Cambios de bases – Matrices de pasaje

Un ejemplo sencillo:

Consideremos el conjunto $\boldsymbol{B_1} = \{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\}$ con …

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (3,1) \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{b}} = (1,-2)$$

Es claramente una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ ya que es un conjunto linealmente independiente de dos vectores de $\mathbf{R}^2$.

Consideremos el vector $\vec{\boldsymbol{u}}$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{b}}$$

de componentes (4,2) en esa base. Escribimos …

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{2})_{\boldsymbol{B_1}}$$

¿Cuáles son las componentes de ese vector en la base canónica $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}\}$ de $\mathbf{R}^2$?

El primer método es muy sencillo. Reemplacemos las componentes de los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ en la expresión de $\vec{\boldsymbol{u}}$ **…**

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{4}(\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{2})$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{12}, \boldsymbol{4}) + (\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{4})$$

Expresado en la base canónica, el vector queda …

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{14}, \boldsymbol{0})_{\boldsymbol{B_c}}$$

Ahora lo haremos con matrices. Armemos una matriz con los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ considerados como vectores columna:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A esa matriz la llamaremos la matriz de pasaje de la base $\mathbf{B_1}$ a la base $\mathbf{B_c}$.

Escribimos …

$$\mathbf{B_1} \xrightarrow[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}]{\qquad\qquad} \mathbf{B_c}$$

Multipliquemos esa matriz por el vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ expresado en la base 1.

$$\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 0\end{pmatrix}$$

Se confirma que el resultado es el mismo.

Ejemplo 2:

Ahora intentemos expresar al vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ en la base $\boldsymbol{B_2} = \{(\mathbf{5},\mathbf{0})(\mathbf{1},\mathbf{1})\}$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{4},\mathbf{2})_{\boldsymbol{B_1}}$$

Lo haremos a través de la base canónica.

Pasaremos de $\mathbf{B_1}$ a la base canónica $\mathbf{B_c}$ y de ésta a $\mathbf{B_2}$.

$$\mathbf{B_1} \xrightarrow[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}]{\qquad\qquad} \mathbf{B_c} \xrightarrow[\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}]{\qquad\qquad} \mathbf{B_2}$$

Nota importante: si vamos de una base cualquiera hacia la base canónica, la matriz se arma con los vectores de la base como columnas. Si vamos desde la base canónica a una base cualquiera se necesita la inversa de esa matriz.

La matriz inversa de $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ es …

$$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Luego se multiplica al vector original por las matrices de pasaje, cuidando el orden, la primera que se aplica es la que va a la derecha, la segunda que se aplica va a la izquierda.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\ 0\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{5}},\mathbf{0}\right)_{\boldsymbol{B_c}}$$

Un ejemplo con polinomios

Pruebe que el conjunto de polinomios

$$B_p = \{1, x - 2, (x-2)^2\}$$

es una base del espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 con el polinomio nulo. Luego encuentre la matriz de pasaje de la base canónica, esto es el conjunto $B_c = \{1, x, x^2\}$ a esa base B_p.

Solución:

Expresemos los tres polinomios de la base B_p como combinación lineal de los polinomios de la base canónica.

$$1 = 1 + 0x + 0x^2$$

$$x - 2 = -2 + 1x + 0x^2$$

$$(x-2)^2 = 4 - 4x + x^2$$

Trabajemos con los coeficientes como vectores:

$$1 = (1,0,0)$$

$$x - 2 = (-2,1,0)$$

$$(x-2)^2 = (4,-4,1)$$

Formemos la matriz de vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al estar completamente escalerizada, vemos que el conjunto es un conjunto linealmente independiente. Por tanto es base.

Esa matriz es la matriz de pasaje de la base B_p a la base canónica B_c:

$$\mathbf{B_p} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{} \mathbf{B_c}$$

Pero se nos pide la matriz de pasaje de la base B_c a la base B_p. Esa matriz será …

$$\mathbf{B_c} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}} \mathbf{B_p}$$

Calculando la matriz inversa con algunos de los procedimientos dados:

$$\mathbf{B_c} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} \mathbf{B_p}$$

Esa es la matriz de pasaje buscada.

Un segundo ejemplo

Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \,|\, a = b - c\}$ un subespacio de $\mathbb{P}_2$.

a) Demuestre que $S = \{x^2 + x, x^2 - 1\}$ es una base de W.

b) Encuentre las coordenadas de $q(x) = 3x^2 + 5x + 2$ respecto a la base ordenada S.

c) Encuentre una base de $\mathbb{P}_2$ que contenga a los elementos de la base S.

Solución:

(a) Escribimos a los polinomios de 2º. grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

como vector (los coeficientes se describen en orden de potencias crecientes):

$$\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix}$$

Se nos dice que la condición para pertenecer a ese subespacio es: $a = b - c$

Hacemos el reemplazo indicado, y escribimos ese vector como combinación lineal de (0,1,1) y de (-1,0,1) que son los dos polinomios dados …

$$\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ b\\ b-c\end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ b\\ b-c\end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

(b) El polinomio dado es:

$$\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 3\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$q(x) = (5, -2)_S$$

(c) Tomamos la base S y armamos una matriz con sus dos vectores como columna:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalerizamos …

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora miramos donde están los pivotes … en la línea 1 y en la línea 2 … al conjunto original de vectores de la base, agrega un vector que tenga pivote en la línea 3 … (es decir, linealmente independiente de los dos anteriores) …

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base encontrada es:

$$S' = \{x^2 + x, x^2 - 1, x^2\}$$

Hay otras posibilidades … cualquier vector linealmente independiente de los dos dados sirve.

Ejercicios:

1. (a) En R^2 consideremos la base V = $\{v_1, v_2\}$ siendo

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{p_v}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ expresado en dicha base. Encuentre la expresión del vector $\vec{p}$ en la base canónica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$**.**

(b) Expresar el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ en la base V.

2. En $\mathbf{R}^2$ consideremos las bases V = $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ siendo

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y **W = $\{\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2\}$** con

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considere los vectores (en la base V y W respectivamente):

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x_v}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{y_w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y encuentre respectivamente los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{x_w}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{y_v}}$.

Respuesta: $\overrightarrow{\boldsymbol{x_w}} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$**,** $\overrightarrow{\boldsymbol{y_v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$

3. (a) Expresar el polinomio

$$p(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

en la base

$$\{1, (x-1), (x-1)^2\}$$

¿Puede hacerse esto con matrices?

(b) En el espacio vectorial de los polinomios de 2o. grado, ¿cuál sería la matriz de pasaje de la base

$$B_1 = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$$

a la base canónica?

(c) ¿y de la base canónica a la base

$$B_2 = \{1, (x-2), (x-2)^2\}$$

(d) ¿ y de la base B_1 a la base B_2 y viceversa?

4. Establezca la veracidad o falsedad de las afirmaciones:

(a) "Si el conjunto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ es L.I. en un espacio vectorial **V**, entonces el conjunto $(\vec{v}_1; \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ también lo es".

(b) ((0; 0); (1; 3)) es una base de R^2.

(c) Todo conjunto ortogonal de *n* vectores en R^n es una base para R^n.

Respuestas: (a) Verdadera
(b) Falsa
(c) Verdadera

5. Demuestre que el conjunto **B** es una base del espacio vectorial $\mathbf{R^3}$ y encuentre las coordenadas de $\vec{u}$ (dado en la base canónica) en esa base **B:**

B = {(3; 2; 2), (-1; 2; 1), (0; 1; 0)} $\vec{u}$ = (5; 3; 1)