Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
2do. semestre 2020

CLASE No. 21

COMBINATORIA

¿Qué es la Combinatoria? La combinatoria estudia la manera de ordenar objetos y las propiedades de esas posibles ordenaciones.

ARREGLOS CON REPETICIÓN

Un ejemplo previo: Habrán visto alguna vez uno de esos candados a los cuales se les llama "candado de combinación". Nosotros en principio les llamaremos "candados de números". Después ustedes mismos dirán porqué. Si el candado tiene 3 discos y en cada uno aparecen los dígitos 0, 1, 2, ... 9. ¿Cuántos números distintos de 3 dígitos puedo formar?

Desde el 000 al 999 son 1000 números distintos. Analicemos un poco la situación. Son

10 posibilidades en el disco 1
10 posibilidades en el disco 2
10 posibilidades en el disco 3

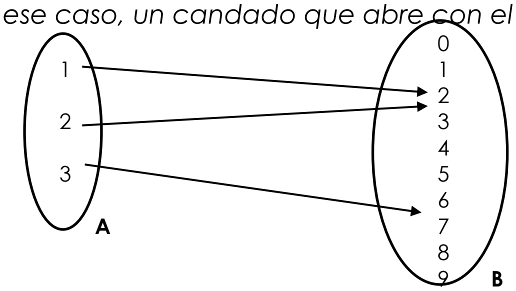
EN TOTAL: *10x10x10 = 1000 posibilidades =* 10^3

Definición: Los arreglos o variaciones con repetición de n elementos tomados en grupos de p son las distintas agrupaciones formadas con p elementos, pudiendo repetirse éstos, elegidos entre n elementos. Una variación es distinta a otra tanto si difieren en algún elemento tanto como si éstos están situados en distinto orden. El número de arreglos con repetición que se pueden formar es:

$$\boxed{AR_p^n = n^p}$$ **(número de arreglos con repetición)**

Otra definición posible: **Arreglos con repetición de n elementos en grupos de p** son todas las posibles funciones de dominio {1, 2, ... , p} y codominio B de n elementos.

En ese caso, un candado que abre con el número 227 sería:



FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Definición: Llamaremos así al producto de todos los números naturales comprendidos entre éste y 1.

Ejemplo: el factorial de 5 es 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Ejercicio: Jugando con la calculadora prueba a ver hasta el factorial de qué número puedes llegar. ¿Lo hiciste ya? Crece rápido, eh!

Definición: Por convención (nos conviene que así sea) 0! = 1.

ARREGLOS SIMPLES

Ejemplo: ¿Qué pasaría si en el problema del candado eliminamos los números que tengan dígitos repetidos? ¿Cuántos quedan?

Tenemos: 10 posibilidades en el disco 1
9 posibilidades en el disco 2
8 posibilidades en el disco 3

EN TOTAL: 10 x 9 x 8 = 720 posibilidades

Observen que: $10 \times 9 \times 8 = \frac{10!}{7!}$

Definición: Los **Arreglos o Variaciones de *n* elementos tomados en grupos de *p*** son las distintas agrupaciones formadas con ***p*** elementos, elegidos entre los ***n*** elementos de que se dispone, considerando una variación distinta a otra en tanto <u>difieran en un elemento o si están en distinto orden</u>. El número de arreglos de n en p es:

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}}$$ **(número de arreglos simples)**

Es evidente que ahora necesitamos que sea $n \geq p$.

Ejercicios:

¿Cuántas palabras de 4 letras con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra E C U A D O R sin repetir ninguna?

Respuesta: 840

¿Cuántas de ellas empiezan con D?

Respuesta: 120

¿Cuánta empiezan con DO como DORA? Escríbelas todas.

Respuesta: 20 (¡pero hay que escribirlas, eh!)

¿Cuántas de las 840 palabras tienen la letra D?

Respuesta: 480

PERMUTACIONES

¡Tanta matemática! Olvidémosnos de ella yendo al cine. Somos 3 amigos y tenemos 3 butacas numeradas, ¿de cuántas maneras distintas nos podemos sentar?

El primer amigo encuentra 3 butacas libres:	*3 posibilidades*
El 2º amigo tiene	*2 posibilidades*
El 3er. amigo	*1 posibilidad*
EN TOTAL:	*3 x 2 x 1 = 6 posibilidades*

¿Observaron que son arreglos con n=p?

Definición: **Permutaciones de *n* elementos** son todas las distintas agrupaciones de esos elementos que difieren una de otra <u>únicamente en el orden de colocación</u>. El número permutaciones es:

$$\boxed{P_n = n!}$$ **(número de permutaciones)**

En el ejemplo anterior:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

COMBINACIONES

Ejemplo previo: un país tiene 5 tenistas buenos y se desea enviar 3 de ellos a la Copa Davis. ¿Cuántas posibilidades de hacerlo hay?

Son 10 posibilidades:

123 124 125 134 135 145 234 235 245 345

No ponemos 513 ya que esa posibilidad es la misma que 135. Por tanto: ***ahora no importa el orden de colocación.***

Definición: **Combinaciones simples de *n* elementos tomados en grupos de p** son los distintos conjuntos de ***p*** elementos que se pueden formar, eligiendo éstos de entre los ***n*** elementos de que disponemos, considerando distinto a uno de otro sólo <u>si difieren en algún elemento,</u> <u>sin importar el orden de colocación</u>. El número de combinaciones es:

$$\boxed{C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$ **(números combinatorios)**

En el ejemplo anterior,

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ \ 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

Propiedad 1: $C_0^n = 1$ y $C_1^n = n$ $\forall n$

Propiedad 2: **(Comb. complementarias)** $C_k^n = C_p^n$ si $k + p = n$

Propiedad 3: **(Fórmula de Stieffel)** $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

Propiedad 4: **(Triángulo de Pascal)**

C_0^0	1	Suman $2^0=1$
C_0^1 C_1^1	1 1	Suman $2^1=2$
C_0^2 C_1^2 C_2^2	1 2 1	Suman $2^2=4$
C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3 (y se sigue así)	1 3 3 1	Suman $2^3=8$

Por la Propiedad de Stieffel, cada número combinatorio es igual a la suma de los dos que están sobre él en la fila superior y los números combinatorios de los lados laterales del triángulo son 1.

EJERCICIOS

1. Calcular 18!/16! *Respuesta: 306*

2. ¿Cuántas palabras distintas de 4 letras (con o sin sentido), se pueden formar con las letras de la palabra MURCIÉLAGO sin repetir letras?
Respuesta: 5040

3. ¿Cuántos números de tres dígitos (del 100 al 999) no contienen ningún 8?
Respuesta: 648

4. Juegan 12 equipos de fútbol un campeonato donde hay medalla de oro, plata y bronce. No se admiten empates. ¿Cuántas ternas posibles hay?
Respuesta: 1320

5. (a) En el problema anterior, ¿cuántos partidos deben jugarse si queremos que los 12 equipos se enfrenten solo una vez con cada uno de sus adversarios?
Respuesta: 66
(b) ¿Y si hay partidos de ida y vuelta? *Respuesta: 132*

6. Hallar m: $A_3^{m+1} = m^3 - 8$ *Respuesta: 8*

7. Hallar q: $C_2^{q+3} = 45$ *Respuesta: 7*

8. Al llegar a una reunión de trabajo, todos los asistentes se saludan dándose un apretón de manos. ¿Cuántas personas asistieron si en total hubo 36 saludos?

Pista: ¿son arreglos o combinaciones? *Respuesta: 9*