Diagonalización de matrices

¿Siempre es posible diagonalizar una matriz, esto es, encontrar una base donde la transformación asociada tenga matriz diagonal? La respuesta es NO, como veremos en algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 1:

Comencemos con un ejemplo sencillo. ¿Es diagonalizable la matriz A? En caso afirmativo, ¿en qué base?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Armemos el polinomio característico de la matriz e igualémoslo a cero.

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) = \mathbf{0}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{o} \quad \lambda_2 = -1$$

Si $\lambda_1 = 4$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ de base $\{(2,3)\}$

Para el **valor propio** $\lambda = 4$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p1}} = \langle 2,3 \rangle$

Si $\lambda_2 = -1$:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{I})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\boldsymbol{o}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

El sistema es

$$\begin{cases}2x+2y=0\\ 3x+3y=0\end{cases}$$

Se obtiene:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ de base $\{(-1,1)\}$

Para el **valor propio** $\lambda=-1$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p1}}=\langle -1,1\rangle$

A es una matriz cuadrada 2×2 con dos valores propios distintos.

Teorema:
Si una matriz tiene **todos sus valores propios distintos**, entonces es diagonalizable.
El teorema recíproco no es cierto. Existen matrices diagonalizables que no tienen sus valores propios distintos.

La matriz diagonal D la obtenemos como en la clase pasada donde la matriz de pasaje P es la matriz de los vectores propios como columnas.

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

La transformación es diagonalizable en la base {(2,3),(-1,1)} y su matriz diagonal es:

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

¿Es diagonalizable la matriz A? En caso afirmativo, ¿en qué base?

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-2)^2(\lambda-4)=0$$

Raíces: $\{2,2,4\}$

Tenemos entonces $\lambda = 2$ con **orden de multiplicidad algebraico 2** (se repite dos veces).

Si $\lambda_1 = 2$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Para el **valor propio** $\lambda = 2$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p1}} = \langle 0,0,1 \rangle$. El valor propio $\lambda = 2$ que tiene **orden de multiplicidad algebraico 2**, genera un solo vector propio, por tanto su **orden de multiplicidad geométrico es 1.**

Si $\lambda_2 = 4$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y \qquad\;\; = 0 \end{cases}$$

Para el **valor propio** $\lambda = 4$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p2}} = \langle 2,2,1 \rangle$

Tenemos una matriz cuadrada 3×3 con solamente dos vectores propios. **No es diagonalizable.**

Ejemplo 3:

¿Es diagonalizable la matriz B? En caso afirmativo, ¿en qué base?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$$

Raíces: $\{3,3,-1\}$

Si $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema con dos grados de libertad. Los vectores propios serán:

$$(1,1,0)\ y\ (2,0,1)$$

Para el **valor propio** $\lambda = 3$, tiene **orden de multiplicidad algebraico 2** y su **orden de multiplicidad geométrico es también 2.**

Si $\lambda_2 = -1$, el **vector propio** es $\overrightarrow{v_{p2}} = \langle 1, -1, 0 \rangle$.

Tenemos una matriz cuadrada 3×3 con tres vectores propios. Podemos armar la matriz de pasaje. **Es diagonalizable.**

Finalmente:

$$\boldsymbol{D = P^{-1} \cdot B \cdot P}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrices semejantes

Definición:
Dos matrices A y B tales que existe una matriz P (**invertible**, o sea $\det B \neq 0$) que cumple:

$$\boldsymbol{B = P^{-1} \cdot A \cdot P}$$

se llaman semejantes.

Propiedades de las matrices semejantes:

1. Tienen el mismo rango.

2. Tienen el mismo determinante.

3. Tienen la misma traza (la suma de los elementos de la diagonal principal).
En el ejemplo anterior …

$$\text{tr}\, D = 3 + 3 - 1 = 5$$
$$tr\, A = 1 + 1 + 3 = 5$$

4. Tienen el mismo polinomio característico.

Ejercicios:

1. Determinar valores y vectores propios de la matrices A, B y C, y diagonalizarlas de ser posible:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales encontrar la matriz A asociada en las bases canónicas correspondientes y determinar para cada una los valores y vectores propios. Decidir si la matriz A es o no diagonalizable. En caso afirmativo, diagonalizarlas.

(a) T: $\mathbf{R^2} \rightarrow \mathbf{R^2}$ definida por: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$

(b) T: $\mathbf{R^3} \rightarrow \mathbf{R^3}$ definida por: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ x + 3y - z \\ -z \end{pmatrix}$

(c) T: $\mathbf{P^2(x)} \rightarrow \mathbf{P^2(x)}$ definida por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (2a + b + c)x^2 + (2a + b - 2c)x - (a + 2c)$$

3. Diagonalizar la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

¿Qué tipo de simetría representa dicha transformación en el espacio vectorial $\mathbf{R^2}$**?** ¿Qué condición debe cumplir una matriz 2 x 2 para estar asociada a una isometría en $\mathbf{R^2}$?

4. Dada la aplicación lineal

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + 3y + z \\ y + z \end{pmatrix}$$

estudiar si existe una base B en $\mathbf{R^3}$ en la cual la matriz asociada de la transformación sea una matriz diagonal.

5. Encontrar la matriz A correspondiente a las siguientes transformaciones lineales, decidir si es posible diagonalizarla y hacerlo en caso de serlo.

$$\mathbf{T: R^3 \rightarrow R^2} \quad \text{tal que} \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - 3z \end{pmatrix}$$

6. Teorema espectral

Comprobar trabajando con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que si A es una matriz asociada a una transformación T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ con valores propios α y β distintos entonces puede escribirse,

$$\boldsymbol{T(\vec{v}) = \alpha(\overrightarrow{v_1}.\vec{v})\overrightarrow{v_1} + \beta(\overrightarrow{v_2}.\vec{v})\overrightarrow{v_2}}$$