Tarea 3
Identidades y Ecuaciones Trigonométricas

Instrucciones

- Esta tarea es individual y de carácter formativo.
- Debe prepararse un único documento pdf con imágenes con los desarrollos escritos a mano.
- El documento debe iniciar con el nombre y apellido del estudiante.
- Enviar el documento pdf al correo algebra@emttec.cl
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV y solo se corregirá el primer correo recibido.
- El plazo de entrega máximo es el martes 4 de mayo a las 23:59:59.
- Los puntajes se encuentran indicados, hay 1,0 puntos base si se respeten estas instrucciones.

1) Demostrar la siguiente identidad trigonométrica: **(2,0 puntos)**

$$\frac{\cos(2x)}{1-\operatorname{sen}(2x)} = \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$$

2) Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación trigonométrica: **(2,0 puntos)**

$$\tan(x) + \tan(2x) = 0$$

3) Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación trigonométrica: **(2,0 puntos)**

$$\cos^4(4x) - \operatorname{sen}^4(4x) = \frac{\sqrt{4}}{4}$$

Solución

1) Procedemos a demostrar de izquierda a derecha, partiendo con la aplicación de identidades para el ángulo doble:

$$\frac{\cos(2x)}{1-\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{1-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$= \frac{\left(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right)\cdot\left(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\right)}{\left(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right)^2}$$

$$= \frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$$

Q.E.D.

2) Por medio de la identidad de tangente del ángulo doble podemos reescribir:

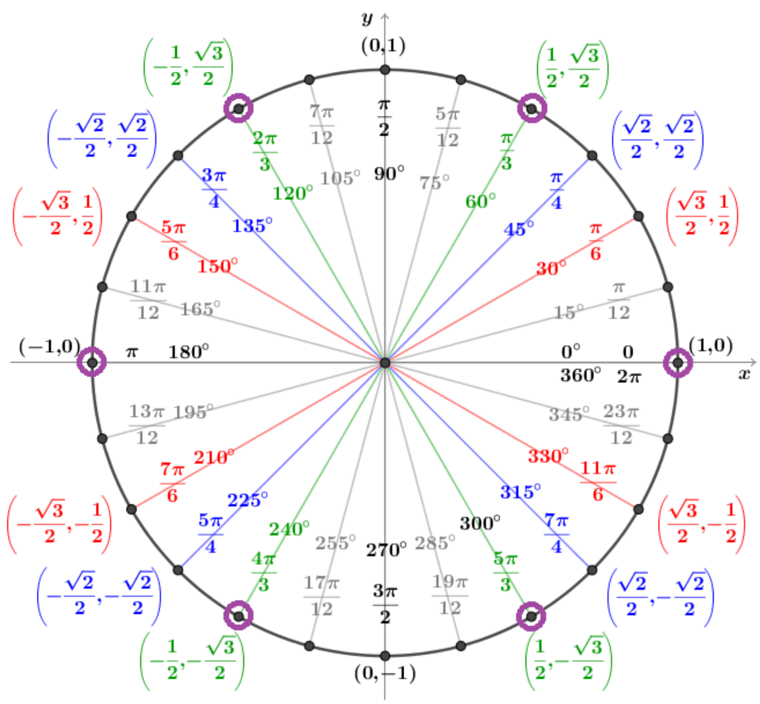
$$\tan(x) + \tan(2x) = 0$$

$$\tan(x) + \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = 0$$

$$\tan(x) \cdot \left(1 + \frac{2}{1-\tan^2(x)}\right) = 0$$

$$\tan(x) \cdot \left(\frac{3-\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x) = 0 \ \vee \ \left(3-\tan^2(x)\right) = 0$$

Esto nos permite analizar los siguientes dos casos:



<u>Caso 1</u>. $\tan(x) = 0$

Observando la circunferencia unitaria, tenemos que, en la primera vuelta el seno y por lo tanto la tangente son 0 para los ángulos 0 y $180°$.

<u>Caso 2</u>. $\tan^2(x) = 3 \Leftrightarrow \tan(x) = \pm\sqrt{3}$

Observando la circunferencia unitaria, tenemos que para 60° la tangente toma valor $\sqrt{3}$, lo que se mantiene para la familia de "ángulos verdes" dado que el signo es irrelevante:

$$60°, 120°, 240° \text{ y } 300°.$$

En resumen, en la primera vuelta las soluciones tienen una regularidad de $60°$ $(\pi/3)$:

$$0°, 60°, 120°, 180°, 240° \text{ y } 300°.$$

Parametrizándolas para considerar todos los rodeos y en radianes, obtenemos de forma compacta:

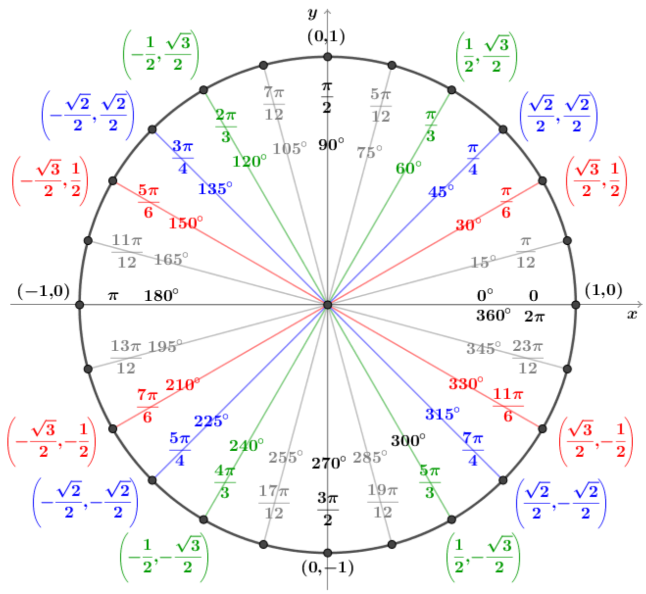
$$\boldsymbol{x = \frac{k\pi}{3}} \quad \textbf{con} \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$

3) Reconocemos una suma por su diferencia y aplicamos la primera identidad pitagórica y la de coseno del ángulo doble para simplificar:

$$\cos^4(4x) - \operatorname{sen}^4(4x) = \frac{\sqrt{4}}{4}$$

$$\underbrace{[\cos^2(4x) + \operatorname{sen}^2(4x)]}_{1} \cdot \underbrace{[\cos^2(4x) - \operatorname{sen}^2(4x)]}_{\cos(8x)} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(8x) = \frac{1}{2}$$

Observando la circunferencia unitaria, tenemos que el coseno toma valor $\frac{1}{2}$ para $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, así considerando todos los rodeos:



$$\begin{cases} 8x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ 8x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Despejando, la solución es entonces:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4}}, \\ \boldsymbol{x_2 = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4}} \ \textbf{ con } \ \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$