Clase nº34

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

24 de Noviembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular el límite de algunas sucesiones.
- Comprender el concepto de serie numérica.
- Conocer y utilizar propiedades de una serie.

Sucesiones

Definición 7

Si una sucesión no converge, entonces diremos que **diverge.** Es decir, una sucesión $\{a_n\}$ diverge si:
Dado $L \in \mathbb{R}$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n existe otro número natural m, $m \geq n$ de modo que,

$$|a_m - L| \geq \epsilon.$$

Observación

La definición anterior nos dice que ningún número real L puede ser límite de la sucesión.
Que la sucesión sea divergente incluye los límites $\pm\infty$ y el caso de las sucesiones que oscilan.

Sucesiones

Teorema 8

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L, entonces el límite es único.

Teorema 9

Toda sucesión convergente es acotada.

Sucesiones

Teorema 10

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n+\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n}$; cuando $b_n\neq 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\neq 0$.

Sucesiones

Ejemplo 14

Sea $\{a_n\}, \{b_n\}$ tales que $a_n = n, b_n = n$, entonces en este caso no puede usarse la fórmula del teorema, pues $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty + (-\infty)$ pero $a_n - b_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Sucesiones

Ejemplo 15

Encontrar el

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Sucesiones

Ejemplo 16

Encontrar el

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+3n^3-4}{n^5+2}.$$

Sucesiones

Ejemplo 17

Sea $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3}$, encontrar

$$\lim_{n \to +\infty} a_n.$$

Corolario 11

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Sucesiones

Teorema 12

Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\{|a_n|\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\lim_{n\to+\infty} a_n|$.

Teorema 13

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, (o bien $-\infty$), entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ejemplo 18

El recíproco del teorema 13 es falso. Veamos esto, sea $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ converge a 0, pero $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ no diverge a $+\infty$ y tampoco a $-\infty$.

Sucesiones

Ejemplo 19

Sea $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Mostrar que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Sucesiones

Teorema 14

1. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a_n \geq 0$ para todo n. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$.
2. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones convergentes tales que $a_n \leq b_n$, para todo n. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Sucesiones

Teorema 15

Si $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, y si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, entonces la sucesión $\{c_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Sucesiones

Ejemplo 20

Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, donde c_n está dada por

$$c_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + ... + \frac{n+n}{n^2+n}.$$

Sucesiones

Corolario 16

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Series numéricas

Definición 17

Una **serie de término general** $a_n, \; a_n \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{Z}^+$ se denota

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

y se define:

1. La sucesión de **sumas parciales** de la serie como aquella cuyo término general es

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Series numéricas

Definición 17

2. La **suma de la serie** como el límite de la sucesión de sumas parciales, es decir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S.$$

Si tal límite existe, diremos que la serie **converge** hacia S, si el límite es $\pm\infty$ diremos que **diverge** a $\pm\infty$. Si las sumas parciales oscilan, diremos que la suma de la serie oscila.

Series numéricas

Ejemplo 21

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^i + ...$$

Series numéricas

Propiedad 18

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ejemplo 22

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^i + \ldots$$

Series numéricas

Propiedad 19

Si $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo 23

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = 2^1 + 2^2 + ... + 2^i + ...$$

Series numéricas

Propiedades 20

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ejemplo 24

Tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ son convergentes. Calcular

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Series numéricas

Propiedad 21

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ es divergente.

Ejemplo 25

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -20 \cdot 2^n$ es divergente.

Series numéricas

Propiedad 22

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

es divergente.

Ejemplo 26

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ diverge y $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ es convergente. Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n + \frac{1}{4^n}\right)$ es divergente.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.