Clase nº13

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

27 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular áreas en coordenadas rectangulares.

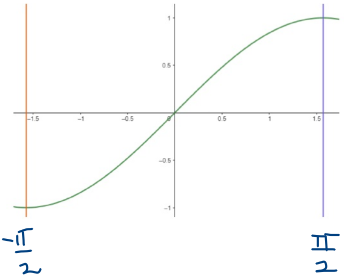
$$g'(x) = \sin x$$

$$g(x) = -\cos x$$

Ejemplo 51

Calcular

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

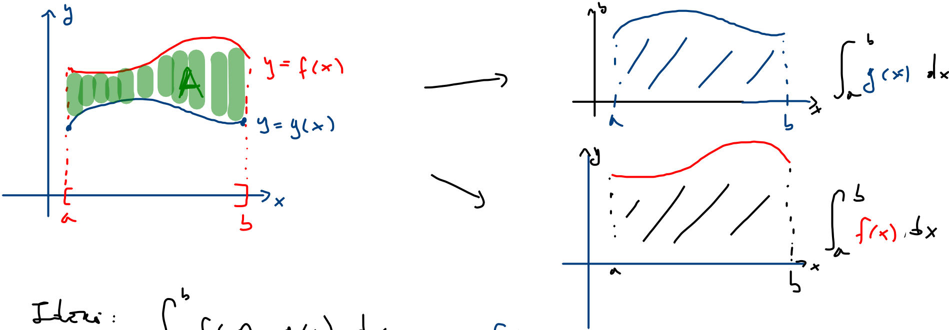


$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

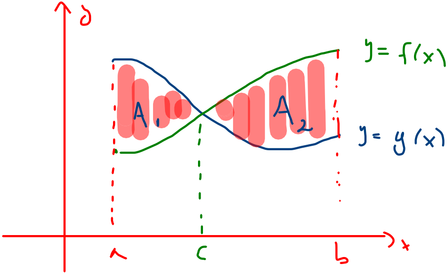
$$= 0.$$

Si f y g son funciones no negativas, ¿cómo se podría calcular el área comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a, b]$?



Idea: · $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$, $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

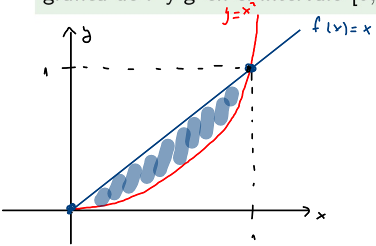
· $A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.



$$A_T = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \underbrace{\int_a^c g(x) - f(x)\, dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b f(x) - g(x)\, dx}_{A_2}$$

Ejemplo 52

Sea $f(x) = x, g(x) = x^2$. Calcular el área comprendida entre la gráfica de f y g en el intervalo $[0,1]$.



¿$f(x) = g(x)$?

$x = x^2 \iff x^2 - x = 0$

$\iff x(x-1) = 0$

$\iff (x = 0 \lor x = 1)$

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx$$

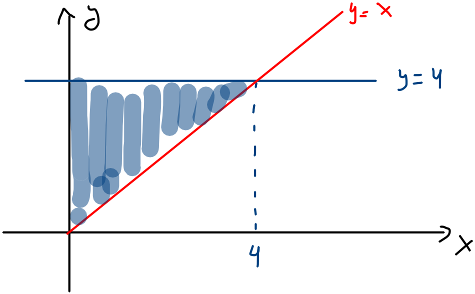
$$= \int_0^1 x - x^2\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big/_0^1 - \frac{x^{2+1}}{3}\Big/_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 53

Sea $f(x) = 4, g(x) = x$. Calcular el área comprendida entre la gráfica de f y g en el intervalo $[0, 4]$.



$$A = \int_0^4 4 - x \, dx$$

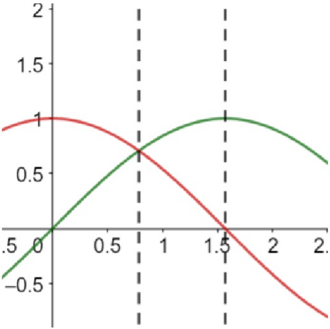
$$= \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$= 4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} - \left(4 \cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right)$$

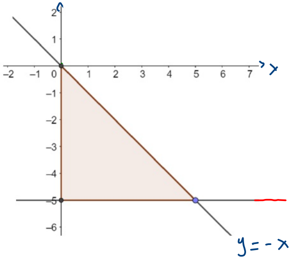
$$= 16 - \frac{16}{2}$$

$$= 8. \quad [u^2]$$

¿Cómo se podría calcular el área de la figura utilizando integrales?



¿Qué cambia al calcular el área de la figura utilizando integrales?
¿De qué forma podrías utilizar las integrales en este caso?



$-x \geq -5 \quad , \quad x \in [0,5]$

$0 \geq -5 + x$

$5 - x \geq 0 \quad , \quad x \in [0,5]$.

$$\int_0^5 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^5 |-5+x|\,dx = \int_0^5 -(-5+x)\,dx$$

$$= \int_0^5 5 - x\,dx = \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= 5\cdot 5 - \frac{5^2}{2} - \left(5\cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right)$$

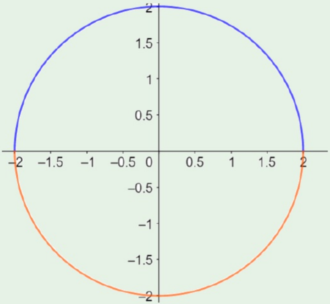
$$= \frac{25}{2}\ [u^2]$$

Ejemplo 54

Calcular entre la gráfica de la función h y g en el intervalo $[0, 1]$. Considerar $h(x) = -x^2$ y $f(x) = -x$.

Ejemplo 55

Calcular el área encerrada en la circunferencia centrada en el origen y de radio 2.



Observación

El área encerrada por los gráficos de dos funciones f y g en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular el área encerrada por las curvas

$$y = 2\sin x, \;\; y = 2\cos x$$

   cuando $x \in [0, 2\pi]$.

2. Calcular el área encerrada por el gráfico de la función g y f en el intervalo $[-2, 2]$. Considerar $g(x) = -1$ y
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ -x & \text{si } x \in [-2,0] \end{cases}$$

3. Calcular el área comprendida entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.