Valores y vectores propios

Ejercicio

El último ejercicio de la clase anterior pedía encontrar la matriz de la transformación que simetriza un punto $P(a, b)$ cualquiera del plano con respecto a la recta de ecuación

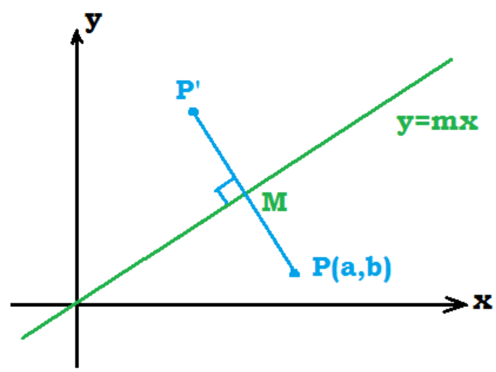
$$y = mx$$

Solución:

Consideremos un vector (o para más claridad, un punto) del plano de coordenadas $A(a, b)$. Encontremos la ecuación de la perpendicular al eje de simetría $y = mx$ que pasa por el punto.

Con un poco de álgebra será

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$



Intersectemos esa perpendicular con el eje de simetría,

$$\begin{cases} y = mx \\ y - b = -\dfrac{1}{m}(x - a) \end{cases}$$

Eliminando y, obtenemos ...

$$mx = -\frac{1}{m}(x - a) + b$$

de donde se obtiene:

$$x = \frac{mb + a}{1 + m^2}$$

Por pertenecer al eje,

$$y = \frac{m(mb + a)}{1 + m^2}$$

Llamemos P a ese punto:

$$M\left(\frac{mb + a}{1 + m^2}, \frac{m(mb + a)}{1 + m^2}\right)$$

El punto que estamos buscando es el simétrico de P con respecto al punto medio M. Recordando la fórmula del punto medio, ese punto, llamémoslo P' tendrá coordenadas:

$$P'\left(\frac{2mb+a-am^2}{1+m^2},\frac{m(mb+2a-b)}{1+m^2}\right)$$

¿Cuál es la matriz que convierte las coordenadas de $P(a,b)$ en las de ese punto P'?

Supongamos que esa matriz sea

$$A=\begin{pmatrix}c & d\\ e & f\end{pmatrix}$$

Si le aplicamos esa matriz al vector (1,0) nos quedará …

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c & d\\ e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\e\end{pmatrix}$$

Y si la aplicamos al vector (0,1) quedará …

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c & d\\ e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\f\end{pmatrix}$$

Tenemos allí un método para encontrar c,d,e,f.

Si el punto P fuera (1,0) entonces P' será

$$P'\left(\frac{1-m^2}{1+m^2},\frac{2m}{1+m^2}\right)$$

Esa es la primera columna de la matriz.

Si el punto P fuera (0,1) entonces P' será:

$$P'\left(\frac{2m}{1+m^2},\frac{m^2-1}{1+m^2}\right)$$

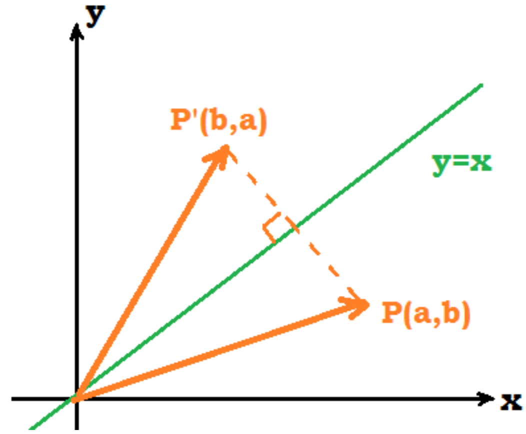
Esa es la segunda columna de la matriz. Por tanto, la matriz es

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{1-m^2}{1+m^2}} & \boldsymbol{\frac{2m}{1+m^2}}\\ \boldsymbol{\frac{2m}{1+m^2}} & \boldsymbol{\frac{m^2-1}{1+m^2}}\end{pmatrix}$$

Es fácil de probar que

$$\det A = -1$$

Valores y vectores propios



Supongamos ahora que tomamos

$$m = 1$$

en ese ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y recordemos que tenemos que pensar en vectores, no en puntos.
¿Habrá algún vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle x, y \rangle$ que al serle aplicada esta transformación lineal no cambia de dirección, sigue siendo colineal consigo mismo, o sea se convierte en una ponderación de el mismo.

Deberá ser: $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$

o lo que es equivalente $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}}$

Expresando esto en lenguaje matricial quedará

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

O equivalentemente, factorizando $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

Ese es un sistema homogéneo. Tendrá solución distinta a la trivial cuando

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) = \mathbf{0}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

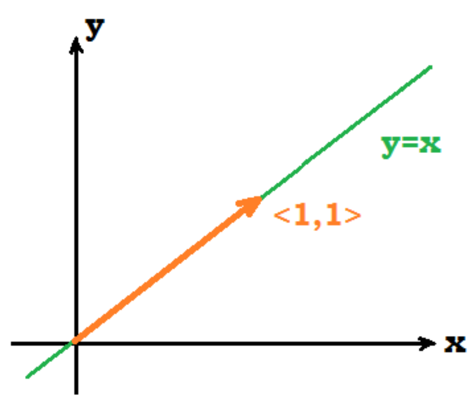
$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{o} \quad \lambda_2 = -1$$

Esos son los **valores propios** de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si $\lambda_1 = 1$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



El sistema es

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\binom{x}{y} = \alpha \cdot \binom{1}{1}$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ de base

$$\{(1,1)\}$$

formado por todos los vectores colineales con el eje de simetría.

Para el **valor propio** $\lambda = 1$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p1}} = \langle 1,1 \rangle$

Si $\lambda_2 = -1$:

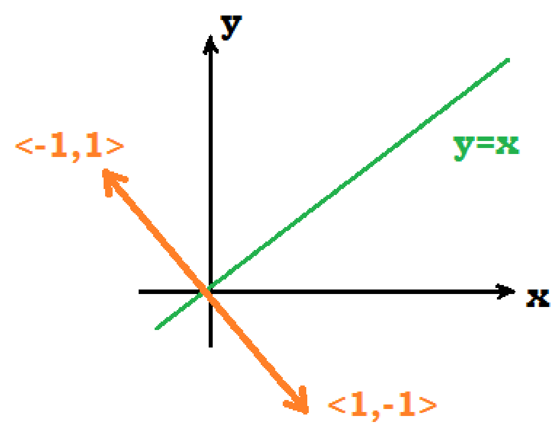
$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$$

El sistema es

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\binom{x}{y} = \alpha \cdot \binom{-1}{1}$$



Es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ de base:

$$\{(-1,1)\}$$

formado por todos los vectores perpendiculares al eje de simetría.

Para el **valor propio** $\lambda = -1$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p2}} = \langle -1,1 \rangle$

Polinomio característico

Definición: Al polinomio $p(\lambda)$ que al igualarlo al cero

$$p(\lambda) = 0$$

nos permite hallar los valores propios de una matriz A se le llama **polinomio característico de la matriz A.**

En el ejemplo anterior, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene como polinomio característico a:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Teorema de Cayley-Hamilton:
Toda matriz A es raíz de su propio polinomio característico, esto es:

$$p(A) = 0$$

Mostremos que la propiedad se cumple en el ejemplo anterior,

La matriz es $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación $$\lambda^2 - 1 = 0$$

expresada como ecuación matricial queda:

$$\boldsymbol{X^2 - I = 0}$$

Probemos que A es raíz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba.

Ejemplo:

Probar que el vector $\vec{u} = (2, 0, 2)$ es un vector propio asociado a un valor propio negativo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Deberá ser:

$$\boldsymbol{T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}}$$

o sea

$$\boldsymbol{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

Realicemos la multiplicación:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Claramente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector $\vec{u} = (2, 0, 2)$ es vector propio de esa transformación con valor propio $\lambda = -1$.

Diagonalización de matrices mediante un cambio de base

¿Qué ocurriría ahora si expresáramos la transformación dada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, no en la base canónica B_c = {(1,0),(0,1)} sino en la base de los vectores propios

B_p = {(1,1), (-1,1)}?

Sabemos que la matriz de pasaje de $B_p \rightarrow B_c$ sería:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una manera de obtener esa matriz sería tratar de llevar todo de la base B_p a la base B_c, aplicar allí la transformación T cuya matríz en la base canónica es A y luego regresar de la base B_p a la base B_c.

$$\mathbf{B_P} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{B_c} \qquad \textbf{transformación } \boldsymbol{T(\vec{v})} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{B_c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} \mathbf{B_p}$$

La matriz sería entonces, recordando que la primera transformación corresponde a la matriz de más a la derecha, y así sucesivamente …

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O sea … $\boldsymbol{B = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

Finalmente, operando, obtenemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz quedó **diagonalizada** y los elementos de la diagonal son los valores propios de la transformación.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Exploraremos estas cuestiones en la clase siguiente.

Ejercicios:

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

asociada a una transformación lineal.

(a) Probar que el vector $(0, 0, 0, 5)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$.

(b) Hallar todos los valores y vectores propios de la transformación.

(c) Encontrar la base en la cual la transformación tiene matriz diagonal y hallar esa matriz.

2. (a) En el espacio de la matrices 2 x 2, probar que si λ es un valor propio de A asociado a el vector propio $\overrightarrow{v_p}$, entonces λ^2 también lo es respecto a la transformación asociada a la matriz A^2 para ese mismo vector $\overrightarrow{v_p}$.

(b) Calcular los valores propios de A^3 siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Demuestre que si λ es un valor propio asociado a una matriz NO singular A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ lo es de la matriz A^{-1}.

4. Demostrar que:

(a) Si dos matrices A y B son **semejantes**, esto es, si existe una matriz C no singular tal que,

$$B = C.A.C^{-1}$$

entonces

$$\det A = \det B$$

(b) A^{-1} es semejante a B^{-1}.