Determinantes: ideas básicas

Ya hemos visto en las clases pasadas como calcular determinantes de matrices 2×2 y también de matrices 3×3.

Revisemos esas ideas antes de seguir.

Para matrices 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para matrices 3×3 y ocupando la regla de Sarrus, podemos ver que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

Permutaciones

Salgamos por un instante del álgebra lineal y vayamos a un problema más sencillo.

¿De cuántas formas pueden dos amigos sentarse juntos en los asientos de un bus?

Respuesta: 2

1 2

2 1

A esa idea la llamaremos **permutaciones de dos elementos.**

¿Y de cuántas formas pueden tres amigos sentarse juntos en tres asientos de un avión?

Respuesta: 6

1 2 3   1 3 2   2 1 3   2 3 1   3 1 2   3 2 1

A esa idea la llamaremos **permutaciones de tres elementos**.

¿Cómo sigue esta sucesión numérica? ¿Cómo podemos calcular cuántas **permutaciones de cuatro elementos** hay sin tener que escribirlas todas?

Tenemos cuatro amigos: A B C D

Y tenemos cuatro asientos: __ __ __ __

Le pedimos a A que elija uno de los asientos. Tiene 4 posibilidades de elección.

Por ejemplo: __ __ A __

Ahora nos quedan tres asientos libres y tres amigos, etc.

Es decir, el primer chico tuvo 4 posibilidades para elegir asientos, el siguiente 3, el siguiente 2 y el último 1.

Las permutaciones de cuatro elementos son 24,

$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

En general, el **número de permutaciones de n elementos** es:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_n = n! \quad \text{(se lee n factorial)}$$

Nota al pie: Recordemos que 0! = 1 1! = 1

Inversiones

Volvamos al caso de tres elementos, ¿cuántas permutaciones de tres elementos hay?

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Exactamente el número de términos que tiene un determinante de orden 3.

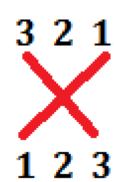
Elijamos la situación más sencilla (aquella en la cual los números están en orden)

1 2 3 (la permutación canónica)

Y elijamos alguna otra: 3 2 1

¿Cuántas inversiones de lugares debo hacer para convertir la segunda en la primera?

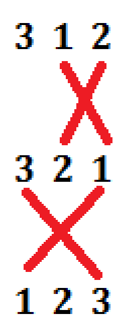
Una sola, que sería como intercambiar asientos.



Elijamos otra:

3 1 2

¿Cuántas inversiones debo hacer para llevarla a la canónica? Son **dos inversiones**.



Volvamos ahora al determinante de la matriz cuadrada de tercer orden. Tiene 6 términos

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Y ahora lo más interesante. Los coeficientes de las filas (es decir los primeros números de cada par) están ordenados: 1 2 3. Mientras que los de las columnas (los segundos números de cada par) van formando todas las permutaciones posibles de ellos.

¿Y el signo de cada término? Será positivo si el número de inversiones para llevar la permutaci de los coeficientes de columnas a los de fila es par y negativo si ese número de inversiones es impar.

Examinen la situación en el determinante de orden dos que es bien sencilla de entender.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{\boxed{1}1} \cdot a_{\boxed{2}2} - a_{\boxed{1}2} \cdot a_{\boxed{2}1}$$

Los coeficientes de las filas están siempre ordenados (números negros): $\boxed{1}\,\boxed{2}$

Los coeficientes de las columnas aparecen en todos los órdenes posibles, formando **la permutación roja (1 2)** **y** **la permutación verde (2 1).** El signo dependerá del número de inversiones que necesitan para llevar la permutación roja a la negra (0 inversiones, par, positivo) o la permutación verde a la negra (1 inversión, impar, negativo)

Tenemos entonces, la definición de determinante ...

Definición de determinante:

Para una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de dimensión $n \times n$, se define su **determinante** como:

$$\det A = \sum_{1}^{n!} (-1)^i (a_{1,p_1} . a_{2,p_2} . a_{3,p_3} \dots a_{n,p_n})$$

donde $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ son todas las permutaciones posibles de la n-úpla $(1,2,3, \dots, n)$ y la suma se realiza sobre el total de permutaciones de n elementos que pueden formarse siendo i el número de inversiones de cada permutación.

Ejercicios:

1. Calcula utilizando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x - y - z & 2x & 2x \\ 2y & -x + y - z & 2y \\ 2z & 2z & -x - y + z \end{vmatrix}$$

Resp: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^3$

2. (a) Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1+2 & 0+1 & 5+3 \end{pmatrix}$$

decide la validez de las propiedades:

1. $\det C = \det A + \det B$
2. $\det A = \det A^t$

3. Dadas dos matrices 2 x 2 genéricas, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

comprueba que:

I. $\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$

II. Si A es regular, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

III. $\det A^t = \det A$

IV. $\det(kA) = k^2 \cdot \det A$

¿Cómo quedaría esta última propiedad si A fuera una matriz *3 x 3.*

4. Siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcular:

$\det(A^t \cdot B^2)$ $\qquad \det(C + 2D)$ $\qquad \det(C - 3I)$ $\qquad \det(C^{-1}DC)$

5. (a) Desarrolla el determinante de la matriz A, utilizando la regla de Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(b) Comprueba que si intercambias las filas 2 y 3 de dicha matriz, el determinante de la matriz B así obtenida cambia de signo.

(c) Calcula los determinantes de las matrices A y B. ¿Qué observas? ¿Puedes justificarlo mediante la propiedad anterior?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$