PROBLEMA I (FORMA B) I.1.B

1) dado que en la trayectoria parabólica $E=0$ se cumple que:

$$E_B = 0$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{G m M}{r_B} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$V_B = \left[\frac{2GM}{r_B}\right]^{1/2} \quad //$$

2) $L = cte$ en toda la trayectoria AB, por conveniencia la evaluamos en B:

$$L = L_B = m r_B V_B = m\sqrt{2GMr_B} \quad //$$

3) En una elíptica se cumple que $E = -\frac{GmM}{r_{max}+r_{min}}$

donde $r_{max} = r_B$ y $r_{min} = R$ $\therefore$ $E = -\frac{GmM}{r_B+R}$ //

dado que $E = cte.$, para el punto B se cumple que: I.2.B

$$E_B = \frac{1}{2} m V_B'^2 - \frac{GmM}{r_B}$$

entonces:

$$\frac{1}{2} m V_B'^2 - \frac{GmM}{r_B} = -\frac{GmM}{r_B + R}$$

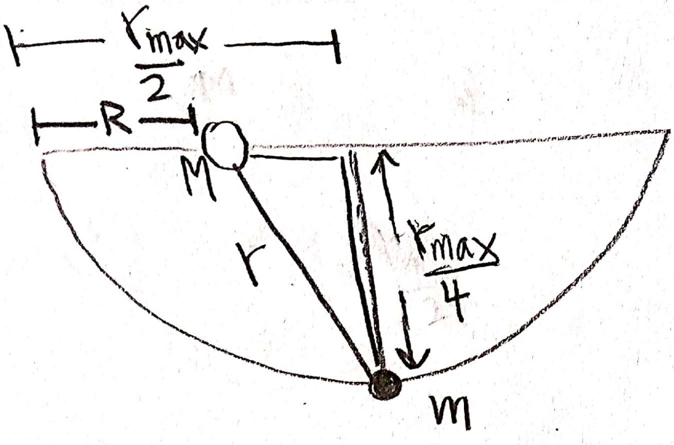
$$\Downarrow$$

$$V_B' = \left[2GmM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{B+R}} \right) \right]^{1/2}$$

4) Por analogía respecto al resultado anterior y evaluando la energía mecánica en C, se tiene que:

$$V_C' = \left[2GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_{B+R}} \right) \right]^{1/2}$$

5) dado que $L = cte = mr^2\omega$, entonces I.3.B



donde $r^2 = \left(\frac{r_{max}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{r_{max}}{2}\right)^2$

siendo $r_{max} = r_A + R$

$\therefore$

$$r^2 = \left(\frac{r_B + R}{2} - R\right)^2 + \frac{1}{16}(r_B + R)^2$$

$$r^2 = \frac{(r_B - R)^2}{4} + \frac{1}{16}(r_B + R)^2 \;//$$

como $L = cte$ lo evaluamos por convenien-cia en C:

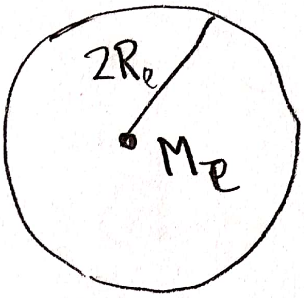
$$L = L_c = mRV_c' \quad \therefore \quad \cancel{m}RV_c' = \cancel{m}r^2\omega$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{RV_c'}{r^2} \;//$$

PROBLEMA I (FORMA C)

I.1.C

1)



De la 2ª ley de Newton:

$$F_c = m a_c$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{G M_e \cancel{m}}{R_e^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v_0^2}{\cancel{R_e}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{G M_e}{2 R_e}}$$

donde $T_0 = \frac{2\pi(2R_e)}{v_0} = \frac{4\pi R_e}{\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}} = 4\pi\sqrt{\frac{2R_e^3}{GM_e}}$

2) Para órbitas circulares se conoce que:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{G M_e m}{r}$$; con r = radio de la órbita correspondiente.

Luego:

$$\Delta E_{min} = E_{final} - E_{inicial}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{G M_e m}{2R_e} + \frac{1}{2}\frac{M_e m}{4R_e}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{G M_e m}{R_e}\left[1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{G M_e m}{R_e}$$

3) a) La energía mecánica para una órbita elíptica es la expresión: $E = -\frac{G M_e m}{r_{max} + r_{min}}$

para nuestro caso:

$$r_{min} = 2R_e \quad y \quad r_{max} = 4R_e$$ II.2.c

$$\therefore \quad E = -\frac{GM_e m}{6R_e}$$

b) $E = cte.$ $\quad E_A = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_e m}{2R_e}$

$$= cte = -\frac{GM_e m}{6R_e}$$ (en la órbita elíptica)

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\cancel{m}V^2 - \frac{GM_e \cancel{m}}{2R_e} = -\frac{GM_e \cancel{m}}{6R_e}$$

$$V^2 = 2\frac{GM_e}{R_e}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= 2\frac{GM_e}{R_e}\frac{1}{3}$$

$$V = \left[\frac{2}{3}\frac{GM_e}{R_e}\right]^{1/2}$$

c) De la 3ª ley de Kepler se tiene que:

$$\frac{T^2}{a^3} \qquad \frac{T_0^2}{(2R_e)^3} = \frac{T_{elipse}^2}{\left(\frac{6R_e}{2}\right)^3} \implies \frac{T_0^2}{8R_e^3} = \frac{T_{elipse}^2}{(3R_e)^3}$$

semieje mayor.

I.3.C

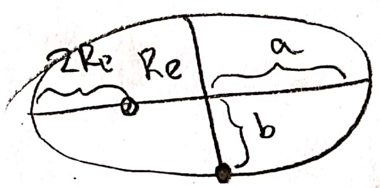
luego

$$\frac{T_0^2}{8\cancel{R_e^3}} = \frac{T_{elipse}^2}{27\cancel{R_e^3}} \Rightarrow T_{elipse} = \sqrt{\frac{27}{8}}\, T_0$$

$$T_{elipse} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, T_0$$

$\therefore$ $t_{AB} = \dfrac{T_{elipse}}{2}$ // (dado que el trayecto AB es la mitad de la órbita)

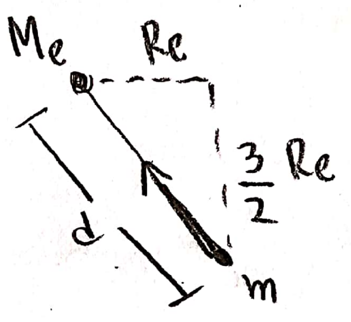
4)



donde $a = 3R_e$

$b = \frac{3}{2} R_e$

$\Downarrow$



$\therefore$ $F = \dfrac{G M_e m}{d^2}$

donde

$$d^2 = R_e^2 + \frac{9}{4} R_e^2$$

$$= \frac{13}{4} R_e^2$$

6

$\therefore$ $F = \dfrac{4}{13} G \dfrac{M_e m}{R_e^2}$ //