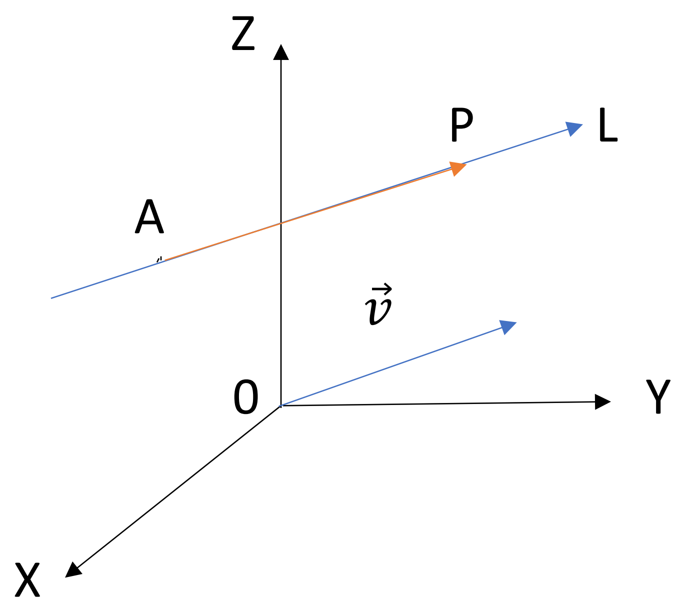
Ecuación vectorial de la recta

Por determinar la ecuación vectorial de la recta L



Sean $P = (x, y, z)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (a, b, c)$ y L una recta que pasa por A y con la misma dirección del vector no nulo $\vec{v}$. Para que el punto P de $\mathbb{R}^3$ pertenezca a la recta L, es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{v}$ sean paralelos, esto es:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP} = t\vec{v}}$$

ecuación vectorial de la recta L

O sea

$$P - A = t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad P = A + t\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(x_1, y_1, z_1\right) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$$

$$L \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$

Que representan las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ y que tiene como dirección la misma dirección dada por el vector $\vec{v} = (a, b, c)$.

De las **ecuaciones paramétricas** obtenemos

$$L \Leftrightarrow \frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{z - z_1}}{\mathbf{c}}$$

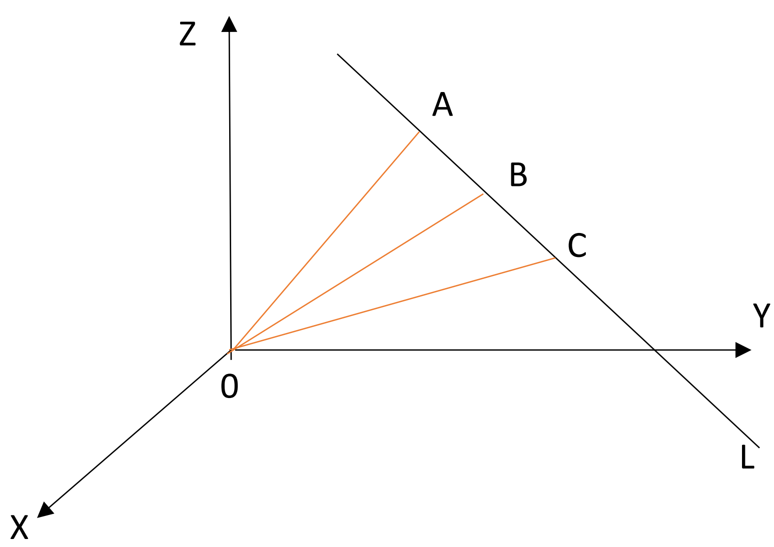
Que representan las ecuaciones simétricas de la recta L que pasa por el punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ y que tiene dirección la misma dirección dada por el vector $\vec{v} = (a, b, c)$.

En general si la recta es determinada por los puntos

$$\boldsymbol{A = (x_1, y_1, z_1)} \text{ y } \boldsymbol{B = (x_2, y_2, z_2)}$$

su ecuación simétrica es:

$$\frac{\boldsymbol{x - x_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{\boldsymbol{z - z_1}}{\boldsymbol{z_2 - z_1}} \cdots (\mathbf{1})$$



Pues $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_1 - z_2)$ es un vector director de L con: $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$, $z_1 - z_2 \neq 0$, donde $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{v}$ y además se cumple que $C = (x, y, z) \in L$ si y sólo si se cumple (1).

Ejemplos

1.- Las ecuaciones paramétrica de la recta L que pasa por el punto $A = (3,-1,2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-3,-2,1)$ son:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Para obtener un punto de esta recta, basta atribuir a t un valor particular.
Por ejemplo, para $t = 3$,

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -7 \\ z = 5 \end{cases}$$

Esto es,

$$(-6,-7,5) \in L \ .$$

Observe que el punto $(0,3,4) \notin L$ pues

$$\begin{cases} 0 = 3 - 3t \\ 3 = -1 - 2t \\ 4 = 2 + t \end{cases}$$

No son satisfecha para el mismo valor de t $(\text{ejemplo } t = 1)$

2.- La recta L, determinado por los puntos $A = (1,-2,-3)$ y $B = (3,1,-4)$ tiene la dirección del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,3,-1)$ y las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Lo anterior representa la recta L , que pasa por A, con dirección el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Análogamente las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -4 - t \end{cases}$$

Representa la misma recta L, que pasa por el punto B, con dirección el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

3.- Las ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $A = (3,0,-5)$ y tiene dirección del vector $\vec{v} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}$ es:

$$L: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

4.- Las ecuación simétricas de la recta determinada por los puntos $A = (2,1,-3)$ y $B = (4,0,-2)$ son:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z+3}{-2+3}$$

Esto es

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por el punto A y tiene la dirección del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,1)$.

O bien

$$\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+2}{-3+2}$$

Esto es

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

Lo que equivale a

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por el punto B y tiene la dirección del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Observación

1.- Condición para que tres puntos $A_1 = (x_1, y_1, z_1), A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$ estén en la misma recta es que los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_2A_3}$ sean colineales, esto es

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \mathrm{m}\,\overrightarrow{A_2A_3} \ \text{ para algún m} \in \mathbb{R}$$

O bien

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Ejemplo

Los puntos $A_1 = (5,2,-6), A_2 = (-1,-4,-3)$ y $A_3 = (7,4,-7)$ están en línea recta. De hecho, sustituyendo las coordenadas de los puntos en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{-1-5}{7-5} = \frac{-4-2}{4-2} = \frac{-3+6}{-7+6}$$

De donde

$$\frac{-6}{2} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{-1}$$

2.- Si $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ es la dirección de la recta L_1 y $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ es la dirección de la recta L_2, luego

$$L_1 \| \, L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = m \cdot \vec{v}_2 \ \ para\ algún\ real\ m$$

Si y sólo si

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

La recta L_1que pasa por el punto $A_1 = (-3,4,2)$ y $B_1 = (5,-2,4)$ y la recta L_2 que pasa por el punto $A_2 = (-1,2,-3)$ y $B_2 = (-5,5,-4)$ son paralelas.

De hecho, la dirección de L_1 es dado por el vector $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = (8,-6,2)$. La dirección de L_2 es dado por el vector $\vec{v}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = (-4,3,-1)$.

Como

$$\frac{8}{-4} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \quad \therefore \quad L_1 \| L_2$$

3.- Condición de perpendicularidad de las rectas

Si L_1 tiene dirección $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y L_2 tiene dirección $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ luego

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

o

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Ejemplos

Las rectas L_1 tiene dirección $\vec{v}_1 = (-2,3,-2)$ y L_2 tiene dirección $\vec{v}_2 = (-1,2,4)$ son perpendiculares pues

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (-2)(-1) + (3)(2) + (-2)(4) = 2 + 6 - 8 = 0$$

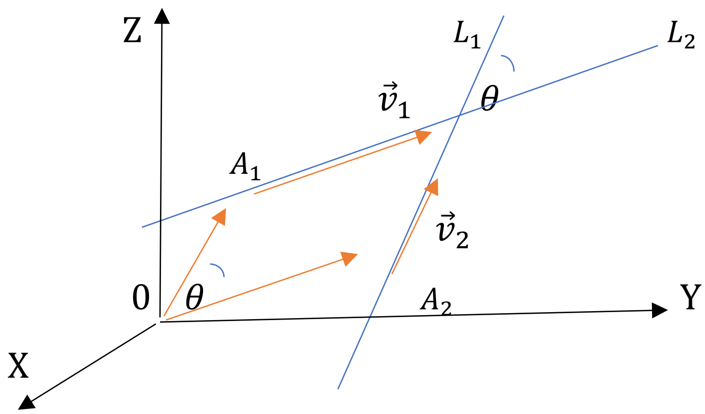
4.- Ángulo entre dos rectas:

Sean dos rectas, con vectores directores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, el ángulo formado por estas dos rectas viene dado por:

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad con\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$$

O bien

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$



Ejemplos

Calcular el ángulo entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Y

$$L_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solución

Los vectores que definen las direcciones de las rectas L_1 y L_2 son respectivamente

$\overrightarrow{v_1} = (1,1,-2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (-2,1,1)$, luego

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{|(1,1,-2) \cdot (-2,1,1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^0$$

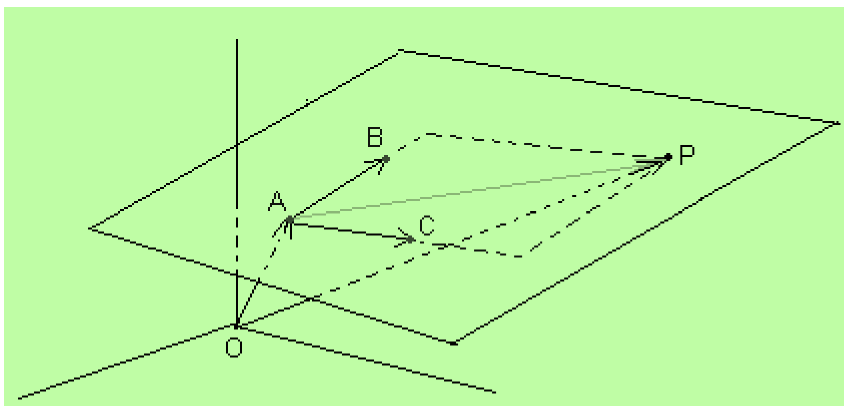
El plano en R³. Ecuación vectorial.

Dados tres puntos no alineados:

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1) \text{ y } C(x_2, y_2, z_2)$$

forman un plano, y cualquier punto P(x, y, z) de este plano podrá ser expresado en la forma:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



lo cual representa la ecuación vectorial del plano.

Ecuaciones paramétricas del plano.

Si expresamos en coordenadas tenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_1 - z_0) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Ecuación cartesiana del plano. Según hemos visto en el producto mixto de vectores, éste es nulo para el caso de tres vectores coplanares tales como $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AP}$ (véase figura superior), por tanto, se tiene:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

una ecuación que se reduce a la simple expresión:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$sea\ B \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$

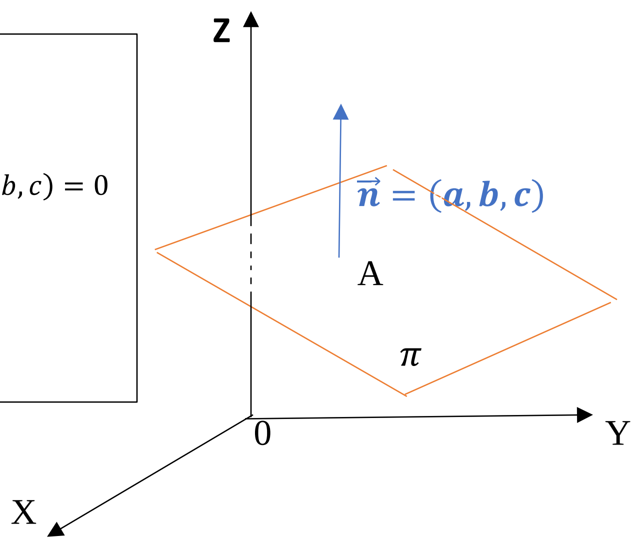
SI $B = (x, y, z)$ entonces

$(x - x_1, y - y_1, z - z_1)(a, b, c) = 0$

Resolviendo se obtiene

$ax + by + cz + d = 0$

$(ec\ plano)$



La particularidad de $\vec{n}$ es que los tres coeficientes: a, b, c son las componentes del llamado "vector normal" del plano, tal como se aprecia en la figura.

Un vector normal al plano es un vector "perpendicular" a cualquier recta del plano. Así, un plano viene determinado por un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ y un punto A.

Por ejemplo: El plano cuyo vector normal es $\vec{\boldsymbol{n}} = (1, 3, -1)$ y que pasa por el punto $A = (2,0,5)$ es:

$$L: x + (3)y + (-1)z + d = 0$$

$$x + 3y - z + d = 0$$

y si ahora sustituimos el punto $A = (2,0,5)$:

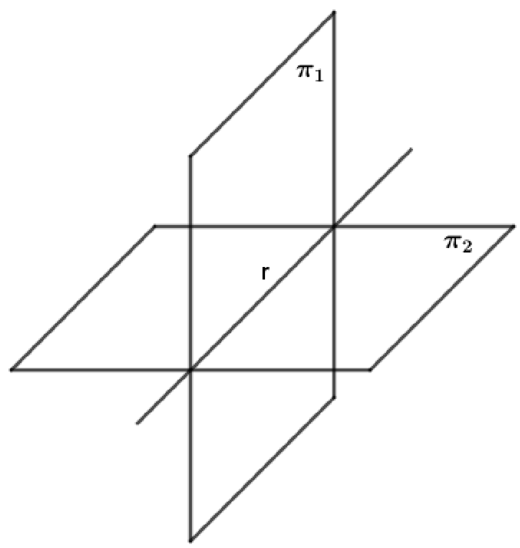
$$2 + 3(0) - 5 + d = 0$$

de donde se deduce que $d = -3$. Por lo tanto, ese plano en coordenadas cartesianas es:

$$x + 3y - z - 3 = 0$$

Ecuación de la recta como intersección de dos planos

Hasta ahora hemos visto la ecuación de una recta en coordenadas paramétricas y en cartesianas. Ahora vamos a ver también que dados dos planos que se interceptan definen una recta (tal como se aprecia en la figura de la derecha).



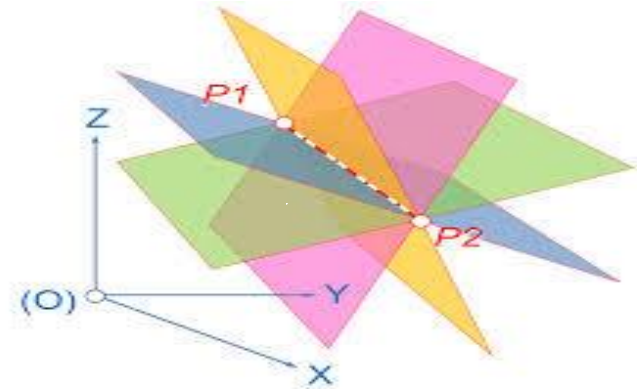
Entonces una pareja de dos planos define una recta r:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Haz de planos

Dada una pareja de planos que se interceptan, hay otros infinitos planos que también se interceptan en esta recta, a todos ellos se les denomina "haz de planos", su ecuación general es:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$



Ecuación del plano que pasa por tres puntos

Dados tres puntos no alineados en el espacio,

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1) \text{ y } C(x_2, y_2, z_2)$$

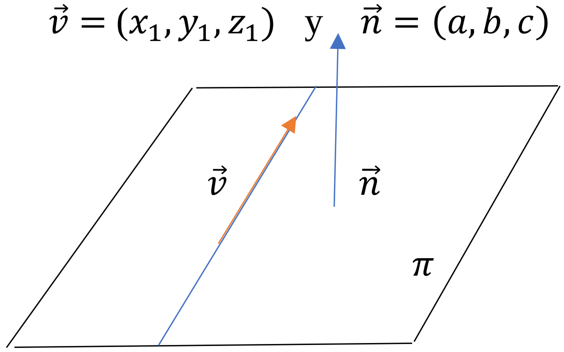
estos definen un plano, cuya ecuación viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Posición entre recta y plano

Sean

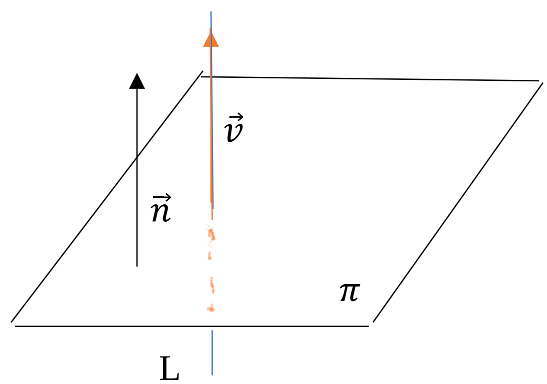
$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{y} \quad \vec{n} = (a, b, c)$$



1.- Para que una recta, con vector director $\vec{v}$, y un plano con vector normal $\vec{n}$ sean paralelos, se debe cumplir que estos dos vectores sean perpendiculares: $\vec{n} \perp \vec{v}$, es decir, se debe cumplir que: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

2.- Para que una recta, con vector director $\vec{v}$, y un plano con vector normal $\vec{n}$, sean perpendiculares, se debe cumplir que estos dos vectores sean paralelos. En este caso, la condición que se deberá verificar es que ambos vectores sean proporcionales, es decir:

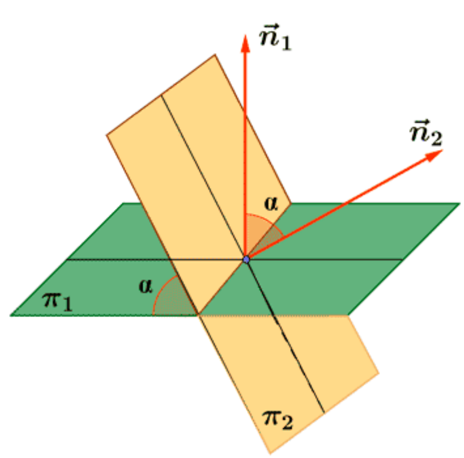
$$\frac{a}{x_1} = \frac{b}{y_1} = \frac{c}{z_1}$$



Ángulo entre dos planos:

Sean dos planos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



El ángulo formado por los dos planos coincide con el que forman su vectores normales respectivos.

Por lo tanto, se tiene:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Ejercicios

1) Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de la recta dada por la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ 5x - 3y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Solución

Esta pareja de dos ecuaciones puede expresarse como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tomando z como parámetro:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 - 2z \\ 5x - 3y = -8 + 7z \end{cases}$$

Resolvemos el sistema respecto x, y:

$$x = 17 - 13z\,, y = 31 - 24z$$

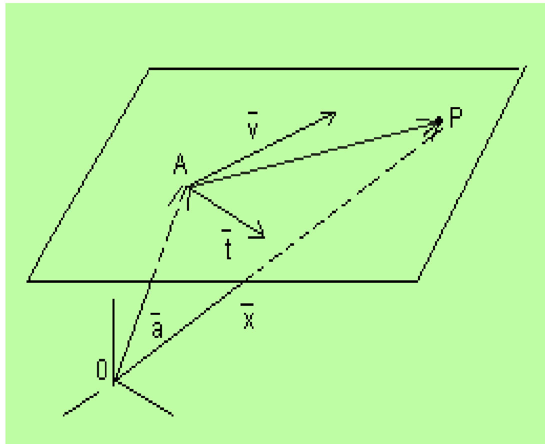
si ahora hacemos $z = \lambda$, tenemos las ecuaciones paramétricas pedidas:

$$x = 17 - 13\lambda$$

$$y = 31 - 24\lambda$$

$$z = \lambda$$

2) Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana del plano que pasa por el punto $A(2,5,3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}$(1,3,2) y $\vec{t}$(4,-2,2).



Solución

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$ los podemos trasladar al punto A, tal como se ve en la figura. Ahora, estos dos vectores definen un plano.

La ecuación vectorial de este plano viene dada por:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{t}$$

es decir,

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{t}$$

por tanto, la ecuación vectorial del plano es:

$$(x, y, z) = (2,5,3) + \lambda(1,3,2) + \mu(4,-2,2)$$

las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2 + \lambda + 4\mu$$
$$y = 5 + 3\lambda - 2\mu$$
$$z = 3 + 2\lambda + 2\mu$$

Si de aquí, por ejemplo, tomamos λ =1, μ=0 hallamos un cierto punto $B(3,8,5)$ del plano, y después tomamos λ =0, μ=1 hallamos otro punto $C(6,3,5)$ del plano; que junto al punto A tenemos tres puntos, por tanto, tenemos que la ecuación del plano que pasa por estos tres puntos A, B, C es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir,

$$5x + 3y - 7z - 4 = 0$$

que es la ecuación cartesiana del plano.

3)Hallar la ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(3,2,4)$ y es paralelo al plano:

$$3x + 2y - 5z + 3 = 0$$

Solución

El plano pedido es paralelo al plano 3*x* + 2*y* - 5*z* + 3 = 0, lo cual significa que su vector normal debe ser:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = (3, 2, -5)$$

y, por lo tanto, el plano pedido debe tener la forma:

$$3x + 2y - 5z + d = 0$$

Sólo nos queda hallar el valor de "d". Y como el plano debe pasar por el punto $A = (3,2,4)$, sustituimos estos valores en el plano, y obtenemos:

$$3(3) + 2(2) - 5(4) + d = 0$$

$$d = 7$$

Por tanto, el plano pedido es: $3x + 2y - 5z + 7 = 0$, en coordenadas cartesianas.

Ahora hacemos

$$x = \lambda,\ y = \mu,$$

en la ecuación de arriba, para llegar a:

$$3\,\lambda + \ 2\,\mu\ -\ 5z\ +\ 7\ =\ 0,$$

de aquí:

$$z = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\lambda + \frac{2}{5}\mu$$

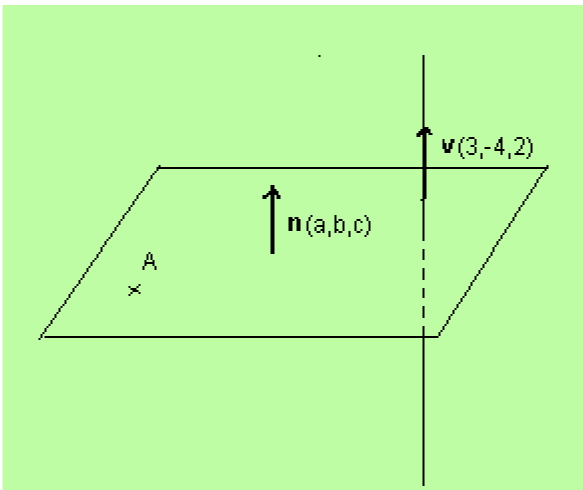
y entonces las ecuaciones paramétricas del plano son los siguientes:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\lambda + \frac{2}{5}\mu \end{cases}$$

4)Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $A = (5, 1, -3)$ y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+7}{2}$$

Solución



Sea el plano, en forma general:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\ (1):$$

como este plano pasa por el punto $A = (5,1,-3)$, ha de cumplir:

$$5\,a + b - 3\,c + d = 0\ \ (2):$$

por otra parte $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ son vectores paralelos, o sea:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{2}\ \ \Rightarrow b = -\frac{4}{3}a\,, c = \frac{2}{3}a$$

valores que podemos sustituir en (2):

$$5a - \frac{4}{3}a - 3\frac{2}{3}a + d = 0\ \ \Rightarrow d = -\frac{5}{3}a$$

finalmente, estos valores de a, b, c y d los sustituimos en (1):

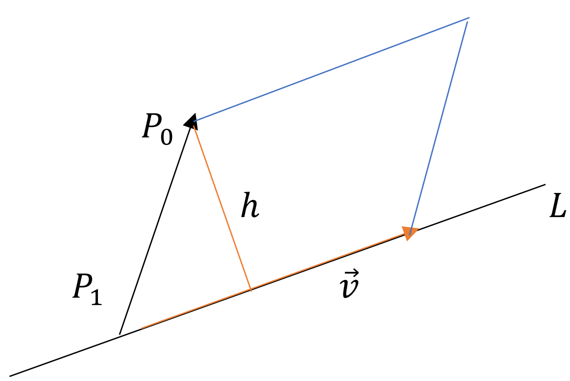
$$ax - \frac{4}{3}ay + \frac{2}{3}az - \frac{5}{3}a = 0$$

simplificando nos da el plano:

$$3\,x - 4\,y + 2\,z - 5 = 0$$

Distancia de un punto a una recta

Sea L una recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y que tiene como dirección el vector $\vec{v} = (a, b, c)$ y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera en el espacio.



Los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{P_1P_0}$ determinan un paralelogramo cuya altura h corresponde a $d(P_0, L)$ que es lo que se desea determinar.

$$A_{\#} = \left\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right\|$$

Luego

$$\|\vec{v}\|h = \left\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right\|$$

Entonces

$$h = \frac{\left\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right\|}{\|\vec{v}\|} = d(P_0, L)$$

Ejemplo

Calcular la distancia del punto $P_0 = (2,0,7)$ a la recta

$$L: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Solución

Sean $\vec{v} = (2,2,1)$ y sea $P_0 = (0,2,-3) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (2,-2,10)$$

$$d(P_0, L) = \frac{\|(2,2,1)\text{x}(2,-2,10)\|}{\|(2,2,1)\|}$$

Ahora

$$(2,2,1)\text{x}(2,-2,10) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

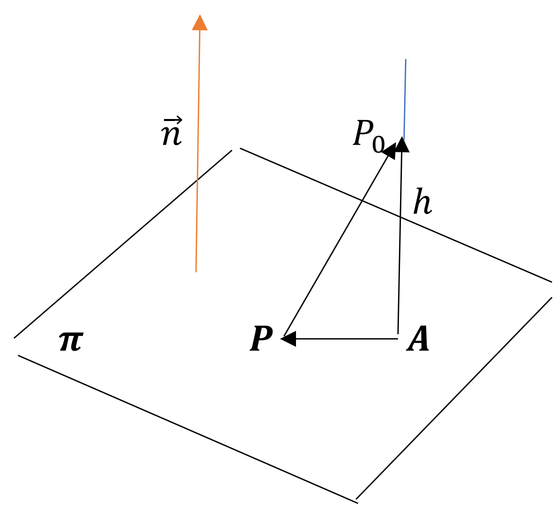
$$= (22,-18,-8)$$

$$d(P_0, L) = \frac{\|(2,2,1)\text{x}(2,-2,10)\|}{\|(2,2,1)\|}$$

$$= \frac{\|(22,-18,-8)\|}{\|(2,2,1)\|}$$

$$= \frac{\sqrt{872}}{3}$$

Distancia de un punto al plano



Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$, $P = (x, y, z)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

queremos determinar $h = d(P_0, \pi)$

Sea $A \in \pi$ tal que $d(A, P_0) = h$, luego

$$\overrightarrow{AP_0} = proy_{\vec{n}}\overrightarrow{PP_0} = \left(\frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right) \cdot \vec{n}$$

$$h = \left\|\overrightarrow{AP_0}\right\| = \left|\frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right| \|\vec{n}\|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| = \frac{\left|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z_1)(a, b, c)|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Por lo tanto

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ejemplo

Calcular la distancia del punto $P = (1,2,3)$ al plano $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$.

Solución

$$d(P_0, \pi) = \frac{|1 - 4 + 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$