Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 15

Operaciones con espacios vectoriales

Intersección de espacios vectoriales (∩)

Definición: Llamaremos **intersección** de espacios vectoriales $S_1 \cap S_2$ al conjunto formado por todos los vectores que pertenecen simultáneamente al espacio vectorial S_1 y al espacio vectorial S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{\boldsymbol{v}}, \text{con } \vec{\boldsymbol{v}} \in S_1 \ y \ \vec{\boldsymbol{v}} \in S_2\}$$

Propiedad: La intersección de dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de $\mathbf{R}^n$ es también un subespacio vectorial. Exploremos como encontrar la base de ese subespacio

$$S_1 \cap S_2$$

Ejemplo 1:

Ya sabemos que los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ son subespacios vectoriales ya que son dos planos que pasan por el origen (0,0,0). Encontremos una base de $S_1 \cap S_2$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ 5x + y - z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ 2x + 2y + z = 0\}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0 & (-2) \\ 2x + 2y + z = 0 & (5) \end{cases}$$

Es claramente un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones, por tanto es indeterminado. Escalerizando obtenemos:

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ \quad\ \ 8y + 7z = 0 \end{cases}$$

Tomemos z, grado de libertad:

$$z = \alpha$$

entonces será,

$$y = -\frac{7}{8}\alpha$$

$$x = \frac{3}{8}\alpha$$

Por tanto, la recta intersección es:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + \alpha \left\langle \frac{3}{8}, -\frac{7}{8}, 1 \right\rangle$$

o lo que es equivalente:

$$(x, y, z) = \beta\langle 3, -7, 8\rangle$$

La base de $S_1 \cap S_2$ es:

$$\{(3, -7{,}8)\}$$

Escribimos:

$$\text{Base } (S_1 \cap S_2) = \{(3, -7{,}8)\}$$

o simplemente

$$S_1 \cap S_2 = \{(3, -7{,}8)\}$$

Unión de espacios vectoriales (∪)

Definición: Llamaremos unión de espacios vectoriales $S_1 \cup S_2$ al conjunto formado por todos los vectores del espacio vectorial S_1 y todos los de S_2:

$$S_1 \cup S_2 = \{\vec{\boldsymbol{v}}, \text{con } \vec{\boldsymbol{v}} \in S_1 \text{ ó } \vec{\boldsymbol{v}} \in S_2\}$$

Propiedad: La unión

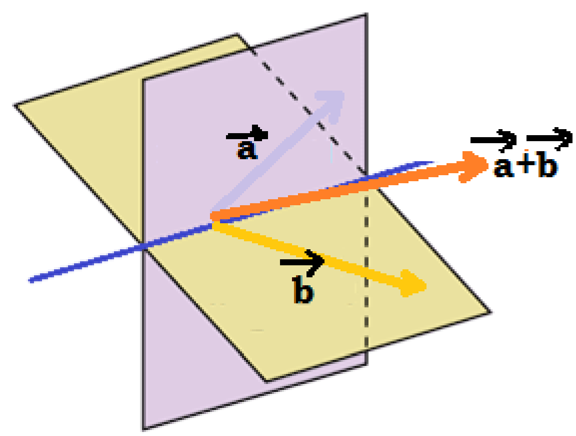
$$S_1 \cup S_2$$

de dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de $\mathbf{R}^n$ **no es,** por lo general, un subespacio vectorial.

Ejemplo:

Mostremos lo que ocurre en $\mathbf{R}^3$. Tomemos los dos subespacios del ejemplo anterior. Sabemos que representan dos planos.

Pero no todo vector suma de un vector de S_1 Con otro vector de S_2 tiene porque pertenecer a uno de los planos, por tanto no pertenece a la unión, es decir, vemos que la adición de vectores no es una operación interna en el conjunto.



Suma de espacios vectoriales (+)

Definición: Llamaremos suma de espacios vectoriales $S_1 + S_2$ al conjunto formado por todos los vectores que son suma de un vector de S_1 y un vector de S_2:

$$S_1 + S_2 = \{\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}, \text{con } \vec{\boldsymbol{a}} \in S_1 \; y \; \vec{\boldsymbol{b}} \in S_2\}$$

Propiedad: La suma $S_1 + S_2$ de dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de $\mathbf{R}^n$ es también un subespacio vectorial.

Definiremos la suma $S_1 + S_2$ de dos subespacios vectoriales como el conjunto de vectores que tiene como generador el conjunto que se obtiene de unir las bases de los conjuntos S_1 y S_2.

Ejemplo:

Volvamos a los planos del ejemplo anterior:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid 5x + y - z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid 2x + 2y + z = 0\}$$

Encontremos bases de S_1 y S_2.

Base de S_1:

Despejemos z:

$$z = 5x + y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5x + y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es claramente un conjunto linealmente independiente de vectores, por tanto …

$$S_1 = \{(1,0,5), (0,1,1)\}$$

Base de S_2:

$$z = -2x - 2y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x - 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \{(1,0,-2), (0,1,-2)\}$$

Por tanto,

$$\text{Gen } (S_1 + S_2) = \{(1,0,5), (0,1,1), (1,0,-2), (0,1,-2)\}$$

Para encontrar la base de la suma $S_1 + S_2$, debemos entrar un conjunto independiente entre esos cuatro. Lo hacemos con una técnica ya vista. Armamos la matriz de vectores columna y escalerizamos …

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Aplicando una técnica ya vista …

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Los primeros tres vectores originales son independientes, por tanto …

$$\text{Base } (S_1 + S_2) = \{(1,0,5), (0,1,1), (1,0,-2)\}$$

o simplemente:

$$S_1 + S_2 = \{(1,0,5), (0,1,1), (1,0,-2)\}$$

Como es un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^3$, el espacio vectorial obtenido es el propio espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Nota: deben de tener un poco de cuidado con la última notación. Ese espacio vectorial es el formado por todos los vectores que son combinación lineal de esos tres vectores. No significa que a él pertenezcan sólo tres vectores.

Suma directa

En el caso anterior, si conjunto de todos los vectores del generador de $S_1 + S_2$ hubiera sido linealmente, se dice que la suma de los subespacios vectoriales es una **suma directa**, y se escribe:

$$S_1 \oplus S_2$$

Dicho de otra manera, la suma es directa si la intersección de los subespacios $S_1 \ y \ S_2$ cumple:

$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$$

Propiedad:
Se cumple siempre que

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Si

$$\dim(S_1 \cap S_2) = 0$$

entonces la suma es directa y escribimos:

$$\dim\left(S_1 \oplus S_2\right) = \dim S_1 + \dim S_2$$

Ejemplo:

Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$ siguientes:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 3y + z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - y - z = 0\}$$

(a) Encuentre una base de S_1 y una base de S_2.

(b) Encuentre una base de $S_1 + S_2$ y una base de $S_1 \cap S_2$.

(c) Verifique que se cumple la propiedad que vincula las dimensiones de los subespacios S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$.

(d) ¿Es la suma $S_1 + S_2$ una suma directa? Explique brevemente.

Solución:

Parte (a):

Base de S_1: $$x + 3y + z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -x - 3y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - 3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base }(S_1) = \{(1,0,-1),(0,1,-3)\}$$

Base de S_2: $$2x - y - z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2x - y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base }(S_2) = \{(1,0,2),(0,1,-1)\}$$

Parte (b): $\text{Gen }(S_1 + S_2) = \{(1,0,-1),(0,1,-3),(1,0,2),(0,1,-1)\}$

Debemos encontrar un conjunto linealmente independiente de vectores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Conjunto de vectores originales $\{\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_3}}\}$ linealmente independientes, por tanto:

$$\text{Base }(S_1 + S_2) = \{(1,0,-1),(0,1,-3),(1,0,2)\}$$

Ahora busquemos la base de $S_1 \cap S_2$:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 & (-2) \\ 2x - y - z = 0 & (+1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ \quad -7y - 3z = 0 \end{cases}$$

Un grado de libertad:

$$z = \alpha$$

entonces será,

$$y = -\frac{3}{7}\alpha$$

$$x = +\frac{2}{7}\alpha$$

Por tanto, la recta intersección es:

$$(x, y, z) = \alpha \langle \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, 1 \rangle$$

o lo que es equivalente:

$$(x, y, z) = \beta \langle 2, -3, 7 \rangle$$

$$\text{Base } (S_1 \cap S_2) = \{(2, -3, 7)\}$$

Parte (c): $$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$
$$3 \quad = \quad 2 \quad + \quad 2 \quad - 1$$ ✓

Parte (d): No es suma directa ya que: $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 0$

Ejercicios:

1. Halle la intersección y la suma de los subespacios I y II e indique bases de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 10x - 5y = 0\}$$

2. (a) Calcular la dimensión del subespacio F de $\mathbf{R}^3$ generado por el conjunto

$$\{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$$

(Respuesta: dim F = 2)

(b) Determinar una posible **base** del espacio F del ejercicio anterior.

(c) Agregue al conjunto, un vector apropiado para que dim F = 3.

3. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$**:**

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 3y + 4z - t = 0\}$$
$$S' = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 10x - 5y + 2z - t = 0\}$$

(a) Halle una base del subespacio $S \cap S'$

(b) Hale una base del subespacio $S + S'$

(c) ¿Es la suma hallada en la parte anterior una suma directa? Justifique

(d) Realice el mismo trabajo para los subespacios de $\mathbf{R}^3$ siguientes:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$$
$S' = \{(1,1,2)\}$ (S' está dado por su base)

4. (a) ¿Para qué valores de "x" e "y" el vector $(2, x, 3, -y)$ pertenece al espacio vectorial generado por $\{(2; 3; 1;-5); (0; 2;-1; 3)\}$?

(b) ¿Para qué valores de "a" el siguiente conjunto de vectores forma una base de R^3?

$$\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$$

El **teorema de Steinitz** establece que en los espacios vectoriales de dimensión finita, todo conjunto de vectores linealmente independiente del espacio se puede ampliar hasta formar una base de dicho espacio vectorial.

5. Sean los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = (1, 2, 1, 4, 5)$ de $\mathbf{R}^5$. Completar una base de $\mathbf{R}^5$ agregándole al conjunto vectores de la base canónica

$$(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), \text{etc},$$

6. Demuestre que el conjunto **B** es una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y encuentre las coordenadas de $\vec{\boldsymbol{u}}$ (dado en la base canónica) en esa base **B:**

$$\mathbf{B} = \{(3; 2; 2), (-1; 2; 1), (0; 1; 0)\} \qquad \vec{\boldsymbol{u}} = (5; 3; 1)$$