Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2025

Tarea 9

---

1. Por el uso de propiedades de derivación y traslación, calcular la transformada de Fourier de la Gaussiana $f(x) = \exp[-n^2(x-\mu)^2]$ donde n y μ son constantes.

   Ahora supongamos que $\mu = 0$ y consideremos $\delta_n(x) = (n/\sqrt{\pi})f(x)$. Esbozar $\delta_n(x)$ y $\tilde{\delta_n}(k)$ para n pequeño y grande. Evaluar

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx \tag{1}$$

   ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

2. Considerar la función

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in (0,\infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{2}$$

   Mostrar que la transformada de Fourier es

   $$\tilde{f}(k) = \frac{1-ik}{1+k^2} \tag{3}$$

   ¿Cuál valor toma la transformada inversa de $\tilde{f}(k)$ en $x=0$? Explicar.

3. Por consideración de la transformada de Fourier de la función

   $$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| < \pi/2 \\ 0 & |x| \geq \pi/2 \end{cases} \tag{4}$$

   y la transformada de Fourier de su derivada, mostrar que

   $$\int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi^2}{4}\cos^2 t}{\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^2} dt = \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^{\infty} \frac{t^2 \cos^2 t}{\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^2} dt = \frac{\pi}{4} \tag{5}$$

4. Mostrar que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, la transformada inversa de Fourier de la función

   $$\tilde{f}_\alpha(k) = \begin{cases} e^{k\alpha} - e^{-k\alpha} & |k| \leq 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases} \tag{6}$$

   es

   $$f_\alpha(x) = \frac{2i}{\pi(\alpha^2 + x^2)}(\alpha \cosh\alpha \sin x - x\cos x \sinh\alpha) \tag{7}$$

Ahora sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1\}$. Supongamos que $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ adentro de Ω y satisface las condiciones de contorno

$$\phi(x, 0) = f_1(x) \qquad \phi(x, 1) = 0 \tag{8}$$

donde $f_1(x)$ es la función arriba con $\alpha = 1$. Por tomar la transformada de Fourier de la ecuación de Laplace (con respecto a x), encontrar ϕ.