Clase nº21

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

18 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular el volumen de un sólido de revolución.

Método de las cortezas o cilindros

Teorema 33

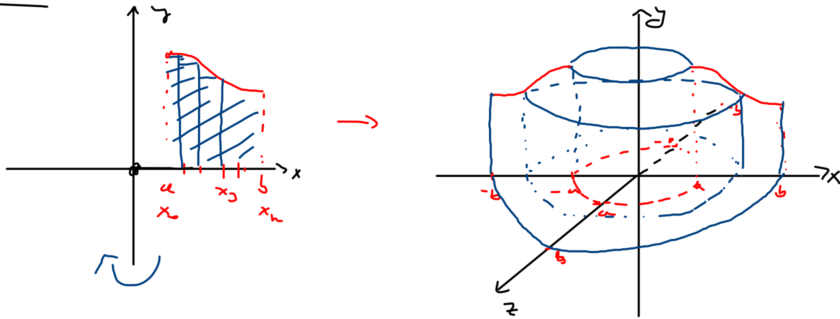
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R,

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

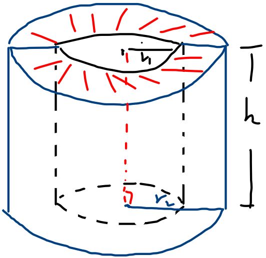
en torno al eje Y está dado por la fórmula

$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx.$$

Dem:



Para calcular el volumen de este sólido, realizaremos una aproximación por medio de cortes cilíndricos. Entenderemos por corte cilíndrico al sólido que se forma entre dos cilindros concéntricos. El volumen de un corte cilíndrico formado por cilindros de radio r_1, r_2 y altura h es



$$V_c = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$
$$= \pi h (r_2^2 - r_1^2)$$
$$= \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$
$$= 2\pi h \frac{(r_2 + r_1)}{2} (r_2 - r_1) \quad (1)$$

Sea $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. En cada $[x_{i-1}, x_i]$ elegimos ε_i, η_i tal que $f(\varepsilon_i) \leq f(x) \leq f(\eta_i)$ para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$.
Ahora, formemos los cortes cilíndricos de radios iguales a x_i y x_{i-1} con las alturas $f(\varepsilon_i)$ y $f(\eta_i)$.

utilizando (1) tenemos que cada corte cilíndrico tiene por volumen

$$V(t_i) = 2\pi\, f(\varepsilon_i) \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$V(T_i) = 2\pi\, f(\eta_i) \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, una aproximación del volumen del sólido de revolución es

$$\sum_{i=1}^{n} V(t_i) \leq V(S_f) \leq \sum_{i=1}^{n} V(T_i)$$

y la igualdad se verifica en el límite, siempre que la norma de la partición tiende a cero con $n \to \infty$. Luego,

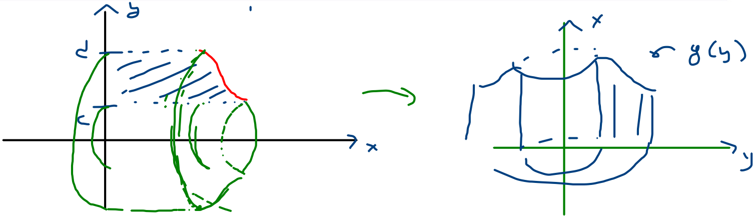
$$\boxed{V(S_f) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.}$$

Método de las cortezas o cilindros

Observación

Cuando la región está acotada por las rectas $y = c$, $y = d$, $x = g(y)$ y $x = 0$, con $g(y) \geq 0$ el sólido de revolución es el obtenido al rotar esta región alrededor del eje X, entonces el respectivo volumen es,

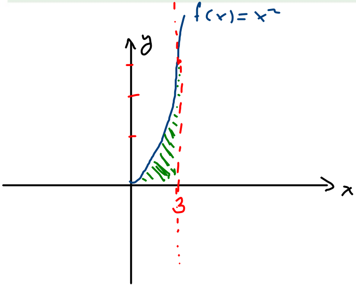
$$V(S_f) = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y)\, dy.$$

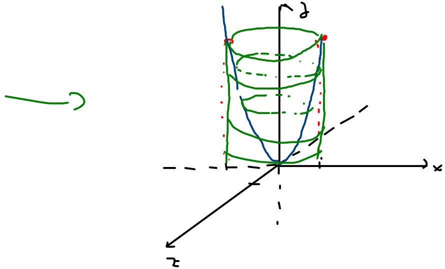


Método de las cortezas o cilindros

Ejemplo 69

La región R está acotada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ y rota al rededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.





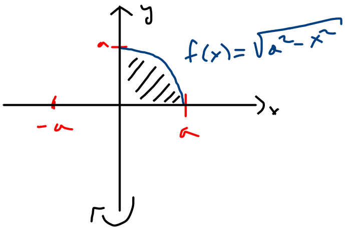
$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx = 2\pi \int_0^3 x \cdot x^2\,dx$$

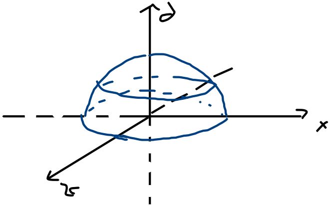
$$= 2\pi \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^3 = \frac{2\pi}{4}\left[3^4\right] = \frac{81}{2}\pi \quad [u^3].$$

Método de las cortezas o cilindros

Ejemplo 70

La región R está acotada por el eje X, el eje Y y la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (con $x \in [0, a]$) es rotada alrededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.





$$V(S_f) = 2\pi \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Consideremos

$$I = \int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad , \quad u = a^2-x^2 \Rightarrow -\tfrac{1}{2}du = x\,dx$$

Así,

$$I = \int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\cdot -\frac{1}{2}\,du = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{u^{3/2}}{3} + C = \frac{-\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}{3} + C.$$

Luego,

$$V(S_f) = 2\pi \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3 \Big|_0^a$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left[\left(\sqrt{a^2-a^2}\right)^3 - \left(\sqrt{a^2-0^2}\right)^3\right]$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \cdot -a^3$$

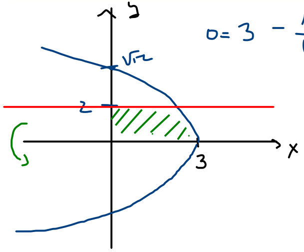
$$= \frac{2a^3\pi}{3} \quad \blacksquare.$$

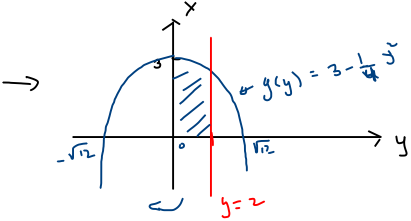
Método de las cortezas o cilindros

Ejemplo 71

La región R está acotada el eje X, el eje Y, la recta $y = 2$ y parábola $x = 3 - \dfrac{1}{4}y^2$ es rotada alrededor del eje X. Encuentre el volumen del sólido generado.

$$0 = 3 - \frac{1}{4}y^2 \iff y^2 = 12 \iff \left(y = \sqrt{12} \lor y = -\sqrt{12} \right)$$





$$V(S_g) = 2\pi \int_0^2 y \cdot g(y)\, dy = 2\pi \int_0^2 y \cdot \left(3 - \frac{1}{4} y^2\right) dy$$

$= \vdots \cdots$ Ejercicio.

$= 10\pi$

Método de las cortezas o cilindros

Ejercicio

Sean

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4y + 3 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 4 \ \wedge \ x + y - 5 \leq 0 \ \wedge \ x \leq 2\}$$

a) Graficar la región $R = R_1 \cap R_2$.

b) Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región R alrededor del eje Y.

Método de las cortezas o cilindros

Ejercicio Propuesto

Encuentre el volumen del cono generado al rotar el triángulo formado por los segmentos de las rectas $y = \frac{x}{4}$ con $x \in [-4, 0], x = -4$ y el eje X :

a) en torno al eje X.

b) en torno a la recta $x = -4$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.