Clase nº11

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

22 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular integrales de Riemann.
- Aplicar propiedades de la integral de Riemann.

Teorema 21 (Criterio de integrabilidad)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\epsilon$ de $[a, b]$ tal que $S(f, \mathcal{P}_\epsilon) - I(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$.

Teorema 22

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua o continua a tramos entonces, f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Teorema 23

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y

$$\mathcal{P}_n = \left\{ t_i, t_i = a + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0, ..., n \right\},$$

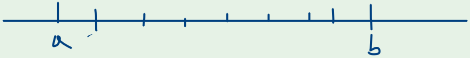
entonces

$$\lim_{n \to +\infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ejemplo 45

Consideremos $f(x) = x$ definida en $[a, b]$. Comprobar que f es integrable y su integral es

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$



Sea P una partición de $[a,b]$ tal que

$$P = \left\{ x_i \, , \, x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i \, , \, i = 0,1,2,\dots,n \right\}.$$

Como $f(x) = x$ es estrictamente creciente.

Tenemos que para $i = 1,2,\dots,n$

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$= f(x_{i-1})$$

...

Ejemplo 45

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$= f(x_i)$$

Luego,

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)(i-1)}{n} + a\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n^2}\right)^2 i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a(b-a)}{n}$$

Ejemplo 45

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} i + a \right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 i + \sum_{i=1}^{n} \frac{a(b-a)}{n} .$$

Así,

$$S(f,P) - I(f,P) = \cancel{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 i} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{a(b-a)}{n}} +$$

$$- \left(\cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^2}{n^2} i} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{a(b-a)}{n}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dfrac{(b-a)^2}{\varepsilon} < N$, es decir,

$$\frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon \qquad \forall n > N.$$

Luego, $\forall \varepsilon > 0$, existe partición $P_{n(\varepsilon)}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f, P_{n(\varepsilon)}) - I(f, P_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon.$$

Para calcular $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ consideremos

$$P_n = \left\{ x_i = a + \frac{b-a}{n} i \ , \ i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

y $E_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

Luego

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2)$$

Así:

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Por T. 23

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ejemplo 46

Consideremos $f(x) = x^3$, y $x \in [0, 1]$. Calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Como $f(x) = x^3$ es continua en $[0,1]$ entonces por T. 22 $f(x) = x^3$ es integrable en $[0,1]$.

Sea la partición P_n de $[0,1]$ tal que

$$P_n = \left\{ x_i : x_i = \frac{i}{n} \ , \ i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

Así,

$$M_i = \sup\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Ejemplo 46

Luego,

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}.$$

Aplicando el límite

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 46

Por T. 23 tenemos que

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 47

Usando que,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1};\quad k\in\mathbb{N}.$$

Si $a>0$, $k\in\mathbb{N}$, calcular

$$\int_0^a x^k\,dx.$$

Sabemos que $f(x)=x^k$, $k\in\mathbb{N}$ es continua en $[0,a]$, luego por t. 22 es integrable en $[0,a]$. Sea la partición

$$P_n=\left\{x_i : x_i=\frac{ia}{n},\ i=0,1,2,\ldots n\right\}$$

y $E_i=\frac{ia}{n}$.

Ejemplo 47

Así

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ia}{n}\right)\cdot \frac{a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^k a^k}{n^k}\cdot \frac{a}{n}$$

$$= a^{k+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^k}{n^{k+1}}$$

Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} a^{k+1}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}\right)$$

Ejemplo 47

$$= a^{k+1} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$\therefore$, por T. 23

$$\int_0^a x^k \, dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio propuesto

Probar que si $a > 0, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_{-a}^{0} x^k \, dx = -\frac{(-a)^{k+1}}{k+1}.$$

Teorema 24

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces se cumplen las siguientes propiedades de la integral de Riemann:

1. $f + g$ es integrable y
   $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es integrable y
   $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$
3. Si f es integrable y no negativa en $[a, b]$, entonces:
   $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Teorema 24

4. Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Si f es integrable en $[a, b]$ y si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Teorema 24

6. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a < c < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces f es integrable en $[a, b]$ si y solo sí f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ y

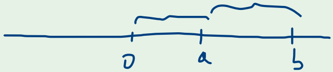
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 48

Demostrar que

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right);\ a < b.$$

Caso a)



Sea $0 < a < b$ entonces

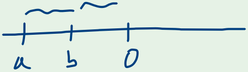
$$\int_0^b x^k\,dx = \int_0^a x^k\,dx + \int_a^b x^k\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^{k+1}}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{k+1} + \int_a^b x^k\,dx$$

$$\therefore, \quad \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Ejemplo 48

Caso b)



Sea $a < b < 0$ entonces

$$\int_a^0 x^k\,dx = \int_a^b x^k\,dx + \int_b^0 x^k\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a^{k+1}}{k+1} = \int_a^b x^k\,dx - \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

$$\therefore, \quad \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Caso c)

$$\int_a^b x^k \, dx = \int_a^0 x^k \, dx + \int_0^b x^k \, dx$$

$$= -\frac{a^{k+1}}{k+1} + \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$

$\therefore$,

$$\int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad a < b, \ k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 25

1. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$.
2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $f^2 = f \cdot f$ es integrable en $[a, b]$.
3. Si f y g son integrables en $[a, b]$ entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

Ejercicios propuestos

1. Probar que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es integrable en $[1, 2]$. (por medio del criterio de integrabilidad.)

2. Sea $f(x) = x$, definida en $[a, b]$,
   $\mathcal{P}_n = \left\{ x_i, x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0, ..., n \right\}$,
   $E_i = \dfrac{x_i + 2x_{i-1}}{3}$, $i = 1, 2, ..., n$. Utilizando el teorema 23, comprobar que
   $$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ejercicios propuestos

3. Consideremos $f(x) = x^3$, $x \in [2, 3]$. Calcular $\int_2^3 f(x)\, dx$.
4. Demuestre que

$$0 \leq \left| \int_a^b \arctan x\, dx \right| \leq \frac{\pi}{2}(b - a), \quad a \leq b.$$

Ejercicios propuestos

5. Muestre que

$$\int_2^4 (x^2 + 3x + 6)\, dx = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) + 6(4 - 2).$$

6. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n. Muestre que

$$\int_a^b p(x)\, dx = \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{a_{n-1}}{n}(b^n - a^n) + \ldots$$
$$+ \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + a_0(b - a).$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.