Certamen 1

Cálculo III - FOGEC
FC - UV
11 - 05 - 2022

1.- (4 + 6 + 5 = 15 Puntos) Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge y \leq x \wedge y \geq x - 1\}$$

i) Representa gráficamente el conjunto A

ii) Determinar el $int(A)$ y la $Fr(A)$

iii) ¿Es A un conjunto compacto? (argumente su respuesta)

2.- (15 Puntos) Dada la función f definida por

$$f(x, y) = \frac{ln(3 - x^2 + y)}{\sqrt{1 - x^2 - y}}$$

a) Represente gráficamente el dominio de f

b) ¿Es el dominio de f un conjunto abierto y acotado? . Argumente su respuesta.

3.- (15 Puntos) Determine:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(xy\ (1 - ctg^2 xy)\ ln(1 + sen\ xy)\right)$$

4.- (15 Puntos) Determinar el valor de k para que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 + y^2)\ ln(1 + xy)}{sen\left(xy\ (x^2 + y^2)\right)} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

sea continua en $(0,0)$.

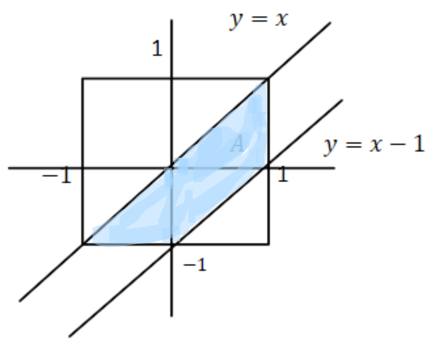
Observación

Dispone de 90 minutos.

1.- i)

$$|x| \leq 1 \ \ ssi \ -1 \leq x \leq 1$$

$$|y| = 1 \ \ ssi -1 \leq y \leq 1$$



ii)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (-1 < x < 1) \wedge (-1 < y < 1) \wedge y < x \wedge y > x - 1\}$$

$$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x \wedge (-1 \leq x \leq 1)\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x - 1 \wedge (0 \leq x \leq 1)\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -1 \wedge (-1 \leq x \leq 0)\}$$

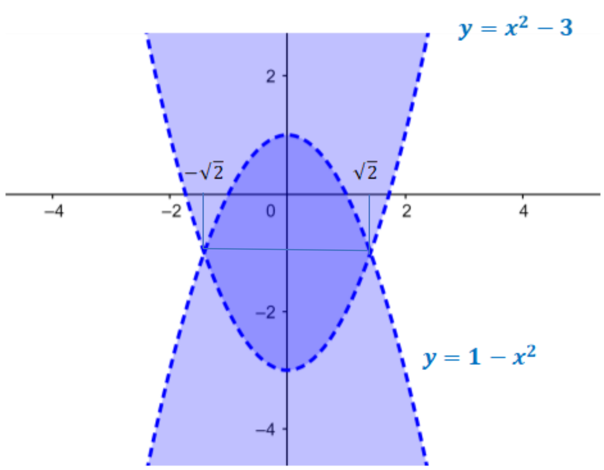
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 1 \wedge (0 \leq y \leq 1)\}$$

iii) $$A \ es \ cerrado \ pues \ A = A'$$

$$A \ es \ acotado \ pues \ A \subseteq B\big((0,0), r\big) \ con \ r \geq \sqrt{2}$$

Por tanto, de lo anterior se deduce que A es compacto .

2.-



Sea $D = Dom\ f$, entonces

$$D = int(D)\ \therefore D\ es\ abierto$$

D es acotado pues $D \subseteq B\big((0,0), r\big)$, $\forall r \geq 3$

Es decir, $\|(x, y)\| \leq 3$; $\forall (x, y) \in D$

3.-

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big(xy\ (1 - ctg^2 xy)\ ln(1 + sen\ xy)\big)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(xy\ \left(1 - \frac{cos^2 xy}{sen^2 xy}\right)\ ln(1 + sen\ xy)\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(xy\ \left(\frac{sen^2 xy - cos^2 xy}{sen^2 xy}\right)\ ln(1 + sen\ xy)\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (sen^2 xy - cos^2 xy)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{sen\ xy}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(1 + sen\ xy)}{sen\ xy}$$

$$= (0 - 1)(1)(1) = -1$$

Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(1 + sen\ xy)}{sen\ xy} = \lim_{u\to 0} \frac{ln(1 + u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{1 + u} = 1$$

$$con\ u = sen\ xy\ de\ donde\ (x, y) \longrightarrow (0,0)\ \Rightarrow u \longrightarrow 0$$

4.-

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)\ ln(1 + xy)}{sen\big(xy\ (x^2 + y^2)\big)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\ (x^2 + y^2)\ ln(1 + xy)}{xy\ sen\big(xy\ (x^2 + y^2)\big)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\ (x^2 + y^2)}{xy\ sen\big(xy\ (x^2 + y^2)\big)} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(1 + xy)}{xy}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{sen\ u} \cdot \lim_{v\to 0} \frac{ln(1 + v)}{v} = (1) \cdot \lim_{v\to 0} \frac{1}{1 + v} = (1) \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Por tanto, f es continua si $k = 1$.