# Clase nº32

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

19 de Noviembre 2021

## Objetivo de la clase

- Determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias de primera y segunda clase.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 101

Determinar si la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$$

diverge o converge.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 102

Determinar si la integral

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}\,dx$$

diverge o converge.

# Integrales impropias de segunda clase

Las propiedades básicas de la integral de Riemann pueden extenderse a las integrales impropias, mediante procesos de pasar al límite.

## Propiedades

1. **Linealidad:** Si $f$ y $g$ son integrables en $[a, b[$ y sus respectivas integrales impropias son convergentes, entonces también existe, es decir, es convergente la integral impropia $cf + dg$ sobre $[a, b[$; cualquiera sea $c, d \in \mathbb{R}$ y se tiene:

$$\int_a^{b^-} (cf(x) + dg(x))\, dx = c \int_a^{b^-} f(x)\, dx + d \int_a^{b^-} g(x)\, dx.$$

# Integrales impropias de primera clase

## Propiedades

2. **Regla de Barrow:** Si $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b[$ y si $F : [a, b[ \to \mathbb{R}$ es una primitiva de $f$ en $[a, b[$ y si existe el límite:

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \left(F(t) - F(a)\right).$$

Entonces este límite es el valor de $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ lo cual lo podemos abreviar como:

$$F(x)\big|_a^{b^-}.$$

# Integrales impropias de primera clase

## Propiedades

3. **Cambio de variable:** Si $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b[$ y si $\varphi : [\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua en su dominio, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ tal que $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(t) \to b^-$, cuando $t \to \beta^-$ y si $\varphi([\alpha, \beta[) = [a, b[$, entonces:

$$\int_a^{b^-} f(x)\, dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Si una de las integrales es convergente (divergente), la otra también lo es.

# Integrales impropias de primera clase

## Propiedades

4. **Integración por partes:** Si $u, v$ son dos funciones con derivadas continuas en $[a, b[$ y son convergentes dos de los tres términos siguientes, entonces el tercero también lo es y se tienen la igualdad:

$$\int_a^{b^-} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^{b^-} - \int_a^{b^-} u'(x)v(x)dx.$$

# Integrales impropias de segunda clase

**Observación**

Todas las propiedades anteriores son válidas para integrales sobre intervalos de la forma $]a, b]$, cambiando $a$ por $a^+$ y $b^-$ por $b$.

# Integrales impropias de segunda clase

## Criterio de comparación

Sean $f, g$ funciones positivas, integrables en $[x, b]$, para todo $x \in ]a, b[$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in ]a, b[$. Entonces:

- Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge. Además, se cumple que

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

# Integrales impropias de segunda clase

## Criterio de comparación al límite

Sean $f, g$ funciones positivas e integrables en $[x, b]$ para todo $x \in ]a, b[$, tales que

$$K = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se tiene que:

a) Si $K \neq 0$, entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ambas convergen o ambas divergen.

# Integrales impropias de segunda clase

## Criterio de comparación al límite

b) Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ implica la divergencia de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 103

Utilizando criterio de comparación al límite, mostrar que

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\,dx$$

diverge.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 104

Utilizando criterio de comparación al límite, mostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{sinx}} dx$$

es convergente.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 105

Utilizando criterio de comparación al límite, mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}\,dx$$

diverge.

# Convergencia absoluta

## Definición

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se dice absolutamente convergente si la integral $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ es convergente.

# Convergencia absoluta

## Ejemplo 106

Muestre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}\, dx$$

es absolutamente convergente.

# Otro criterio

## Teorema

Si $f$ y $g$ son funciones tales que:

1. $f$ es continua en $[a, \infty[$.
2. $g'$ es continua en $[a, \infty[$, $g'(x) \leq 0$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
3. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ es acotada para $x \geq a$,

entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx,$$

es convergente.

# Otro criterio

## Ejercicio

Utilizando el teorema anterior, muestre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$$

es convergente.

## Ejercicios Propuestos

1. Si $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$,
   a) Determine
   $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$
   b) Determine
   $$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx.$$
   c) Calcule $\int_L f(x)\,dx$, donde $L = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$.

# Integrales impropias de segunda clase

## Ejercicios propuestos

2. Sea $f(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}, \; x \in \mathbb{R}$.

    a) Calcule, si es que existe, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

    b) Calcule, si es que existe:

    $$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx.$$

3. Demuestre que las siguientes integrales convergen e interprete geométricamente.

    a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

    b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

    c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

## Bibliografía


| | Autor | Título | Editorial | Año |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Stewart, James | Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas | México: Cengage Learning | 2021 |
| 2 | Burgos Román, Juan de | Cálculo infinitesimal de una variable | Madrid: McGraw-Hill | 1994 |
| 3 | Zill Dennis G. | Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones | Thomson | 2007 |
| 4 | Thomas, George B. | Cálculo una variable | México: Pearson | 2015 |


Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.