Al igual que en el caso de funciones de una sola variable independiente $y = f(x)$, la derivada parcial de una función de varias variables $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ representan una razón de cambio de la función con respecto a cada una de las variables independientes.

Recordemos que la derivada de $f(x)\big(f'(x)\big)$ se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde h es el incremento aplicado a x. Análogamente puede definirse la derivada parcial de una función de múltiples variables incrementando una en particular y manteniendo fija las restantes.

Definición

Consideremos la función $z = f(x, y)$ continua en una región, definimos

1.- la derivada parcial con respecto a x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre que exista el límite. Se denota: $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; f_x ; z_x o $\partial_x z$.

2.- la derivada parcial con respecto a y:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

siempre que exista el límite. Se denota : $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; f_y ; z_y o $\partial_y z.$

Nótese que en 1.- se incrementa x en h, manteniendo fija la variable y. En 2.- se incrementa y en h, manteniendo fija la variable x .

Ejemplo 1

Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ utilizando la definición si

$$f(x,y) = 3yx + y^2 - 1$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3y(x+h)+y^2-1)-(3yx+y^2-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3yx+3yh+y^2-1)-(3yx+y^2-1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3yh}{h} = \lim_{h\to 0}3y = 3y$$

Similarmente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3(y+h)x+(y+h)^2-1)-(3yx+y^2-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3yx + 3hx + y^2 + 2yh + h^2 - 1) - (3yx + y^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx + 2yh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x + 2y + h$$

$$= 3x + 2y$$

Ejemplo 2

Evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(-2{,}5)$ utilizando la definición, si $f(x, y) = x^2 - xy$.

Solución

Para evaluar las derivadas en un punto (a, b) se reemplazan estas coordenadas por x y por y en las expresiones de la definiciones dadas, así se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Entonces, las derivadas parciales con respecto a x e y en $(-2{,}5)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2{,}5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h, 5) - f(-2{,}5)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2{,}5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2{,}5 + h) - f(-2{,}5)}{h} \quad \text{por tanto,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,5) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h,5)-f(-2,5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-(-2+h)5-14}{h}$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2 - xy}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-9h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-9+h)}{h} = -9$$

Entonces, la derivada parcial con respecto a y en $(-2,5)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,5) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2,5+h)-f(-2,5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(-2)^2-(-2)(5+h)-14}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2$$

Ejemplo 3

Evaluar f_x y f_y en el punto $(3,0)$ utilizando la definición, Si $f(x,y) = 1 + e^y \cos x$.

Solución

La derivada parcial con respecto a x en $(3,0)$ es

$$f_x(3,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h,0)-f(3,0)}{h}$$

$$f_x(3,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1+e^0 cos(3+h)-(1+e^0\cos 3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos(3+h)-\cos 3}{h}$$

Aplicando la regla de $L'H\hat{o}pital$ a esta última expresión, se tiene

$$f_x(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{-sen(3+h)}{1} = -sen\ 3$$

La derivada parcial con respecto a y en $(3{,}0)$

$$f_y(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3{,}0+h) - f(3{,}0)}{h}$$

$$f_y(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{1 + e^h \cos 3 - (1 + e^0 \cos 3)}{h}$$

$$f_y(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{1 + e^h \cos 3 - 1 - cos3}{h}$$

$$f_y(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h \cos 3 - cos3}{h}$$

$$f_y(3{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos 3(e^h - 1)}{h}$$

$$f_y(3{,}0) = cos\ 3 \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Aplicando la regla de $L'H\hat{o}pital$ a esta última expresión, se tiene

$$f_y(3{,}0) = cos\ 3 \lim_{h\to 0} e^h = \cos 3\ e^0 = \cos 3 \cdot 1 = \cos 3$$

Observación

En la práctica, para calcular la derivada parcial de una función $f(x,y)$ con respecto a una variable independiente, se aplican las reglas de derivadas manteniendo constante la otra variable.

Ejemplo 4

Sea $f(x,y) = 3yx^2 + y^2 - x + 1$, para calcular f_x consideremos como constante la variable y entonces $f_x = 6yx - 1$

En el caso de calcular f_y , se mantiene constante la variable x, entonces

$$f_y = 3x^2 + 2y$$

Ejemplo 5

Siendo $f(x,y) = x^2 - xy$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-2{,}5) = 2(-2) - 5 = -9$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-2{,}5) = -(-2) = 2$$

Ejemplo 6

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la función

$$f(x,y) = sen\ x\ cos\ y - x^3 - y^3$$

Solución

Manteniendo y constante, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y - 3x^2$$

Manteniendo x constante, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x(-sen\ y) - 3y^2$$

Ejemplo 7

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la función

$$f(x,y) = x^3 ln(xy)$$

Solución

Manteniendo y constante, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \ln(xy) + x^3 \frac{1}{xy} y = x^2(3ln(xy) + 1)$$

Manteniendo x constante, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \frac{1}{xy} x = \frac{x^3}{y}$$

Ejemplo 8

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Considerando la regla de derivación de un cociente tenemos que

$$f_x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - (x - y)\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x}{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{y^2 + yx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$f_y = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} - (x - y)\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{-x^2 - xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

Ejemplo 9

Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

función, hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Solución

Para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-xy(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h(0)}{h^2+0^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0$$

$$=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0(h)}{0^2+h^2}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0$$

$$= 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 10

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ xy\neq 0 \\ 5 & si\ xy=0 \end{cases}$$

Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ y estudiar la continuidad en el origen de coordenadas.

Solución

La función toma valor 5 cuando $xy = 0$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

Pero la función es discontinua en $(0,0)$ pues

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1 \text{ y } f(0,0) = 5$$

Obsérvese que, en las funciones de una sola variable real, la derivada en un punto asegura la continuidad en ese punto; para las funciones de múltiples variables, pueden existir las derivadas parciales en un punto sin que la función sea continua en ese punto.

Ejemplo 11

Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ si $z = f(x,y)$ y $\ln z + z^2 = 3x - y^3$

Solución

Se tiene aquí el caso de la derivada implícita; derivando en ambos miembros y manteniendo la variable y constante, resulta

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{z} + 2z\right) = 3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3z}{1+2z^2}$$

Más adelante se presentará otro método para resolver las derivadas de funciones implícitas.

Ejemplo 12

Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, utilizar la definición para determinar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Estudiar además la continuidad en el punto $(0,0)$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Con $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \nexists$$

Similarmente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Con $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \nexists$$

Se observa que los límites no existen, por tanto, no existen las derivadas parciales en $(0,0)$. Existen eso si las derivadas parciales para puntos distintos de $(0,0)$ (ver recuadros).

No obstante, la función es continua en ese punto pues se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

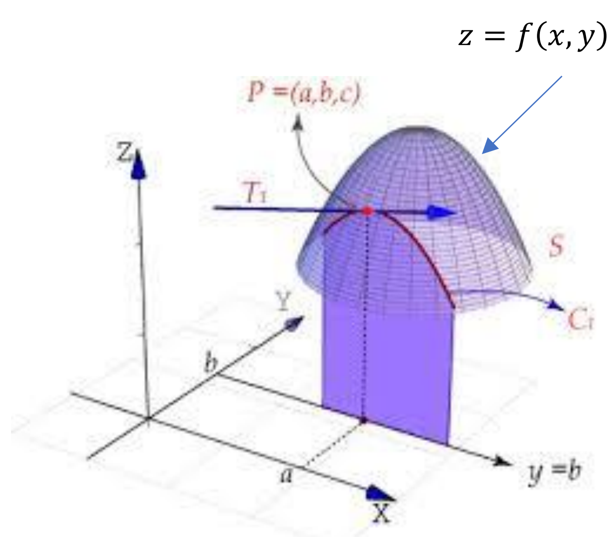
Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Puede darse una interpretación geométrica de la derivada parcial de una función de dos variables. Veremos a continuación los dos casos.

Caso 1: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

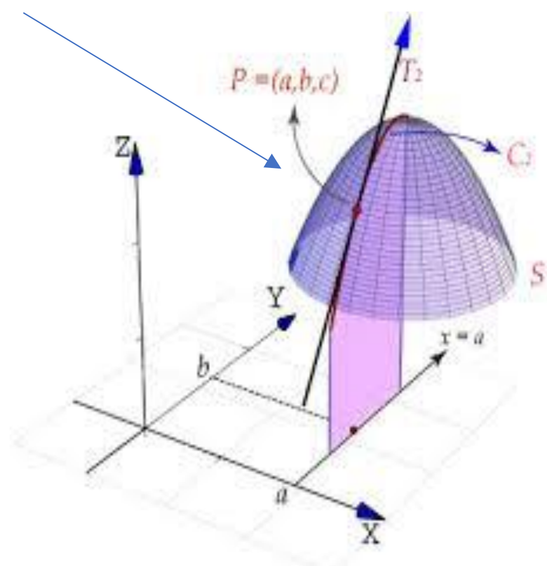
Siendo $z = f(x,y)$ una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$, al mantener la variable y fija; resulta el plano de ecuación $y = b$ ($b\ constante$).

Entonces la derivada $\frac{\partial z}{\partial x}$ en un punto $P = (a,b,c)$ es la pendiente de la recta tangente T_1 a la curva determinada por la intersección de la superficie y el plano.



Caso 2: $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Análogamente, la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a y, es la pendiente de la recta tangente T_2 en el punto $P=(a,b,c)$ de la curva determinada por la intersección del plano $x=a$ con la superficie $z=f(x,y)$.



Ejemplo 13

Sea el paraboloide $f(x,y)=6-x^2-y^2$

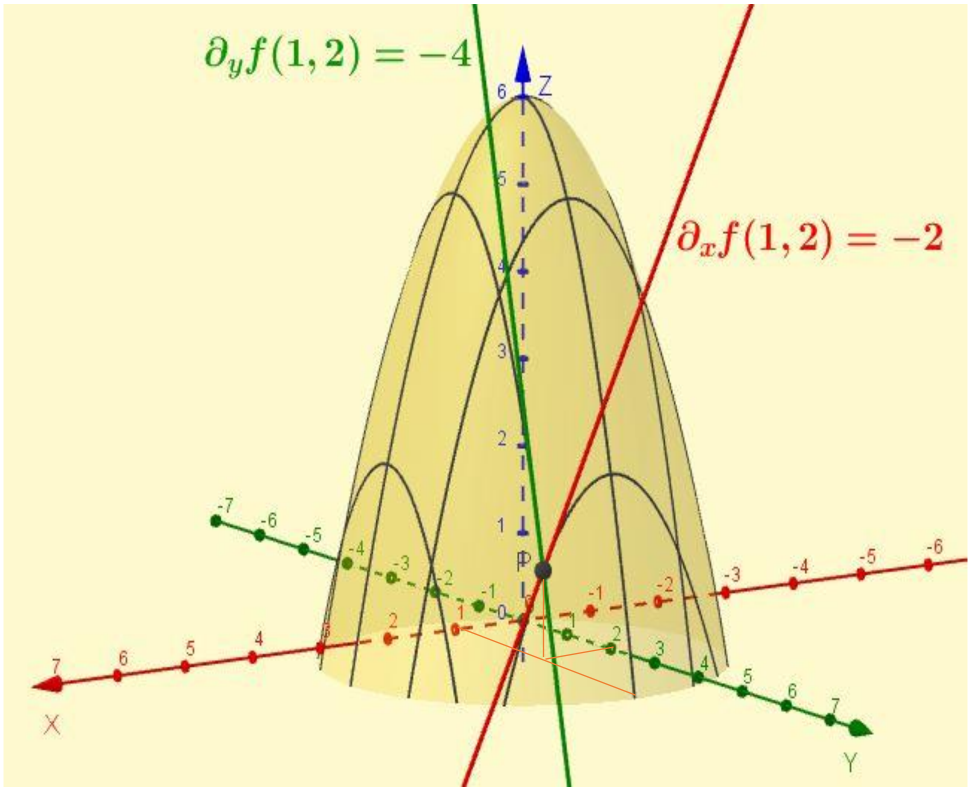
1.- Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva determinada por la superficie y el plano $y=2$ en punto $P=(1,2,1)$.

2.- Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva determinada por la superficie y el plano $x=1$ en punto $P=(1,2,1)$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-2=\partial_x f(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4 = \partial_y f(1,2)$$



Derivadas parciales para funciones de n variables

Sean $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; U abierto y $a_0 = (a_1, \cdots, a_n) \in U$, llamaremos derivada parcial de f, respecto de la variable x_i en a_0 al límite (si existe)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + h, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h}$$

$$\forall i = 1, \cdots, n$$

El límite anterior se puede denotar por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0)\ o\ f_{x_i}(a_0)\ o\ \partial_{x_i} f(a_i)$$

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; U abierto. Sea $U' \subseteq U$ tal que $\forall x_0 \in U'$ existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, entonces definimos la función derivada parcial de f, respecto a x_i en U' por $f_{x_i}: U' \to \mathbb{R}$; donde $f_{x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existe.

Para calcular $f_{x_i}(x_0)$ se deriva f respecto a x_i, considerando las restantes variables como constantes y aplicando las reglas de derivación de una variable, finalmente se evalúa f_{x_i} en x_0.

Ejemplo 14

Sea $f(x, y, z, w) = 1 + x^2 + y^2 - yzw + z$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ , \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - zw$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -yw + 1\ , \frac{\partial f}{\partial w} = -yz$$

Derivadas parciales de orden superior

Puede encontrarse las derivadas de orden superior de una función, siempre y cuando existan.

Sea una función $f(x, y)$, la derivada parcial de segundo orden respecto a x se denota como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

O bien f_{xx}, y respecto a y se denota como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ o bien } f_{yy}$$

Las definiciones correspondientes son

$$f_{xx} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x, y)}{h}$$

$$f_{yy} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x, y+h) - f_y(x, y)}{h}$$

Los símbolos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ o bien } f_{xy}$$

Significa que primero se obtiene la derivada parcial con respecto a x y luego con respecto a y.

En el caso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ o bien } f_{yx}$$

Significa que primero se obtiene la derivada parcial con respecto a y y luego con respecto a x.

Las definiciones correspondientes son

$$f_{xy} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x, y+h) - f_x(x, y)}{h} \;;$$

$$f_{yx} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h}$$

Para evaluar dichas derivadas en un punto (a, b) se reemplaza x e y de las definiciones dadas, por a y b.

Análogamente se pueden definir las derivadas de orden mayor que dos.

Si se tiene por ejemplo derivadas de tercer orden como f_{xxy} significa que se diferencia primero con respecto a x dos veces y luego con respecto a y una vez. Esto también puede denotarse como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

Ejemplo 15

Utilizar la definición para determinar la derivada parcial f_{xy} en $(2,1)$ si $f(x, y) = x^3 + x\ ln\ y$.

Solución

Por definición se tiene

$$f_{xy} = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(x, y + h) - f_x(x, y)}{h}$$

Y en el punto $(2,1)$ resulta

$$f_{xy}(2,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(2,1 + h) - f_x(2,1)}{h}$$

Debemos primero determinar f_x, lo haremos por la definición

$$f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 + (x + h)\ lny - (x^3 + x\ lny)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + lny)}{h}$$

$$= 3x^2 + \ln y$$

Luego $f_x(x, y) = 3x^2 + lny$

$$f_x(2{,}1 + h) = 12 + \ln(1 + h) \ ;$$

$$f_x(2{,}1) = 12 + \ln 1 = 12$$

Luego

$$f_{xy}(2{,}1) = \lim_{h \to 0} \frac{12 + \ln(1 + h) - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} ln\,(1 + h)^{1/h}/h$$

$$= \ln e = 1$$

Resolvamos esto mismo aplicando reglas de derivación:

Si $f(x, y) = x^3 + xln\,y$, entonces

$$f_x = 3x^2 + \ln y \ \Rightarrow \ f_{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow f_{xy}(2{,}1) = \frac{1}{1} = 1$$

Definición de derivada parcial de orden superior

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea f_{x_i} la derivada parcial de f respecto a la variable x_i. Como f_{x_i} es también una función de n variables que puede ser derivable, definiremos la función derivada parcial de f_{x_i} con respecto a x_k (si existe) por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_h) - f_{x_i}(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n)}{h}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = f_{x_i x_k}$$

Llamada derivada parcial mixta de orden 2 de f.

Cuando una función f se deriva m veces respecto a una misma variable x_i, la función obtenida es llamada función derivada parcial de orden m de f con respecto a x_i y anotamos

$$\frac{\partial^m}{\partial x_i^m} = \frac{\partial^m f}{\partial x_i \partial x_i \cdots \partial x_i}$$

sí al derivar se cambia por lo menos una vez de variable, hablaremos de función derivada parcial mixta de oren m de f.

Ejemplo 16

Sea $f(x, y) = 2y^2 sen\ x + 5xy$ entonces:

$$f_x = 2y^2 cos\ x + 5y$$

$$f_{xx} = 2y^2(-sen\ x) = -2y^2 sen\ x$$

$$f_y = 4y\ sen\ x + 5x$$

$$f_{yy} = 4\ sen\ x$$

$$f_{xy} = 4ycos\ x + 5$$

$$f_{yx} = 4y\ cos\ x + 5$$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$

De este ejemplo se observa que $f_{xy} = f_{yx}$; esta igualdad se verifica siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones dadas por el siguiente resultado.

Teorema (Schwarts)

Sean $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función, U abierto y $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$. Si

$$f_{x_i x_j} \text{ y } f_{x_j x_i}$$

existen y son continuas en una vecindad de a en U, entonces

$$f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$$

Ejemplo 17

Sea $f(x,y) = \frac{1}{2x-y}$, calcular las primeras y segundas derivadas parcial de f y evaluar en el punto $(1,1)$.

Solución

f es continua $\forall (x,y) \in Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y \neq 0\}$ y lo mismo es válido para las primeras y segundas derivadas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2}{(2x-y)^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(2x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-(-2)(2)(2x-y)(2)}{(2x-y)^4} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(-2)(2x-y)(-1)}{(2x-y)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8}{(2x-y)^3} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(2x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4}{(2x-y)^3} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4}{(2x-y)^3}$$

Por tanto

$$f_x(1,1) = -2 \, , \, f_y(1,1) = 1 \; ,$$

Y, por consiguiente

$$f_{xx}(1,1) = 8\ ,\ f_{yy}(1,1) = 2,$$

$$f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = -4$$

Ejemplo 18

Sea

$$f(x,y) = \frac{cos^2 y}{y^4 + 9} - 4x^3y^2 - 1$$

hallar $f_{yx}(1,2)$.

Solución

Puede verificarse que las derivadas parciales son continuas en $(1,2)$; luego por el teorema anterior

$$f_{xy}(1,2) = f_{yx}(1,2)$$

Por simplicidad, conviene en este caso calcular $f_{xy}(1,2)$ en lugar $f_{yx}(1,2)$; entonces

$$f_x = -12x^2y^2 \Rightarrow f_{xy} = -24x^2y$$

Luego

$$f_{xy}(1,2) = -24(1)^1(2) = -48 \Rightarrow f_{yx}(1,2) = -48$$

Ejemplo 19

Sea

$$f(x,y) = sen(x + y^2)$$

Verificar

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

Solución

$$\boxed{f(x,y) = sen(x+y^2)}$$

$f_x = cos(x+y^2) \Rightarrow$

$$f_{xx} = -sen(x+y^2) \Rightarrow f_{xxy} = -cos(x+y^2)(2y)$$

$$f_y = cos(x+y^2)\,(2y) \Rightarrow$$

$$f_{yx} = -sen(x+y^2)(2y) \Rightarrow f_{yxx} = -cos(x+y^2)(2y)$$

$$f_x = cos(x+y^2) \Rightarrow$$

$$f_{xy} = -sen(x+y^2)(2y) \Rightarrow f_{xyx} = -cos(x+y^2)(2y)$$

A continuación, veremos las derivadas parciales para funciones que son campos vectoriales

Derivación parcial en campos vectoriales

Dado un campo vectorial de la forma

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ donde } x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$$

definida como

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \big(f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)\big)$$

Donde los f_i con $i = 1, \cdots, m$ son campos escalares de n variables.

Para este caso tenemos mn derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_n)$$

Con $i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$.

Todas las derivadas parciales se distribuyen en una matriz, de m filas y n columnas, denominada **matriz jacobiana** y que, en un punto genérico $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene la siguiente expresión:

$$J(f)(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la forma

$$f(x,y) = \left(3x^2y + \frac{x}{y}, 2x - y + 4y^3, xy + 5\right)$$

Hallar su matriz jacobiana en un punto $(1,1)$.

Solución

En este caso

$$f_1(x,y) = 3x^2y + \frac{x}{y}$$

$$f_2(x,y) = 2x - y + 4y^3$$

$$f_3(x,y) = xy + 5$$

Entonces

$$J\big(f(x,y)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy + \frac{1}{y} & 3x^2 - \frac{x}{y^2} \\ \frac{2}{y} & \frac{-1 + 12y^2}{x} \end{bmatrix}$$

Luego

$$J(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 6(1)(1) + \frac{1}{1} & 3(1)^2 - \frac{1}{(1)^2} \\ \frac{2}{1} & \frac{-1 + 12(1)^2}{1} \end{bmatrix}$$

$$J(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 11 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma

$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6)$$

Hallar su matriz jacobiana en un punto (x,y).

Solución

En este caso

$$f_1(x,y) = x^2 + 3y^2$$

$$f_2(x,y) = 5x^3 + 2y^6$$

Entonces

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y^5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1(x,y) = x^2 + 3y^2 \\ f_2(x,y) = 5x^3 + 2y^6 \end{array}}$$

Sea el campo vectorial $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la forma

$$f(x,y) = (sen\ (x+y), xe^{x+y}, x+y)$$

Hallar su matriz jacobiana en un punto $(0,0)$.

Solución

En este caso

$$f_1(x,y) = sen\ (x+y)$$

$$f_2(x,y) = xe^{x+y}$$

$$f_3(x,y) = x+y$$

Entonces

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Luego

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\ (x+y) & \cos(x+y) \\ e^{x+y} + xe^{x+y} & xe^{x+y} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es,

$$J(f)(x,y)=\begin{bmatrix}\cos{(x+y)} & \cos(x+y)\\ e^{x+y}(x+1) & xe^{x+y}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Por tanto, evaluamos

$$J(f)(0,0)=\begin{bmatrix}\cos{(0+0)} & \cos{(0+0)}\\ e^{0+0}(0+1) & 0\,e^{0+0}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$J(f)(1,1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Ejercicios de repaso

1.- Hallar la pendiente de la curva intersección del plano y la superficie S dada por

$$f(x,y)=-\frac{x^2}{2}-y^2+\frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2},1{,}2\right)$ en las direcciones de los ejes X e Y.

Solución

$f_x(x,y)=-x \;\Rightarrow\; f_x\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{1}{2}$ pendiente en dirección de X

$f_y(x,y)=-2y \;\Rightarrow\; f_y\left(\frac{1}{2},1\right)=-2$ pendiente en dirección de Y

2.- Demuestre que para $z=e^{-x}sen\;y$ se verifica que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x} sen\ y \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-x} sen\ y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x} cos\ y \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-x} sen\ y$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-x} sen\ y - e^{-x} sen\ y \ = 0$$

3.- Sea $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - 2y^3$. Probar que se cumple

$$xf_x + yf_y = 3f$$

Solución

$$f_x = 3x^2 - 6xy \ ; \ f_y = -3x^2 - 6y^2$$

Entonces

$$xf_x + yf_y = x(3x^2 - 6xy) + y(-3x^2 - 6y^2)$$

$$= 3x^3 - 6x^2y - 3x^2y - 6y^3$$

$$= 3x^3 - 9x^2y - 6y^3$$

$$= 3(x^3 - 3x^2y - 2y^3) = 3f$$

4.- Sea $z = y^3 + ax^2$; encontrar a tal que

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

Solución

$$z_x = 2ax \Rightarrow z_{xx} = 2a$$

$$z_y = 3y^2 \Rightarrow z_{yy} = 6y$$

Entonces

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 2a + 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow \; a + 3y = 0$$

De donde se obtiene que $a = -3y$

En efecto

$$z_{xx} + z_{yy} = 2a + 6y = -6y + 6y = 0$$

5.-

Sea

$$u = \frac{x^2y^2}{x + y}$$

Demostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$$

Solución

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy^2(x + y) - x^2y^2(1)}{(x + y)^2}$$

$$= \frac{2x^2y^2 + 2xy^3 - x^2y^2}{(x + y)^2} = \frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x + y)^2}$$

Por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x + y)^2}$$

Similarmente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^2y(x+y) - x^2y^2(1)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{2x^3y + 2x^2y^2 - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{2x^3y + x^2y^2}{(x+y)^2}$$

Por tanto

$$\boxed{u = \frac{x^2y^2}{x+y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2y^2 + 2x^3y}{(x+y)^2}$$

Sigue que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x+y)^2} + y\frac{x^2y^2 + 2x^3y}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^3y^2 + 2x^2y^3}{(x+y)^2} + \frac{x^2y^3 + 2x^3y^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^3y^2 + 2x^2y^3 + x^2y^3 + 2x^3y^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2 + 3x^2y^3}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$= 3\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}$$

$$= 3u$$