Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. **13**

Problema 1

En la progresión aritmética:

$$5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$

(a) ¿Cuántos términos se deberán sumar para obtener suma 2496?

(b) Calcule el término a_{200} y la suma S_{200}

Problema 2

En una progresión geométrica (con razón positiva) se sabe que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \dfrac{16}{3} \\ a_3 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Calcule a_5 y S_5 mediante la correspondiente fórmula.

Problema 3

Resolver en $[0, 2\pi)$ la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(2x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$$

Problema 1: $\boxed{a_1 = 5}$ $\boxed{d = 2}$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{pero } a_n = a_1$$

Reemplazando: $$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$2496 = \frac{n[10 + (n-1)2]}{2}$$

$$4992 = 2n^2 + 8n \Rightarrow \boxed{n^2 + 4n - 2496 = 0}$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1(-2496)}}{2}$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{10000}}{2} \Rightarrow n = \frac{-4 \pm 100}{2}$$

$n = 48$

$n = -52$ No sirve

Se deben sumar 48 términos.

(b) $a_{200} = 5 + 199.2 = 403$

$$S_{200} = \frac{200(5 + 403)}{2} = \boxed{40800}$$

Problema 2:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \dfrac{16}{3} \Rightarrow a_1(1+q) = \dfrac{16}{3} \\ a_3 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow a_1 \cdot q^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow a_1 = \dfrac{4}{9q^2} \end{cases}$$

Reemplazando: $\dfrac{4}{9q^2}(1+q) = \dfrac{16}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1+q}{3q^2} = 4 \Rightarrow 1+q = 12q^2$$

$$\boxed{12q^2 - q - 1 = 0} \Rightarrow q = \frac{1 \pm \sqrt{1-4.12(-1)}}{2.12}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1 \pm 7}{24} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ \text{o} \\ q = -\dfrac{1}{4} \quad \text{No sirve} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{9\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 4$$

La p.g es: $4; \dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{9}; \ldots$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \boxed{\frac{4}{81}}$$

$$S_5 = \frac{4.\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right]}{1/3 - 1} = \left(-\frac{12}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{243} - 1\right]$$

$$S_5 = \left(-\frac{12}{2}\right)\left(\frac{-242}{243}\right) = \boxed{\frac{484}{81}}$$

Problema 3:

$$\operatorname{sen}(2x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) - \sqrt{2} \cdot \cos(x) = 0$$

$$\left(2 \cdot \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}\right) \cdot \cos(x) = 0$$

Trabajando el primer factor:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

observando la circunferencia unitaria obtenemos las 2 primeras soluciones:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ y } x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Trabajando el segundo factor:

$$\cos(x) = 0$$

nos entrega 2 soluciones más:

$$x_3 = \frac{\pi}{2} \text{ y } x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

En resumen, la ecuación tiene 4 soluciones en $[0, 2\pi)$:

$$x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_4 = \frac{3\pi}{2}$$