Clase nº24

Cálculo II

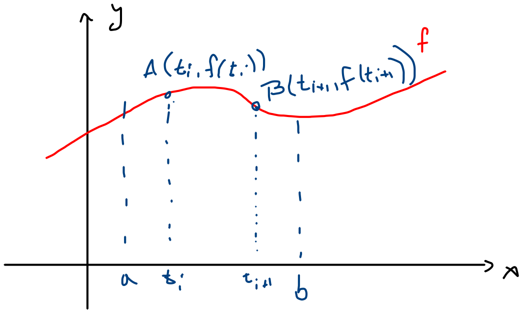
Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

25 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular la longitud de una curva.

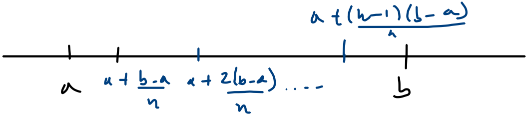
Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares



Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua. Consideremos la partición del intervalo $[a,b]$

$$P = \left\{ a,\ a + \frac{b-a}{n},\ a + 2 \cdot \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a + (n-1)\frac{b-a}{n},\ b \right\}$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

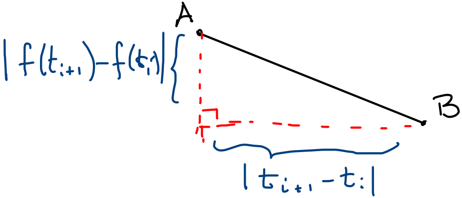


Obs: cada subintervalo tiene longitud $\frac{b-a}{n}$.

Consideremos

$$t_i = a + i\frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

¿Cuál es la longitud entre los puntos $A(t_i, f(t_i))$ y $B(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$?



Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Así,

$$d(A,B) = \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2}.$$

Denotaremos L_i a la longitud entre los puntos $(t_i, f(t_i))$ y $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Luego,

$$L_i = \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2}$$

El teorema del valor medio nos permite asegurar que $\exists\, c_i \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Así,

$$L_i = \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + [f'(c_i)]^2 (t_{i+1}-t_i)^2}$$

$$= |t_{i+1}-t_i| \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}.$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

tenemos una aproximación a la longitud de f en $[a,b]$ dada por

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i = \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1}-t_i| \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}.$$

Como f tiene derivada continua, entonces la función $g(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ definida sobre $[a,b]$ y con valores en $\mathbb{R}$ es continua, y por lo tanto integrable.

Como $\sum_{i=0}^{n-1} L_i$ es una suma de Riemann, tenemos

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)|t_{i+1}-t_i|.$$

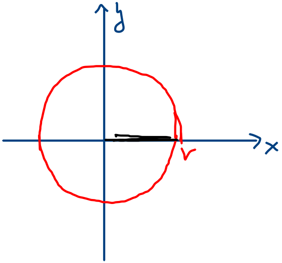
$\therefore$, la longitud de la curva f entre $x=a$ y $x=b$ es

$$\boxed{L_f = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.}$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Ejemplo 75

Calcular la longitud de un círculo centrado en el origen y de radio r.



Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$.

La longitud del círculo está dada por

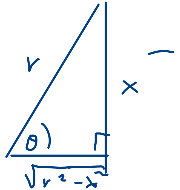
$$L = 4\int_0^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$



Realizamos el cambio de variable

$$x = r\sin\theta \Rightarrow dx = r\cos\theta\, d\theta$$

Notar que:

- $x = 0 \Rightarrow r\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.
- $x = r \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Luego,

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r^2\sin^2\theta}} \cdot r\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 \cdot \cos^2\theta}} \cdot r\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, d\theta = r\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r\pi}{2}\cdot 4 = 2\pi r$$

$\therefore$, la longitud del círculo centrado en el origen y de radio r es

$$L = 2\pi r.$$

Ejercicio: Buscar el "problema" presente en:
(1 décima)

$$\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Ejemplo 76

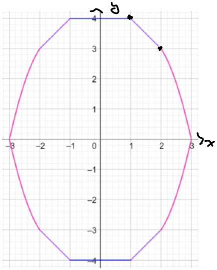
Sea L una curva que es simétrica con respecto al eje X e Y. La forma que toma en el primer cuadrante está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in [0,1[\\ 5 - x, & \text{si } x \in [1,2[\\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x, & \text{si } x \in [2,3]. \end{cases}$$

Calcular el perímetro de L

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Notar que la derivada de f no es continua. Por lo que trabajaremos por tramos



- Sea $g(x)=4$ con $x\in[0,1]$. El perímetro de esta curva es

$$L_g = \int_0^1 \sqrt{1}\, dx = 1.$$

- Sea $h(x)=5-x$ con $x\in[1,2]$.

Así,

$$L_h(x) = \int_1^2 \sqrt{1+(-1)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2}.$$

- Sea $i(x) = -\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$, $x\in[2,3]$. Luego,

$$L_i = \int_2^3 \sqrt{1+\left[-3x+\frac{9}{2}\right]^2}\, dx$$

$$= \dots \quad \text{Ejercicio}$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{85} - \frac{\sqrt{13}}{8} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{-3+\sqrt{13}}{-9+\sqrt{85}}\right|.$$

Como la curva L es simétrica con respecto al eje X e Y se tiene que el perímetro de L es

$$P_L = 4\left(1 + \sqrt{2} + \frac{3}{8}\sqrt{85} - \frac{\sqrt{13}}{8} + \frac{1}{6}\ln\left| \frac{-3+\sqrt{13}}{-9+\sqrt{85}} \right| \right).$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares

Longitud de la curva en coordenadas polares

Considerando que

$$\begin{cases} x(\theta) & = & r\cos\theta \\ y(\theta) & = & r\sin\theta. \end{cases}$$

Si $r = f(\theta)$, donde f es una función cuya derivada es continua en $[\theta_0, \theta_1]$, entonces la longitud de la curva entre θ_0 y θ_1 es

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Ejemplo 77

Encuentre la longitud de arco de la curva: $r = 3e^{2\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(3e^{2\theta})^2 + (6e^{2\theta})^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9e^{4\theta} + 36e^{4\theta}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{45} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2\theta}\, d\theta$$

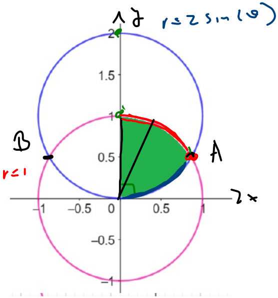
$$= \sqrt{45}\, \frac{e^{2\theta}}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(e^{\frac{\pi}{3}} - 1\right).$$

Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Ejemplo 78

Sean las curvas $r = 2\sin(\theta)$ y $r = 1$. Calcular el perímetro de la región pintada.



Busquemos el ángulo asociado al punto A. Para eso necesitamos que

$$2\sin\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; \theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi\right)$$

donde, $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

Luego, el perímetro buscado es

$$P = 1 + \int_0^{\pi/6} \sqrt{(2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1^2}\, d\theta$$

$$= 1 + 2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \,//$$

Ejercicios propuestos

1. Calcule la longitud de la curva $y = \frac{1}{3}x^3$, en el intervalo $[1, 4]$.

2. Calcular el área y el perímetro de la región R, donde

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq 2x \; \wedge \; y \geq -\frac{1}{2}x \; \wedge \; y \geq x^2 - 4\}.$$

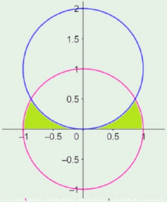
3. Sean las curvas $y = |\sin x|$, $y = |\cos x|$. Calcule el área y el perímetro de la región que se encuentra entre ambas curvas en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Ejercicios propuestos

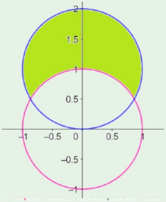
4. Calcular la longitud de la curva $y = x^2$, en el intervalo $[2, 5]$.
5. Calcular la longitud de la curva $y = \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$.
6. Exprese la integral que permite calcular la longitud de la curva $r = 2\sin(3\theta)$
7. Exprese la integral que permite calcular la longitud de la curva $r = 3\sin(2\theta)$.

Ejercicios propuestos

8. Sean las curvas $r = 2\sin(\theta)$ y $r = 1$. Calcular el el área de la región pintada y el perímetro



9. Sean las curvas $r = 2\sin(\theta)$ y $r = 1$. Calcular el perímetro y el área de la región pintada.



Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.