LOGARITMOS

Ejemplo previo:

Sabemos que: $2^3 = 8$

Examinemos el problema desde tres perspectivas:

1) $2^3 = x$ **entonces** $x = 8$ **(Potencia)**

2) $x^3 = 8$ **entonces** $x = \sqrt[3]{8} = 2$ **(Raíz)**

3) $2^x = 8$ **entonces** $x = ?$

“x es el exponente al cual hay que elevar 2 para que el resultado sea 8”
¿Cómo podemos escribir eso?

Podríamos poner por ejemplo: $x = \exp_2 8$

Y eso es lo que hacemos, pero en lugar de “exponente” decimos “logaritmo”

$$x = \log_2 8 = 3$$

“El exponente al cual hay que elevar a la base 2 para que el resultado sea 8 es 3”:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_2 8 = 3$$

Palabras claves: **“LOS LOGARITMOS SON EXPONENTES”**

Definición:

Si $a^n = b$ entonces $\log_a b = n$

Condiciones:

"b" tiene que ser un número positivo: $b > 0$

(no se definen logaritmos de números negativos ni cero)

$\log_{12}(-144)$ **no existe**

"a" tiene que ser positivo y distinto de 1: $a > 0,\ a \neq 1$

Sistemas de logaritmos:

Base 10 (no se escribe)	**logaritmos decimales**	$\boxed{\text{log}}$
Base $e \approx 2{,}71828\ldots$	**logaritmos naturales o neperianos**	$\boxed{\text{ln}}$

Propiedades:

1) $\log_a 1 = 0$ **cualquiera sea la base "a" ya que** $a^0 = 1$

2) $\log_a a = 1$ **cualquiera sea la base "a" ya que** $a^1 = a$

3) **Logaritmo del producto:** $\log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$

4) **Logaritmo del cociente:** $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$

5) **Logaritmo de una potencia:**

$$\log_a(b^n) = \log_a(b^n) = n \cdot log_a b$$

Ejemplo:

$$\log_2(4^3) = \log_2(4 \times 4 \times 4) = \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4$$

$$\log_2(4^3) = 3 \times \log_2 4$$

6) **Logaritmo de una raíz:** $\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right) = \frac{\log_a b}{n}$

7) **Propiedad de cambio de base:** $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

Ejemplo:

$$\log_{36} 216 = ???$$

$$\log_{36} 216 = \frac{\log_6 216}{\log_6 36} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 1:

Sabiendo que

$$\log 19 = 1,2788$$

calcular:

$$log\ 190, \quad log\ 1,9, \quad log\ (19)^2$$

Solución:

$$\begin{aligned} \log 190 &= \log(19 \cdot 10) \\ &= \log 19 + \log 10 \\ &= 1,2788 + 1 \\ &= 2,2788 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 1,9 &= \log\left(\frac{19}{10}\right) \\ &= \log 19 - \log 10 \end{aligned}$$

$$= 1,2788 - 1$$

$$= 0,2788$$

$$\log(19)^2 = \log(19 \cdot 19)$$

$$= \log 19 + \log 19$$

$$= 2 \cdot \log 19$$

$$= 2 \cdot 1,2788$$

$$= 2,5576$$

Ejemplo 2:

Calcular: $\log \sqrt[3]{40} + \log \sqrt[3]{25} =$

$$= \log \sqrt[3]{40} \cdot \sqrt[3]{25}$$

$$= \log \sqrt[3]{40 \cdot 25}$$

$$= \log \sqrt[3]{1000}$$

$$= \log 10$$

$$= 1$$

Ejemplo 3:

Calcular: $(\log_2 16 + \log_7 49) \cdot (\log_5 125 - \log_3 \sqrt[5]{9}) =$

$$= (4 + 2) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{13}{5}$$

$$= \frac{78}{5}$$

Ejemplo 3:

Desarrollar: $\boldsymbol{log(p^2 - q^2) =}$

$$= \boldsymbol{log[(p+q)(p-q)]}$$

$$= \boldsymbol{log(p+q) + log(p-q)}$$

Ecuación logarítmica:

$$\log_2(x+7) - \log_2(x+1) = 4$$

Restricciones: $x + 7 > 0 \quad x > -7$

$x + 1 > 0 \quad x > -1$

Resolución:

$$\log_2\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = 4$$

$$2^4 = \frac{x+7}{x+1}$$

$$16(x+1) = x + 7$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

Es solución ya que $-\frac{3}{5} > -1$ **y** $-\frac{3}{5} > -7$

SEGUNDA PARTE: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones matemáticas donde aparecen números y letras.

<u>Monomios</u>: (las más sencillas) multiplicación (producto) de números y letras)

Ejemplo:

$$\mathbf{2 \times 3 \times a \times b \times b \times b \times c = 6ab^3c}$$

1) Observen que no ponemos más el signo de $\times$

2) 6 es el coeficiente, $\boldsymbol{ab^3c}$ es la parte literal.

3) a, b, c variables

4) Ese es un monomio de grado 5 = 1 + 3 + 1 (suma de los exponentes de las variables)

<u>Multiplicación de monomios</u>:

$$\mathbf{(6ab^3c) \times (3a^2b^2) = 18a^3b^5c}$$

Siempre puedo multiplicar monomios

<u>Suma de monomios</u>: Sólo se pueden sumar si son semejantes (misma parte literal)

$$\mathbf{6ab^3c + 5ab^3c = 11ab^3c}$$

Se suman como si fueran frutillas.

¿Y si no son semejantes? Me queda un <u>polinomio</u>.

<u>Polinomio</u>: suma o resta de monomios cualesquiera.

Ejemplo:

$$P(x,y,z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2$$

Los términos semejantes se reducen.

$$P(x,y,z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2$$

$$P(x,y,z) = 6xy - xz^2 - 5x$$

<u>Polinomios en una variable x:</u>

Sólo tienen una letra, en este caso "x".

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - x^3 + 5x - 8 + 7x - 9 - 2x^2$$

Reducimos términos semejantes:

$$p(x) = 2x^2 + 12x - 17$$

Una vez reducido puede determinar el…

<u>Grado del polinomio</u>: es el grado del término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de 0.

$p(x)$ **es de grado 2, o de segundo grado**

Algunas fórmulas:

Cuadrado de una suma:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de una resta:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fórmula de la suma por la diferencia:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Cubo de una suma:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

(Número de términos = exponente + 1)

Colocamos potencias decrecientes de a (en el último término sería a^0):

$$(a+b)^3 = a^3 \ldots + a^2 \ldots + a \ldots + \ \ldots$$

Colocamos potencias crecientes de b (en el primer término sería b^0):

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + \ b^3$$

Finalmente colocamos coeficientes 1 3 3 1 que luego veremos de donde salen.

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \ 1b^3$$

Resultado final:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo de una resta:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(signos alternados)

Factorización de sumas y restas de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$

(iguales) **(cambia)** **(+)**

Factorización de polinomios de 2º. Grado

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

suma producto

Ejemplo 1:

$$x^2 + 7x + 6 = (x+6)\cdot(x+1)$$

Busco dos números que sumen 7 y multiplicados den 6.

Ejemplo 2:

$$x^2 + x - 12 = (x-3)\cdot(x+4)$$

Busco dos números que sumen 1 y multiplicados den -12