Clase nº20

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

15 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular el volumen de un sólido de revolución.

Revisión del Certamen 1

Observaciones

a) Deben utilizar las igualdades donde corresponda.
b) Deben utilizar los paréntesis si corresponde.
c) Deben cuidar la redacción y coherencia.

Clase anterior

Teorema 32

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R,

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

en torno al eje X está dado por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Clase anterior

Observación

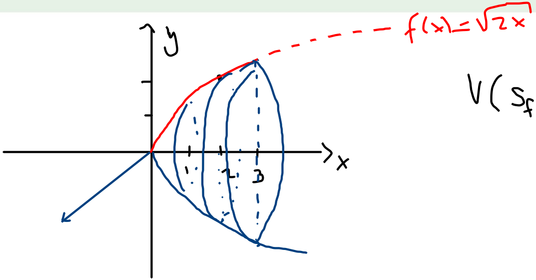
Este método se puede usar para calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar una curva, definida por la función $y = f(x), a \leq x \leq b$, alrededor de una recta $y = y_0$. La única condición es que la recta y la curva no se intersecten. En este caso el volumen requerido es

$$V(S_f) = \pi \int_a^b (y_0 - f(x))^2 \, dx.$$

Clase anterior

Ejercicio propuesto

a) Calcular el volumen del paraboloide circular generado al rotar el segmento de parábola $y = \sqrt{2x}$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje X.



$$V(S_f) = \int_0^3 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^3 \pi \cdot 2x \, dx$$

$$= \pi \cdot x^2 \Big/_0^3$$

$$= 9\pi.$$

Clase anterior

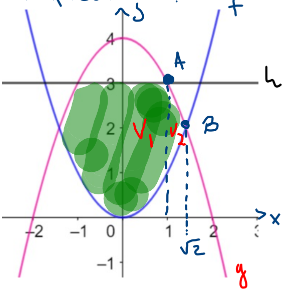
Ejercicio propuesto

b) Sea la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x^2+4 \geq y \quad \wedge \quad y \geq x^2 \quad \wedge \quad y \leq 3\}.$$

Determinar el volumen generado por R al rotar con respecto al eje X.

· Graficar R.



Sean $g(x) = -x^2+4$

$f(x) = x^2$

$h(x) = 3.$

Obs: f, g, h son funciones pares.

Vamos a buscar A y B.

Para encontrar A tenemos que

$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2+4 = 3$$
$$\Leftrightarrow 1 = x^2$$
$$\Leftrightarrow (x=1 \lor x=-1)$$

$\therefore$, $A = (1,3)$.

Para encontrar el punto B tenemos que

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow -x^2+4 = x^2$$
$$\Leftrightarrow 4 = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow 2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow (x=\sqrt{2} \lor x=-\sqrt{2})$$

$\therefore$, $B = (\sqrt{2}, 2)$

Luego,

$$V_1 = \int_0^1 \pi \left[h(x)\right]^2 dx - \int_0^1 \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_0^1 \pi \left[3\right]^2 dx - \int_0^1 \pi \left[x^2\right]^2 dx$$

$= \text{ejercicio}$

$$= \frac{44}{5}\pi.$$

$$V_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left[g(x)\right]^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left[-x^2+4\right]^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left[x^2\right]^2 dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left(-8x^2+16\right) dx$$

$= \ldots$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{40}{3}\pi$$

El volumen buscado es

$$V_R = 2\left(V_1 + V_2\right)$$

$$= 2\left(\frac{44}{5}\pi + \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{40}{3}\pi\right)$$

Método de las cortezas o cilindros

Ejercicio Propuesto

Encuentre el volumen del cono generado al rotar el triángulo formado por los segmentos de las rectas $y = \frac{x}{4}$ con $x \in [-4, 0], x = -4$ y el eje X :

a) en torno al eje X.

b) en torno a la recta $x = -4$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.