Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No.

20E

Ejercitación en números complejos

Ejercicio 1:

1) Hallar $w, z \in \mathbb{C}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2w + 3\bar{z} = 4 - i \\ \bar{w} - 2z = 9 - 3i \end{cases}$$

1) Sean $w = a + bi$ y $z = c + di$ las soluciones, donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, reemplazando tenemos

$$\begin{cases} 2(a + bi) + 3(c - di) = 4 - i \\ (a - bi) - 2(c + di) = 9 - 3i \end{cases}$$

distribuyendo:

$$\begin{cases} 2a + 2bi + 3c - 3di = 4 - i \\ a - bi - 2c - 2di = 9 - 3i \end{cases}$$

agrupando partes reales e imaginarias:

$$\begin{cases} (2a + 3c) + (2b - 3d)i = 4 - i \\ (a - 2c) - (b + 2d)i = 9 - 3i \end{cases}$$

En la primera y segunda ecuaciones, igualando las partes reales tenemos el sistema de ecuaciones 2×2:

$$\begin{cases} 2a + 3c = 4 \\ a - 2c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3c = 4 \\ 2a - 4c = 18 \end{cases}$$

restando ambos lados de las ecuaciones logramos:

$$2a - 2a + 3c - (-4c) = 4 - 18 \quad \Rightarrow \quad 7c = -14 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

reemplazando en cualquiera de las 2 ecuaciones se obtiene $a = 5$.

Volviendo a las ecuaciones originales, igualando ahora las partes imaginarias formamos otro sistema de ecuaciones 2×2:

$$\begin{cases} 2b - 3d = -1 \\ b + 2d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 3d = -1 \\ 2b + 4d = 6 \end{cases}$$

restando ambos lados de las ecuaciones tenemos:

$$2b - 2b - 3d - 4d = -1 - 6 \quad \Rightarrow \quad -7d = -7 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

reemplazando en cualquiera de las 2 ecuaciones se obtiene $b = 1$.

En resumen: $a = 5$, $b = 1$, $c = -2$ y $d = 1$, de esta forma, la solución al sistema de ecuaciones es:

$$\boldsymbol{w = 5 + i}$$
$$\boldsymbol{z = -2 + i}$$

Ejercicio 2

Si $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = -5 + 4i$, simplificar el siguiente número complejo expresándolo en forma binomial:

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_1| \cdot z_2}{\mathrm{Re}(z_1) \cdot i + \mathrm{Im}(z_2)}$$

Solución:

Reemplazamos los números complejos en la expresión:

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_1| \cdot z_2}{\mathrm{Re}(z_1) \cdot i + \mathrm{Im}(z_2)} = \frac{(3-4i) \cdot \overline{(-5+4i)} + |3-4i| \cdot (-5+4i)}{\mathrm{Re}(3-4i) \cdot i + \mathrm{Im}(-5+4i)}$$

$$= \frac{(3-4i) \cdot (-5-4i) + \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \cdot (-5+4i)}{(3) \cdot i + (4)}$$

$$= \frac{(3-4i) \cdot (-5-4i) + 5 \cdot (-5+4i)}{4+3i}$$

$$= \frac{-15 - 12i + 20i + 16i^2 - 25 + 20i}{4+3i}$$

$$= \frac{-15 - 12i + 20i - 16 - 25 + 20i}{4+3i}$$

$$= \frac{-56 + 28i}{4+3i}$$

$$= \frac{-56 + 28i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{-224 + 168i + 112i - 84i^2}{16 - 9i^2}$$

$$= \frac{-224 + 168i + 112i + 84}{16 + 9}$$

$$= \frac{-140 + 280i}{25}$$

$$= -\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{56}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{i}$$

Ejercicio 3

Resolver:

$$3 \cdot \mathrm{Re}(z) - \frac{5}{i} = 8 + \bar{z}.$$

Sea $z = a + bi$ solución de la ecuación $3 \cdot \mathrm{Re}(z) - \frac{5}{i} = 8 + \bar{z}$, reemplazando:

$$3 \cdot a - \frac{5}{i} = 8 + (a - bi)$$

$$(3a) + (5) \cdot i = (8 + a) + (-b) \cdot i$$

al igualar las partes reales entre sí y lo mismo con las imaginarias se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3a = 8 + a \\ 5 = -b \end{cases}$$

cuya solución es $a = 4$ y $b = -5$, luego la solución de la ecuación es única e igual a

$$z = 4 - 5i$$

Ejercicio 4:

Calcular z si se sabe que: $z^3 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

Solución:

El módulo de z, |z| (que también se escribe ||z||) es:

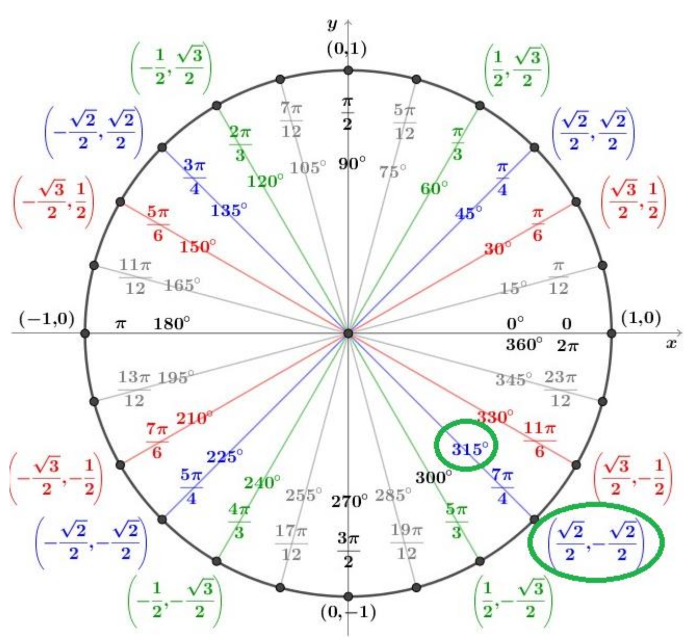
$$||z^3|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = 4\sqrt{2} \qquad b = -4\sqrt{2}$$

$$||z^3|| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2}$$

$$\rho = ||z^3|| = \sqrt{32 + 32} = 8$$

$$z^3 = 8(\cos\alpha + i\ sen\ \alpha) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$



de donde:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El argumento lo buscamos ocupando la circunferencia trigonométrica y obtenemos:

$$\alpha = 315°$$

En notación exponencial: $z^3 = 8 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Nota: en notación exponencial el argumento debe ponerse siempre en radianes, nunca en grados.

En notación polar: $z^3 = 8(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

O abreviando: $z^3 = 8_{315°}$

Por tanto, las raíces serán (hacemos raíz cúbica del módulo y dividimos 315 entre 3 (porque es raíz cúbica):

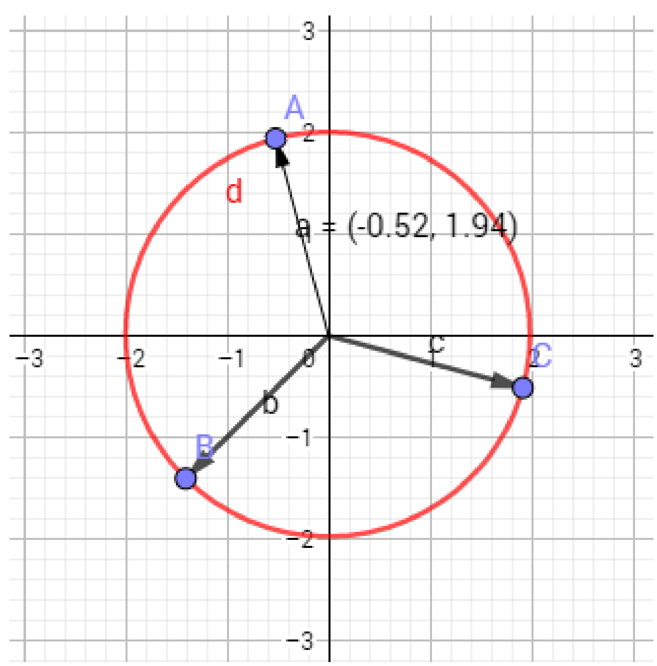
$$\boldsymbol{z_1 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 105° + i \operatorname{sen} 105°)}$$

$$\boldsymbol{z_1 = 2\,(\cos 105° + i \operatorname{sen} 105°)}$$

$$\boldsymbol{z_1 \approx 2(-0,26 + 0,97i)}$$

$$\boldsymbol{z_1 \approx -0,52 + 1,94i}$$

Sumamos la tercera parte de 360°:



$$\boldsymbol{z_2 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)}$$

$$\boldsymbol{z_2 \approx 2\,(-0,71 - 0,71i)}$$

$$\boldsymbol{z_2 \approx -1,42 - 1,42i}$$

Sumamos la tercera parte de 360°:

$$\boldsymbol{z_3 = \sqrt[3]{8}\,(\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°)}$$

$$\boldsymbol{z_3 \approx 2(0,97 - 0,26i)}$$

$$\boldsymbol{z_3 \approx 1,94 - 0,52i}$$

Finalmente, graficamos y vemos que forman un polígono regular, en este caso un triángulo equilátero porque, al ser raíces cúbicas, son tres soluciones.