Clase nº5

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

1 de Septiembre 2021

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin^m \cos^n x \, dx$

Caso a) Si n y m son números pares utilizamos simultáneamente las dos identidades

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Luego utilizaremos los métodos vistos anteriormente.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 22

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Observación

Como en el ejemplo anterior, a veces podemos resolver este tipo de integrales expresando seno en términos de coseno (o coseno en términos de seno) mediante la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Y luego podemos utilizar las estrategias antes vistas.

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Caso b) Si n o m son números impares utilizaremos algo similar a lo expuesto para integrales de la forma $\int \sin^n x \, dx$ y $\int \cos^n x \, dx$, con n impar.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 23

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^7 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejercicio propuesto

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \tan^n x \, dx$

Para $n \geq 2$, podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición

$$\tan^n x = \tan^2 x \cdot \tan^{n-2} x.$$

b) Sustituir

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

c) Integrar utilizando métodos trabajados.

Integración de Funciones Trigonométricas

Recordar

- $\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$

Ejemplo 24

$$\int \tan^4 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$

Caso a): Para n par podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición

$$\sec^n x = \sec^2 x \cdot \sec^{n-2} x.$$

b) Sustituir

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1.$$

c) Integrar utilizando método de cambio de variable (sustitución).

Ejemplo 25

$$\int \sec^4 x \, dx =$$

Integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$

Caso b): Para n impar podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición
$$\sec^n x = \sec^2 x \cdot \sec^{n-2} x.$$

b) Integrar utilizando método de integración por partes.

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 26

$$\int \sec x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 27

$$\int \sec^3 x \, dx =$$

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\displaystyle\int \cot^n x \, dx$ y $\displaystyle\int \csc^n x \, dx$

De manera similar a las integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$, lo que realizaremos de manera general es:

- Descomponer

$$\cot^n x = \cot^2 \cdot \cot^{n-2} \quad \text{o} \quad \csc^n x = \csc^2 x \cdot \csc^{n-2}$$

- Utilizar de manera conveniente:

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

- Integrar por medio de método de sustitución o de integración por partes.

Integración de Funciones Trigonométricas

Recordar

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x \quad \text{y} \quad \frac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cdot \cot x.$$

Ejercicio propuesto

a) $\displaystyle\int \csc x \, dx =$

b) $\displaystyle\int \csc^6 x \, dx =$

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ con respecto a x?

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{x^2+16}$ con respecto a x?

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

¿Cómo puedo integrar la función $\dfrac{x^2}{x^2-9}$ con respecto a x?

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

Para las integrales que involucran potencias enteras de x y de una de las raíces: $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{x^2+a^2}$ se puede realizar las siguientes substituciones: $x = a\sin\theta, x = a\tan\theta, x = a\sec\theta$.

a) La substitución $x = a\sin\theta$.
Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2-x^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a\sin\theta$.
Así tenemos:

$$x = a\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$-a \leq x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos\theta| = a\cos\theta.$$

Integración por sustituciones trigonométricas

b) La substitución $x = a\tan\theta$.

Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2+a^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a\tan\theta$. Se tiene

$$x = a\tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x \in]-\infty, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = a|\sec\theta| = a\sec\theta, \text{ pues } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Integración por sustituciones trigonométricas

c) La substitución $x = a\sec\theta$.
Es adecuada para integrales de funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 - a^2}$, con $a > 0$. Si utilizamos $x = a\sec\theta$ entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
x = a\sec\theta \quad &\Leftrightarrow \quad \theta = arcsec\left(\frac{x}{a}\right)\\
x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]\\
dx &= a\sec\theta\tan\theta\, d\theta\\
\sqrt{x^2 - a^2} &= a|\tan\theta|
\end{aligned}
$$

Integración por sustituciones trigonométricas

Ejercicios propuestos

1. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx =$
2. $\displaystyle\int \sec^7 x \, dx =$
3. $\displaystyle\int \csc^3 x \, dx =$
4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \, dx =$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}} \, dx =$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} \, dx =$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.