Ondas y Óptica: Tarea 1

Mauro Jélvez Jélvez

02/05/2024

1)

Solución: Tendremos que $f(t) = ASin(\omega t) + BCos(\omega t) = \mathbb{R}[F(t)]$, donde $F(t) = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$, se usarán las siguientes identidades:

$$Cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$Sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Reemplazando para f(t) obtendremos:

$$f(t) = ASin(\omega t) + BCos(\omega t) = \frac{A}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + \frac{B}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$f(t) = \frac{1}{2}[e^{i\omega t}(\frac{A}{i} + B) + e^{-i\omega t}(B - \frac{A}{i})] = \frac{1}{2}[e^{i\omega t}(B - Ai) + e^{-i\omega t}(B + Ai)]$$

Por lo que ahora nuestra expresión f(t) puede ser expresada en una parte real y compleja.

$$f(t) = \frac{1}{2}[e^{i\omega t}(B - Ai) + e^{-i\omega t}(B + Ai)]$$

Al igualarla con la función F(t);

$$\frac{1}{2}[e^{i\omega t}(B - Ai) + e^{-i\omega t}(B + Ai)] = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Para encontrar las constantes tomaremos un tiempo t=0

$$\frac{1}{2}[(B - Ai) + (B + Ai)] = A_0 e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{2}2B = A_0 e^{i\varphi}$$

Por lo que obtenemos que la relación de B con A_0 y φ

$$B = A_0 e^{i\varphi} = A_0(Cos\varphi + iSin\varphi)$$

Para encontrar la relación de A usaremos la misma igualdad en t=0 pero la derivaremos con respecto a t:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega t}(B - Ai) + e^{-i\omega t}(B + Ai)) = \frac{\partial}{\partial t}(A_0 e^{i(\omega t+\varphi)})$$

$$\frac{1}{2}(i\omega e^{i\omega t}(B - Ai) - i\omega e^{-i\omega t}(B + Ai)) = i\omega A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Evaluando en t=0:

$$\frac{1}{2}(i\omega(B-Ai) - i\omega(B+Ai)) = i\omega A_0 e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{2}(B - Ai - B - Ai) = A_0 e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{2}(-2Ai) = A_0 e^{i\varphi} \Rightarrow A = -\frac{A_0 e^{i\varphi}}{i}$$

Finalmente racionalizando i, obtenemos la relación de A.

$$A = A_0 i e^{i\varphi} = A_0(iCos\varphi - Sen\varphi)$$

Ahora reemplazando los valores de A y B en f(t):

$$f(t) = \mathbb{R}[F(t)] = ASin(\omega t)+BCos(\omega t) \Rightarrow A_0 i e^{i\varphi} Sin(\omega t)+A_0 e^{i\varphi} Cos(\omega t) = A_0 e^{i\varphi}(Cos(\omega t)+iSin(\omega t)) = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Tendremos que la parte real es:

$$f(t) = A_0 Cos(\omega t + \varphi)$$

Y finalmente para poder expresar $f(t) = \mathbb{R}[F(t)] = A_0 Cos(\omega t + \varphi)$ en función de F(t) y $\overline{F(t)}$ definiremos una función $g(t) = F(t) + \overline{F(t)}$ donde $\overline{F(t)} = A_0 e^{-i(\omega t+\varphi)}$. Por lo que obtendremos:

$$g(t) = F(t)+\overline{F(t)} = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)} + A_0 e^{-i(\omega t+\varphi)} = A_0[Cos(\omega t+\varphi)+iSin(\omega t+\varphi)+Cos(\omega t+\varphi)-iSin(\omega t+\varphi)]$$

Como podemos ver g(t) nos queda como una función real

$$g(t) = 2A_0 Cos(\omega t + \varphi)$$

Reemplazando nos queda:

$$f(t) = \frac{g(t)}{2}$$

2)

Solución: Tenemos una fuerza externa $F_{ext} = F_0 Sin(\omega t)$, así quedandonos una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea en este sistema.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 Sin(\omega t) - kx - b\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} Sin(\omega t) - \frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$$

Aquí definiremos: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\gamma = \frac{b}{m}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} Sin(\omega t)$$

Como t es muy grande podemos despreciar la solución homogénea, por lo tanto propondremos una solución particular de la forma: $x_p(t) = ASen(\omega t)+BCos(\omega t)$, calculando su primera y segunda derivada obtenemos:

$$x_p(t) = ASen(\omega t) + BCos(\omega t) \Rightarrow \dot{x}_p(t) = A\omega Cos(\omega t) - B\omega Sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = -A\omega^2 Sin(\omega t) - B\omega^2 Cos(\omega t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos:

$$-A\omega^2 Sin(\omega t) - B\omega^2 Cos(\omega t) + \gamma(A\omega Cos(\omega t) - B\omega Sin(\omega t)) + \omega_0^2(ASen(\omega t) + BCos(\omega t)) = \frac{F_0}{m} Sin(\omega t)$$

$$Sin(\omega t)[\omega_0^2 A - \gamma B\omega - A\omega^2] + Cos(\omega t)[\omega_0^2 B + \gamma A\omega - B\omega^2] = \frac{F_0}{m} Sin(\omega t)$$

Comparando términos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\omega_0^2 A - \gamma B\omega - A\omega^2 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma B\omega = \frac{F_0}{m}$$

$$\omega_0^2 B + \gamma A\omega - B\omega^2 = 0 \Rightarrow B(\omega_0^2 - \omega^2) + +\gamma A\omega = 0$$

Si armamos un sistema de ecuaciones más simplificado, podemos hacer unas sustituciones de la forma: $A = x$, $B = y$, $a = \omega_0^2 - \omega^2$, $b = \gamma\omega$, $c = \frac{F_0}{m}$, quedándonos de la siguiente forma:

$$ax - by = c; ay + bx = 0$$

Para el cual encontramos las siguientes soluciones:

$$x = \frac{ac}{a^2+b^2}; y = -\frac{bc}{a^2+b^2};$$

De las cuales reemplazando los valores obtenemos que:

$$A = \frac{F_0(\omega_0^2-\omega^2)}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}$$

$$B = -\frac{\gamma\omega F_0}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}$$

Por lo que reemplazando en la solución particular:

$$x(t) = ASen(\omega t) + BCos(\omega t) = \left(\frac{F_0(\omega_0^2-\omega^2)}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}\right) Sen(\omega t) + \left(-\frac{\gamma\omega F_0}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}\right) Cos(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}[(\omega_0^2-\omega^2)Sin(\omega t) - \gamma\omega Cos(\omega t)]$$

Si definimos el ángulo de fase φ como:

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\gamma\omega}\right)$$

De aquí podemos sacar:

$$Sen(\varphi) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}; Cos(\varphi) = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Si tenemos que nuestra función para la posición es:

$$x(t) = \frac{F_0}{m((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)}[(\omega_0^2-\omega^2)Sin(\omega t) - \gamma\omega Cos(\omega t)]$$

Hagamos un ajuste en el denominador en la parte que es la magnitud de el ángulo de fase, si tenemos que:

$$\frac{1}{((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\frac{1}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Haciendo esta sustitución tenemos:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}Sin(\omega t) - \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}Cos(\omega t)\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}(Sen(\varphi)Sen(\omega t) - Cos(\varphi)Cos(\omega t)) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}Cos(\omega t+\varphi)$$

Si definimos la amplitud como:

$$x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Resolviendo para x nos queda:

$$x(t) = x_0 Cos(\omega t+\varphi)$$

Para encontrar la frecuencia para la cual la amplitud es máxima, tomaremos la función de la amplitud.

$$\frac{\partial x_0}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow \frac{F_0}{m}\left(-\frac{1}{2}\frac{2\omega\gamma^2+2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)}{((\gamma\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0 \Rightarrow \omega\gamma^2 - 2\omega\omega_0^2 - 2\omega^3 = 0$$

$$2\omega^2 - \gamma^2 + 2\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\gamma^2}{2} - \omega_0^2$$

Por lo que finalmente nos queda la frecuencia para la cual la amplitud es máxima:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} - \omega_0^2}$$

3)

Solución: Para este caso tendremos que el momento angular es constante. Para poder encontrar nuestro r_{min} debemos derivar con respecto a r e igualar a nuestra expresión de U(r).

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{en}{r}+\frac{L^2}{2er^2}\right)=0 \Rightarrow \frac{en}{4\pi\epsilon_0 r_{min}^2}-\frac{-2L^2}{2er_{min}^3}=0$$

$$\frac{en}{4\pi\epsilon_0 r_{min}^2}=\frac{L^2}{er_{min}^3}$$

Multiplicando por er^3

$$\frac{e^2nr_{min}^3}{4\pi\epsilon_0 r_{min}^2}=L^2 \Rightarrow \frac{e^2nr}{4\pi\epsilon_0}=L^2$$

Despejando obtenemos:

$$r_{min}=\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}$$

Para encontrar la frecuencia, debemos encontrar $K=\frac{d^2U}{dr^2}$, encontrando la segunda derivada de U(r) reemplazamos el término de r por r_{min}. Si anteriormente habíamos enonctrado que:

$$\frac{dU}{dr}=\left(\frac{en}{4\pi\epsilon_0 r^2}-\frac{-L^2}{er^3}\right)$$

Derivando nuevamente tenemos:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{en}{4\pi\epsilon_0 r^2}-\frac{-L^2}{er^3}\right)=\frac{-2en}{4\pi\epsilon_0 r^3}+\frac{3L^2}{er^4}$$

Si tenemos que $r_{min}=\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}$, reemplazando en la segunda derivada tenemos:

$$K=\frac{3L^2}{er_{min}^4}-\frac{en}{2\pi\epsilon_0 r_{min}^3}$$

Desarrollando se obtiene:

$$K=\frac{3L^2}{e}\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^4-\frac{en}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^3$$

$$K=\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^3\left[\frac{3L^2}{2}\frac{e^2n}{4\pi\epsilon_0 L^2}-\frac{en}{2\pi\epsilon_0}\right]=\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^3\left[\frac{3en}{4\pi\epsilon_0}-\frac{en}{2\pi\epsilon_0}\right]=\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^3\left(\frac{en}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

$$K=\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e^2n}\right)^3\left(\frac{en}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{e}{L^2}\frac{L^2}{e}\right)$$

Finalmente obtenemos que:

$$K=\frac{L^2}{e}\left(\frac{e^2n}{4\pi\epsilon_0 L^2}\right)^4$$

Si sabemos que: $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$, reemplazando obtenemos la frecuencia.

$$\omega=\sqrt{\frac{L^2}{em}\left(\frac{e^2n}{4\pi\epsilon_0 L^2}\right)^4}$$

4)

Solución: Haciendo las ecuaciones de Newton para este sistema obtenemos:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 + kx_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - kx_2 + kx_1$$

Lo que nos lleva a:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1$$

Escribiendo este sistema de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Llamares A a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los valores y vectores propios usaremos: $\vec{v}(A - \lambda I) = 0$. Comenzaremos sacandote el determinante.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2k}{m} + \lambda\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

Caso 1

$$\frac{2k}{m} + \lambda - \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{k}{m}$$

Para $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ Tendremos el vector propio:

$$\vec{v_1}(A - \lambda_1 I) = \vec{v_1} \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda_1 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda_1 \end{pmatrix} = \vec{v_1} \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} - (-\frac{k}{m}) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - (-\frac{k}{m}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} = 0$$

Lo que nos lleva a:

$$-x\frac{k}{m} + y\frac{k}{m} = 0 \Rightarrow x = y$$

Y finalmente nuestro vector propio será:

$$\vec{v}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Caso 2

$$\frac{2k}{m} + \lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{3k}{m}$$

Para $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$

$$\vec{v_2}(A - \lambda_2 I) = \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda_2 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda_2 \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} - (-\frac{3k}{m}) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - (-\frac{3k}{m}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{m} = 0 \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos:

$$\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

Por lo que nuestro vector propio será:

$$\vec{v}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Combinando todo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{\frac{k}{m}}it} + \tilde{B}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{\frac{3k}{m}}it}$$

Nuestras frecuencias propias serán:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Las cuales corresponden al modo simétrico y antisimétrico respectivamente.

5)

Solución: Si tenemos: $\psi(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$.

Para t=0

$$\psi(x,0) = F(x) + G(x) = g(x)$$

$$\left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right)|_{t=0} = \left(-c\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right)|_{t=0} = c\left(\frac{\partial G(x)}{\partial t} - \frac{\partial F(x)}{\partial t}\right)$$

Por lo que finalmente tendremos:

$$g(x) = F(x) + G(x)$$

$$h(x) = c\left(\frac{\partial G(x)}{\partial t} - \frac{\partial F(x)}{\partial t}\right)$$

Ahora debemos encontrar las funciones $G(x)$ y $F(x)$, si integramos con respecto a t la función $h(x)$ y despejamos $G(x)$:

$$\int \frac{\partial G(x)}{\partial t}dt = \int \frac{\partial F(x)}{\partial t}dt + \frac{1}{c}\int h(x)dt \Rightarrow G(x) = F(x) + \frac{1}{c}\int h(x)dt$$

Reemplazando en $g(x)$

$$g(x) = F(x) + F(x) + \frac{1}{c}\int h(x)dt \Rightarrow F(x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int h(x)dt$$

Reemplazando:

$$G(x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int h(x)dt + \frac{1}{c}\int h(x)dt \Rightarrow G(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int h(x)dt$$

Ahora finalmente reemplazando sus valores respectivos obtenemos:

$$F(x-ct) = \frac{g(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(x-ct)dt$$

$$G(x+ct) = \frac{g(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(x+ct)dt$$

Sumando estas funciones obtenemos:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[g(x-ct) + g(x+ct)] - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(x-ct)dt + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(x+ct)dt$$

Podemos escribir estas integrales como:

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{c+ct} [h(x+ct) - h(x-ct)]\, dt$$

Aquí haremos el cambio de variable: $u = x \pm ct \Rightarrow du = \pm cdt$. Quedándonos de la siguiente forma la ecuación de onda.

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[g(x-ct) + g(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(u)du$$

El término $\frac{1}{2}[g(x-ct) + g(x+ct)]$ es la superposición de las dos ondas que se propagan en direcciones opuestas. La división por 2 se hace para garantizar que la amplitud total de la onda sea consistente con la física de la superposición.

El término $\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(u)du$ representa una integral que describe cómo se superponen las ondas que se propagan en direcciones opuestas en un intervalo de espacio en particular $x-ct$ a $x+ct$. La función $h(u)$ describe cómo varía la forma de la onda dentro de ese intervalo.

El término $\frac{1}{2c}$ se utiliza para normalizar la integral y asegurar que la solución tenga las dimensiones físicas correctas.

6)

Si tenemos $\psi(x,t) = X(x)T(t)$,X y T. Tendrán la siguiente forma:

$$X(x) = A_x Sen(kx) + B_x Cos(kx)$$

$$T(t) = A_t Sen(kct) + B_t Cos(kct)$$

Reemplazando:

$$\psi(x,t) = (A_x Sen(kx) + B_x Cos(kx))(A_t Sen(kct) + B_t Cos(kct))$$

Si sabemos que $\psi(0,t) = 0$

$$\psi(0,t) = B_x(A_t Sen(kct) + B_t Cos(kct)) = 0$$

De aquí concluimos:

$$B_x = 0$$

Si sabemos que $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)|_{t=0} = 0$

$$\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t} = (A_x Sen(kx))A_t = 0$$

De aquí concluimos:

$$A_t = 0$$

Reemplazando obtenemos:

$$\psi(x,t) = A_x Sen(kx) B_t Cos(kct)$$

Aquí consideremos la amplitud $A = A_x B_t$

$$\psi(x,t) = ASen(kx)Cos(kct)$$

Para que la cuerda tengo 0 desplazamiento en $x = L$

$$\psi(L,t) = \sum A_n Sen(k_n L)Cos(k_n ct) = 0$$

Debemos tener (Aquí reemplazaremos el valor de $L = 1[m]$):

$$k_n = \frac{n\pi}{L} + \frac{\pi}{2L} \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

Ahora queremos encontrar el número de armónicos para lo que usaremos la otra condición incial:

$$\psi(x,0) = \sum A_n Sen\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)x\right) = 7Sen\left(\frac{9\pi}{2}x\right)$$

Para que esta igualdad se cumpla, debemos tener:

$$\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{9\pi}{2}$$

$$A_n = 7$$

Despejando el número de armónicos obtenemos: $n = 4$ Por lo que las frecuencias propias serán:

$$\omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow \omega_4 = \sum_{n=1}^{4} n\pi c$$

Y en nuestro caso serán:

$$\omega_4 = 4\pi c$$

$$k_4 = \frac{9\pi}{2}$$

Finalmente reescribiendo nuestra ecuación de onda tenemos:

$$\psi(x,t) = A_4 Sen(k_4 x)Cos(k_4 ct) \Rightarrow \psi(x,t) = 7Sen\left(\frac{9\pi}{2}x\right)Cos\left(\frac{9\pi}{2}ct\right)$$

Y el número de nodos viene dado por: $N = n - 1$ donde n es el número de armónicos de la onda.

$$N = 4 - 1$$

Finalmente obteniendo un total de 3 nodos.

$$N = 3$$

7)

Solución: Si tenemos las ecuaciones de onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente:

$$\psi_I(x,t) = A_I Cos(k_I x - \omega_I t)$$

$$\psi_R(x,t) = A_R Cos(k_R x + \omega_R t)$$

$$\psi_T(x,t) = A_T Cos(k_T x - \omega_T t)$$

Al estar en el mismo medio definiremos: $k_I = k_R = k_1$ y $k_T = k_2$ Aquí definiremos:

$$\psi_1 = \psi_I + \psi_R$$

$$\psi_2 = \psi_T$$

Aplicando condiciones de frontera: $\psi_1|_{x=0} = \psi_2|_{x=0}$, obtenemos:

$$\psi_I(0,t)+\psi_R(0,t) = \psi_T(0,t) \Rightarrow A_I Cos(-\omega_I t)+A_R Cos(\omega_R t) = A_T Cos(-\omega_T t) \Rightarrow A_I Cos(\omega_I t)+A_R Cos(\omega_R t) = A_T Cos(\omega_T t)$$

De aquí podemos concluir que la frecuencia no cambia, sino que la longitud de onda debido al cambio de velocidad de propagación en el medio y la longitud de onda, por lo tanto:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega$$

Obtenemos:

$$A_I + A_R = A_T \Rightarrow 1 + \frac{A_R}{A_I} = \frac{A_T}{A_I}$$

Aquí definiremos los coeficientes de transmisión y reflexión de la onda (no los coeficientes de transmisión/reflexión de energía):

$$\mathfrak{R} = \frac{A_R}{A_I}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{A_T}{A_I}$$

Por lo que tendremos la siguiente relación.

$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{T}$$

Aplicando la condición de frontera: $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right)|_{x=0}= \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right)|_{x=0}$ Derivando ψ_1, ψ_2 y luego reemplazando $x = 0$, obtenemos:

$$-A_I k_1 Sen(-\omega t) - A_R k_1 Sen(\omega t) = -A_T k_2 Sen(-\omega t) \Rightarrow A_I k_1 Sen(\omega t) - A_R k_1 Sen(\omega t) = A_T k_2 Sen(\omega t)$$

$$k_1(A_I - A_R) = k_2 A_T \Rightarrow k_1\left(1 - \frac{A_R}{A_I}\right) = k_2 \frac{A_T}{A_I}$$

De donde podremos sacar una segunda relación de la forma.

$$k_1(1 - \mathfrak{R}) = k_2 \mathfrak{T}$$

Resumiendo lo que tenemos con las dos ecuaciones de las relaciones entre los coeficientes podemos encontrar:

$$\mathfrak{R} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

También podemos obtener las siguientes relaciones:

$$A_R = \mathfrak{R} A_I$$

$$A_T = \mathfrak{T} A_I$$

Si tenemos: $k_1 = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}$ y $k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$, obtenemos:

$$\mathfrak{R} = \frac{\omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} - \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}}{\omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} + \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{2\omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}}{\omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} + \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \Rightarrow \mathfrak{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

Por otro lado, tendremos que la energía en una onda será:

$$dE = dT + dU$$

$$\begin{cases} dT & = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \\ dU & = \frac{1}{2}dm\omega^2\psi^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dT & = \frac{1}{2}\mu dx\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \\ dU & = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2\psi^2 \end{cases}$$

Resolviendo para onda armónica de la forma:

$$\psi(x,t) = ACos(kx \pm \omega t)$$

En este caso da lo mismo el símbolo que tenga en el $\pm\omega t$ ya que en la expresión, la función de onda se encuentra al cuadrado, reemplazando obtenemos:

$$dE = \frac{1}{2}\mu dx\left[A^2\omega^2 Sen^2(kx \pm \omega t) + A^2\omega^2 Cos^2(kx \pm \omega t)\right] \Rightarrow dE = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 dx(Sen^2(x \pm \omega t) + Cos^2(x \pm \omega t))$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\lambda A^2\omega^2$$

La cual es la energía para una onda También podemos expresarla de la forma:

$$E = \frac{1}{2}\mu\lambda A^2\omega^2 = \frac{1}{2}^2\omega^2\frac{2\pi}{k} = \pi A^2\frac{\omega^2}{k} = \pi\mu A^2 c\omega = \pi A^2\mu\sqrt{\frac{T}{\mu}}\omega$$

Finalmente obteniendo:

$$E = \pi A^2\omega\sqrt{T\mu}$$

Por lo que las energías para las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas será:

$$\begin{cases} E_I & = \pi A_I^2\omega\sqrt{T\mu_1} \\ E_R & = \pi A_R^2\omega\sqrt{T\mu_1} \\ E_T & = \pi A_T^2\omega\sqrt{T\mu_2} \end{cases}$$

Tendremos que los coeficientes de transmisión/reflexión de energía de la onda serán:

$$R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{\pi A_R^2\omega\sqrt{T\mu_1}}{\pi A_I^2\omega\sqrt{T\mu_1}} \Rightarrow R = \frac{A_R^2}{A_I^2}$$

$$T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{\pi A_T^2\omega\sqrt{T\mu_2}}{\pi A_I^2\omega\sqrt{T\mu_1}} \Rightarrow T = \frac{A_T^2}{A_I^2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Si consideramos las relaciones:

$$A_R = \mathfrak{R}A_I$$

$$A_T = \mathfrak{T}A_I$$

Podemos reemplazar para R y T, obtenemos:

$$R = \mathfrak{R}^2$$

$$T = \mathfrak{T}^2\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Reemplazando los valores de $\mu_1 = \mu$ y $\mu_2 = \frac{\mu}{3}$:

$$\mathfrak{R} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \mathfrak{R} = 2 - \sqrt{3} = 0,26$$

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \mathfrak{T} = 3 - \sqrt{3} = 1,26$$

Por lo que vemos se cumple la relación:

$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{T} \Rightarrow 1 + 0,26 = 1,26$$

Ahora para encontrar los coeficientes de transmisión/reflexión de energía podemos reemplazar.

$$R = (2 - \sqrt{3})^2 = 0,0717$$

$$T = (3 - \sqrt{3})^2 \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,9283$$

Tendremos la siguiente relación para las energías transmitidas y reflejadas:

$$R + T = 1$$

Para nuestro caso se cumple:

$$0,0717 + 0,9283 = 1$$

Y ahora finalmente tendremos que:

$$\begin{cases} R & = 7,17\% \\ T & = 92,83\% \end{cases}$$

Se refleja un $7,17\%$ y se transmite un $92,83\%$ de la energía de la onda. Para los casos límite tendremos:

$\Rightarrow \mu_2 = \mu_1$

$$\mathfrak{R} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_2}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_2}}} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} \Rightarrow \mathfrak{R} = 0$$

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_2}}} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} \Rightarrow \mathfrak{T} = 1$$

$$\begin{cases} R & = 0\% \\ T & = 100\% \end{cases}$$

Por lo que en este caso tendremos que un 100% de la energía será transmitida y un 0% de la energía reflejada

$\Rightarrow \mu_2 \to 0$

$$\mathfrak{R} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

Aplicando teorema del binomio de primer orden para el denominador obtenemos: $(1 + x)^k = 1 + kx$

$$\mathfrak{R} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{m_1}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{m_1}}\right) \approx \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{m_1}}\right)^2 \approx \frac{\mu_1 + 2\sqrt{\mu_1\mu_2} + \mu_2}{\mu_1}$$

Como sabemos que $\mu_2 \to 0$

$$\mathfrak{R} \approx \frac{\mu_1}{\mu_1} \Rightarrow \mathfrak{R} \approx 1$$

Si tenemos:

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

Aplicando teorema del binomio de primer orden al denominador obtenemos:

$$\mathfrak{T} \approx 2\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right) \approx 2 - 2\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Como $\mu_2 \to 0$, tendremos:

$$\mathfrak{T} \approx 2$$

Tendremos que para $T \approx (2)^2\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \to T \approx 4\sqrt{\frac{0}{\mu_1}}$. Por lo que finalmente tendremos que:

$$\begin{cases} R & \approx 100\% \\ T & \approx 0\% \end{cases}$$

Casi el 100% de la energía de la onda se refleja y casi nada se transmite.

$\Rightarrow \mu_2 \to \infty$

Para este caso usaremos la expresión:

$$\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Haciendo un arreglo algebráico para dejar a μ_2 en el denominador.

$$\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} - 1}{1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}}$$

Aplicando teorema binomial obtenemos:

$$\mathfrak{R} \approx \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} - 1\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\left(\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}\right)\left(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}\right) \approx (-1)(1) \approx -1$$

Lo que nos lleva a que $\mathfrak{R} \approx -1$ y el signo negativo nos indica que la onda invierte su amplitud.

$$\mathfrak{T} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Haciendo álgebra para poner a μ_2 en el denominador obtenemos:

$$\mathfrak{T} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)}$$

Usando teorema binomial obtenemos:

$$\mathfrak{T} \approx 2\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)$$

Como sabemos que $\mu_2 \to \infty$, nuestro coeficiente de transmisión de onda tiende a 0. Por lo que $\mathfrak{T} \approx 0$ Finalmente obtendremos que:

$$\begin{cases} R & \approx 100\% \\ T & \approx 0\% \end{cases}$$

Vemos que la onda refleja casi en un 100% la energía pero también se invierte como pudimos concluir del coeficiente de reflexión de onda, y en este caso no se logra transmitir la energía.