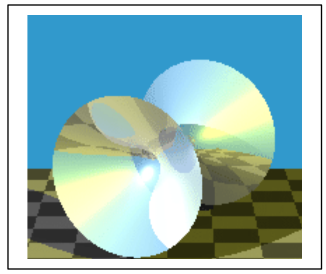
Superficies Cuádricas y Cilíndricas



Superficies cuádricas

En $\mathbb{R}^3$, una superficie cuádrica corresponde a la gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Las superficies que se estudiaran, son aquellas en las cuales los coeficientes $D = E = F = 0$, siendo la ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Donde $A, B, C, G, H, I \text{ y } J$ son constantes reales.

Existen seis tipos básicos de superficies cuádricas que tienen la forma de la última ecuación, estas son:

Elipsoide, hiperboloide de una hoja , hiperboloide de dos hojas, cono éliptico, paraboloide elíptico, y paraboloide hiperbólico.

Estas superficies se caracterizan porque sus trazas en cada uno de los planos coordenados corresponde a secciones cónicas.

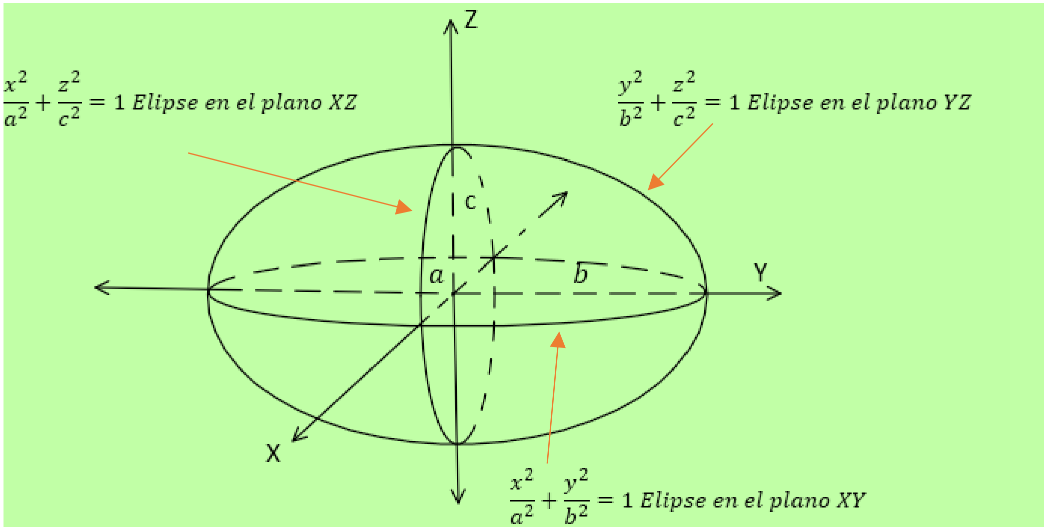
Las trazas de una superficie corresponde a las figuras que se obtienen al ser cortadas por un plano, aquí consideraremos los planos $x = k$ (planos paralelos a YZ) , $y = k$ (planos paralelos a XZ) y $z = k$ (planos paralelos a XY).

1.- **Formas canónicas de las superficies cuádricas**

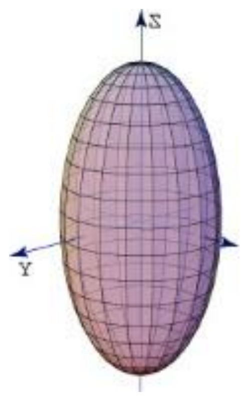
Consideraremos a continuación algunas ecuaciones canónicas centradas en el origen y con ejes de simetrías que coinciden con los ejes coordenados del sistema estandar ya establecidos en las clases anterores a esta.

- **Elipsoide**:

$$\text{Ecuación canónica: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

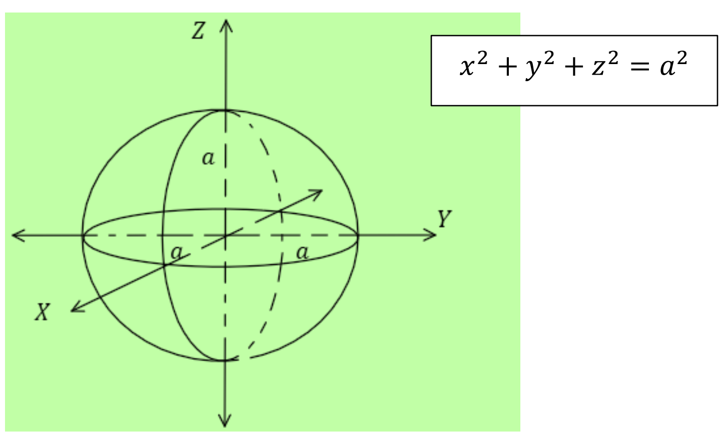


O bien una elipsoide de eje mayor el eje Z



Elipsoide

Note que si $a = b = c$ se tiene una esfera de ecuación



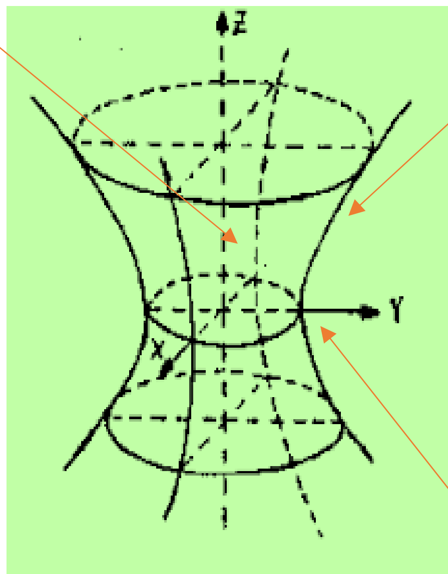
Esfera

- **Hiperboloide de una hoja** :

Ecuación canónica: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(El signo – indica el eje de simetría)

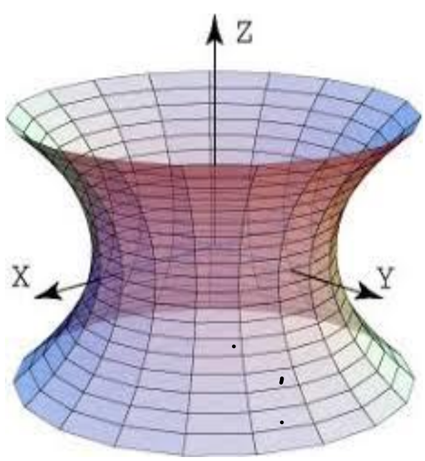
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Hiperbola en el plano XZ $(y=0)$ $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ hiperbola en el plano YZ $(x=0)$



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ Elipse en el plano XY $(z=0)$

Hiperboloide de una hoja

Asi se ve:



Hiperboloide de una hoja

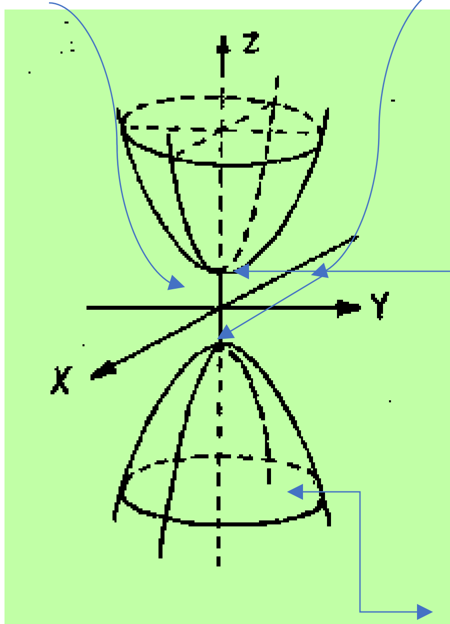
- **Hiperboloide de dos hojas:**

  Ecuación canónica : $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

  (El signo $+$ indica el eje de simetría)

$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ hiperbola en el plano XZ

$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola en el plano YZ



Para $y=0$; $\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{x^2}{a^2}$

$$z=\pm c\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\pm\frac{c}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

Sea $x=0 \Rightarrow z=\pm c \Rightarrow (0,0,\pm c)\in Z$

Similarmente para $x=0$;

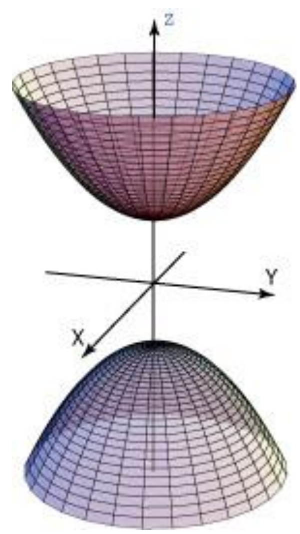
$$\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{y^2}{a^2}\Rightarrow z=\pm c$$

Sea $y=0 \Rightarrow z=\pm c$

Elipses paralelos al plano XY

Hiperboloide de dos hojas

Asi se ve:

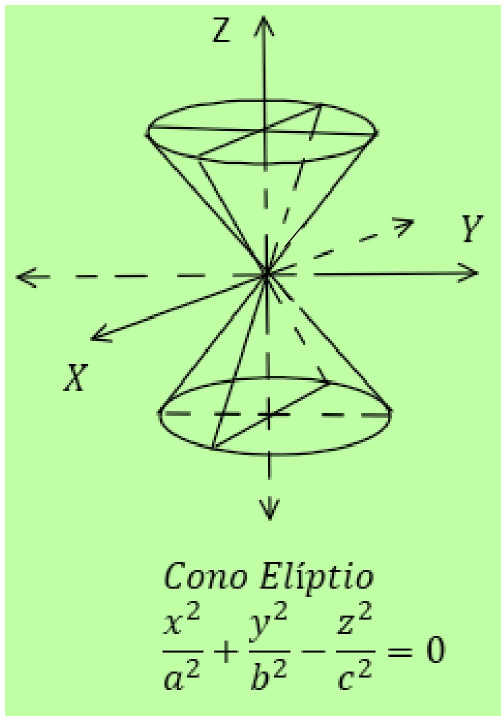


Hiperboloide de dos hojas

- **Cono Elíptico**:

Ecuación canónico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

(El signo – indica el eje de simetría)
Si $a = b$ tenemos un cono circular



Si $z = 0 \Rightarrow \; x = 0 \wedge y = 0$

Por tanto $(0,0,0) \in cono$

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \Rightarrow z = \pm\frac{c}{a}x$$

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

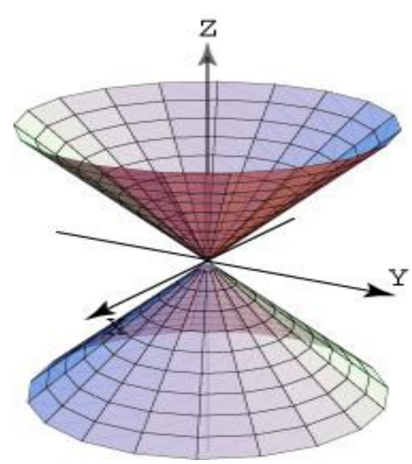
$$z^2 = \frac{c^2}{b^2}y^2 \Rightarrow z = \pm\frac{c}{b}y$$

Si $z = k \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$$

Elipses paralelos al plano XY

Así se ve:



Cono elíptico

- **Paraboloide elíptico:**

  Ecuación canónica: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (eje de simetría el eje Z)

Si $z = k > 0 \Rightarrow$

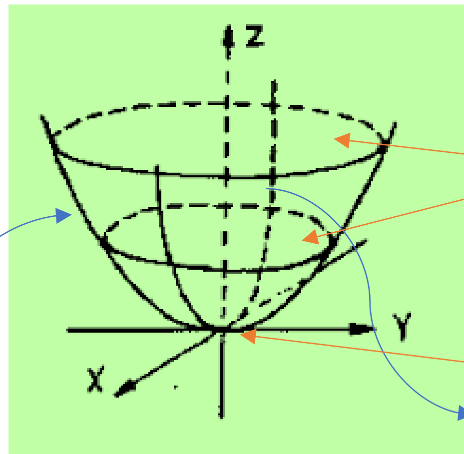
$$\frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{k}a\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{k}b\right)^2} = 1$$

$$Elipses\ \forall k$$

Si $z = k = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \wedge y = 0$

$(0{,}0{,}0) \in al\ paraboloide$

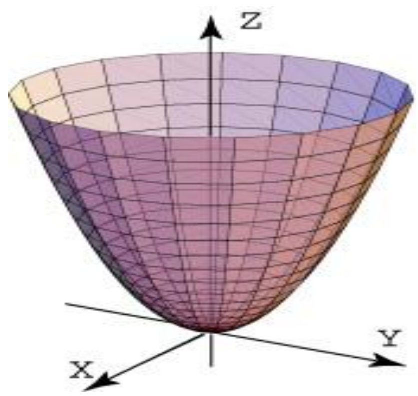


$z = \dfrac{y^2}{a^2}$ (Plano YZ)

$z = \dfrac{x^2}{a^2}$ (Plano XZ)

Paraboloide elíptico

Así se ve:



Paraboloide elíptico

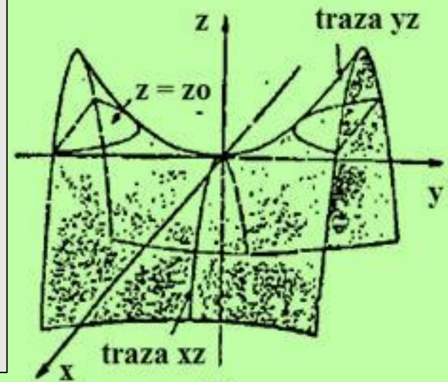
- **Paraboloide hiperbólico:**

  Ecuación canónica: $z = \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2}$ (eje de simetría el eje Z)

Para graficar esta superfice consideremos lo siguiente:

Plano coordenado	traza
$xy\ (z=0)$	rectas: $y = \pm\frac{a}{b}x$
$xz\ (y=0)$	parábola: $-\frac{x^2}{b^2} = z$
$yz\ (x=0)$	parábola: $\frac{y^2}{a^2} = z$

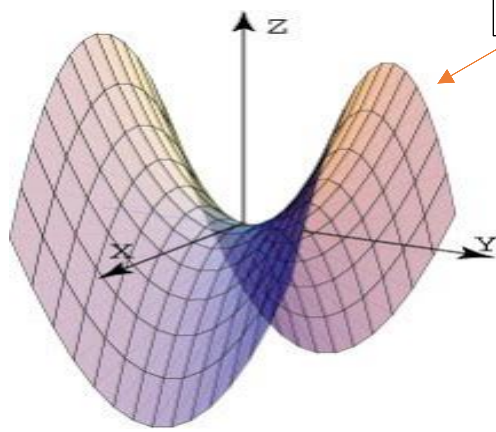
(a)



(b)

Asi se ve:

$$z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$$

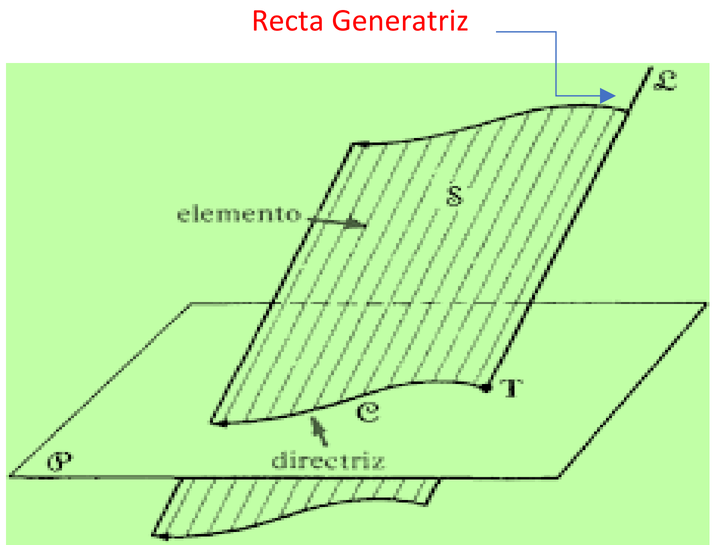


Paraboloide hiperbólico

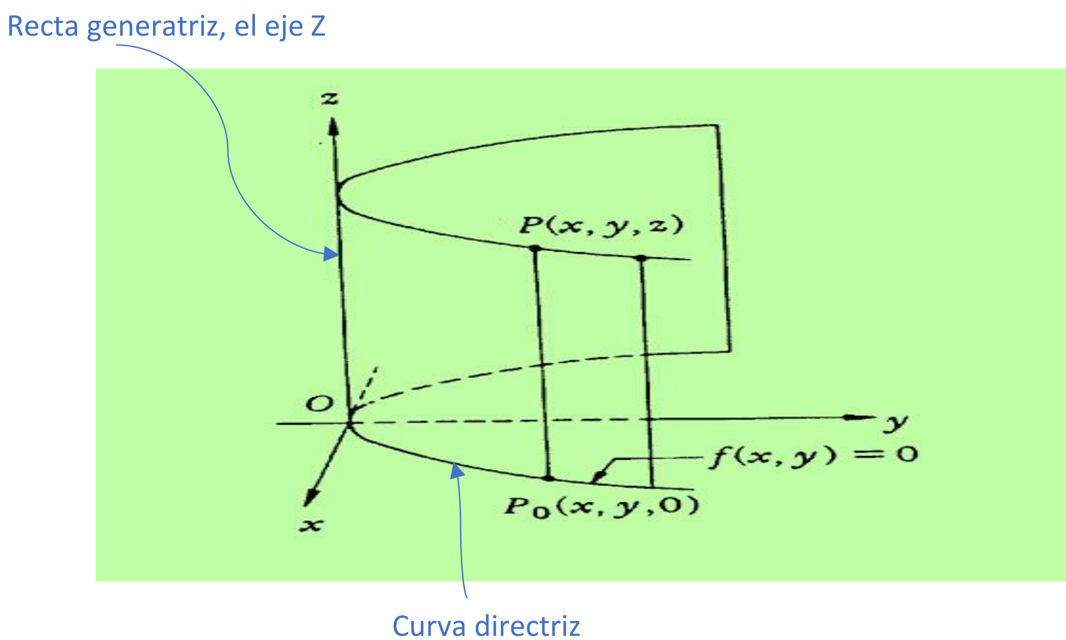
Otras superficies cuádricas son los cilindros.

Definición de cilindro:

Sea c una curva en el plano y L una recta no contenida en es plano. El conjunto de todas las rectas paralelos a L que interceptan a c, forman un cilindro. La curva plana c se llama **curva directriz** y las rectas se llaman generatrices.

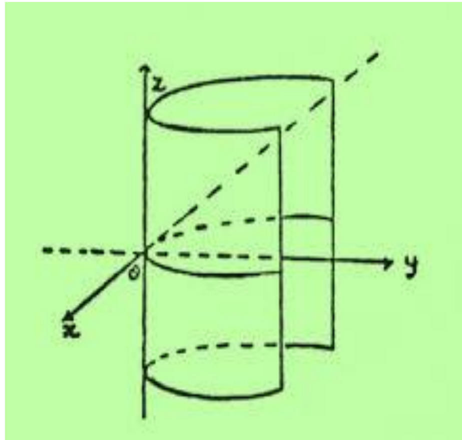


Por ejemplo:



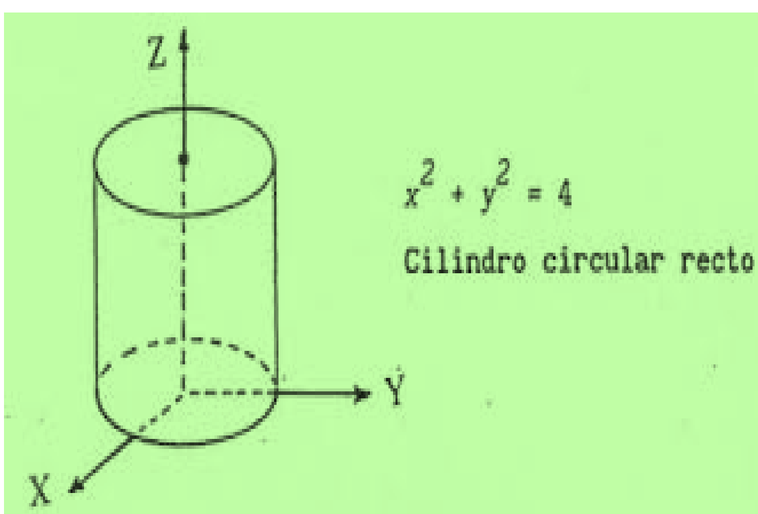
La ecuación de un cilindro:

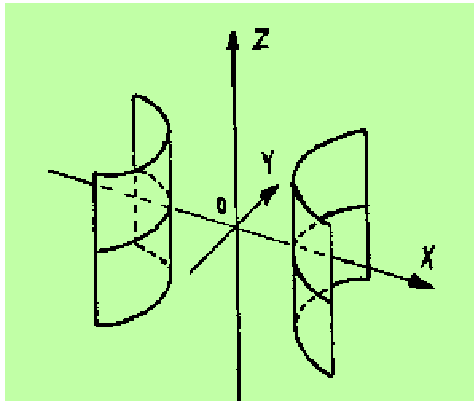
En el espacio, la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos de las variables x, y, z es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje de la variable que falta.



c: $y = kx^2$

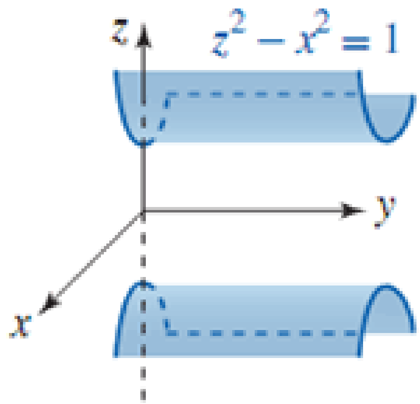
Ejemplos de 3 tipos de cilindros:



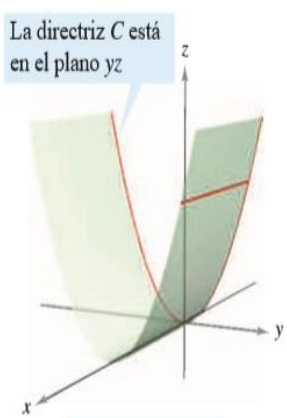


Cilindro hiperbólico

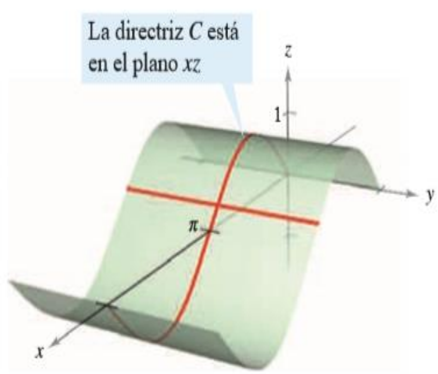
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro hiperbólico

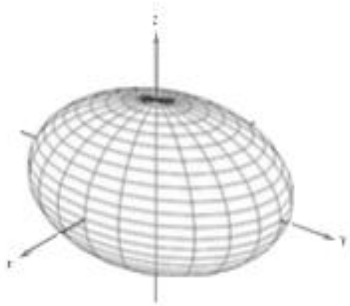


Cilindro: $z = y^2$



Cilindro: $z = \text{sen } x$

Resumen de las 6 cuádricas

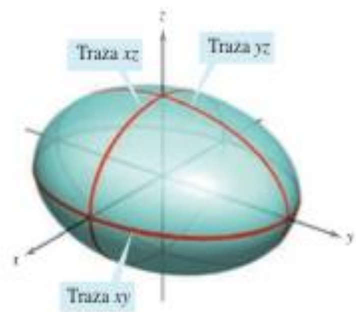


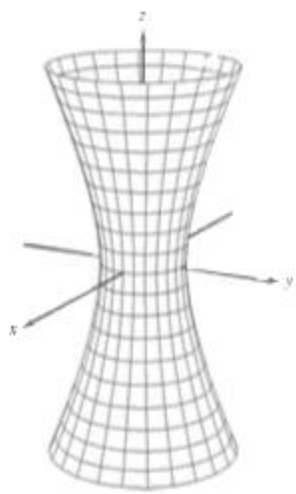
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Elipse	Paralelo al plano *xz*
Elipse	Paralelo al plano *yz*

La superficie es una esfera si $a=b=c\neq 0$.



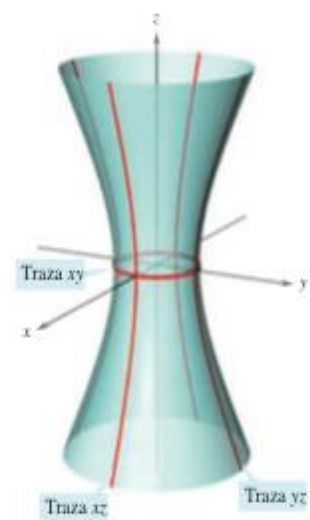


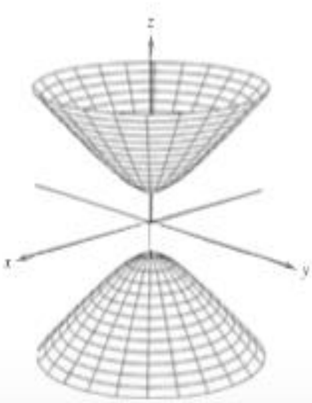
Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Hipérbola	Paralelo al plano *xz*
Hipérbola	Paralelo al plano *yz*

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.



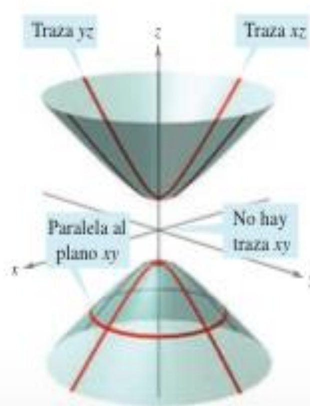


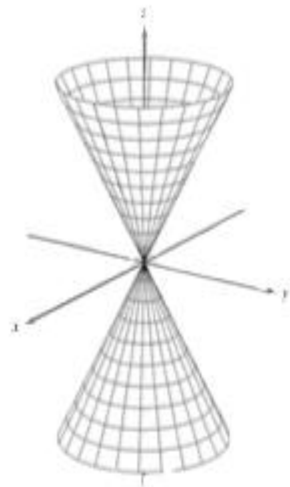
Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Hipérbola	Paralelo al plano *xz*
Hipérbola	Paralelo al plano *yz*

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.



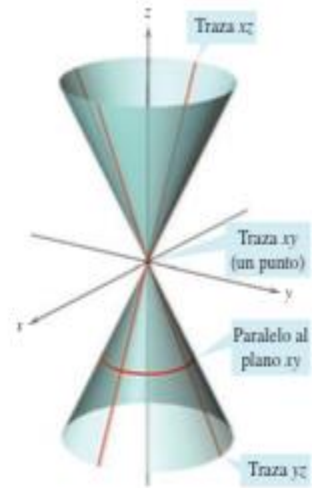


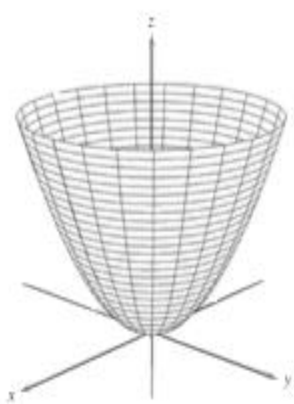
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.



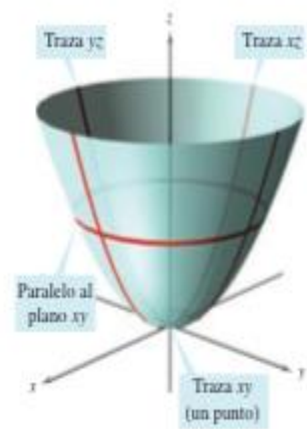


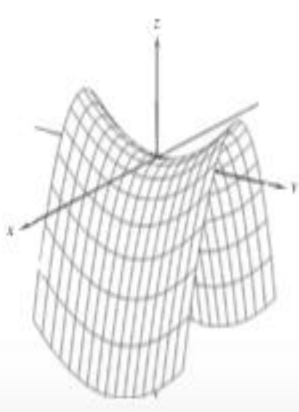
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



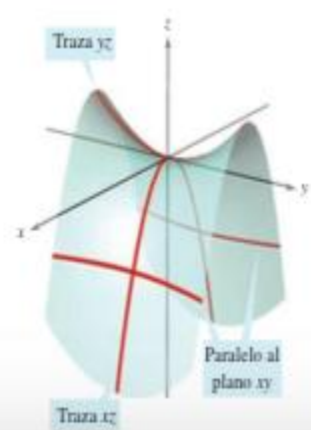


Paraboloide hiperbólica

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



Ejercicios prepuestos

1.- Representar la ecuación: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

2.- Hallar la naturaleza de la cuádrica cuya ecuación es:

$$3x^2+4y^2-2z^2+6x-16y+8z=13$$

R: $\frac{(x+1)^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{6}-\frac{(z-2)^2}{12}=1$

3.- Representar la ecuación: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

4.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos: $(7,9,1), (-2,-3,2), (1,5,5), (-6,2,5)$.

R: $x^2+y^2+z^2+8x-14y+18z=79$

5.- Hallar las coordenadas del centro y radio de la esfera

$x^2+y^2+z^2-6x+4y-3z=15$

R: El centro de la esfera es el punto $\left(3,-2,\frac{3}{2}\right)$ y su radio $\frac{11}{2}$

6.- Representar la ecuación: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

7.- Representar la superficie: $4x^2+9y^2=36$

8.- Representar la ecuación: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$