Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 2

Progresiones geométricas

Definición: Una **progresión geométrica** es una sucesión en la cual cada término se obtiene de multiplicar al antecesor por un número constante llamado razón q.

$$\{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 \dots\} \qquad q = 2$$

$$\left\{5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \dots\right\} \qquad q = \frac{1}{3}$$

Observen que para tener bien definida la progresión basta con dar dos datos, generalmente el primer término y la razón.

De acuerdo a la definición, entonces, será:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$a_5 = a_4 \cdot q$$
$$\dots \dots$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} \cdot q}$$

Así quedaría definida una progresión geométrica por recurrencia.

Término general

Si quiero calcular $\boldsymbol{a_5}$ a partir de $\boldsymbol{a_1}$, ¿cuántas veces debo multiplicar por $\boldsymbol{q}$?

$$\{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$$

Será:

$$a_5 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

Por tanto, si quiero calcular el 5to. término a_5, debo elevar la razón a la 4. El exponente de q es una unidad menor $(n - 1)$ que la posición del término al cual se quiere llegar (n). Por tanto, el término general quedaría expresado así:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Ejemplo 1:

Dada la p. g.

$$\{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\}$$

calcular el término a_{10}

Solución:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

$$a_{10} = 3 \cdot 2^9$$

$$a_{10} = 1536$$

Crecimiento, decrecimiento.

Si $a_1 > 0$ y $q > 1$ (y también si $a_1 < 0$ y $0 < q < 1$), la p. g. será creciente, esto es:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

Si $a_1 > 0$ y $0 < q < 1$ (y también si $a_1 < 0$ y $q > 1$), la p. g. será decreciente, esto es:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

Si $q < 0$, los signos de la progresión geométrica serán alternados,

$$+ - + - + -$$

Fórmula para la suma de n términos de una p. g.

Al igual que como hicimos con las progresiones aritméticas, definimos la suma de los primeros términos como,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Busquemos expresarla de forma más sencilla. Reemplazando cada término por lo que vale en función de a_1 y q:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Multipliquemos ambos miembros por q

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1})$$

Apliquemos propiedad distributiva para eliminar el paréntesis,

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \cdots + a_1 \cdot q^n$$

Luego restemos miembro a miembro esa ecuación de la anterior:

$$q \cdot S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \cancel{a_1 \cdot q^4} + \cdots + a_1 \cdot q^n$$

$$-S_n = -a_1 - \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q^2} - \cancel{a_1 \cdot q^3} - \cdots - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$(q-1) \cdot S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n$$

Finalmente, factorizando y despejando:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

que es la fórmula buscada.

Ejemplo 2:

Calcular la suma de los primeros 10 términos de la progresión …

$$\boldsymbol{\{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\}}$$

Solución:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (1024 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = 3069$$

Ejemplo 3:

Calcular la suma de los primeros 8 términos de la progresión $\{5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots\}$

Observamos que es $n = 8$:

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1}$$

$$a_1 = 5 \qquad q = \frac{1}{3}$$

$$S_8 = \frac{5 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$S_8 = \frac{5 \cdot \left[\frac{1}{6561} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$S_8 = \frac{5 \cdot \left[\frac{1}{6561} - \frac{6561}{6561}\right]}{-\frac{2}{3}}$$

$$S_8 = \frac{5 \cdot \left(-\frac{6560}{6561}\right)}{-\frac{2}{3}}$$

$$S_8 = 5 \cdot \left(-\frac{6560}{6561}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$S_8 = \frac{16400}{2187}$$

Sumas infinitas

Analicemos un poco mejor la progresión geométrica anterior.

$$\{5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots\}$$

Su razón está comprendida entre -1 y +1:

$$-1 < q < +1$$

Por tanto, a medida que avancemos en ella, cada término estará más cerca del CERO.
Es lo que en CÁLCULO II llamarán una sucesión CONVERGENTE.

¿No podremos calcular la suma de TODOS los términos de la sucesión a pesar de ser infinitos términos? Esto es calcular …

$$\boldsymbol{S = 5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \cdots + todos\ los\ t\acute{e}rminos\ que\ faltan}$$

Observen que …

$$q = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$$

$$q^2 = \frac{1}{9} \approx 0{,}1$$

$$q^3 = \frac{1}{27} \approx 0{,}03$$

…

$$q^{10} = \frac{1}{59049} \approx 0{,}00001$$

O sea, $q^n \approx 0$

si n es un número natural extremadamente grande …

La suma hemos dicho que la calculamos con la fórmula …

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Pero como

$$q^n \approx 0$$

$$S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1}$$

La suma de todos los términos de una progresión geométrica con $|q| < 1$ será …

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1}{1 - q}}$$

En el ejemplo anterior …

$$\boldsymbol{5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5}$$

Pudimos calcular una suma de infinitos términos. ¡¡Asombroso!!

Ejercicios

1. Una p.g. cumple $a_3 = \frac{2}{9}$ y $a_1 + a_2 = \frac{8}{3}$. Determine a_5, S_5 y a_n si se sabe que la razón $q < 0$.

Respuesta: $a_5 = \frac{1}{72}$; $S_5 = \frac{205}{72}$; $a_n = \frac{32}{9} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

2. En una p.g. decreciente la suma de tres términos es 186 y la suma de los extremos excede en 126 al término central. Calcule los primeros tres términos.

Respuesta: 150, 30, 6

3. Sea (a_n) con $n \in N$ una p.g.
Si $a_1 + a_2 = 25$ y $a_3 + a_4 = 400$, calcule el quinto término a_5 y la suma S_5 (son dos casos).

Respuestas: $a_5 = 1280$; $S_5 = 1705$
$a_5 = -\frac{6400}{3}$; $S_5 = -\frac{5125}{3}$

4. Sea (a_n), con $n \in N$, una p.g.
Si $a_2 + a_3 = 18$ y $a_3 - a_1 = 9$, calcule a_1, a_6 y S_6.

Respuesta: $a_1 = 3$; $a_6 = 96$; $S_6 = 189$

5. Sean a, b, c, tres números en p.a. Su suma es 24. Si restamos uno al primer término y dos al segundo, los nuevos números quedan en p.g. Determinar los números originales.

Respuestas: 4, 8, 12 o 13, 8, 3

6. En una p.g se sabe que el primer término es 5 y que la razón es 2. ¿Cuántos términos hay que sumar para obtener suma 315?

Respuesta: 6

7. Calcular …

$$\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots}$$

Respuesta: 2