Teorema I. Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n \tag{3-10}$$

donde las C son constantes arbitrarias, también es una solución.

La demostración de este teorema es inmediata a partir del hecho de que

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \nabla^2 C_1\varphi_1 + \nabla^2 C_2\varphi_2 + \cdots + \nabla^2 C_n\varphi_n \\ &= C_1\nabla^2\varphi_1 + C_2\nabla^2\varphi_2 + \cdots + C_2\nabla^2\varphi_n \\ &= 0\end{aligned}$$

Utilizando el teorema I podemos superponer dos o más soluciones de la ecuación de Laplace, de tal manera que la solución resultante satisfaga un conjunto dado de condiciones en la frontera. Se darán ejemplos en las siguientes secciones.

Teorema II: Teorema de unicidad. Dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Para demostrar este teorema consideremos una región cerrada V_0 exterior a las superficies $S_I, S_{II}, \ldots, S_N$ de los diversos conductores del problema y limitada en el exterior por una superficie S, siendo esta última una superficie en el infinito o una superficie física real que encierra V_0. Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación de Laplace en V_0 que, además, tienen las *mismas* condiciones en la frontera sobre $S, S_I, S_{II}, \ldots, S_N$. Estas condiciones en la frontera pueden determinarse asignando valores ya sea para φ o $\partial\varphi/\partial n$ sobre las superficies limitadoras.

Definimos una nueva función $\boldsymbol{\Phi} = \varphi_1 - \varphi_2$. Evidentemente, $\nabla^2\boldsymbol{\Phi} = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$ en V_0. Por otro lado, $\boldsymbol{\Phi}$ o $\mathbf{n}\cdot\nabla\boldsymbol{\Phi}$ se anula en las fronteras. Así, aplicando el teorema de la divergencia al vector $\boldsymbol{\Phi}\nabla\boldsymbol{\Phi}$ tenemos:

$$\int_{V_0} \nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)\,dv = \int_{S+S_I+\cdots+S_N} \Phi\nabla\Phi\cdot\mathbf{n}\,da = 0$$

ya que la segunda integral se anula. La divergencia puede desarrollarse según la ecuación (1.1.7) de la tabla 1.1 para que dé:

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

Pero $\nabla^2\boldsymbol{\Phi}$ se anula en todos los puntos de V_0, de modo que el teorema de la divergencia se reduce en este caso a

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2\,dv = 0$$

Ahora $(\nabla\boldsymbol{\Phi})^2$ debe ser positivo o cero en cada punto de V_0 y, puesto que su integral es cero, es evidente que $(\nabla\boldsymbol{\Phi})^2 = 0$ es la única posibilidad.

El teorema queda así esencialmente demostrado. Una función cuyo gradiente es cero en todos los puntos no puede cambiar; por tanto, en todos los puntos de V_0, $\boldsymbol{\Phi}$ tiene el mismo valor que el que tiene en las superficies limitadoras. Si las condiciones en la frontera se han dado al especificar φ_1 y φ_2 en las superficies S, S_1, . . . , S_N, entonces, puesto que $\boldsymbol{\Phi} = 0$ sobre estas superficies, éste se anula en todo V_0. Si las condiciones en la frontera se dan en función de $\partial\varphi_1/\partial n$ y $\partial\varphi_2/\partial n$, entonces $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ es igual a cero en todos los puntos de V_0 y $\nabla\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre las fronteras. La única solución compatible con el último enunciado es que $\boldsymbol{\Phi}$ sea igual a una constante.