Clase nº14

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

29 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Recordar métodos de integración.

Ejercicio 1

Calcular por medio de cambio de variable

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{u} du = dx$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{u+u^{-1}} \cdot \frac{1}{u}\, du$$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \operatorname{Arctan} u + C$$

$$= \operatorname{Arctan}(e^x) + C.$$

Ejercicio 2

Calcular utilizando integrales por partes

$$\int (x^3 - 1)e^x \, dx$$

$$\int (x^3 - 1)e^x \, dx = \int x^3 e^x \, dx - \int e^x \, dx$$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx - e^x$$

$$= x^3 e^x - e^x - 3\int x^2 e^x \, dx$$

$f_1(x) = x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 2x$

$g_1'(x) = e^x \Rightarrow g_1(x) = e^x$

$$= x^3 e^x - e^x - 3\left(x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx\right)$$

$$= x^3 e^x - e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x \, dx$$

$$= x^3 e^x - e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x \, dx$$

$f_2(x) = x \Rightarrow f_2'(x) = 1$

$g_2'(x) = e^x \Rightarrow g_2(x) = e^x$

$$= x^3 e^x - e^x - 3x^2 e^x + 6 \left(x \cdot e^x - \int e^x \, dx \right)$$

$$= x^3 e^x - e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + C.$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 7 e^x + C.$$

Ejercicio 3

Calcular utilizando cambio de variable

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\sqrt[3]{\ln x}}}\,dx$$

Sea $u = \sqrt{1+\sqrt[3]{\ln x}}$ $\Rightarrow$ $u^2 = 1+\sqrt[3]{\ln x}$

$\Rightarrow u^2 - 1 = \sqrt[3]{\ln(x)}$

$\Rightarrow (u^2-1)^3 = \ln(x)$

$\Rightarrow 3(u^2-1)^2 \cdot 2u\,du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\sqrt[3]{\ln x}}}\,dx = \int \frac{1}{u} \cdot 6(u^2-1)^2 u\,du$$

$$= 6 \int (u^2 - 1)^2 \, du$$

$$= 6 \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) du$$

$$= 6 \frac{u^5}{5} - 12 \frac{u^3}{3} + 6u + C$$

$$= \frac{6}{5}\left(\sqrt{1 + \sqrt[3]{\ln x}}\right)^5 - 4\left(\sqrt{1 + \sqrt[3]{\ln x}}\right)^3 + 6 \cdot \sqrt{1 + \sqrt[3]{\ln x}} + C.$$

Ejercicio 4

Calcular usando sustitución trigonométrica

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx$$

Obs:

$$21+4x-x^2 = 21-(x^2-4x)$$

$$= 21-(x^2-4x+4-4)$$

$$= 21+4-(x-2)^2$$

$$= 25-(x-2)^2$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{25-(x-2)^2}}\,dx$$

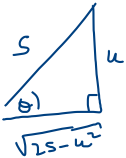
Sea $u = x-2 \Rightarrow du = dx$. además

$$u = x-2 \Rightarrow u+2 = x$$

$$\Rightarrow (u+2)^2 = x^2$$

Así,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{25-(x-2)^2}}\,dx = \int \frac{(u+2)^2}{\sqrt{25-u^2}}\,du$$



$$\sin\theta = \frac{u}{5} \Rightarrow u = 5\cdot\sin\theta.$$

$$\Rightarrow du = 5\cos\theta\,d\theta$$

Luego,

$$\int \frac{(u+2)^2}{\sqrt{25-u^2}}\,du = \int \frac{(5\cdot\sin\theta+2)^2}{\sqrt{25-25\cdot\sin^2\theta}}\cdot 5\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{(5\cdot\sin\theta+2)^2}{5\cdot\cos\theta} \cdot 5\cdot\cos\theta \, d\theta$$

$$= \int (5\sin\theta+2)^2 \, d\theta.$$

$$= \frac{33}{2} \text{Arc}\sin\left(\frac{x-2}{5}\right) - \frac{x-2}{2}\sqrt{25-(x-2)^2} - 4\sqrt{25-(x-2)^2} + C$$

Ejercicio 5

Calcular

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3x-1}}\,dx$$

Sea

$u = \sqrt{3x-1} \Rightarrow du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x-1}} \cdot 3\,dx$

$\Rightarrow \frac{2}{3}du = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\,dx$

$u = \sqrt{3x-1} \Rightarrow \frac{u^2+1}{3} = x$

Así,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3x-1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{u^2+1}{3}} \cdot \frac{2}{3}\,du \int \frac{2}{u^2+1}\,du$$

$$= 2\,\text{Arctan}(u) + C$$

$$= 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{3x-1}\right) + C.$$

Ejercicio 6

Calcular por medio de sumas parciales

$$\int \frac{1}{(x^2 - 3x + 3)}\, dx$$

Obs: $\cdot\ \Delta < 0$

$$\cdot\ x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\cdot\ \frac{3}{4} z^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \implies z = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow dz = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

Así,

$$\int \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4} z^2 + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, dz$$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}(z^2 + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, dz$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}(z) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right) + C$$

Ejercicio 7

Mediante cálculo de límite de sumas de Riemann, calcular

$$\int_{-2}^{0} 2(x+2)^3\,dx$$

Sol: Sea $f(x) = 2(x+2)^3$ y sea la partición

$$P_n = \left\{ x_i \,,\; x_i = -2 + \frac{2}{n} i \,,\; i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

además,

$$\Delta x_i = \frac{2}{n}$$

$\xi_i = x_i$

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(-2+\frac{2}{n}i\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(\cancel{-2}+\frac{2}{n}i\cancel{+2}\right)^{3}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2}}{n}\cdot\frac{2^{3}i^{3}}{n^{3}}$$

$$= \frac{2^{5}}{n^{4}}\sum_{i=1}^{n} i^{3}$$

$$= \frac{2^{5}}{n^{4}}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{2^{5}}{2^{2}}\cdot\frac{n^{4}+2n^{2}+1}{n^{4}}$$

$$\int_{-2}^{0} 2(x+2)^{3}\,dx = \lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^{3}\cdot\frac{n^{4}+2n^{2}+1}{n^{4}}$$

$$= 2^{3}.$$

Ejercicios Propuestos

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3x+3)(x-3)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{e^{3x}+e^{x}-3e^{2x}-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$

e) Utilizando sumas de Riemann calcular

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^3+x^2-2}{3}\,dx$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.