Clase nº38

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

3 de Diciembre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular radio e intervalo de convergencia de series de potencias.
- Determinar la serie de Taylor de una función.

Series de potencias

Ejemplo 48

Encontrar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3n+1}.$$

Operaciones con series de potencias

Teorema

Si

- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, en $|x-a| < R_1$,
- $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-a)^n$, en $|x-a| < R_2$,

entonces:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R,$$

donde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Series de Taylor

Teorema de Taylor (Forma 1)

Si $f(x)$ y sus primeras $(n+1)$ derivadas son continuas en $[b_1, b_2]$ y si $b_1 < a < b_2$, entonces para x en el intervalo dado se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x,a),$$

donde,

$$R_n(x,a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)\, dy.$$

Series de Taylor

Definición

- El término $R_n(x,a)$ se llama resto.
- $f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ se llama polinomio de Taylor de grado n y centrado en a de f.
- Si f tiene las derivadas continuas de todos los ordenes entonces los polinomios de Taylor se pueden transformar en una serie llamada **serie formal de Taylor:**

$$f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Le diremos formal porque no sabemos a priori si esta serie realmente converge a $f(x)$.

Series de Taylor

Observación

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$ converge a $f(x)$, en algún intervalo centrado en $x = a$ si y sólo si $R_n(x, a) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Series de Taylor

Teorema de Taylor Forma 2

Si $f(x)$ y sus primeras n derivadas son continuas y la derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe en un intervalo $[b_1, b_2]$. Sea a tal que $b_1 < a < b_2$. Entonces para todo x en $]b_1, b_2[$ se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x,a),$$

donde $R_n(x,a) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c^*)}{(n+1)!}$, para algún c^* tal que $a < c^* < x$.

Series de Taylor

Observación

- Si $R_n(x,a) \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces $f(x)$ puede representar mediante la serie de Taylor centrada en a en algún intervalo que contiene al punto a.
- Cuando $a = 0$, la serie resultante por esta vía se llama **serie de Maclaurin** y tiene la forma:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Series de Taylor

Ejemplo 49

La serie exponencial: Sea $f(x) = e^x$. Mostrar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Series de Taylor

Ejemplo 50

La serie exponencial: Sea $f(x) = \cos x$. Mostrar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Series de Taylor

Ejemplo 51

La serie geométrica.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Series de Taylor

Ejemplo 52

Muestre que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

Series de Taylor

La serie de seno

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La serie binomial

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1.$$

Series de Taylor

Ejercicio propuesto

1. Muestre que
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$
2. Muestre que
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.