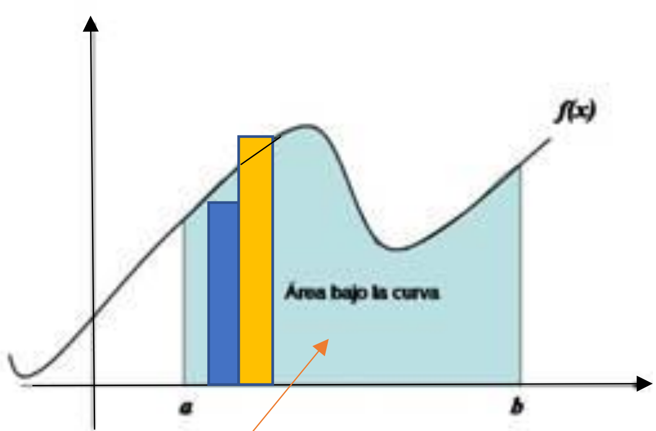
Integrales Múltiples

1.- Integrales dobles

Antes en una variable, para:

$$f(x) \geq 0 \ ; \ \forall x \in [a, b];$$

$$f \text{ continua y acotada en } [a, b]$$



$$A(x) = \int_a^b f(x)dx = \text{área bajo una curva}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = A(x)$$

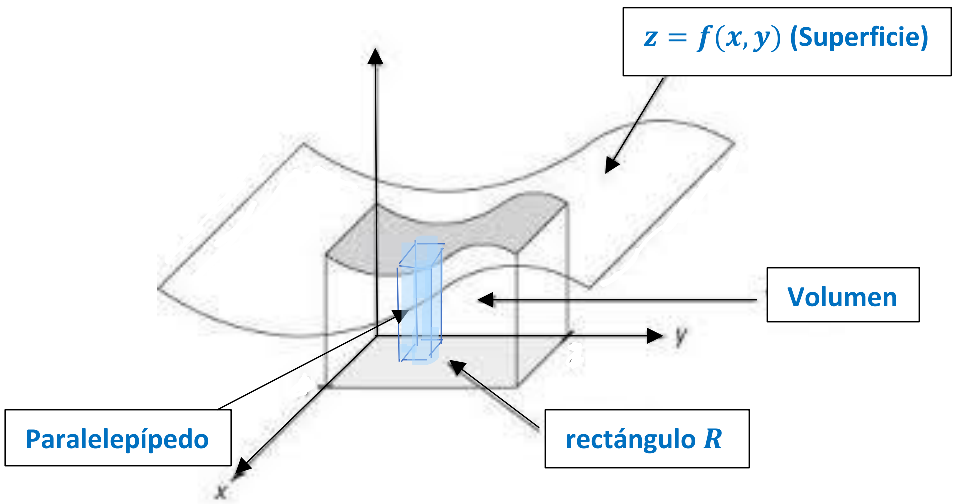
Donde $f(x_i)\Delta x_i$ representa el área de los rectángulos inscritos En azul) o circunscrito (en amarillo) de una partición de $[a, b]$ y donde :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

es igual a la suma de todas las áreas de los rectángulos inscritos o circunscritos de una partición de $[a, b]$.

Esta suma como ya sabemos converge a $A(x)$ cuando $n \to \infty$.

En dos variables: Sea $z = f(x, y)$ una superficie con $z \geq 0$



$$V = \iint_R f(x, y)\, dA \ \ (\text{integral doble})$$

Donde $V \approx$ Volumen de la superficie definida en la región R

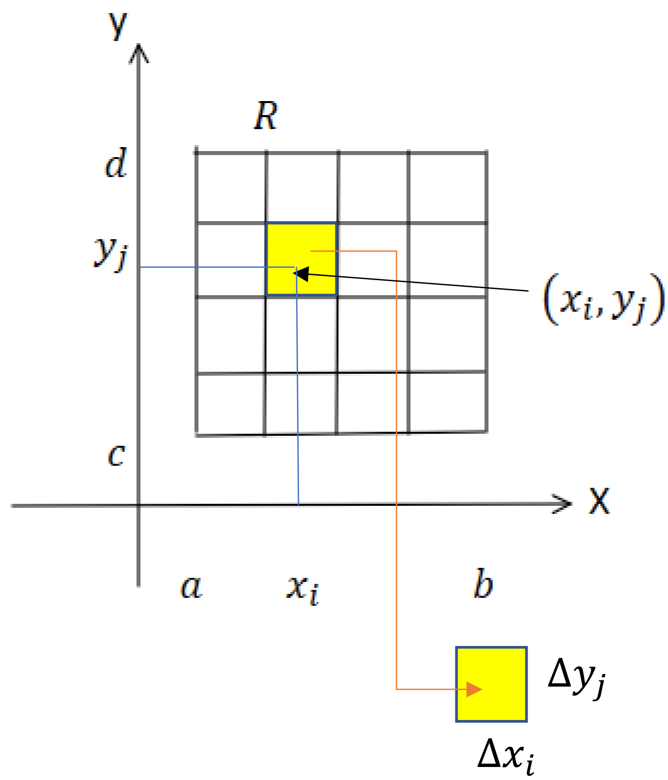
Construcción de la integral doble

1.- Integrales dobles sobre rectángulos

Sea

$$R = [a, b] \text{ x } [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\}$$

Tal como en una variable donde se particionaba un intervalo ahora particionaremos la región R en una serie de rectangulitos más pequeños como muestra la siguiente figura



ij- ésimo rectángulo

La ij- ésima partición de R es un rectángulo y sus áreas son:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

Podemos definir una función de dos variables $z = f(x, y)$ en la región R, que para la ij- ésima partición

$$f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

representa el volumen del paralelepípedo denotado por ΔV_{ij} levantado en el ij- ésimo rectángulo de la partición (ver figura 1).

Si deseamos el volumen bajo la superficie, tenemos que hacer una suma de volúmenes de una cantidad infinita de paralelepípedos. Levantados en cada rectángulo de la partición, tal como se hizo con el ij- ésimo rectángulo (ver figura 2).

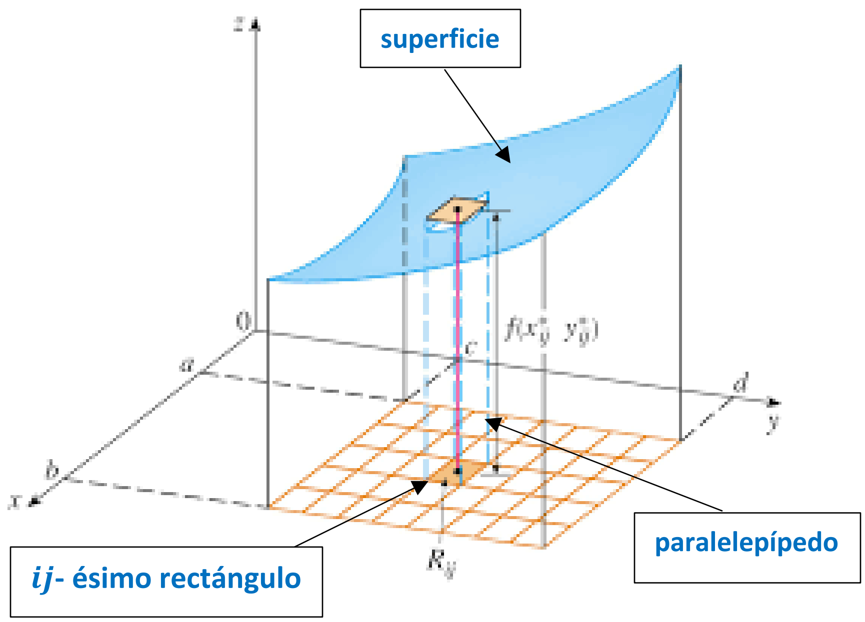


Figura 1

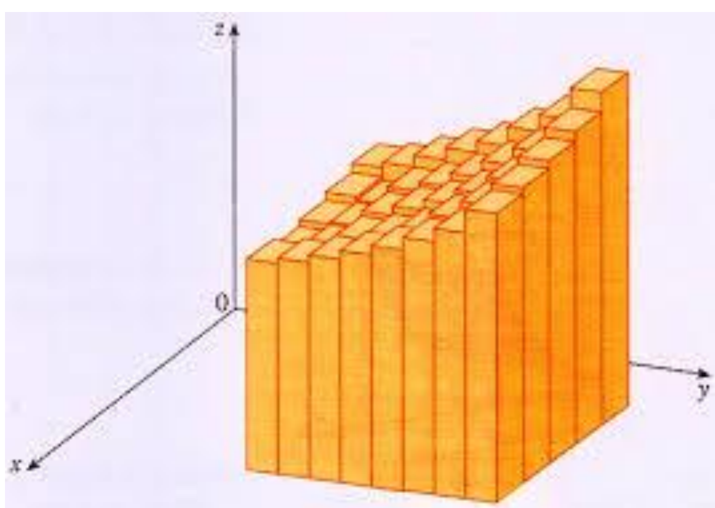


Figura 2

Luego

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_j\right) \Delta x_i \Delta y_j \cdots (1)$$

De (1) surge la definición de integral doble

Definición

Sea f una función de dos variables definida en una región plana:

$$\boldsymbol{R = [a, b] \text{ x } [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\}}$$

Al límite (1) se le denomina la integral doble de f en R y se le denota de la siguiente manera:

$$\iint\limits_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f(x, y) \, dA}$$

Además, si existe el límite (1) diremos que f es integrable en R.

A continuación, daremos las siguientes propiedades para las integrales dobles

Propiedades

1.- Sea f una función de dos variables definida en una región plana:

$$R = [a, b] \text{ x } [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\}$$

Si f está acotada en R y si f es continua en R , entonces f es integrable en R

Este resultado da las condiciones para que el límite exista y por consiguiente f sea integrable en R.

2.- Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones de dos variables continuas y acotadas en

$$R = [a, b] \text{ x } [c, d]$$

entonces se cumplen:

i) Linealidad

$$\iint\limits_R (f(x,y) \pm g(x,y)dA) = \iint\limits_R f(x,y)\,dA \pm \iint\limits_R g(x,y)\,dA$$

$$\iint\limits_R cf(x,y)dA = c\iint\limits_R f(x,y)\,dA\ ;\ \forall c \in \mathbb{R}$$

ii) Monotonía

Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ entonces

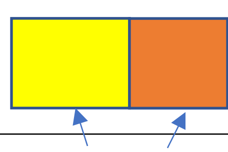
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \leq \iint\limits_R g(x,y)\,dA$$

iii) $Si\ f(x,y) \geq 0\ en\ R\ entonces\ \iint\limits_R f(x,y)\,dA \geq 0$

iv) Aditividad respecto a rectángulos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$$

Donde



$R = R_1 + R_2$; $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y $R_1 \cup R_2 = R$

v) $\left|\iint\limits_R f(x,y)\,dA\right| \leq \iint\limits_R |f(x,y)|\,dA$

$vi)\ Si\ f(x,y) \geq 0;\ \forall (x,y) \in R$ entonces

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\, dA$$

Es el volumen bajo la superficie $z = f(x,y)$ y sobre el rectángulo R

$Si\ f(x,y) \leq 0;\ \forall (x,y) \in R$ entonces

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = -V$$

Esto es, la integral doble es igual al negativo del volumen de la superficie comprendida entre el gráfico de f y sobre la región R.

Si f es negativa en una parte de R, como la figura

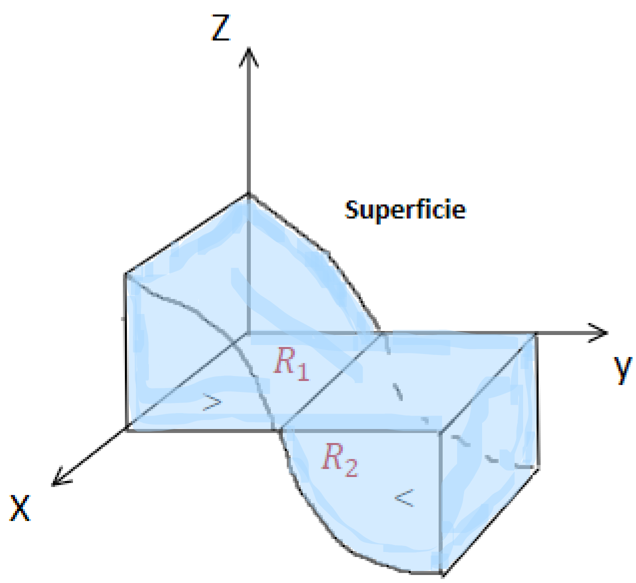


Figura 3

Luego el volumen real de esta superficie es:

$$\iint\limits_{R = R_1 \cup R_2} |f(x,y)|\, dA$$

$vii)\ Teorema\ de\ Fubini$

Sea $f(x,y)$ continua en la región plana

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leq x \leq b\ \wedge\ c \leq y \leq d\}$$

Entonces

$$\iint f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

Las integrales

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \quad ; \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

Se llaman integrales iteradas.

Este importante teorema entrega la manera de evaluar una integral doble.

Ejemplo 1

$Calcular$: $\int_0^1 \int_{-1}^2 xy^2 dy dx$

Solución

$$\int_{\mathbf{0}}^1 \int_{-1}^2 xy^2 dy dx = \int_{\mathbf{0}}^1 \left[x \frac{y^3}{3}\right]_{\mathbf{-1}}^{\mathbf{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x \frac{(2)^3}{3} - x \frac{(-1)^3}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} x + \frac{x}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Observe que

$$\int_{-1}^{2}\int_0^1 xy^2 dxdy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_0^1 dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\frac{y^2}{2}dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Integrales dobles sobre regiones más generales

1.-

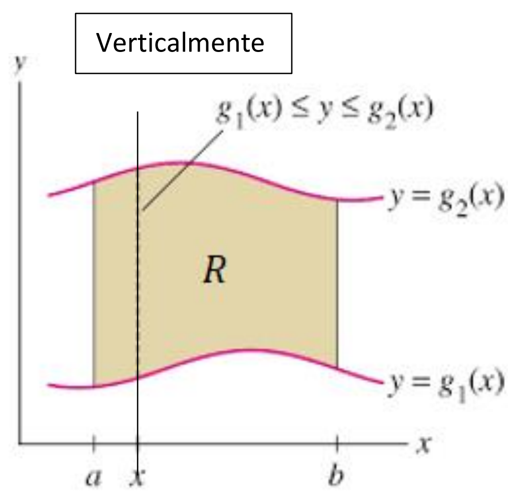


Figura 4

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

2.-

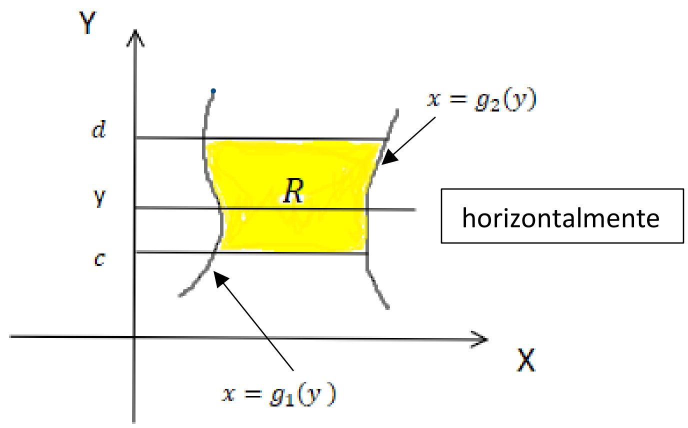


Figura 5

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 2

Determinar el volumen del prisma cuya base es el triángulo en el plano XY acotado por el eje X y las rectas $y = x, x = 1$ y cuya parte superior está en el plano $z = f(x,y) = 3 - x - y$ (ver figura 5).

Solución

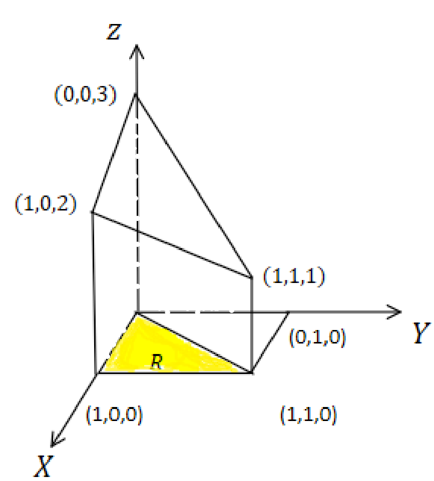
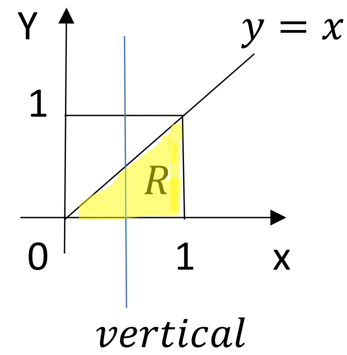


Figura 5



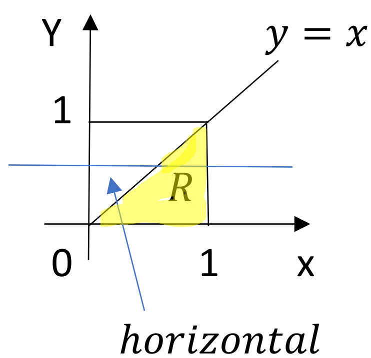
(1)

De (1) $V = \iint_R f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)dydx$

$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - 3\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = 1 - 0 = 1u^3$$



(2)

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left(3 - \frac{1}{2} - y\right) - \left(3y - \frac{y^2}{2} - y^2\right)\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 3 - 2 = 1u^3$$

Observación

Si $f(x, y) = 1$, la integral doble representa el área de la región R, es decir:

$$A = \iint_R dA$$

$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx}$$

vertical

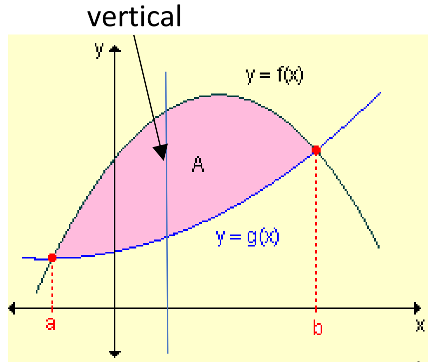


Figura 7

Sabemos que

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Ahora usando integrales dobles

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dydx$$

$$= \int_a^b [y]_{g(x)}^{f(x)}\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = A$$

Ejemplo 3

Calcule el área de la región R acotado por $y = x$ y $y = x^2$ en el 1^{er}cuadrante.

Solución

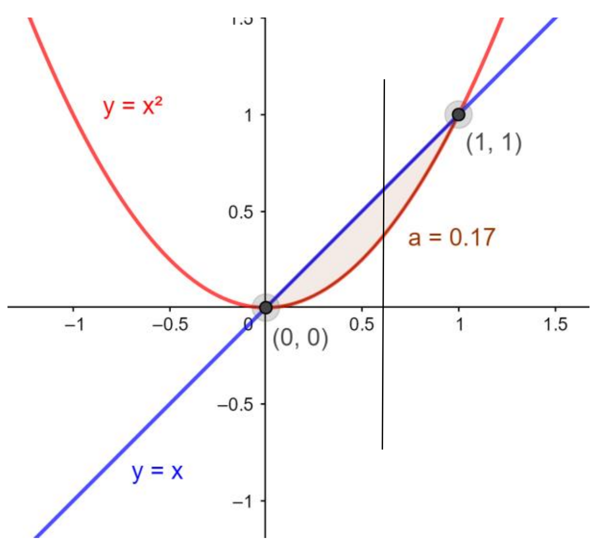


Figura 8

$$A = \iint dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx$$

$$= \int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \approx 0{,}17u^2$$

Ejemplo 4

Calcule el área de la región R acotado por la parábola y la recta siguientes: $2y = 16 - x^2$ y $x + 2y - 4 = 0$

Solución

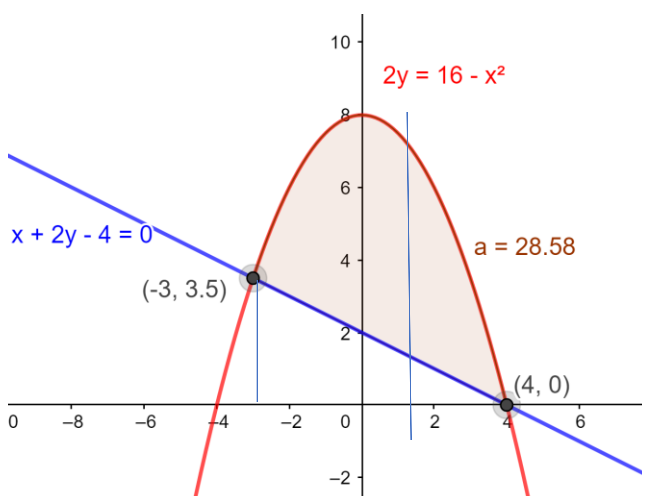


Figura 9

$$A = \int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy\, dx$$

$$= \int_{-3}^{4} [y]_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-3}^{4} \left(\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right)\right) dx$$

$$= \int_{-3}^{4} (6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}) dx$$

$$\left[6x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_{-3}^{4}$$

$$= \left(24 + 4 - \frac{32}{3}\right) - \left(-18 + \frac{9}{4} + \frac{27}{6}\right)$$

$$= \left(28 - \frac{32}{3}\right) - \left(-18 + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{84 - 32}{3}\right) - \left(\frac{-72 + 9 + 18}{4}\right)$$

$$= \frac{52}{3} + \frac{45}{4}$$

$$= \frac{208 + 135}{12}$$

$$= \frac{343}{12} = 28{,}58\ u^2$$