Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 21

Isometrías

Definición: Una **isometría** es una transformación lineal $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que conserva el producto punto de dos vectores cualesquiera $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ del espacio vectorial V.

Es decir, se cumple que:

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$$

Se puede probar que, si se conserva el producto punto, entonces se conservan las distancias y los ángulos, es decir, una isometría no deforma las figuras. Transforma, por ejemplo, a un cuadrado en un cuadrado congruente al original.

Ejemplo: Probar que la transformación $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuya matriz de transformación es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

es una isometría.

Solución: Apliquemos la matriz a dos vectores genéricos $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Calculemos $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}8u_x + 0{,}6u_y \\ -0{,}6u_x + 0{,}8u_y \end{pmatrix} \end{array}$$

Y calculemos $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}8v_x + 0{,}6v_y \\ -0{,}6v_x + 0{,}8v_y \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalmente, calculemos el producto punto de esas dos transformadas …

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = (0{,}8u_x + 0{,}6u_y)(0{,}8v_x + 0{,}6v_y) + (-0{,}6u_x + 0{,}8u_y)(-0{,}6v_x + 0{,}8v_y)$$

Operando,

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = 0{,}64u_xv_x + 0{,}36u_yv_y + 0{,}36u_xv_x + 0{,}64u_yv_y$$

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = u_xv_x + u_yv_y$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

Es una isometría.

Propiedad:
Todas las isometrías tienen como matriz asociada a una matriz **ortogonal**, esto es una matriz tal que su inversa es igual a su traspuesta.

$$\boldsymbol{A^{-1} = A^{t}}$$

Las matrices ortogonales tienen determinante igual a $+1$ o -1.

Probemos que la matriz del ejemplo anterior es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Cambio filas por columnas,

$$A^{t} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Deberá ser

$$\boldsymbol{A \cdot A^{t} = I}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se comprueba que

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos interesantes de isometrías en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$

1. Rotaciones

Consideren en $\mathbf{R^2}$ las rotaciones de centro (0,0) y ángulos de giro 90°, 180° y 270°.

R(O, 90°)
Rotación de centro (0,0) y ángulo de giro de 90° en sentido antihorario.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o, en general

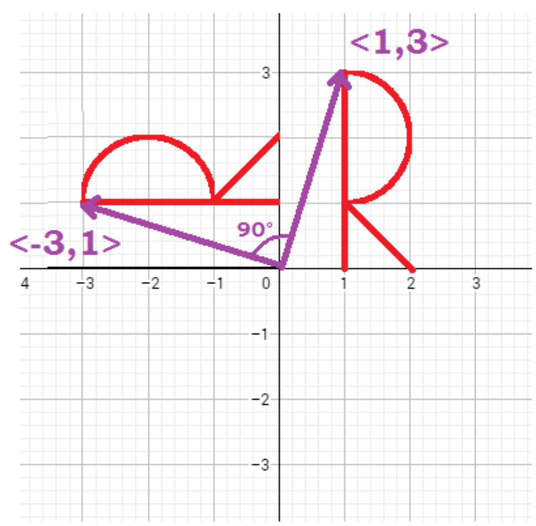
$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = +1$$

Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$



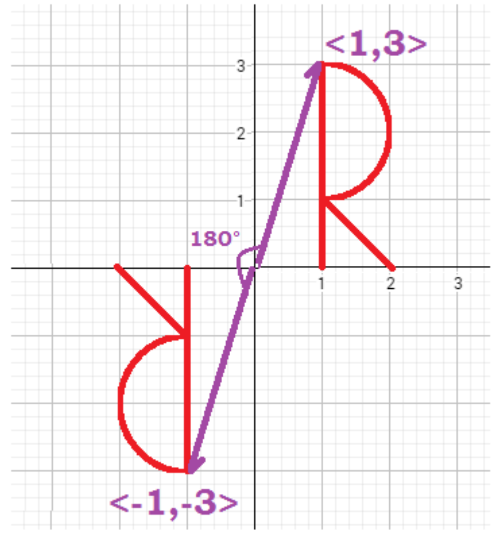
R (O, 180°) o Simetría Central
Rotación de centro (0,0) y ángulo de giro de 180° en sentido antihorario.

$$T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\det M \ = \ +1$$



Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}\end{array}$$

Podemos comprobar además que la composición de dos rotaciones de ángulo 90° es una rotación de ángulo 180°:

R (O, 90°) o R (O, 90°) = R (O, 180°)

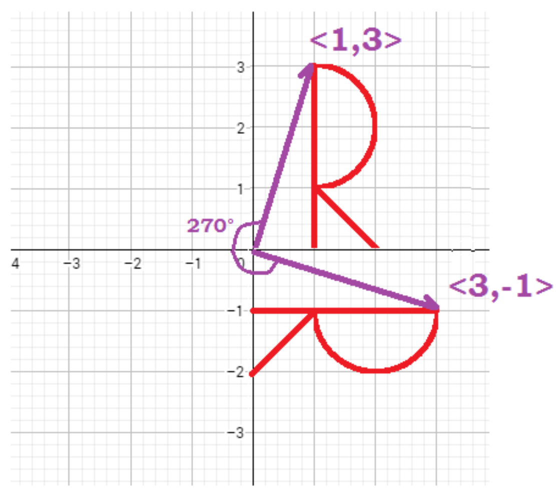
Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\end{array}$$

R (O, 270°)
Rotación de centro (0,0) y ángulo de giro de 270° en sentido antihorario.

$$M = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det M \ = \ +1$$



Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{array}$$

En general …

R(O, α)
Rotación de centro (0,0) y ángulo de giro α en sentido antihorario.

$$M = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

2. Simetrías:

Simetría axial Sx:
Simetría de eje x

$$T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

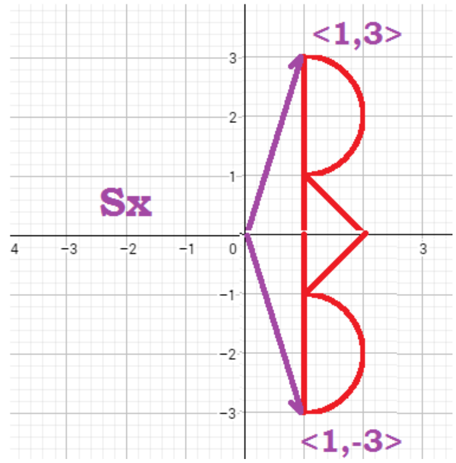
$$(x,y)\to(x,-y)$$

$$M=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\det M\ =\ -1$$

Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\end{array}$$



Simetría axial Sy:
Simetría de eje y

$$T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

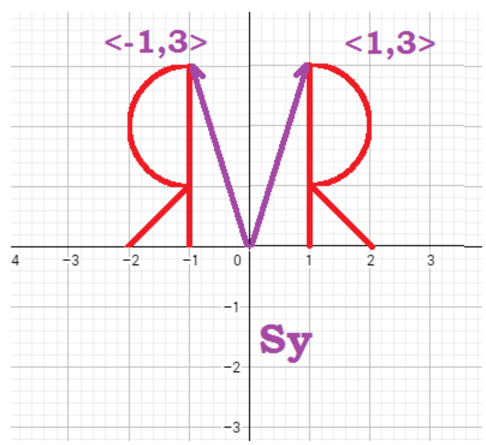
$$(x,y)\to(-x,y)$$

$$M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

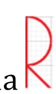
$$\det M\ =\ -1$$

Se comprueba:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\end{array}$$



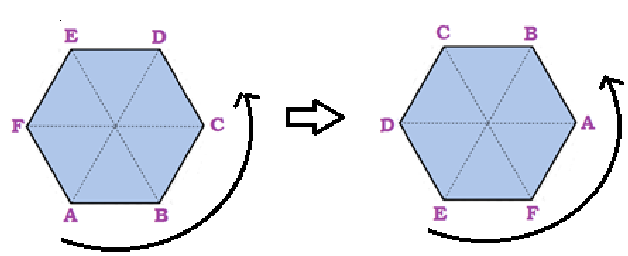
Movimientos directos e inversos del plano.

Observen las tres rotaciones investigadas antes. Convierten a la  de la figura en otra .

Sin embargo las dos simetrías axiales Sx y Sy convierten a la  en la  del espejo", letra que no existe en nuestro alfabeto.

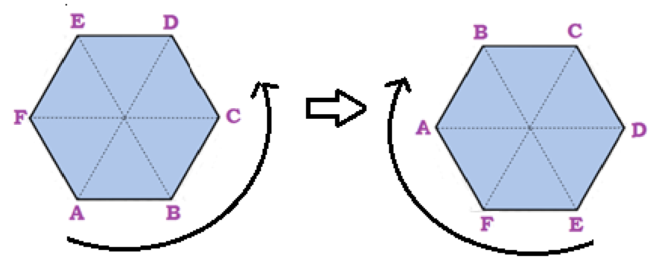
Las rotaciones y la simetría central son **movimientos directos del plano.** Conservan el sentido de giro del orden alfabético de los vértices de la figura.

$$\mathbf{\det M\ =\ +1}$$



Las simetrías axiales son **movimientos inversos del plano.** Invierten el sentido de giro del orden alfabético de los vértices de la figura. La figura se convierte en la figura del espejo

$$\det M = -1$$



Tres ejemplos en R³

Exploremos ahora unos pocos ejemplos en el espacio.

1. Simetría con respecto al plano XY. Deberá transformar a un vector

$$(x, y, z) \to (x, y, -z)$$

Su matriz será:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Simetría con respecto al eje z: Deberá transformar a un vector

$$(x, y, z) \to (-\mathrm{x}, -\mathrm{y}, \mathrm{z})$$

Su matriz será:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Rotación de ángulo α alrededor del eje z: Su matriz será:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Compruebe que se cumplen las siguientes composiciones de isometrías:

(a) **Sx o Sy = R (O, 180°)**

(b) **R (O, 90°) o R (O, 270°) = I**

(c) **R (O, 90°) o R (O, -90°) = I**

2. (a) Encuentre la matriz de la transformación que simetriza un punto (a, b) cualquiera del plano con respecto a la recta de ecuación $y = mx$

(b) Pruebe, para $m = 2$, que es una isometría, y que es un movimiento inverso del plano.

Respuesta: $\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}$