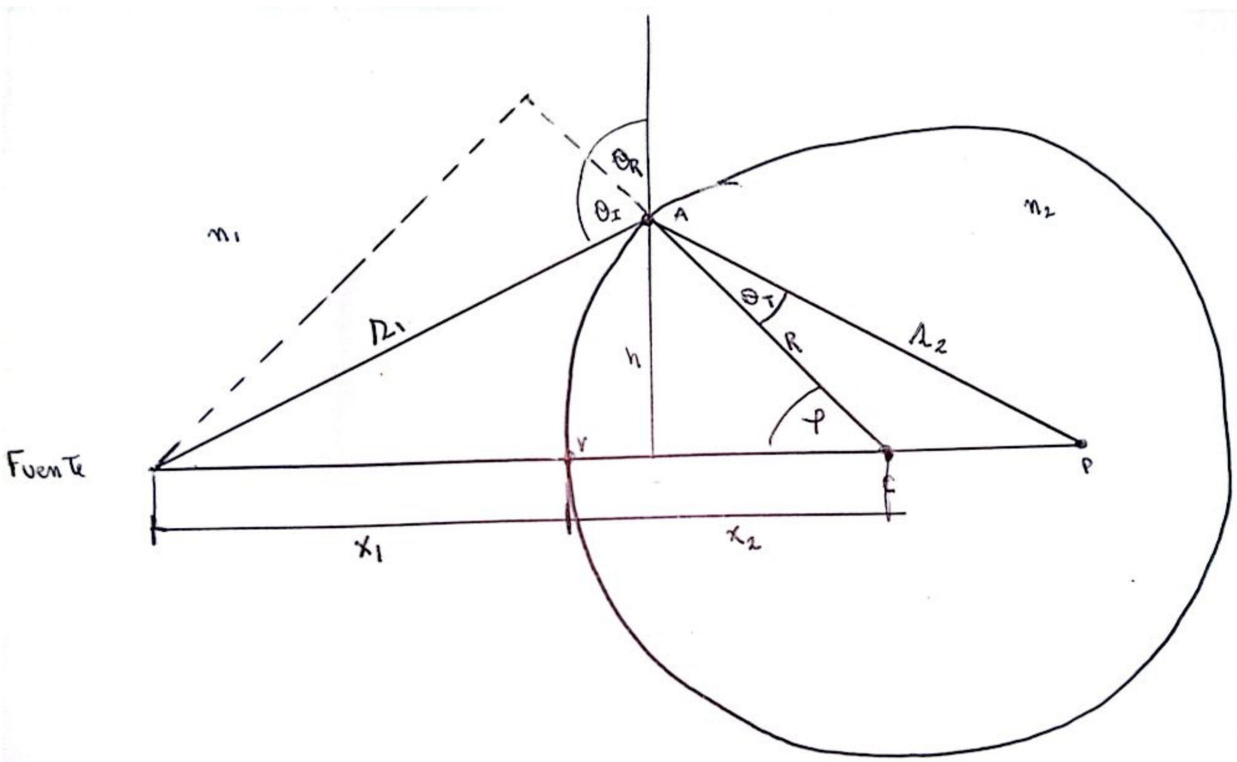
Ondas y óptica: Tarea 4

Mauro Jélvez Jélvez

11/07/2024

1)

Si tenemos:



Utilizando Ley de los cosenos en los triángulos FAC y ACP y sabiendo que $\cos\varphi = -\cos(180 - \varphi)$ tenemos:

$$s_1 = \sqrt{R^2 + (x_1 + R)^2 - 2R(x_1 + R)\cos\varphi}$$

$$s_2 = \sqrt{R^2 + (x_2 - +R)^2 + 2R(x_2 - R)\cos\varphi}$$

Por Ley de Snell tenemos:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Para nuestro caso tenemos que:

$$\sin\theta_1 = \frac{x_1 + R}{s_1} = \frac{x_1 + R}{\sqrt{R^2 + (x_1 + R)^2 - 2R(x_1 + R)\cos\varphi}}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{x_2 - R}{s_2}\frac{x_2 - R}{\sqrt{R^2 + (x_2 - +R)^2 + 2R(x_2 - R)\cos\varphi}}$$

Si tenemos que el radio de curvatura R es muy grande podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\cos\varphi \approx 1$$

Por lo que tendremos:

$$\sin\theta_1 \approx \frac{x_1 + R}{\sqrt{R^2 + (x_1 + R)^2 - 2R(x_1 + R)}} = \frac{x_1 + R}{\sqrt{R^2 + x_1^2 + 2x_1 R + R^2 - 2x_1 R - 2R^2}}$$

$$\sin\theta_1 \approx \frac{x_1 + R}{\sqrt{x_1^2}} = 1 + \frac{R}{x_1}$$

Y para θ_2

$$\sin\theta_2 \approx \frac{x_2 - R}{x_2} = 1 - \frac{R}{x_2}$$

Reemplazando en la Ley de Snell

$$n_1 \left(1 + \frac{R}{x_1}\right) = n_2 \left(1 - \frac{R}{x_2}\right)$$

Reordenando:

$$R\left(\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2}\right) = n_2 - n_1$$

Finalmente quedándonos:

$$\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

2)

Considerando material dieléctrico sin amortiguación, la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$m\ddot{x} + kx = -e\vec{E}$$

Donde $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, y propondremos una solución de la forma:

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

Tomando su segunda derivada:

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} \to \ddot{x} = -i\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$$

Reemplazando:

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

Despejando para la amplitud:

$$\vec{x_0} = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Reemplazando en nuestra ecuación de posición:

$$\vec{x}(t) = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

Usando la relación $\vec{P} = -Ne\vec{x}$:

$$\vec{P}(t) = \frac{e^2 N\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

Ahora para encontrar la suceptibilidad: $\chi_\epsilon = |\vec{P}|/\epsilon_0|\vec{E}|$, reemplazando:

$$\chi_\epsilon = \frac{e^2 N E_0}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \frac{1}{E_0 e^{i\omega t}} = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Para la permitividad del medio tenemos:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

Y el índice de refracción tendrá la forma:

$$n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} \rightarrow n = \sqrt{1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

De la ley de Snell tenemos:

$$n_1 \sin\theta_I = n_2 \sin\theta_R$$

En nuestro caso si suponemos que la onda electromagnética viene desde el vacío: $n_1 \approx 1$ y reemplazando el índice de refracción del material:

$$\sin\theta_I = n_2 \sin\theta_2$$

$$\sin\theta_R = \frac{\sin\theta_I}{\sqrt{1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}}$$

Dado que el índice de refracción depende de la frecuencia, diferentes colores (frecuencias) se refractan en ángulos diferentes al pasar a través del prisma. Los colores con frecuencias más altas (como el azul) tienen índices de refracción más bajos y se desvían menos que los colores con frecuencias más bajas (como el rojo), que tienen índices de refracción más altos.

La presencia de ω_0 afecta cómo se descomponen los colores de la luz blanca al pasar por un prisma. Dependiendo de la relación de la frecuencia de la luz incidente ω con respecto a ω_0, diferentes colores experimentarán diferentes índices de refracción y, por lo tanto, diferentes ángulos de desviación:

-Para frecuencias bajas (rojo, naranja): Si estas frecuencias están mucho por debajo de ω_0, su índice de refracción será aproximadamente constante y menor que para frecuencias más altas.

-Para frecuencias cercanas a ω_0: La dispersión es más fuerte, y los colores correspondientes a estas frecuencias (azul, violeta) tendrán índices de refracción mayores, resultando en una mayor desviación.

En la descomposición de la luz blanca en un prisma, las frecuencias más cercanas a ω_0 experimentan una mayor dispersión y desviación, mientras que las frecuencias mucho menores que ω_0 tienen un índice de refracción relativamente constante y menor desviación. Este comportamiento explica el orden de los colores en el espectro visible cuando la luz blanca se dispersa a través de un prisma.

3)

La onda incidente puede ser descrita como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\hat{s} + 2E_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\hat{p}$$

Si tenemos que el ángulo de incidencia es θ, por Ley de Snell tendremos:

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_t$$

Tendremos que $n_1 = 1$ ya que viene desde el vacío y $n_2 = n$ es el índice de refracción del material, por lo que tendremos:

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta}{n}$$

También podemos hacer uso de los coeficientes de Fresnel teniendo en cuenta los índices de refracción y quedándo de la forma:

$$t_s = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + n\cos\theta_t}$$

$$t_p = \frac{2\cos\theta}{n\cos\theta + \cos\theta_t}$$

Ahora, queremos dejar estas relaciones expresadas solamente en términos de θ, por lo que usaremos algunas identidades trigonométricas:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t}$$

Y por Ley de Snell, tenemos una expresión para $\sin\theta_t$ em función de θ, reemplazando tenemos:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{n}$$

Reemplazando en los coeficientes de Fresnel:

$$t_s = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + n\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{n}} \to t_s = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$t_p = \frac{2\cos\theta}{n\cos\theta + \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{n}} \to t_p = \frac{2n\cos\theta}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

Ahora, escribiremos el campo refractado, de la forma:

$$\vec{E}_t(r,t) = E_{0t}^s\cos(\vec{k}_t\vec{r}-\omega t)\hat{s}_t + E_{0t}^p\sin(\vec{k}_t\vec{r}-\omega t)\hat{p}_t$$

Tendremos que $\hat{s}_t = \hat{s}$ ya que la polarización perpendicular al plano de incidencia no cambia su dirección.

$\hat{p}_t$ es la componente paralela del campo eléctrica al material de índice de refracción n

Ahora, para encontrar los coeficientes de las componentes en el campo tendremos:

$$E_{0t}^s = E_0 t_s \to E_{0t}^s = \frac{2E_0\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

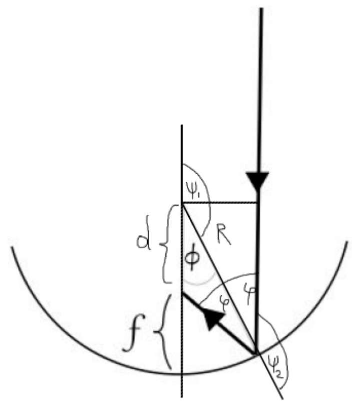
$$E_{0t}^p = 2E_0 t_p \to E_{0t}^p = \frac{4nE_0\cos\theta}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

Reemplazando finalmente en el campo refrectado:

$$\vec{E}_t(\vec{r},t) = \frac{2E_0\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\cos(\vec{k}_t\vec{r}-\omega t)\hat{s} + \frac{4nE_0\cos\theta}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\sin(\vec{k}_t\vec{r}-\omega t)\hat{p}_t$$

4)

Si tenemos:



Por relaciones trigonométricas y Ley del seno podemos encontrar la distancia d:

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin(\pi - (\phi + \varphi))} \rightarrow \frac{d}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\pi\cos(\phi+\varphi) - cos\pi\sin(\phi+\varphi)} \rightarrow \frac{d}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin(\phi+\varphi)}$$

Para que esta igualdad se cumpla, los ángulos ψ_1 y ψ_2 deben ser iguales: Si tenemos:

$$\psi_1 = \pi - \varphi$$

$$\psi_2 = \pi + \frac{\pi}{2} - \phi - \frac{\pi}{2}$$

Lo que nos lleva a que:

$$\psi_1 = \psi_2 \rightarrow \pi - \varphi = \pi - \phi \rightarrow -\varphi = -\phi$$

$$\varphi = \phi$$

Por lo que nuestra relación anterior quedará de la forma:

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin(2\varphi)} \rightarrow \frac{d}{\sin\varphi} = \frac{R}{2\sin\varphi\cos\varphi} \rightarrow d = \frac{R}{2\cos\varphi}$$

Si sabemos que el radio R debe ser igual a la suma de $f + d$ tenemos:

$$R = f + d \rightarrow f = R - d \rightarrow f = R - \frac{R}{2\cos\varphi}$$

Obteniendo:

$$f(\varphi) = \frac{R}{2}\left(2 - \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

¿Qué sucede para ángulos pequeños?, podemos hacer la siguiente aproximación:

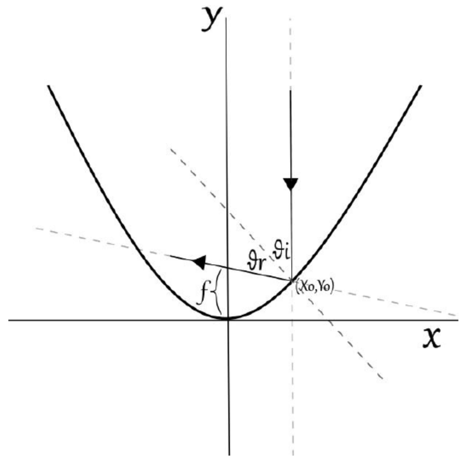
$$\cos\varphi \approx 1$$

Quedándonos:

$$f(\varphi) \approx \frac{R}{2}$$

5)

Si tenemos:



La parábola se describe por la ecuación:

$$y = \frac{x^2}{4f}$$

Y su pendiente tangencial a la curva viene dada por $m_T = \frac{dy}{dx}$

$$m_T = \frac{x_0}{2f}$$

Si sabemos que:

$$y_0 = \frac{x_0^2}{4f}$$

Ahora debemos encontrar una recta perpendicular a los puntos (x_0, y_0), si sabemos que la pendiente perpendicular a m_T viene dada por: $m_P = -1/m_T$

$$m_P = -\frac{2f}{x_0}$$

Tenemos que la recta perpendicular a los puntos (x_0, y_0) viene dada por:

$$y = y_0 - \frac{2f}{x_0}(x - x0)$$

La recta incidente viene dada por $m_I \to \infty$. Ahora para expresar el ángulo de incidencia podemos expresarlo de la forma:

$$\tan\theta_I = \left|\frac{m_I - m_P}{1 + m_I m_P}\right|$$

Como sabemos que m_I tiende al infinito al ser una recta paralela al eje y, usaremos una expansión binomial, por lo que escribiremos la forma de la tangente de la siguiente forma:

$$\tan\theta_I = \left|\frac{1}{m_P}\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m_I m_P}\right)} - \frac{1}{m_I}\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m_I m_P}\right)}\right| \approx \left|\frac{1}{m_P}\left(1 - \frac{1}{m_I m_P}\right) - \frac{1}{m_I}\left(1 - \frac{1}{m_I m_P}\right)\right|$$

Sabemos que $1/m_P \approx 0$ ya que $m_P \to \infty$, por lo que el ángulo de incidencia toma la forma:

$$\tan\theta_I = \left|\frac{1}{m_P}\right| = \frac{x_0}{2f}$$

$$\theta_I = \tan^{-1}\left(\frac{x_0}{2f}\right)$$

Por Ley de Snell sabemos que: $\theta_I = \theta_R$, por lo que:

$$\frac{x_0}{2f} = \frac{m_R - m_P}{1 + m_R m_P}$$

Para que exiga a esta pendiente pasar por los puntos (x_0, y_0) esta debe ser:

$$m_R = \frac{x_0}{4f}$$

Ahora escribiendo la ecuación de la recta de reflexión:

$$y - y_0 = m_R(x - x_0) + f$$

Donde f es la intersección con el eje y de esta recta. Sabiendo que: $y_0 = x_0^2/4f$ y m_R

$$y - \frac{x_0^2}{4f} = \frac{x_0}{4f}(x - x_0) + f$$

Si tomamos $x = 0$

$$y - \frac{x_0^2}{4f} = -\frac{x_0^2}{4f} + f$$

Obtenemos:

$$y = f$$