Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 6

Mauro Jélvez Jélvez

14/06/2024

1)

Démonos cuenta de que la expresión $\frac{\sin[\theta(n+1)]}{\sin\theta} = U_n(\cos\theta)$, lo cual corresponde a los polinomios de Chebyshev de segunda espécie. Recordemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) r^n = \frac{1}{1 + r^2 - 2xr}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2xr}}$$

Elevando al cuadrado la función generatriz de los polinomios de Legendre:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2xr}}\right)^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2xr} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) r^n$$

Por lo que tendremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) r^n = \left(\sum_{k=0}^{n} P_k(x) r^k\right)\left(\sum_{m=0}^{n} P_m(x) r^m\right)$$

Para cada n, la expansión del producto da lugar a términos de la forma $P_k(x)P_{n-k}(x)r^n$. Aquí k y m varían de 0 a n. Tal que:

$$k + m = n$$

Quedándonos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[\sum_{l=0}^{n} P_l(x) P_{n-l}(x)\right]$$

Los coeficientes r^n deben ser los mismos, por lo que tendremos:

$$U_n(x) = \sum_{l=0}^{n} P_l(x) P_{n-l}(x) = U_n(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{n} P_l(\cos\theta) P_{n-l}(\cos\theta)$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{\sin[\theta(n+1)]}{\sin\theta} = \sum_{l=0}^{n} P_l(\cos\theta) P_{n-l}(\cos\theta)$$

2)

Parte 1

Tendremos la siguiente expansión en términos de polinomios de Legendre:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\hat{r} \cdot \hat{r'})$$

Y el laplaciano en coordenadas esféricas:

$$\triangledown^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Si tomamos los primeros términos de la expansión tendremos:

$$\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\hat{r}\cdot\hat{r'}) = \frac{1}{r'} + \cos\theta\frac{r}{r'^2} + ...$$

Si tomamos el laplaciano de esta expansión de la función:

$$\triangledown^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r'} + \cos\theta\frac{r}{r'^2} + ...\right)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r'} + \cos\theta\frac{r}{r'^2} + ...\right)\right)$$

Lo que nos lleva a:

$$\triangledown^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cos\theta\frac{1}{r'^2} + ...\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta(-\sin\theta)\frac{r}{r'^2} + ...\right)$$

Reordenando:

$$\triangledown^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) = \frac{1}{r^2}2r\cos\theta\frac{1}{r'^2} + ... + \frac{1}{r^2\sin\theta}(-2\sin\theta\cos\theta)\frac{r}{r'^2} + ...$$

Finalmente obtenemos:

$$\triangledown^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) = \frac{2\cos\theta}{rr'^2} - \frac{2\cos\theta}{rr'^2} + .. = 0$$

Lo cual se cumple también para polinomios de mayor orden.

Parte 2

Debido a la simetría del problema tendremos una solución de la forma:

$$\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

Tendremos que para $r \leq R$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

Y si sabemos que:

$$\Phi(R,\theta) = \begin{cases} +V & \text{si } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V & \text{si } \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^{\pi} P_l^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}$$

$$P_l(1) = 1$$

$$P_l(-\cos\theta) = (-1)^l P_l(\cos\theta)$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = \frac{P_{2n}(0)}{(2n+2)} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

Ahora para poder usar la ortogonalidad de los polinomios de legendre, multiplicaremos ambos lados por: $\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$

$$\int_0^{\pi}\Phi(r,\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

Usando la relación de ortogonalidad y reordenando para despejar A_l

$$A_l = \frac{2l+1}{2r^l} \int_0^\pi \Phi(r,\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

Tendremos que el potencial es impar en la superficie en $\pi/2$, por lo que: $l = 2n+1$

$$A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2r^{2n+1}} \int_0^\pi \Phi(r,\theta) P_{2n+1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

Usando las condiciones de contorno tendremos:

$$A_{2n+1} = \frac{(4n+3)V}{2R^{2n+1}} \left[\int_0^{\pi/2} P_{2n+1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_{2n+1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \right]$$

Usaremos el cambio de variable:

$$x = \cos\theta \to dx = -\sin\theta d\theta$$

$$x(0) = 1$$

$$x(\pi/2) = 0$$

$$x(\pi) = -1$$

Reescribiendo las integrales:

$$\int_0^{\pi/2} P_{2n+1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_{2n+1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = -\int_1^0 P_{2n+1}(x) dx + \int_0^{-1} P_{2n+1}(x) dx = \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx - \int_{-1}^0 P_{2n+1}(x) d$$

Debido a la imparidad tendremos $P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$, lo que nos lleva a :

$$\int_{-1}^0 P_{2n+1}(x) dx = -\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx$$

Reescribiendo el coeficiente:

$$A_{2n+1} = \frac{(4n+3)V}{2R^{2n+1}} \left[\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx + \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx \right] = \frac{(4n+3)V}{R^{2n+1}} \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx$$

Tendremos que:

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx = \frac{P_{2n}(0)}{(2n+2)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

Y ahora reescribiendo el coeficiente final:

$$A_{2n+1} = (-1)^n \frac{(4n+3)V}{R^{2n+1}} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

Reemplazando en el potencial:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta) \to \Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)V}{R^{2n+1}} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

Finalmente tendremos el potencial de la forma:

$$\Phi(r,\theta) = V \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

3)

Sabemos que:

$$\phi(1,\theta) = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi/2 & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Planteamos la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$$

Y una solución de la forma:

$$\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Y reemplazando en la ecuación de Laplace:

$$\Theta\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Theta}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}$$

Mutiplicando por $\frac{r^2}{R\Theta}$

$$\frac{r^2}{R}R'' + \frac{r}{R}R' + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

Lo cual nos lleva a:

$$\frac{r^2}{R}R'' + \frac{r}{R}R' = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

Quedandonos así dos ecuaciones diferenciales, y si tomamos $\lambda = n^2$.Por un lado, para la parte angular tendremos una solución de la forma:

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \Theta_n(\theta) = A\sin n\theta + B\cos n\theta$$

Y para la parte radial:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$$

Tendremos una solución propuesta de la forma: $R(r) = r^k$, Calculando sus derivadas:

$$R' = kr^{k-1}$$

$$R'' = k(k-1)r^{k-2}$$

Reemplazando en la ecuación radial:

$$r^2k(k-1)r^{k-2} + rkr^{k-1} - n^2r^k = 0$$

Multiplicando por r^{-k} y despejando k:

$$k(k-1) + k = n^2 \rightarrow k^2 - k + k = n^2 \rightarrow k^2 = n^2$$

$$k = \pm n$$

Por lo que tendremos:

$$R_n(r) = Cr^n + Dr^{-n}$$

Pero para que esta solución sea regular en el origen

$$D \equiv 0$$

Por lo que se nos reducirá a:

$$R_n(r) = Cr^n$$

Nuestra solución general tendrá la forma:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta$$

Pero con las condiciones de contorno podemos notar que es una función impar por lo que $A_n = 0$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r^{2n-1} \sin[\theta(2n-1)]$$

Ahora debemos encontrar el coeficiente:

$$B_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin[\theta(2n-1)]d\theta - \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin[\theta(2n-1)]d\theta$$

Usaremos el cambio de variable:

$$u = \theta(2n-1)$$

$$d\theta = \frac{du}{(2n-1)}$$

$$B_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)}\left[\int_0^{\pi} \sin(u)du - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(u)du\right] = \frac{1}{(2n-1)}[-1+1+1+1] = \frac{2}{(2n-1)}$$

Y finalmente reemplazando en la solución general:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)} r^{2n-1} \sin[\theta(2n-1)]$$

Reordenando los términos:

$$\phi(r,\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} \frac{\sin[\theta(2n-1)]}{(2n-1)}$$

4)

Si tenemos la ecuación de Legendre que toma la forma:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Y tenemos la fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

Podemos notar que el único término que depende de x es

$$\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

Del cual, si calculamos sus respectivas derivadas tendremos:

$$\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \frac{d^l}{dx^l}\left[\sum_{n=0}^{l}(-1)^n \frac{l!}{n!(l-n)!} x^{2l-2n}\right] = \sum_{n=0}^{l}(-1)^n \frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{(2l-2n)!}{(l-2n)!} x^{l-2n}$$

Del cual debemos reescribir el límite superior, ya que despues de $n = l/2$ las derivadas son cero:

$$\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \sum_{n=0}^{l/2}(-1)^n \frac{l!}{n!(l-n)!}\frac{(2l-2n)!}{(l-2n)!} x^{l-2n}$$

Ahora si empezamos con $y(x) = (1-x^2)^l$ y tomando su derivada:

$$y' = -2lx(1-x^2)^{l-1} \to y'(1-x^2) + 2lxy = 0$$

Y ahora usando la fórmula de Leibniz y tomando $u = 1 - x^2$

$$\frac{d^k}{dx^k}[uy'] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)} y^{(k-j+1)}$$

Como u es un polinomio de segundo orden, sólo 3 términos de la suma sobrevivirán:

$$\frac{d^k}{dx^k}[uy'] = uy^{(k+1)} + ku'y^{(k)} + k(k-1)u^{(2)}y^{(k-1)} = (1-x^2)y^{(k+1)} - 2kxy^{(k)} - k(k-1)y^{(k-1)} = 0$$

Y si ahora usamos la fórmula de Leibniz para $2lxy$

$$\frac{d^k}{dx^k}[2lxy] = 2lxy^{(k)} + 2lky^{(k-1)}$$

Combinando con los resultados anteriores obtenemos:

$$(1-x^2)y^{(k+1)} - 2kxy^{(k)} - k(k-1)y^{(k-1)} + 2lxy^{(k)} + 2lky^{(k-1)} = 0$$

Si tomamos $k = l + 1$

$$(1-x^2)y^{(l+2)} - 2xy^{(l+1)} + l(l+1)y^{(l)} = 0$$

La cual es la ecuación diferencial de Legendre, si tomamos $y^{(l)} = P_l$ queda demostrado, ya que demostramos que:

$$\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^l$$

Satisface la ecuación de Legendre, y el factor $1/2^l l!$ es para que se cumpla la normalización $P_l(1) = 1$

5)

Si tenemos la ecuación diferencial de Bessel:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 - n^2)y = 0$$

Tomaremos las siguientes variables:

$$u(r) = J_n(k_{ni}r/a)$$
$$v(r) = J_n(k_{nj}r/a)$$

También:

$$\alpha = \frac{k_{ni}}{a}$$
$$\beta = \frac{k_{nj}}{a}$$

Por lo tanto nuestras variables u y v, quedarán:

$$u(r) = J_n(\alpha r)$$

$$v(r) = J_n(\beta r)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de Bessel

Para u tendremos:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+(\alpha^2r^2-n^2)u=0 \tag{1}$$

Para v tendremos:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)+(\beta^2r^2-n^2)v=0 \tag{2}$$

Multiplicando (1) por v/r y (2) por u/r, y luego restando estas expresiones:

$$v\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)-u\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)+(\alpha^2-\beta^2)ruv=0$$

Podemos reescribir los dos primeros términos como:

$$v\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)-u\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=\frac{d}{dr}\left(vr\frac{du}{dr}-ur\frac{dv}{dr}\right)$$

Quedándonos:

$$\frac{d}{dr}\left(vr\frac{du}{dr}-ur\frac{dv}{dr}\right)+(\alpha^2-\beta^2)ruv=0$$

Integrando desde 0 hasta a:

$$\left[vr\frac{du}{dr}-ur\frac{dv}{dr}\right]_0^a+(\alpha^2-\beta^2)\int_0^a ru(r)v(r)dr=0$$

Los términos ya integrados dan 0 debido a $r=0$ y $u(a)=v(a)=0$

Para $\alpha\neq\beta\to i\neq j$

$$\int_0^a ru(r)v(r)dr=\int_0^a rdrJ_n(k_{ni}r/a)J_n(k_{nj}r/a)=0$$

Para $\alpha=\beta\to i=j$

$$\int_0^a rdrJ_n^2(k_{ni}r/a)$$

Tenemos que:

$$|J_n|^2=\lim_{\varphi\to k_{ni}}\frac{a^2}{\varphi^2-k_{ni}^2}\left[k_{ni}J_n(\varphi)J_n'(k_{ni})-\varphi J_n(k_{ni})J_n'(\varphi)\right]=\lim_{\varphi\to k_{ni}}\frac{a^2}{2\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left[k_{ni}J_n(\varphi)J_n'(k_{ni})\right]=\frac{a^2}{2}[J_n'(k_{ni})]^2$$

$$|J_n|^2=\frac{a^2}{2}[J_{n+1}(k_{ni})]^2$$

Por lo que finalmente tendremos:

$$\int_0^a rdrJ_n^2(k_{ni}r/a)=\frac{a^2}{2}[J_{n+1}(k_{ni})]^2$$

6)

Si sabemos que:

$$B_{mj} = \frac{2}{\pi a^2}\frac{1}{[J_m'(k_{mj})]^2}\int_0^a \left[J_m(k_{mj}r/a)\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\theta f(r,\theta)d\theta\right]rdr$$

$$J_m' = J_{m+1}$$

Para nuestro caso: $f(r,\theta) = C$ y $m = 0$. Para $\cos m\theta \to 1$ y la función al ser constante saldrá de la integral, por lo que tendremos como resultado de esa integral $2\pi C$. Lo cual se reducirá a:

$$B_{0j} = \frac{2}{\pi a^2}\frac{2\pi C}{[J_1(k_{0j})]^2}\int_0^a J_0(k_{0j}r/a)rdr = \frac{4C}{a^2}\frac{1}{[J_1(k_{0j})]^2}\int_0^a J_0(k_{0j}r/a)rdr$$

Tendremos la siguiente integral:

$$I = \int_0^a J_0(k_{0j}r/a)rdr$$

Haremos los siguientes cambios de variable:

$$x = \frac{k_{0j}r}{a} \Rightarrow r = \frac{ax}{k_{0k}}$$

$$dx = \frac{k_{0j}dr}{a} \Rightarrow dr = \frac{adx}{k_{0j}}$$

Tendremos:

$$\int_0^a J_0(k_{0j}r/a)rdr = \int_0^{k_{0j}} \frac{ax}{k_{0j}}\frac{adx}{k_{0j}}J_0(x)dx = \frac{a^2}{k_{0j}^2}\int_0^{k_{0j}} J_0(x)xdx$$

Usando la identidad:

$$\int xdxJ_0(x) = xJ_1(x)$$

Tendremos que:

$$I = \frac{a^2}{k_{0j}^2}\left[\frac{k_{0j}r}{a}J_1\left(\frac{k_{0j}r}{a}\right)\right]_0^a = \frac{a^2J_1(k_{0j}}{k_{0j}})$$

Por lo que finalmente tendremos:

$$B_{0j} = \frac{4C}{a^2}\frac{1}{[J_1(k_{0j})]^2}\frac{a^2J_1(k_{0j}}{k_{0j}})$$

Simplificando obtendremos:

$$B_{0j} = \frac{4C}{k_{0j}J_1(k_0j)}$$

Nota: No supe de donde poder simplificar el 4 para que quede en 2 como en la expresión original.