PRUEBA I
8 de abril de 2025
Física Contemporánea
LFIS-313

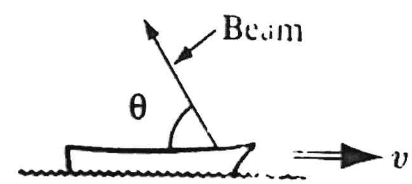
Instrucciones: Dispone de 90 minutos para contestar la prueba. No puede consultar apuntes, cuadernos, compañeros, ni telefonos moviles. Cada pregunta tiene indicado su puntaje.

Problema 1

Invarianza. Muestre explícitamente que la ecuación de onda unidimensional no es invariante frente a las trasformaciones de Galileo (10 pts). A continuación, muestre que la ecuación de onda es invariante frente a las transformaciones de Lorentz (15 pts).

Problema 2

Un reflector está montado en un bote de manera que su haz forma un ángulo $\bar{\theta}$ con la cubierta (ver Figura). Si luego el bote se pone en movimiento con una velocidad v, ¿qué ángulo θ forma la trayectoria de un fotón individual con la cubierta, según un observador en el muelle? (20 pts)



Problema 3

(a) El evento **A** ocurre en el punto ($x_A = 2,\ y_A = 0,\ z_A = 0$) en el instante t_A dado por $ct_A = 1$. El evento **B** ocurre en ($x_B = 5,\ y_B = 0,\ z_B = 0$) y en el instante $ct_B = 3$, ambos en el sistema de referencia S.

(i) ¿Cuál es el intervalo invariante entre los eventos A y B?

(ii) ¿Existe un sistema inercial en el que ocurran **simultáneamente**? Si es así, encuentra su velocidad (magnitud y dirección) relativa a S.

(iii) ¿Existe un sistema inercial en el que ocurran en el **mismo punto**? Si es así, encuentra su velocidad relativa a S.

Problema 4

Una partícula de masa m, cuya energía total es el doble de su energía en reposo, colisiona con una partícula idéntica que está en reposo. Si se quedan unidas después de la colisión, ¿cuál es la masa de la partícula compuesta resultante?(10 pts) ¿Cuál es su velocidad? (15 pts) [Asuma que energía y momentum se conservan].

Primera Prueba LFIS313

(1). $\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$ T. Galileo.

La ec. de onda 1D es $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ entonces:

- $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial t'}{\partial x}}}_{0}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ //

- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'} + \dfrac{\partial x'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - v\dfrac{\partial}{\partial x'}$ $\Rightarrow$ problema.?

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right) + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad //$$

10 pts.

$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}\right\}$ T. Lorentz.

- $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial t'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \gamma\dfrac{\partial}{\partial x'} - \gamma\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'}$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right) - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial x'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'} = -\gamma v\dfrac{\partial}{\partial x'} + \gamma\dfrac{\partial}{\partial t'}$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\gamma v\frac{\partial}{\partial x'}\left(-\gamma v\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(-\gamma v\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \gamma^2 v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \gamma^2 v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2 v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

luego (eliminando los γ^2)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cancel{-2v \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial t'}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cancel{- \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial t'}} + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}$$

$$\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \left(\frac{v^2}{c^4} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}$$

$$\cancel{\left(\frac{v^2-c^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \cancel{\left(\frac{v^2-c^2}{c^4}\right)}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} \quad //$$

(2)

$\to v$ bote = S', muelle = S

Ambos sistemas coinciden en el instante que se pone en movimiento. Necesitamos las transformaciones al revés $\Rightarrow v \to -v$.

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

así el haz en S tiene $\measuredangle\ \theta$ dado por

$$tg\theta = -\frac{u_y}{u_x} = -\frac{1}{\gamma}\frac{u_y'}{u_x' + v} \qquad \text{donde } u_x' = -c\cos\bar{\theta},\ u_y' = c\sin\bar{\theta}$$

$$\therefore\ tg\theta = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\sin\bar{\theta}}{\cos\bar{\theta} - v/c}\right) \quad //$$

(3) En S evento A : $(2,0,0)$ en $ct_A = 1$

evento B : $(5,0,0)$ en $ct_B = 3$

(i) $$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$
$$= -(5-2)^2 + (3-1)^2 = -9+4 = -5 \quad //$$

(ii) Sí. Aquí $\Delta t' = 0 \Rightarrow \Delta s^2 < 0$, que coincide con (i).

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = 0 \Rightarrow c\Delta t = \beta \Delta x \quad \text{o bien}$$

que

$$\frac{v}{c} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow v = \frac{2}{3}c \quad +x$$

(iii) No. Aquí $\Delta x' = 0 \Rightarrow \Delta s^2 > 0$, que contradice (i).

(4) Partícula m con energía total es el doble de su energía en reposo, colisiona con una partícula idéntica en reposo. Si quedan unidas después de la colisión. ¿Cuál es la masa de la partícula resultante? ¿Cuál es su velocidad?

Inicialmente $$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \cancel{2m^2c^4} = (2mc^2)^2 = 4m^2c^4$$
$$\Rightarrow p^2c^2 = 3m^2c^4 \Rightarrow p = \sqrt{3}\,mc \quad //$$

y la energía inicial
$$2mc^2 + mc^2 = 3mc^2 \quad //$$

Asumiendo ambas se conservan, la energía final es $3mc^2$ y el momento final es $\sqrt{3}\,mc$.

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 = (3mc^2)^2 - (\sqrt{3}\,mc)^2c^2 = 6m^2c^4 \Rightarrow M = \sqrt{6}\,m \quad //$$
$$\Rightarrow v = \frac{pc^2}{E} = \frac{\sqrt{3}\,mc\,c^2}{3mc^2} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$