NÚMEROS NATURALES

N = {1,2,3,4,5,6,7, …}

Propiedades:
- **Son infinitos.**
- **El primer natural es el 1.**
- **El 0 no es NATURAL.**

La adición y multiplicación de números naturales son “operaciones internas en N”, esto es:

natural + natural = natural
natural $\times$ natural = natural

La sustracción y la división no lo son:

3 – 5 no es natural $\quad\quad$ $\frac{23}{10}$ **no es natural**

NÚMEROS ENTEROS

Números con signo: Z = { … -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …}

Se utiliza la letra Z para identificar a los números enteros.

Los números negativos a veces son un poco tramposos …

2 < 3 (2 es menor que 3) pero -2 > -3 (-2 es mayor que -3)

El que está más a la izquierda "es menor" que el que está más a la derecha

-1.000.000 < -1

Propiedad: Al multiplicar dos números enteros por un número positivo, se conserva el orden …

$$\mathbf{2 < 5 \quad \Rightarrow \quad 2 \times 4 < 5 \times 4 \quad \Rightarrow \quad 8 < 20}$$

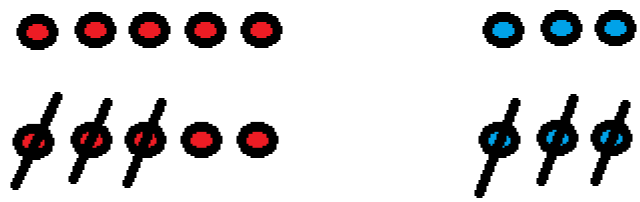
Propiedad: Al multiplicar dos números enteros por un número negativo, se invierte el orden …

$$\mathbf{2 < 5 \quad \Rightarrow \quad 2 \times (-3) > 5 \times (-3) \quad \Rightarrow \quad -6 > -15}$$

Ojo!!! Cambia el sentido

SUMA DE NÚMEROS ENTEROS:

+5 + (-3) = +2



+2

OPUESTO (O INVERSO ADITIVO) DE UN NÚMERO.

Definición: se llama OPUESTO (o INVERSO ADITIVO) de "a" a otro número que sumado a "a" dé como resultado cero.

$$(+2)\ +\ (-2)\ =\ 0$$

RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Para restar números enteros, se suma el opuesto del segundo número (esto es, el número cambiado de signo)

Definición de resta:

$$a - b = a + (-b)$$

+7 - (-4) = +7 + (+4) = + 11

MÚLTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS:

$$+5 \cdot (-4) = -20$$

Se utiliza la regla de los signos:

(+) . (+) = (+)	Los amigos de mis amigos son mis amigos
(+) . (-) = (-)	Los amigos de mis enemigos son mis enemigos
(-) . (+) = (-)	Los enemigos de mis amigos son mis enemigos
(-) . (-) = (+)	Los enemigos de mis enemigos son mis amigos

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES:

Si tenemos operaciones múltiples -> PAPOMUDAS

PAréntesis -> POtencias -> MUltiplicaciones y Divisiones -> Adiciones y Sustracciones

$$5 + 2 \times 4 = 5 + 8 = 13$$

$$(5 + 2) \times 4 = 28$$

NÚMEROS RACIONALES Q

Definición: números que pueden ser escritos como cocientes de enteros …

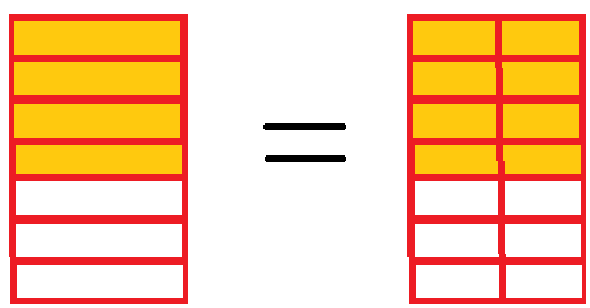
$$x \text{ es RACIONAL} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \quad \text{con} \quad a, b \in Z,\ b \neq 0$$

$$\frac{23}{10} = 2,3 \text{ no es entero,} \quad 2,3 \in Q$$

<u>Y recuerden, no se puede dividir por CERO.</u>

Las fracciones se pueden amplificar y simplificar. Comer $\frac{4}{7}$ de chocolate es lo mismo que comer $\frac{8}{14}$.

$\frac{4}{7}$



$\frac{8}{14}$

Operaciones con fracciones:

Suma:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5} = \frac{8}{20}+\frac{15}{20} = \frac{23}{20} = 2,3$$

Resta:

$$\frac{2}{5}-\frac{3}{4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5} = \frac{8}{20}-\frac{15}{20} = -\frac{7}{20} = -0,35$$

Multiplicación:

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{21}$$

$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3,33333\ldots = 3,\overline{3}$ **(decimal periódico)**

INVERSO MULTIPLICATIVO DE UN NÚMERO:

Otro número que multiplicado por el primero de resultado 1.

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5} = \frac{35}{35} = 1$$

División:

$$a : b = a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)$$

Se multiplica por el inverso del segundo número …

$$\frac{2}{7}:\frac{5}{3} = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

Ejercicio:
Al desarrollar la expresión,

$$\frac{\frac{3}{10}+0{,}2-\frac{1}{4}}{0{,}25+\frac{1}{2}+0,\overline{3}} \div \frac{47}{65}$$

El valor obtenido es …

Solución:

Expresemos todo en fracciones …

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} : \frac{47}{65} =$$

Hagamos denominador común,

$$= \frac{\frac{5}{20}}{\frac{13}{12}} : \frac{47}{65} =$$

Recordemos que para dividir fracciones se invierta el divisor y se multiplica …

$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{65}{47}$$

Simplificando:

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{47}$$

$$\frac{15}{47}$$

Ejercicio:

Calcular

$$\frac{\frac{10}{6}\cdot\frac{3}{7}-\frac{4}{21}\div\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}}$$

Solución:

Cuidado con el número mixto que aparece allí:

$$1\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Luego,

$$\frac{\frac{30}{42}-\frac{12}{42}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7}}=\frac{\frac{18}{42}}{\frac{4}{7}}=\frac{18}{42}\cdot\frac{7}{4}$$

Simplificando ...

$$\frac{18}{42}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3}{4}$$

En ciencia, no es común que aparezcan números mixtos.

NÚMEROS IRRACIONALES

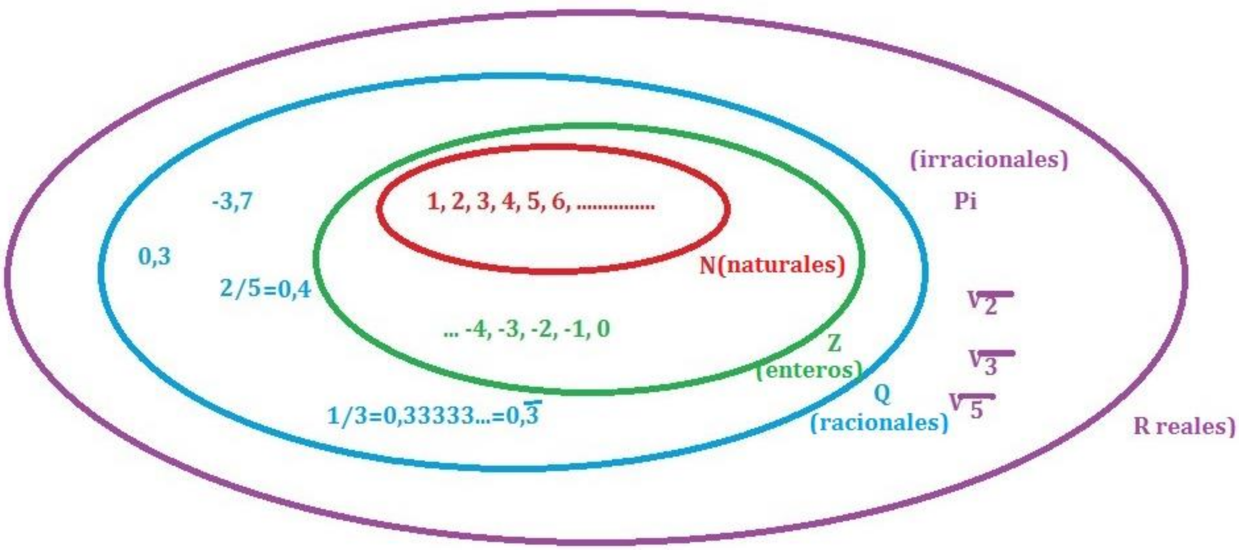
Son aquellos que no tienen desarrollos decimales infinitos pero no son periódicos.

Ejemplos: $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

No pueden ser expresados como fracción. No existen números enteros a y b tales que …

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO



Naturales: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots.\}$

Enteros: $Z = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Racionales: $Q = \left\{2, -7, 0 - \ 1, ¾, -\frac{7}{5}, 0, 33, \ldots\right\}$

Reales: $R \ = \{2, -5, 7, 1, 0, \frac{3}{5}, -\frac{8}{4}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \ldots\}$

Propiedades importantes de los números reales:

1. La adición y multiplicación de números reales <u>son conmutativas</u>. Esto es …

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

sean cuales sean los números reales a y b $(\forall a, b \in R)$

La resta y la división no lo son …

2. El <u>neutro</u> de la adición es 0 y el neutro de la multiplicación es 1.

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$$

3. El <u>opuesto o inverso aditivo</u> de un número "a" es otro número "-a" tal que:

$$a + (-a) = 0 \qquad \forall a \in R$$

4. El <u>inverso multiplicativo</u> de un número "a" es otro número que multiplicado por él da como resultado 1.

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \qquad \forall a \neq 0$$

<u>Cuidado: El cero no tiene inverso multiplicativo.</u>

$$0 \cdot a = 0 \qquad \forall a$$

POTENCIAS Y RAÍCES

Potencias de exponente natural:

Ejemplo: $2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 veces}} = 8$

Definición: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n veces (si } n > 1)}$

$$a^1 = a$$

Propiedades:

1) $$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$2^4 \times 2^3 = 2^7$$

$$(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo: $$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3}$$

$$\frac{2 \times 2 \times \cancel{2 \times 2 \times 2}}{\cancel{2 \times 2 \times 2}} = 2^2$$

3) $$(a^m)^n = a^{m.n}$$

4) $$a^n . b^n = (a . b)^n$$

5) $$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potencia de exponente cero:

Si queremos que estas propiedades sigan siendo válidas cuando el exponente es cero, por ejemplo la propiedad 1, debería ser:

$$2^3 . 2^0 = 2^{3+0}$$
$$8 . 2^0 = 8$$

¿Porqué número hay que multiplicar 8 para que el producto sea también 8? Respuesta: 1.

Por tanto, si queremos que las propiedades anteriores se sigan cumpliendo:

Definición: $a^0 = 1$ **para todo** $a \neq 0$

0^0 **no está definido en matemática**

Potencia de exponente negativo:

De forma similar, si queremos que las propiedades se sigan cumpliendo, tenemos que:

$$2^3 . 2^{-3} = 2^{3+(-3)}$$
$$2^3 . 2^{-3} = 2^0$$
$$8 . 2^{-3} = 1$$
$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Definición:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad \text{si } a \neq 0$$

Agregamos …

Prop. 6)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Un ejercicio:

$$\frac{4\cdot 18^n}{3^{-1}\cdot 6^{2n+1}\cdot 2^{-n}}=$$

$$=\frac{2^2\cdot(2\cdot 3^2)^n}{3^{-1}\cdot(3\cdot 2)^{2n+1}\cdot 2^{-n}}=$$

$$=\frac{2^2\cdot 2^n\cdot 3^{2n}}{3^{-1}\cdot 3^{2n+1}\cdot 2^{2n+1}\cdot 2^{-n}}=$$

$$=\frac{2^{2+n}\cdot 3^{2n}}{3^{-1+2n+1}\cdot 2^{2n+1-n}}=$$

$$=\frac{2^{n+2}\cdot 3^{2n}}{3^{2n}\cdot 2^{n+1}}=$$

$$=\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=$$

$$=2^{n+2-(n+1)}=2$$

RAÍCES

$2^3=8$ entonces $\sqrt[3]{8}=2$

(un número que elevado al cubo sea 8)

Definición: si $a^n=b$ entonces $\sqrt[n]{b}=a$

"n" se llama "índice de radicación" y si vale 2 no se escribe.

Así: $\sqrt{49}=7$ **(no se escribe el índice 2)**

Importante: No se definen raíces reales de números negativos e índice par:

Ejemplos: $\sqrt[2]{16}=4$

$\sqrt[2]{-16}$ **no es un número real**

$\sqrt[3]{8}=2$

$\sqrt[3]{-8}=-2$ **ya que** $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

Ejemplo:

¿A qué es igual la raíz $\sqrt[5]{32}$?

Debemos buscar un número que multiplicado cinco veces por sí mismo sea 32. Ese número es 2.

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

Propiedades:

1) $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2) $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

4) $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$ p natural

Ejemplo: $$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$$

5) $$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{si n es par} \\ a & \text{si n es impar} \end{cases}$$

6) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo: $$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Ejercicio:

Escribir la siguiente expresión como una raíz única …

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5}$$

Solución:

Debemos expresar las dos raíces con un mismo índice de radicación.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[3]{2^1} \cdot \sqrt[4]{2^5}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[3\cdot 4]{2^{1\cdot 4}} \cdot \sqrt[4\cdot 3]{2^{5\cdot 3}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^{15}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^{15}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[12]{2^{19}}$$

En algunos casos (por ejemplo si hubiera un denominador para simplificar) es conveniente sacar la potencia entera de 2 fuera de la raíz. Así …

$$\sqrt[12]{2^{19}} = \sqrt[12]{2^{12}} \cdot \sqrt[12]{2^7}$$

$$\sqrt[12]{2^{19}} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^7}$$

Otra forma de hacerlo:

Recordemos la propiedad 6 de Raíces.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Y la aplicamos …

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{4+15}{12}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{19}{12}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[12]{2^{19}}$$

Mismo resultado.

Racionalización de denominadores:

Caso 1)

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(amplificamos por $\sqrt{2}$)

Caso 2)

Recordando que:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$ ← **amplificamos por el conjugado**

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{7\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$ ← **amplicamos fórmula suma x diferencia**

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{7\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$ ← **simplificamos raíces y exponentes**

Caso 3)

Si en el denominador hay una suma o resta de raíces cúbicas, se aplica una de estas fórmulas …

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}=\frac{2}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5})}\cdot\frac{(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}=2\cdot\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{7^3}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}=2\cdot\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}$$