Binomio de Newton

Todos conocemos del liceo la conocida fórmula:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si quiseramos elevar $(a+b)^3$ podríamos plantear:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

Desarrollando ese producto mediante la propiedad distributiva, obtenemos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Detengamos un momento en los anteriores desarrollos. Observamos que, cuando el exponente es $n = 2$, el número de términos es 3, y cuando $n = 3$, el número de términos es 4.

Se puede demostrar, no lo hacemos, que el número de términos al elevar $(a+b)^n$ es, en todos los casos, $n+1$.

Ahora exploremos como desarrollar la expresión, sin tener que realizar tantas operaciones. Vemos que las potencias de a van en orden decreciente de 3 a 0. El primer término tiene a^3, el segundo a^2, el tercero a^1, el cuarto a^0.

$$(a+b)^3 = \boldsymbol{a^3} + \boldsymbol{a^2} \ldots + \boldsymbol{a^1} \ldots + \boldsymbol{a^0}$$

Las potencias de b van en orden creciente de 0 a 3.

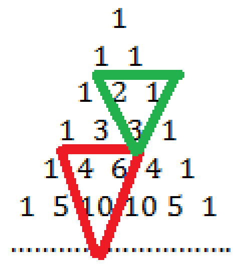
$$(a+b)^3 = \ldots \boldsymbol{a^3 b^0} + \ldots \boldsymbol{a^2 b^1} + \cdots \boldsymbol{ab^2} + \cdots \boldsymbol{b^3}$$

Observemos que todos los términos son de grado 3.

Finalmente, colocamos los coeficientes que se obtienen del Triángulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
………………………

donde cada lado lateral del triángulo tiene términos iguales a 1 y los términos centrales son iguales a la suma de los dos términos que tiene arriba.

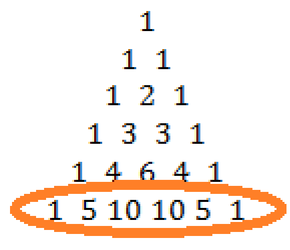


Calculemos ahora, para practicar, $(a+b)^5$. Sabemos que son 6 términos.

Será,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{5}} = \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{0}} + \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{4}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{1}} + \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} + \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{4}} + \cdots \boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{5}}$$

Busquemos ahora en el triángulo de Pascal, la fila que contenga seis números ...



Por tanto,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{5}} = \mathbf{1}\boldsymbol{a}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{0}} + \mathbf{5}\boldsymbol{a}^{\mathbf{4}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{1}} + \mathbf{10}\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \mathbf{10}\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{4}} + \mathbf{1}\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{5}}$$

Pero de la clase anterior, sabemos que los elementos del triángulo de Pascal son números combinatorios.

C_0^0	1	Suman $2^0=1$
$C_0^1 \quad C_1^1$	1 1	Suman $2^1=2$
$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$	1 2 1	Suman $2^2=4$
$C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3$ (y se sigue así)	1 3 3 1	Suman $2^3=8$

Finalmente, podríamos escribir el desarrollo de $(a+b)^5$ así:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{5}} = \boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{0}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{4}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{1}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{5}}^{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{5}}$$

Generalizando para cualquier exponente n y utilizando la notación de sumatoria,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{i}}$$

Algunos profesores escriben a los números combinatorios de esta manera:

$$C_i^n = \binom{n}{i}$$

Por tanto, no sería raro en cursos futuros ver a ese desarrollo escrito así …

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i}$$

Ejemplo: Desarrollar: $\boldsymbol{(3a+4b)^4}$

Solución:

Son cinco $(n+1)$ términos …

$$(3a+4b)^4 = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

Armamos las potencias de a y b según lo explicado …

$(3a+4b)^4 =$

$$= C_0^4(3a)^4(4b)^0 + C_1^4(3a)^3(4b)^1 + C_2^4(3a)^2(4b)^2 + C_3^4(3a)^1(4b)^3 + C_4^4(3a)^0(4b)^4$$

$(3a+4b)^4 =$

$$= 1(3a)^4(4b)^0 + 4(3a)^3(4b)^1 + 6(3a)^2(4b)^2 + 4(3a)^1(4b)^3 + 1(3a)^0(4b)^4$$

Finalmente …

$$\boldsymbol{(3a+4b)^4 = 81a^4 + 432a^3b + 864a^2b^2 + 768ab^3 + 256b^4}$$

Ejemplo 2: Desarrollar: $\boldsymbol{(3a-4b)^4}$

Solución:

Simplemente se alternan los signos …

$$\boldsymbol{(3a-4b)^4 = 81a^4 - 432a^3b + 864a^2b^2 - 768ab^3 + 256b^4}$$

Fórmula del término general

Observen ahora que si el desarrollo de la potencia del binomio, podemos escribirla así …

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i}$$

Entonces el término que ocupa la posición $i+1$ será:

$$\boldsymbol{T_{i+1} = \binom{n}{i} a^{n-i} b^i}$$

Ejemplo 3:

¿Cuál es el octavo término del desarrollo de la potencia siguiente?

$$\boldsymbol{\left(3x - \frac{y}{2}\right)^{12}}$$

Solución:

$$i + 1 = 8 \quad \Rightarrow \quad i = 7$$

$$a = 3x \qquad b = -\tfrac{y}{2} \qquad n = 12$$

Reemplazando: $T_8 = \binom{12}{7} (3x)^{12-7} \left(-\frac{y}{2}\right)^7$

Calculemos as combinaciones de 12 en 7 …

$$\binom{12}{7} = C_7^{12} = \frac{12!}{7!\,(12-7)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 792$$

$$T_8 = \frac{792 \cdot 3^4}{2^8} x^5 y^7$$

$$\boldsymbol{T_8 = \frac{8019}{32} x^5 y^7}$$

Ejemplo 4:

¿Cuál es el término en x^{11} del desarrollo de la potencia siguiente?

$$\boldsymbol{(3x + 2x^2)^7}$$

Solución:

El término general es:

$$\boldsymbol{T_{i+1} = \binom{n}{i} a^{n-i} b^i}$$

$$\boldsymbol{T_{i+1} = \binom{7}{i} (3x)^{7-i} (2x^2)^i}$$

Igualando el grado de la potencia en x de ese término a 11:

$$\boldsymbol{x^{7-i+2i} = x^{11}}$$

de donde … $\boldsymbol{i = 4}$

Por tanto el término buscado es el quinto término del desarrollo …

$$\boldsymbol{T_{4+1} = \binom{7}{4} (3x)^{7-4} (2x^2)^4}$$

$$\boldsymbol{T_5 = 35 \cdot (3x)^3 (2x^2)^4}$$

$$\boldsymbol{T_5 = 15120x^{11}}$$

Término central y términos centrales

Como ya hemos visto, cuando el exponente del binomio es par, el número de términos es impar. Por tanto, habrá un término central. Pensemos cuál es ese término. Supongamos el desarrollo de

$$(a+b)^8$$

Por lo dicho antes, serán 9 términos …

$$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6 \quad T_7 \quad T_8 \quad T_9$$

El término central es el quinto porque tiene cuatro términos antes y cuatro después.

Observamos entonces que cuando el exponente es n, el número de términos es $n+1$ y el término central es

$$\boldsymbol{T_{\frac{n}{2}+1} = \binom{n}{n/2} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}}$$

Observen la igualdad de los exponentes de a y b.

Si, por el contrario, el exponente es impar, habrá dos términos centrales:

$$T_{c1} = T_{\frac{n+1}{2}} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}$$

$$T_{c2} = T_{\frac{n+3}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

Ejemplo 5:

¿Cuál es el término central del desarrollo de la potencia siguiente?

$$\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10}$$

Solución:

$$T_{\frac{n}{2}+1} = \binom{n}{n/2} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

$$T_{\frac{10}{2}+1} = \binom{10}{5} (3a)^5 \left(-\frac{6}{a}\right)^5$$

$$T_6 = \binom{10}{5} (3a)^5 \left(-\frac{6}{a}\right)^5$$

$$T_6 = -476.171.136a^0$$

$$T_6 = -476.171.136$$

Ejercicios

1. Hallar el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} - 5\right)^8$ Respuesta:

Respuesta: $T_5 = \binom{8}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 (-5)^4 = \frac{21875}{8} x^4$

2. Hallar el séptimo término de $(2a + 3b)^{15}$ y el noveno de $(7a - 3c)^{12}$

Respuesta: $T_7 = \binom{15}{6} (2a)^9 (3b)^6$

$T_9 = \binom{12}{8} (7a)^4 (-3c)^8$

3. Determinar el término en x^8y^2 del desarrollo de $(3x^2 + 2y)^6$.

Respuesta: $\boldsymbol{T_3 = \binom{6}{2}(3x^2)^4(2y)^2 = 4860x^8y^2}$

4. Calcule el término central de $\left(3s - \frac{t}{9}\right)^8$

Respuesta: $\boldsymbol{T_5 = \binom{8}{4}(3s)^4\left(-\frac{t}{9}\right)^4 = \frac{70}{81}s^4t^4}$

5. Determine el coeficiente de x^{16} en el desarrollo de $(x^2 + 2x)^{10}$

Respuesta: $\boldsymbol{T_5 = \binom{10}{4}(x^2)^6(2x)^4 = 3360x^{16}}$

6. Determine el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1+x)(1-x)^n$

7. ¿Existe n natural para el cuarto término de $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ y $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ sean iguales?