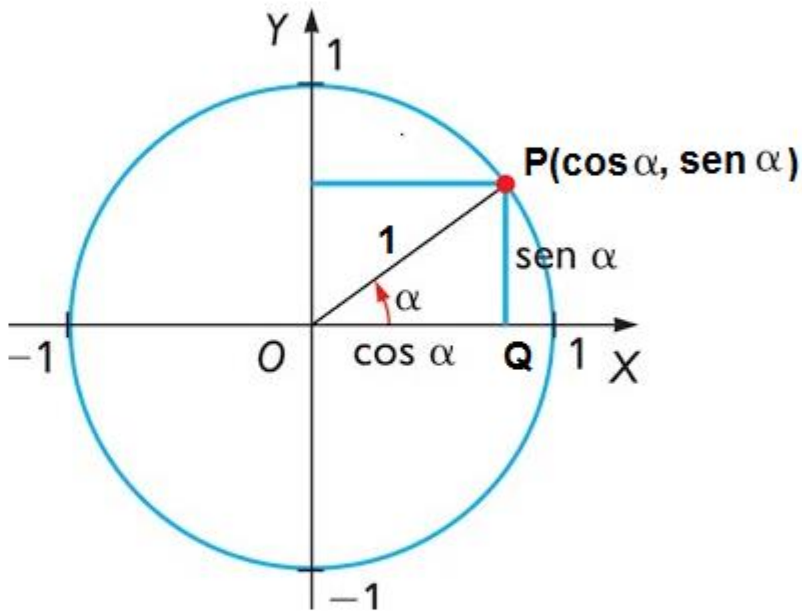
La circunferencia trigonométrica

Habiendo trabajado en la clase pasada con triángulos rectángulos, queda claro que todas las ideas allí presentadas valen para ángulos $\alpha < 90°$.

¿Cómo podemos extender las ideas anteriores para cubrir también a ángulos $\alpha \geq 90°$? Para ello, usaremos la circunferencia trigonométrica, que es una circunferencia con centro en el origen y radio 1, por tanto, su ecuación será:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Trabajando como lo hemos hecho antes, pero en el triángulo OPQ de la figura, en lugar del triángulo ABC de la clase pasada, y recordando que el radio de la circunferencia es 1, observamos que:

$$cos\ \alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

$$sen\ \alpha = \frac{QP}{OP} = \frac{QP}{1} = QP$$

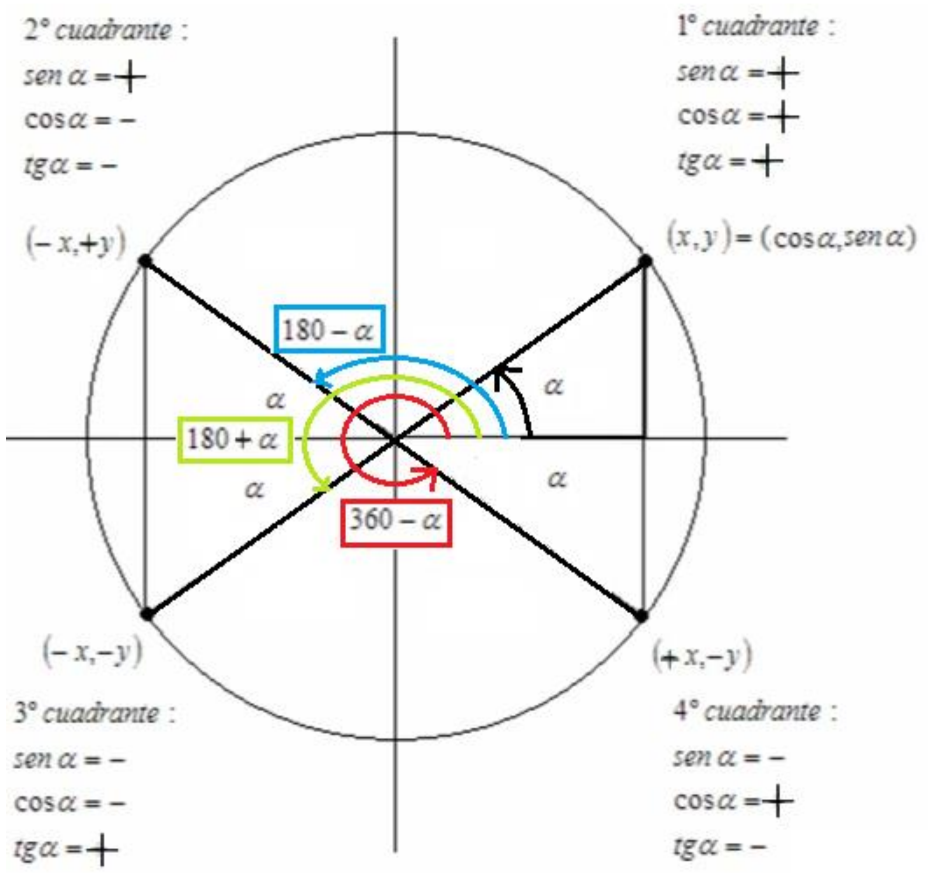
Dicho de otro modo, los valores de $cos\ \alpha$ y $sen\ \alpha$ corresponden respectivamente a la abscisa y a la ordenada del punto P situado sobre la circunferencia,

$$x = cos\ \alpha \qquad y = sen\ \alpha$$

Escrito de otra forma:

$$P(x, y) = P(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$$

Podemos ahora hacer girar al punto P a lo largo de la circunferencia y obtener los valores de $cos\ \alpha$ y $sen\ \alpha$ para ángulos desde 0° a 360°.



Basándonos en las simetrías con respecto a los ejes "x" e "y" podemos encontrar las siguientes fórmulas, siempre válidas, pero útiles en algunos cuadrantes en particular:

Para el cuadrante II:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

Para el cuadrante III:

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

Para el cuadrante IV:

$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplo:

Calculemos seno y coseno de 135°

$$180° - 135° = 45°$$

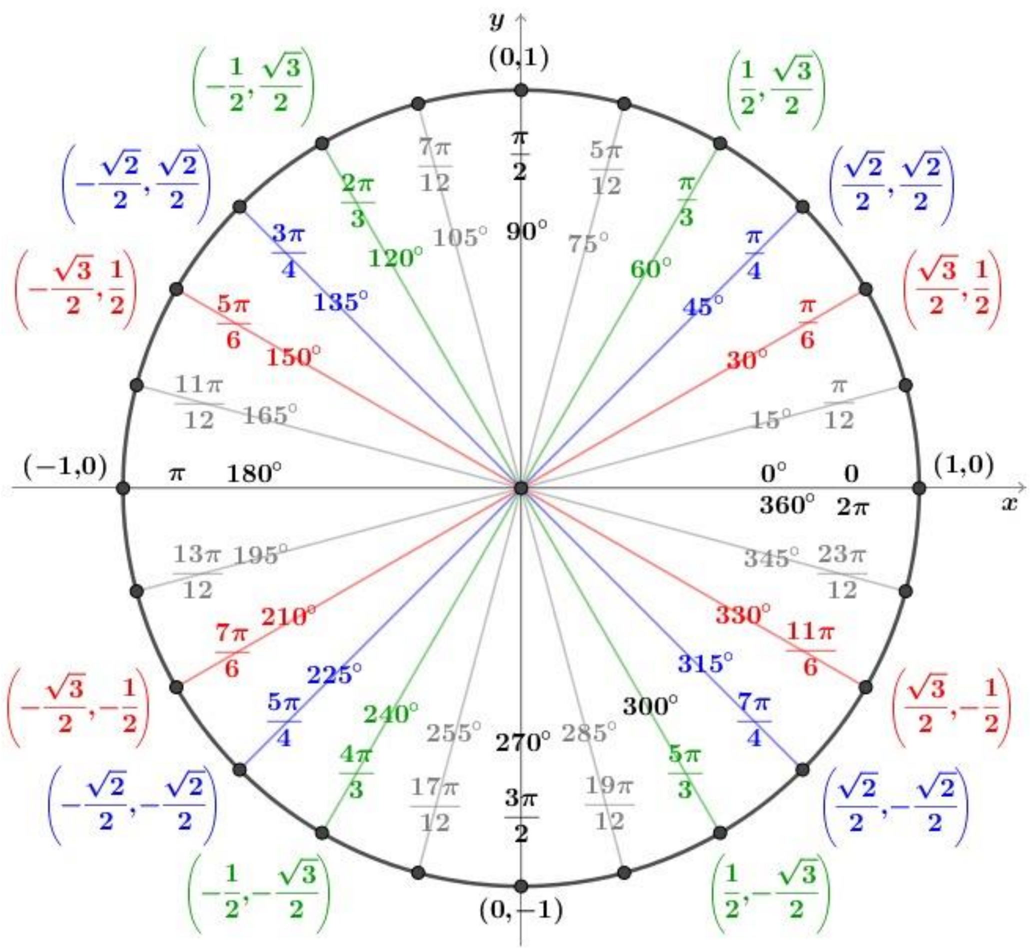
Por tanto,

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observen que los signos de las coordenadas del punto P son (-,+) lo cual es correcto porque corresponden a un ángulo del segundo cuadrante.

Finalmente (recurriendo a los valores del primer cuadrante ya obtenidos):



Recuerden que el punto tiene coordenadas $(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$, por tanto la primera coordenada corresponde al coseno y la segunda al seno.

Identidades trigonométricas

Existen multitud de fórmulas trigonométricas que se cumplen para casi todos los valores del ángulo α (excepto para aquellos que no pertenecen al dominio de las funciones trigonométricas involucradas). Demostremos una de ellas.

Ejemplo: Demostremos que es válida la siguiente identidad trigonométrica.

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Aquí la estrategia es tratar de llevar todo a senos y cosenos. Sabemos que:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

y que

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

Reemplazando en la expresión original,

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

Finalmente, haciendo denominador común:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

y recordando que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

se obtiene una identidad,

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Finalmente, observando que cada uno de los pasos realizados puede realizarse en sentido inverso, partimos de la última identidad y llegamos a demostrar la fórmula deseada.

Ejercicios:

1. Sabiendo los valores del seno, coseno y tangente de un ángulo de 30° calcule los valores de dichas razones trigonométricas para ángulos de 150°, 210° y 330°.

2. Sea α un ángulo del primer cuadrante cuyo coseno mide 0,75, halle los valores del seno, tangente, cotangente, secante y cosecante de dicho ángulo.

3. La tangente de un ángulo del primer cuadrante es 12/5. Calcule el seno.

Respuesta: $\frac{12}{13}$

4. a) Siendo $90° < \beta < 180°$, y sabiendo que sen $\beta = 3/5$, hallar su tangente.

b) Siendo $270° < \gamma < 360°$, y sabiendo que cos $\gamma = 12/13$, hallar su tangente.

Respuestas: $\tan\boldsymbol{\beta} = -\frac{3}{4}$; $\tan\boldsymbol{\gamma} = -\frac{5}{12}$

5. Siendo tg $\delta = 3$, y δ un ángulo del primer cuadrante, calcule cos δ.
¿En qué otro cuadrante es posible realizar dicho cálculo?

Respuestas: $\cos\boldsymbol{\delta} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; **III cuadrante**

6. Justificar la validez de las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{1+ctg\alpha}{1+tg\alpha} = ctg\alpha$

b) $\cos^4\alpha - sen^4\alpha = 2.\cos^2\alpha - 1$

c) $\dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

d) $\dfrac{1}{tg\alpha + ctg\alpha} = sen\alpha.\cos\alpha$

e) $(sen\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - sen\alpha)^2 = 2$

f) $tgz + \dfrac{\cos z}{1+senz} = \sec z$

g) $\dfrac{senA.\cos A}{\cos^2 A - sen^2 A} = \dfrac{tgA}{1-tg^2 A}$

h) $\dfrac{1}{tg\alpha + ctg\alpha} = sen\alpha.\cos\alpha$