

Clase n^o4

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

30 de Agosto 2021

Videos

Integración por partes

Teorema 8

$$4. \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Integración por partes

Ejemplo 16

$$\int x e^x dx =$$

Integración por partes

Ejemplo 17

$$\int e^x \cos x \, dx =$$

Integración por partes

Ejemplo 18

$$\int x^3 e^{x^2} dx =$$

Integración por partes

Recordar

Si $f(x) = \arcsin x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejemplo 19

Utilizaremos integración por partes y luego integraremos por sustitución.

$$\int \arcsin x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Algunas identidades trigonométricas

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

c) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin^n x \, dx$ y $\int \cos^n x \, dx$

Caso a) Si n es par entonces utilizaremos las identidades

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Luego realizamos la sustitución trigonométrica adecuada, desarrollamos el polinomio y se integra.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 20

$$\int \sin^4 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin^n x \, dx$ y $\int \cos^n x \, dx$

Caso b) Si n es impar entonces descomponemos la función trigonométrica en dos factores: uno con potencia $(n - 1)$ y el otro con potencia 1. Luego utilizamos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y el método de cambio de variable.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 21

$$\int \sin^3 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin^m \cos^n x \, dx$

Caso a) Si n y m son números pares utilizamos simultáneamente las dos identidades

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Luego utilizaremos los métodos vistos anteriormente.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 22

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonómicas

Observación

Como en el ejemplo anterior, a veces podemos resolver este tipo de integrales expresando seno en términos de coseno (o coseno en términos de seno) mediante la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Y luego podemos utilizar las estrategias antes vistas.

Integración por partes

Ejercicios propuestos

1. $\int x^2 \ln x \, dx =$

2. $\int x \cos(2x) \, dx$

3. $\int x^3 e^x \, dx =$

4. $\int \sec^3 x \, dx =$

5. $\int e^{2x} \cos(e^x) \, dx =$

6. $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} \, dx =$

Integración por partes

Ejercicios

$$7. \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx =$$

$$8. \int x \cos x dx =$$

$$9. \int \ln x dx =$$

$$10. \int e^x \sin x dx =$$

$$11. \int x^2 e^{-x} dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejercicios propuestos

1. $\int \sin^2 x \, dx =$

2. $\int \cos^2 x \, dx =$

3. $\int \sin^6 x \, dx =$

4. $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx =$

Integración de Funciones Trigonómicas

Ejercicio propuesto

Para la integral

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

a) Calcule esta integral utilizando que

$$I = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \, dx.$$

b) Calcule I utilizando $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

c) Compare ambos resultados e identifique que son iguales (salvo una constante).

d) Compruebe que

$$I = \frac{x}{16} - \frac{\sin(2x)}{32} - \frac{\sin^3(x) \cos x}{24} + \frac{1}{6} \sin^5(x) \cos x.$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.