Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish   Semestre I 2025

Tarea 1

---

1. Encontrar una solución al siguiente conjunto de ecuaciones lineales homogéneas:

$$x + 3y + 3z = 0; \quad x - y + z = 0; \quad 2x + y + 3z = 0$$

2. Verificar la identidad de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

3. Las matrices de Pauli (usadas en el contexto de partículas con *spin*) son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices gamma de Dirac (usadas en el contexto de la física de electrones), γ^μ, son:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \gamma \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $i = 1, 2, 3$. Mostrar que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ *anticonmuta* con todas las matrices de Dirac γ^μ (es decir, su anticonmutador es cero).

4. Mostrar que las matrices gamma de Dirac satisfacen las siguientes propiedades:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \qquad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$$
$$\gamma^\mu\gamma^i + \gamma^i\gamma^\mu = 0 \;\; \mu \neq i$$

Notar que la segunda línea arriba dice que las matrices gamma de Dirac son *anticonmutativas*.

5. Encontrar los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices. Ortogonalizar cualquier vector propio degenerado:

   (a) $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Demostrar que una matriz hermitiana y unitaria tiene valores propios todos igual a ± 1.

7. Dos matrices U y H están relacionadas por

$$\mathsf{U} = e^{ia\mathsf{H}}$$

con a real.

(a) Si H es hermitiana, mostrar que U es unitaria.

(b) Si U es unitaria, mostrar que H es hermitiana (H no depende de a)

(c) Si $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$ mostrar que $\det(\mathsf{U}) = +1$.

(d) Si $\det(\mathsf{U}) = +1$, mostrar que $\mathrm{Tr}(\mathsf{H}) = 0$.

8. Considerar un espacio vectorial de dos dimensiones, con vectores de base $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Existe un operador hermitiano Ω que satisface:

$$\langle 1|\,\Omega\,|1\rangle = 0, \quad \langle 1|\,\Omega\,|2\rangle = 1, \quad \langle 2|\,\Omega\,|1\rangle = 1, \quad \langle 2|\,\Omega\,|2\rangle = 0$$

(a) Escribir una representación como matriz de Ω en esa base.

(b) Calcular los valor propios y vectores propios de Ω usando el resultado de (a). Expresar los vectores propios en términos de los vectores de la base (en notación de Dirac).

(c) Calcular la matriz de transformación U para cambiar de la base original a la base que ocupa los vectores propios de Ω como vectores de base. Demostrar que $\mathsf{U}^\dagger\Omega\mathsf{U}$ es una matriz diagonal con elementos diagonales igual a los valores propios de Ω.