Facultad de Ciencias
Plan de nivelación
MATEMÁTICAS
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 3

ECUACIONES Y FUNCIONES

ECUACIÓN: Igualdades con una o varias incógnitas que hay que encontrar. Incógnitas x, y, z …

No hay que confundir ecuación con identidad, que son igualdades que se cumplen $\forall x \in R$, o sea cualquiera que sea el valor de la incógnita.

Identidad: $(x+2)(x+3) \equiv x^2 + 5x + 6$

Ecuación: $(x+2)^2 = 2x^2 - 5x + 3$

Como las ecuaciones son igualdades, hay que mantenerlas siempre equilibradas como si fuera una balanza.

$$2x - 3 = 11$$

Sumemos +3 a cada plato

$$2x - 3 + 3 = 11 + 3$$

La balanza sigue equilibrada

$$2x = 14$$

Multipliquemos cada miembro por $\frac{1}{2}$:

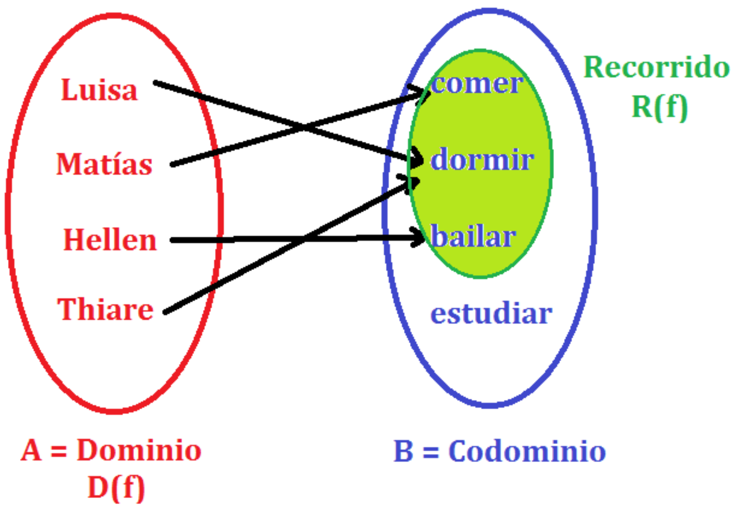
$$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot 14$$

El conjunto solución es: $S = \{7\}$

Fuimos pasando por ecuaciones que son todas <u>equivalentes,</u> es decir que <u>tienen el mismo conjunto solución</u>. La solución es la misma en todas ellas. A veces no se puede hacerlo. En ese caso, se deben verificar todas las soluciones o restringir el conjunto de soluciones.

FUNCIÓN

¿Qué es una función? Una función es una relación entre dos conjuntos A y B en la cual todo elemento de A tiene exactamente una imagen en B.



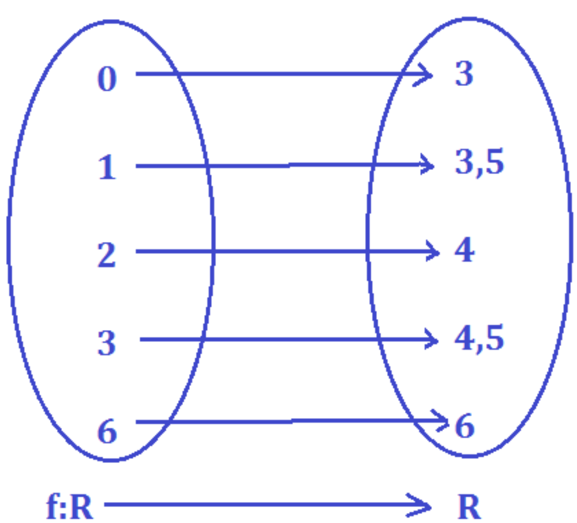
F: A → B

FUNCIONES NUMÉRICAS

A y B son conjuntos numéricos. Por lo general:

f: R → R

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$



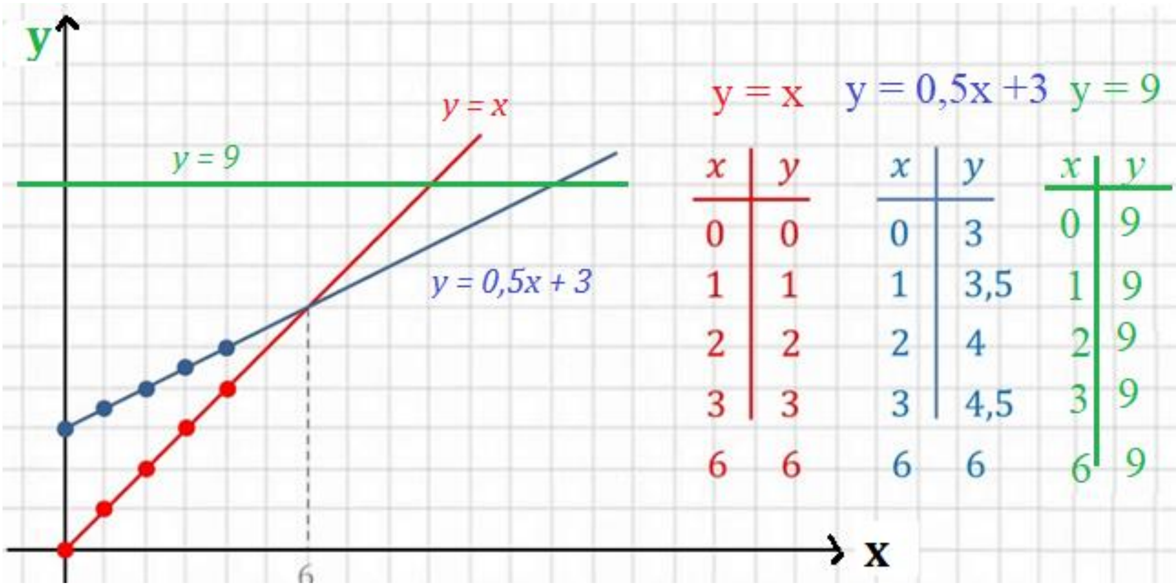
$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 3 = 3{,}5$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 3 = 4{,}5$$

Y luego podemos graficar los resultados obtenidos en un sistema de ejes x-y



x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
6	6

x	y
0	3
1	3,5
2	4
3	4,5
6	6

x	y
0	9
1	9
2	9
3	9
6	9

ECUACIÓN DE 2º. GRADO

Toda ecuación que pueda llevarse a esta forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

La x es la incógnita. Resolver la ecuación significa hallar el valor de x para que la ecuación se convierta en una identidad numérica.
Se resuelve con la fórmula:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La expresión bajo la raíz se llama "discriminante Δ" y mediante ella se decide lo que puede ocurrir.

<u>Discusión:</u>

Caso 1: Si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, x_1 y x_2.

Ejemplo:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$A = 1 \quad B = -2 \quad C = -3$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

Recuerden, primero la potencia, luego la muliplicación, luego la suma o resta, …

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$
$$S = \{-1, 3\}$$

Caso 2: Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales pero iguales, $x_1 = x_2$.

Ejemplo:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$A = 1 \quad B = -4 \quad C = 4$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

Recuerden, primero la potencia, luego la muliplicación, luego la suma o resta, …

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$
$$S = \{2\}$$

Caso 3: Si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas.

Ejemplo:

$$x^2 + 6x + 25 = 0$$
$$A = 1 \quad B = 6 \quad C = 25$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1}$$

Recuerden, primero la potencia, luego la muliplicación, luego la suma o resta, …

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

Introducimos un nuevo número i tal que

$$i^2 = -1$$

No es un número real.
Por tanto …

$$(8i) \cdot (8i) = 64.\, i^2 = -64$$
$$x = \frac{-6 \pm 8i}{2}$$
$$x_1 = -3 + 4i \quad x_2 = -3 - 4i$$

Propiedades de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Factorización:

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2)$$

Una pillería:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Busco dos números que sumen (-2) y cuyo producto sea (-3): -3 y 1

$$(x-3)(x+1)=0$$

Y recuerdo que para que un producto sea 0. Uno de esos factores debe ser 0:

$$x-3=0 \quad \text{o} \quad x+1=0$$
$$x=3 \quad \text{o} \quad x=-1$$
$$S=\{-1,3\}$$

FUNCIONES DE 2º. GRADO

Es una función de la forma

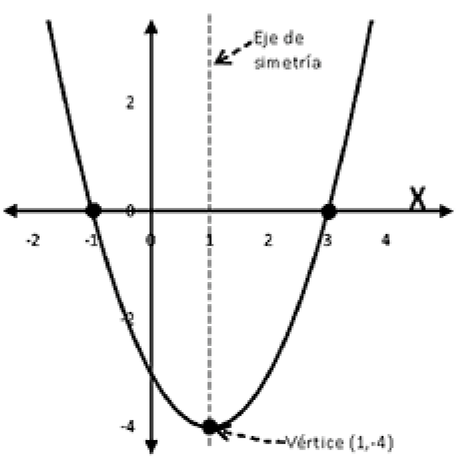
$$y=f(x)=Ax^2+Bx+C$$

x e y son las variables de la función. Su gráfica es una parábola de eje vertical.

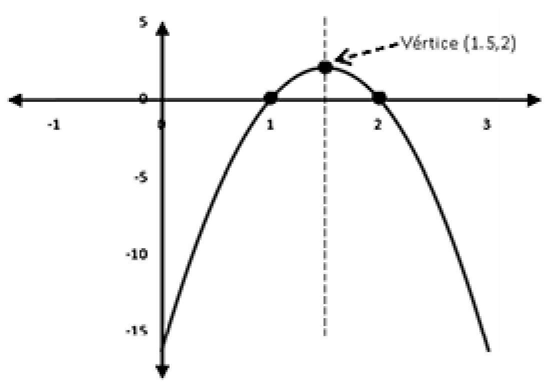
Si $A>0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba (gráfico de la izquierda).

Si $A<0$, las ramas de la parábola abren hacia abajo (gráfico de la derecha).

$f(x) = X^2 - 2X - 3$



$f(x) = -8X^2 + 24X - 16$



Vértice: intersección de la parábola con su eje.

$$V\left(-\frac{B}{2A},\frac{4AC-B^2}{4A}\right)$$

Los puntos de corte con el eje x son:

$$y = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

El punto de corte con el eje y es:

$$x = 0$$
$$y = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C$$
$$y = C$$

Punto: $(0, C)$

INECUACIONES

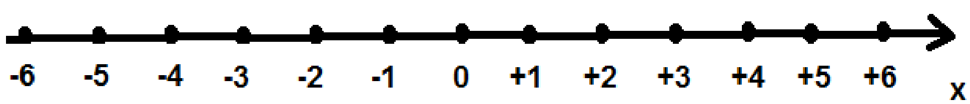
En lugar de un signo de =, tenemos:

$$< \qquad \leq \qquad > \qquad \geq$$

que se leen

(menor) (menor o igual) (mayor) (mayor o igual)

Ahora hay que tener más cuidado al operar:



El signo de menor es más amigable que el mayor. Todo queda en el mismo sentido que en el eje x.

Elijamos dos números:

$$2 < 4$$

Multipliquemos ambos miembros por un números positivo cualquiera:

$$3 \cdot 2 < 3 \cdot 4$$

$$6 < 12$$

lo cual es verdadero

En cambio si multiplicamos por un número negativo cualquiera:

$$2 < 4$$

$$(-5) \cdot 2 < (-5) \cdot 4$$

$$-10 < -20$$

Es falso!!!!!! El signo debe ser cambiado de sentido …

$$-10 > -20$$

Por tanto, si se multiplican los dos miembros de la inecuación por un número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplo: $$-3x + 8 \geq 17$$

$$-3x \geq 17 - 8$$

$$-3x \geq 9$$

Multiplicamos ambos miembros por (-1) que es negativo y, por tanto, cambiamos el sentido de la desigualdad:

$$3x \leq -9$$

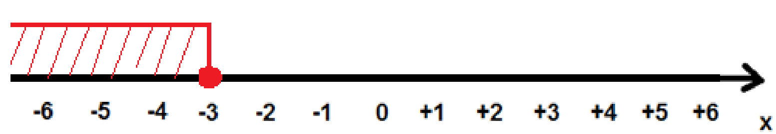
¡¡¡Cuidado!!!

$$x \leq -\frac{9}{3}$$

$$x \leq -3$$

Todos los números a la izquierda de -3, inclusive -3, son solución.

$$S = \{x \in R, x \leq -3\}$$

$-\infty$  $+\infty$

La pelotita rellena indica que -3 también es solución

$$S = \,]-\infty, -3]$$

¡¡¡Atención!!!:
Jamás traspongan un negativo dividiendo en una inecuación.

Ejemplo 2: $$4x + 8 > 2x + 12$$

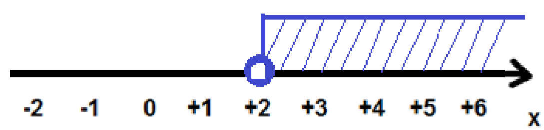
$$4x - 2x > 12 - 8$$

$$2x > 4$$

$$x > \frac{4}{2}$$

$$x > 2$$

$$S = \{x \in R, x > 2\}$$

$-\infty$  $+\infty$

La pelotita sin relleno indica que 2 NO es solución

$$S = \,]2, +\infty[$$