Clase nº27

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

8 de Noviembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular el área de un sólido de revolución.

Clase pasada

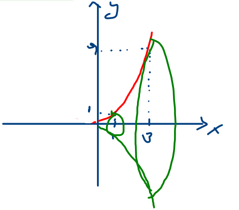
Teorema 34

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no negativa y con primera derivada continua. Entonces el área de la superficie, S_f, que se obtiene al girar f en torno al eje X es

$$A(S_f) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Ejemplo 87

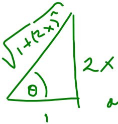
Calcular el área de la superficie que se genera al girar $y = x^2$, considerando que $x \in [1, 3]$, en torno al eje X.



Sea $f(x) = x^2$. Luego $f'(x) = 2x$.

Así,

$$A(S_f) = 2\pi \int_1^3 x^2 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx$$



$\tan\theta = 2x \iff \dfrac{\tan\theta}{2} = x$

además, $dx = \dfrac{\sec^2\theta}{2}\, d\theta$.

Luego,

$$A(S_f) = 2\pi \int_a^b \frac{\tan^2\theta}{4} \cdot \sqrt{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{\sec^2\theta}{2}\, d\theta,$$

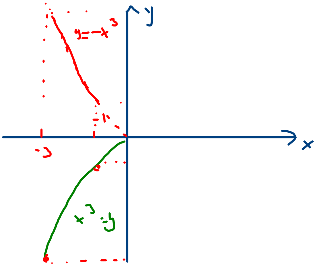
$a = \arctan(2)$
$b = \arctan(6)$

$$= \frac{2\pi}{8} \int_a^b \tan^2\theta \cdot \sec^3\theta \, d\theta \quad \checkmark\checkmark$$

= Completar . . .

Ejemplo 88

Calcular el área de la superficie que se genera al girar $y = x^3$, considerando el intervalo $[-3, -1]$, en torno al eje X.



Sea $f(x) = -x^3$. $x \in [-3, -1]$.

$$A(S_y) = 2\pi \int_{-3}^{-1} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{-1} -x^3 \sqrt{1 + [3x^2]^2}\, dx$$

$$= -2\pi \int_{-3}^{-1} x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

$=$ Completar...

Hint: $u = 1 + 9x^4$

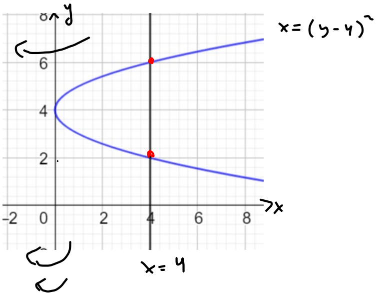
Teorema 35

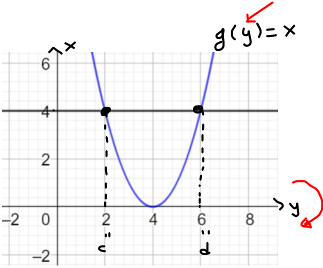
Si $g(y)$ es una función no negativa en el intervalo $[c, d]$, que tiene primera derivada continua. Entonces el área de la superficie, S_g, que se obtiene al girar $x = g(y)$ en torno al eje Y es

$$A(S_g) = 2\pi \cdot \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

Ejemplo 89

Calcular el área de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje Y la curva $x = (y-4)^2$, considerando que $x \in [0, 4]$.





Sea $g(y) = (y-4)^2$. como $x \in [0, 4]$ tenemos que

- Si $x=0$ entonces $0=(y-4)^2$

$$\Rightarrow \quad y=4.$$

- Si $x=4$ entonces $4=(y-4)^2 \quad /\sqrt{\ }$

$$\Rightarrow \quad 2=|y-4|$$

$$\Rightarrow \quad (2=y-4 \quad \vee \quad -2=y-4)$$

$$\Rightarrow \quad (y=6 \quad \vee \quad y=2)$$

Con esto $c=2$, $d=6$.

Luego,

$$A(S_y)=2\pi\int_2^6 (y-4)^2\sqrt{1+[2(y-4)]^2}\,dy$$

$$=2\pi\int_2^6 (y-4)^2\sqrt{1+4(y-4)^2}\,dy$$

cambio de variable: $u=y-4 \Rightarrow du=dy$

además, $y\in[2,6]$, es decir

$$2\le y\le 6 \iff -2\le y-4\le 2$$

$$\iff -2\le u\le 2.$$

$$=2\pi\int_{-2}^{2} u^2\sqrt{1+4u^2}\,du$$

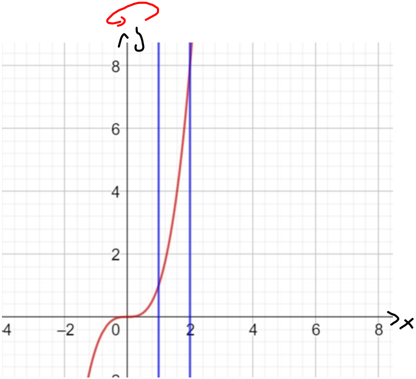
$$=\text{completar} \ldots$$

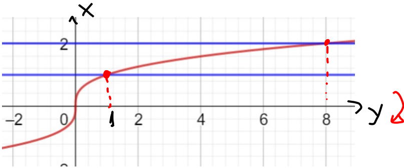
Ejemplo 90

Encuentra el área de superficie que se genera al girar $y = x^3$ en $[1, 2]$ en torno al eje Y.

Notar que

$y = x^3 \iff \sqrt[3]{y} = x$





Si $x = 1$ entonces $y = 1^3 = 1$

Si $x = 2$ entonces $y = 2^3 = 8$.

Sea $g(y) = \sqrt[3]{y}$ y $g'(y) = \dfrac{1}{3\, y^{2/3}}$

Luego,

$$A(S_g) = 2\pi \int_1^8 \sqrt[3]{y} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{3\, y^{2/3}}\right]^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^8 \sqrt[3]{y} \sqrt{\frac{9y^{4/3} + 1}{9y^{4/3}}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^8 \frac{\sqrt[3]{y}}{3\, y^{2/3}} \cdot \sqrt{9y^{4/3} + 1}\, dy$$

Sea $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{y}}{3\, y^{2/3}} \sqrt{9y^{4/3} + 1}\, dy$ y el

cambio de variable $u = y^{1/3}$, $du = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\, dy$. Luego,

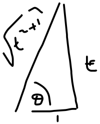
$$I = \int u\sqrt{9u^4+1}\,du \quad , \quad u = \frac{v}{\sqrt{3}} \Rightarrow du = \frac{dv}{\sqrt{3}}$$

$$= \int \frac{v}{\sqrt{3}}\sqrt{v^4+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dv.$$

$$= \frac{1}{3}\int v\sqrt{v^4+1}\,dv \quad , \quad t = v^2 \Rightarrow dt = 2v\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\int \sqrt{t^2+1}\,dt$$



$\tan\theta = t$

$dt = \sec^2\theta\,d\theta$

$$= \frac{1}{6}\int \sqrt{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int \sec^3\theta\,d\theta$$

$= \ldots$ Completer.

Investigar

Ejercicio

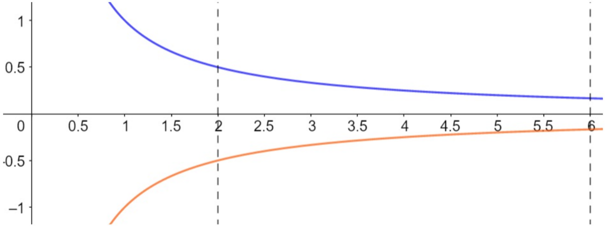
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada continua. ¿De qué manera se puede calcular el área de la superficie, S_f, que se obtiene al girar f en torno a la recta $y = k$, $k \in \mathbb{R}$?

Ejercicio

Sea $g(y)$ una función en el intervalo $[c, d]$, que tiene primera derivada continua. ¿De qué manera se puede calcular el área de la superficie, S_g, que se obtiene al girar g en torno a la recta $x = k$, $k \in \mathbb{R}$?

Ejercicio propuesto

Calcular el área de la superficie generada al rotar $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[2, 6]$.



Ejercicio Propuesto

Sea

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \ \wedge y \leq \frac{1}{x} \ \wedge y \leq x+1 \ \wedge \ x \geq 0 \right\}.$$

Calcular:

a) El área de R.

b) El perímetro de R.

c) El volumen que se genera al rotar R en torno al eje X.

d) El volumen que se genera al rotar R en torno al eje Y.

e) El área de la superficie de revolución generada al rotar R en torno al eje X.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.