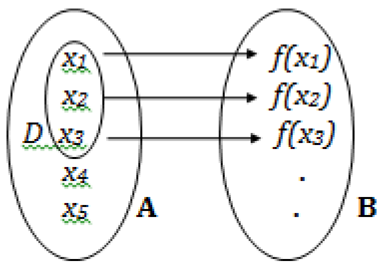
Transformaciones lineales

Revisemos algunos conceptos previos.

Definición: Una **función** es cualquier relación en la cual todo elemento del conjunto de partida **A** tiene a lo sumo una **imagen** en **B** (conjunto de llegada o codominio)**.**



Observa que los elementos x_4 y x_5 del conjunto de partida NO TIENEN IMAGEN, decimos entonces que no pertenecen al **dominio** $D = \{x_1, x_2, x_3\}$ de la función y escribimos:

$$\mathbf{f: D \rightarrow B}$$

Los elementos de B que tienen preimagen en A (esto es, que reciben flecha) forman el **recorrido de la función.**

Las funciones con las cuales trabajaremos son funciones f: **D → R** donde el domino **D** es un subconjunto de **R.** Esto es, el conjunto de partida y el de llegada son conjuntos de números reales.

Transformaciones lineales

Consideremos ahora un análogo a las funciones. En el dominio tendremos a un subespacio vectorial V y en el codominio a un espacio vectorial W. Y consideremos transformaciones de la forma:

$$T: V \rightarrow W$$

Definición: diremos que **una transformación** de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W **es lineal** si se cumplen las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v}\, \in V}$$

$$\boldsymbol{T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u}) \qquad \forall\, \vec{u} \in V\ y\ \forall \alpha \in R}$$

Toda transformación lineal tiene una matriz A asociada que cumple que

$$\boldsymbol{T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}} \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$$

Ejemplo 1:

Dada la transformación **T: R² → R²** que cumple:

$$T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

¿Cuál es su matriz asociada?

Solución:

Como la transformación es lineal:

$$\boldsymbol{T(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) = T(\vec{\imath}) + 3T(\vec{\jmath})}$$

$$\boldsymbol{T(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = T(\vec{\imath}) + T(\vec{\jmath})}$$

Por tanto:

$$\begin{cases}\boldsymbol{2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = T(\vec{\imath}) + 3T(\vec{\jmath})}\\ \boldsymbol{\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} = T(\vec{\imath}) + T(\vec{\jmath})}\end{cases}$$

Y resolvemos el sistema donde $\boldsymbol{T(\vec{\imath})}$ y $\boldsymbol{T(\vec{\jmath})}$ son las incógnitas.

$$\begin{cases}\boldsymbol{2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = T(\vec{\imath}) + 3T(\vec{\jmath})} & (+\boldsymbol{1})\\ \boldsymbol{\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} = T(\vec{\imath}) + T(\vec{\jmath})} & (-\boldsymbol{1})\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} = 2T(\vec{\jmath})}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} = T(\vec{\jmath})}$$

Reemplazando, hallamos $\boldsymbol{T(\vec{\imath})}$:

$$\boldsymbol{\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} = T(\vec{\imath}) + \frac{1}{2}\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{T(\vec{\imath}) = \frac{1}{2}\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}}$$

Por tanto:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\8\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\-3\end{pmatrix}$$

Ahora observemos que si multiplicamos el vector $\boldsymbol{\vec{\imath}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ por una matriz, queda …

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz buscada, la armamos con los vectores $\boldsymbol{T}(\vec{\imath})$ y $\boldsymbol{T}(\vec{\jmath})$ como vectores columna.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\8 & -3\end{pmatrix}$$

Y se comprueba también fácilmente que:

$$\boldsymbol{T}(\vec{\imath}) = \boldsymbol{A}\cdot\vec{\imath} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{T}(\vec{\jmath}) = \boldsymbol{A}\cdot\vec{\jmath}$$

Comprobemos el resultado, multiplicando los vectores dados por la matriz A:

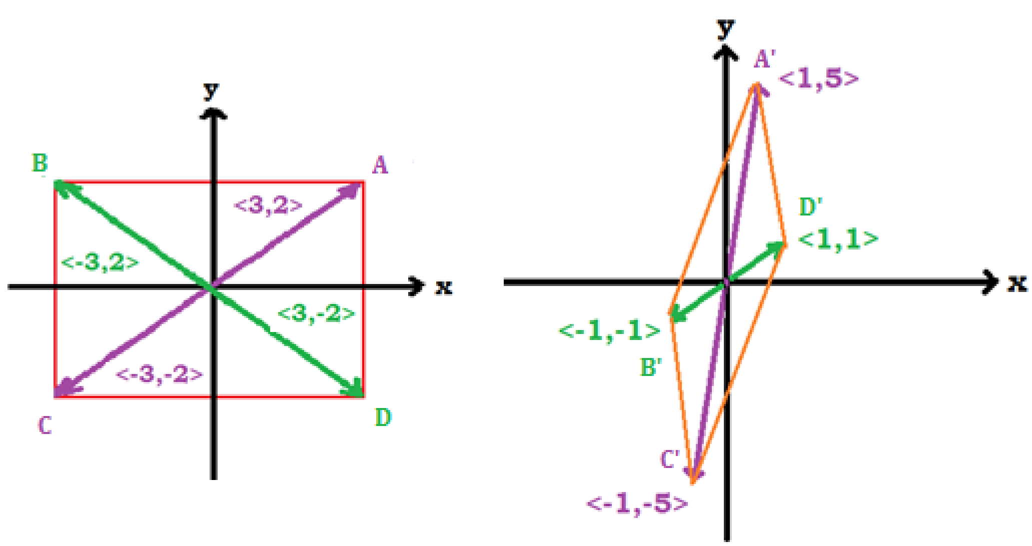
$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

Claramente, encontramos la matriz A.

Interpretación geométrica de una transformación lineal

Observen el "rectángulo de la figura" formado por cuatro vectores. Si le aplicamos una transformación lineal **T: R² → R²**, se deformará como en la figura de la derecha …



Observen que es:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Las otras dos condiciones, son consecuencia de la condición de linealidad, ya que aplicando la condición …

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}})$$

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-5}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

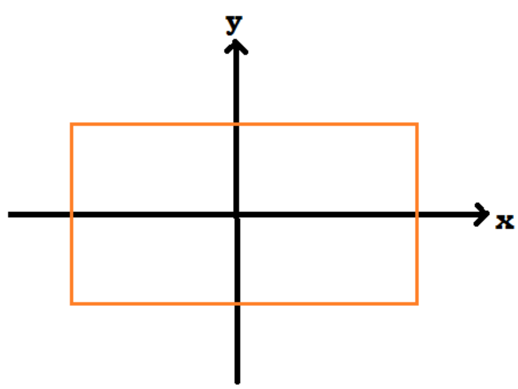
Observen, además, que el centro del rectángulo tiene que seguir siendo el centro del cuadrilátero, ya que:

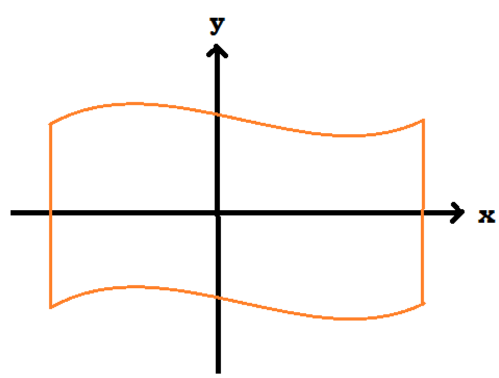
$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}})=\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}})$$

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}\right]=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Es decir, la transformación deforma la figura, pero el punto medio de un segmento sigue siéndolo, por tanto, la transformación transforma segmentos en segmentos.

¿En qué casos no sería una transformación lineal? Cuando la figura se traslada o sus lados dejan de ser rectos, la transformación no es lineal. Una transformación que transforma a un rectángulo en una bandera flameando **no es lineal.**





Cambio de base en una transformación lineal

¿Qué ocurriría ahora si expresáramos la transformación **T:** $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}_{B_c}$$

no en la base canónica B_c = {(1,0),(0,1)} sino en la base de los vectores B_p = {(2,1),(-1,3)}?

Sabemos que la matriz de pasaje de $B_p \to B_c$ sería:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Una manera de obtener esa matriz sería tratar de llevar todo de la base B_p a la base B_c, aplicar allí la transformación T cuya matríz en la base canónica es A y luego regresar de la base B_p a la base B_c.

$$\mathbf{B_P} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \mathbf{B_c} \qquad \textbf{transformación } \boldsymbol{T(\vec{v})} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{B_c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}} \mathbf{B_p}$$

La matriz sería entonces, recordando que la primera transformación corresponde a la matriz de más a la derecha, y así sucesivamente …

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

O sea … $\mathbf{B = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

Les queda a ustedes calcular cual sería esa matriz **B.** Exploraremos estas cuestiones en las clases siguientes.

Ejercicios:

1. (a) En el ejemplo anterior halle la matriz de la transformación que lleva del rectángulo al romboide?

(b) Luego, halle la matriz de **la transformación inversa $\mathbf{T^{-1}}$** que lleva del romboide al rectángulo?

(c) ¿Qué relación hay entre las matrices de una y otra transformación?

2. (a) Sabiendo que $\mathbf{T: R^2 \to R^2}$ es una transformación lineal, y que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hallar $T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) Hallar la matriz asociada.

(c) ¿Y cuál es la matriz que transforma

$$T'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}?$$

A esa transformación la llamaremos la **transformación inversa** de la transformación T. ¿Cuál es su matriz?

3. Sabiendo que la transformación **T: M$_{\mathbf{2x2}}$ → R** es lineal, y que:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=3 \qquad T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1 \qquad T\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=0 \qquad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$

hallar $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

4. Sabiendo que la transformación **T: P$^{\mathbf{2}}$(x) → R** es lineal, y que:

$$T(x+2)=1 \qquad T(1)=5 \qquad T(x^2+x)=0$$

hallar $T(2-x+3x^2)$

Respuesta: 46

5. Sabiendo que **T : V → V** es una transformación lineal y que:

$$\boldsymbol{T(\vec{v}+2\vec{w})=3\vec{v}-\vec{w}} \qquad \boldsymbol{T(\vec{v}-\vec{w})=2\vec{v}-4\vec{w}}$$

determinar $T(\vec{\boldsymbol{v}})$ y $T(\vec{\boldsymbol{w}})$