Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

3ª. prueba parcial

18 de Noviembre de 2021

Instrucciones:

- **La prueba es individual. Se recomienda no comentar el trabajo propio con otros estudiantes.**
- **El plazo de entrega de la prueba es el <u>jueves 18 de Noviembre de 2021 a las 22 horas</u>.**
- **Se deberá enviar un documento único (pdf o Word con fotos pegadas) conteniendo fotos de la resolución escrita a mano por el estudiante (no más de cuatro o cinco fotos por el peso del archivo, aunque no es excluyente). De ser posible, se sugiere escanear para mayor claridad.**
- **El correo deberá enviarse desde el correo institucional del estudiante, esto es ...@alumnos.uv.cl al correo mario.marotti@uv.cl**
- **En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible.**

---

1. Trabajando en $\mathbf{R}^4$, se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$S_1 = \{(1,1,0,0),(1,2,3,0)\} \qquad S_2 = \{(1,1,1,1),(1,0,-2,1)\}$$

Encuentre: (a) Una base y la dimensión del subespacio $S_1 + S_2$ **(1,0 puntos)**

(b) Una base y la dimensión del subespacio $S_1 \cap S_2$ **(0,5 puntos)**

(c) ¿Es $S_1 + S_2 = \boldsymbol{R}^4$? Justifique adecuadamente su respuesta. **(0,5 puntos)**

2. (a) Demuestre que $\mathrm{P} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

es una base del conjunto de matrices cuadradas $M_{2x2}(\mathbf{R})$. **(0,5 puntos)**

(b) Encuentre la matriz que permite pasar de un sistema de coordenadas en la base P a otro en la base N, siendo

$$N = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$ **(0,5 puntos)**

(c) Operando con matrices, encuentre las coordenadas de la matriz

$$A = (1,2,3,4)_P$$

en la base N. **(1,0 puntos)**

3. En el conjunto $\mathbf{P}^2(\mathbf{x})$ (de todos los polinomios de grado ≤ 2 con el polinomio nulo) se considera el subespacio vectorial siguiente.

$$S = \{x^2 + 3x, x^2 + x + 5\}$$

(a) Compruebe que el polinomio

$$p(x) = -x^2 + x - 10$$

pertenece al subespacio S. **(1,0 puntos)**

(b) Encuentre un polinomio perteneciente a ese subespacio que sea “ortogonal” al polinomio $p(x)$ **(1,0 puntos)**

Ejercicio 1

(a) Armamos la matriz con los cuatro vectores columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forman un conj. linealmente independientes de vectores.

Base: $(S_1 + S_2) = \{(1,1,0,0)\ (1,2,3,0)\ (1,1,1,1)\}$

$$\boxed{\dim(S_1 + S_2) = 3}$$

(b) Los vectores comunes a S_1 y S_2 pueden ser escritos como:

$\vec{v} = \alpha\langle 1,1,0,0\rangle + \beta\langle 1,2,3,0\rangle$

$\vec{v} = \gamma\langle 1,0,-2,1\rangle + \delta\langle 1,1,1,1\rangle$

Igualamos y armamos un sistema:

$\alpha\langle 1,1,0,0\rangle + \beta\langle 1,2,3,0\rangle = \gamma\langle 1,0,-2,1\rangle + \delta\langle 1,1,1,1\rangle$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \delta = 0 \\ 3\beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\gamma - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta = -\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \beta = -\gamma \qquad \alpha = \gamma$$

$\gamma = 1 \quad \beta = -1 \quad \alpha = 1$

Tomamos

$\vec{v} = 1\langle 1,1,0,0\rangle - 1\langle 1,2,3,0\rangle = \langle 0,-1,-3,0\rangle$

$$\boxed{S_1 \cap S_2 = \{(0,-1,-3,0)\}}$$

(c) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ Respuesta: NO.

Ejercicio 2

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es base.

(b)

$$B_P \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}]{} B_C \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}]{} B_N$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$ Intercambiamos filas 3 y 4 y las multiplicamos por (−1)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

matriz inversa es la propia matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz de cambio de base}} = M_{B_P \to B_N}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = (6, 12, -10, 0)_N}$$

Ejercicio 3 :

$$S = \{(0,3,1)(5,1,1)\}$$

(a) $-x^2+x-10 = \alpha(x^2+3x)+\beta(x^2+x+5)$

Igualando términos en x^2: $\alpha+\beta = -1$

" " " x: $3\alpha+\beta = 1$

" " indep.: $5\beta = -10$

$\boxed{\beta=-2}$ $\boxed{\alpha=1}$ Sí.

(b) Ahora tenemos

gen $S' = \{(-10,1,-1)(0,3,1)(5,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 0 & +30 & +15 \\ 0 & -10 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos quedamos con las dos primeros vectores.

$$S = \{(-10,1,-1)(0,3,1)$$

Gram-Schmidt:

$$\vec{u_1} = \langle -10,1,-1\rangle$$

$$\vec{u_2} = (0,3,1) - \frac{\langle 0,3,1\rangle\langle -10,1,-1\rangle}{\langle -10,1,-1\rangle\langle -10,1,-1\rangle}\langle -10,1,-1\rangle$$

$$\vec{u_2} = (0,3,1) - \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{102}_{51}}\langle -10,1,-1\rangle$$

$$\vec{u_2} = \frac{1}{51}\left[\langle 0,153,+51\rangle - \langle -10,1,-1\rangle\right]$$

$$\vec{u_2} = \frac{1}{51}\cdot\langle 10,152,52\rangle$$

$$\vec{u_2} = \langle 10,152,52\rangle$$

$$\boxed{q(x) = 10 + 152x + 52x^2}$$

$$\langle -10,1,-1\rangle\cdot\langle 10,152,52\rangle = 0$$