Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish   Semestre II 2023

Tarea 6

---

1. Encontrar los residuos en $z = 0$ de las siguientes funciones:

   (a) $\frac{1}{z+z^2}$

   (b) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

   (c) $\frac{z-\sin z}{z}$

   (d) $\frac{\cot z}{z^4}$

   (e) $\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$

   Solución:

   (a) Aplicamos la serie geométrica alrededor del origen:

   $$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \cdots \tag{1}$$

   El coeficiente del término a orden $1/z$ (el residuo) es 1.

   (b) La serie de $\cos z$, reeplazando z por $1/z$ es

   $$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \cdots \tag{2}$$

   Por lo tanto, mutliplicando por z tenemos

   $$z\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} - \cdots \tag{3}$$

   y el residuo es $-1/2$.

   (c) La serie de $z - \sin z$ (alrededor del origen) es

   $$z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{4}$$

   Multiplicando por $1/z$ todos los términos de la serie tienen potencia 2 o mayor. Así que el residuo es 0.

(d) Para encontrar el residuo, necesitamos la expansión de la serie para $\cot z$ hasta orden z^3, ya que hay un factor de z^4 en el denominador. Primero, escribimos

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots} \tag{5}$$

Para encontrar el reciproco de la serie de $\sin z$, buscamos una serie tal que

$$\left(a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = 1 \tag{6}$$

Multiplicando series y colectando los coeficientes de potencias de z, tenemos

$$\begin{aligned} a_{-1} &= 1 \\ a_0 z &= 0 \\ -a_{-1}\frac{1}{3!} + a_1 &= 0 \\ a_2 z^3 &= 0 \\ a_{-1}\frac{1}{5!} - a_1\frac{1}{3!} + a_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Podemos ver que $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1/6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 7/360$, así que llegamos a

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \mathcal{O}(z^5) \tag{8}$$

Ya que el primer término de la serie de $1/\sin z$ alrededor del origen es $1/z$, necesitamos la serie de $\cos z$ hasta orden z^4:

$$\begin{aligned} \cot z = \frac{1}{\sin z}\cos z &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{24} + \frac{1}{6}z - \frac{z^3}{12} + \frac{7}{360}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo tanto

$$\frac{\cot z}{z^4} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{45}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(1) \tag{10}$$

y el residuo es $-1/45$.

(e) La representación como serie de $\sinh z$ es

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad (|z| < \infty) \tag{11}$$

Cerca al origen podemos escribir

$$\frac{1}{1 - z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{12}$$

Multiplicando estas series tenemos

$$\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \cdots\right) = z + \frac{1}{6}z^3 + z^3 + \mathcal{O}(z^5) = z + \frac{7}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^5) \tag{13}$$

Entonces

$$\frac{\sinh z}{z^4(1 - z^2)} = \frac{1}{z^3} + \frac{7}{6}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z) \qquad (0 < |z| < 1) \tag{14}$$

y el residuo es $7/6$.

2. Utilizar el teorema de residuo de Cauchy para evaluar las siguientes integrales en el círculo $|z| = 3$ (en el sentido positivo):

   (a) $\frac{\exp(-z)}{z^2}$

   (b) $\frac{\exp(-z)}{(z-1)^2}$

   (c) $z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

   (d) $\frac{z+1}{z^2-2z}$

   Solución:

   (a) La única singularidad adentro del contorno es $z = 0$. Podemos expander la función usando la representación de la exponencial como serie:

   $$\frac{\exp(-z)}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \cdots\right) \tag{15}$$

   Así que el residuo es -1, y la integral de contorno es igual a $-2\pi i$.

   (b) La única singularidad en este caso es en el punto $z = 1$. Por lo tanto, necesitamos la serie de $\exp(-z)$ alrededor del punto $z = 1$. Aplicamos la serie para $\exp(-z)$ en el punto $z - 1$:

   $$\begin{aligned} \exp(-(z-1)) &= 1 - (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} - \cdots \\ \exp(1)\exp(-z) &= 1 - (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} - \cdots \\ \exp(-z) &= \frac{1}{e}\left(1 - (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} - \cdots\right) \end{aligned} \tag{16}$$

   Entonces tenemos

   $$\frac{\exp(-z)}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}(z-1) + \cdots\right) \qquad (0 < |z-1| < \infty) \tag{17}$$

   así que el residuo es $-(1/e)$ y la integral es igual a $-2\pi i/e$.

   (c) Esta función tiene una singularidad esencial en $z = 0$. La expansión como una serie es

   $$z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots\right) \tag{18}$$

   Entonces el residuo es $1/3! = 1/6$ y la integral es $\pi i/3$.

   (d) Escribimos la función así

   $$\frac{z+1}{z^2-2z} = \frac{z+1}{z(z-2)} = \frac{z}{z(z-2)} + \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z(z-2)} \tag{19}$$

   El último término se puede simplificar por el uso de fracciones parciales:

   $$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-2} \tag{20}$$

   así que

   $$a(z-2) + bz = 1 \quad \Rightarrow \quad (a+b)z - 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a+b=0 \quad a=-1/2 \quad b=1/2 \tag{21}$$

y tenemos

$$\frac{z+1}{z^2-2z}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}=\frac{3}{2(z-2)}-\frac{1}{2}\frac{1}{z} \tag{22}$$

La integral es

$$\int_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz=\frac{3}{2}\int_C \frac{1}{z-2}dz-\frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z}dz \tag{23}$$

La primera integral en el lado derecho tiene una sóla singularidad en $z=2$ y por el teorema de Cauchy (o de residuos) podemos evaluarla inmediatamente como $2\pi i$. La segunda integral tiene la singularidad en $z=0$. Su valor también es $2\pi i$. Así que la integral completa es

$$\int_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz=\frac{3}{2}\cdot 2\pi i-\frac{1}{2}2\pi i=2\pi i \tag{24}$$

3. Evaluar la siguiente integral en el círculo (sentido positivo) $|z|=2$ usando el teorema de la sección 77 (residuo en el infinito):

$$\int_C \frac{4z-5}{z(z-1)}dz \tag{25}$$

Solución: El residuo en el infinito se define como el residuo en el origen de

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) \tag{26}$$

Entonces, escribimos

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{4\frac{1}{z}-5}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z}-1)}=\frac{4z-5z^2}{1-z}=(4z-5z^2)(1+z+z^2+\cdots) \qquad (|z|<1) \tag{27}$$

Multiplicando por $1/z^2$ tenemos

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{4}{z}-5\right)(1+z+z^2+\cdots) \qquad (|z|<1) \tag{28}$$

El residuo en el origen de esta función es 4, así que la integral de contorno es igual a $8\pi i$ (el ejemplo en la sección 76 muestra como evaluar la integral usando los residuos en $z=0$ y $z=1$).

4. Encontrar la parte principal de cada función en su singularidad aislada y determinar si el punto es una singularidad evitable, una singularidad esencial o un polo.

   (a) $z\exp\left(\frac{1}{z}\right)$

   (b) $\frac{z^2}{1+z}$

   (c) $\frac{\sin z}{z}$

   (d) $\frac{\cos z}{z}$

   (e) $\frac{1}{(2-z)^3}$

   Solución:

   (a) La expansión como una serie es

$$z\exp\left(\frac{1}{z}\right)=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!z^n} \tag{29}$$

   La serie en el último término corresponde a la parte principal. Todas las potencias negativas tienen coeficientes no nulos, así que la singularidad en $z=0$ es esencial.

(b) Una forma de responder a esta pregunta (no la mejor forma!) es volviendo a la definición de los coeficientes b_n de la parte principal de la serie:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{30}$$

donde C es cualquier contorno dentro del dominio donde la función $f(z)$ es analítica, y alrededor de z_0. En este caso, la singularidad está en $z_0 = -1$, y la función $f(z)$ está dada en la pregunta, así que podemos escribir

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2}{(z+1)^{-n+2}}dz \tag{31}$$

En el caso $n = 1$ tenemos

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2}{(z+1)}dz = 1 \tag{32}$$

Para $n = 2$ la integral es

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2}{(z+1)^0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^2 dz = 0 \tag{33}$$

Y para $n > 2$ los integrandos son funciones analíticas adentro de C (de hecho, enteras) así que las integrales son todas igual a cero. Así que en este caso tenemos un polo (simple, orden $m = 1$).

(c) Usando la serie de $\sin z$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}\sin z &= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \end{aligned} \tag{34}$$

La "singularidad" en $z = 0$ es evitable.

(d) Usando la serie de $\cos z$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}\cos z &= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots \end{aligned} \tag{35}$$

La parte principal es el término $1/z$, así que tenemos un polo simple en $z = 0$.

(e) Hay una singularidad en $z = 2$. Escribimos la función así

$$\frac{1}{(2-z)^3} = -\frac{1}{(z-2)^3} \tag{36}$$

Ya tenemos una potencia de $z - 2$, así que la "serie" alrededor de $z = 2$ es simplemente ese término, y identificamos inmediatamente que hay un polo de orden $m = 3$.

5. Para cada función, encontrar el orden del polo y el valor del residuo B en la singularidad $z = 0$:

(a) $\frac{\sinh z}{z^4}$

(b) $\frac{1}{z(e^z-1)}$

Solución:

(a) La función tiene la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \tag{37}$$

donde $m = 4$, $z_0 = 0$ y $\phi(z) = \sinh(z)$. La función $\phi(z)$ es entera, pero es nula en $z = 0$! Así que, no podemos usar esa función para encontrar el residuo. Volvemos a la serie de Laurent:

$$\frac{1}{z^4}\sinh(z) = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \tag{38}$$

Así que el residuo en $z = 0$ es $1/3! = 1/6$. Es un polo de orden $m = 3$, NO $m = 4$.

(b) En este caso tampoco podemos aplicar el procedimiento con $\phi(z)$, ya que tendríamos que identificar $\phi(z) = 1/(e^z - 1)$ y esta función no es analítica en $z = 0$. Entonces usamos la serie para e^z:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \left(-1 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^3)\right)^{-1} \tag{39}$$

Así que la función se puede escribir como

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \left(z^2 + \frac{z^3}{2!} + \mathcal{O}(z^4)\right)^{-1} = \frac{1}{z^2(1 + (1/2)z + \mathcal{O}(z^2))} \tag{40}$$

Para $|z| < 2$ podemos aplicar la serie geométrica:

$$\frac{1}{z^2(1 + (1/2)z + \mathcal{O}(z^2))} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{2}z + \mathcal{O}(z^2)\right) \tag{41}$$

Así que el polo es de orden $m = 2$, y el residuo es igual a $-1/2$.

6. Evaluar las siguientes integrales en el círculo (sentido positivo) $|z| = 2$:

(a) $\int_C \tan z dz$

(b) $\int_C \frac{dz}{\sinh 2z}$

Solución:

(a) La función $\tan z$ NO es una función analítica en todo el plano. Tiene singularidades donde hay ceros de la función $\cos z$, es decir en los puntos $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Podemos aplicar el teorema 2 de la sección 83:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{42}$$

En este caso $p(z) = \sin z$ y $q(z) = \cos z$. Entonces $q'(z) = -\sin z$. Así que

$$q'(z_n) = -\sin\left(\left[n + \frac{1}{2}\right]\pi\right) = (-1)^{n+1} \tag{43}$$

También tenemos

$$p(z_n) = \sin z_n = (-1)^n \tag{44}$$

donde $z_n = (n + (1/2))\pi$. Por lo tanto

$$\operatorname*{Res}_{z=z_n} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_n)}{q'(z_n)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1 \tag{45}$$

Entonces cada singularidad adentro del contorno contribuye $-2\pi i$ a la integral. Dentro del círculo $|z| = 2$ hay dos singularidades: $z = \pm\pi/2$. Por lo tanto la integral es igual a $-4\pi i$.

(b) En este caso buscamos los ceros de $\sinh 2z$:

$$\sinh 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} n\pi i \tag{46}$$

Aplicando el teorema tenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_n} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_n)}{q'(z_n)} \tag{47}$$

con $p(z) = 1$ y $q(z) = \sinh 2z$:

$$\frac{p(z_n)}{q'(z_n)} = \frac{1}{2\cosh 2z_n} = \frac{1}{2\cosh(n\pi i)} = (-1)^n \frac{1}{2} \tag{48}$$

Dentro del círculo hay 3 singularidades: $z = 0, \pm(1/2)\pi i$ que corresponden a $n = 0, \pm 1$. Entonces el residuo en el origen es πi, y los residuos en $n = \pm 1$ son $-\pi i$, así que la integral es igual a

$$\int_C \frac{dz}{\sinh 2z} = \pi i - \pi i - \pi i = -\pi i \tag{49}$$