Concepto de Trabajo en Física

El trabajo es el resultado de mover un cuerpo con una determinada fuerza.

1.- Caso más sencillo : Fuerza constante

Si tenemos una caja (de madera) y la queremos mover horizontalmente (o verticalmente) a una cierta distancia, debemos aplicar una fuerza

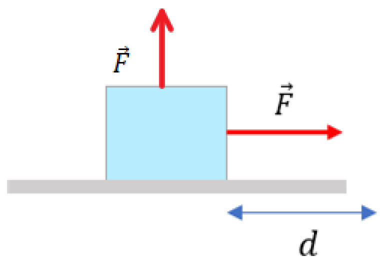


Figura 1

En física se usa el concepto de trabajo para describir la transferencia de energía cinética o potencial. No discutiremos aquí energía , mostraremos solamente trabajo y lo calcularemos.

El hecho de aplicar una fuerza para mover la caja a una cierta distancia como muestra la figura 1 involucra el concepto de trabajo lo cual podemos definir mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot d \cdots (1)}$$

en donde

$$W = Trabajo\ (se\ expresa\ en\ Joule = J)$$

$$\vec{F} = Fuerza\ (Newton = N)$$

$$d = Distancia\ (metros = m)$$

Pero no existe solamente esta fórmula para encontrar el trabajo, la fórmula (1) se aplica si la fuerza se mueve en forma horizontal y verticalmente. Qué tal si aplicamos una fuerza en ángulo θ como se muestra en la figura 2

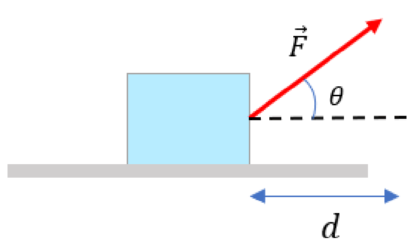


Figura 2

Se puede observar que tenemos un ángulo de inclinación, por consiguiente, la fórmula que utilizaremos es la siguiente:

$$W = \vec{F} \cdot d$$

$$= \vec{F} \cdot d \cos\theta$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot d \cos\theta \cdots (2)}$$

en donde

$$W = Trabajo\ (se\ expresa\ en\ Joule = J)$$

$$\vec{F} = Fuerza\ (Newton = N)$$

$$d = Distancia\ (metros = m)$$

$$\theta = Ángulo\ de\ la\ fuerza$$

Tipos de trabajo

El trabajo positivo: ocurre (ver figura 3) cuando la fuerza $\vec{F}$ actúa en la dirección que favorece el movimiento, es decir, cuando el ángulo θ es nulo o forma un ángulo agudo.

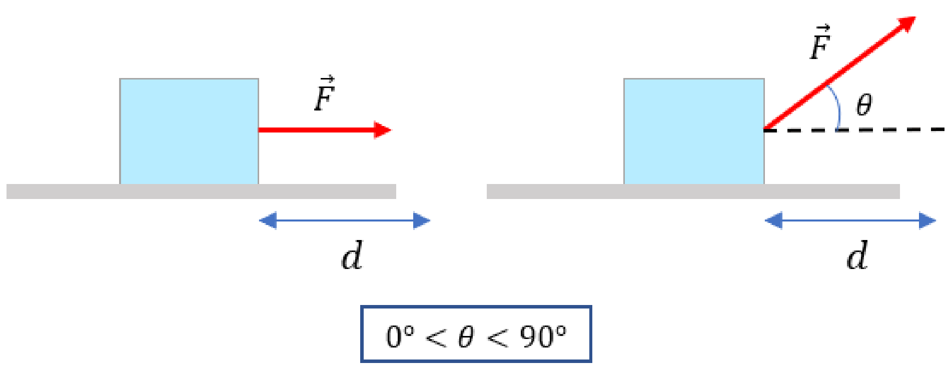


Figura 3

El trabajo negativo o resistente: (ver figura 4) es aquél trabajo donde la fuerza actúa en la dirección opuesta a dicho movimiento, es decir, cuando el ángulo θ forma un ángulo obtuso o de 180°.

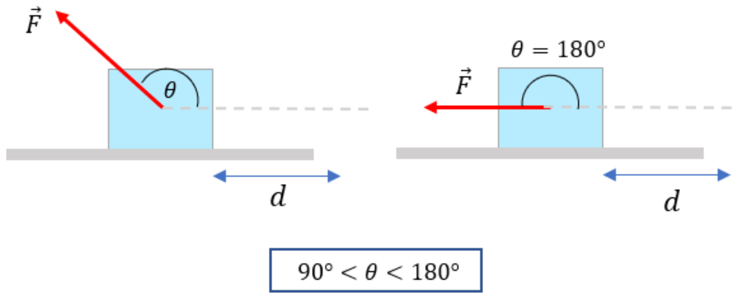


Figura 4

Trabajo nulo: Se le conoce como trabajo nulo aquél trabajo donde la fuerza y el ángulo de desplazamiento forman un ángulo recto o de 90°. Es decir, cuando el vector fuerza es perpendicular al desplazamiento.

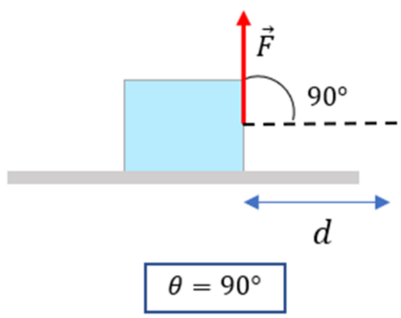


Figura 5

Ejemplos

1) Una persona que levanta un peso (fuerza) de 3 $newtons$ a una distancia de 2 metros del suelo realiza $3 \cdot 2 = 6\ Joules$ de trabajo.

2) Si un trabajador que empuja un carro en línea recta desde un punto A a un punto B con una fuerza constante $\vec{F}$ de 150 Newton y a una distancia de d de 20 metros hace $150 \cdot 20 = 3000\ Joule$ de trabajo.

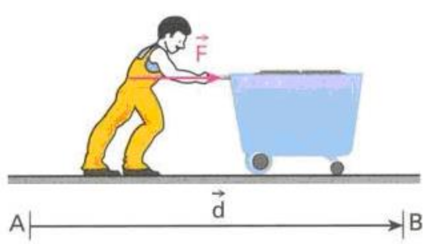


Figura 6

3) Vea las siguientes figuras qué representan dos trayectorias rectilíneas, en ambos caso el niño jala un carrito con una cierta carga, en el caso 1 el niño jala con un ángulo de $60°$ y aplica una fuerza de $20\ N$, en el caso 2 el niño jala con un ángulo de $0°$ y aplica una fuerza de $20\ N$. Determine el trabajo aplicado en ambos casos, si la distancia del desplazamiento en ambos caso es de 8 metros.

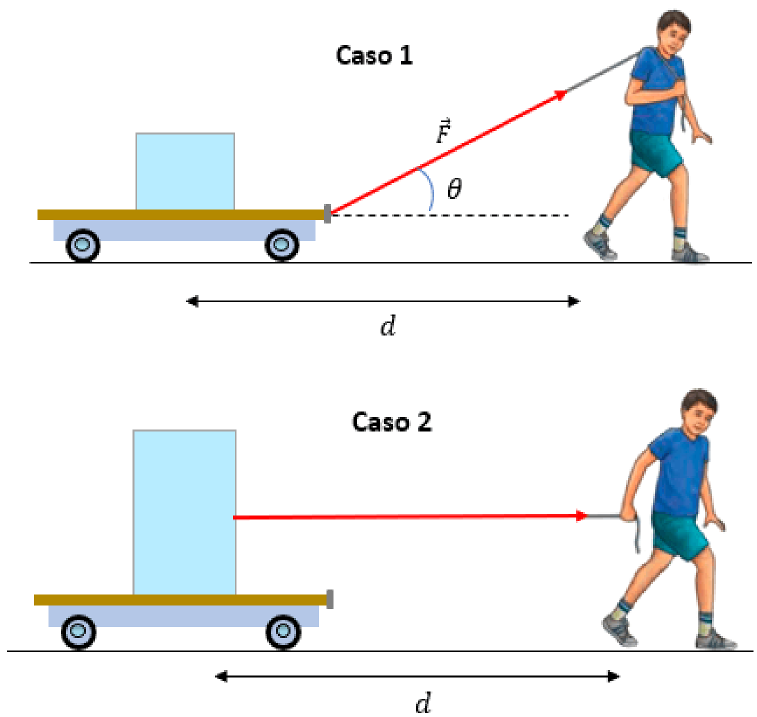


Figura 7

Solución

Caso 1: Anotemos los datos que tenemos para el primer caso.

Datos:

$\vec{\boldsymbol{F}}$ = 20 N

$\boldsymbol{d} = 8\,m$

$\boldsymbol{\theta} = 60°$

Considerando los datos anteriores y sustituyendo en nuestra fórmula, tenemos.

$$W = \vec{F} \cdot d \cos\theta$$

$$= (20\ N) \cdot (8\ m) \cos 60°$$

$$= 80\ N\ m = 80\ J$$

Lo que sería igual a 80 $Joules$.

Caso 2: Anotemos los datos que tenemos para el segundo caso.

Datos:

$\vec{F} = 20\ N$

$d = 8\ m$

$\theta = 0°$

Basándonos en nuestros datos y anotándolos en la fórmula, tendremos:

$$W = \vec{F} \cdot d \cos\theta$$

$$= (20\ N) \cdot (8\ m) \cos 0°$$

$$= 160\ N\ m = 160\ J$$

Eso sería un trabajo de 160 $Joules$, prácticamente el doble de trabajo que el caso 1.

4) En la siguiente figura tenemos un bloque que es jalado por una fuerza cuya magnitud es de 15 N que forma un ángulo de 50° respecto a la dirección del desplazamiento. ¿Cuál será el trabajo realizado si el desplazamiento del bloque es de 8 m?

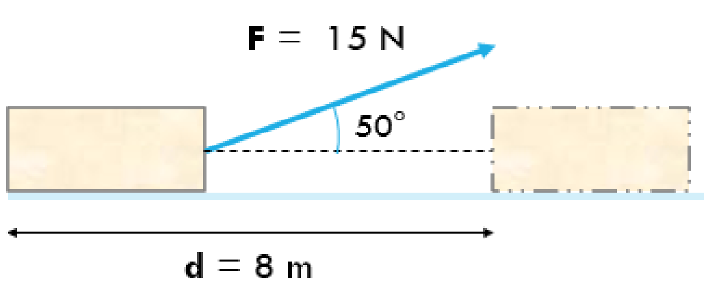


Figura 8

Solución

Si analizamos el problema nos vamos a dar cuenta que poseemos una inclinación en dirección al desplazamiento de 8 metros, esto indica que tendremos que usar la fórmula que posee al ángulo theta. Entonces comenzamos con anotar los datos:

Datos:

$\vec{F} = 15\ N$

$d = 8\ m$

$\theta = 50°$

$$\Rightarrow W = \vec{F} \cdot d \cos \theta$$

$$= (15\ N) \cdot (8\ m) \cos 50° = 77.13\ N\ m = 77.13\ J$$

2.- Caso más realista : Fuerza variable

En matemáticas llamamos constante a una magnitud que no cambia con el paso del tiempo. En ocasiones, se puede tratar de un valor fijo y determinado.

Por otro lado, tenemos el concepto de variable, que se utiliza para definir toda cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos.

Para entender mejor la diferencia entre ambos conceptos, vamos a tomar como referencia la siguiente situación.

Si un matrimonio hace un viaje por carretera, como están circulando por una autopista muy buena, han podido ir a 100 $km/\ Hora$ de rapidez durante la última media hora.

Figura 9

Como a lo largo de la última media de hora de viaje la rapidez ha sido la misma, podemos decir que, la rapidez del coche del matrimonio ha sido una **constante**.

Para que esto haya podido pasar el motor del coche ha tenido que ejercer distintas fuerzas de empuje, es decir en las bajadas el motor no ha necesitado empujar mucho para mantener los 100km/h, pero por contra, en las subidas, el motor ha tenido que empujar mucha más para que esa rapidez se mantuviera constante.

Esto quiere decir que la fuerza de empuje que ha hecho el motor del coche ha sido **variable** , porque ha ido cambiando a lo largo del recorrido.

Después de este ejemplo que, en muchas situaciones prácticas , la fuerza no es constante, si no que varía conforme al objeto se mueve a lo largo de una línea. Suponga que el objeto se está moviendo a lo largo del eje X desde a hasta b sujeto a una fuerza variable de magnitud $F(x)$ en el punto x, en donde F es una función continua. Entonces ¿ cuanto trabajo se hizo?.

Una vez más, la estrategia de particionar, aproximar e integrar nos lleva a la respuesta. En efecto, particionar como ya sabemos significa dividir el intervalo $[a, b]$ en n pedazos pequeños, los cuales son subintervalos del tipo $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. En una parte representativa desde x a $x + \Delta x$, la fuerza es constante con valor $F(x)$. Si la fuerza es constante (con valor $F(x_i)$) en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces el trabajo requerido para mover el objeto desde x_{i-1} a x_i es $F(x_i)\Delta x_i$ (ver figura 10).

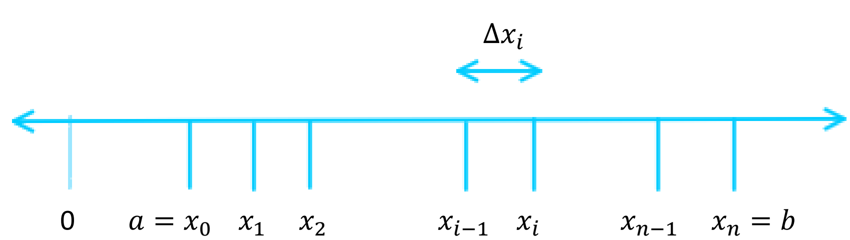


Figura 10

Integrar significa sumar todos los pequeños trabajos y después tomar el límite cuando la longitud de los pedazos tiende a 0.

De esta manera, el trabajo realizado al mover el objeto desde a hasta b es:

$$\boldsymbol{W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx}$$

Observación

El valor del trabajo puede obtenerse también mediante una representación gráfica con el valor de la fuerza en el eje de ordenadas y la distancia en el eje de abscisas.

Matemáticamente, el valor de la integral es numéricamente igual al área bajo la curva de F_x versus x (ver figura 11) desde la posición inicial x_i a la final x_f.

$$\boldsymbol{W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx}$$

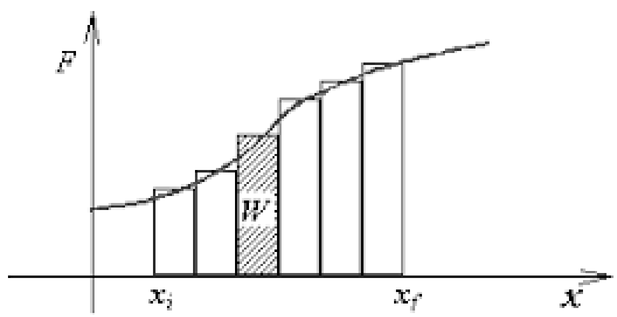
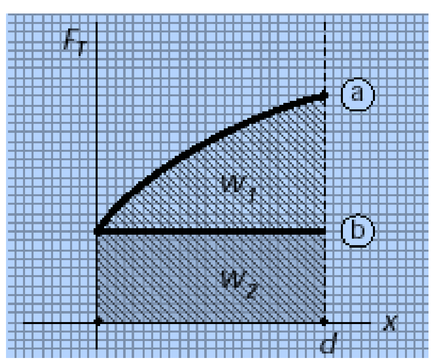


Figura 11



a) Trabajo W_1 de una fuerza variable, determinado como el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. b) Trabajo W_2 de una fuerza constante para todo el recorrido.

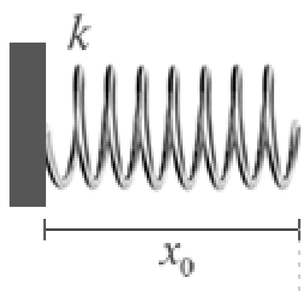
Aplicaciones

1.- Aplicación a resortes:

De acuerdo con la ley de Hooke en física, la fuerza $F(x)$ necesaria para mantener un resorte estirado (o comprimido) x unidades alargado (o acortado) de su longitud natural (véase la figura 11) está dado por

$$F(x) = kx$$

Longitud natural x_0



Estirado x unidades

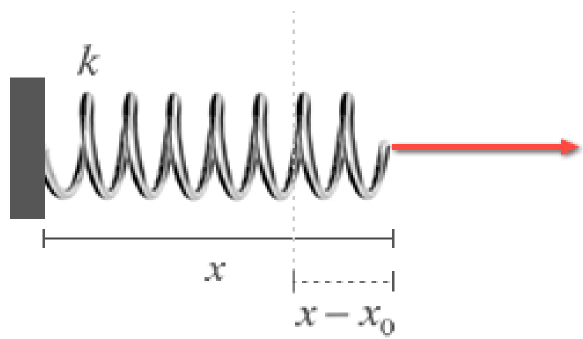


Figura 12

Aquí, la constante del resorte es positiva y depende del resorte particular considerado. Entre más rígido sea el resorte mayor será el valor de k.

Ejemplo

Si la longitud de un resorte es de 0,2 metros y si es necesaria una fuerza de 12 Newtons para mantenerlo estirado 0,04 metros, encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural a una longitud de 0,3 metros.

Solución

Por la Ley de Hooke , la fuerza requerida para mantener el resorte estirado x metros está dado por $F(x) = kx$. Para evaluar la constante de rigidez del resorte, k, para este resorte en particular, observamos que

$$F(0{,}04) = 12$$

$$\Leftrightarrow k(0{,}04) = 12$$

$$\Rightarrow k = \frac{12}{0{,}04} = 300$$

Cuando el resorte tiene su longitud natural de $0{,}2\ \mathrm{metros}$, $x = 0$. Cuando tiene longitud de $0{,}3$ metros, $x = 0{,}1\ \ (0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1)$. Por lo tanto, el trabajo hecho al estirar el resorte es:

$$w = \int_0^{0,1} 300\, x\, dx\ = [150x^2]_0^{0,1}$$

$$= 150(0{,}1)^2 - 150(0)^2$$

$$= 150\ (0{,}01)$$

$$= 1{,}5$$

Por tanto ,el trabajo es

$$\boldsymbol{W} = 1{,}5\ Jules$$

2.- Aplicación al bombeo de un líquido:

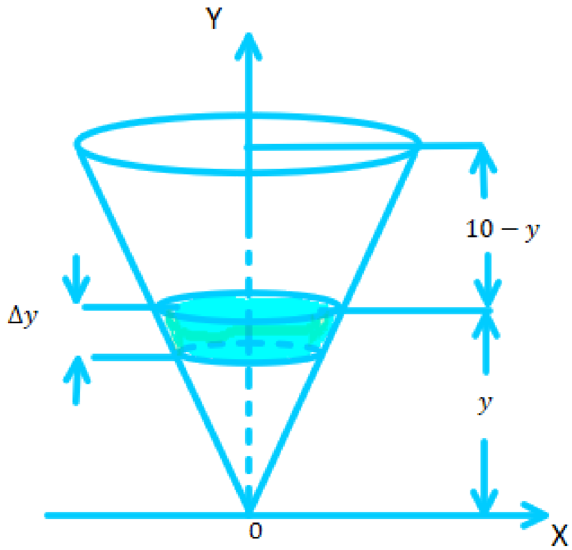
Para bombear agua de un tanque se requiere trabajo, como sabrá cualquiera que ha utilizado una bomba de mano.

Ejemplo

Un depósito, con forma de cono circular recto (ver figura 13), está lleno de agua. Si la altura del tanque es de 10 pies y el radio en la parte superior y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo hecho al bombear el agua hasta el borde superior del depósito.

Solución

Situación del problema



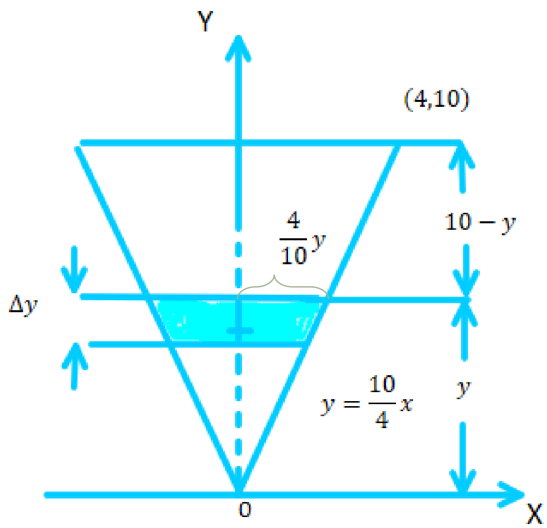


Figura 13

Coloque el depósito en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 13. En estas se muestran las vistas en tres dimensiones y una sección transversal en dos dimensiones. Imagine que se rebana el agua en delgados discos horizontales, cada uno de los cuales debe elevarse al borde del depósito.

Un disco de grosor de grosor Δy es su altura y por triángulo semejante tiene radio $4y/10$. Así, su volumen es aproximadamente $\pi(4y/10)^2\Delta y$ pies cúbicos, y su peso es alrededor de $\delta\pi(4y/10)^2\Delta y$, en donde $\delta = 62{,}4$ a la densidad (peso) del agua en libras por pie cúbico.

La fuerza necesaria para elevar este disco de agua es igual a su peso, y el disco debe elevarse a una distancia de $10 - y$ pies. Así el trabajo ΔW hecho sobre este disco es aproximadamente

$$\Delta W = (fuerza)(distancia) = \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y(10 - y)$$

$$\therefore W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10 - y)\, dy$$

$$= \delta\pi\frac{4}{25}\int_0^{10} \left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10y^2 - y^3)\, dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62{,}4)}{25}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 26{,}138\ \text{libras} - \text{pie}$$

Obs:

En unidades inglesas, si la fuerza se mide en libras y la distancia en pies , entonces el trabajo estará en libras – pies

Ejercicios de tarea:

1.- En el siguiente gráfico, representamos la fuerza impulsora que actúa en el movimiento de un automóvil. Determine el trabajo de esta fuerza que actúa en la dirección del movimiento del automóvil, sabiendo que partió del reposo.

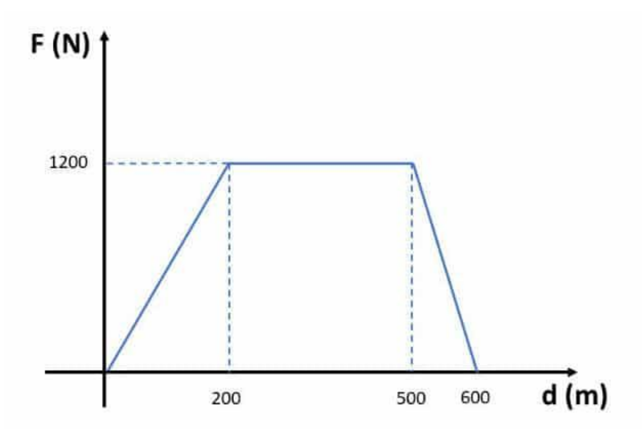


Figura 14

R: 540 KJ

2.- Encuentre el trabajo realizado al bombear agua hasta el borde superior de un estanque de un depósito, que es de 50 pies de largo y tiene extremos semicirculares de radio 10 pies, si el depósito está lleno hasta una profundidad de 7 pies (ver figura 15).

R: 1.805,616 libras-pie

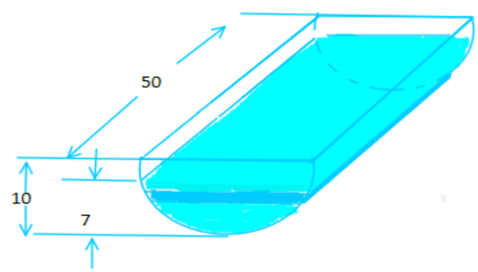


Figura 15

3.- Se requiere una fuerza de 40 N para sostener un resorte que esta estirado su posición natural de 10 cm a una longitud de 15 cm, ¿Cuánto trabajo se hace al estirar al resorte de 15 a 18 cm? .

R: 1,56 j

4.- Cuando una partícula se ubica a una distancia x pies del origen una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 3$? .

R: $50/3\ libra - pie$

5.- Calcular aproximadamente el trabajo realizado al elevar un objeto de 15 kg de masa verticalmente a una altura de 4 m.

R: 588,6 J (OBS: Para determinar F antes de aplicar la definición $W = Fd$, en el ejercicio 5.- se usa la segunda Ley de Newton $F = ma$ (masa por aceleración de un objeto) donde m se mide en Kilogramo y a en m/s^2, en este caso a es la aceleración de gravedad $g \approx 9.81\ m/s^2$)

6.- Un tanque que tiene la forma de un cono circular recto de 20 pie de alto y radio de la base de 5 pie, tiene su vértice al nivel del suelo y su eje vertical. El tanque está lleno de agua que pesa $62.5\ lb/pie^3$. Calcular el trabajo realizado al bombear toda el agua y hacer que salga por arriba del tanque.

R: 163,625 $lb - pie$