Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. **20**

Núcleo e imagen de una transformación lineal

Algunos conceptos previos:

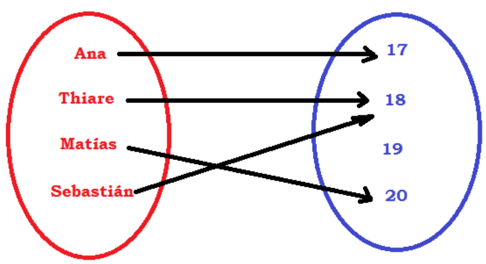
1. <u>Funciones inyectivas</u>

Definición: Una función es **inyectiva** si todo elemento del codominio B tiene **a lo sumo una** preimagen**.** O dicho con más precisión:

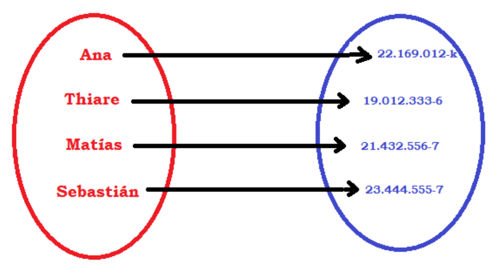
$$x \neq y \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \neq f(y)$$

Ejemplo 1: La función que a cada estudiante de la clase le asigna su edad, no es inyectiva, ya que varios estudiantes de la clase tienen la misma edad.

La función que a cada estudiante de la clase le asigna su RUT es inyectiva. No hay dos estudiantes con el mismo RUT.



NO INYECTIVA



INYECTIVA

Ejemplo 2: Investiguemos la función f: **R** $\rightarrow$ **R** tal que $f(x) = x^2$

Se observa que: $f(+2) = +4 \qquad f(-2) = +4$

Por lo tanto los elementos +2 y -2 tiene la misma imagen +4. **No es inyectiva.**

2. <u>Funciones sobreyectivas</u>

Definición: Una función es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto de llegada B tiene **por lo menos** una preimagen. O dicho con más precisión, el **recorrido** de la función es igual al **codominio** B.

$$\underline{\boldsymbol{R(f) = \mathrm{Codom}(f)}}$$

3. Funciones biyectivas

Definición: Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Para pensar: Quiero construir una función biyectiva, entre un conjunto A de 7 elementos y otro conjunto B. ¿Cuántos elementos deberá tener B para poder hacerlo?

A las funciones biyectivas se les llama también **correspondencia biunívocas.**

Núcleo y nulidad de una transformación lineal

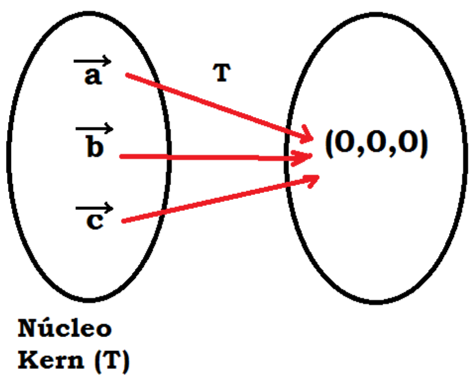
Definición: El núcleo de una transformación lineal

$$T: V \to W$$

es el conjunto de vectores $\vec{v} \in V$ que cumplen:

$$T(\vec{v}) = \vec{o}$$

Es decir, es el conjunto de vectores de V cuya imagen es el vector nulo $\vec{o} = (0, 0, 0 \ldots, 0)$



Para simbolizar al núcleo se escribe generalmente **kern(T)**, pero en el curso podemos escribir núcleo. **El núcleo es un subespacio vectorial del conjunto de partida V.** La dimensión del núcleo se llama **nulidad.**

Ejemplo 1: Encuentre el núcleo de la transformación lineal $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$
dada por la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Debe cumplirse que:

$$T(\vec{v}) = \vec{o}$$

$$A \cdot \vec{v} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Planteamos la multiplicación de esas matrices:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones obtenido es:

$$\begin{cases} x + 2y \qquad = 0 \\ 3x + \qquad 4z = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo, con un grado de libertad. Su solución es:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}\alpha \\ y = \dfrac{2}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El núcleo de esta transformación lineal es el subespacio de $\mathbf{R}^3$ generado por el vector

Núcleo T = $\left\{(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \mathbf{1})\right\} = \{(-\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\}$

Como la base del núcleo tiene un solo vector, su nulidad es …

Nulidad T = 1

Tiene dimensión 1. Observen que esa transformación no sería inyectiva ya que hay infinitos vectores con la misma imagen. Para que la transformación sea inyectiva deberá ser:

Núcleo T = $\{(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$

En ese caso:

Nulidad T = 0

Nota: Recuerden que por lo dicho la clase pasada, el vector (0,0,0) siempre pertenece al núcleo. Por otro lado, el sistema que se obtiene siempre es homogéneo, por lo tanto en todos los casos tiene la solución trivial (0,0,0).

Ejemplo 2:

Este ejemplo nos permitirá clarificar las cosas desde un punto de vista geométrico. Encuentre el núcleo de la transformación lineal

$$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

dada por la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primero veamos que hace esa transformación sobre el vector. Tomemos un vector cualquiera y multipliquémoslo por la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si el vector es

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo transforma en:

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}}$$

Es decir, lo proyecta sobre el plano XY.

¿Y cuál es el núcleo de esa transformación lineal? Hallándolo encontrarán que es:

Núcleo T = $\{(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}$

Nulidad T = 1

Está claro porqué. Al proyectar vectores de $\mathbf{R}^3$ sobre el plano XY, los vectores verticales, colineales con el eje z, se proyectan en el (0,0,0).

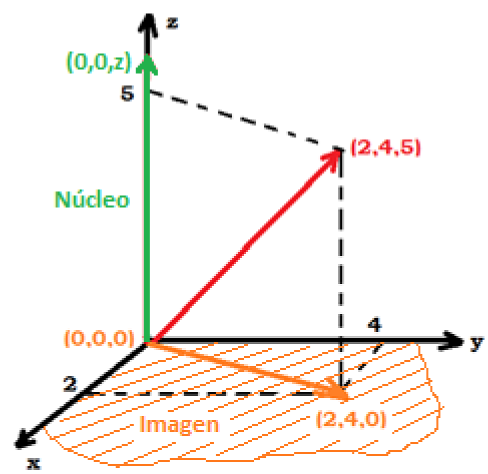


Imagen y rango de una transformación lineal

Ahora investiguemos la parte de la suprayectividad. Si aplico esa transformación anterior, los vectores naranja que obtengo, ¿cubren todo el espacio $\mathbf{R}^3$? Evidentemente no, ya que están en el plano XY. Esa transformación no es suprayectiva en $\mathbf{R}^3$. Ese subespacio de $\mathbf{R}^3$ que cubren es lo que llamaremos **imagen de la transformación.** La dimensión del espacio vectorial imagen se llama **rango**.

Definición: La **imagen de la transformación** $T: V \to W$ es el subespacio de W formado por los vectores que tienen preimagen en esa transformación.

Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

La imagen del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

Imagen T = $\{(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})\}$

Como la base del espacio vectorial imagen tiene dos vectores, entonces.

Rango T = 2

> **Propiedad**
> En toda transformación lineal
> $$T: V \to W$$
> se cumple:
> **Nulidad T + Rango T = dim V**

Comprobémoslo en el último ejemplo. La transformación es $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$
Por tanto la dimensión de V (el conjunto de partida) es 3.

Nulidad T + Rango T = dim V

1 + 2 = 3 Se cumple

> **Ejemplo 3:**
>
> Hallemos ahora la imagen de la transformación $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ del primer ejemplo de la clase de hoy (**ejemplo 1**), y comprobemos la propiedad de las dimensiones.
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y & \\ 3x & + 4z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gen [Im (T)] = {(1,3),(2,0),(0,4)}

¿Es un conjunto linealmente independiente, o sea, es base? Cambiemos de psoisción los vectores 1 y 2 y ya queda escalerizado. Finalmente, elegimos como conjunto linealmente independiente al formado por los vectores 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Im (T) = {(1,3),(2,0)}

Rango T = 2

Nulidad T + Rango T = dim V

1 + 2 = 3

Ejemplo 4

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que:

$$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre $T(5,4,-2)$.

b) Determine la matriz asociada a T respecto a la base $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

c) Determine el Kernel de T. ¿Es T inyectiva?

d) Determine la dimensión de la imagen de T. ¿Es T sobreyectiva?

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la transformación es lineal …

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -12 & 32 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz en la base canónica $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

La quieres llevar a la base $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$

La matriz de pasaje de B a Bc es (vectores de B en columnas): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora realizamos este proceso: Voy de la base B a la base B_c con la matriz anterior y aplico la transformación T. O sea, la matriz se obtiene de multiplicar …

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelvo el sistema que se obtiene, y expreso la solución como combinación lineal de vectores. Esos vectores forman la base del núcleo.

T es inyectiva si el núcleo (Kernel) queda:

$$Núcleo(T) = \{(0,0,0)\}$$

O sea si el sistema es determinado. Su única solución es la trivial. El rango de la matriz es 3. Se confirma que T es inyectiva.

d) Tenemos el teorema de las dimensiones. Si T: V →W

Nulidad(T) + Rango(T) = dim V

O sea,

$$\dim Núcleo(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

Vemos que V = **R**³. De allí obtenemos la dimensión de la imagen (**Rango**). Tendría que ser 4 para poder cubrir a todas las matrices 2 x 2 (porque las matrices 2 x 2 tienen cuatro elementos). Si es 4, es sobreyectiva. Si es menor, NO.

0 + Rango(T) = 3

Realizando el cálculo, vemos que es 3. **No es sobreyectiva.**

Ejercicios:

1. Para las siguientes transformaciones, probar que son lineales y luego hallar su núcleo, su imagen, su rango y su nulidad:

(a)	**T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$**	tal que	$T(x, y, z) = (x + 2y, x - 3z)$
(b)	**T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$**	tal que	$T(x, y, z) = (x - y, x + z, 2x - y + z)$
(c)	**T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$**	tal que	$T(x, y, z) = (x, x + y, x + 2z)$
(d)	**T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$**	tal que	$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$
(e)	**T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$**	tal que	$T(x, y, z) = (x, y, z) \cdot (1, 1, -1)$

2. Interpretar geométricamente las transformaciones (de los espacios $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ en sí mismos, según corresponda) dadas por las siguientes matrices. Decidir cuáles son isometrías. Hallar núcleo, imagen, nulidad y rango.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) Hallar el núcleo y la imagen de la transformación lineal **T: R³ → R³** cuya matriz característica es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(b) ¿A qué isometría corresponde esa matriz?

(c) Hallar la matriz de la transformación de giro de 30° de un vector en **R³** alrededor del eje x.

4. Consideremos una transformación lineal **T: R³ → R³** cuya matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

trabajando en la base B_1={(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)}

(a) Hallar la matriz de **T** cuando se trabaja en la base canónica.
(b) Escriba la expresión de T(x, y, z) trabajando en la base canónica.
(c) Decida si la transformación es **inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.**

5. Sea **T : V → W** una transformación lineal tal que $dim(V) = dim(W)$. Demostrar que:

1. Si T es inyectiva, entonces T es sobreyectiva.
2. Si T es sobreyectiva, entonces T es inyectiva.

6. Sean **T : V → W** una transformación lineal y $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}$, vectores de V.

(a) Demostrar que si el conjunto de vectores transformados en W, $\{\mathbf{T}(\mathbf{v_1}), \mathbf{T}(\mathbf{v_2}), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{v_n})\}$ es linealmente independiente, entonces el conjunto original en V también lo es.

(b) ¿Se cumple el teorema recíproco? ¿Por qué? Encuentre un ejemplo de transformación **T: R² → R²** para la cual el teorema recíproco sea falso.