

Clase n^o8

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

8 de Septiembre 2021

Integración de funciones racionales

Objetivo de la clase

- ▶ Integrar una función racional por medio de fracciones simples o parciales.
- ▶ Integrar funciones racionales en seno y coseno.

Ejemplo 36

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + x + 1} dx =$$

Clase pasada

Ejemplo 36

Clase pasada

Ejemplo 36

Integración de funciones racionales

Ejemplo 37

$$\int \frac{x+1}{3x^2+6x+9} dx =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 37

Integración de funciones racionales

Ejemplo 37

Integración de funciones racionales

Integración de funciones racionales en seno y coseno

Si $R(u, v)$ denota una función racional de las variables u y v . Una función de tipo $R(\sin x, \cos x)$ se integra usando la substitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Utilizando las identidades trigonométricas tenemos que:

a) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$

b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

c) $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ es equivalente a $x = 2 \arctan t$. Por lo tanto,

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Integración de funciones racionales

Integración de funciones racionales en seno y coseno

Utilizando a), b) y c) podemos ver que la integral de una función racional en $\sin x$, $\cos x$ se puede transformar en una integral de una función racional en la variable t . Es decir, tendremos algo de la forma

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dx.$$

La que puede ser integrada por los métodos estudiados.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 38

$$\int \frac{1}{2 \cos x - 3 \sin x} dx$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 38

Integración de funciones racionales

Ejemplo 39

$$\int \frac{1}{\sin x + 1} dx$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 39

Integración de funciones racionales

Ejercicio propuesto

Calcular con el método anterior:

a) $\int \sec x \, dx$

b) $\int \csc x \, dx$

Integración de funciones racionales

Ejercicios: calcular y comprobar

1. $\int \frac{4}{(x-5)^2} dx = \frac{-4}{x-5} + C$ (utilizar sumas parciales)

2. $\int \frac{2x+43}{x^2+x-12} dx = -5 \ln|x+4| + 7 \ln|x-3| + C.$

3. $\int \frac{4x-5}{x^2+4x+20} dx = 2 \ln(x^2-4x+20) + \frac{3}{4} \arctan\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) + C.$

4. $\int \frac{1}{x^3-1} dx =$
 $\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, x \neq 1$

5. $\int \frac{1}{\sin x - \cos x + 1} dx = \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} \right| + C$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.