La geometría de las ecuaciones lineales

El problema fundamental que dio lugar al álgebra lineal es el problema de resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Caso 1:

Por ejemplo, el siguiente sistema tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas (un sistema 2×2):

$$\begin{cases} \mathbf{2}x - y = 0 & (+\mathbf{1}) \\ -\mathbf{1}x + 2y = 3 & (+\mathbf{2}) \end{cases}$$

Existen varios métodos, conocidos desde el colegio para resolver un sistema como ese:

$$\textbf{Métodos analíticos} \begin{cases} \textbf{Reducción} \\ \textbf{Igualación} \\ \textbf{Sustitución} \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por reducción. Eliminemos x multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumándole la primera.

$$\begin{array}{r} 2x - \ \ y = 0 \\ -2x + 4y = 6 \\ \hline 3y = 6 \end{array}$$

o sea

$$y = 2$$

Reemplazando en alguna de las ecuaciones, $x = 1$.
La solución (que es **única**) la escribimos

$$S = \{(1,2)\}$$

Un sistema con solución única se llama **sistema determinado.**

Caso 2:

Resolvamos el siguiente sistema por reducción.

$$\begin{cases} \mathbf{3}x + y = 2 & \cancel{(-6)} \quad (-\mathbf{2}) \\ \mathbf{6}x + 2y = 4 & \cancel{(+3)} \quad (+\mathbf{1}) \end{cases}$$

Eliminemos x, multiplicando la primera ecuación por (-2) y sumemos la segunda,

$$\begin{array}{r} -6x - 2y = -4 \\ 6x + 2y = \ \ \ 4 \\ \hline 0y = \ \ \ 0 \end{array}$$

Cualquier número multiplicado por 0 es 0, por tanto “y" puede tomar cualquier valor. Eligiendo distintos valores de "y", obtenemos mútiples soluciones. Decimos que el sistema tiene **un grado de libertad.** Tomemos $y = \alpha$.

Despejando x: $$x = \frac{2-\alpha}{3}$$

La solución es: $$S = \left\{\left(\frac{2-\alpha}{3}, \alpha\right)\right\}$$

Un sistema con infinitas soluciones se llama **sistema indeterminado.**

Caso 3:

$$\begin{cases} 3x + \ y = 2 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Realizando los mismos pasos que el anterior llegamos a:

$$0y = -4$$

Ecuación que no tiene solución. No existe ningún número que multiplicado por cero de (-4). La solución la escribimos entonces:

$$S = \{\ \}$$

Un sistema como ese, sin solución, se llama **sistema incompatible.**

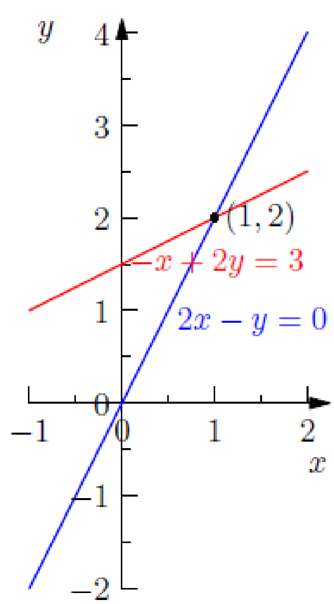
Un nuevo punto de vista

Volvamos al primero de nuestros sistemas. Analizaremos ese problema desde tres perspectivas diferentes.

$$\begin{cases} \ 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

1. Por filas

Como sabemos de cursos previos, cada una de las ecuaciones, representa una recta en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Las llamaremos la recta azul y la recta roja. Graficando un conjunto cualquiera de puntos que satisfaga cada ecuación, obtenemos:



Claramente, las dos rectas se intersectan en el punto de coordenadas (1, 2), lo cual se comprueba fácilmente en el sistema original.

En el caso de un **sistema incompatible**, las rectas serían **paralelas.**
En el caso de **un sistema indeterminado**, serían **coincidentes**, una sola recta *"morada"*.

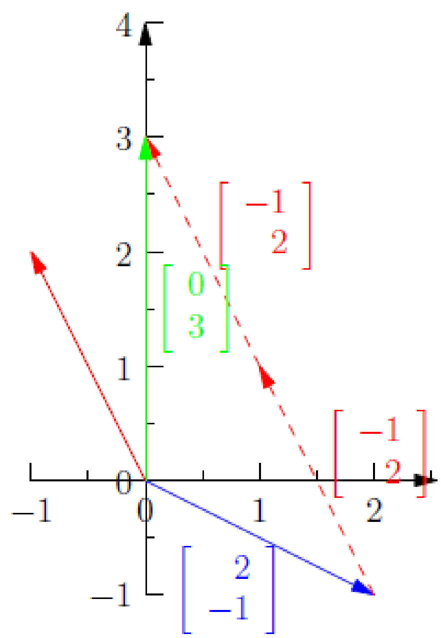
2. Por columnas

En esta reinterpretación, reescribimos el sistema de ecuaciones anterior como una única ecuación vectorial, tomando a los respectivos coeficientes de x e y como vectores:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuántas veces debo sumar el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ más cuántas el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para que el resultado sea igual al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Lo visualizamos de esta manera:



A la expresión

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot y$$

la llamamos **una combinación lineal** de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

O sea que:

Def. Combinación lineal de vectores

Dados un conjunto de vectores $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \dots\}$ y ciertos números reales α, β, γ, … , se llama **combinación lineal** de esos vectores al vector que tiene la forma:

$$\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \beta \cdot \vec{\boldsymbol{b}} + \gamma \cdot \vec{\boldsymbol{c}} + \cdots$$

Si bien no son vectores, cuando al resolver los sistemas anteriores decíamos por ejemplo, *"a la primera ecuación la multiplico por* (-2) *y le sumo la segunda"* estábamos armando una combinación lineal de ecuaciones, lo cual escribiremos así …

$$-2E_1 + E_2$$

3. Con matrices

Reescribimos el sistema original …

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

de la siguiente manera …

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la llamaremos **matriz de coeficientes**, al vector $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lo llamaremos **vector de las incógnitas.**

Finalmente, escribimos la ecuación anterior en forma matricial:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Si tuviéramos un sistema de más ecuaciones y más incógnitas, llegaríamos a un resultado similar, solamente que la matriz **A** y los vectores **X** y **B** tendrían otras dimensiones.

En nuestro caso, la matriz **A** tiene 2 filas y 2 columnas. Es, por tanto, **una matriz cuadrada 2 × 2**, o simplemente **matriz cuadrada de dimensión 2.**

Los vectores son matrices también, pero en ellos una de las dimensiones, esto es el número de filas o el número de columnas, es 1. En el ejemplo tanto **X** como **B** son vectores de dos filas y una columna, o sea vectores 2 × 1.

Ejercicio 1:

(a) Resuelva el siguiente sistema por los métodos de reducción e igualación.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

(b) Realicen un estudio completo similar al realizado aquí para ese sistema.

Solución: $\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{3}, -\boldsymbol{1})\}$

Ejercicio 2:

Resuelva el siguiente sistema (que no es lineal, y por tanto todo lo desarrollado antes no puede hacerse en él) por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Solución: $\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{5}, \boldsymbol{3})]$