Clase nº12

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

24 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Comprender el teorema fundamental del cálculo y Regla de Barrow.

Teorema 26 (Teorema del valor Medio para integrales)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Observación

Al número $f(c)$ se le llama **valor promedio o medio de f en** $[a, b]$

Definición 27

Si f es una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$, $a \leq b$, entonces se define el número

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación

Al considerar $a = b$ en la definición anterior, tenemos que

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ejemplo 49

Verifique que el valor promedio de la función $f(x) = x$ en $[a, b]$ es el punto medio del intervalo $[a, b]$.

Por T. 26

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{2}.$$

Definición 28

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable entonces, ella es integrable en los subintervalos $[a, x]$, para todo $x \in [a, b]$. Luego, tiene sentido la siguiente definición,

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds.$$

F resulta ser una función con dominio $[a, b]$ y los extremos del intervalo toma valores: $F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(s)\, ds$. Llamaremos a F la **función integral de f.**

Teorema 29(Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función integral de f. Si f es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ y $a \leq x_0 \leq b$. Como f es continua en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Para $0 < h < \delta$ se tiene

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_a^{x_0+h} f(s)\,ds - \int_a^{x_0} f(s)\,ds}{h} - f(x_0) \right|$$

Teorema 29(Teorema Fundamental del Cálculo)

$$= \left| \frac{\int_a^{x_0} f(s)\,ds + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,ds - \int_a^{x_0} f(s)\,ds}{h} - f(x_0) \right|$$

Revisar ej. 43

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,ds - h\,f(x_0)}{h} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,ds - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,ds}{h} \right|$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(s) - f(x_0)\,ds}{h} \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{|f(s) - f(x_0)|}{h}\,ds$$

$$< \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\varepsilon}{h}\,ds = \frac{h \cdot \varepsilon}{h} = \varepsilon.$$

Analogamente, si $-\delta < h < 0$,

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) - f(x_0)\, ds \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| - \int_{x_0+h}^{x_0} f(s) - f(x_0)\, ds \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0+h}^{x_0} f(s) - f(x_0)\, ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(s) - f(x_0)|\, ds < \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon\, ds$$

$$= \frac{1}{|h|} (x_0 - (x_0+h))\, \varepsilon = \frac{-h}{|h|} \varepsilon = \varepsilon .$$

$\therefore$, para $0 < |h| < \delta$ se cumple

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Es decir,

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Teorema 30(Regla de Barrow)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que $g'(x)=f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a).$$

Dem: Sea $F(x)=\int_a^x f(s)\,ds$ con $x\in[a,b]$.

Como f es continua en $[a,b]$ entonces por T.F.C. Tenemos que F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.

Por lo tanto, $F'(x)=g'(x)$ $\forall x\in[a,b]$ y

Teorema 30(Regla de Barrow)

Luego $F(x) = g(x) + C$. Como $F(a) = g(a) + C$

y $F(a) = 0$, entonces $C = -g(a)$.

Por lo tanto, $F(x) = g(x) - g(a)$ para $x \in [a, b]$.

Así, para todo $x \in [a, b]$ se tiene

$$\int_a^x f(s)\,ds = g(x) - g(a).$$

En particular, si $x = b$ se tiene

$$\int_a^b f(s)\,ds = g(b) - g(a).$$

Ejemplo 50

Calcular la siguiente integral utilizando la Regla de Barrow.

$$\int_a^b x^n \, dx \qquad , \; n \in \mathbb{N} .$$

Sean $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ y $g'(x) = x^n$.

Luego , $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Así , $\displaystyle\int_a^b x^n dx = g(b) - g(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

$$= \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} .$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.