Tarea 3

Cálculo 2 – FOGEC
FC – UV
03/12/2021

1.- (15 Puntos) Muestre que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

2.- (15 Puntos) Estudie la convergencia de

$$\int_1^{+\infty} \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

3.- (15 Puntos) Hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n \right)$$

4.- (15 Puntos) Determine si es o no convergente la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(n\pi) + \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{n^2+n} \right)$$

Observaciones:

- Esta tarea es individual o grupal, máximo de cuatro alumnos.
- Justifique adecuadamente y cuide su redacción.
- Fecha de entrega viernes 10 de diciembre hasta las 23:59 horas.
- Enviar documento de desarrollo al correo: ….

1.- Muestre que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

Solución: En la tarea 1 se probó que

$$\int x^n e^{-x}\, dx = -n!\, e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] + C.$$

Luego,

$$\int_0^c x^n e^{-x}\, dx = -n!\, e^{-c}\left[1 + c + \frac{c^2}{2} + \cdots + \frac{c^n}{n!}\right] + n!\, e^0.$$

Así,

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c x^n e^{-x}\, dx = n!$$

2.- Estudie la convergencia de

$$\int_1^{+\infty} \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Solución: Para estudiar la convergencia de esta integral, debemos estudiar que ocurre con las siguientes integrales impropias

$$\int_1^2 \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx \quad y \quad \int_2^{+\infty} \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Sea

$$I = \int \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Podemos utilizar el cambio de variable $x = \sec\theta$, en donde

$dx = \tan\theta \sec\theta\, d\theta$.

Luego,

$$I = \int \frac{4\tan\theta \sec\theta}{(\sec^2\theta - 1)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{\tan\theta \sec\theta}{\tan^3\theta}\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

Utilizando $u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$

$$I = 4\int \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= -\frac{4}{u} + C$$

$$= -\frac{4}{\sin\theta} + C$$

$$= -\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}} + C.$$

Así,

$$\int_1^2 \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

$$= \lim_{c\to 1^+} -\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}\Bigg|_c^2$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left(-\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{4c}{\sqrt{c^2-1}}\right)$$

$$= \infty.$$

Concluimos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{4}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Es divergente.

3.- Hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

Solución: Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) &= 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= 2\cdot 2 + 3\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

4.- Determine si es o no convergente la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\pi)+\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{n^2+n}\right)$$

Solución: Notar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \qquad y \qquad \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\pi)+\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{n^2+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{\mathrm{n}}}{n^2+n}$$

Considerando $a_n = \frac{2}{n^2+n}$, tenemos que

- $a_n > 0,\ para\ todo\ n \in \mathbb{Z}^+.$
- $a_n > a_{n+1}, para\ todo\ n \in \mathbb{Z}^+.$ En efecto

$$n^2+n < (n+1)^2+n+1 \iff \frac{1}{(n+1)^2+n+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Por criterio de Leibniz tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{\mathrm{n}}}{n^2+n}$ es convergente.

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\pi)+\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{n^2+n}\right)$$

Es convergente.