Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 2

Mauro Jélvez Jélvez

22/04/2024

1)

Solución: Escribir las ecuaciones en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Primero que nada veremos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+3+6-6-1-9=-10$$

Por lo que tenemos $D \neq 0$ y $h_i = 0$, entonces las únicas soluciones son $x = 0, y = 0$, y $z = 0$. Para comprobarlo aplicaremos eliminación gaussiana. Aquí nos referiremos a las filas como F_i con $i = 1,2,3$ al usar eliminación Gaussiana.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2'=F_1-F2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3'=2F_1-F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3''=F_3'-F_2'}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2''=\frac{F_2'}{4}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3'''=F_2''-F_3''}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3''''=\frac{-1}{2}F_3'''}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2'''=F_2''-\frac{1}{2}F_3''''}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1'=3F_3''''-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1''=3F_2''''-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De aquí podemos concluir:

$$\begin{cases} x + y0 + z0 & = 0 \\ -x0 + y + z0 & = 0 \\ x0 + y0 + z & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que el conjunto solución será

$$x, y, z = 0$$

2)

Solución: Si sabemos que $[A, B] = AB - BA$, con A y B operadores lineales

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = [A, BC - CB] + [C, AB - BA] + [B, CA - AC]$$

$$[A, BC-CB]+[C, AB-BA]+[B, CA-AC] = ABC-BCA-ACB+CBA+CAB-ABC-CBA+BAC+BCA-CAB-BAC+$$

$$[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]] = ABC-ABC+BCA-BCA+CBA-CBA+CAB-CAB+BAC-BAC+ACB-ACB$$

Por lo tanto finalmente tendremos:

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$$

3)

Solución: Si ya tenemos que:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y sabemos que $\gamma^i = \gamma \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ con $i = 1, 2, 3$ y que $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.Por lo tanto para γ^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\gamma^1 = \gamma \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \gamma \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \gamma \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tendremos:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = i \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación de matrices de $\sigma_2\sigma_3$:

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$$

Reemplazando obtenemos:

$$\gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i|\sigma_1|^2 \\ -i|\sigma_1|^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |\sigma_1|^2 \\ |\sigma_1|^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos finalmente una expresión para γ^5 de la forma:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para comprobar $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ empezaremos con γ^0

$$\{\gamma^5, \gamma^0\} = \gamma^5\gamma^0 + \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -|\mathbf{1}_2|^2 \\ |\mathbf{1}_2|^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & |\mathbf{1}_2|^2 \\ -|\mathbf{1}_2|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^5,\gamma^\mu\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Para comprobar para γ^1,γ^2,γ^3 podríamos hacer el mismo proceso para una por una. Pero podemos usar la identidad $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ con $i = 1, 2, 3$

$$\{\gamma^5,\gamma^i\} = \gamma^5\gamma^i + \gamma^i\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^5,\gamma^i\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

4)

Solución:

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{1}_2|^2 & 0 \\ 0 & |-\mathbf{1}_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$(\gamma^i)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\sigma_i|^2 & 0 \\ 0 & -|\sigma_i|^2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

5)

Solución:

a)

Si tenemos $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{v}(A - \lambda\mathbf{1}_3) = 0$

$$det(A - \lambda\mathbf{1}_3) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$\frac{\lambda}{2}(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 1 - \lambda = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2} + 1 - \lambda = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda - 1 & = 0 \\ \lambda - 2 & = 0 \\ \lambda + 1 & = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_3 & = -1 \end{array}\right.$$

Para $\lambda_1 = 1$

$$A\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow \vec{v}(A - \lambda_1\mathbf{1}_3) = 0$$

$$\vec{v}\left(\begin{array}{rrr|r} 1-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando eliminación Gaussiana:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1'=F_1+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2'=F_1'-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3'=F_3-F_2'}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De aquí podemos concluir:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = x_3 \end{cases}$$

Lo que nos lleva a: $x_1 = -x_3$,$x_2 = 0$ y $x_3 = x_3$, por lo que nuestro vector propia quedará de la forma:

$$\vec{v}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\vec{v} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{v} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \underset{F_1'=-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \underset{F_2'=F_1'-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \underset{F_3'=F_3-F_2'}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De aquí obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_3 & = x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = x_2 \\ x_2 & = x_3 \\ x_3 & = x_3 \end{cases}$$

Y nuestro vector propio para λ_2 será:

$$\vec{v}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda_3 = -1$:

$$\vec{v} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-(-1) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(-1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-(-1) & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{v} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{F_1'=F_1-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{F_2'=F_2-F_1'}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{F_3'=F_3-F_2'}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De aquí obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_3 & = x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = x_3 \\ x_2 & = 2x_3 \\ x_3 & = x_3 \end{cases}$$

Y nuestro vector propio para λ_3 será:

$$\vec{v}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Resumiendo todo, tenemos los valores propios:

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_3 & = -1 \end{cases}$$

Y los vectores propios:

$$\vec{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b)

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{v}(A - \lambda\mathbf{1}_3) = 0$

$$det(A-\lambda\mathbf{1}_3) = det\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)+\lambda = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(-\lambda)+\lambda = (1-2\lambda+\lambda^2)(-\lambda)+\lambda = -\lambda+2\lambda^2-\lambda^3+\lambda$$

$$\lambda^2(2-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases}\lambda_1 &= 0\\ \lambda_2 &= 2\end{cases}$$

Tendremos que el valor propio $\lambda_1 = 0$ está degenerado.

$$\vec{v}\left(\begin{array}{ccc|c}1-0&1&0&0\\1&1-0&0&0\\0&0&-0&0\end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \underset{F_2'=F_2-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

De aquí obtenemos:

$$\begin{cases}x_1+x_2 &= 0\\ x_2 &= x_2\\ x_3 &= x_3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1 &= -x_2\\ x_2 &= x_2\\ x_3 &= x_3\end{cases}$$

Y el vector propio será:

$$\vec{v}_1 = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Al ser degenerado podríamos romper la degeneración ortogonalizando los vectores con ortogonalización de Gram-Schmidt, pero tenemos ya que los vectores son ortogonales, para comprobarlo, haremos el producto punto de ellos.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$\vec{v}\left(\begin{array}{ccc|c}1-2&1&0&0\\1&1-2&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right) \underset{F_1'=-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right) \underset{F_2'=F_2-F_1'}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1-x_2 &= 0\\ x_2 &= x_2\\ 2x_3 &= 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1 &= x_2\\ x_2 &= x_2\\ x_3 &= 0\end{cases}$$

Tendremos el siguiente vector propio:

$$\vec{v}_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Resumiendo todo, tenemos los valores propios:

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = 2 \end{cases}$$

Y los vectores propios:

$$\vec{V} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

6)

Solución:

Si sabemos que una matriz hermitiana cumple $H = (H^t)^* = H^\dagger$ y que todos sus valores propios son reales. Y por otro lado una matriz unitaria cumple $U^\dagger = U^{-1}$.

Por lo tanto tendremos que nuestra matriz hermitiana y unitaria A cumple:

$$A = A^{-1} = A^\dagger$$

Si tenemos $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$ y aplicamos la transpuesta conjugada † a toda la expresión.

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle \Rightarrow \langle v|A^\dagger = \langle v|\lambda^*$$

Como A es hermitiana: $A^\dagger = A$,

$$\langle v|A = \langle v|\lambda^*$$

Multiplicando por $\langle v|$:

$$\langle v|A|v\rangle = \lambda^* \langle v|v\rangle$$

Multiplicando por la matriz A^{-1}:

$$\langle v|v\rangle = \lambda^* \langle v|A|v\rangle$$

Si sabemos ya que $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$, reemplazando obtenemos

$$\langle v|v\rangle = \lambda^* \langle v|v\rangle \lambda$$

Al ser una matriz hermitiana sus valores propios son todos reales, por lo tanto: $\lambda^* = \lambda$, lo que nos lleva a lo siguiente:

$$|\lambda|^2 = \pm 1$$

7)

a)

Sabemos que $H = H^\dagger$

$$U = e^{iaH}$$

$$U^\dagger = e^{-iaH^\dagger} \Rightarrow U^\dagger = e^{-iaH}$$

Haciendo el producto punto de U con $U^\dagger$

$$U \cdot U^\dagger = e^{iaH} \cdot e^{-iaH^\dagger} = \frac{e^{iaH}}{e^{iaH}} = \mathbf{1}$$

b)

Si U es unitario tendremos : $U \cdot U^\dagger = \mathbf{1}$

$$U = e^{iaH}$$

$$U^\dagger = e^{-iaH^\dagger}$$

Haciendo el producto punto de U con $U^\dagger$

$$U \cdot U^\dagger = e^{iaH} \cdot e^{-iaH^\dagger} = \mathbf{1}$$

Para que esta igualdad se cumpla, debemos tener:

$$iaH - iaH^\dagger = 0 \Rightarrow H - H^\dagger = 0$$

$$H = H^\dagger$$

c)

$U = e^{iaH} \Rightarrow U = e^{ia\sum\lambda_i}$, tendremos que el determinante de U en esta relación con las matrices hermitianas será el producto de los valores propios.

$$det(U) = e^{ia\sum\lambda_i}$$

Dado que Tr(H)=0 $\Rightarrow \sum\lambda_i = 0$

$$det(U) = e^{iaTr(H)} \Rightarrow det(U) = e^{ia\cdot 0}$$

$$det(U) = +1$$

d)

Si tenemos det(U)=+1 $\Rightarrow det(e^{iaH}) = +1$

$$e^{ia\sum\lambda_i} = 1 \Rightarrow e^{iaTr(H)} = 1$$

Debemos tener:

$$iaTr(H) = 0$$

Lo que nos lleva a

$$Tr(H) = 0$$

8)

a)

$$\Omega = \begin{pmatrix} \langle 1|\Omega|1\rangle & \langle 1|\Omega|2\rangle \\ \langle 2|\Omega|1\rangle & \langle 2|\Omega|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tendremos:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$det(\Omega - \lambda \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = -1 \end{cases}$$

Para $\lambda_1 = 1$:

$$|v\rangle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = x_2 \\ x_2 & = x_1 \end{cases}$$

$$|v_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Normalizando $|v_1\rangle$ obtenemos $|V_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\langle v_1|v_1\rangle} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{2}}$, como el vector propio es proporcional a la base podemos escribirlo:

$$|V_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow |V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot |1\rangle + 1 \cdot |2\rangle)$$

Finalmente obteniendo:

$$|V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

Para $\lambda_1 = -1$:

$$|v\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = -x_2 \\ x_2 & = -x_1 \end{cases}$$

$$|v_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Normalizando $|v_2\rangle$ obtenemos $|V_2\rangle = \frac{|v_2\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{2}}$, como el vector propio es proporcional a la base podemos escribirlo:

$$|V_2\rangle = \frac{|v\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot |1\rangle - 1 \cdot |2\rangle)$$

Finalmente obteniendo:

$$|V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

c)

Tendremos $U = \begin{pmatrix} |V_1\rangle & |V_2\rangle \end{pmatrix}$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle & |1\rangle - |2\rangle \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle \\ |1\rangle - |2\rangle \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tendremos:

$$U^\dagger \Omega U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle \\ |1\rangle - |2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle & |1\rangle - |2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle \\ |1\rangle - |2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\rangle - |2\rangle \\ |1\rangle + |2\rangle \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger \Omega U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente obtenemos:

$$U^\dagger \Omega U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$