Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
1er. Semestre 2021
Prof. Mario Marotti

Evaluación final

27 de Julio de 2021

Instrucciones:

- * **La prueba es individual. Se recomienda no comentar el trabajo propio con otros estudiantes.**
- * **El plazo de entrega de la prueba es hoy, martes 27 de Julio, a las 22 horas.**
- * **Se deberá enviar un documento único (pdf o Word con fotos pegadas) conteniendo fotos de la resolución escrita a mano por el estudiante (no más de cuatro o cinco fotos por el peso del archivo, aunque no es excluyente). De ser posible, se sugiere escanear para mayor claridad.**
- * **El correo deberá ser enviado desde el correo institucional del estudiante, esto es ...@alumnos.uv.cl al correo mario.marotti@uv.cl**
- * **En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible.**

---

1. (a) Discuta en función de “k”, el número de soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y + 2z + 2t = 0 \\ 3x + 2z - t = 0 \\ y + kt = 0 \end{cases}$$

(0,7 puntos)

(b) ¿Podría ser incompatible ese sistema? Justifique su respuesta. **(0,3 puntos)**

2. Encuentre en $\mathbf{R}^3$ el punto de intersección de la recta que contiene a los puntos

$$A(0,1,3) \quad \text{y} \quad B(2,1,-1)$$

con el plano de ecuación:

$$2x + y - 2z = 1$$

(1,0 puntos)

3. Pruebe que la transformación lineal $\mathbf{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0,8 & 0 \\ 0.8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una isometría. **(1,0 puntos)**

4. (a) Encuentre la matriz de pasaje del sistema de coordenadas en la base canónica a otro sistema en la base

$$B^* = \{(1,0,1); (1,1,2); (0,0,1)\}$$

(0,5 puntos)

(b) Encuentre las coordenadas del vector $\vec{a} = 4\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 2\vec{\boldsymbol{k}}$ en ese nuevo sistema. **(0,5 puntos)**

5. Considere la transformación lineal $\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuya matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Diagonalizarla, indicando una base en la cual la matriz sea diagonal. **(0,5 puntos)**

(b) Decidir algebraicamente si la base encontrada es ortogonal. **(0,5 puntos)**

6. Utilizando el método algebraico de mínimos cuadrados y trabajando con matrices, encuentre la ecuación de la recta que mejor ajusta al siguiente conjunto de datos:

$$\{(1,1)(2,3)(3,4)(4,2)\}$$

(1,0 puntos)

Ejercicio 1:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -6 + k(-2+12-8) =$

$= \boxed{-6+2k}$

$-6+2k=0 \iff k=3$

Si $k \neq 3 \Rightarrow$ El sistema es DETERMINADO. Tiene una única solución, la solución TRIVIAL: $x=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad t=0$

Si $k=3 \Rightarrow$ El sistema es INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

(b) No. Es un sistema HOMOGÉNEO. Siempre tiene la solución TRIVIAL.

Ejercicio 2 $\quad A(0,1,3) \quad B(2,1,-1)$

El vector director $\overline{AB} = \langle 2,0,-4 \rangle$

La recta $\overline{AB}$ tiene ecuación:

$(x,y,z) = (0,1,3) + \lambda \langle 2,0,-4 \rangle \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = 3 - 4\lambda. \end{cases}$

Reemplazando en la ecuación del plano:

$2(2\lambda) + \cancel{1} - 2(3-4\lambda) = \cancel{1}$

$4\lambda - 6 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

$x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y = 1$

$z = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\boxed{P(1,1,1)}$

Ejercicio 3:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x - 0,8y \\ 0,8x + 0,6y \\ z \end{pmatrix}$$

Para ser una isometría deberá cumplirse:

$$\boxed{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = T(\vec{v_1}) \cdot T(\vec{v_2})}$$

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$ ✓

$$T(\vec{v_1}) \cdot T(\vec{v_2}) = (0,6x_1 - 0,8y_1)(0,6x_2 - 0,8y_2) + $$
$$+ (0,8x_1 + 0,6y_1)(0,8x_2 + 0,6y_2) + z_1 \cdot z_2 =$$
$$= 0,36x_1 \cdot x_2 - \cancel{0,48x_1y_2} - \cancel{0,48x_2y_1} + 0,64y_1y_2 +$$
$$+ 0,64x_1 \cdot x_2 + \cancel{0,48x_1y_2} + \cancel{0,48x_2y_1} + 0,36y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 =$$
$$= \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$ ✓ Se cumple

Ejercicio 4:

(a) Los vectores de la nueva base son $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La matriz de pasaje de $B^* \longrightarrow B^C$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz buscada es A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} = 1.\vec{v_1} + 3\vec{v_2} - 5\vec{v_3}}$$

$\vec{a} = (1, 3, -5)_{B^*}$

Ejercicio 5

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Valores propios: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 12 = 0$

$\boxed{\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0}$ $\to \lambda = -1$, $\to \lambda = 6$

Si $\boxed{\lambda = -1}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{y = -\frac{2}{3}x}$ $\quad (1, -\frac{2}{3})$

$\vec{v_{p_1}} = \boxed{(3, -2)}$

Si $\boxed{\lambda = 6}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2y}$$

$\vec{v_{p_2}} = \boxed{(2, 1)}$

$\boxed{\text{Base} = \{(3,-2)(2,1)\}}$

(b) Si fuera ortogonal $\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (3,-2) \cdot (2,1) = 3.2 - 2.1 = 4 \neq 0$

No. No es ortogonal

Ejercicio 6:

Por el método algebraico:

$$\boxed{m x_i + b = y_i} \quad \text{con} \quad 1 \le i \le 4 \quad (\text{son 4 puntos})$$

$$\begin{cases} 1m + b = 1 \\ 2m + b = 3 \\ 3m + b = 4 \\ 4m + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A . X = B$$

$$A^t . A . X = A^t . B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 30m + 10b = 27 \\ 10m + 4b = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 30m + 10b = 27 & (1) \\ 5m + 2b = 5 & (-6) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{30m} + 10b = 27 \\ -\cancel{30m} - 12b = -30 \\ \hline -2b = -3 \end{array}$$

$$\boxed{b = \frac{3}{2}}$$

Reemplazando:

$$5m + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = 5 \Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{5}}$$

La recta es $\boxed{y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}}$

$$\boxed{y = 0{,}4x + 1{,}5}$$