Guía de ejercicios (Cálculo 2)

Áreas , volúmenes de sólidos, longitud de una curva, y áreas de superficies de revolución

1.- Calcular el área de la región encerrada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

R: $11/6$

2.- Determine el área del recinto limitado por las funciones:

$$f(x) = 4x - x^2 \ y \ g(x) = x^2 + 2x$$

R: 1/3

3.- Determine el área entre las función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX.

R: 37/12

4.- Determinar el área del recinto limitado por la curva

$a)\ y = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$ entre $x = 0$ y $x = 1$

R: ½ $ln(3/2)$

$b)\ y = \ln(x+3)$ y el eje OX entre $x = 0 \ y \ x = 1$

R: $4 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1$

$c)\ y = sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ y el eje OX desde $x = 0$ hasta $x = \pi$

R: 2

$d)\ y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = 0 \ y \ x = \pi$

R: 2

$e)\ y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas $x = -1 \ y \ x = 1$

R: $2 - \pi/2$

5.- Determine el área limitado por la curva $y = xe^x$, el eje OY y la ordenada correspondiente al punto máximo de la curva.

R: $3/e - 1$

6.- Hallar el área encerrada por las curvas : $y = x^4 - 4x^2$; $y = x^2 - 4$.

R: 8

6.- Hallar el área encerrada por las curvas : $y = x^3 - x$; $y = 3x$.

R: 8

7.- Determine el área limitado por la curva $y = xe^x$, el eje OY y la ordenada correspondiente al punto mínimo de la curva.

R: $3/e - 1$

8.- Hallar el área de la región del plano delimitada por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

R: $1/e$

9.- Hallar el área de la región del plano limitada por la curva $y = (x - 1)e^{-x}$, el eje de las abscisas desde el punto de corte hasta la abscisa en el punto máximo.

R: $1/e - 1/e^2$

10.- Calcular el valor del número real m para que el área del recito limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = mx$ sea $9/2\ u^2$.

R: ± 3

11.- Hallar el valor del número real a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + a$ y el eje OX sea igual a 36.

R: $a = 9$

12.- Calcular el área comprendida entre la función $y = \ln x$, el eje OX y la tangente a la función en el punto $x = e$.

R: $e/2 - 1$

13.- Determinar el área de las regiones del plano limitado por :

$$y = |x^2 - 5x + 4| \text{ y el eje } OX$$

R: 9/2

14.- Hallar el área comprendida entre la curvas $y = ln(x^2 + 1)$; $y = \ln 5$.

R: $8 - 4arctg(2)$ obs: $arctg(-\alpha) = arctg(\alpha)$

15.- Esbozar la región encerrada por la gráfica de las siguientes ecuaciones y luego calcule su área:

$i)$ $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1\ , y = 8\ ; y = 0$

R: $12\left(2\sqrt{3} - \ln\,(2 + \sqrt{3})\right)$

$ii)$ $y = x^3 - x\ ; y = |x + 1| - 1$

R: $7/2$

16.- Represente la región R acotado por las gráficas de las ecuaciones y calcule el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje de giro indicado:

$i)$ $y = x^2\ ; y = 4 - x^2$; alrededor del eje X

R: $64\sqrt{2}\pi/3$

$ii)$ $y = -x^2 - 3x + 6\ ;\ \ x + y = 3$ alrededor de la recta $x = 3$

R: $(256/3)\pi$

$iii)$ $y = x^2\ ;\ y^2 = 8x$ alrededor del eje Y

R: $24\pi/5$

$iv)$ $yx^2 = 1\ , y = 1\ , y = 4$ alrededor de $y = 5$

R: $64\pi/3$

$v)$ $y = x^2 + 1\ ; y = 5\ ; y = \dfrac{5x - 15}{2}\ , y = 0$ alrededor del eje X

R: $(1081/15)\pi$

17.- Calcule el volumen del sólido generado al girar la región encerrada por las gráficas de $y = x^2; y = 4$ alrededor de:

$i)\ y = 5$

$ii)\ x = 2$

R: $832\pi/15$; $128\pi/3$

18.- Exprese la integral que permite calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de:

$i)\ x + y = 3\ ; y + x^2 = 3$ alrededor de $x = 2$

$ii)\ y = |x-1| + |x-2|\ ; y = \dfrac{x+2}{2}$ alredeor de $y = 1$

R: $i)\ V = \pi \int_2^3 \left[(y-1)^2 - \left(2 - \sqrt{3-y}\right)^2\right] dy$

$R\ ii)\ V_1 = \pi \int_{4/5}^{1} \left[\left(\frac{x+2}{2} - 1\right)^2 - \left((3-2x) - 1\right)^2\right] dx$

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left(\frac{x+2}{2} - 1\right)^2 dx$$

$$V_3 = \pi \int_2^{8/3} \left[\left(\frac{x+2}{2} - 1\right)^2 - \left((2x-3) - 1\right)^2\right] dx$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

19.- Grafique y luego determine el área limitada por la curva $r = 2 + \cos\theta$.

R: $9\pi/2\ u^2$

20.- Hallar el área común del circulo $r = 3\cos\theta$ y la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

R: $5\pi/4\ u^2$

21.- Hallar el área de cada uno de los lazos del limazón $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

R: Lazo mayor: $\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\ u^2$ lazo menor: $\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\ u^2$

22.- Calcular el área de la región que se encuentra dentro del cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3$

R: $9\sqrt{3}/2 - \pi$

23.- Hallar el área interior a $r = \cos\theta$ y exterior a $r = 1 - \cos\theta$

R: $\sqrt{3} - \pi/3\ u^2$

24.- Calcule el área de la región encerrada por $r = 4\ sen\ 2\theta$.

R: $8\pi\ u^2$

25.- Calcule el área de la región interior a las curvas:

$$r = sen(2\theta) \text{ y } r = cos(2\theta)$$

R: $\pi/2 - 1\ u^2$

26.- Encuentre el área de la circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = a^2, a > 0$ usando coordenadas polares.

R : $\pi a^2\ \ u^2$

27.- Encuentre el área de la región que es común a los interiores de la cardioide $r = 2 - 2\ cos\theta$ y de la limazón $r = 2 + \cos\theta$.

R: $21/4\pi - 12\ u^2$

28.- Calcular la longitud de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

R: 8

29.- Calcular la longitud de la cardioide $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$.

R: $8\sqrt{2}$

30.- Calcule la longitud de la curva $r = cos^2\frac{\theta}{2}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

R: 2

31.- Calcular el área de la superficie generada en la rotación de $r = 4\cos\theta$ alrededor del eje polar. R: 16π *unid. sup.*

32.- Calcular la longitud de arco entre A y B de la gráfica de la ecuación:

$i)\ 8x^2 = 27y^3\ ; A = (1,2/3)\ ; B = (8,8/3)$

R: 7,29

$ii)\ y = 5 - \sqrt{x^3}\ ; A = (1,4)\ ; B = (4,-3)$

R: 7,63

$iii)\ y^2 = 12x\ ; A = (0,0)\ ; B = (3,6)$

$iv)\ y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}\ ; A = (1,13/12)\ ; B = (2,7/6)$

R: 13/12

33.- Calcule la longitud del segmento de curva dada en coordenadas paramétricas, desde $t = t_0$ hasta $t = t_1$:

$i)\ x = acos^3 t\ ; y = asen^3 t\ ;\ \ t_0 = 0\ ;\ \ t_1 = \pi/2$

$ii)\ x = e^t \cos t\ ; y = e^t sen\, t\ ;\ t_0 = 0\ ;\ \ t_1 = \pi$

$iii)\ x = t\ \ ; y = ln(\cos t)\ \ ;\ t_0 = 0\ ;\ \ t_1 = \pi\ /6$

$iv)\ x = 2t\ ; y = ln(cos^2 t)\ ; t_0 = 0\ ;\ \ t_1 = \pi\ /4$

R: $3a/2\ \ ;\ \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)\ ; ln\sqrt{3}\ ; 2ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$

34.- Suponga que la circunferencia $x^2 + (y-4)^2 = 9$ se gira en torno al eje X Calcule el valor del área de la superficie resultante.

$R: 48\pi^2 u^2$

35.- Hallar el área de la superficie de revolución que se forma al rotar la curva $8y^2 = x^2 - x^4$ sobre el eje X.

R: $\pi/4\ u^2$

36.- Determine el área de la superficie que se obtiene al hacer girar el arco de curva dada por la función: $f(x) = x^3/12 + 1/x$, para 1 ≤ x ≤ 2, alrededor de la recta $y = -5$. R:$(\ 203/16)\ \pi$