Clase nº42

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

15 de Diciembre 2021

Revisión tarea 3

Ejercicio 1

Determine si la siguiente integral es o no convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3}\,dx$$

Sea $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$, f no es acotada en $[0, \infty[$.

Luego,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^3}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3}\,dx$$

Veamos si $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3}\,dx$ converge o diverge

Consideremos

$$g(x) = \frac{1}{x^3}$$, además f y g son positivas

en $]0,\infty[$. Luego

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1.$$

por criterio de comparación al límite $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3}\,dx$

diverge, ya que $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ diverge.

Ejercicio 2

Determine si la siguiente integral es impropia

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}\, dx.$$

no es impropia. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{|x|}}$ es acotada en $[-2, 2]$. Notar que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}} = ?.$$

Ejercicio 3

¿Es correcto el siguiente razonamiento?

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Notar que $f(x) = \frac{1}{x^3}$ <u>no</u> es acotada en $[-1, 1]$.

$\therefore$, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$.

Sabemos que $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx$ y $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$ divergen.

$\therefore$, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$ diverge.

Ejercicio 4

Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^n x^n}{n!}$$

Sea $a_n = \dfrac{(-1)^n n^n}{n!}$, R : radio de convergencia.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(-1)^n n^n}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e.$$

$$\therefore,\ R = \frac{1}{e}.$$

Ejercicio 5

Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n^3+1}$$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$, R: radio de convergencia.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3+1}}{\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} = 1.$$

$\therefore$, $R = 1$.

• Intervalo de convergencia

$$|x+2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+2 < 1$$

R

$$\Leftrightarrow \quad -3 < x < -1.$$

→ Si $x=-3$ entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \quad \text{converge}$$

considerando $a_n = \frac{1}{n^3+1}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$ se tiene que

$$0 < a_n < b_n \, , \; \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge entonces por criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge

$\therefore$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge.

→ Si $x = -1$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1^n}{n^3+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$$ converge

por criterio de Leibniz.

notar que
- $a_n = \frac{1}{n^3+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- a_n es decreciente.
- $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$\therefore$, el intervalo de convergencia es $[-3, -1]$

Ejercicio 6

Determine de forma explicita la serie de Talylor centrada en $a = 2$ de

$$f(x) = \ln x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2 \cdot 3}{x^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4x^3}{x^8} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{x^n} \longrightarrow f^{(n)}(2) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{2^n}$$

Recordar que la serie formal de Taylor de f centrada en $x=a$ es

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Es decir, la serie buscada es

$$f(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n\, n!}(x-2)^n$$

o bien

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n\,2^n}.$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.