

# Cataclysmic Variables Part 1 – Discs

Mauro Jélvez

## 1. Introducción a las Variables Cataclísmicas

### 1.1. Definición y Configuración General

Las Variables Cataclísmicas (CVs, por sus siglas en inglés) constituyen una clase fundamental de sistemas binarios interactuantes en astrofísica estelar. Un sistema CV consiste en:

1. **Primaria:** Una enana blanca (WD) con masa típica  $M_1 \sim 0.6 - 1.0 M_\odot$  y radio  $R_1 \sim 0.01 R_\odot$
2. **Secundaria:** Una estrella de secuencia principal tardía (típicamente tipos espectrales K-M) que llena su lóbulo de Roche con masa  $M_2 \sim 0.1 - 0.5 M_\odot$
3. **Disco de acreción:** Estructura formada por material transferido de la secundaria que orbita la enana blanca
4. **Bright spot:** Región donde el flujo de materia impacta el disco

El período orbital típico es  $P_{\text{orb}} \sim 1.5 - 10$  horas, con algunos sistemas llegando hasta  $\sim 12$  horas.

### 1.2. Transferencia de Masa

La transferencia de masa ocurre cuando la secundaria llena su lóbulo de Roche. El radio del lóbulo de Roche se aproxima mediante:

$$\frac{R_L}{a} \approx 0.49 \frac{q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})} \quad (1)$$

donde  $q = M_2/M_1$  es la razón de masas y  $a$  es la separación orbital.

El material que cruza el punto de Lagrange  $L_1$  posee momento angular específico mayor que el de una órbita circular en la superficie de la WD, por lo que no puede acretar directamente. En su lugar, forma un disco de acreción.

## 2. Clasificación Observacional Detallada

### 2.1. Novas Enanas (Dwarf Novae)

Las novas enanas exhiben erupciones cuasi-periódicas causadas por inestabilidades en el disco de acreción. Se subdividen en:

#### 2.1.1. Estrellas tipo U Geminorum (U Gem)

Representan el prototipo de novas enanas "normales". Características observacionales:

- **Amplitud de erupción:**  $\Delta m \sim 3 - 4$  mag (factor  $\sim 40 - 250$  en luminosidad)
- **Duración de erupción:**  $\Delta t \sim 1 - 3$  días

- **Tiempo de recurrencia:**  $\Delta t_{\text{rec}} \sim 20 - 100$  días
- **Forma de curva de luz:** Ascenso rápido ( $\sim$  horas), descenso más lento
- **Tasa de transferencia:**  $\dot{M}_2 \sim 10^{-10} - 10^{-9} M_\odot \text{ año}^{-1}$

El ciclo de erupción se explica por el Modelo de Inestabilidad del Disco (DIM), donde el disco oscila entre estados de alta y baja viscosidad.

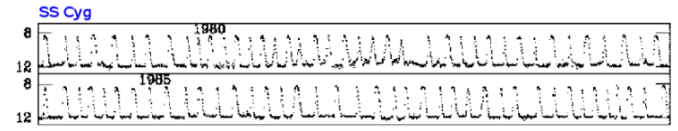


Fig. 1.

### 2.1.2. Estrellas tipo Z Camelopardalis (Z Cam)

Presentan un comportamiento más complejo con *standstills*:

- **Amplitud:**  $\Delta m \sim 2 - 3$  mag
- **Duración:**  $\Delta t \sim 1 - 3$  días
- **Recurrencia:**  $\Delta t_{\text{rec}} \sim 15 - 30$  días
- **Standstills:** Pausas a  $\sim 1$  mag bajo máximo, duración variable (días a meses)

Los standstills ocurren cuando  $\dot{M}_2 \approx \dot{M}_{\text{crítico}}$ , donde el disco alcanza un estado marginalmente estable. Durante estos períodos, la tasa de transferencia de masa desde la secundaria balancea aproximadamente la tasa de acreción a través del disco.

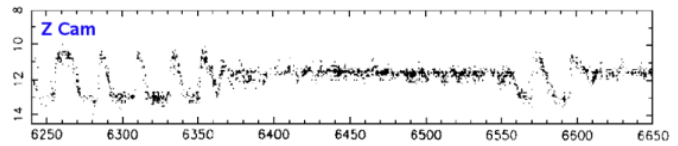


Fig. 2.

### 2.1.3. Sistemas SU Ursae Majoris (SU UMa)

Subclase adicional caracterizada por:

- **Erupciones normales:** Similar a U Gem
- **Super-erupciones:**  $\Delta m \sim 5 - 8$  mag, duración  $\sim 10 - 20$  días
- **Superhumps:** Modulaciones  $\sim 3 - 5\%$  más largas que  $P_{\text{orb}}$
- **Períodos cortos:** Típicamente  $P_{\text{orb}} < 2$  horas

Los superhumps resultan de una resonancia 3:1 que induce precesión del disco cuando  $q \lesssim 0.3$ .

## 2.2. Nova-like Variables

Sistemas con discos permanentemente brillantes, sin erupciones significativas.

### 2.2.1. Estrellas VY Sculptoris (VY Scl)

- **Estado alto:** Brillo constante, disco ionizado y estable
- **Estados bajos:** Caídas irregulares,  $\Delta m \sim 3 - 4$  mag
- **Duración estado bajo:** Semanas a meses
- **Interpretación:**  $\dot{M}_2$  fluctúa, ocasionalmente cayendo por debajo de  $\dot{M}_{\text{crítico}}$

Durante estados bajos, la secundaria se vuelve visible, revelando su tipo espectral.

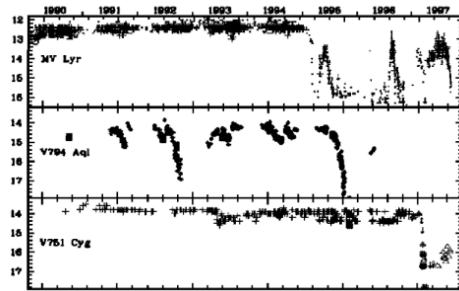


Fig. 3.

### 2.2.2. Estrellas UX Ursae Majoris (UX UMa)

- **Brillo:** Aproximadamente constante
- **Variaciones:** Solo modulación orbital ( $\sim 0.1 - 0.5$  mag) del bright spot
- **Tasa de transferencia:** Alta,  $\dot{M}_2 \sim 10^{-9} - 10^{-8} M_{\odot} \text{ año}^{-1}$
- **Disco:** Permanentemente en estado caliente e ionizado

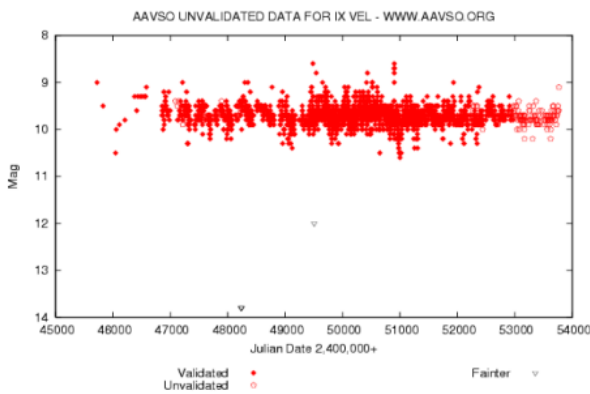


Fig. 4.

## 2.3. Contexto Histórico

Un hecho notable: los primeros cuatro sistemas CV descubiertos (U Gem, SS Cyg, T Leo, y Z Cam) pertenecen a tres subtipos diferentes, ilustrando la diversidad de esta clase de objetos.

## 3. Propiedades Observacionales Fundamentales

### 3.1. Distribución de Colores

Los colores de CVs muestran una distribución bimodal:

- **Azules:**  $(B - V) \sim 0.0$  a  $-0.3$ , dominadas por el disco caliente
- **Rojas:**  $(B - V) \sim +0.5$  a  $+1.5$ , contribución significativa de la secundaria fría

Esta dicotomía refleja:

1. El estado del disco (caliente vs. frío)
2. La razón de contribución disco/secundaria
3. La inclinación del sistema
4. El período orbital (sistemas cortos tienden a ser más azules)

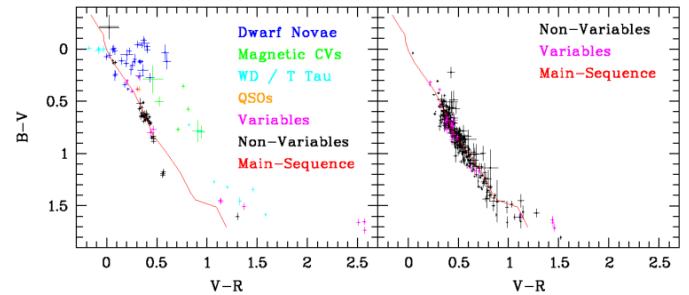


Fig. 5.

La figura muestra diagramas de color-color ( $B - V$ ) frente a ( $V - R$ ) que permiten distinguir distintos tipos de objetos astrofísicos según sus propiedades espectrales y variabilidad.

- En el panel izquierdo se representan distintos tipos de fuentes:
  - **Dwarf Novae** (en azul): sistemas binarios con un disco de acreción que experimentan erupciones periódicas.
  - **Magnetic CVs** (en verde): variables cataclísmicas con campos magnéticos intensos que canalizan el flujo de acreción.
  - **WD / T Tau** (en cian): enanas blancas y estrellas T Tauri jóvenes.
  - **Variables**: estrellas o sistemas binarios cuya luminosidad cambia con el tiempo.
  - **Non-Variables**: estrellas con brillo constante.
  - **Main Sequence**: la secuencia principal de estrellas normales, que forma la línea continua roja en el gráfico.
- El eje horizontal ( $V - R$ ) representa la diferencia de magnitud entre los filtros  $V$  y  $R$ , asociada a la temperatura superficial del objeto.
- El eje vertical ( $B - V$ ) mide la diferencia entre los filtros  $B$  y  $V$ , también relacionada con la temperatura y el tipo espectral.
- Las posiciones de los objetos en el diagrama indican su color y, por tanto, su temperatura efectiva. Los objetos más azules (valores bajos de  $(B - V)$  y  $(V - R)$ ) son más calientes, mientras que los más rojos son más fríos.

En el panel derecho se comparan únicamente las fuentes **variables** y no variables, junto con la secuencia principal (**línea roja**). Se observa que las **variables** tienden a desviarse de la secuencia principal, indicando la presencia de componentes adicionales, como discos de acreción o calentamiento por transferencia de masa.

*En resumen, el diagrama de colores es una herramienta fundamental para identificar y clasificar variables cataclísmicas y otros objetos compactos.*

### 3.2. Características Espectrales

#### 3.2.1. Espectro en Quiescencia

El espectro típico de una nova enana en quiescencia muestra:

- **Continuo:** Azul, consistente con  $T_{\text{eff}} \sim 10000 - 20000$  K
- **Líneas de emisión:**
  - Serie de Balmer:  $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $H\gamma$ ,  $H\delta$ , etc.
  - Serie de helio: HeI  $\lambda 5876$ , HeII  $\lambda 4686$
  - Otras: CaII H&K (a veces), FeII (multiplets), etc.
- **Perfiles de línea:** Doble pico característico
- **Absorción de secundaria:** En sistemas de período largo o alta inclinación

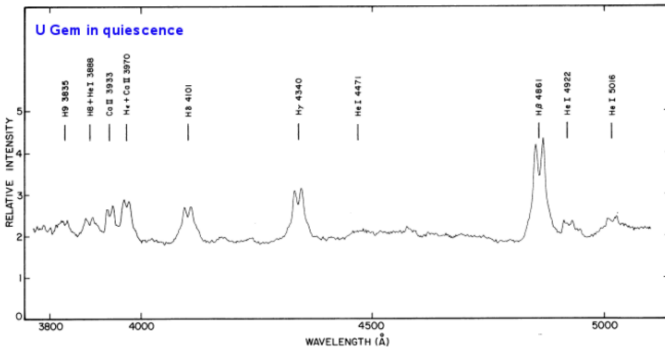


Fig. 6.

#### 3.2.2. Espectro en Erupción

Durante erupción:

- El continuo se intensifica y se vuelve más azul
- Las líneas de emisión se debilitan o desaparecen
- Pueden aparecer líneas de absorción anchas (disco ópticamente grueso)
- El perfil de doble pico desaparece temporalmente

## 4. Teoría Rigurosa de Perfiles de Línea

### 4.1. Modelo Físico del Disco

Consideremos un disco de acreción con las siguientes propiedades idealizadas:

1. **Ópticamente delgado:** Los fotones escapan sin múltiples dispersiones
2. **Axisimétrico:** Simetría cilíndrica alrededor del eje  $z$
3. **Geoméricamente delgado:**  $H(R) \ll R$ , donde  $H$  es la altura de escala
4. **Velocidad kepleriana:** El movimiento está dominado por la gravedad de la WD
5. **Estacionario:** No hay dependencia temporal explícita (para este análisis)

### 4.2. Derivación de la Velocidad Kepleriana

Para una partícula de prueba de masa  $m$  orbitando la enana blanca de masa  $M_1$  a radio  $R$ , el balance de fuerzas es:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{centrípeta}} \quad (2)$$

$$\frac{GM_1 m}{R^2} = \frac{mv_\phi^2}{R} \quad (3)$$

Resolviendo para  $v_\phi$ :

$$v_\phi^2 = \frac{GM_1}{R} \quad (4)$$

$$v_\phi(R) = \sqrt{\frac{GM_1}{R}} = \sqrt{GM_1} R^{-1/2} \quad (5)$$

Esta es la **ley de velocidad kepleriana**. Notar que  $v_\phi \propto R^{-1/2}$  es característica de potenciales gravitacionales punto-masa.

### 4.3. Energía y Momento Angular Específicos

La energía específica (por unidad de masa) es:

$$\epsilon = \frac{v_\phi^2}{2} - \frac{GM_1}{R} = \frac{GM_1}{2R} - \frac{GM_1}{R} = -\frac{GM_1}{2R} \quad (6)$$

El momento angular específico es:

$$j = Rv_\phi = R\sqrt{\frac{GM_1}{R}} = \sqrt{GM_1 R} \quad (7)$$

Estas cantidades son fundamentales para entender la evolución del disco.

### 4.4. Aproximación de Disco Delgado

La altura de escala del disco se determina del equilibrio hidrostático vertical:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{GM_1 z}{R^3} \quad (8)$$

Para gas isotérmico con velocidad del sonido  $c_s = \sqrt{kT/\mu m_p}$ :

$$H \sim \frac{c_s}{\Omega_K} = \frac{c_s R^{3/2}}{\sqrt{GM_1}} = R \frac{c_s}{v_\phi} \quad (9)$$

donde  $\Omega_K = \sqrt{GM_1/R^3}$  es la frecuencia kepleriana. La razón de aspecto es:

$$\frac{H}{R} \sim \frac{c_s}{v_\phi} \sim \frac{10 \text{ km/s}}{1000 \text{ km/s}} \sim 0.01 \quad (10)$$

Esto justifica la aproximación  $H \ll R$ .

#### 4.5. Proyección de Velocidades

Establecemos un sistema de coordenadas cilíndricas  $(R, \phi, z)$  con origen en el centro de la WD. El observador está en dirección  $(x, y, z) = (0, -\infty, 0)$  para un disco en el plano  $z = 0$  inclinado un ángulo  $i$  respecto al plano del cielo.

La velocidad azimutal es:

$$\mathbf{v}_\phi = v_\phi(\hat{\phi}) = v_\phi(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \quad (11)$$

La componente a lo largo de la línea de visión (eje  $y$ ) es:

$$v_{\text{rad}} = v_\phi \cos \phi \sin i \quad (12)$$

donde  $\sin i$  proyecta el plano del disco.

En coordenadas cartesianas:

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{R} \quad (13)$$

Por lo tanto:

$$v_{\text{rad}} = v_\phi(R) \frac{x}{R} \sin i \quad (14)$$

#### 4.6. Distribución de Intensidad: Derivación Completa

La intensidad observada a velocidad radial  $v_{\text{rad}}$  proviene de todos los puntos del disco que tienen esa velocidad de proyección. Matemáticamente:

$$I(v_{\text{rad}}) = \int_{\text{disco}} j(R, \phi) \delta(v_{\text{rad}} - v_\phi(R) \cos \phi \sin i) dA \quad (15)$$

donde  $j(R, \phi)$  es la emisividad local y  $dA = R dR d\phi$  es el elemento de área.

Para emisividad axisimétrica  $j(R, \phi) = j(R)$ :

$$I(v_{\text{rad}}) = \int_{R_i}^{R_D} \int_0^{2\pi} j(R) R \delta(v_{\text{rad}} - v_\phi(R) \cos \phi \sin i) d\phi dR \quad (16)$$

Usando la propiedad de la función delta:

$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (17)$$

donde  $x_i$  son las raíces de  $g(x) = 0$ .

Tenemos  $g(\phi) = v_{\text{rad}} - v_\phi(R) \cos \phi \sin i = 0$  cuando:

$$\cos \phi = \frac{v_{\text{rad}}}{v_\phi(R) \sin i} \quad (18)$$

Esto tiene dos soluciones (simetría superior/inferior del disco) si  $|v_{\text{rad}}| \leq v_\phi(R) \sin i$ .

La derivada es:

$$\frac{dg}{d\phi} = v_\phi(R) \sin \phi \sin i \quad (19)$$

Evaluando:

$$\left| \frac{dg}{d\phi} \right| = v_\phi(R) \sin i \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = v_\phi(R) \sin i \sqrt{1 - \frac{v_{\text{rad}}^2}{v_\phi^2(R) \sin^2 i}} \quad (20)$$

Simplificando:

$$\left| \frac{d\phi}{dv_{\text{rad}}} \right| = \frac{1}{v_\phi(R) \sin i} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{rad}}^2}{v_\phi^2(R) \sin^2 i}}} \quad (21)$$

La integral sobre  $\phi$  contribuye un factor 2 (dos soluciones), entonces:

$$I(v_{\text{rad}}) = 2 \sin i \int_{R_{\min}}^{R_D} \frac{j(R) R}{v_\phi(R) \sqrt{v_\phi^2(R) \sin^2 i - v_{\text{rad}}^2}} dR \quad (22)$$

donde  $R_{\min}$  es el radio donde  $v_\phi(R_{\min}) \sin i = |v_{\text{rad}}|$ .

#### 4.7. Emisividad del Disco

La emisividad local se parametriza como:

$$j(R) = j_0 \left( \frac{R}{R_D} \right)^{-\alpha} \quad (23)$$

Valores típicos:  $\alpha = 1$  (emisión proporcional al área) a  $\alpha = 2$  (emisión proporcional a la tasa de disipación local).

#### 4.8. Forma del Perfil de Línea

Sustituyendo  $v_\phi(R) = v_K(R_D)(R/R_D)^{-1/2}$ :

$$I(v_{\text{rad}}) \propto \int_{R_{\min}}^{R_D} \frac{R^{1-\alpha}}{\sqrt{v_K^2(R_D) \sin^2 i (R_D/R) - v_{\text{rad}}^2}} dR \quad (24)$$

Características del perfil:

1. **Doble pico:** Máxima emisión cuando  $v_{\text{rad}} = \pm v_\phi(R_D) \sin i$
2. **Valle central:** Contribución de material en el centro del disco moviéndose perpendicular a la línea de visión
3. **Alas:** Extendidas hasta  $|v_{\text{rad}}| \lesssim v_\phi(R_i) \sin i$
4. **Asimetría:** Si hay fuentes adicionales (bright spot, viento)

#### 4.9. Ecuación del Dipolo en Espacio de Velocidades

Normalizamos usando  $r = R/R_D$  y establecemos:

$$v_\phi(r) = \frac{v_K}{\sqrt{r}} \quad (25)$$

donde  $v_K = \sqrt{GM_1/R_D}$ .

En coordenadas cartesianas  $(x, y)$  centradas en la WD:

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R_D} \quad (26)$$

La velocidad proyectada es:

$$v_y = v_\phi \cos \phi = \frac{v_K}{\sqrt{r}} \cdot \frac{x}{r R_D} = \frac{v_K x}{R_D (x^2 + y^2)^{3/4}} \quad (27)$$

Normalizando velocidades ( $v_K/R_D \rightarrow 1$ ) y despejando  $y$ :

$$y^2 = \left(\frac{x}{v_y}\right)^{4/3} - x^2 \quad (28)$$

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{x}{v_y}\right)^{4/3} - x^2} \quad (29)$$

Esta es la **ecuación de curvas de velocidad constante**, que son dipolos en el espacio de velocidades. Los perfiles de línea son integrales sobre estas curvas.

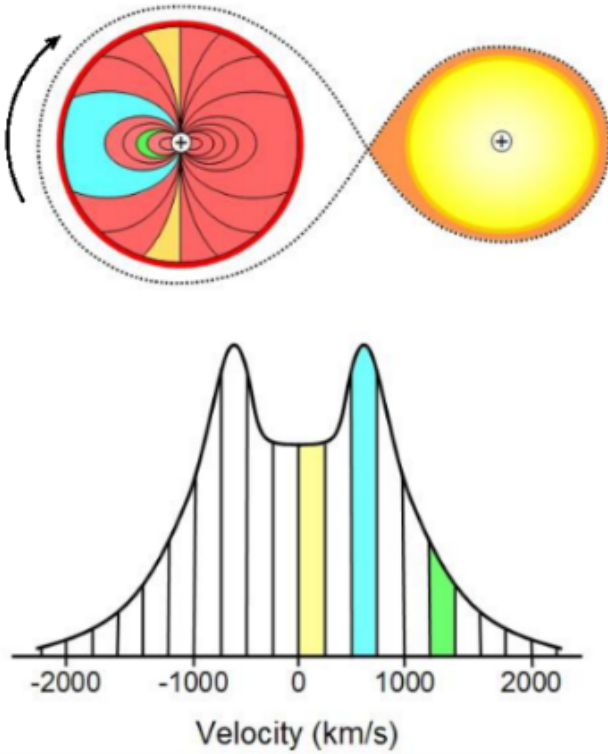


Fig. 7.

### Perfil de emisión en discos de acreción

La figura (adaptada de *Horne & Marsh, 1986*) ilustra la relación entre la estructura del disco de acreción en un sistema binario cataclísmico y el perfil de velocidad observado en una línea de emisión.

- En la parte superior se muestra un sistema binario donde una **enana blanca** (izquierda) acreta materia desde su compañera, una estrella de la secuencia principal (derecha), a través del punto de Lagrange  $L_1$ .
- El material que fluye forma un **disco de acreción** alrededor de la enana blanca. Este disco rota diferencialmente, de modo que el gas más interno se mueve a mayor velocidad orbital.
- Los colores indican regiones del disco con distintas velocidades radiales respecto al observador:
  - Las zonas **azules** se acercan al observador (velocidades negativas).
  - Las zonas **verdes** se alejan (velocidades positivas).

- Las regiones amarillas y rojas tienen componentes de velocidad radial más pequeñas.

En la parte inferior se muestra el perfil de la línea de emisión correspondiente. Este perfil tiene una forma **doblemente picada** característica:

- Cada pico se origina en una de las mitades del disco (una acercándose y la otra alejándose).
- La **separación entre los picos** está directamente relacionada con la velocidad de rotación en el radio donde se emite la mayor parte de la línea.
- La **anchura total del perfil** refleja el rango de velocidades orbitales en el disco.

Este tipo de perfil se observa comúnmente en líneas de emisión como  $H\alpha$  o  $He II$  en sistemas de acreción, y constituye una evidencia directa de la existencia de un disco Kepleriano. La forma exacta del perfil depende de la inclinación del sistema: un ángulo de inclinación mayor (más visto de canto) produce picos más separados y pronunciados.

*El perfil doblemente picado es, por tanto, una firma espectroscópica clave de los discos de acreción en variables cataclísmicas.*

### 4.10. Efectos de Parámetros en el Perfil

#### 4.10.1. Inclinación $i$

- $i \rightarrow 0$  (cara a cara): Separación de picos  $\rightarrow 0$ , perfil single-peak
- $i \sim 45$ : Perfil de doble pico bien definido
- $i \rightarrow 90$  (edge-on): Máxima separación de picos, posibles eclipses

Separación de picos:  $\Delta v \approx 2v_\phi(R_D) \sin i$

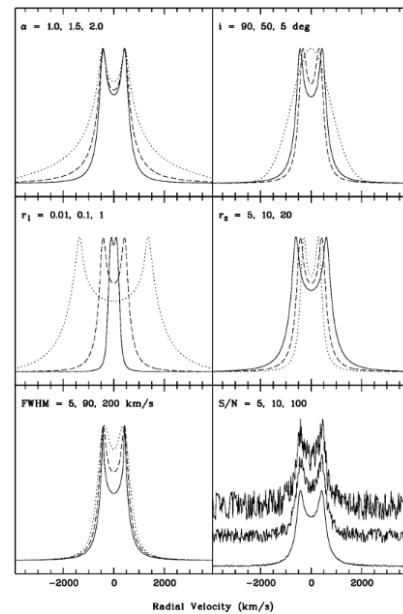


Fig. 8.

#### 4.10.2. Emisividad $\alpha$

- $\alpha = 0$ : Emisión uniforme, picos más anchos
- $\alpha = 1$ : Estándar, picos moderadamente agudos
- $\alpha = 2$ : Emisión concentrada en disco interior, picos más agudos

#### 4.10.3. Radios del Disco

- $R_i$  grande: Reduce las alas del perfil
- $R_D$  grande: Aumenta la separación de picos (mayor  $v_\phi(R_D)^{-1}$ , menor velocidad)

### 5. Eclipses y Geometría del Sistema

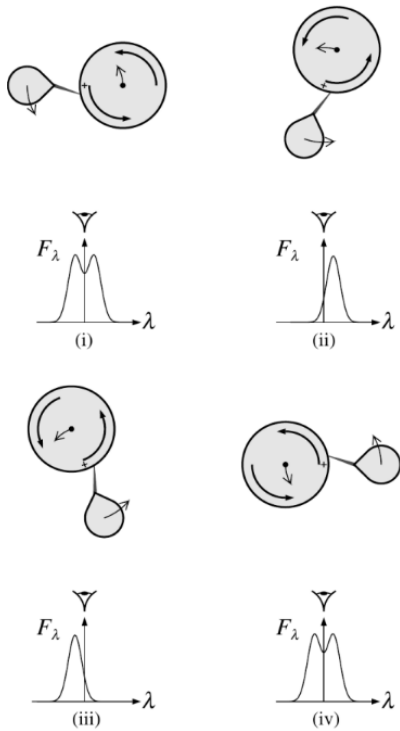


Fig. 9.

#### 5.1. Condición de Eclipse

Los eclipses ocurren cuando:

$$i > i_{\text{crit}} = \arcsin\left(\frac{R_1 + R_2}{a}\right) \quad (30)$$

Para CVs típicas:  $i_{\text{crit}} \sim 70 - 80$ .

#### 5.2. Componentes Visibles

Durante diferentes fases orbitales, vemos:

1. **Disco de acreción:** Componente dominante en sistemas bright
2. **Enana blanca:** Visible en UV, a veces en óptico durante quiescencia
3. **Bright spot:** Donde el flujo impacta ( $L_{\text{spot}} \sim 0.1 - 0.3 L_{\text{disco}}$ )

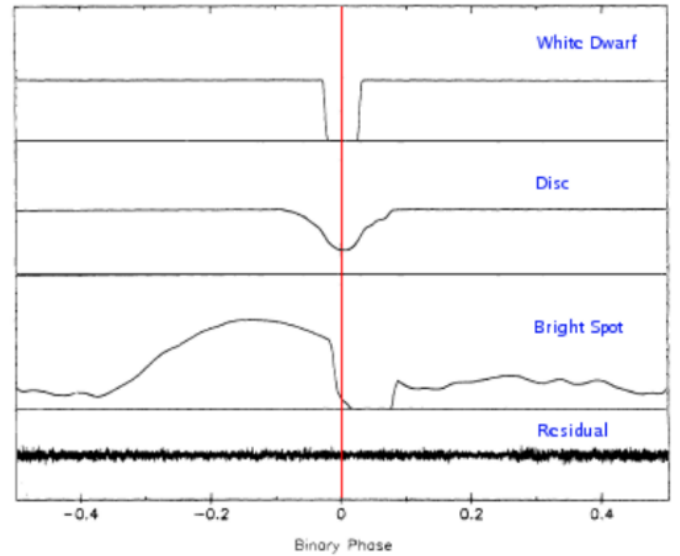


Fig. 10.

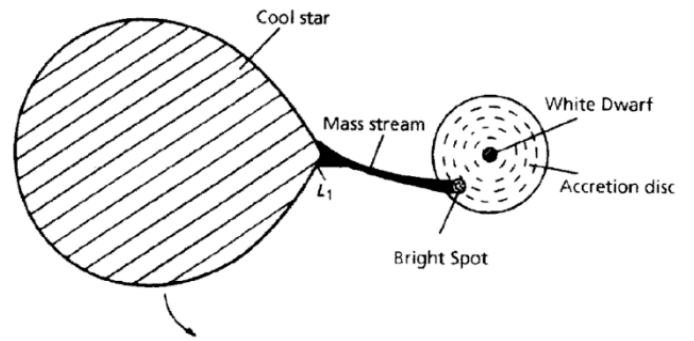


Fig. 11.

4. **Secundaria:** Visible por reflexión o emisión directa en sistemas de período largo

5. **Línea de flujo:** Desde  $L_1$  al disco

#### 5.3. Estructura Temporal del Eclipse

La curva de luz de eclipse revela la secuencia:

$$\phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \phi_4 < \phi_5 \quad (31)$$

donde:

- $\phi_1$ : Primer contacto (borde del disco exterior)
- $\phi_2$ : Eclipse del bright spot
- $\phi_3$ : Segundo contacto (borde del disco interior)
- $\phi_4$ : Ingreso de la WD
- $\phi_5$ : Totalidad (si ocurre)

El egreso es simétrico respecto a  $\phi = 0.5$ .

#### Estructura del eclipse en variables cataclísmicas

La figura muestra la curva de luz de una variable cataclísmica eclipsante observada con alta resolución temporal. En el eje vertical se representa el flujo en miliJanskys ( $f_v$ ), mientras que el eje



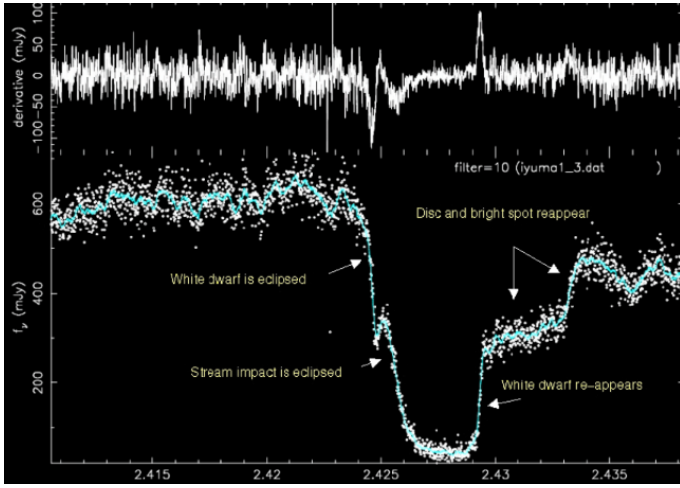


Fig. 12.

horizontal corresponde a la fase orbital. En la parte superior se muestra la derivada de la curva de luz, la cual permite identificar con precisión los momentos de inicio y final de cada componente del eclipse.

- En estos sistemas, una **enana blanca** acreta materia de su compañera (una estrella de la secuencia principal) mediante un disco de acreción. Cuando la geometría del sistema es casi de canto (alta inclinación), el paso de la estrella donante frente a la enana blanca produce un eclipse bien definido.
- En la curva se distinguen varias etapas:
  1. **White dwarf is eclipsed:** la caída abrupta del flujo marca el inicio del eclipse de la enana blanca.
  2. **Stream impact is eclipsed:** poco después, la región del impacto del flujo de acreción sobre el borde del disco (el *bright spot*) también es ocultada, provocando una disminución adicional en el brillo.
  3. **Mínimo del eclipse:** corresponde al momento en que tanto la enana blanca como el punto brillante están completamente ocultos tras la estrella donante.
  4. **White dwarf reappears:** el aumento repentino del flujo indica la reaparición de la enana blanca al salir del eclipse.
  5. **Disc and bright spot reappear:** finalmente, el disco y el punto brillante vuelven a ser visibles, restaurando el flujo a su nivel previo.
- La derivada de la curva de luz (panel superior) permite medir con precisión los instantes de ingreso y egreso de cada componente, lo cual es fundamental para determinar:
  - Los **radios relativos** de la enana blanca, del disco y de la estrella donante.
  - La **inclinación orbital** del sistema.
  - La **posición y tamaño del punto de impacto del flujo**.

El análisis detallado de estas curvas de eclipse es una herramienta esencial para reconstruir la **geometría del sistema** y estudiar los procesos de acreción en las variables cataclísmicas eclipsantes.

*Cada cambio en el flujo durante el eclipse revela una parte diferente de la estructura del sistema binario.*

#### 5.4. Análisis Geométrico

De los tiempos de contacto podemos derivar:

$$R_D = a \sin i \sin [2\pi(\phi_1 - 0.25)] \quad (32)$$

$$R_{WD} = a \sin i \sin [2\pi(\phi_4 - 0.25)] \quad (33)$$

La anchura del eclipse total:

$$\Delta\phi_{\text{total}} = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_{WD}}{a \sin i}\right) \quad (34)$$

## 6. Física del Disco de Acreción

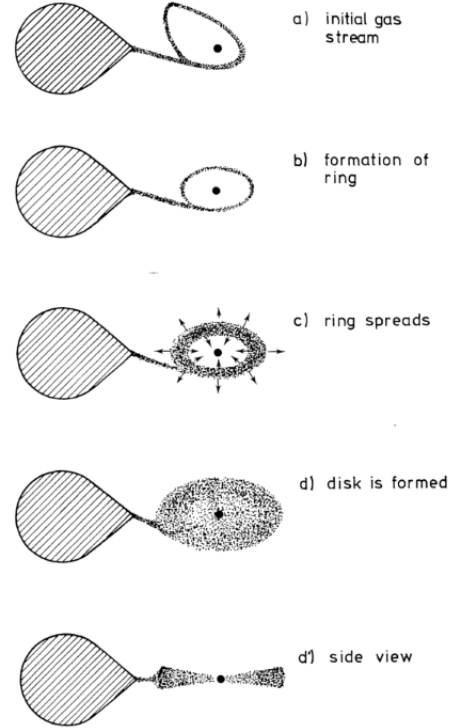


Fig. 13.

### 6.1. Ecuaciones Fundamentales

#### 6.1.1. Conservación de Masa

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0 \quad (35)$$

donde  $\Sigma$  es la densidad superficial y  $v_R$  la velocidad radial.

#### 6.1.2. Conservación de Momento Angular

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R} \quad (36)$$

donde  $G$  es el torque viscoso:

$$G = 2\pi R^2 \Sigma \nu R \frac{d\Omega}{dR} \quad (37)$$

y  $\nu$  es la viscosidad cinemática.

### 6.1.3. Estado Estacionario

En estado estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ):

$$\dot{M} = -2\pi R \Sigma v_R = \text{constante} \quad (38)$$

Del balance de momento angular:

$$\dot{M} R^2 \Omega = \frac{dG}{dR} \quad (39)$$

Esto da:

$$\dot{M} = 3\pi \Sigma v \quad (40)$$

(evaluado en el límite apropiado de torque de borde).

### 6.2. Disipación de Energía

La energía liberada por elemento de masa es:

$$\frac{dE}{dm} = \frac{GM_1}{2R} \quad (41)$$

La tasa de disipación por área es:

$$D(R) = \frac{3GM_1 \dot{M}}{8\pi R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{R}}\right) \quad (42)$$

donde  $R_*$  es el radio de la superficie de la WD (o el radio interior del disco).

### 6.3. Temperatura del Disco

Asumiendo emisión de cuerpo negro:

$$D(R) = \sigma T_{\text{eff}}^4(R)$$

$$T_{\text{eff}}(R) = \left[ \frac{3GM_1 \dot{M}}{8\pi \sigma R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{R}}\right) \right]^{1/4} \quad (44)$$

Para disco ópticamente grueso:  $T_{\text{eff}}(R) \propto R^{-3/4}$ .  
El pico de emisión del disco es:

$$\lambda_{\text{max}}(R) \approx \frac{2.9 \times 10^{-3} \text{ m K}}{T_{\text{eff}}(R)} \quad (45)$$

Para CVs típicas:  $\lambda_{\text{max}} \sim \text{UV-óptico}$ .

### 6.4. Prescripción de Viscosidad: Modelo $\alpha$

#### 6.4.1. Modelo de Shakura-Sunyaev (1973)

La viscosidad cinemática se parametriza como:

$$\nu = \alpha c_s H \quad (46)$$

donde:

- $\alpha \lesssim 1$  es un parámetro adimensional
- $c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$  es la velocidad del sonido
- $H$  es la altura de escala

Esta forma asume que la escala característica de mezcla turbulenta es  $\sim H$  y la velocidad característica es  $\sim c_s$ .

### 6.4.2. Justificación Física

El tensor de esfuerzo viscoso es:

$$W_{R\phi} = \rho \nu R \frac{d\Omega}{dR} \quad (47)$$

Para disco kepleriano:  $\Omega \propto R^{-3/2}$ , entonces:

$$\frac{d\Omega}{dR} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega}{R} \quad (48)$$

El torque viscoso por unidad de área es:

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{3}{2} \rho \nu \Omega \quad (49)$$

### 6.4.3. Tiempo de Viscosidad

El tiempo característico para que el disco evolucione es:

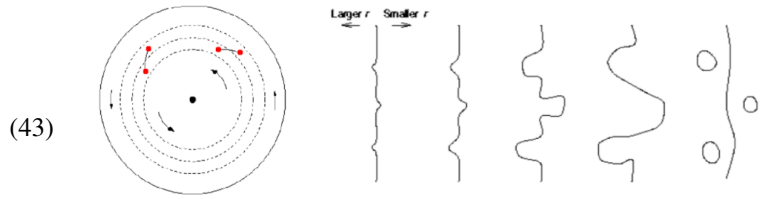
$$t_{\text{visc}} = \frac{R^2}{\nu} = \frac{R^2}{\alpha c_s H} \quad (50)$$

Para un disco de altura  $H/R \sim 0.01$ ,  $\alpha \sim 0.1$ , y  $c_s \sim 10 \text{ km/s}$ :

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{(10^{10} \text{ cm})^2}{0.1 \times 10^6 \text{ cm/s} \times 10^8 \text{ cm}} \sim 10^5 \text{ s} \sim 1 \text{ día} \quad (51)$$

Esto es consistente con las escalas de tiempo observadas en erupciones.

## 7. Turbulencia Magnética: Teoría MRI



**Fig. 14.**

### 7.1. Limitaciones de la Viscosidad Molecular

La viscosidad molecular es:

$$\nu_{\text{mol}} \sim v_{\text{th}} \lambda_{\text{mfp}} \sim 10^2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (52)$$

donde  $v_{\text{th}}$  es la velocidad térmica y  $\lambda_{\text{mfp}}$  el camino libre medio.

Esto da  $t_{\text{visc}} \sim 10^{12}$  años, ¡completamente inadecuado!

### 7.2. Inestabilidad Magnetorrotacional (MRI)

Balbus & Hawley (1991) demostraron que un campo magnético débil en un disco con rotación diferencial es linealmente inestable.

#### 7.2.1. Configuración

Consideremos:

- Dos elementos de fluido (blobs)  $B_1$  y  $B_2$
- Posiciones:  $R_1 < R_2$  (separación  $\delta R$ )
- Conectados por línea de campo magnético
- Rotación kepleriana:  $\Omega(R) = \sqrt{GM_1/R^3}$



### 7.2.2. Análisis Físico Paso a Paso

#### Paso 1: Rotación Diferencial

La velocidad angular de  $B_1$  es mayor:

$$\Omega_1 = \Omega(R_1) > \Omega_2 = \Omega(R_2) \quad (53)$$

Diferencia de velocidad angular:

$$\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \approx \frac{d\Omega}{dR} \delta R = -\frac{3}{2} \frac{\Omega}{R} \delta R \quad (54)$$

#### Paso 2: Estiramiento de Línea de Campo

Después de tiempo  $\delta t$ ,  $B_1$  se adelanta en ángulo:

$$\Delta\phi = \Delta\Omega \cdot \delta t \quad (55)$$

La línea de campo se estira, desarrollando una componente azimutal.

#### Paso 3: Tensión Magnética

La línea estirada ejerce tensión:

$$F_{\text{mag}} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\delta\ell}{\ell} \quad (56)$$

donde  $\delta\ell$  es el estiramiento.

#### Paso 4: Transferencia de Momento Angular

La tensión magnética actúa para:

- Desacelerar  $B_1$ :  $\dot{J}_1 < 0$
- Acelerar  $B_2$ :  $\dot{J}_2 > 0$

Cambio de momento angular:

$$\Delta J \sim \frac{B^2}{4\pi} R^2 \Delta t \quad (57)$$

#### Paso 5: Movimiento Radial

Por conservación de momento angular, si  $\Delta J < 0$ :

$$J = MR^2\Omega = \text{const} - \Delta J \quad (58)$$

Para  $\Omega \propto R^{-3/2}$ :  $J \propto R^{1/2}$ , entonces  $\Delta J < 0 \Rightarrow \Delta R < 0$ .

Por tanto:

- $B_1$  pierde momento angular  $\Rightarrow$  se mueve hacia adentro
- $B_2$  gana momento angular  $\Rightarrow$  se mueve hacia afuera

#### Paso 6: Retroalimentación Positiva

El movimiento radial *aumenta* la separación  $\delta R$ , estirando más la línea de campo. ¡Esto es una **inestabilidad**!

### 7.2.3. Análisis de Estabilidad Lineal

Consideremos perturbaciones de la forma:

$$\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{B} \propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (59)$$

La ecuación de dispersión es (para  $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$ ):

$$\omega^4 + \omega^2 \left[ k^2 v_A^2 - \kappa^2 - k^2 v_A^2 \right] + k^2 v_A^2 \kappa^2 = 0 \quad (60)$$

donde:

- $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$  es la velocidad de Alfvén
- $\kappa^2 = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2\Omega)^2$  es la frecuencia epicíclica

Para disco kepleriano:  $\kappa = \Omega$ .

**Condición de inestabilidad:**

$\frac{d\Omega^2}{d \ln R} < 0$

(61)

Esto se satisface para cualquier rotación sub-kepleriana, ¡incluyendo la kepleriana misma!

### 7.2.4. Tasa de Crecimiento

La tasa de crecimiento máxima es:

$$\gamma_{\text{max}} \sim \Omega \quad (62)$$

para longitudes de onda  $\lambda \sim H$  y campos débiles  $v_A \ll v_\phi$ .

Tiempo de crecimiento:

$$t_{\text{MRI}} \sim \Omega^{-1} \sim \text{períodos orbitales} \quad (63)$$

¡Mucho más rápido que la viscosidad molecular!

### 7.2.5. Reconexión Magnética

Eventualmente, las líneas de campo altamente estiradas sufren **reconexión magnética**:

$$E = \frac{v_{\text{rec}}}{c} B \quad (64)$$

donde  $v_{\text{rec}} \sim 0.01 - 0.1 v_A$  es la velocidad de reconexión.

La energía magnética se disipa en calor:

$$\Delta E_{\text{mag}} = \frac{B^2}{8\pi} \Delta V \quad (65)$$

Este calentamiento sostiene la turbulencia.

### 7.3. Viscosidad Efectiva por MRI

Simulaciones magnetohidrodinámicas (MHD) muestran que la MRI produce:

$$\alpha_{\text{MRI}} \sim 0.01 - 0.1 \quad (66)$$

dependiendo de:

- Geometría del campo magnético (vertical vs. toroidal)
- Condiciones de frontera
- Saturación no-lineal
- Grado de ionización

### 7.4. Requerimiento de Ionización

La MRI requiere acoplamiento entre gas y campo magnético:

$$\text{Número de Reynolds magnético: } \text{Re}_M = \frac{vL}{\eta} \gg 1 \quad (67)$$

donde  $\eta = c^2 / (4\pi\sigma)$  es la difusividad magnética y  $\sigma$  la conductividad.

Para gas parcialmente ionizado:

$$\sigma \propto n_e \quad (68)$$

**Zonas muertas:** Regiones con ionización insuficiente donde la MRI no opera efectivamente.

## 8. Mapeo por Eclipse: Técnica Avanzada

### 8.1. Principio Fundamental

Durante un eclipse, diferentes regiones del disco son oscurecidas secuencialmente. Observando en múltiples bandas simultáneamente, podemos mapear la distribución de temperatura 2-D.

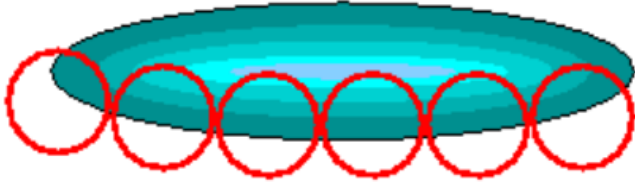


Fig. 15.

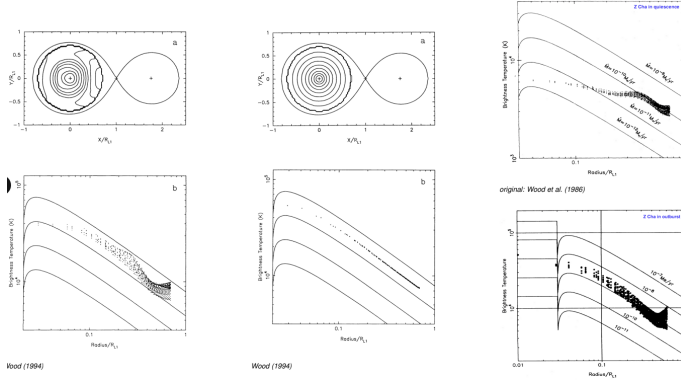


Fig. 16.

### 8.2. Información Temporal

En fase orbital  $\phi$ , la región visible del disco es:

$$\mathcal{D}_{\text{vis}}(\phi) = \mathcal{D}_{\text{total}} - \mathcal{D}_{\text{eclipsada}}(\phi) \quad (69)$$

El flujo observado es:

$$F_{\lambda}(\phi) = \int_{\mathcal{D}_{\text{vis}}(\phi)} I_{\lambda}(x, y) dA \quad (70)$$

donde  $I_{\lambda}(x, y)$  es la intensidad específica.

### 8.3. Fotometría Multi-Banda

Observando en  $N$  bandas  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ , obtenemos:

$$F_{\lambda_i}(\phi), \quad i = 1, \dots, N \quad (71)$$

La razón de colores determina la temperatura:

$$\frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} \approx \frac{B_{\lambda_1}(T)}{B_{\lambda_2}(T)} \quad (72)$$

donde  $B_{\lambda}(T)$  es la función de Planck.

### 8.4. Problema Inverso

**Datos:** Curvas de luz  $F_{\lambda_i}(\phi)$  para  $\phi \in [0, 1]$

**Incógnita:** Distribución  $T(x, y)$  en el disco

Este es un problema inverso mal condicionado (información 1-D  $\rightarrow$  estructura 2-D).

### 8.5. Método de Máxima Entropía

La entropía de la imagen es:

$$S = - \sum_j p_j \ln \left( \frac{p_j}{m_j} \right) \quad (73)$$

donde:

- $p_j$  es la intensidad en el pixel  $j$
- $m_j$  es el modelo "default"

Maximizamos  $S$  sujeto a la restricción:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(F_{\text{obs},i} - F_{\text{model},i})^2}{\sigma_i^2} \leq \chi_{\text{target}}^2 \quad (74)$$

### Método de Lagrange:

$$\mathcal{L} = \alpha S - \chi^2 \quad (75)$$

donde  $\alpha$  es el multiplicador de Lagrange.

## 8.6. Resultados Típicos

Los mapas de temperatura revelan:

1. **Gradiente radial:**  $T(R) \propto R^{-3/4}$  (consistente con teoría)
2. **Bright spot:**  $T_{\text{spot}} \sim 10000 - 20000$  K
3. **Asimetrías:** Desviaciones de axisimetría
4. **Estructura fina:** Anillos, espirales (en alta resolución)

## 9. Erupciones de Novas Enanas: Observaciones Detalladas

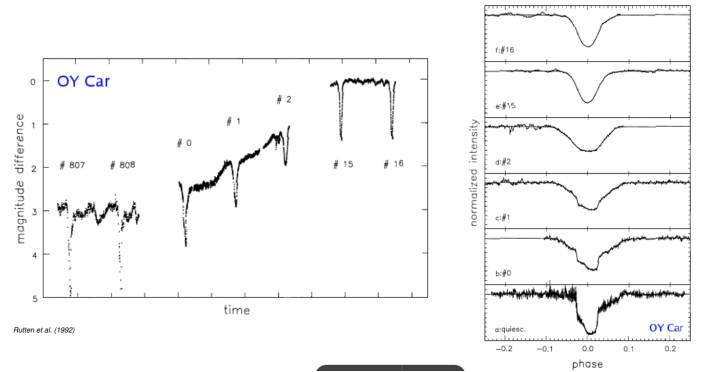


Fig. 17.

### 9.1. Evolución Temporal Completa

#### 9.1.1. Pre-Erupción (Quiescencia)

- Brillo:  $m \sim 15 - 18$  mag
- Disco frío:  $T_{\text{eff}} \sim 5000 - 8000$  K
- Ópticamente delgado: líneas de emisión visibles
- Bright spot visible (hump orbital)
- Acumulación de masa:  $\dot{\Sigma} > 0$

#### 9.1.2. Ascenso a Erupción

- Duración:  $\sim 0.5 - 2$  días
- Tasa de aumento:  $\sim 2 - 4$  mag/día
- Comienza en disco interior, se propaga hacia afuera
- Frente de ionización: velocidad  $\sim 10^4$  cm/s

### 9.1.3. Máximo de Erupción

- Brillo:  $m \sim 11 - 14$  mag ( $\Delta m \sim 3 - 4$  mag)
- Aumento de luminosidad: factor  $\sim 40 - 250$
- Disco caliente:  $T_{\text{eff}} \sim 10000 - 15000$  K
- Ópticamente grueso: líneas débiles o ausentes
- Color: muy azul ( $B - V \sim -0.2$  a  $0.0$ )
- Espectro: continuo dominante, posibles absorciones anchas

### 9.1.4. Descenso

- Duración:  $\sim 2 - 5$  días (más lento que ascenso)
- Tasa:  $\sim 0.5 - 1$  mag/día
- Enfriamiento desde afuera hacia adentro
- Reparición gradual de líneas de emisión

## 9.2. Cambio de Radio del Disco

Durante erupción, el radio del disco aumenta significativamente.

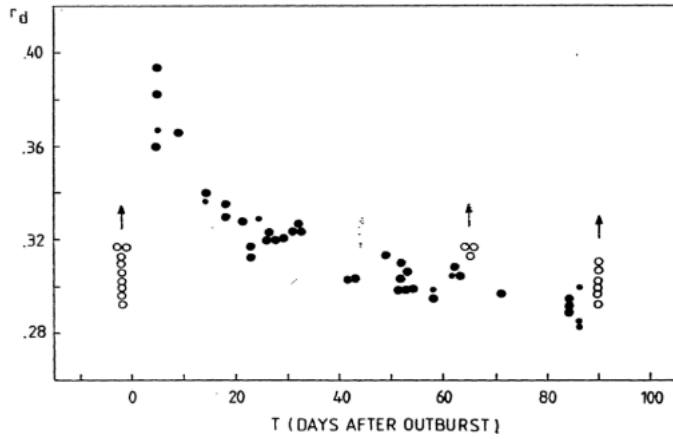


Fig. 18.

### 9.2.1. Quiescencia

El radio del disco está determinado por el balance de torque:

$$R_{D,\text{quiesc}} \approx 0.6 a \quad (76)$$

donde  $a$  es la separación orbital.

### 9.2.2. Erupción

El aumento de viscosidad causa expansión:

$$R_{D,\text{outburst}} \approx 0.8 - 0.9 a \quad (77)$$

Esto se observa como:

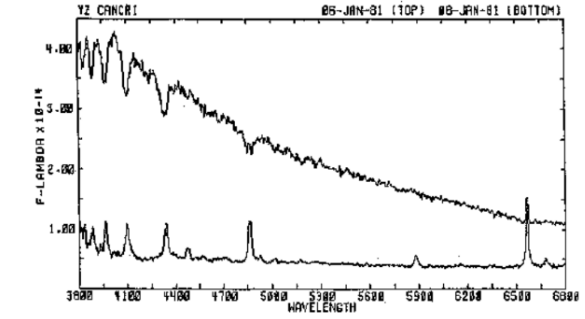
- Aumento de duración de eclipse ( $\Delta \phi_{\text{eclipse}}$  aumenta)
- Desaparición del hump orbital (bright spot menos prominente)
- Cambio en perfiles de línea (menor separación de picos)

### 9.2.3. Post-Erupción

El disco se contrae lentamente:

$$R_D(t) \approx R_{D,\text{max}} - (R_{D,\text{max}} - R_{D,\text{quiesc}}) \left(1 - e^{-t/t_{\text{visc}}}\right) \quad (78)$$

con  $t_{\text{visc}} \sim$  semanas.



Shafter (1993)

accretion disc becomes bluer (= hotter) and optically thick during outburst

Fig. 19.

## 9.3. Evolución de Temperatura Detallada

La temperatura del disco evoluciona como ondas de calentamiento/enfriamiento que se propagan radialmente.

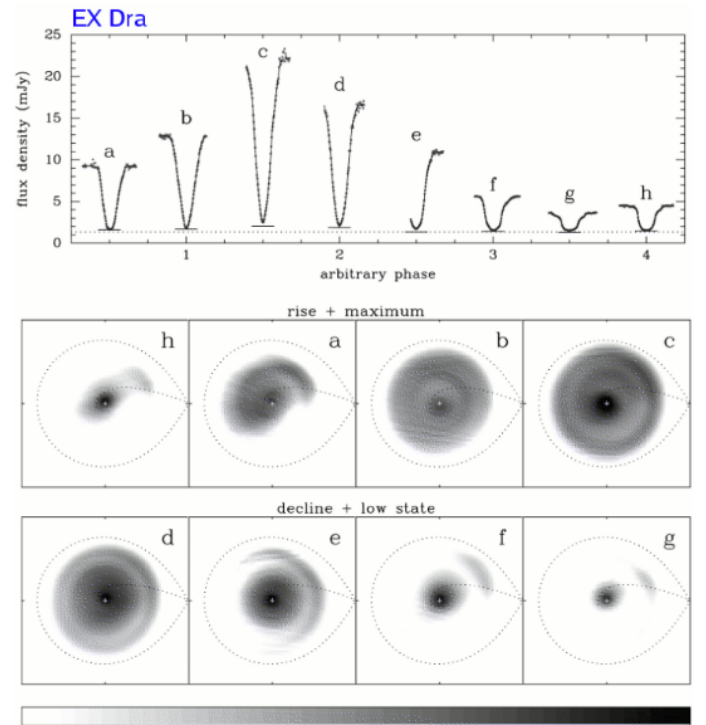


Fig. 20.

### 9.3.1. Modelo de Onda Térmica

La ecuación de difusión térmica es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R D_{\text{th}} \frac{\partial T}{\partial R} \right) \quad (79)$$

donde  $D_{th} \sim \nu$  es la difusividad térmica.

### 9.3.2. Velocidad de Propagación

La velocidad del frente de calentamiento es:

$$v_{frente} \sim \frac{\nu}{H} \sim \alpha c_s \quad (80)$$

Para  $\alpha \sim 0.1$  y  $c_s \sim 10$  km/s:

$$v_{frente} \sim 1 \text{ km/s} \sim 10^5 \text{ cm/s} \quad (81)$$

Tiempo para cruzar el disco ( $R_D \sim 10^{10}$  cm):

$$t_{prop} \sim \frac{R_D}{v_{frente}} \sim \frac{10^{10}}{10^5} \sim 10^5 \text{ s} \sim 1 \text{ día} \quad (82)$$

Consistente con duraciones observadas.

## 9.4. Espectroscopía: Cambios Cualitativos

### 9.4.1. Quiescencia

Espectro dominado por líneas de emisión:

$$F_\lambda = F_{\lambda, \text{continuo}} + \sum_{\text{líneas}} F_{\lambda, \text{línea}} \quad (83)$$

Razón equivalente típica:

$$EW(H\alpha) \sim 50 - 200 \text{ Å} \quad (84)$$

### 9.4.2. Erupción

Continuo domina:

$$F_\lambda \approx F_{\lambda, \text{continuo}} \propto B_\lambda(T_{\text{eff}}) \quad (85)$$

Líneas débiles:

$$EW(H\alpha) \sim 0 - 10 \text{ Å} \quad (86)$$

Posibles absorciones anchas (disco ópticamente grueso en rotación):

$$FWHM_{\text{abs}} \sim 2v_\phi(R_D) \sin i \sim 1000 - 2000 \text{ km/s} \quad (87)$$

## 10. Modelo de Inestabilidad Térmica del Disco (DIM)

### 10.1. Fundamentos Termodinámicos

#### 10.1.1. Estados del Hidrógeno

El hidrógeno puede estar en tres estados principales:

1. **Neutral:**  $T \lesssim 6000 \text{ K}$ ,  $x_i \ll 1$
2. **Parcialmente ionizado:**  $6000 \lesssim T \lesssim 10000 \text{ K}$ ,  $0 < x_i < 1$
3. **Completamente ionizado:**  $T \gtrsim 10000 \text{ K}$ ,  $x_i \approx 1$

donde  $x_i = n_e/n_H$  es la fracción de ionización.

#### 10.1.2. Ecuación de Saha

La fracción de ionización satisface:

$$\frac{x_i^2}{1 - x_i} = \frac{1}{n_H} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_H/(kT)} \quad (88)$$

donde  $\chi_H = 13.6 \text{ eV}$  es el potencial de ionización del hidrógeno.

Para  $n_H \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ :

- $T = 5000 \text{ K}$ :  $x_i \sim 10^{-4}$  (neutral)
- $T = 7000 \text{ K}$ :  $x_i \sim 0.5$  (parcialmente ionizado)
- $T = 10000 \text{ K}$ :  $x_i \sim 0.99$  (ionizado)

## 10.2. Opacidad y Estabilidad Térmica

### 10.2.1. Dependencia de Opacidad con Temperatura

La opacidad total es:

$$\kappa = \kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{bf}} + \kappa_{\text{e-scatt}} + \kappa_{\text{H}^-} \quad (89)$$

**En región parcialmente ionizada:**

La opacidad es dominada por  $\kappa_{\text{H}^-}$  (ion negativo de hidrógeno) y transiciones ligado-libre:

$$\kappa \propto \rho T^{9-10} \quad (90)$$

¡Dependencia extremadamente fuerte!

**En región completamente ionizada:**

Dominada por dispersión de electrones libres y free-free:

$$\kappa_{\text{ff}} \propto \rho T^{-7/2} \quad (91)$$

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma_T}{m_p} = 0.4 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (\text{constante}) \quad (92)$$

### 10.2.2. Criterio de Estabilidad Térmica

Consideremos una perturbación de temperatura  $\delta T$  a densidad superficial constante  $\Sigma$ .

Balance de energía:

$$\frac{dE}{dt} = Q^+ - Q^- \quad (93)$$

donde:

- $Q^+ \propto \Sigma \nu \Omega^2$  (calentamiento viscoso)
- $Q^- \propto \sigma T_{\text{eff}}^4$  (enfriamiento radiativo)

Relacionando temperatura central con efectiva:

$$T_c \propto \kappa \Sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (94)$$

**Estabilidad térmica requiere:**

$$\left. \frac{\partial Q^-}{\partial T} \right|_\Sigma > \left. \frac{\partial Q^+}{\partial T} \right|_\Sigma \quad (95)$$

Esto se viola cuando:

$$\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} > 0 \quad \text{y es grande} \quad (96)$$

¡Exactamente lo que ocurre en la zona parcialmente ionizada!

## 10.3. Curva S: Análisis Completo

### 10.3.1. Relación $\Sigma - \dot{M}$

En estado estacionario local:

$$\dot{M} = 3\pi \nu \Sigma = 3\pi \alpha c_s H \Sigma \quad (97)$$

Con  $c_s = \sqrt{kT_c/(\mu m_p)}$  y  $H = c_s/\Omega$ :

$$\dot{M} = 3\pi \alpha \frac{c_s^2}{\Omega} \Sigma \propto \frac{T_c}{R^{3/2}} \Sigma \quad (98)$$

Usando  $T_c \propto \kappa \Sigma T_{\text{eff}}^4$  y  $T_{\text{eff}}^4 \propto \dot{M}/R^3$ :

$$\dot{M} = f(\Sigma, T_c, \alpha, R) \quad (99)$$

Esta relación tiene forma de **curva S** cuando se grafica  $\dot{M}$  vs.  $\Sigma$  a temperatura fija.

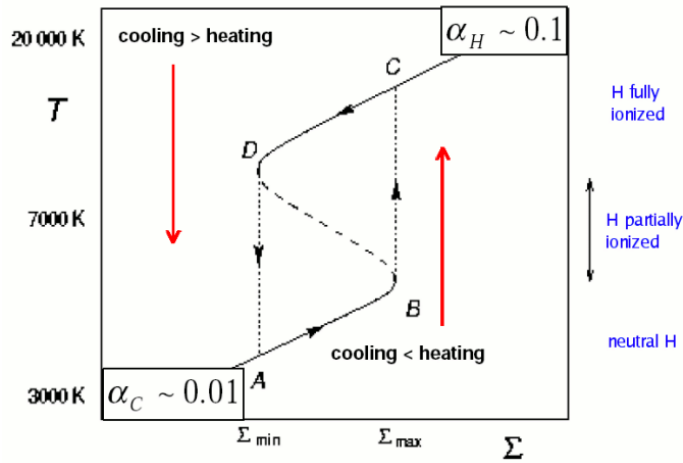


Fig. 21.

### 10.3.2. Ramas de la Curva S

#### Rama inferior (A):

- $T \sim 5000 - 6000$  K
- Hidrógeno neutral
- Baja opacidad:  $\kappa \sim 0.1 - 1$  cm<sup>2</sup>/g
- Baja viscosidad:  $\alpha_{\text{frío}} \sim 0.01$
- $\dot{M}_{\text{disco}} < \dot{M}_2$  (estado estable, quiescencia)
- Pendiente:  $d\dot{M}/d\Sigma > 0$  (estable)

#### Rama media (B):

- $T \sim 6000 - 10000$  K
- Hidrógeno parcialmente ionizado ( $0 < x_i < 1$ )
- Alta opacidad:  $\kappa \propto T^{10}$
- Pendiente:  $d\dot{M}/d\Sigma < 0$  (inestable)
- Esta rama es inaccesible en equilibrio

#### Rama superior (C):

- $T \sim 10000 - 20000$  K
- Hidrógeno completamente ionizado
- Opacidad moderada:  $\kappa \sim 1$  cm<sup>2</sup>/g (dispersión electrónica)
- Alta viscosidad:  $\alpha_{\text{caliente}} \sim 0.1 - 0.3$
- $\dot{M}_{\text{disco}} > \dot{M}_2$  (estado estable, erupción)
- Pendiente:  $d\dot{M}/d\Sigma > 0$  (estable)

### 10.4. Densidades Superficiales Críticas

Las intersecciones de la curva S con líneas de  $\dot{M} = \text{const}$  definen:

$$\Sigma_{\text{crítico,min}} \quad \text{y} \quad \Sigma_{\text{crítico,max}} \quad (100)$$

#### Condición para erupción:

$$\Sigma > \Sigma_{\text{crítico,max}} \Rightarrow \text{transición a rama superior} \quad (101)$$

#### Condición para retorno a quiescencia:

$$\Sigma < \Sigma_{\text{crítico,min}} \Rightarrow \text{transición a rama inferior} \quad (102)$$

### 10.5. Ciclo de Erupción Completo

#### 10.5.1. Fase 1: Acumulación (Quiescencia)

- Punto A en rama inferior
- $\dot{M}_2 > \dot{M}_{\text{disco}}$  ("atasco de tráfico")
- Materia se acumula:  $\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\dot{M}_2 - \dot{M}_{\text{disco}}}{2\pi R \Delta R} > 0$
- Temperatura aumenta lentamente:  $\frac{dT}{dt} > 0$  (calentamiento viscoso débil)
- Duración típica:  $t_{\text{quiesc}} \sim 20 - 100$  días

#### 10.5.2. Fase 2: Ignición (Transición A → C)

- $\Sigma$  alcanza  $\Sigma_{\text{crítico,max}}$  (típicamente en disco exterior)
- Fluctuación térmica inicia ionización parcial de H
- $\kappa$  aumenta dramáticamente:  $\kappa \propto T^{10}$
- Energía queda "atrapada"  $\Rightarrow$  **runaway térmico**
- Tiempo de escala:  $t_{\text{ignición}} \sim t_{\text{térmico}} \sim \frac{H^2}{\chi} \sim$  horas
- donde  $\chi = \kappa F / (c_p \rho)$  es la difusividad térmica
- Salto de temperatura:  $\Delta T \sim 5000$  K
- Sistema salta a rama superior (punto C)

#### 10.5.3. Fase 3: Propagación del Frente de Calentamiento

- Frente de ionización se propaga: exterior  $\rightarrow$  interior (inside-out) o interior  $\rightarrow$  exterior (outside-in)
- Velocidad de propagación:  $v_{\text{frente}} \sim \sqrt{v\Omega} \sim \alpha c_s$
- Tiempo de propagación:  $t_{\text{rise}} \sim R_D / v_{\text{frente}} \sim 0.5 - 2$  días
- Todo el disco transiciona a rama superior
- Brillo aumenta:  $\Delta m \sim 3 - 4$  mag

#### 10.5.4. Fase 4: Plateau (Erupción)

- Punto C en rama superior
- $\dot{M}_{\text{disco}} > \dot{M}_2$  ("semáforos en verde")
- Disco se vacía:  $\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\dot{M}_2 - \dot{M}_{\text{disco}}}{2\pi R \Delta R} < 0$
- Disco se expande:  $R_D$  aumenta  $\sim 20 - 50\%$
- Duración:  $t_{\text{outburst}} \sim 1 - 3$  días
- Alta tasa de acreción:  $\dot{M}_{\text{disco}} \sim 10^{-8} M_{\odot}/\text{año}$

#### 10.5.5. Fase 5: Retorno a Quiescencia (Transición C → A)

- $\Sigma$  disminuye hasta  $\Sigma_{\text{crítico,min}}$
- Comienza recombinación de H
- $\kappa$  disminuye:  $\kappa \propto T^{-2.5}$
- Disco puede radiar eficientemente  $\Rightarrow$  enfriamiento rápido
- Sistema salta a rama inferior (punto A)
- Tiempo:  $t_{\text{decline}} \sim 2 - 5$  días (más lento que ascenso)
- Disco se contrae:  $R_D$  disminuye lentamente

## 10.6. Ecuaciones de Evolución Temporal

El ciclo completo se describe por las ecuaciones acopladas:

**Conservación de masa:**

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) + \frac{\dot{M}_2}{2\pi R \Delta R} \delta(R - R_{\text{stream}}) \quad (103)$$

**Conservación de momento angular:**

$$\Sigma v_R = -\frac{3}{\sqrt{R}} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma \sqrt{R}) \quad (104)$$

**Balance térmico:**

$$\frac{3}{2} nk \frac{\partial T}{\partial t} = Q_{\text{visc}}^+ - Q_{\text{rad}}^- \quad (105)$$

donde:

$$Q_{\text{visc}}^+ = \frac{9}{4} \Sigma \nu \Omega^2 \quad (106)$$

$$Q_{\text{rad}}^- = 2\sigma T_{\text{eff}}^4 = \frac{2\sigma T_c^4}{\tau_{\text{eff}}} \quad (107)$$

con profundidad óptica efectiva  $\tau_{\text{eff}} \approx \kappa \Sigma / 2$ .

## 10.7. Parámetros que Determinan el Comportamiento

### 10.7.1. Tasa de Transferencia de Masa $\dot{M}_2$

**Baja  $\dot{M}_2$  ( $\lesssim 10^{-10} M_{\odot}/\text{año}$ ):**

- Sistema tipo U Gem (novas enanas normales)
- Oscilación continua entre quiescencia y erupción
- $t_{\text{rec}}$  largo ( $\sim$  semanas-meses)

**Intermedia  $\dot{M}_2$  ( $\sim 10^{-9.5} M_{\odot}/\text{año}$ ):**

- Sistema tipo Z Cam
- $\dot{M}_2 \approx \dot{M}_{\text{crítico}}$  en alguna parte del disco
- Posibles standstills cuando equilibrio local se alcanza

**Alta  $\dot{M}_2$  ( $\gtrsim 10^{-9} M_{\odot}/\text{año}$ ):**

- Nova-like tipo UX UMa
- Disco permanentemente en rama superior
- Sin erupciones

**Variable  $\dot{M}_2$ :**

- Sistema tipo VY Scl
- Normalmente alta  $\dot{M}_2$  (estado alto)
- Ocasionalmente  $\dot{M}_2$  cae (estado bajo)

### 10.7.2. Masa de la Enana Blanca $M_1$

Afecta:

$$\Sigma_{\text{crítico}} \propto M_1^{0.25} R^{-0.75} \quad (108)$$

Mayor  $M_1 \Rightarrow$  erupciones más frecuentes (menor masa necesaria para ignición).

### 10.7.3. Período Orbital $P_{\text{orb}}$

Relacionado con radio del disco:

$$R_D \propto a \propto P_{\text{orb}}^{2/3} \quad (109)$$

Períodos cortos  $\Rightarrow$  discos pequeños  $\Rightarrow$  erupciones más rápidas.

## 11. Modelo Alternativo: Inestabilidad de Transferencia de Masa

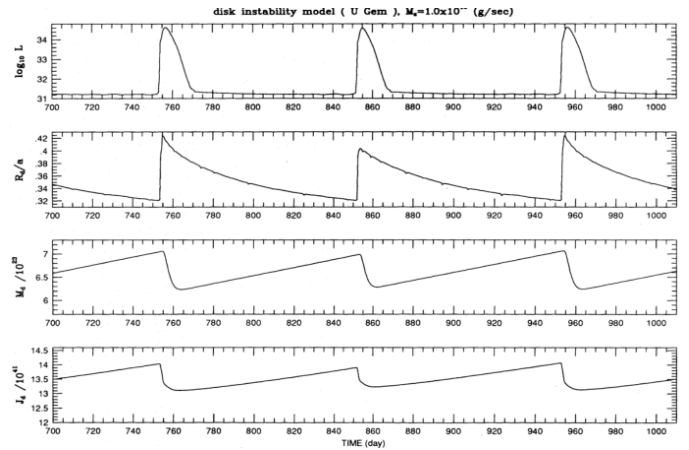


Fig. 22.

### 11.1. Concepto Básico

Bath (1975) propuso que las erupciones podrían ser causadas por variaciones en  $\dot{M}_2$ , no por inestabilidad del disco.

### 11.2. Mecanismo

1. La secundaria sufre variaciones en su radio efectivo de Roche
2. Ciclo de transferencia:  $\dot{M}_2$  oscila entre alto y bajo
3. Disco responde a cambios en  $\dot{M}_2$

### 11.3. Problemas

- No explica la propagación observada de frentes de calentamiento
- Difícil explicar la variedad de comportamientos (U Gem, Z Cam, etc.)
- No predice correctamente la relación entre  $t_{\text{outburst}}$  y  $t_{\text{quiesc}}$

El DIM es actualmente el modelo preferido, aunque la transferencia de masa puede jugar un papel secundario.

## 12. Interpretación Unificada de Curvas de Luz

### 12.1. Diagrama $\dot{M}_2$ vs. $\dot{M}_{\text{crítico}}$

Todos los subtipos de CVs pueden entenderse en términos de la relación entre  $\dot{M}_2$  (controlado por la secundaria) y  $\dot{M}_{\text{crítico}}(R)$  (determinado por la física del disco).



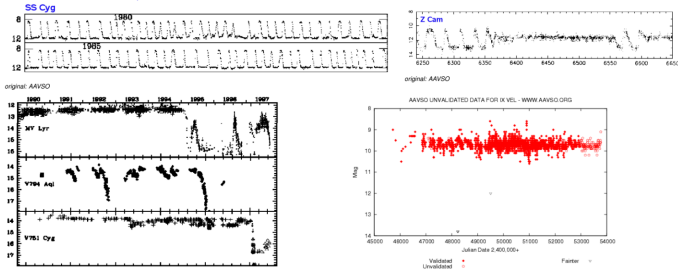


Fig. 23.

#### 12.1.1. U Gem: $\dot{M}_2 \ll \dot{M}_{\text{crítico}}$ en todo el disco

- Disco siempre por debajo del umbral de estabilidad
- Ciclos regulares: quiescencia  $\rightarrow$  erupción  $\rightarrow$  quiescencia
- Siguiendo continuamente la curva S

#### 12.1.2. Z Cam: $\dot{M}_2 \approx \dot{M}_{\text{crítico}}$ en disco exterior

- Durante erupciones normales: similar a U Gem
- Durante standstills:  $\dot{M}_2 = \dot{M}_{\text{disco}}$  en equilibrio marginal
- Región exterior del disco permanece caliente e ionizada
- Región interior oscila (mini-erupciones posibles)

Condición para standstill:

$$\dot{M}_2(t) = \dot{M}_{\text{crítico}}(R_{\text{transición}}) \quad (110)$$

#### 12.1.3. VY Scl: $\dot{M}_2 \gtrsim \dot{M}_{\text{crítico}}$ normalmente

- Estado alto (normal): disco en rama superior, estable
- Estados bajos (raros):  $\dot{M}_2$  cae temporalmente
- Cuando  $\dot{M}_2 < \dot{M}_{\text{crítico}}$ : disco transiciona a rama inferior
- Duración del estado bajo: determinada por cuánto tiempo  $\dot{M}_2$  permanece baja

#### 12.1.4. UX UMa: $\dot{M}_2 \gg \dot{M}_{\text{crítico}}$ siempre

- Disco permanentemente caliente e ionizado
- Siempre en rama superior de la curva S
- Brillo constante (solo variaciones orbitales)
- Sin erupciones

### 12.2. Expresión Cuantitativa

El flujo de masa crítico a radio  $R$  es aproximadamente:

$$\dot{M}_{\text{crítico}}(R) \approx 1.4 \times 10^{16} \alpha_{0.1} \left( \frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^{0.25} \left( \frac{R}{10^{10} \text{ cm}} \right)^{2.7} \text{ g/s} \quad (111)$$

donde  $\alpha_{0.1} = \alpha/0.1$ .

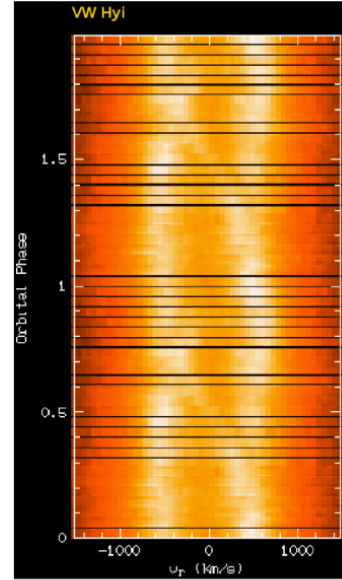
## 13. Fuentes Adicionales de Emisión

### 13.1. Bright Spot: Física Detallada

#### 13.1.1. Formación

El flujo de materia desde  $L_1$  tiene:

- Velocidad:  $v_{\text{stream}} \sim \sqrt{2GM_1/R_{L1}} \sim 500 \text{ km/s}$



possible emission sources:  
bright spot, secondary, ...

Fig. 24.

- Momento angular específico:  $j_{\text{stream}} = v_{\text{stream}} R_{\text{impact}}$

Radio de impacto:

$$R_{\text{impact}} = \frac{j_{\text{stream}}^2}{GM_1} \quad (112)$$

#### 13.1.2. Energía Liberada

Cuando el flujo impacta el disco:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \dot{M}_2 v_{\text{rel}}^2 \quad (113)$$

donde:

$$v_{\text{rel}} = |v_{\text{stream}} - v_{\text{disco}}(R_{\text{impact}})| \quad (114)$$

Típicamente:  $v_{\text{rel}} \sim 200 - 400 \text{ km/s}$ .

Luminosidad del bright spot:

$$L_{\text{spot}} = \frac{1}{2} \dot{M}_2 v_{\text{rel}}^2 \sim 10^{32-33} \text{ erg/s} \quad (115)$$

Esto es  $\sim 10 - 30\%$  de la luminosidad del disco en quiescencia.

#### 13.1.3. Temperatura

Área del bright spot:  $A_{\text{spot}} \sim \pi R_{\text{spot}}^2$  con  $R_{\text{spot}} \sim 0.1 R_D$ .

Temperatura efectiva:

$$T_{\text{spot}} = \left( \frac{L_{\text{spot}}}{\sigma A_{\text{spot}}} \right)^{1/4} \sim 10000 - 20000 \text{ K} \quad (116)$$

### 13.1.4. Modulación Orbital (Orbital Hump)

El bright spot causa modulación orbital:

$$F(\phi) = F_0 + F_{\text{spot}} [1 + \epsilon \cos(2\pi\phi - \phi_0)] \quad (117)$$

donde:

- $\epsilon \sim 0.1 - 0.3$  es la amplitud de modulación
- $\phi_0$  es la fase del máximo (típicamente  $\phi_0 \sim 0.5 - 0.6$ )

### 13.2. Emisión de la Secundaria

Observation:

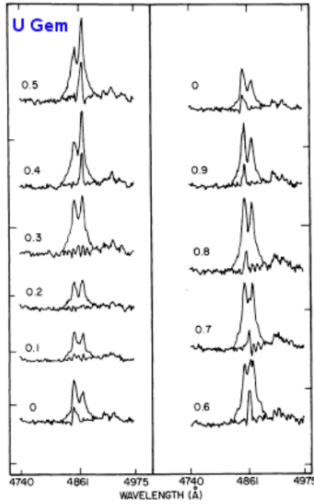


Fig. 25.

#### 13.2.1. Contribución Directa

Para sistemas de período largo ( $P_{\text{orb}} > 3$  h):

$$\frac{L_{\text{secondary}}}{L_{\text{disco}}} \sim 0.01 - 0.1 \quad (118)$$

La secundaria contribuye principalmente en:

- Infrarrojo cercano (NIR):  $J$ ,  $H$ ,  $K$
- Líneas de absorción:  $\text{TiO}$ ,  $\text{CaI}$ ,  $\text{NaI}$  (en sistemas K-M)

#### 13.2.2. Calentamiento por Irradiación

La cara de la secundaria facing la WD/disco recibe:

$$F_{\text{irrad}} = \frac{L_{\text{disco}} + L_{\text{WD}}}{4\pi d^2} \cos \theta \quad (119)$$

donde  $d \approx a$  es la separación y  $\theta$  el ángulo de incidencia.  
Temperatura del lado iluminado:

$$T_{\text{irrad}} = \left( \frac{F_{\text{irrad}}}{\sigma} \right)^{1/4} \sim 1.5 - 2.0 T_{\text{lado oscuro}} \quad (120)$$

Esto produce modulación orbital adicional.

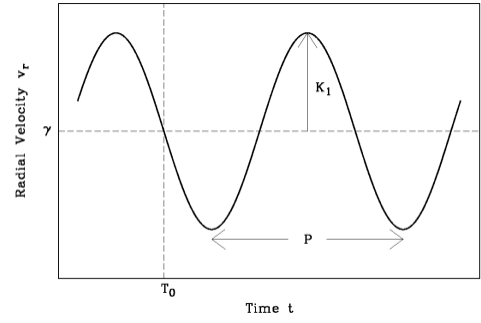


Fig. 26.

### 13.3. Consecuencias para Velocidades Radiales

#### 13.3.1. Problema Fundamental

Las líneas de emisión son compuestas de múltiples componentes:

$$I_{\text{total}}(\lambda) = I_{\text{disco}}(\lambda) + I_{\text{spot}}(\lambda) + I_{\text{secondary}}(\lambda) + \dots \quad (121)$$

Cada componente tiene diferente velocidad radial:

$$v_r^{(i)}(\phi) = \gamma_i + K_i \sin(2\pi\phi + \phi_i) \quad (122)$$

#### 13.3.2. Medición con Gaussiano Único

Usar un solo Gaussiano:

$$G(\lambda) = A \exp \left[ -\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (123)$$

para ajustar  $I_{\text{total}}(\lambda)$  produce:

$$\lambda_0(\phi) \neq \lambda_{\text{WD}}(\phi) \quad (124)$$

El centroide medido es:

$$\lambda_0 = \frac{\sum_i w_i(\phi) \lambda_i(\phi)}{\sum_i w_i(\phi)} \quad (125)$$

donde  $w_i(\phi)$  son los pesos (intensidades) variables con fase.

#### 13.3.3. Error Sistemático

La semi-amplitud medida  $K_{\text{medido}}$  satisface:

$$K_{\text{medido}} \neq K_{\text{WD}} \quad (126)$$

Error típico:  $\Delta K/K \sim 10 - 30\%$ , lo que induce:

$$\Delta q/q \sim \Delta K/K \sim 10 - 30\% \quad (127)$$

#### 13.3.4. Solución: Alas de Línea

Las alas del perfil de línea provienen principalmente del disco interior (alta velocidad):

$$I_{\text{alas}}(\lambda) \approx I_{\text{disco interior}}(\lambda) \quad (128)$$

Midiendo solo las alas (e.g.,  $|v| > 400$  km/s):

- Se minimiza contaminación del bright spot y secundaria
- Se obtiene  $K_{\text{WD}}$  más confiable
- Desventaja: Menor S/N

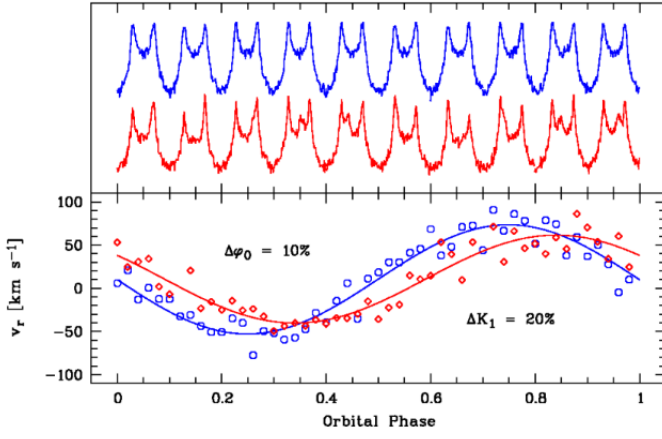


Fig. 27.

## 14. Tomografía Doppler: Teoría Completa

### 14.1. Concepto Fundamental

La tomografía Doppler es una técnica de inversión que transforma perfiles de línea dependientes de fase orbital en imágenes en el espacio de velocidades.

### 14.2. Espacio de Velocidades

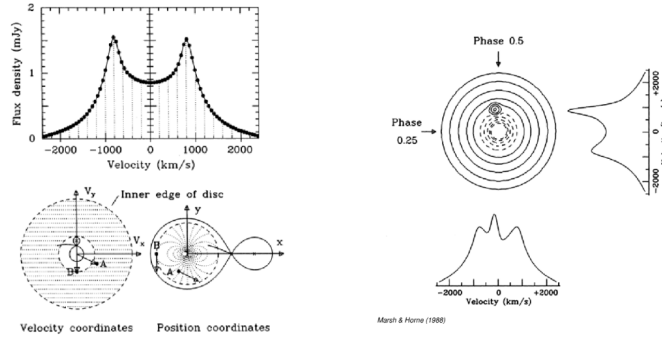


Fig. 28.

Cada punto en el sistema tiene velocidad:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{centro de masa}} + \mathbf{v}_{\text{orbital}} + \mathbf{v}_{\text{local}} \quad (129)$$

En el frame del centro de masa:

$$\mathbf{v}(R, \phi, t) = \mathbf{v}_{\text{sistema}}(\phi) + \mathbf{v}_{\text{disco}}(R) \quad (130)$$

### 14.3. Transformación de Coordenadas

Para un disco kepleriano en el plano orbital:

$$v_x = v_\phi \sin \phi = \sqrt{\frac{GM_1}{R}} \sin \phi \quad (131)$$

$$v_y = v_\phi \cos \phi = \sqrt{\frac{GM_1}{R}} \cos \phi \quad (132)$$

En coordenadas polares del espacio de velocidades:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{GM_1}{R}} \quad (133)$$

$$\theta_v = \arctan(v_x/v_y) = \phi$$

### 14.4. Proyección en Línea de Visión

Para inclinación  $i$ , la velocidad observada es:

$$v_{\text{obs}}(\phi) = v_y \sin i = \sqrt{\frac{GM_1}{R}} \cos \phi \sin i \quad (135)$$

### 14.5. Problema Inverso

**Datos:** Espectros  $S(\lambda, \phi)$  para  $\phi \in [0, 1]$

**Objetivo:** Recuperar emisividad  $\varepsilon(v_x, v_y)$  en espacio de velocidades

**Relación:**

$$S(\lambda, \phi) = \int \int \varepsilon(v_x, v_y) \delta \left[ \lambda - \lambda_0 \left( 1 + \frac{v_y \sin i}{c} \right) \right] dv_x dv_y \quad (136)$$

Esto es una **transformada de Radon** en espacio de velocidades.

### 14.6. Método de Máxima Entropía

#### 14.6.1. Formulación

Discretizamos el espacio de velocidades en pixels  $\{(v_x^{(j)}, v_y^{(j)})\}_{j=1}^N$  con emisividades  $\{\varepsilon_j\}$ .

**Entropía:**

$$S[\varepsilon] = - \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \ln \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_j^{\text{def}}} \right) \quad (137)$$

donde  $\varepsilon_j^{\text{def}}$  es la emisividad "default" (típicamente uniforme o vacía).

**Chi-cuadrado:**

$$\chi^2[\varepsilon] = \sum_{i,k} \frac{[S_{\text{obs}}(\lambda_i, \phi_k) - S_{\text{model}}(\lambda_i, \phi_k)]^2}{\sigma_{ik}^2} \quad (138)$$

**Lagrangiano:**

$$\mathcal{L}[\varepsilon, \alpha] = \alpha S[\varepsilon] - \frac{1}{2} \chi^2[\varepsilon] \quad (139)$$

#### 14.6.2. Maximización

Buscamos  $\varepsilon$  que maximiza  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_j} = 0 \quad \forall j \quad (140)$$

Esto da:

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^{\text{def}} \exp \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \chi^2}{\partial \varepsilon_j} \right) \quad (141)$$

El parámetro  $\alpha$  se ajusta para que  $\chi^2 \approx N_{\text{data}}$  (número de puntos de datos).

## 14.7. Características en Mapas Doppler

### 14.7.1. Anillo del Disco

El disco aparece como anillo en espacio de velocidades:

$$\sqrt{\frac{GM_1}{R_D}} \leq v \leq \sqrt{\frac{GM_1}{R_i}} \quad (142)$$

Radio exterior en espacio de velocidades:

$$v_{\text{disco,min}} = \sqrt{\frac{GM_1}{R_D}} \quad (143)$$

Radio interior:

$$v_{\text{disco,max}} = \sqrt{\frac{GM_1}{R_i}} \quad (144)$$

### 14.7.2. Bright Spot

Aparece en:

$$\mathbf{v}_{\text{spot}} = \mathbf{v}_{\text{disco}}(R_{\text{impact}}) + \Delta \mathbf{v}_{\text{impact}} \quad (145)$$

Típicamente desplazado radialmente hacia afuera del anillo debido al componente de velocidad del flujo.

### 14.7.3. Secundaria

La secundaria aparece en:

$$\mathbf{v}_{\text{secondary}} = K_2(-\sin(2\pi\phi), \cos(2\pi\phi)) \quad (146)$$

Esto traza un círculo de radio  $K_2$  centrado en el origen.

## 14.8. Limitación Fundamental

**¡Advertencia crítica!** Los mapas Doppler son en *espacio de velocidades*, NO en espacio posicional.

La transformación a coordenadas espaciales  $(x, y)$  requiere conocimiento de la ley de velocidad  $v(x, y)$ .

Para disco kepleriano:

$$R = \frac{GM_1}{v^2} \quad (147)$$

pero el ángulo azimutal  $\phi$  en el espacio real no corresponde trivialmente a  $\theta_v$  en espacio de velocidades excepto para estructuras axisimétricas.

## 15. Ondas Espirales y Transporte de Momento Angular

### 15.1. Observaciones en IP Pegasi

Mapas Doppler de IP Peg durante erupción (Harlaftis et al. 1999) revelan:

- Estructuras de onda espiral de dos brazos ( $m = 2$ )
- Máxima amplitud durante erupción
- Desaparición en quiescencia

### 15.2. Mecanismo Físico

#### 15.2.1. Resonancias Tidales

La secundaria ejerce potencial tidal en el disco:

$$\Phi_{\text{tidal}}(R, \phi, t) = -\frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \approx -\frac{GM_2 R^2}{a^3} \cos[2(\phi - \Omega_{\text{orb}} t)] \quad (148)$$

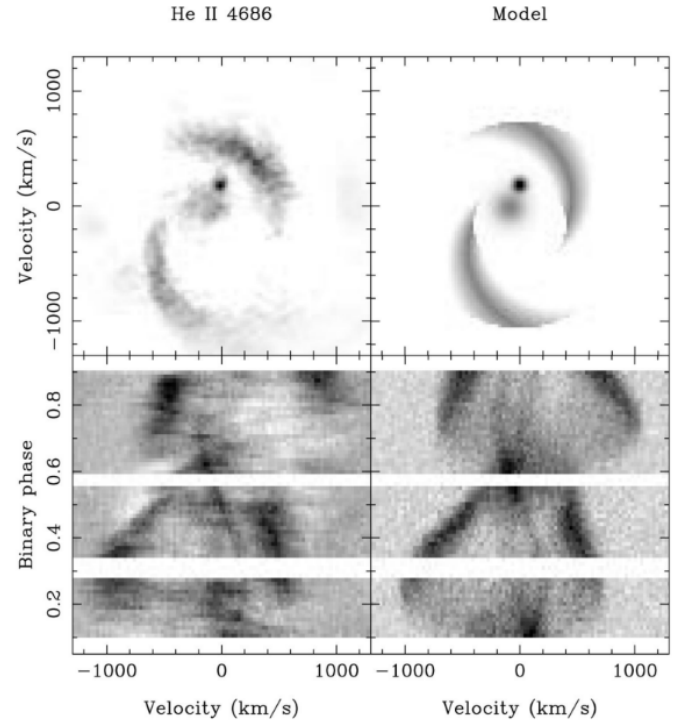


Fig. 29.

### 15.2.2. Resonancia 3:1

Cuando:

$$\Omega_{\text{disco}}(R_{\text{res}}) = \frac{3}{2} \Omega_{\text{orb}} \quad (149)$$

ocurre resonancia 3:1, excitando modos  $m = 2$ .

### 15.2.3. Transporte de Momento Angular

Las ondas espirales transportan momento angular vía:

$$J_{\text{wave}} = \sum_m \text{Re}[\Phi_m^* T_m] \quad (150)$$

donde  $\Phi_m$  es el potencial del modo  $m$  y  $T_m$  el torque.

Eficiencia:

$$\alpha_{\text{spiral}} \sim 0.01 - 0.1 \quad (\text{durante erupción}) \quad (151)$$

### 15.3. Dependencia de Temperatura

Las ondas espirales son más eficientes en discos calientes porque:

1. Mayor  $c_s \Rightarrow$  ondas se propagan más lejos
2. Menor amortiguamiento viscoso (paradójicamente)
3. Disco más extendido  $\Rightarrow$  mayor región resonante

Por tanto: ondas espirales dominan durante erupciones, MRI domina en quiescencia.

## 16. Escalas de Tiempo Características

Resumiendo las diversas escalas temporales:

### 16.1. Tiempo Dinámico

$$t_{\text{dyn}} = \Omega^{-1} = \sqrt{\frac{R^3}{GM_1}} \quad (152)$$

Para  $R = 10^{10}$  cm,  $M_1 = 0.6M_{\odot}$ :

$$t_{\text{dyn}} \sim 100 \text{ s} \sim \text{minutos} \quad (153)$$

### 16.2. Tiempo Térmico

$$t_{\text{th}} = \frac{E_{\text{internal}}}{L} \sim \frac{c_V T \Sigma}{\sigma T_{\text{eff}}^4} \sim \frac{H^2}{\chi} \quad (154)$$

Típicamente:

$$t_{\text{th}} \sim \text{horas} \quad (155)$$

### 16.3. Tiempo Viscoso

$$t_{\text{visc}} = \frac{R^2}{\nu} = \frac{R^2}{\alpha c_s H} \quad (156)$$

Para disco típico:

$$t_{\text{visc}} \sim \text{días a semanas} \quad (157)$$

### 16.4. Jerarquía

$$\boxed{t_{\text{dyn}} \ll t_{\text{th}} \ll t_{\text{visc}}} \quad (158)$$

Esto implica:

- Equilibrio hidrodinámico es casi instantáneo
- Equilibrio térmico se ajusta en horas
- Evolución del disco ocurre en días