Diferenciales y derivada de funciones implícitas

Diferenciales

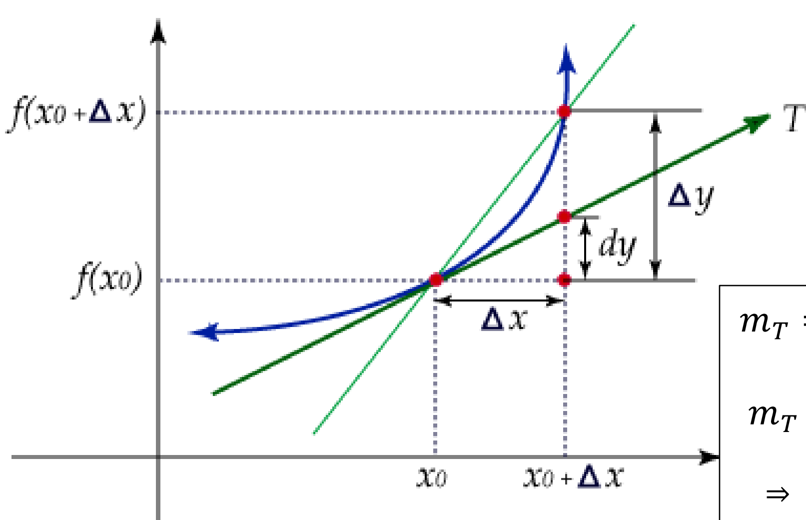
Para funciones de una variable $y = f(x)$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Y la diferencial de y como

$$dy = f'(x)\, dx \cdots (1)$$

Ahora bien, Δy representa el cambio en la altura de la curva $y = f(x)$, y dy representa la altura de la tangente, por tanto, la variación de una función se puede expresar como el producto de su derivada por la variación de su variable independiente $dx = \Delta x$ (incremento de x o diferencial de la variable x) tal como se indica en(1). En la siguiente figura se muestra dy y Δy



$$m_T = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$m_T = \frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow$$

$$dy = f'(x)dx$$

Observe $\Delta y - dy$ se aproxima a cero cuando Δx se aproxima a cero ya que

$$\epsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

Y al hacer $\Delta x \to 0$ tenemos que $\epsilon \to 0$, por tanto:

$$\Delta y = dy + \epsilon \Delta x$$

donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Ahora consideremos un función de dos variables $z = f(x, y)$ si las variables x e y son incrementados, Δx y Δy entonces el correspondiente incremento de z es

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Con lo cual Δz representa el cambio en el valor de f cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Definición

Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar, $z = f(x, y)$, Δx y Δy son los incrementos de x e y respectivamente, entonces la diferencial (total) de la variable dependiente z es

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Nótese que dz es una aproximación a Δz.

Ejemplo 1

Sea $z = f(x, y) = x^4 + sen\ y$, hallar dz

Solución

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$
$$= 4x^3 dx + \cos y\, dy$$

Ejemplo 2

Sea $z = f(x,y) = 3x^2y + 4$ una función

a) Hallar el incremento Δz de la función f en el punto $(2,5)$; donde $\Delta x = \frac{1}{100}$ y $\Delta y = \frac{1}{40}$
b) Hallar dz de la función f en el punto $(2,5)$ y compárese con el incremento Δz obtenido en a)

Solución

a) $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$
$\Delta z = 3(x + \Delta x)^2(y + \Delta y) + 4 - (3x^2y + 4)$
$\Delta z = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)(y + \Delta y) - 3x^2y$
$\Delta z = \cancel{3x^2y} + 3x^2\Delta y + 6xy\Delta x + 6x\Delta x\Delta y + 3y(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^2\Delta y - \cancel{3x^2y}$
$\Delta z = 3x^2\Delta y + 6xy\Delta x + 6x\Delta x\Delta y + 3y(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^2\Delta y$
Luego reemplazando la expresión anterior por $x = 2; y = 5;$ $\Delta x = \frac{1}{100}$ y $\Delta y = \frac{1}{40}$ se tiene
$\Delta z = \frac{361803}{400000} = 0{,}9045075$

b) $dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$
$dz = 6x\,ydx + 3x^2dy$
Luego para $x = 2; y = 5; \Delta x = \frac{1}{100}$ y $\Delta y = \frac{1}{40}$ se tiene que $dz = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Siendo

$$\Delta z = \frac{361803}{400000} = 0{,}9045075$$

y

$$dz = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

Luego $\Delta z \approx dz$ y la diferencia que se tiene es 0,0045075.

En general:

La diferencial (total) de una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se puede expresar de la forma:

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} dx_i = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n$$

Diferenciales sucesivas

Sea $z = f(x, y)$ una función que admite derivadas parciales continuas de orden superior puede definirse las diferenciales sucesivas.

$$dz = f_x dx + f_y dy \Rightarrow$$

$$d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x dx + f_y dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x dx + f_y dy\right)dy$$

$$d^2 z = f_{xx}(dx)^2 + f_{yx} dx dy + f_{xy} dx dy + f_{yy}(dy)^2$$

Como las derivadas son continuas, resulta que

$$f_{yx} = f_{xy} \text{ , luego}$$

$$d^2 z = f_{xx}(dx)^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy}(dy)^2$$

Por analogía con la expresión del cuadrado de un binomio, la diferencial segunda se puede escribir

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f$$

O sea que

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2$$

La diferencial tercera se puede escribir

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(3)} f$$

Y donde

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(3)} f$$

El cual puede expresarse como

$$d^3z = f_{xxx}(dx)^3 + 3f_{xxy}(dx)^2dy + 3f_{xyy}dx(dy)^2 + f_{yyy}(dy)^3$$

Ejemplo

Sea $z = x^3y^2$, hallar d^2z y d^3z en el punto $(2,3)$.

Solución

$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2$

$$f_x = 3x^2y^2 \Rightarrow f_{xx} = 6xy^2 \text{ y } f_{xy} = 6x^2y$$

$$f_y = 2x^3y \Rightarrow f_{yy} = 2x^3$$

$$d^2z = 6xy^2(dx)^2 + 12x^2ydxdy + 2x^3(dy)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z = x^3y^2 \\ f_{xx} = 6xy^2 \\ f_{xy} = 6x^2y \\ f_{yy} = 2x^3 \end{array}}$$

En el punto $(2,3)$

$$d^2z(2,3) = 108(dx)^2 + 144dxdy + 16(dy)^2$$

Ahora se determinará d^3z:

$$d^3z = f_{xxx}(dx)^3 + 3f_{xxy}(dx)^2dy + 3f_{xyy}dx(dy)^2 + f_{yyy}(dy)^3$$

Considerando las derivadas parciales ya obtenidas

$$f_{xxx} = 6y^2 \ ; f_{xxy} = 12xy \ ; f_{xyy} = 6x^2 \text{ y } f_{yyy} = 0$$

Luego

$$d^3z = 6y^2(dx)^3 + 36xy(dx)^2dy + 18x^2dx(dy)^2$$

$$d^3z(2,3) = 54(dx)^3 + 216(dx)^2dy + 72dx(dy)^2$$

Funciones implícitas

Consideremos la función $f(x,y)$ donde la ecuación $f(x,y) = 0$ define implícitamente la función $y = g(x)$ y existen y son continuas f_x y f_y , además $f_y \neq 0$, resulta entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Esta fórmula de derivación implícita es fácil de obtener. En efecto, siendo $f(x,y) = 0$.

Entonces

$$df = f_xdx + f_ydy = 0$$

Si $f_y \neq 0$ resulta, $f_ydy = -f_xdx$ y por tanto $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$

Ejemplo 3

Sea $5 + 2x + y - e^x sen\ y = 0$ determinar $\frac{dy}{dx}$

Solución

Entonces, considerando la función $f(x, y) = 5 + 2x + y - e^x sen\ y$ y aplicando la formula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}\ donde\ f_y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 - e^x sen\ y}{1 - e^x cos\ y}$$

Ejemplo 4

Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $4y^3 - 3xy^2 + 14 = 0$ define implícitamente a $y = g(x)$y evaluarlas en el punto $(6,1)$

Solución

Siendo $f(x, y) = 4y^3 - 3xy^2 + 14 = 0$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}\ donde\ f_y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-3y^2}{12y^2 - 6yx} = \frac{y}{4y - 2x}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx}(6,1) = \frac{1}{4 - 12} = -\frac{1}{8}$$

Calculemos ahora $\frac{d^2y}{dx^2}$

Siendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4y - 2x}$$

Y considerando a y en función de x, se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}\ (4y - 2x) - y\frac{d}{dx}(4y - 2x)}{(4y - 2x)^2} =$$

$$= \frac{4y\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - y\left(4\frac{dy}{dx} - 2\right)}{(4y - 2x)^2}$$

$$= \frac{4y\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} + 2y}{(4y - 2x)^2}$$

$$= \frac{-2x\frac{dy}{dx} + 2y}{(4y - 2x)^2}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}(-2x) + 2y}{(4y - 2x)^2} = \frac{\frac{y}{4y - 2x}(-2x) + 2y}{(4y - 2x)^2}$$

$$= \frac{-2xy + 8y^2 - 4xy}{(4y - 2x)^3}$$

$$= \frac{8y^2 - 6xy}{(4y - 2x)^3}$$

Por tanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8y^2 - 6xy}{(4y - 2x)^3}$$

luego

$$\frac{d^2y}{dx^2}(6,1) = \frac{8(1)^2 - 6(6)(1)}{\left(4(1) - 2(6)\right)^3}$$

$$= \frac{8 - 36}{(-8)^3} = -\frac{\cancel{-}28}{-(\cancel{4})(2)\ \cdot (8^2)}$$

$$= \frac{7}{2(64)} = \frac{7}{128}$$

Si se tiene la ecuación $f(x, y, z) = 0$, que define implícitamente la función $z = g(x, y)$; y existen y son continuas f_xy f_z y si $f_z \neq 0$, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}\ \ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

Análogamente si la ecuación $f(x, y, z) = 0$, define implícitamente la función $x = h(y, z)$; y si $f_x \neq 0$, se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x}\ \ ;\ \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x}$$

Análogamente si la ecuación $f(x, y, z) = 0$, define implícitamente la función $y = l(x, z)$; y si $f_y \neq 0$, resulta

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}\ \ ;\ \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y}$$

Ejemplo 5

a) Sea $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

b) ¿Existen las derivadas pedidas en el punto $\left(2{,}2\sqrt{3}, 0\right)$

Solución

a) Para $f_z \neq 0$ donde $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} \;\; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

Resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

Y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

b) En este caso

$f_x \; = 2x = 4 \; ; \; f_y = 2y = 4\sqrt{3} \; ; \; f_z = 2z = 0$

y por lo tanto no existen

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ Y } \frac{\partial z}{\partial y} \,.$$

Ejemplo 6

Sea $xz + ylnz + 2x - 9 = 0$, determinar

a) $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial z}$

b) $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial z}$

Solución

Considerando $f(x,y,z) = xz + ylnz + 2x - 9$, resulta

a) Si $f_x \neq 0$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{\ln z}{z+2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x} = -\frac{x+\frac{y}{z}}{z+2}$$

b) Si $f_y \neq 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{z+2}{\ln z}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y} = -\frac{x+\frac{y}{z}}{\ln z}$$

Ejemplo 7

Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ si $\ln z + z^2 = 3x - y^3$

Solución

Sea $f(x,y) = \ln z + z^2 - 3x + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-3}{\frac{1}{z}+2z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3z}{1+2z^2}$$