Análisis Exhaustivo: Capítulo 3
Newtonian Gravity

Mauro Jélvez

Introducción Conceptual

El capítulo explora cómo la constante k en la ecuación de Friedmann determina la geometría del universo. El autor enfatiza que esta geometría afecta:

- La suma de ángulos en triángulos cósmicos
- El comportamiento de paralelas
- El volumen total del universo (finito o infinito)

1. Geometrías Posibles del Universo

1.1. Clasificación por Curvatura

La ecuación de Friedmann contiene el parámetro k que clasifica las geometrías:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \tag{1}$$

1.2. Interpretación Geométrica de k

Valor	Geometría	Suma Ángulos	Volumen
$k > 0$	Esférica	$> 180°$	Finito
$k = 0$	Plana	$= 180°$	Infinito
$k < 0$	Hiperbólica	$< 180°$	Infinito

2. Geometría Plana ($k = 0$)

2.1. Propiedades Clave

- Cumple los postulados de Euclides
- Métrica: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Volumen infinito

2.2. Demostración de = 180°

Para un triángulo en el plano:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \tag{2}$$

Cuando kß0, se reduce al teorema del coseno euclidiano:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \tag{3}$$

3. Geometría Esférica ($k > 0$)

3.1. Métrica en 3-Esfera

Coordenadas $(\chi, ,)$:

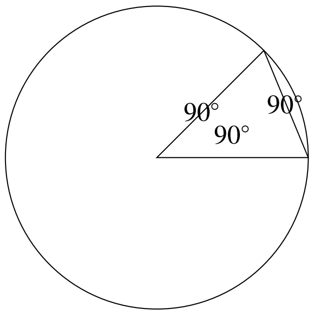
$$ds^2 = d^2 + \sin^2(d^2 + \sin^2 d^2) \tag{4}$$

3.2. Volumen Finito

Integrando sobre la 3-esfera:

$$V = 2^2 R_c^3 \quad \text{(Radio de curvatura } R_c = a/\sqrt{k}) \tag{5}$$

3.3. Ejemplo Cósmico: Triángulo en Esfera



Suma angular: 270° > 180°

4. Geometría Hiperbólica ($k < 0$)

4.1. Métrica en Espacio Hiperbólico

Usando coordenadas hiperbólicas:

$$ds^2 = d^2 + \sinh^2(d^2 + \sin^2 d^2) \tag{6}$$

4.2. Propiedades Notables

- Rectas "paralelas" divergen
- Área de círculo crece más rápido que r^2
- Volumen infinito

5. El Universo Observable vs. Global

5.1. Radio del Universo Observable

$$R_{obs} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{7}$$

5.2. Relación con la Curvatura

El libro explica que:

- Para $k > 0$, el universo observable puede ser mayor que el radio de curvatura
- Para $k = 0$ o $k < 0$, siempre hay regiones inobservables

6. ¿Dónde Ocurrió el Big Bang?

6.1. Concepto Clave

Analogía del Globo

- El Big Bang ocurrió en **todos los puntos** simultáneamente
- No hay un "centro" de expansión
- La expansión es homogénea (como puntos en un globo que se infla)

6.2. Demostración Matemática

Para $r(t) = a(t)x$ (coordenadas comóviles):

$$v = \dot{r} = \dot{a}x = \frac{\dot{a}}{a}r = Hr \tag{8}$$

Muestra que **todos** los observadores ven la ley de Hubble.

7. Normalización de k

7.1. Tres Convenciones Comunes

El libro discute:

1. $k \in \{-1, 0, 1\}$ con a dimensional
2. k dimensional con a adimensional ($a(t_0) = 1$)
3. Absorber k en la métrica ($\tilde{a} = a/\sqrt{|k|}$)

7.2. Ecuación de Friedmann Reescalada

Para $k \neq 0$:

$$\left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \pm \frac{1}{\tilde{a}^2} \tag{9}$$

donde + es para $k = -1$ y − para $k = +1$.

Conclusión: Importancia Observacional

El capítulo concluye que:

- La geometría afecta las observaciones de lentes gravitacionales
- Determina patrones en las anisotropías del CMB
- Influye en la evolución a largo plazo del universo