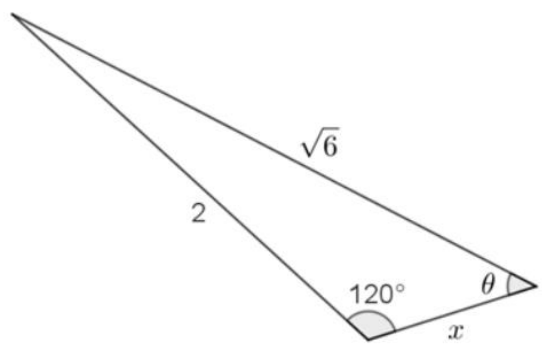
Trigonometría: ejercitación

Ejemplo 1:

Para el triángulo de la figura, calcular el ángulo θ y el lado x.



Solución:

Usando el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(120°)}{\sqrt{6}}$$

donde $\operatorname{sen}(120°)$ se obtiene de la circunferencia unitaria, así:

$$\operatorname{sen}(\theta) = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(120°)}{\sqrt{6}} = 2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observando la circunferencia unitaria para ángulos entre 0 y 180°, tenemos que

$$\operatorname{sen}(45°) = \operatorname{sen}(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

pero dado que buscamos un ángulo agudo, se concluye que

$$\boldsymbol{\theta = 45°}$$

Para el cálculo de x podemos usar el teorema del coseno usando el ángulo de 120°:

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos(120°)$$

$$6 = 4 + x^2 - 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$6 = 4 + x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Seleccionando el valor positivo obtenemos finalmente:

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3} - 1}$$

Ejemplo 2:

Resolver en **R** la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \cdot \cos^2(x) = 3 + 5 \cdot \cos(x)$$

Solución:

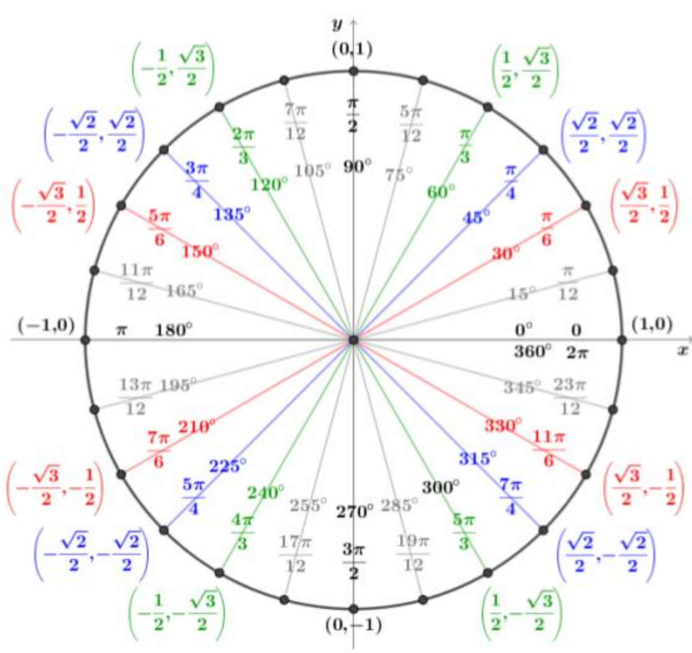
Reordenando la ecuación reconocemos una ecuación cuadrática en $\cos(x)$:

$$2 \cdot \cos^2(x) - 5 \cdot \cos(x) - 3 = 0$$

$\therefore$

$$\cos(x) = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Observando la circunferencia unitaria, tenemos que $\cos(x) = 3$ no tiene solución. Por otro lado, $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ indica $x = \frac{2\pi}{3}$ o $x = \frac{4\pi}{3}$. Considerando todos los rodeos a dichas soluciones tenemos las soluciones generales:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Ejemplo 3:

Resolver en **R** la ecuación: $cos\ (2x) = sen\ x$

Solución:

Usando las identidades del coseno del ángulo doble y pitagórica podemos desarrollar:

$$\cos(2x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) - \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$1 - 2\operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$$

ahora resolviendo esta ecuación cuadrática en $\operatorname{sen}(x)$:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos el primer caso:

$$\operatorname{sen}(x) = -1$$

la circunferencia unitaria nos indica:

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Ahora el segundo caso:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

donde la circunferencia unitaria nos indica:

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

En resumen, las soluciones de la ecuación trigonométrica son:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \\ \boldsymbol{x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi} \\ \boldsymbol{x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}, \ \ \textbf{con}\ \ \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$