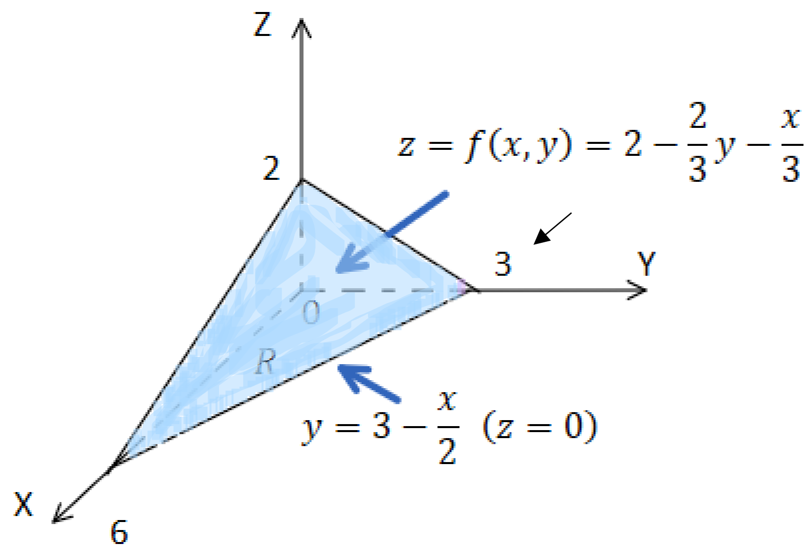
Integrales dobles parte 2

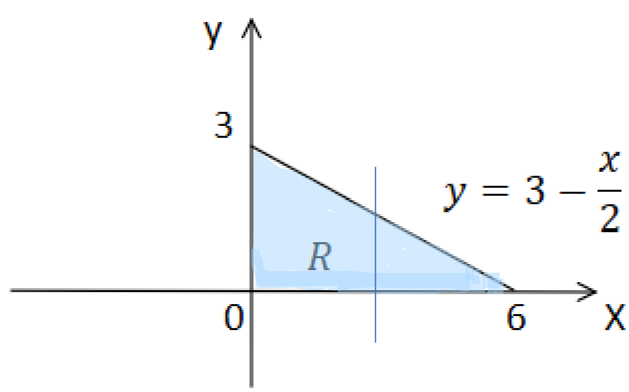
Ejemplo 1

Una pirámide está delimitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen.

Solución

Primero graficaremos el sólido y para luego determinar su volumen.





$$V = \iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(2 - \frac{2}{3}y - \frac{x}{3}\right) dy dx$$

$$= \int_0^6 \left[2y - \frac{y^2}{3} - \frac{xy}{3}\right]_0^{3-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^6 \left(6 - x - \frac{\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2}{3} - \frac{x\left(3 - \frac{x}{2}\right)}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(6 - x - \frac{1}{3}\left(9 - 3x + \frac{x^2}{4}\right) - x + \frac{x^2}{6}\right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(6 - x - 3 + x - \frac{x^2}{12} - x + \frac{x^2}{6}\right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(3 - x + \frac{x^2}{12}\right) dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{36}\right]_0^6$$

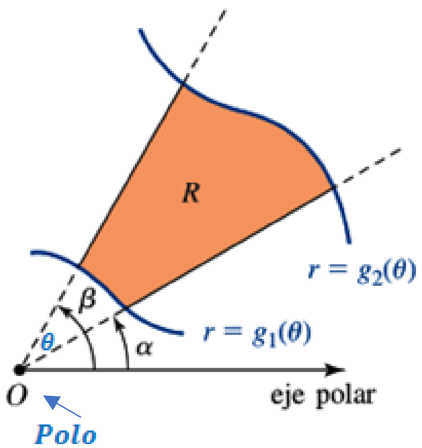
$$= \left(18 - 18 + \frac{(36)6}{36}\right) - 0$$

$$= 18 - 18 + \frac{(36)6}{36}$$

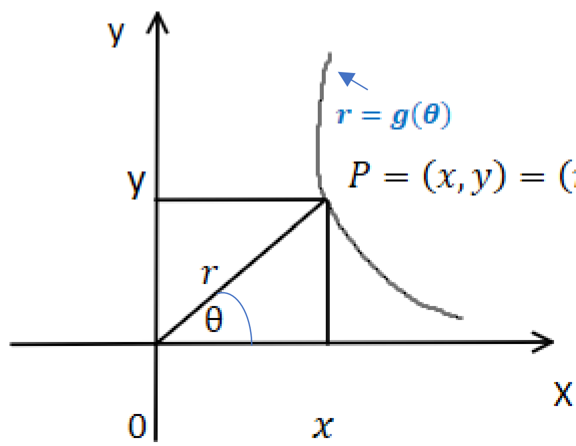
$$= 6\, u^3$$

Integrales dobles en coordenadas polares

Para evaluar una integral doble sobre una región R en un plano coordenado y que está acotado por los gráficos de ecuaciones polares como muestra la siguiente figura, se puede realizar mediante la siguiente fórmula.



Recuerde



$$f(x,y) = f(\,r\cos\theta, r\,sen\,\theta) = f(r,\theta)$$

$$(x, y) = (\,r\cos\theta, r\,sen\,\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

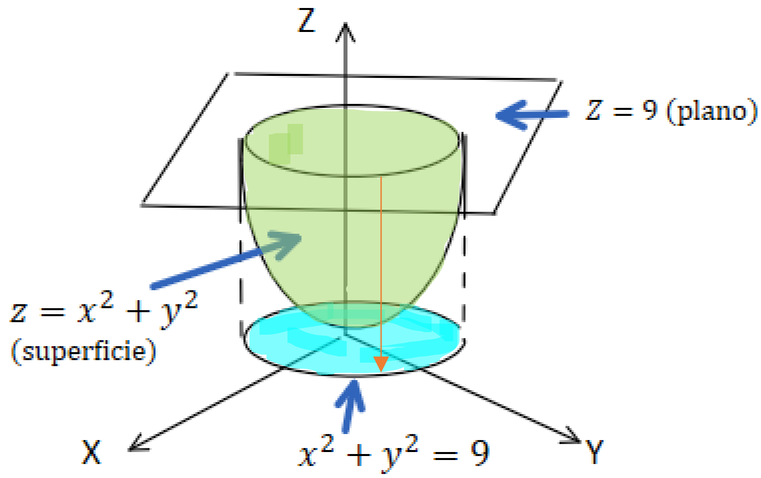
$$\boldsymbol{R = \{(r,\theta)/g_1\,(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\ \wedge\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}}$$

$$\iint\limits_{R} \boldsymbol{f(x,y)dA} = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \boldsymbol{f(r,\theta)rdrd\theta}$$

Ejemplo 2

Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ y el plano de ecuación $z = 9$.

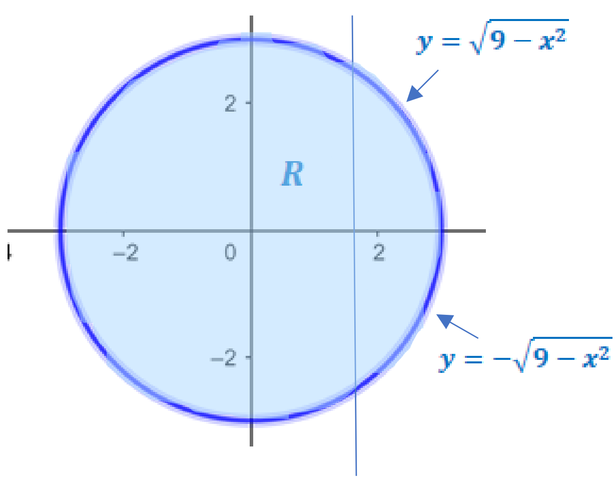
Solución



$(\boldsymbol{curva\ de\ nivel})$

$$\begin{cases} z = 9 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 9$ curva de nivel



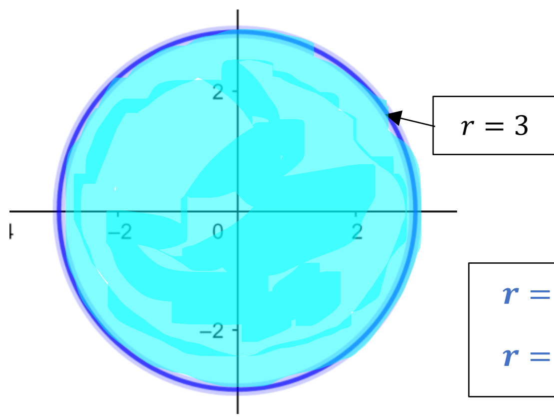
Forma cartesiana

$$V = \iint\limits_{R} f(x, y)dA = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left(9 - (x^2 + y^2)\right) dydx$$

El cálculo de esta integral doble en su forma cartesiana puede ser complicada de determinar, sin embargo, es posible calcular el volumen de manera más sencilla haciendo una cambio de coordenadas, de cartesiana a polares.
En efecto,

$$\theta \in [0,2\pi]$$

$$x^2 + y^2 = 9 = r^2 \Leftrightarrow r = 3$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{r = 3 = g_2(\theta)} \\ \boldsymbol{r = 0 = g_1(\theta)} \end{array}}$$

Forma polar

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, drd\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r - r^3)\, drd\theta$$

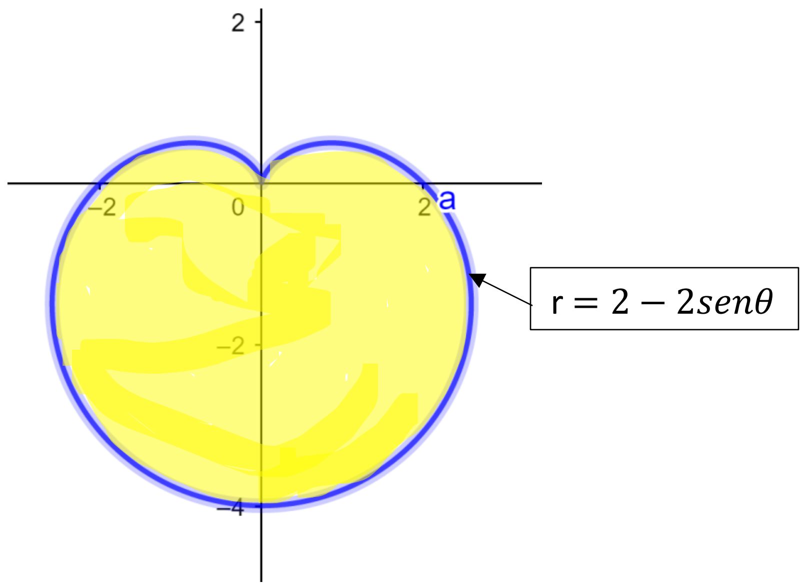
$$= \int_0^{2\pi} \left[9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(9\frac{3^2}{2} - \frac{3^4}{4} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) d\theta = \left[\frac{81}{4}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{81}{2}\pi\, u^3$$

Ejemplo 2
Calcular el área acotada por la curva $r = 2 - 2sen\ \theta$.

Solución
Gráfico del cardioide:



$$A = \iint\limits_R dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\ sen\ \theta} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2-2sen\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((2 - 2sen\ \theta)^2 - 0) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4 - 8sen\ \theta + 4sen^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left((4\theta + 8\cos\theta)_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((4\theta + 8\cos\theta)_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} d\theta - 2\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta\right)$$

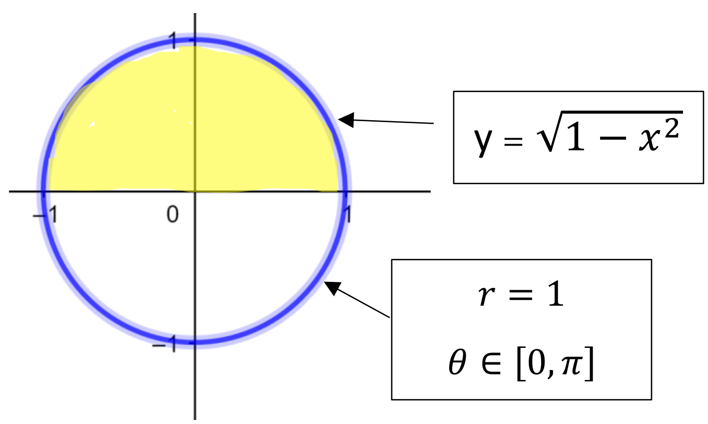
$$= \frac{1}{2}(8\pi + 8 - 8 + 2[\theta]_0^{2\pi} - [sen\ 2\theta]_0^{2\pi})$$

$$= \frac{1}{2}(8\pi + 8 - 8 + 4\pi - 0) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi\, u^2$$

Ejemplo 3
Calcular

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,(x^2+y^2)^2 dydx$$

Solución



$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,(x^2+y^2)^2 dydx = \int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2cos^2\theta(r^2)^2\, rdrd\theta$$

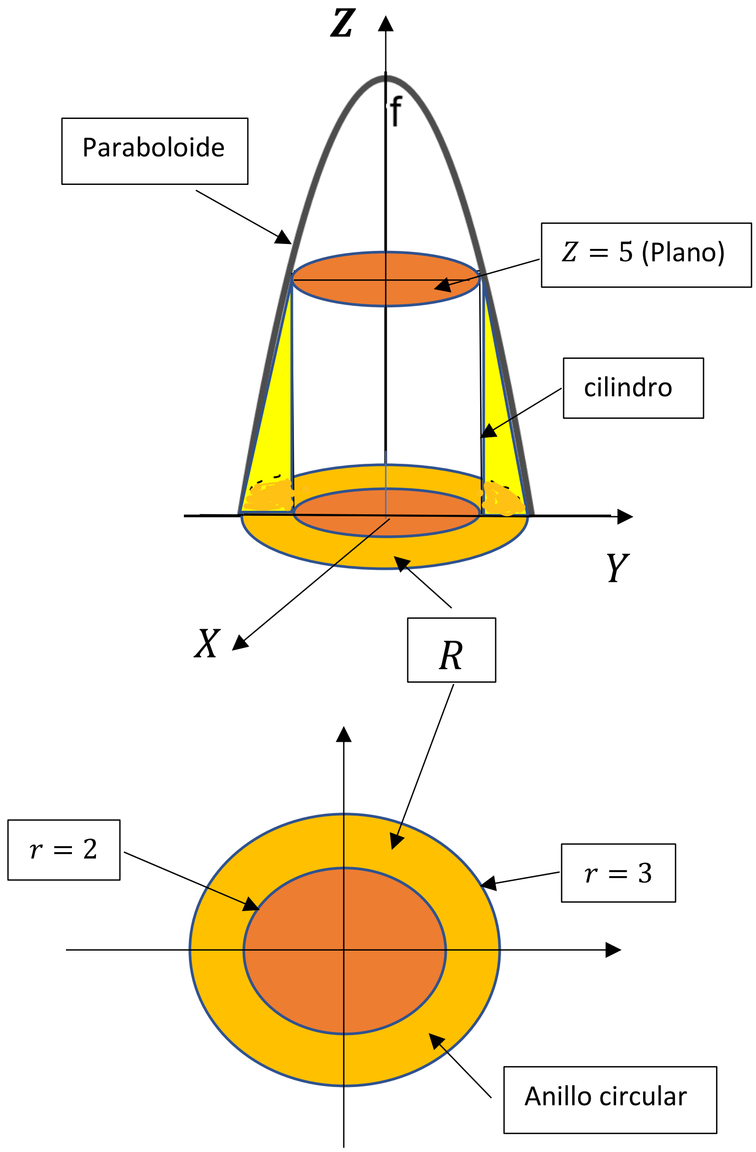
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{1} r^7cos^2\,\theta drd\theta = \int_0^{\pi}\left[cos^2\theta\,\frac{r^8}{8}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{sen\ 2\theta}{2}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{16}$$

Ejemplo 4

Calcular el volumen interior al paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y situado sobre el plano XY.

Solución



$$\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 5 \text{ (Plano)}$$

Luego para $z = 5$ tenemos uns circunferencia de radio 2 como curva de nivel. Para $z = 0$, tenemos $x^2 + y^2 = 9$, luego R es una anillo circular , ver figura, entonces

$$V = \iint_R \underbrace{(9 - x^2 - y^2)}_{\mathbf{9-r^2}}\, \underbrace{dA}_{\boldsymbol{rdrd\theta}} = \int_0^{2\pi} \int_2^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_2^3 (9r - r^3) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_2^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) - (18 - 4)\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} - 14\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{81 - 56}{4}\right) d\theta = \frac{25}{4} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{25}{4} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{25}{2} \pi\, u^3.$$

Cambio de variable en intergrales dobles

Definición

Sean D y D' regiones de los planos XY y UV respectivamente, se llama transformación de la región D' en la región D a la función:

$$F: D' \to D$$

$$(u, v) \to F(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big) = (x, y)$$

Definición

Una transformación es de clase $C^1(D')$ si sus funciones componentes son continuas, derivables y sus derivadas parciales son continuas en D'.

Definición

Se llama jacobiano de $F: D' \to D$ $\left(F \in C'(D')\right)$ al determinate :

$$J_F = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Teorema del cambio de variable

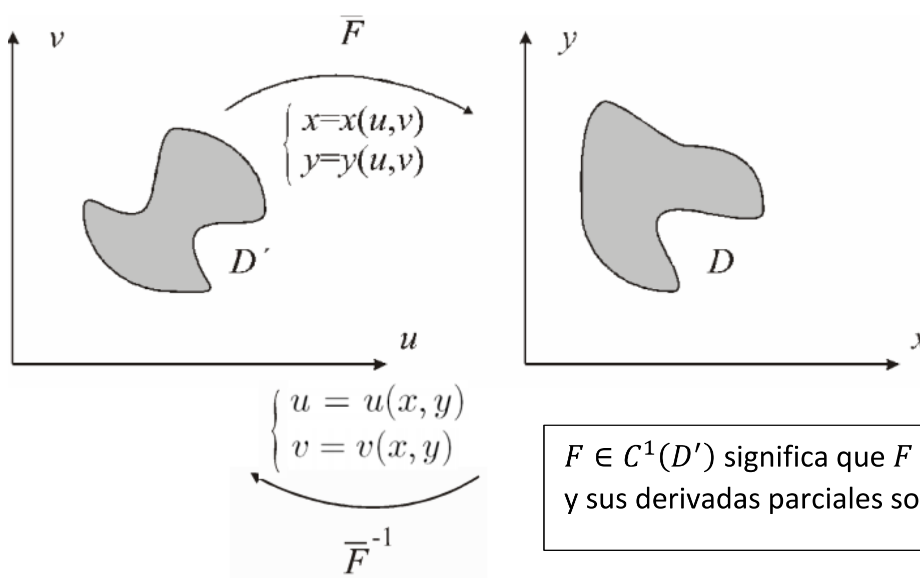
Sean D y D' regiones de los planos XY y UV respectivamente y

$$F: D' \to D;\ (u,v) \to F(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v)\right) = (x,y)$$

una transformación de D' sobre D tal que $F \in C^1(D')$. Si F es biyectiva y $J_F \neq 0$ en D', entonces para cualquier función integrable $f: D \to \mathbb{R}$ entonces

$$\iint\limits_{D = F(D')} f(x,y)dA = \iint\limits_{D' = F^{-1}(D)} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Interpretación geométrica de un cambio de variable:



$F \in C^1(D')$ significa que F es diferenciable y sus derivadas parciales son continuas

Ejemplo 1

El cambio de coordenadas de cartesiana a polares es un ejemplo de transformación, aquí tenemos que:

$$\begin{cases} x = r\ cos\ \theta \\ y = r\ sen\ \theta \end{cases}$$

Entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R'} f(rcos\ \theta, rsen\ \theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{R' = \{(r,\theta)/g_1\,(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\ \wedge\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}}}$$

Calculemos el jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ sen\ \theta \\ sen\ \theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\ cos^2\theta + r\ sen^2\theta$$

$$= r(\ cos^2\theta + sen^2\theta)$$

$$= r$$

Por tanto

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R'} f(rcos\ \theta, rsen\ \theta)\, r\ drd\theta$$

Esto es

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R'} f(r,\theta)\, r\ drd\theta$$

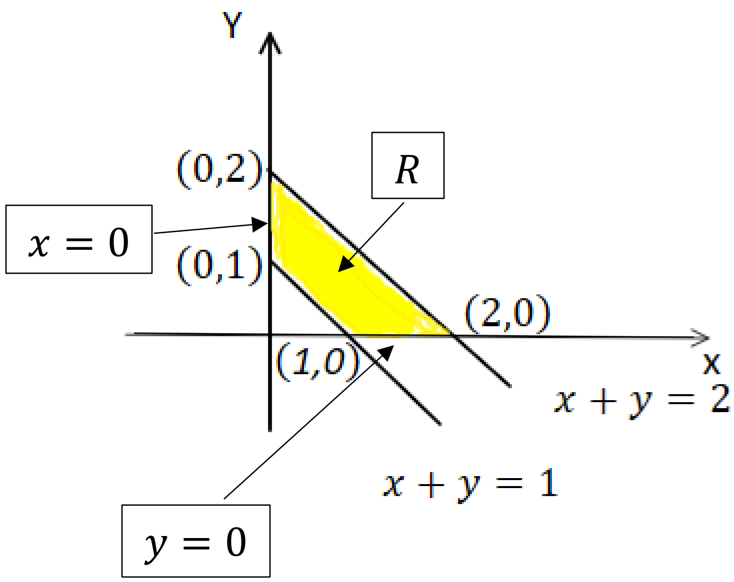
Resultado visto en la página 3.

Ejemplo 2

Calcular $\iint\limits_{R} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$

donde R es el trapecio con vértices $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(2,0)$.

Solución



Sea

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

Pimero del sistema

$$u + v = 2y \;\Rightarrow\; y = \frac{u+v}{2} = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

$$v - u = 2x \Rightarrow x = \frac{v-u}{2} = \frac{v}{2} - \frac{u}{2}$$

Ahora para obtener R' aplicaremos una transformación a cada recta que limita la región R, en efecto de la figura

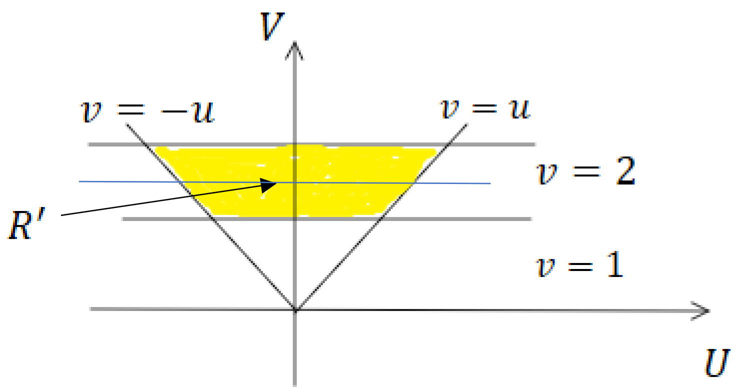
$$v = x + y = 1 \Rightarrow v = 1$$
$$v = x + y = 2 \Rightarrow v = 2$$

Para

$$y = 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow v = -u$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow v = u$$

Entonces



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Entonces

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}} dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (ve - ve^{-1})dv$$

$$= \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)\int_1^2 vdv$$

$$= \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2$$

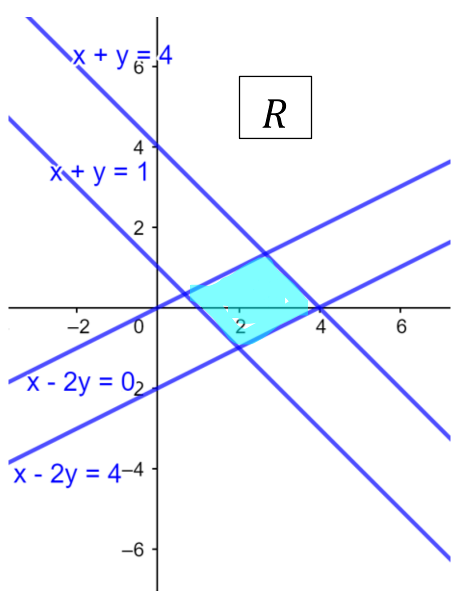
$$= \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(e - e^{-1})$$

Ejemplo 3

Empleando transformaciones adecuadas, hallar el área de la región limitada por

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Solución



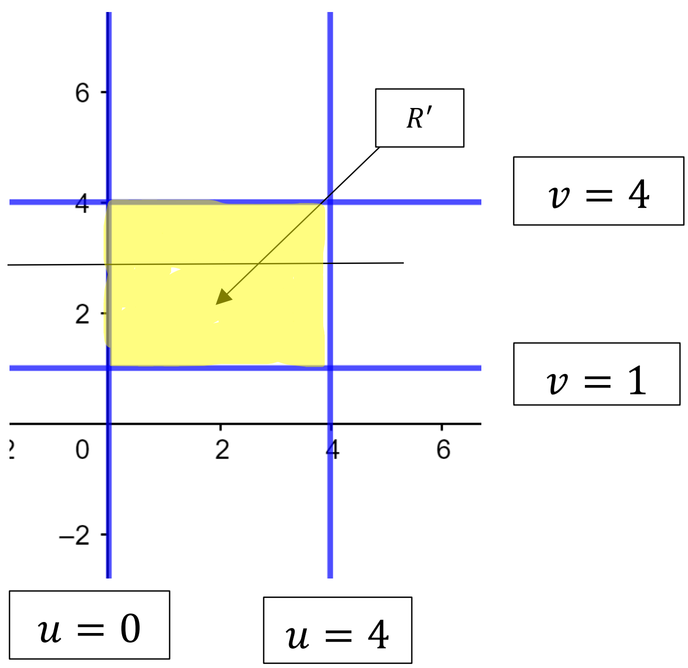
Podemos utilizar la siguiente transformación

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases} \cdots (1)$$

La trayectoria se transforma en:

$$\begin{cases} u = 4 \\ u = 0 \\ v = 4 \\ v = 1 \end{cases}$$

La nueva región de integración es



Entonces

$$A = \iint\limits_{R} f(x,y)dA = \iint\limits_{R'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Por encontrael jacobiano , pero antes

De (1)

$$\boxed{\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases} \cdots (1)}$$

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ 2v = 2x + 2y \end{cases}$$

Sumando

$$u + 2v = 3x$$

Lo que implica

$$x = \frac{u + 2v}{3} = \frac{u}{3} + \frac{2v}{3}$$

También de (1)

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ -v = -x - y \end{cases}$$

$$u - v = -3y$$

$$y = \frac{v - u}{3} = \frac{v}{3} - \frac{u}{3}$$

Luego

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$A = \iint\limits_{R'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_1^4 \int_0^4 \frac{1}{3} du\, dv = \int_1^4 \left[\frac{1}{3}u\right]_0^4 = \int_1^4 \frac{4}{3} du$$

$$= \frac{4}{3}[u]_1^4 = \frac{4}{3}(4 - 1) = 4u^2$$