12.3 Resolución de la ecuación de Laplace en el plano en coordenadas polares

Vamos a concentrarnos en estudiar el problema de Dirichlet en el interior del círculo unidad $0 \leq r \leq 1$, aunque también comentaremos brevemente algun otro tipo de condiciones de contorno, o de regiones de estudio. Dadas las condiciones de simetría del problema parece lo más razonable usar coordenadas polares, por lo que la ecuación de Laplace adopta la forma siguiente:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{12.3.1}$$

Recordemos que utilizar coordenadas polares implica que la función además de mantenerse finita en la región de estudio (en este caso el círculo $0 \leq r \leq 1$) debe ser periódica en la variable angular, con periodo 2π, para que la solución sea físicamente aceptable. Por último tendremos que imponer también las condiciones de contorno, que en el problema de Dirichlet interior al círculo unidad toman la forma

$$u(1, \theta) = f(\theta). \tag{12.3.2}$$

La técnica de resolución de las ecuaciones elípticas es ligeramente distinta de la técnica que se utiliza en las de tipo parabólico e hiperbólico, ya que no procede en este caso hacer completar el *paso 3* (calcular las constantes imponiendo las condiciones iniciales, que no existen). En las ecuaciones de tipo elíptico lo que se hace es: en primer lugar encontrar todas las soluciones fundamentales (que en este caso son las funciones de tipo factorizado en cada una de las variables y que son fisicamente aceptables), a continuación se forma una serie con todas ellas, finalmente las constantes se determinan utilizando las condiciones de contorno.

Comenzamos buscando soluciones de la edp2 utilizando el método de separación de variables, que ya conocemos bien: proponemos una solución en la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

que llevada a la ecuación diferencial (12.3.1) nos da

$$\Theta(\theta)\left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)\right) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

Multiplicando por r^2 y dividiendo por $R(r)\Theta(\theta)$ obtenemos

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu,$$

lo que genera dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{\begin{aligned} r^2R''(r) + rR'(r) - \mu R(r) &= 0, \\ \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) &= 0, \end{aligned}\right.$$

a las cuales de momento vamos a añadir la condición siempre necesaria de que la parte angular sea periódica con periodo 2π.

La ecuación diferencial para $\Theta(\theta)$ con la condición de periodicidad ya la resolvimos al estudiar las vibraciones de la membrana circular y por tanto simplemente repetimos la solución encontrada. La constante de separación podía ser $\mu = 0$ y entonces $\Theta(\theta) = A$ (constante), o bien $\mu = n^2$ y $\Theta(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ Veamos cual es la solución de la ecuación radial en cada uno de los casos y formemos las soluciones fundamentales:

• Si $\mu = 0$, $\Theta(\theta) = A$. La ecuación radial queda

$$r^2R'' + rR' = 0 \quad \Rightarrow \quad R'' = -\frac{1}{r}R' \quad \Rightarrow \quad \frac{dR'}{dr} = -\frac{1}{r}R' \quad \Rightarrow \quad \frac{dR'}{R'} = -\frac{1}{r}dr,$$

$$\ln R' = -\ln r + \ln C \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{dR}{dr} = \frac{C}{r}.$$

Finalmente

$$R(r) = C\ln r + D, \tag{12.3.3}$$

con lo cual la solución fundamental para $\mu = 0$ es $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, es decir

$$u(r,\theta) = A(C\ln r + D) = C'\ln r + D', \tag{12.3.4}$$

que es una combinación lineal de dos funciones linealmente independientes: $\{1, \ln r\}$.

• Si $\mu = n^2$, $\Theta(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$. La ecuación radial queda

$$r^2R'' + rR' - n^2R(r) = 0.$$

Se trata de una ecuación de tipo Euler, que se resuelve haciendo el cambio de variable independiente $r = e^w$, que la transforma en una ecuación lineal con coeficientes constantes. Llevando a cabo la transformación (hágase como un ejercicio) resulta:

$$\frac{d^2R}{dw^2} - n^2R(w) = 0.$$

Evidentemente las raices del polinomio característico son $\pm n$ y por tanto las dos soluciones linealmente independientes son (recordemos que $n \neq 0$ y por tanto tenemos dos raices simples) e^{nw} y e^{-nw}. Volviendo de nuevo a la variable r, la solución de la ecuación radial es una combinación lineal de las funciones r^n y r^{-n}:

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Por tanto la solucion fundamental $u(r,\theta)$ para $\mu = n^2$ será una combinación lineal de cuatro soluciones linealmente independientes, a saber

$$\left\{r^n\cos(n\theta), r^n\sin(n\theta), r^{-n}\cos(n\theta), r^{-n}\sin(n\theta)\right\}. \tag{12.3.5}$$

La solución más general de la ecuación de Laplace en el plano en polares será una serie formada por soluciones fundamentales. Dado que las soluciones fundamentales son a su vez combinaciones lineales de unas ciertas funciones linealmente independientes, resulta que podemos escribir la solución general como una serie en términos de esas funciones, es decir, una serie en términos que contienen las funciones

$$\left\{1, \ln r, r^n\cos(n\theta), r^n\sin(n\theta), r^{-n}\cos(n\theta), r^{-n}\sin(n\theta)\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es decir

$$u(r,\theta) = A + B\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^n\cos(n\theta) + B_nr^n\sin(n\theta) + C_nr^{-n}\cos(n\theta) + D_nr^{-n}\sin(n\theta)\right).$$

Hasta aquí lo que hemos hecho ha sido únicamente resolver la ecuación de Laplace y por tanto esta solución es válida para cualquier tipo de problema que se plantee (Dirichlet, Neumann o Robin) y cualquier región de estudio (interior o exterior de un círculo, una corona circular, etc). Ahora bien, habrá que determinar el valor preciso de las constantes A, B, A_n, B_n, C_n, D_n imponiendo que la función se mantenga finita en la región de estudio y también las condiciones de contorno concretas que se planteen en el problema.

Volvamos al problema de Dirichlet en el interior del círculo unidad. Observando las soluciones fundamentales nos damos cuenta de que los puntos conflictivos en los cuales podrían divergir las soluciones son el orígen ($r = 0$) y el punto del infinito ($r \to \infty$). El problema concreto que estamos considerando contiene el orígen en la región de estudio (pero no el punto del infinito) y resulta que en ese punto las funciones $\ln r, r^{-n}\cos(n\theta)$ y $r^{-n}\sin(n\theta)$ divergen. Por tanto, para que la solución final se mantenga finita es necesario que los coeficientes que multiplican a estas funciones en la serie sean nulos, es decir,

$$B = 0, \quad C_n = D_n = 0 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

y por tanto

$$u(r, \theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)\right).$$

Imponiendo finalmente la condición de contorno

$$u(1, \theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right) = f(\theta).$$

Esta última expresión está indicando que las constantes A y A_n, B_n no son otra cosa que los coeficientes del desarrollo de $f(\theta)$ en serie de Fourier. La expresión explícita de los coeficientes se obtiene utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones en las que está hecho el desarrollo:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta), \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta)\cos(n\theta), \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta)\sin(n\theta).$$