Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. **4**

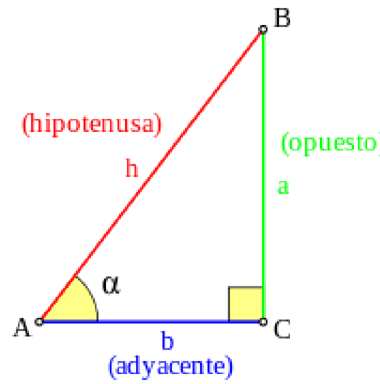
Las razones trigonométricas (de la clase pasada)

En la clase 3, vimos que las razones trigonométricas pueden definirse así:

$$sen\ \alpha = \frac{BC}{AB} \qquad cosec\ \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\ \alpha = \frac{AC}{AB} \qquad sec\ \alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$tg\ \alpha = \frac{BC}{AC} \qquad cotg\ \alpha = \frac{AC}{BC}$$



Por lo dicho antes, el cálculo de cualquiera de ellas es independiente del triángulo en el cual trabajemos, sólo depende del ángulo α, por tanto nos bastará con dibujar un solo triángulo. Dados que las letras pueden cambiar de posición, coloquémosles nombres a los diferentes lados del triángulo: **hipotenusa**, **cateto opuesto al ángulo** y **cateto adyacente al ángulo**.

Tenemos entonces que:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cosec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad cotg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Pequeño recurso mnemotécnico (ayuda memoria):

"Dos cocas con hielo, por favor"

$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$	$\frac{CA}{CO}$	$\frac{H}{CA}$	$\frac{H}{CO}$
sen	**cos**	**tg**	**cotg**	**sec**	**cosec**

Valores trigonométricos de ángulos notables:

	ÁNGULO				
RAZÓN	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$

Propiedades de las razones trigonométricas

Propiedad 1:

Sabemos que en un triángulo rectángulo se cumple la relación de Pitágoras:

$$(cateto)^2 + (cateto)^2 = (hipotenusa)^2$$

Como ahora somos capaces de distinguir los catetos:

$$(cat.op.)^2 + (cat.ady)^2 = (hipotenusa)^2$$

Dividiendo ambos miembros por el cuadrado de la hipotenusa,

$$\frac{(cat.op.)^2}{(hipotenusa)^2} + \frac{(cat.ady)^2}{(hipotenusa)^2} = \frac{(hipotenusa)^2}{(hipotenusa)^2}$$

Finalmente,

$$(\boldsymbol{sen\ \alpha})^2 + (\boldsymbol{cos\ \alpha})^2 = \mathbf{1} \qquad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$$

Propiedad 2:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}}$$

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \cdot \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

Simplificando:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

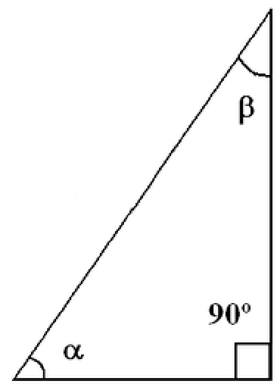
Finalmente:

$$\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{cos\ \alpha}} = \boldsymbol{tg\ \alpha}$$

lo que es válido para cualquier ángulo en el cuál la tangente esté definida.

Propiedad 3:

Recordando que las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman 180° y que en un triángulo rectángulo un ángulo mide 90°, tenemos que:



$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Conclusión: en todo triángulo rectángulos los dos ángulos agudos suman 90°, es decir son **complementarios.** Y, como al cambiar de ángulo, los catetos opuesto y adyacente, intercambian sus posiciones, es decir:

Cateto opuesto a α = Cateto adyacente a β

encontramos que:

$$sen\ \alpha = cos\ \beta$$

o lo que es lo mismo:

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$$

Análogamente, se deduce que:

$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$$

Propiedad 4:

Comparando las columnas a la izquierda y a la derecha de las seis razones trigonométricas, observamos que:

$$\boldsymbol{cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}} \qquad \boldsymbol{sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}} \qquad \boldsymbol{cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}}$$

Uso de la calculadora:

Las calculadoras sólo tienen las funciones $\boxed{\text{sen}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{tan}}$

Invirtiendo éstas mediante la tecla $\boxed{x^{-1}}$ y utilizando la propiedad 4, se pueden obtener los valores de las otras tres funciones.

Por otro lado, se debe tener cuidado al ingresar el dato a la calculadora si éste está en grados (degrees) o radianes (radians), a través de un selector que cambia de D a R. Generalmente, esa función está en la tecla $\boxed{\text{MODO}}$ pero depende un poco del modelo de calculadora.

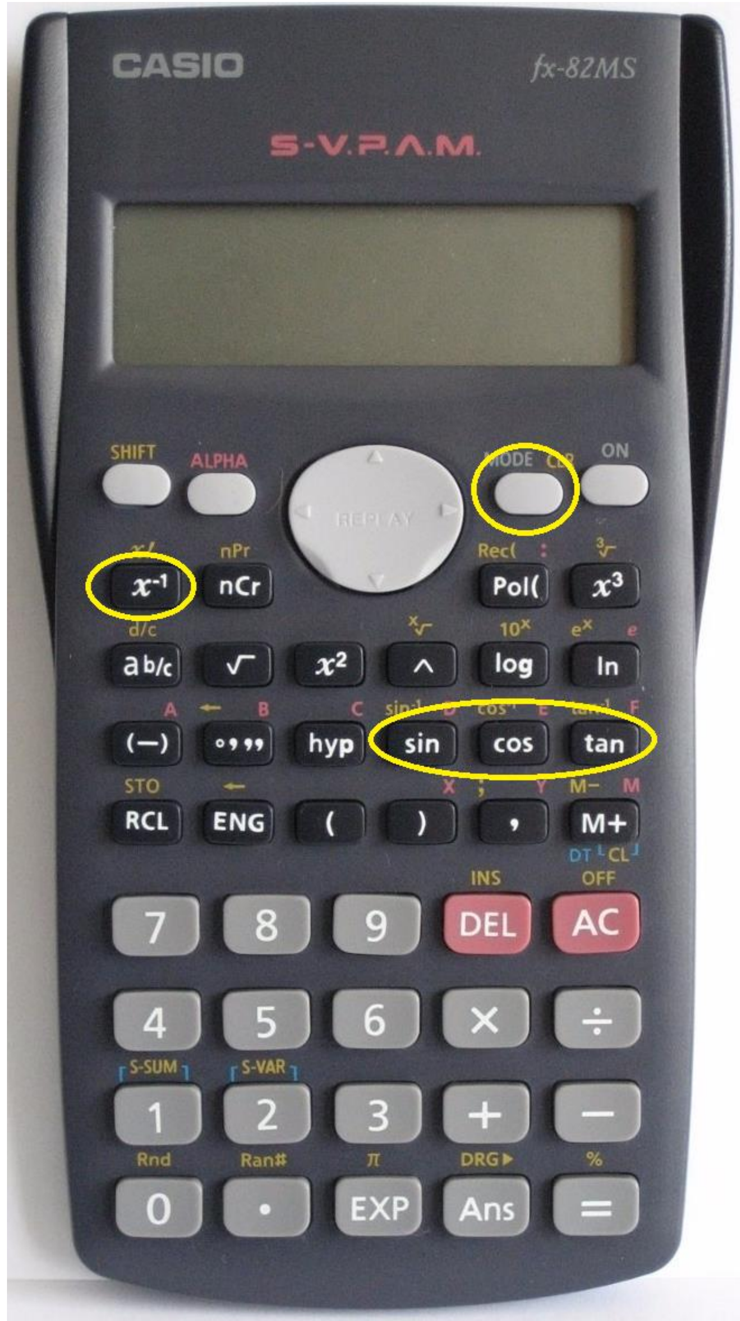
Ejemplo:

Queremos calcular

$$cotg\ 40º$$

Recordamos que:

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

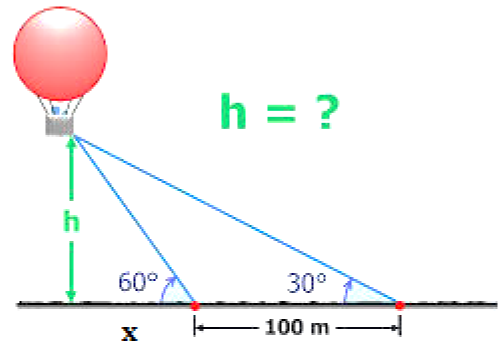


$$tg\ 40º = 0{,}84$$

$$cotg\ 40º = \frac{1}{0{,}84} \approx 1{,}2$$

Un ejemplo de aplicación:

Dos observadores situados a 100 metros de distancia observan el vuelo de un globo aerostático, tal como se ve en la figura.
Con los datos dados calcular la altura a la cual vuela el globo.



Solución:

Trabajando en los dos triángulos rectángulos que se observan en la figura,

$$tg\ 60° = \frac{h}{x} \qquad tg\ 30° = \frac{h}{x+100}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x+100}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad x = \frac{3h}{\sqrt{3}} - 100$$

Igualando, para eliminar "x":

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{3h}{\sqrt{3}} - 100 \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{2h}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{100\cdot\sqrt{3}}{2} = h \quad \Rightarrow \quad \frac{100\cdot 1{,}73}{2} \approx h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h \approx 86{,}5\ m$$

Ejercicios:

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo 45°. Encuentre la medida de los catetos.

Respuesta: $\frac{26\sqrt{2}}{2}$

2. El hilo de un volantín mide 50 metros y forma con la horizontal un ángulo de 37°. ¿A qué altura vuela el volantín?

Respuesta: 30 metros

3. En una circunferencia de 10 cm de radio, un arco mide 6π cm. ¿Cuánto mide (en grados y en radianes) el ángulo central correspondiente?

Respuesta: **108°**; $\frac{3\pi}{5}$

4. El apotema de un hexágono regular mide 15 cm, calcula el lado del polígono y el área de la figura.

Respuesta: $l = 10\sqrt{3}\ cm$; A $= 450\sqrt{3}\ cm^2$

5. En un triángulo isósceles los ángulos basales miden 78° y la altura 28 cm. Halle la medida de la base.

Respuesta: 11,9 cm

6. Desde un bote se observa la torre de un faro con un ángulo de elevación de 45°. Al alejarse 15 metros más, el ángulo es 30°. ¿Qué altura tiene la torre?

Respuesta: 20,4 m