Termodinámica

Profesor: J. R. Villanueva II Semestre 2022

Solución Prueba 2

1. Un mol de gas ideal con capacidad calorífica C_V conocida efectúa un proceso en el que la entropía S depende de la temperatura absoluta T según la ley

$$S = R\frac{T_0}{T} + R\ln\sqrt{1+\frac{T}{T_0}},$$

donde R y T_0 son constantes. La temperatura del gas cambio desde $T_1 = \alpha T_0$ hasta $T_2 = \beta T_0$, con $\beta > \alpha > 0$. Hallar:

   (a) la capacidad calorífica molar del gas en función de su temperatura. ¿En qué intervalo de temperaturas es negativa?;

   (b) la cantidad de calor comunicado al gas;

   (c) el trabajo realizado por el gas.

2. La ecuación de estado de Clausius viene dada por

$$\left(p + \frac{a}{T(v+c)^2}\right)(v-b) = RT,$$

donde a, b, c son parámetros constantes que dependen de cada gas. Determinar

   (a) La dimensión física de cada uno de los parámetros a, b y c.

   (b) la energía interna, suponiendo que en el límite $v \to \infty$ ésta tiende a la expresión del gas ideal.

   (c) La capacidad calorífica c_V;

   (d) el cambio de entropía cuando el sistema pasa desde $v_i = 3b$ a $v_f = 6b$, aumentando su temperatura n veces.

3. Analizar un ciclo de Carnot en el caso especial de una sustancia ideal paramagnética, para demostrar que la relación de dos temperaturas empíricas definidas por la ley de Curie

$$\theta = \frac{DH}{m},$$

es igual al cociente de las correspondientes temperaturas termodinámicas. La energía interna de una sustancia paramagnética ideal depende sólo de T.

4. Un gas ideal realiza un ciclo que se efectúa según una isoterma, una línea politrópica y una adiabata, con la particularidad de que el proceso isotérmico transcurre a la temperatura *máxima* del ciclo. Determinar la eficiencia de este ciclo, si la temperatura absoluta en sus límites varía n veces. Dibuje el ciclo mostrando claramente donde hay absorción y cesión de calor.

P1 a) $S = \frac{RT_0}{T} + \frac{1}{2}R\ln\left(1+\frac{T}{T_0}\right) = R\left(\frac{T_0}{T}\right) + R\ln\sqrt{1+\frac{T}{T_0}}$

$$dS = -\frac{RT_0}{T^2}dT + \frac{R}{2T_0}\cdot\frac{1}{1+T/T_0}dT$$

$$\to TdS = -\frac{RT_0}{T}dT + \frac{R}{2}\frac{T}{T_0+T}dT = \frac{R}{2}\left(\frac{T}{T_0+T} - \frac{2T_0}{T}\right)dT = C\,dT$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{R}{2}\left(\frac{T}{T_0+T} - \frac{2T_0}{T}\right)}$$

$$C<0 \to \frac{T}{T_0+T} < \frac{2T_0}{T} \to T^2 < 2T_0^2 + 2T_0T$$

$$T^2 - 2T_0T < 2T_0^2 \quad / + T_0^2$$

$$T^2 - 2T_0T + T_0^2 < 3T_0^2$$

$$(T-T_0)^2 < 3T_0^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}T_0 < T - T_0 < \sqrt{3}T_0 \quad / + T_0$$

$$-(\sqrt{3}-1)T_0 < T < (\sqrt{3}+1)T_0$$

$$\Rightarrow C < 0 \Rightarrow \boxed{0 < T < (\sqrt{3}+1)T_0}$$

Temperatura absoluta.

(b) $Q = \int_{T_i}^{T_f} C\,dT = \int_{T_i}^{T_f}\frac{R}{2}\left(\frac{T}{T_0+T} - \frac{2T_0}{T}\right)dT = \frac{R}{2}\left[\int_{T_i}^{T_f}\left(\frac{T+T_0-T_0}{T_0+T} - \frac{2T_0}{T}\right)dT\right]$

$$Q = \frac{R}{2}\left[\int_{T_i}^{T_f}\left(1 - \frac{T_0}{T_0+T} - \frac{2T_0}{T}\right)dT\right] = \frac{R}{2}\left[T - T_0\ln(T_0+T) - 2T_0\ln T\right]$$

$$Q = \frac{R}{2}\left[(T_f - T_i) - T_0\ln\left(\frac{T_f+T_0}{T_i+T_0}\right) - 2T_0\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\right]$$

$$Q = \frac{R}{2}\left[T_0(\beta-\alpha) - T_0\ln\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right) - 2T_0\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$$

$$\boxed{Q = RT_0\cdot\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - RT_0\ln\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right]}$$

c) sabemos que $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = \Delta U - Q = C_V\Delta T - Q$

$$W = C_VT_0(\beta-\alpha) - RT_0\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + RT_0\ln\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right]$$

$$\boxed{W = C_VT_0(\beta-\alpha)\left(\frac{3-\gamma}{2}\right) + RT_0\ln\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right]}$$

P2) $P = \dfrac{RT}{v-b} - \dfrac{a}{T(v+c)^2}$

a) $[b] = [c] = L^3$ (Volumen)

$$[a] = [PT(v+c)^2] = \underbrace{[P(v+c)]}_{\substack{\text{Energía} \\ ML^2T^{-2}}} \cdot \underbrace{[(v+c)T]}_{L^3\,\Theta \leftarrow \text{Temperatura}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[a] = M L^5 T^{-2} \Theta}$$

b) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P$

$$\therefore \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2(v+c)^2} \Rightarrow T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{RT}{v-b} + \frac{a}{T(v+c)^2} = P + \frac{2a}{T(v+c)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = \frac{2a}{T(v+c)^2} \quad \Big/ \int dv$$

$$u = -\frac{2a}{T(v+c)} + f(T)$$

$v \to \infty \Rightarrow u = \epsilon RT$; $\epsilon = \frac{3}{2}; \frac{5}{2};$ etc (depende del gas)

$$\Rightarrow f(T) = \epsilon RT$$

$$\Rightarrow \boxed{u(T,v) = \epsilon RT - \frac{2a}{T(v+c)}}$$

c) $\boxed{C_v = \left(\dfrac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \epsilon R + \dfrac{2a}{T^2(v+c)}}$

d) $$T\,ds = du + P\,dv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + P\right] dv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv$$

$$\rightarrow ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv = \epsilon R\frac{dT}{T} + \frac{2a}{T^3(v+c)}dT + \frac{R\,dv}{v-b} + \frac{a\,dv}{T^2(v+c)^2}$$

$$ds = R\,d\ln T^\epsilon + R\,d\ln(v-b) - a\,d\left[\frac{1}{T^2(v+c)}\right]$$

$$ds = d\left[R\ln(T^\epsilon(v-b)) - \frac{a}{T^2(v+c)}\right].$$

$$d(s-s_i) = d\left\{R\ln\left[\frac{T^\epsilon(v-b)}{T_i^\epsilon(v_i-b)}\right] + \frac{a}{T^2(v+c)} - \frac{a}{T_i^2(v_i+c)}\right\}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S = R\ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^\epsilon\left(\frac{v-b}{v_i-b}\right)\right] + \frac{a}{T^2(v+c)} - \frac{a}{T_i^2(v_i+c)}}$$

$T_f = mT_i \wedge v_f = 2v_i = 6b \Rightarrow \boxed{\Delta S = R\ln\left(\frac{5}{2}m^\epsilon\right) + \frac{a}{m^2T_i}\left(\frac{m^2}{3b+c} - \frac{1}{6b+c}\right)}$

P3 $\qquad \theta = \dfrac{DH}{m}$

i) isotérmicas $\therefore$ $H(m) = \dfrac{\theta}{D} \cdot m \rightarrow$ A mayor temperatura θ mayor es la pendiente.

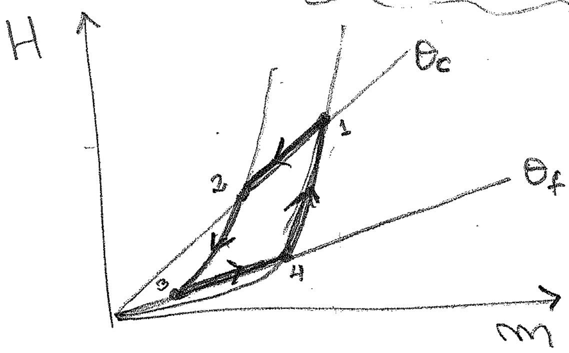
ii) Adiabáticas $\therefore$ $dQ = C_m d\theta - H\,dm = 0$

$$d\theta = D\frac{dH}{m} - \frac{DH}{m^2}dm \Rightarrow C_m D\frac{dH}{m} - C_m D\frac{H}{m^2}dm - H\,dm = 0$$

$$\Rightarrow \frac{C_m D}{m}dH = H\left(\frac{C_m D}{m^2} + 1\right)dm \Rightarrow \frac{dH}{H} = \left(\frac{1}{m} + \frac{m}{C_m D}\right)dm$$

$$\ln H = \ln m + \frac{m^2}{2C_m D} + cte. = \ln m + \ln e^{m^2/2C_m D}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(m) = \frac{H_0}{m_0} \cdot m\, e^{\frac{m^2 - m_0^2}{2C_m D}}}$$



$m_1 > m_4 > m_2 > m_3$

$H_1 > H_2 > H_4 > H_3$

$\theta_c > \theta_f$

$$Q_{12} = -\frac{\theta_c}{D}\int_1^2 m\,dm = -\frac{\theta_c}{2D}m^2\Big|_1^2$$

$$Q_{12} = \frac{\theta_c}{2D}(m_1^2 - m_2^2) > 0$$

$$Q_{34} = -\frac{\theta_f}{D}\int_3^4 m\,dm = -\frac{\theta_f}{2D}m^2\Big|_3^4 \longrightarrow Q_{34} = -\frac{\theta_f}{2D}(m_4^2 - m_3^2) < 0$$

Ahora $\dfrac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = \dfrac{T_f}{T_c} = \dfrac{\theta_f/2D}{\theta_c/2D}\dfrac{(m_4^2 - m_3^2)}{(m_1^2 - m_2^2)} = \dfrac{\theta_f}{\theta_c}\left(\dfrac{m_4^2 - m_3^2}{m_1^2 - m_2^2}\right)$

En las adiabáticas $\dfrac{H}{m}e^{-m^2/2C_m D} = cte.$

$$\frac{H_2}{m_2}e^{-m_2^2/2C_m D} = \frac{H_3}{m_3}e^{-m_3^2/2C_m D} \wedge \frac{H_4}{m_4}e^{-m_4^2/2C_m D} = \frac{H_1}{m_1}e^{-m_1^2/2C_m D}$$

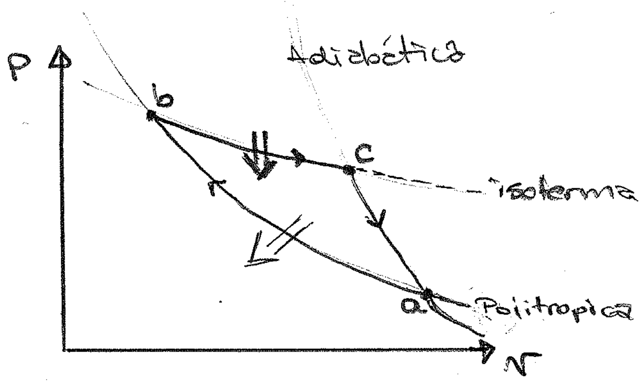
$$\frac{H_2}{m_2}\cdot\frac{m_1}{H_1}e^{\frac{m_1^2 - m_2^2}{2C_m D}} = \frac{H_3}{m_3}\cdot\frac{m_4}{H_4}e^{\frac{m_4^2 - m_3^2}{2C_m D}}$$

En las isotermas $\dfrac{H_1}{m_1} = \dfrac{H_2}{m_2} \wedge \dfrac{H_3}{m_3} = \dfrac{H_4}{m_4}$

$$\Rightarrow m_1^2 - m_2^2 = m_4^2 - m_3^2$$

$$\therefore \frac{\theta_f}{\theta_c} = \frac{T_f}{T_c} \,//$$

$$T_b = T_c = m T_a$$



Absorción: $b \to c$:

$$Q_{bc} = R T_c \ln\left(\frac{V_c}{V_b}\right) = m R T_a \ln\left(\frac{V_c}{V_b}\right)$$

cesión: $a \to b$

$$Q_{ab} = C\,(T_b - T_a) = (m-1)\,C\,T_a$$

donde $C = R\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\nu-1}\right) < 0$

$$\Rightarrow |Q_{ab}| = (m-1)\,|C|\,T_a$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{|Q_{ab}|}{Q_{bc}} = 1 - \frac{(m-1)\,|C|\,\cancel{T_a}}{m R \cancel{T_a} \ln(V_c/V_b)} = 1 - \frac{|C|}{R}\,\frac{(m-1)}{m \ln(V_c/V_b)}$$

$$* \quad \ln(V_c/V_b) = \ln\left(\frac{V_a/V_b}{V_a/V_c}\right) = \ln\left(\frac{V_a}{V_b}\right) - \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$$

En la adiabática: $T_c V_c^{\gamma-1} = T_a V_a^{\gamma-1} \to \left(\frac{V_a}{V_c}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_c}{T_a} = m \Rightarrow \frac{V_a}{V_c} = m^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$$\to \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right) = \frac{1}{\gamma-1} \ln m$$

En la politrópica: $T_b V_b^{\nu-1} = T_a V_a^{\nu-1} \to \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\nu-1} = \frac{T_b}{T_a} = m \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = m^{\frac{1}{\nu-1}}$

$$\to \boxed{\ln\left(\frac{V_a}{V_b}\right) = \frac{1}{\nu-1} \ln m}$$

$$\Rightarrow \ln(V_c/V_b) = \frac{1}{\nu-1}\ln m - \frac{1}{\gamma-1}\ln m \Rightarrow \ln(V_c/V_b) = \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right)\ln m$$

$$\wedge \quad \frac{|C|}{R} = \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{\ln(V_c/V_b) = \frac{|C|}{R}\ln m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{m-1}{m \ln m}}$$