Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Módulo II

Mecánica Intermedia

Licenciatura en Física - 2023[1]

Instrucciones : La prueba consta de cuatro problemas, el problema (I) es obligatorio para tod@s, de los tres restantes solo deben escoger dos. De resolver (parcial o totalmente) un cuarto problema, se hará la corrección considerando 280 puntos como base de evaluación. Se puede utilizar formulario.

Nombre completo : ....

Puntaje obtenido / Puntaje total : $\frac{\quad}{220}$

Nota final :

Problema I (Obligatorio): Trayectoria en coordenadas cartesianas (100 puntos)

Para el potencial $V(r) = -\frac{k}{r}$ se conoce que la ecuación de la trayectoria es:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos\theta$$

donde consideramos que $0 < \varepsilon < 1$:

1. **(30 ptos.)** Utilizando coordenadas cartesianas, reescriba en términos de ε y α la ecuación de la trayectoria.
2. Dibuje la trayectoria, indique las siguientes distancias caracteríticas en términos de ε y α:
   (a) **(10 ptos.)** Semiejes mayor y menor.
   (b) **(20 ptos.)** Distancia entre el centro y los focos.
   (c) **(20 ptos.)** Máxima distancia del foco a la trayectoria (apoastro).
   (d) **(20 ptos.)** Mínima distancia del foco a la trayectoria (periastro).

Obs.: La ecuación de la elipse tiene la forma general siguiente:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

[1] Hora de INICIO: 16:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 18:00 hrs.

Problema II : Ecuación de la trayectoria (60 puntos)

Dada la trayectoria:

$$r = a\,(2 + \cos\theta)$$

1. **(10 ptos.)** Haga un esquema gráfico de la trayectoria, indicando algunos puntos claves de su geometría.
2. **(30 ptos.)** Determine la fuerza central que da origen a esta trayectoria.
3. **(20 ptos.)** Halle la energía potencial asociada.

Obs.: El factor a es una constante.

Problema III : Satélite y cambio de órbita (60 puntos)

Un satélite de masa m orbita la Tierra en una trayectoria circular de radio R con rapidez V. Un misil impacta accidentalmente al satélite, dándole al satélite una rapidez radial αV ($\alpha > 0$) que se suma (vectorialmente) a la original.

1. **(20 ptos.)** Determine la diferencia de energía mecánica (antes y después de la explosión del misil).
2. **(20 ptos.)** Determine la diferencia de momentum angular (antes y después de la explosión del misil).
3. **(20 ptos.)** ¿Qué trayectoria adquiere después de la explosión?. Analice casos posibles.

Problema IV : Interacción gravitacional (60 puntos)

Dos masas, m_1 y m_2, interactúan gravitacionalmente, ellas inicialmente en reposo y están separadas por una distancia r_0.

1. **(15 ptos.)** ¿Qué cantidades físicas se conservan?.
2. **(35 ptos.)** Determine las velocidades de ambas masas cuando la distancia de separación es $r < r_0$.

Probl. I

1) $\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$; $r^2 = x^2 + y^2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \frac{x}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{r + \varepsilon x}{r} \Rightarrow \alpha = r + \varepsilon x$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha - \varepsilon x = r \quad /()^2$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + y^2 \Longleftarrow \alpha^2 - 2\varepsilon\alpha x + \varepsilon^2 x^2 = r^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2(1-\varepsilon^2) + 2\varepsilon\alpha x + y^2 = \alpha^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\varepsilon^2)\left[x^2 + 2\frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}x\right] + y^2 = \alpha^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\varepsilon^2)\left[\left(x + \frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right] + y^2 = \alpha^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\varepsilon^2)\left(x + \frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \alpha^2 + \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\varepsilon^2)\left(x + \frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\left(x+\frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2}\right)} = 1 \quad // \text{ Elipse}$$

2) a)

$$a^2 = \frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2} \implies a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} \quad //$$

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2} \implies b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad //$$

Como $0 < \varepsilon < 1 \implies 0 < 1-\varepsilon^2 < 1$

$$\Downarrow$$

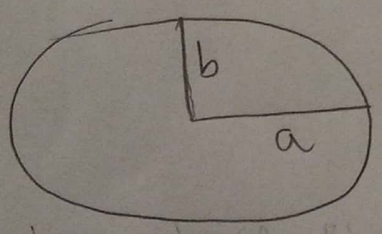
$$\sqrt{1-\varepsilon^2} > 1-\varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

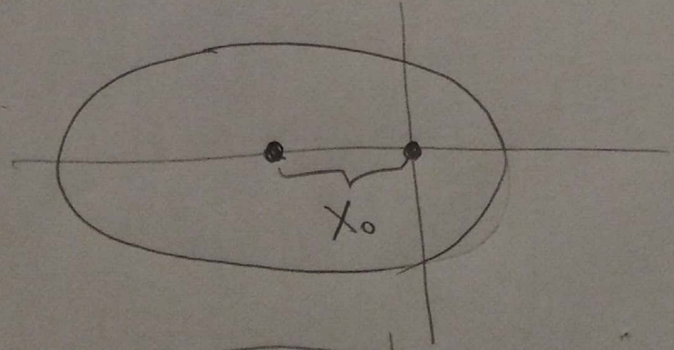
$$a > b$$

a → semi eje mayor

b → semieje menor

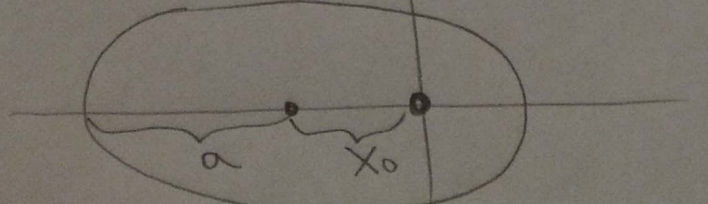


b)



$$x_0 = \frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \text{dist. de centro a foco} \quad //$$

c)



$$\text{Máx. dist. foco/tray.} = \frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\alpha(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$ //

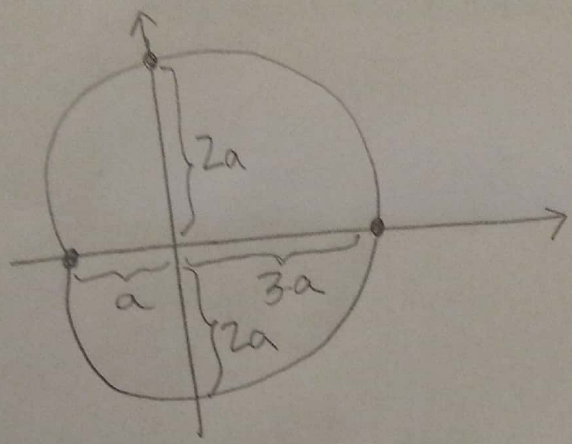
d) Mín. distancia foco/trayectoria $= a - x_0 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} - \frac{\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$

$$= \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$ //

Probl. II

$$r = a(2+\cos\theta) \rightsquigarrow r - 2a = a\cos\theta$$

1)



2) De la ec. de trayectoria

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2} F(r)$$

ahora $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a(2+\cos\theta)}$

$$\therefore \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{2+\cos\theta}\right) = \frac{1}{a}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}^2\theta}{(2+\cos\theta)^3} + \frac{\cos\theta}{(2+\cos\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{2a^2(1-\cos^2\theta)}{r^3} + \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{2a^2}{r^3} - \frac{2a^2\cos^2\theta}{r^3} + \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{2a^2}{r^3} - \frac{2}{r^3}(r-2a)^2 + \frac{r-2a}{r^2}$$

Se puede demostrar que :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{6a(a-r)}{r^3}$$

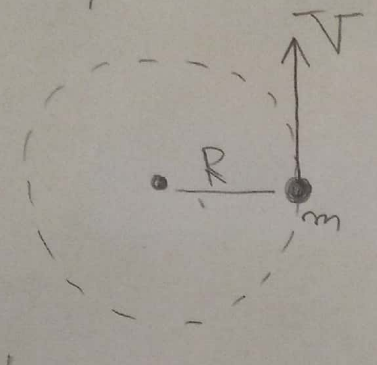
$$\therefore \quad F(r) = \frac{6a(a-r)\,l^2}{\mu r^5} = -\frac{6a(r-a)\,l^2}{\mu r^5} \quad (r \geq a \text{ en toda la tray.})$$

3) $V(r) = -\frac{1}{2}\frac{a l^2}{\mu}\frac{(3a-4r)}{r^4}$ m $\quad F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$

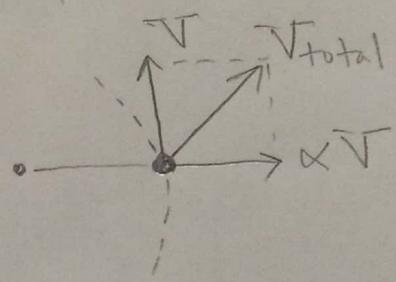
Obs. $V(r) - \cancel{V(\infty)}^{0} = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr$ $\quad$ Obs. $V(\infty) = 0$

Probl. III

Antes



Después



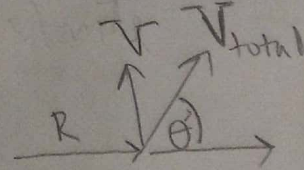
1) $E_{antes} = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{G m M_T}{R}$ con M_T = masa Tierra

$E_{despues} = \frac{1}{2} m V_{total}^2 - \frac{G m M_T}{R}$

con $V_{Total}^2 = V^2 + \alpha^2 V^2$

$\therefore \; E_{despues} = E_{antes} + \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2$

2) $L_{antes} = cte = mVR$



$L_{despues} = cte = m V_{total} R \operatorname{sen}\theta$

$= mVR$

$\therefore \; \Delta L = 0$ ///

3) Caso circular $\Rightarrow$ de la 2ª ley de Newton

$$\frac{GmM_T}{R^2} = m\frac{V^2}{R} \quad (\text{antes})$$

$$\Downarrow$$

$$V^2 = \frac{GM_T}{R} \quad *$$

$$\therefore \quad E_{antes} = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{R} - \frac{GmM_T}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

luego $E_{despues} = E_{antes} + \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2$

$$E_{despues} = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{R} + \alpha^2 \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R}$$

casos: si $\alpha = 0 \Rightarrow$ trayectoria circular

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ trayectoria elíptica

$\alpha = 1 \Rightarrow$ trayectoria parabólica

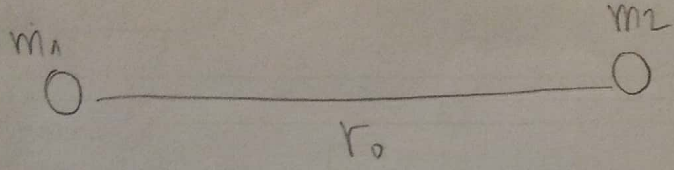
$\alpha > 1 \Rightarrow$ trayectoria hiperbólica

7

Probl. IV / 1) Se conserva Energía / momentum lineal y angular del sist.

2)

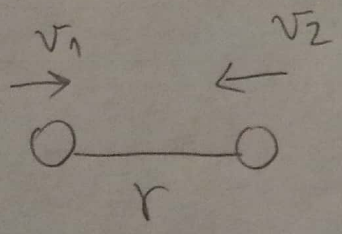
Antes



(parten del reposo)

$$E_{antes} = -\frac{G m_1 m_2}{r_0}$$

después



$$E_{después} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{despues} = E_{antes}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} = -\frac{G m_1 m_2}{r_0} \quad (*)$$

El momentum lineal del sistema se conserva porque $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (solo hay interacción interna)

$$\Downarrow$$

$$F_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$P_{x_{sist}} = cte. = 0$ (parten del reposo)

$$\therefore \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = p_{sist_{despues}} = p_{sist_{antes}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$$

reemplazando en ⊛

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 = -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

10

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) v_1^2 = + G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad ; r_0 > r$$

$$\frac{1}{2} \frac{\cancel{m_1}}{m_2} (m_1 + m_2) v_1^2 = G \cancel{m_1} m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$v_1 = \left[\frac{2 G m_2^2}{(m_1 + m_2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{1/2}. \quad // \quad y \text{ :}$$

$$v_2 = \left[2 G \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{1/2} \quad //$$