

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(4,2,1) + \mu(0,-3,-2)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Respuesta: $\boldsymbol{x - 8y + 12z - 33 = 0}$

6. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (1,1,2)$ y $\vec{b} = (2,-1,4)$.

7. Hallar el ángulo α formado por las rectas del espacio cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (0,0,-5) + \lambda < 6,-8,0 > \\ (x,y,z) = (1,-4,0) + \beta < 3,-4,5 > \end{cases}$$

Respuesta: $\boldsymbol{\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}}$