Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 25

Ejercitación para el certamen

Ejemplo 1

Utilizando el teorema de la raíz racional, hallar las tres raíces reales α, β, γ del polinomio siguiente

$$p(x) = 3x^3 - 166x^2 - 287x + 114$$

sabiendo que una de ellas cumple la condición $50 < \alpha < 90$

Solución:

Entre los divisores de 114 está 57:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -166 & -287 & 114 \\ 57 & & 171 & 285 & -114 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.(3)(-2)}}{2.3}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \quad x = -2 \quad x = +\frac{1}{3}$$

(b)

Raiz = 1

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & -10 & 0 & 10 & -3 \\ 1 & & 3 & -7 & -7 & 3 \\ \hline & 3 & -7 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

Raiz = -1

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & -7 & 3 \\ -1 & & -3 & 10 & -3 \\ \hline & 3 & -10 & 3 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad x = 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{-1, \frac{1}{3}, 1, 3\right\}}$$

Ejercicio 2

Hallar las raíces de

$$p(x) = 2x^3 - 17x^2 + 47x - 42$$

sabiendo que tiene una raíz comprendida entre 3 y 4, y luego factorizar el polinomio.

Solución:

Se resuelve en forma similar al anterior, utilizando el teorema de la raíz racional …

$$\boldsymbol{p(x) = (2x - 7)(x - 2)(x - 3)}$$

Ejemplo 3

Hallar A y B en el polinomio

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + Ax + B$$

sabiendo que al dividirlo entre

$$d(x) = x^2 + 6x + 25$$

se obtiene resto

$$r(x) = x - 6$$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & +3x^2 & +Ax & +B & x^2+6x+25 \\
\cline{5-5}
-\cancel{x^3} & -6x^2 & -25x & & x-3 \\
\cline{1-4}
 & -\cancel{3x^2} & +(A-25)x & +B & \\
 & +\cancel{3x^2} & +18x & +75 & \\
\cline{2-4}
 & & \underbrace{(A-7)}_{1}x & +\underbrace{B+75}_{-6} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow A = 8 \quad B = -81$$

Ejemplo 4

Hallar los valores de los parámetros m y n sabiendo que el polinomio

$$P(x) = x^3 + mx + n$$

dividido por x + 3 tiene resto R = 8 y que el cociente Q(x) de dicha división tiene raíz $x = 2$.

Solución:

La primera división la podemos hacer ocupando el esquema de división sintética de Ruffini ...

	1	0	m	n
-3		-3	9	-3m - 27
	1	-3	m + 9	-3m + n – 27 = 8

El cociente de esa división es:

$$Q(x) = x^2 - 3x + m + 9$$

Se nos dice que tiene raíz

$$x = 2$$

por tanto,

$$Q(2) = 0$$

$$4 - 6 + m + 9 = 0$$

Por tanto, $m = -7, n = 14$

El polinomio es:

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 - 7x + 14}$$

Ejemplo 5

Encuentre el término central en el desarrollo del binomio

$$\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10}$$

Solución:

$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{-6}{a}\right)^{k}(3a)^{10-k}$$

$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-6)^{k}a^{-k}a^{10-k}3^{10-k}$$

$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-6)^{k}3^{10-k}a^{10-2k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio $\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10}$, basta tomar el $k=5$, pues la sumatoria va desde 0 a 10 siendo el termino central el $k=5$.

Entonces, el término central es igual a:

$$\binom{10}{5}(-6)^{5}3^{10-5}a^{10-2*10} = \binom{10}{5}(-6)^{5}3^{5} = \binom{10}{5}(-18)^{5} = -\binom{10}{5}(18)^{5}$$

Ejemplo 6

Encuentre el coeficiente del término en

$$x^{2r}$$

en el desarrollo del binomio

$$(1-x^2)^{4r}$$

Solución:

$$\left(1-x^2\right)^{4r} = \sum_{k=0}^{4r} \binom{4r}{k} \left(-x^2\right)^k (1)^{4r-k}$$

$$\left(1-x^2\right)^{4r} = \sum_{k=0}^{4r} \binom{4r}{k} (-1)^k x^{2k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al x^{2r}, basta igualar el exponente de x^{2k} a 2r.

$$2k = 2r$$
$$k = r$$

Entonces, para $k = r$ encontraremos el coeficiente que acompaña a x^{2r}.

$$\binom{4r}{r} (-1)^r x^{2r}$$

$$Coef = \binom{4r}{r} (-1)^r$$