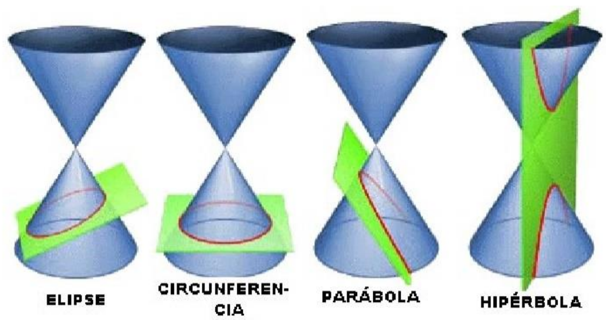
Las cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

Las cónicas: Al intersectar el doble cono (azul) de la figura con el plano (verde), y dependiendo del ángulo que forme el plano con la base del cono, se obtienen cuatro curvas, que por ese motivo reciben el nombre de cónicas: **la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.**



La circunferencia

Definición: La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano, o sea, el conjunto de puntos de coordenadas (x, y), que equidistan (o sea, están todos a la misma distancia) de un punto del plano llamado centro.

A la distancia de todos esos puntos al centro se la llama **radio** de la circunferencia.

Para encontrar la ecuación de una circunferencia, planteamos esa condición:

$$d(P, C) = r$$

Llamemos $P(x, y)$ al punto sobre la circunferencia). Llamemos $C(\alpha, \beta)$ al centro de la mismo. Por la fórmula de distancia ya encontrada antes:

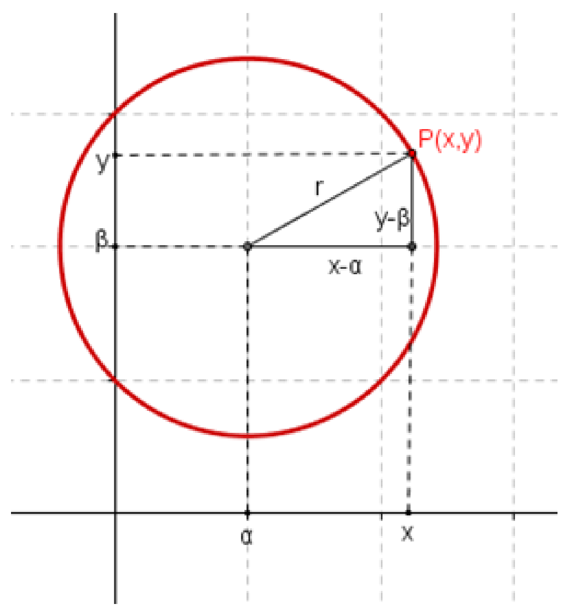
$$d(P, C) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

o sea

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$



Esa es la **ecuación de la circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$ y radio r.**

Ejemplo 1:

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,-3)$ y radio $r=5$.

Planteamos: $$(x-2)^2+(y-(-3))^2=5^2$$

Operando: $$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

Caso particular: Si una circunferencia tiene centro en el punto $C(0,0)$, le ecuación queda extremadamente sencilla:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

o sea,

$$x^2+y^2=r^2$$

Problema inverso: reconocimiento de una circunferencia.

Toda circunferencia tiene una ecuación de la forma:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Por ejemplo: $$x^2+y^2+8x-12y+12=0$$

¿Cómo encontrar el centro y el radio de esta circunferencia? Un método muy útil es el de **completar cuadrados**.

Reunamos los términos en "x" y en "y" de la ecuación anterior y traspongamos el término independiente al segundo miembro.

$$x^2+8x+y^2-12y=-12$$

Vemos que tanto "x" como "y" aparecen en dos términos, y que por ser de distintos grados no se pueden reducir. Pero recordemos una vieja fórmula del colegio,

$$(x+A)^2=x^2+2Ax+\boldsymbol{A^2}$$

Tanto en "x" como en "y", nos faltaría el último término. Completemos los cuadrados,

$$x^2+8x+\ldots+y^2-12y+\ldots=-12+\ldots+\ldots$$

$$x^2+8x+\mathbf{16}+y^2-12y+\mathbf{36}=-12+\mathbf{16}+\mathbf{36}$$

Por tanto,

$$(x+4)^2+(y-6)^2=40$$

El centro es $(-4,6)$. Su radio es $\sqrt{40}$

Ejemplo 2: Intersección de una recta con una circunferencia

Intentemos ahora buscar los puntos de intersección de una recta y una circunferencia.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$$

Ese sistema no se puede resolver por reducción. Utilizaremos el método de sustitución.

Despejemos “y” en la segunda ecuación:

$$y = -3x + 15$$

y reemplacemos ese “y” en la primera,

$$x^2 + (-3x + 15)^2 = 25$$

Operando,

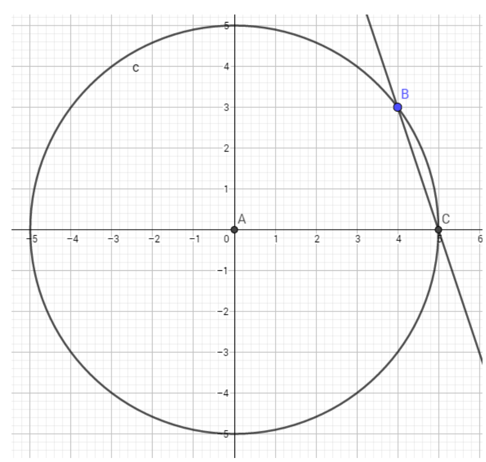
$$10x^2 - 90x + 200 = 0$$

Dividiendo ambos miembros entre 10 (lo cual siempre conduce a otra ecuación equivalente).

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Aplicando la conocida fórmula,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



se encuentran dos valores posibles de “x”:

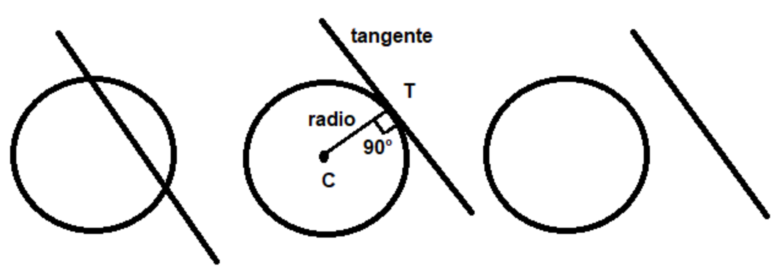
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 5$$

Reemplazando $x = 4$ en la ecuación lineal,
$y = -3 \cdot 4 + 15 = 3$. El punto es (4,3)

Reemplazando $x = 5$ en la ecuación lineal,
$y = -3 \cdot 5 + 15 = 0$. El punto es (5,0)

Finalmente la solución es: $S = \{(3,4), (5,0)\}$

Nota: Observen que dependiendo del número de raíces que tenga la ecuación cuadrática, la recta será **secante** (como en el ejemplo, corta a la circunferencia en dos puntos distintos), **tangente** (la corta en un solo punto) o **exterior** (no la corta).



Recta secante (dos soluciones) | Recta tangente (una solución) | Recta exterior (ninguna solución)

La parábola

Definición como lugar geométrico: La **parábola** es el lugar geométrico de puntos del plano, o sea el conjunto de puntos de coordenadas (x, y), que equidistan (están todos a la misma distancia) de un punto del plano llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**.

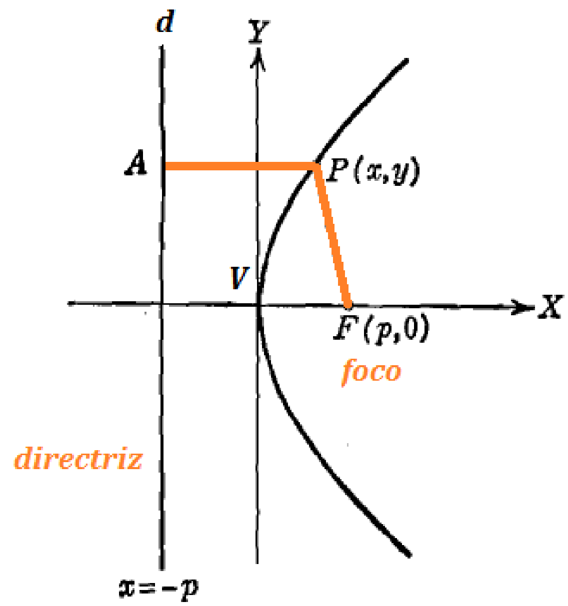
A la semi-distancia (o sea, a la mitad de esa distancia) se le llama parámetro de la parábola. Lo representaremos con "p".

Para encontrar la ecuación canónica de una parábola, esto es, la más sencilla, elegiremos como foco el punto $F(p, 0)$ y como directriz "d" a la recta vertical de ecuación

$$x = -p.$$

Siendo $P(x, y)$ un punto del plano, para pertenecer a la parábola deberá cumplir la condición:

$$d(P, F) = d(P, d)$$



Planteamos esto último. Utilizamos para ello las fórmulas vistas de distancia punto-punto y distancia punto-recta. Para ello necesitamos saber que $P(x, y), F(p, 0)$ y la ecuación general de la directriz es $x + p = 0$.

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = |x + p|$$

Eliminemos la raíz elevando ambos miembros al cuadrado,

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = |x + p|^2$$

Simplificando y operando,

$$y^2 = +4px$$

A esa ecuación la llamaremos ecuación canónica de la parábola. El eje "x" en este caso es un eje de simetría, se llama **eje de la parábola.** Observen que el punto de intersección de la parábola con su eje, en este caso el punto (0,0), cumple la condición. A ese punto lo llamaremos **vértice de la parábola**.

Otra situación posible podría sido haber tomado el eje “y” como eje de la parábola, foco F(0,c), directriz horizontal de ecuación $y + p = 0$.
En ese caso, la ecuación hubiera quedado

$$x^2 = +4py$$

Despejando “y”:

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Llamando A al coeficiente de x^2 en esa ecuación,

$$y = Ax^2$$

que es un caso particular y simplificado de la conocida función cuadrática del colegio,

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Nota importante: observen que en ambas ecuaciones, una de las dos variables, “x” o “y” está elevada al cuadrado pero la otra no. Esa es la estrategia que ocuparemos para reconocer parábolas.

Ecuación general de una parábola

En el caso de una parábola de eje horizontal, cuyo vértice no esté en el punto (0,0) sino en un punto cualquiera $V(h,k)$, la ecuación general de la parábola será:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si el eje es vertical,

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Reconocimiento de parábolas:

Supongamos que queremos encontrar los elementos de la cónica de ecuación,

$$y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$$

Observemos que no tiene término en “xy” (ese tipo de ecuaciones corresponden a “cónicas giradas” (vean los ejercicios a continuación) y sólo una de las dos variables está
elevada al cuadrado, en este caso la “y”. Dejemos los términos en “y” en el primer miembro y traspasamos los otros a la derecha.

$$y^2 - 10y = 2x - 21$$

Igual que en el caso circunferencia, completemos el cuadrado a la izquierda, sumando +25
a ambos lados de la igualdad:

$$y^2 - 10y + 25 = 2x - 21 + 25$$

$$(y - 5)^2 = 2x + 4$$

$$(y - 5)^2 = 2(x + 2)$$

Comparemos con la ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$h = -2, k = 5$, vértice $V(-2,5)$.

$4p = 2$, por tanto $p = \frac{1}{2}$

Tangente a una cónica cualquiera en un punto de ella

Volvamos a la parábola de ecuación,

$$y^2 = -8x$$

Tratemos de encontrar la recta tangente en el punto $P(-8,8)$.

Lo primero es verificar que el punto está sobre la parábola. Reemplazamos,

$$8^2 = (-8) \cdot (-8)$$

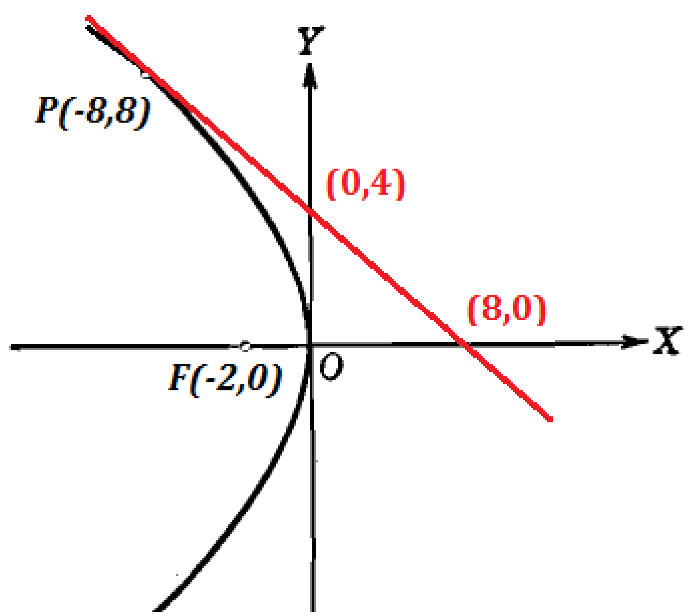
Ahora ocupemos la siguiente técnica, reemplazando …

$$x^2 \quad \rightarrow \quad x_1 \cdot x$$

$$y^2 \quad \rightarrow \quad y_1 \cdot y$$

$$x \quad \rightarrow \quad \frac{x + x_1}{2}$$

$$y \quad \rightarrow \quad \frac{y + y_1}{2}$$



Como (x_1, y_1)son las coordenadas del punto de tangencia, $x_1 = -8, y_1 = 8$

$$y^2 \quad \rightarrow \quad 8y$$

$$x \quad \rightarrow \quad \frac{x - 8}{2}$$

Finalmente, la ecuación de la tangente es:

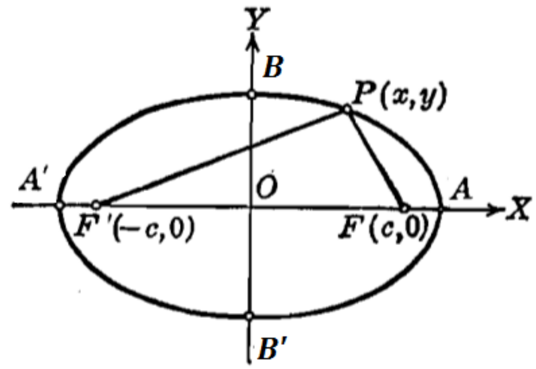
$$8y = -8\left(\frac{x - 8}{2}\right)$$

$$x + 2y - 8 = 0$$

La elipse

Definición como lugar geométrico: La **elipse** es el lugar geométrico de puntos del plano, o sea el conjunto de puntos de coordenadas (x, y), cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Para deducir la ecuación de la elipse, tomaremos focos sobre el eje "x", con coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. A la suma de las distancias del punto $P(x, y)$ a los focos la llamaremos $2a$.



$d(P, F) + d(P, F') = \text{constante} = 2a$

Para deducir su ecuación, planteamos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Operando y reemplazando la expresión $a^2 - c^2 = b^2$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

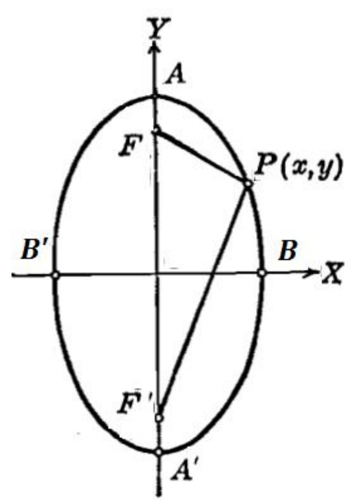
que es la **ecuación canónica de la elipse.**

A los cuatro puntos, $A(a, 0) \quad A'(-a, 0) \quad B(0, b) \quad B'(0, -b)$

los llamaremos vértices de la elipse (observen que todos ellos satisfacen su ecuación).

A la distancia $d(A', A) = 2a$ la llamaremos **eje mayor** de la elipse.
A la distancia $d(B', B) = 2b$ la llamaremos **eje menor** de la elipse.
A la distancia $d(C', C) = 2c$ la llamaremos **distancia focal** de la elipse.

Segunda situación: Si ahora tomamos los focos, no en el eje "x" sino en el eje "y", $F(0, c), F'(0, -c)$, obtenemos:

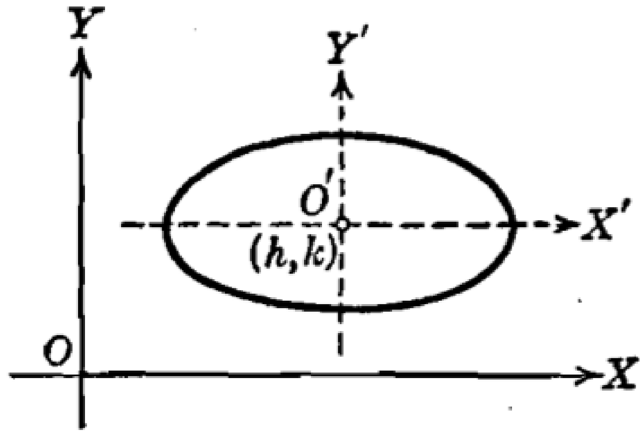


$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En ambos casos, se cumple que: $a > b$

Nota: reserven siempre, tanto elipse como en hipérbola, la letra "a" para el eje sobre el cual están los focos. Por tanto, en este caso a^2 es el denominador del cuadrado de y^2.

Ecuación de la elipse con centro en el punto (h,k) y ejes paralelos a los ejes de coordenadas:



Si el eje mayor (el que contiene a los focos) es horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el eje mayor es vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Excentricidad de las cónicas:

La excentricidad de las cónicas se define como

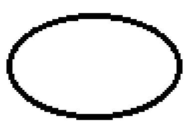
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje mayor}}$$

La excentricidad de la elipse cumple siempre:

$$0\leq e<1$$

En el caso $e=0$, se trata de una circunferencia.
En el caso $e=1$, la elipse se deforma hasta quedar convertida en una parábola.
Veremos luego que la excentricidad de la hipérbola es $e>1$.

La excentricidad es una medida del "achatamiento" de la elipse.



Menor excentricidad, elipse casi circular.
Ejemplo: la órbita de la tierra.

Mayor excentricidad, elipse muy alargada.
Ejemplo: la órbita de algunos cometas.

En ambos ejemplos astronómicos, el sol está situado en uno de los focos de la elipse.

Discusión de excentricidades

En el caso de la circunferencia: $e=0$
En el caso de la elipse la excentricidad cumple $0<e<1$
En el caso de la parábola: $e=1$
En el caso de la hipérbola: $e>1$

Reconocimiento de elipses:

Ejemplo: Reconocer la cónica dada por la ecuación:

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

Vemos que ambas variables están elevadas al cuadrado, por tanto, no es una parábola.

Vemos que los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales, por tanto, no es una circunferencia.

Pero esos coeficientes tienen el mismo signo, por tanto es una elipse (en la hipérbola los coeficientes de x^2 e y^2 tienen signos opuestos).

Completemos, como habitualmente, los cuadrados (observen que antes tenemos que factorizar un 4 en los términos en "y"),

$$x^2 - 6x + \cdots + 4(y^2 + 4y + \cdots) = -21 + \cdots + \cdots$$

La mitad de -6 elevada al cuadrado es 9. La mitad de +4 elevada al cuadrado es 4.

$$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16$$

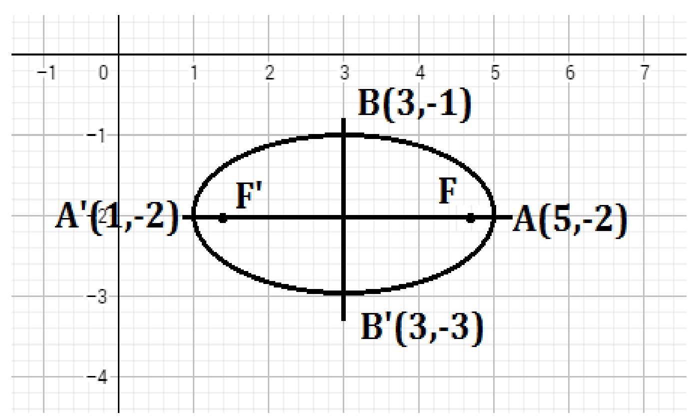
$$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 4$$

Dividiendo todo entre 4,

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{1^2} = 1$$

Dado que el semieje mayor está en el término que corresponde a "x", es una elipse de focos sobre una recta horizontal. Sus elementos son:

$$\text{Centro: } (3,-2) \qquad \mathrm{a} = 2 \qquad \mathrm{b} = 1 \qquad \mathrm{c} = \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2} = \sqrt{3}$$



Por tanto, los vértices serán:

$$A'(1,-2) \quad A(5,2)$$

$$B'(3,-3) \quad B(3,-1)$$

Sus focos están en:

$$F'(3-\sqrt{3},-2) \qquad F(3+\sqrt{3},-2)$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La hipérbola

Definición como lugar geométrico: La **hipérbola** es el lugar geométrico de puntos del plano, o sea el conjunto de puntos de coordenadas (x, y), cuya resta de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Para deducir la ecuación de la hipérbola, volveremos a tomar focos sobre el eje "x", con coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. A la diferencia de las distancias del punto $P(x, y)$ a los focos la llamaremos $2a$. Pero ahora vemos que, como la diferencia no es conmutativa, debemos plantear dos condiciones diferentes:

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a \qquad \text{o} \qquad d(P, F') - d(P, F) = 2a$$

De esa manera, la hipérbola tendrá dos ramas distintas.

Escribiendo las igualdades anteriores como una sola (mediante la utilización del valor absoluto,

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$$

Al igual que para la elipse, planteamos:

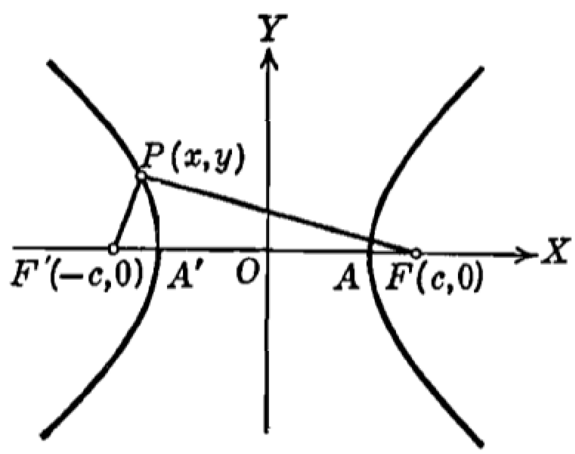
$$\left|\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2}\right| = 2a$$

Que realizando operaciones similares a las realizadas para la elipse conduce a:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde ahora

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Tal como hicimos antes, llamaremos vértices de la hipérbola a los puntos

$$A(a, 0) \quad A'(-a, 0)$$

A la distancia $d(A', A) = 2a$ la llamaremos **eje real** de la hipérbola (el eje "x" es eje de simetría de la hipérbola).

A la distancia $d(C', C) = 2c$ la llamaremos **distancia focal** de la hipérbola.

Nota:
Debemos tener mucho cuidado aquí, ya que las condiciones para elipse e hipérbola son diferentes.

Para elipse: $a^2 = b^2 + c^2$

Para hipérbola: $c^2 = a^2 + b^2$

En la hipérbola, la hipotenusa (o lado más largo del triángulo) corresponde a la semi-distancia focal "c". Interpretaremos geométricamente esto más adelante.

Segunda situación:

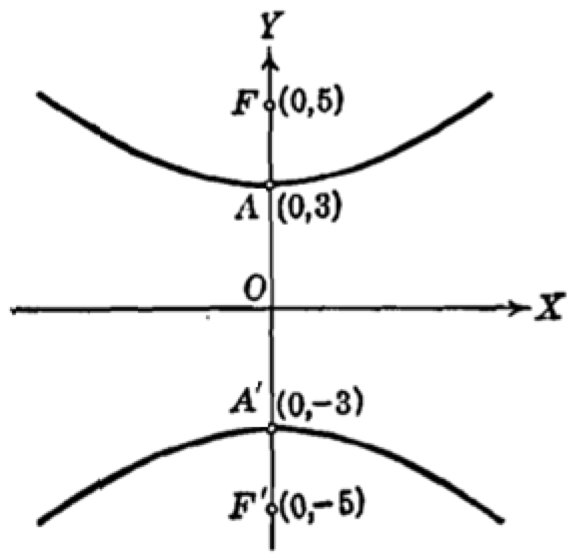
Tratemos de encontrar la ecuación de la hipérbola con focos en $F(0,5)$, $F'(0,-5)$ y vértices $V(0,3)$, $V'(0,-3)$

Por las coordenadas de los puntos, vemos que esta hipérbola tendrá **eje vertical.**

Por tanto, su ecuación será de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(intercambiamos "x" con "y")



Reemplazando las coordenadas de $V(0,3)$ en la ecuación obtenemos:

$$\frac{3^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$$

de donde:

$$a = 3$$

Recordando que para la hipérbola:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

$$b = 4$$

Finalmente, la ecuación de esta hipérbola es:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Ecuación de la hipérbola con centro en el punto (h,k):

Si el eje es horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el eje es vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Les queda a los estudiantes, la tarea de pensar cuáles son las coordenadas de los focos en ambos casos.

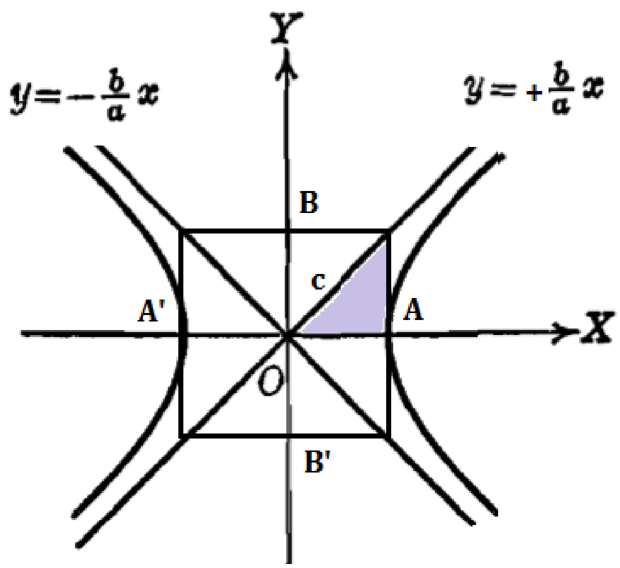
El reconocimiento de hipérbolas se hace igual que antes, recordando que una cónica de ecuación

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

es una hipérbola si los coeficientes de x^2 e y^2 son ambos distintos de cero y de diferente signo.

$$\text{sig } A \neq \text{sig } C$$

Asíntotas de la hipérbola



Sabemos que la ecuación de una hipérbola con focos en el eje de abscisas es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Despejemos y:

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

Tomemos ahora el límite de esa expresión cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty} \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{b}{a}x$$

Por tanto, a medida que nos alejamos del punto (0,0) la hipérbola se va acercando a las rectas de ecuaciones

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

En el caso de focos en un eje vertical:

$$y=\pm\frac{a}{b}x$$

Para recordar esto, recuerden reservar siempre la letra "a" para el semieje que es colineal con la recta que une los focos, es decir para el que en la ecuación canónica tiene signo positivo.

Esas rectas tienen la propiedad de que un punto P moviéndose sobre la hipérbola y alejándose del origen, estará cada vez más cerca de ellas (su distancia a alguna de ellas será cada vez menor).

Al trazar las asíntotas vemos que interpretación gráfica podemos darle a los puntos $B(0,b)$ y $B'(0,-b)$. Y también porqué en la hipérbola la condición es: $c^2 = a^2 + b^2$

Ejercicios de circunferencia

1. Encontrar la ecuación de una circunferencia que tiene un diámetro de extremos $A(2,3)\ y\ B(-4,5)$.

Respuesta: $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$

2. a) Hallar los puntos A y B de intersección de la circunferencia

$$(x - 2)^2 + y^2 = 169$$

con la recta de ecuación

$$12x - 5y - 24 = 0$$

b) Pruebe que el segmento AB es diámetro de la circunferencia.

Respuesta: A(7,12); B(-3,-12)

3. Encuentre la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto de coordenadas P(3, -4).

Sugerencia: Recuerde que el radio y la tangente a la circunferencia son perpendiculares en el punto de tangencia

Respuesta: 3x – 4y – 25 = 0

4. a) Identifique los elementos de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0.$$

Respuesta: Centro C(5,-1) Radio $r = \sqrt{8}$

Ejercicios de parábola:

5. Identifique los elementos de la parábola de ecuación $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$

Respuestas: Vértice (2, 3)
Eje horizontal: y = 3
Foco: (4, 3). Directriz: x = 0

6. **Parábola girada**

Una parábola de eje no paralelo a los ejes de coordenadas, tiene foco F(4,0) y directriz $3x + 4y = 0$. Hallar la ecuación de esa parábola.

Respuesta: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 200x + 400 = 0$

7. Decidir qué tipo de cónica tiene ecuación

$$2x^2 + 8x - y + 8 = 0$$

Respuesta: Parábola de eje vertical. V(-2,0), p = $\frac{1}{8}$, F$\left(-2, \frac{1}{8}\right)$

Ejercicios de elipse e hipérbola

8. Dada la elipse $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{225}=1$

a) Probar que pasa por el punto $P(15, 12)$.
b) Encontrar sus vértices, focos y excentricidad.

Respuesta: Vértices: A(25,0), A´(-25,0),
B(0,15), B´(0,-15)
Focos: C(20,0) C'(-20,0)

9. Encontrar todos los elementos de la elipse dada por la ecuación:

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0$$

Respuesta: Es una elipse. Centro (3,2).
Eje mayor horizontal. a = 2, b = 1, c = $\sqrt{3}$
Vértices A(5,2) A'(1,2) B(3,3) B'(3,0)
Focos F(3+$\sqrt{3}$,2)F'(3-$\sqrt{3}$,2)

10. La ecuación de una cónica es

$$4x^2 + y^2 - 12x + 2y + 6 = 0$$

Identificarla y encontrar todos sus elementos.

Respuesta: Elipse de centro $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$
Vértices: $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$; $A'\left(\frac{3}{2}, -3\right)$; $B\left(\frac{5}{2}, -1\right)$; $B'\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11. Los vértices de una hipérbola son los puntos (0,3) y (0, -3), y sus focos los puntos (0, 5) y (0, -5). Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

Por más ejercicios para practicar en este tema, consultar la bibliografía:
*Charles Lehmann, **Geometría Analítica.***