

CAPÍTULO

10

FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES DE FOURIER

- 10.1 Funciones ortogonales
- 10.2 Series de Fourier
- 10.3 Series de Fourier de cosenos y senos
- 10.4 El problema de Sturm-Liouville
- 10.5 Series de Bessel y de Legendre
 - 10.5.1 Serie de Fourier-Bessel
 - 10.5.2 Serie de Fourier-Legendre
- Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

El lector ha estudiado ya, en el cálculo **infinitesimal**, los vectores en el espacio de dos y tres dimensiones, y sabe que dos vectores no cero son ortogonales cuando su producto punto, o producto interno, es cero. Al dejar ese nivel, las nociones de vectores, ortogonalidad y producto interno pierden, con frecuencia, su interpretación geométrica. Estos conceptos se han generalizado y es muy común imaginar que una función es un vector. En consecuencia, podemos decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero. En este caso, veremos que el producto interno de los vectores es una integral definida. El concepto de funciones ortogonales es fundamental en el estudio de los temas del siguiente capítulo y otros.

Otro concepto que se vio en **cálculo** infinitesimal fue el desarrollo de una función f como serie infinita de potencias de $x - a$, llamada serie de potencias. En este capítulo aprenderemos a desarrollar una función f en términos de un conjunto infinito de funciones ortogonales.

10.1 FUNCIONES ORTOGONALES

- Producto interno ■ Funciones ortogonales ■ Conjunto ortogonal ■ Norma ■ Norma cuadrada
 ■ Conjunto ortonormal ■ Ortogonalidad con respecto a una función peso
 ■ Serie de Fourier generalizada

En **matemáticas** superiores se considera que una **función** es la generalización de un vector. En esta sección veremos cómo los dos conceptos vectoriales de producto interno (punto) y ortogonalidad se pueden ampliar para abarcar las funciones.

Supongamos que u y v son vectores en el espacio tridimensional. El producto interno (u, v) de los vectores, que también se escribe $u \cdot v$, posee las propiedades siguientes:

- i) $(u, v) = (v, u)$
- ii) $(ku, v) = k(u, v)$, donde k es un escalar
- iii) $(u, u) = 0$, si $u = 0$, y $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$
- iv) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

Esperamos que una generalización del concepto de producto interno debe tener las mismas propiedades.

Producto interno Supongamos ahora que f_1 y f_2 son **funciones definidas** en un intervalo $[a, b]$.* Como una integral del producto $f_1(x)f_2(x)$ definida en el intervalo **también** posee las propiedades i) a iv), siempre y cuando existan las integrales, podemos enunciar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 10.1 Producto interno

El **producto interno** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx.$$

Funciones ortogonales Dado que dos vectores u y v son ortogonales cuando su producto interno es cero, definiremos **las funciones ortogonales** en forma semejante:

DEFINICIÓN 10.2 Funciones ortogonales

Dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0 \quad (1)$$

*El intervalo **también** podría ser $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$, etcétera.

A diferencia del **análisis** vectorial, en donde la palabra ortogonal es sinónimo de “perpendicular”, en el presente contexto el término ortogonal y la condición (1) no tienen significado geométrico.

EJEMPLO 1 Funciones ortogonales

Las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ porque

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \int_{-1}^1 f_1(x) f_2(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

Conjuntos ortogonales Nos interesan principalmente los conjuntos **infinitos** de funciones ortogonales.

DEFINICIÓN 10.3 Conjuntos ortogonales

Un conjunto de funciones de valor real

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$$

es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

La norma, o longitud $\|\mathbf{u}\|$, de un vector \mathbf{u} se puede expresar en términos del producto interno; concretamente, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$, o bien $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. La **norma**, o **longitud** generalizada, de una función ϕ_n , es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$; es decir,

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}.$$

El número

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) dx \quad (3)$$

se llama **norma cuadrada** de ϕ_n . Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ y tiene la propiedad que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un **conjunto ortonormal** en el intervalo.

EJEMPLO 2 Conjunto ortogonal de funciones

Demuestre que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

SOLUCIÓN Si definimos $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, debemos demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x) dx = 0$ para $n \neq 0$ y que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x) dx = 0$ cuando $m \neq n$. En el primer caso,

$$\begin{aligned}(\phi_0, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\&= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\&= \frac{1}{n} [\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0, \quad n \neq 0,\end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned}(\phi_m, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x) dx \\&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Normas

Determine las normas de cada función en el conjunto ortogonal del ejemplo 2.

SOLUCIÓN Para $\phi_0(x) = 1$, de acuerdo con la ecuación (3),

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

de modo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se debe cumplir

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] dx = \pi.$$

Así, para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$.

Todo conjunto **ortogonal** de funciones $\{\phi_n(x)\}$ distintas de cero, $n = 0, 1, 2, \dots$, se puede **normalizar**, -esto es, transformar en un conjunto ortonormal- dividiendo cada función por su norma.

EJEMPLO 4 Conjunto ortonormal de funciones

Según los ejemplos 2 y 3, el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

Vamos a establecer una analogía más entre vectores y funciones. Suponga que \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 son tres vectores no cero, ortogonales entre sí en el espacio tridimensional. Ese conjunto ortogonal se puede usar como una base para el espacio en tres dimensiones; esto es, cualquier vector tridimensional se puede escribir en forma de una combinación lineal

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \quad (4)$$

en donde las c_i , $i = 1, 2, 3$, son escalares y se llaman componentes del vector. Cada componente c_i se puede expresar en términos de \mathbf{u} y del vector \mathbf{v}_i correspondiente. Para comprobarlo tomaremos el producto interno de (4) por \mathbf{v}_1 :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0.$$

Por consiguiente
$$c_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

En forma **semejante** podemos comprobar que los componentes c_2 y c_3 se pueden expresar como sigue:

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}.$$

Entonces, la ecuación (4) se puede escribir en la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2} \mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n. \quad (5)$$

Serie de Fourier generalizada Supongamos que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto infinito ortogonal de funciones en un intervalo $[a, b]$. Nos preguntamos: si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, ¿será posible determinar un conjunto de coeficientes c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, para el cual

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots? \quad (6)$$

Como en la descripción anterior, cuando determinamos los componentes de un vector, también podemos determinar los coeficientes c_n mediante el producto interno. Al multiplicar la ecuación (6) por $\phi_m(x)$ e integrar en el intervalo $[a, b]$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\phi_m(x) dx &= c_0 \int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x) dx + c_1 \int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x) dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx + \dots \\ &= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \dots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \dots \end{aligned}$$

Debido a la ortogonalidad, cada término del lado derecho de la última ecuación es cero, excepto cuando $m = n$. En este caso tendremos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x) dx.$$

Entonces, los coeficientes que buscamos son

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En otras palabras,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (7)$$

en la que

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx}{\|\phi_n(x)\|^2}. \quad (8)$$

La ecuación (7), en notación de producto interno (o producto punto), es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \phi_n(x). \quad (9)$$

Vemos así que esta ecuación es el análogo funcional del resultado vectorial expresado en la ecuación (5).

DEFINICIÓN 10.4 Conjunto ortogonal y función peso

Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es **ortogonal con respecto a una función peso $w(x)$** en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

La hipótesis habitual es que $w(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$.

EJEMPLO 5 Ortogonalidad y función peso

El conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ es ortogonal con respecto a la función peso constante $w(x) = 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ■

Si $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a una función peso $w(x)$ en $[a, b]$, al multiplicar (6) por $w(x)\phi_m(x)$ e integrar se llega a

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) w(x) \phi_n(x) dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \quad (10)$$

en donde

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x) \phi_n^2(x) dx. \quad (11)$$

La serie (7) en que los coeficientes están expresados por las ecuaciones (8) o (10), se llama **serie de Fourier generalizada**.

Conjuntos completos Podemos apreciar que el procedimiento descrito para determinar las c_n era *formal*; esto es, no tuvimos en cuenta las cuestiones básicas acerca de si en realidad es posible un desarrollo en serie como el de la ecuación (7). También, para desarrollar f en forma de una serie de funciones ortogonales, es necesario que no sea ortogonal a cada ϕ_n del conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. (Si f fuera ortogonal a toda ϕ_n , entonces $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.) Para evitar este problema supondremos, en lo que queda del capítulo, que un conjunto ortogonal es **completo**. Esto quiere decir que la única función ortogonal a cada miembro del conjunto es la función cero.

EJERCICIOS 10.1

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

En los problemas 1 a 6, demuestre que las funciones respectivas son ortogonales en el intervalo indicado.

1. $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2; [-2, 2]$
2. $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2 + 1; [-1, 1]$
3. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^{-x} = e^{-x}; [0, 2]$
4. $f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin^2 x; [0, \pi]$
5. $f_1(x) = x, f_2(x) = \cos 2x; [-\pi/2, \pi/2]$
6. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \sin x; [\pi/4, 5\pi/4]$

En los problemas 7 a 12 demuestre que el conjunto dado de funciones es ortogonal en el intervalo indicado. Calcule la norma de cada función del conjunto.

7. $\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots\}; [0, \pi/2]$
8. $\{\cos x, \cos 3x, \cos 5x, \dots\}; [0, \pi/2]$
9. $\{\sin nx\}, n = 1, 2, 3, \dots; [0, \pi]$
10. $\left\{\sin \frac{n\pi}{p} x\right\}, n = 1, 2, 3, \dots; [0, p]$
11. $\left\{1, \cos \frac{n\pi}{p} x\right\}, n = 1, 2, 3, \dots; [0, p]$
12. $\left\{1, \cos \frac{n\pi}{p} x, \sin \frac{m\pi}{p} x\right\}, n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots; [-p, p]$

Compruebe por **integración** directa que las funciones de los problemas 13 y 14 son ortogonales con respecto a la **función** peso indicada en el intervalo especificado.

13. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2; w(x) = e^{-x^2}, (-\infty, \infty)$

14. $L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1, L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1; w(x) = e^{-x}, [0, \infty)$

15. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$. Demuestre que $\int_a^b \phi_n(x) dx = 0$ para $n = 1, 2, \dots$.

16. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_1(x) = x$. Demuestre que $\int_a^b (\alpha x + \beta)\phi_n(x) dx = 0$ para $n = 2, 3, \dots$ y todas α y β constantes.

17. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$. Demuestre que $\|\phi_m(x) + \phi_n(x)\|^2 = \|\phi_m(x)\|^2 + \|\phi_n(x)\|^2, m \neq n$.

18. De acuerdo con el problema 1, sabemos que $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son ortogonales en $[-2, 2]$. Determine las constantes c_1 y c_2 tales que $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ sea ortogonal a f_1 y f_2 a la vez, en el mismo intervalo.

19. El conjunto de funciones $\{\sin nx\}, n = 1, 2, 3, \dots$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Demuestre que el conjunto no es completo.

20. Sean f_1, f_2 y f_3 funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$.

10.2 SERIES DE FOURIER

- Serie de Fourier ■ Coeficientes de Fourier ■ Convergencia de una serie de Fourier
- Extensión periódica

El conjunto de funciones

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{p}, \cos \frac{2\pi x}{p}, \dots, \sin \frac{\pi x}{p}, \sin \frac{2\pi x}{p}, \sin \frac{3\pi x}{p}, \dots \right\} \quad (1)$$

es ortogonal en el intervalo $[-p, p]$ (véase el problema 12 de los ejercicios 10.1). Supongamos que f es una función definida en el intervalo $[-p, p]$ que se puede desarrollar en la serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right). \quad (2)$$

Entonces, los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ se pueden determinar tal como describimos para la serie de Fourier generalizada en la sección anterior.

Al integrar ambos lados de la ecuación (2), desde $-p$ hasta p , se obtiene

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi x}{p} dx + b_n \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi x}{p} dx \right). \quad (3)$$

Como cada función $\cos(n\pi x/p), \sin(n\pi x/p), n > 1$, es ortogonal a 1 en el intervalo, el lado derecho de (3) se reduce a un solo término y, en consecuencia,

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = pa_0.$$

Al despejar a_0 se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx. \quad (4)$$

Ahora multipliquemos la ecuación (2) por $\cos(m\pi x/p)$ e integremos:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{m\pi x}{p} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dx + b_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi x}{p} dx \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Por la ortogonalidad tenemos que

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} dx = 0, \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi x}{p} dx = 0.$$

*Hemos optado por escribir el coeficiente de 1 en la serie (2) en la forma $a_0/2$, y no como a_0 . Es sólo por comodidad; la fórmula para a_n se reducirá entonces a a_0 cuando $n = 0$.

Entonces, la ecuación (5) se reduce a
$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx = a_n p,$$

y así
$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx. \quad (6)$$

Por último, si multiplicamos a (2) por $\text{sen}(m\pi x/p)$, integramos y aplicamos los resultados

$$\int_{-p}^p \text{sen} \frac{m\pi}{p} x \, dx = 0, \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^p \text{sen} \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx = 0$$

$$\int_{-p}^p \text{sen} \frac{m\pi}{p} x \text{sen} \frac{n\pi}{p} x \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n, \end{cases}$$

llegamos a
$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \text{sen} \frac{n\pi}{p} x \, dx. \quad (7)$$

La serie trigonométrica (2) en que las ecuaciones (4), (6) y (7) definen respectivamente los coeficientes a_0 , a_n y b_n , es una **serie de Fourier** de la **función** f . Los coeficientes que así se obtienen se llaman **coeficientes de Fourier** de f .

Al determinar los coeficientes a_0 , a_n y b_n supusimos que f es integrable en el intervalo y que la ecuación (2) —al igual que la serie obtenida multiplicando dicha ecuación por $\cos(m\pi x/p)$ — converge en tal forma que permite la integración término a término. Hasta no demostrar que la ecuación (2) es convergente para determinada **función** f , no se debe tomar el signo igual en sentido estricto o literal. Algunos textos emplean el símbolo \sim en lugar del $=$. En vista de que en las aplicaciones la mayor parte de las funciones son del tipo que garantiza la convergencia de la serie, usaremos el signo igual. Sinteticemos los resultados:

DEFINICIÓN 10.5 Serie de Fourier

La **serie de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$ es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \text{sen} \frac{n\pi}{p} x \right) \quad (8)$$

en la cual

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \, dx \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx \quad (10)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \text{sen} \frac{n\pi}{p} x \, dx. \quad (11)$$

EJEMPLO 1 Desarrollo en serie de Fourier

Desarrolle

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (12)$$

en una serie de Fourier.

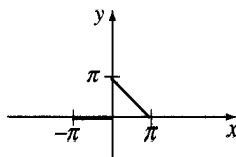


FIGURA 10.1

SOLUCIÓN En la figura 10.1 vemos la gráfica de f . Con $p = \pi$ tenemos, según las ecuaciones (9) y (10),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(\pi - x) \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} \quad \leftarrow \cos n\pi = (-1)^n \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

En forma semejante vemos que, según (11),

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{n}.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos nx + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right\}. \quad (13)$$

Observe que a_n definida por la ecuación (10) se reduce a a_0 da& por la ecuación (9), cuando se hace $n = 0$. Pero como muestra el ejemplo 1, esto quizá no sea el caso después de evaluar la integral para a_n .

Convergencia de una serie de Fourier El teorema que sigue especifica las condiciones suficientes de convergencia de una serie de Fourier en un punto.

TEOREMA 10.1 Condiciones de convergencia

Sean f y f' continuas en tramos en el intervalo $(-p, p)$; esto es, sean continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades sólo finitas en esos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad la serie de Fourier converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

en donde $f(x+)$ y $f(x-)$ representan el límite de f en x , desde la derecha y la izquierda, respectivamente.*

El lector puede encontrar una demostración de este teorema en el texto clásico de Churchill y Brown.†

EJEMPLO 2 Convergencia en un punto de discontinuidad

La función (12) del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 10.1. Así, para todo x del intervalo $(-\pi, \pi)$, excepto cuando $x = 0$, la serie (13) convergerá hacia $f(x)$. Cuando $x = 0$ la función es discontinua y por consiguiente la serie convergerá a

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Extensión periódica Observamos que las funciones del conjunto básico (1) tienen un periodo común $2p$; por consiguiente, el lado derecho de la ecuación (2) es periódico. Deducimos entonces que una serie de Fourier no sólo representa a la función en el intervalo $(-p, p)$, sino que también da la extensión periódica de f fuera de este intervalo. Ahora podemos aplicar el teorema 10.1 a la extensión periódica de f o suponer, desde el principio, que la función dada es periódica, con periodo $2p$ (esto es, $f(x + 2p) = f(x)$). Cuando f es continua por tramos y existen las derivadas derecha e izquierda en $x = -p$ y en $x = p$, respectivamente, la serie (8) converge hacia el promedio $[f(p-) + f(p+)]/2$ en esos extremos, y hacia este valor extendido periódicamente a $\pm 3p, \pm 5p, \pm 7p$, etcétera.

* En otras palabras, cuando x es punto en el intervalo y $h > 0$,

$$f(x+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h), \quad f(x-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x - h)$$

† Ruel V. Churchill y James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (New York: McGraw-Hill).

EJEMPLO 3 Convergencia a la extensión periódica

La serie de Fourier (13) converge hacia la extensión periódica de (12) en todo el eje x . Los puntos llenos de la figura 10.2 representan el valor

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

en $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. En $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ la serie converge hacia el valor

$$\frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2} = 0$$

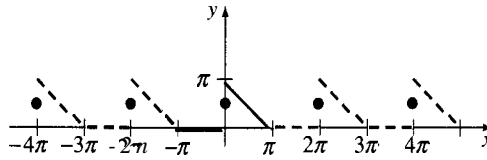


FIGURA 10.2

EJERCICIOS 10.2

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

Determine las series de Fourier de cada f en el intervalo dado en los problemas 1 a 16.

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < x < 0 \\ \pi^2 - x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$7. f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$$

$$8. f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -2 < x < -1 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 0, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$15. f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

$$16. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

17. Con el resultado del problema 5 demuestre que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad \text{y} \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

18. Con el resultado del problema anterior determine una serie cuya suma sea $\pi^2/8$.

19. Aplique el resultado del problema 7 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

20. Emplee el resultado del problema 9 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots$$

21. a) Emplee la forma exponencial compleja del coseno y del seno

$$\cos \frac{n\pi}{p} x = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \quad \text{sen} \frac{n\pi}{p} x = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

para demostrar que la ecuación (8) se puede expresar en la **forma compleja**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

en que $c_0 = a_0/2$, $c_n = (a_n - ib_n)/2$, y $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Demuestre que c_0 , c_n y c_{-n} de la parte a) se pueden expresar en la forma de integral

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-in\pi x/p} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

22. Aplique los resultados del problema 21 para hallar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

10.3

SERIES DE FOURIER DE COSENOS Y DE SENOS

- Funciones pares e impares ■ Propiedades de las funciones pares e impares
- Series de Fourier de cosenos y de senos ■ Sucesión de sumas parciales
- Fenómeno de Gibbs ■ Desarrollos en mitad de intervalo

Funciones pares e impares El lector recordará que se dice que una función f es

par si $f(-x) = f(x)$, e **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

EJEMPLO 1 Funciones pares e impares

a) $f(x) = x^2$ es par porque $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Figura 10.3.

b) $f(x) = x^3$ es impar porque $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Figura 10.4. ■

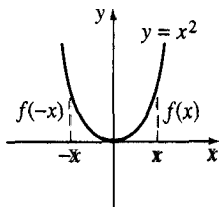


FIGURA 10.3

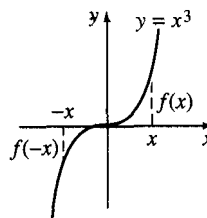


FIGURA 10.4

Como se ilustra en las figuras 10.3 y 10.4, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la de una función impar lo es con respecto al origen.

EJEMPLO 2 Funciones pares e impares

Como $\cos(-x) = \cos x$ y $\sin(-x) = -\sin x$, el coseno y el seno son función par e impar, respectivamente. ■

Propiedades de las funciones pares e impares El teorema que sigue menciona algunas propiedades de las funciones pares e impares.

TEOREMA 10.2 Propiedades de las funciones pares e impares

- a) El producto de dos funciones pares es par.
- b) El producto de dos funciones impares es par.
- c) El producto de una función impar y una función par es impar.
- d) La suma o diferencia de dos funciones pares es par.
- e) La suma o diferencia de dos funciones impares es impar.
- f) Si f es par, $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$.
- g) Si f es impar, $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE b) Supongamos que f y g son funciones impares. En ese caso tendremos que $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$. Si definimos el producto de f y g como $F(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = F(x).$$

Esto demuestra que el producto F de dos funciones impares es una función par. Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios. (Problemas 45 a 49 de los ejercicios 10.3.) ■

Series de senos y de cosenos Si f es una función par en $(-p, p)$, entonces, en vista de las propiedades anteriores, los coeficientes de (9), (10) y (11) de la definición mencionada en la sección 10.2 se transforman en

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \\ a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x}_{\text{par}} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x}_{\text{impar}} dx = 0. \end{aligned}$$

En forma parecida, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Resumiremos los resultados en la definición siguiente.

DEFINICIÓN 10.6

Series de Fourier de cosenos y serie de senos

i) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de cosenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x, \quad (1)$$

en que

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad (3)$$

ii) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x, \quad (4)$$

en donde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx. \quad (5)$$

EJEMPLO 3

Desarrollo en una serie de senos

Desarrolle $f(x) = x$, $-2 < x < 2$ en forma de una serie de Fourier.

SOLUCIÓN Desarrollaremos f como una serie de senos porque al ver la figura 10.5 advertiremos que la función es impar en el intervalo $(-2, 2)$.

Hacemos que $2p = 4$, o $p = 2$, y podemos escribir la ecuación (5) como sigue:

$$b_n = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi}{2} x dx.$$

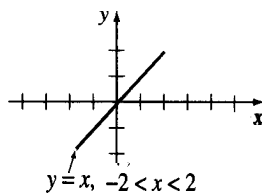


FIGURA 10.5

Integramos por partes para obtener

$$b_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{in \frac{n\pi}{2} x}. \quad (6) \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Convergencia a la extensión periódica

La función del ejemplo 3 satisface las condiciones del teorema 10.1; y en consecuencia la serie (6) converge hacia la función en el intervalo $(-2, 2)$ y la extensión periódica (de periodo 4), ilustrada en la figura 10.6.

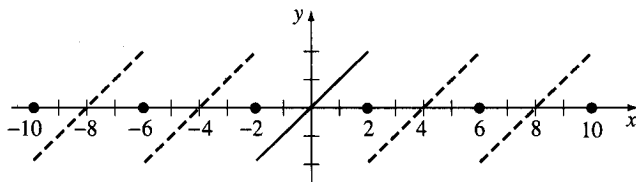


FIGURA 10.6

EJEMPLO 5 Desarrollo en una serie de senos

La función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 10.7 es impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Si $p = \pi$ y de acuerdo con (5),

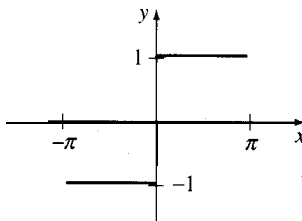


FIGURA 10.7

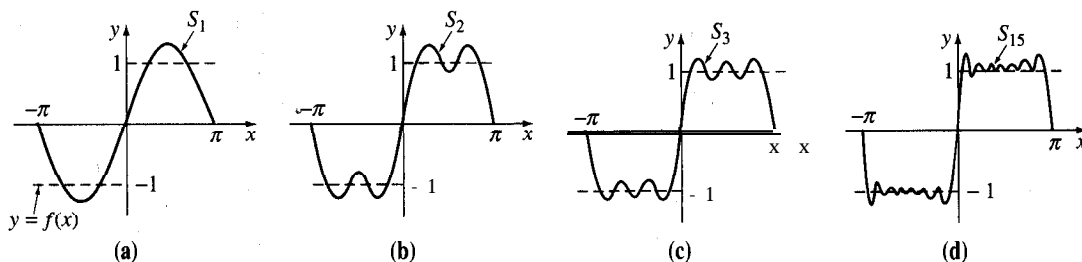


FIGURA 10.8

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n},$$

de modo que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx. \quad (7) \blacksquare$$

Sucesión de sumas parciales Es interesante ver cómo la sucesión de sumas parciales de una serie de Fourier se aproxima a una función. En la figura 10.8 se compara la gráfica de la **función f** del ejemplo 5 con las de las tres primeras sumas parciales de la ecuación (7):

$$S_1 = \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x, \quad S_2 = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} \right), \quad S_3 = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right).$$

La figura 10.8d) muestra la gráfica de la suma parcial S_{15} , que tiene picos notables cerca de las discontinuidades en $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, etcétera. Este “exceso” de las sumas parciales S_N , respecto a los valores de la función cerca de un punto de discontinuidad no se empareja, sino que permanece bastante constante, aunque el valor de N sea muy grande. A este comportamiento de una serie de Fourier cerca de un punto en el que **f** es discontinua se le llama, **fenómeno de Gibbs**.

Desarrollos en mitad de intervalo En lo que va del capítulo hemos dado por supuesto que una función **f** está definida en un intervalo con el origen en su punto medio -esto es, que $-p < x < p$ —. Sin embargo, en muchos casos nos interesa representar, mediante una serie trigonométrica, una función definida sólo para $0 < x < L$. Lo podemos hacer de muchas formas distintas si dando una **definición** arbitraria de la **función** en el intervalo $-L < x < 0$. Por brevedad sólo describiremos los tres casos más importantes. Si $y = f(x)$ está definida en el intervalo $0 < x < L$, entonces

- i) Reflejar la **gráfica** de la función respecto al eje y , en $-L < x < 0$; la función ahora es par en $-L < x < L$ (Fig. 10.9)

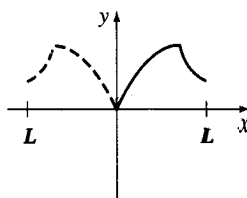


FIGURA 10.9

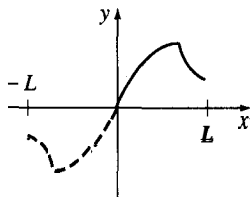


FIGURA 10.10

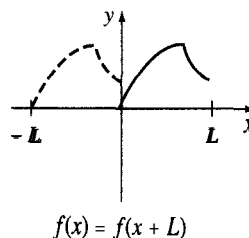


FIGURA 10.11

- ii) Reflejar la gráfica de la función respecto al origen, en $-L < x < 0$; la función viene a ser impar en $-L < x < L$ (Fig. 10.10) o **también**
- iii) Defmafen $-L < x < 0$ como $f(x) = f(x + L)$ (Fig. 10.11).

Obsérvese que en los coeficientes de las series (1) y (4) **sólo** se utiliza la definición de la función en $0 < x < p$ (esto es, la mitad del intervalo $-p < x < p$). Por esta razón, en la práctica no hay necesidad de reflejar como se describió en *i*) y en *ii*). Si se define **f** en $0 < x < L$, tan **sólo** identificamos la mitad del periodo, o semiperiodo, como la longitud del intervalo $p = L$. Tanto las fórmulas (2), (3) y (5) de los coeficientes como las series correspondientes **dan una** extensión periódica par o impar, de periodo $2L$ como **función** original. Las series de cosenos y senos que se obtienen con este método **se llaman desarrollos en mitad de intervalo**. Por último, en el caso *iii*), igualamos los valores funcionales en el intervalo $-L < x < 0$ con los del intervalo $0 < x < L$. Como en los dos casos anteriores, no hay necesidad de hacerlo. Se puede demostrar que el conjunto de funciones en la ecuación (1) de la sección 10.2 es ortogonal en $a \leq x \leq a + 2p$ para todo número real a . Si elegimos $a = -p$, obtendremos los límites de integración en las ecuaciones (9), (10) y (II) de esa sección. Pero cuando $a = 0$, los límites de integración son de $x = 0$ a $x = 2p$. Así, si **f** está definida en el intervalo $0 < x < L$, podemos identificar $2p = L$ o $p = L/2$. La serie de Fourier que resulta dará la extensión periódica **de f**, con periodo L . De esta manera los valores hacia los que converge la serie serán los mismos en $-L < x < 0$ que en $0 < x < L$.

EJEMPLO 6 Desarrollo en tres series

Desarrolle $f(x) = x^2$, $0 < x < L$,

a) En una serie de cosenos **b)** en una serie de senos **c)** en una serie de Fourier.

SOLUCIÓN En la figura 10.12 vemos la gráfica de esta **función**.

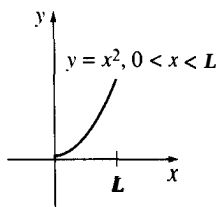


FIGURA 10.12

a) Partimos de

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3} L^2$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi}{L} x dx = -\frac{2}{L} \left[\frac{Lx^2 \sin \frac{n\pi}{L} x}{n\pi} \right]_0^L - \frac{2L}{n\pi} \int_0^L x \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{-Lx \cos \frac{n\pi}{L} x}{n\pi} \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} x. \quad (8)$$

b) En este caso

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Después de integrar por partes llegamos a

$$b_n = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1].$$

Por consiguiente
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (9)$$

c) Hacemos $p = L/2$; entonces, $1/p = 2/L$ y $n\pi/p = 2n\pi/L$. Entonces

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3} L^2 \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{2n\pi}{L} x dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2} \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin \frac{2n\pi}{L} x dx = -\frac{L^2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{2n\pi}{L} x - \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{L} x \right\}. \quad (10)$$

Las series (8), (9) y (10) convergen hacia la **extensión** periódica par de período **2L** de **f**, la extensión impar de período **2L** de **f** y la extensión periódica de período **L** de **f**, respectivamente. En la figura 10.13 vemos las gráficas de esas extensiones. ■

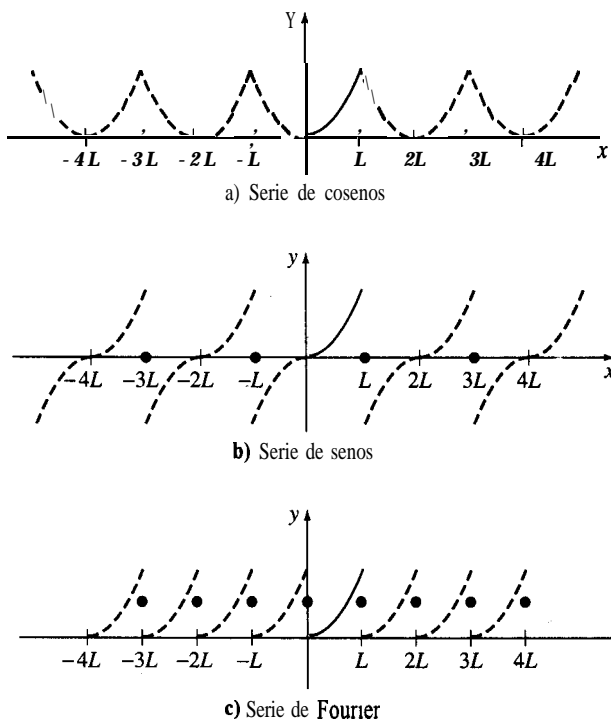


FIGURA 10.13

Fuerza de impulsión periódica En ocasiones, las series de Fourier sirven para determinar una solución particular de la ecuación diferencial que describe a un sistema físico en que la entrada, o fuerza de impulsión $f(t)$, es periódica. En el siguiente ejemplo llegaremos a una solución particular de la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t) \quad (11)$$

representando primero por el desarrollo en serie de senos y en medio intervalo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} t$$

para después suponer que una solución particular tiene la forma

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{p} t. \quad (12)$$

EJEMPLO 7 Solución particular de una ecuación diferencial

En un sistema no amortiguado de resorte y masa en que la masa es $m = \frac{1}{16}$ slug y la constante del resorte es $k = 4$ lb/ft, una fuerza externa de periodo 2, $f(t)$, impulsa a la masa y la gráfica defse ve en la figura 10.14. Aunque la fuerza $f(t)$ actúa sobre el sistema cuando $t > 0$, si se prolonga la gráfica de la función hacia la parte negativa del eje t para que su periodo sea 2,

obtenemos una **función impar**. En la práctica esto significa que basta determinar el desarrollo en serie de senos y en medio intervalo de $f(t) = \pi t$, $0 < t < 1$. Con $p = 1$, entonces, de acuerdo con (5) e integrando por partes, llegamos a

$$b_n = 2 \int_0^1 \pi t \operatorname{sen} n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

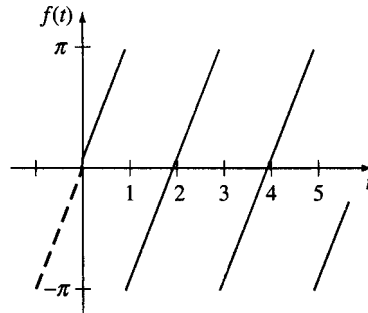


FIGURA 10.14

Según la ecuación (11), la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{16} \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi t \quad (13)$$

Para llegar a una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (13), sustituimos en ella la ecuación (12) e igualamos los coeficientes de $\operatorname{sen} n\pi t$. Así obtenemos

$$\left(-\frac{1}{16} n^2 \pi^2 + 4 \right) B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{o sea} \quad B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2 \pi^2)}.$$

Por consiguiente
$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2 \pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t. \quad (14)$$

Observamos que en la solución (14) no hay un entero $n \geq 1$ para el cual el denominador de B_n , que es $64 - n^2 \pi^2$, sea cero. En general, cuando sí hay un valor de n , digamos que sea N , para el que $N\pi/p = w$, donde $w = \sqrt{k/m}$, el estado del sistema que describe la ecuación (II) es de resonancia pura. En otras palabras, se presenta resonancia pura si el desarrollo de la función $f(t)$ de la fuerza impulsora en serie de Fourier contiene un término $\operatorname{sen}(N\pi/L)t$ (o $\cos(N\pi/L)t$) que tenga la misma frecuencia que la de las vibraciones libres.

Naturalmente, si la extensión de la fuerza impulsora con periodo $2p$ sobre el eje negativo de t da como resultado una función par, f se puede desarrollar en una serie de cosenos.

EJERCICIOS 10.3

Las respuestas a los **problemas** nones se encuentran en el *apéndice de respuestas*.

En los problemas 1 a 10 determine si la función es par, impar o ninguno de esos tipos.

1. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

2. $f(x) = x \cos x$

3. $f(x) = x^2 + x$

4. $f(x) = x^3 - 4x$

5. $f(x) = e^{|x|}$

6. $f(x) = |x^5|$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$9. f(x) = x^3, 0 \leq x \leq 2$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x + 5, & -2 < x < 0 \\ -x + 5, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$10. f(x) = 2|x| - 1$$

Desarrolle cada función de los problemas 11 a 24 en la serie de cosenos o senos adecuada.

$$11. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$13. f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$$

$$15. f(x) = x^2, -1 < x < 1$$

$$17. f(x) = \pi^2 - x^2, -\pi < x < \pi$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$23. f(x) = |\operatorname{sen} x|, -\pi < x < \pi$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$14. f(x) = x, -\pi < x < \pi$$

$$16. f(x) = x|x|, -1 < x < 1$$

$$18. f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$$

$$20. f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} -\pi, & -2\pi < x < -\pi \\ x, & -\pi \leq x < \pi \\ \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$24. f(x) = \cos x, -\pi/2 < x < \pi/2$$

En los problemas 25 a 34, halle los desarrollos en series de cosenos o senos, en medio intervalo, de la función respectiva.

$$25. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$27. f(x) = \cos x, 0 < x < \pi/2$$

$$29. f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$31. f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$33. f(x) = x^2 + x, 0 < x < 1$$

$$26. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$28. f(x) = \operatorname{sen} x, 0 < x < \pi$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ x - \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$32. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$34. f(x) = x(2 - x), 0 < x < 2$$

Desarrolle la función de cada uno de los ejercicios 35 a 38 como serie de Fourier.

$$35. f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$$

$$36. f(x) = x, 0 < x < \pi$$

$$37. f(x) = x + 1, 0 < x < 1$$

$$38. f(x) = 2 - x, 0 < x < 2$$

En los problemas 39 y 40, proceda como en el ejemplo 7 y halle una solución particular de la ecuación (11) cuando $m = 1$, $k = 10$ y la fuerza impulsora $f(t)$ es la especificada en ambos casos. Suponga que cuando $f(t)$ se prolonga hacia el eje negativo de t en forma periódica, la función que resulta es impar.

$$39. f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ -5, & \pi < t < 2\pi \end{cases}; f(t + 2\pi) = f(t)$$

$$40. f(t) = 1 - t, 0 < t < 2; f(t + 2) = f(t)$$

Halle una solución particular de la ecuación (II) con $m = \frac{1}{4}$, $k = 12$ y la fuerza de impulsión, $f(t)$ dada en los problemas 41 y 42. Suponga que cuando $f(t)$ se prolonga a valores negativos de t en forma periódica, la función que resulta es par.

41. $f(t) = 2\pi t - t^2, 0 < t < 2\pi; f(t + 2\pi) = f(t)$

42. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 - t, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}; f(t + 1) = f(t)$

43. Suponga que una viga uniforme de longitud L está simplemente apoyada en $x = 0$ y $x = L$. Cuando la carga por **unidad** de longitud es $w(x) = w_0 x/L, 0 < x < L$, la ecuación diferencial de la flecha (desviación) $y(x)$ de esa viga es

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w_0 x}{L},$$

en que E, I y w_0 son constantes. (Vea la ecuación (4), sección 5.2.)

- a) Desarrolle $w(x)$ en forma de una serie de senos en medio intervalo.
 b) Emplee el **método** del ejemplo 7 para hallar una solución particular $y(x)$ de la ecuación diferencial.
44. Siga el método del problema 43 para encontrar la deflexión, $y(x)$, cuando $w(x)$ es la que aparece en la figura 10.15.

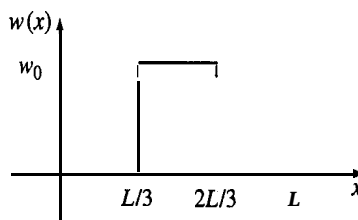


FIGURA 10.15

45. Demuestre la propiedad a) en el teorema 10.2.
 46. Demuestre la propiedad c) en el teorema 10.2.
 47. Demuestre la propiedad d) en el teorema 10.2.
 48. Demuestre la propiedad f) en el teorema 10.2.
 49. Demuestre la propiedad g) en el teorema 10.2.
50. Demuestre que cualquier **función** f se puede expresar como una suma de una función par y una función impar.

[**Sugerencia:** aplique la identidad $\frac{f(x) + f(x)}{2} = \frac{-f(-x)}{2}$]

51. Forme la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

empleando la **identidad** $f(x) = (|x| + x)/2$, $-\pi < x < \pi$ y los resultados de los problemas 13 y 14. Observe que $|x|/2$ y $x/2$ son par e impar, respectivamente, en ese intervalo (vea el problema 50).

52. La **doble serie de senos** para una **función** $f(x, y)$, definida en una región rectangular $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$, es

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{c} y,$$

en donde
$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy.$$

Halle la doble serie de senos de $f(x, y) = 1$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

53. La **doble serie de cosenos** para una **función** $f(x, y)$, definida en una región rectangular $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$, es

$$\begin{aligned} f(x, y) = & A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} \cos \frac{m\pi}{b} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \cos \frac{n\pi}{c} y \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{00} &= \frac{1}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \, dx \, dy \\ A_{m0} &= \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \, dx \, dy \\ A_{0n} &= \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy \\ A_{mn} &= \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Forme la doble serie de senos de $f(x, y) = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

10.4 EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

■ **Valores propios y funciones propias** ■ **Problema normal de Sturm-Liouville** ■ **Propiedades**
 ■ **Problema singular de Sturm-Liouville** ■ **Forma autoadjunta de una ecuación diferencial lineal de segundo orden** ■ **Relación de ortogonalidad**

Repaso Por conveniencia, repasaremos aquí algunas de las ecuaciones diferenciales, y sus soluciones generales, que **serán** importantes para las secciones que siguen.

- i) **Ecuación lineal de primer orden:** $y' + ky = 0$; k es constante.

Solución general: $y = c_1 e^{-kx}$

- ii) **Ecuación lineal de segundo orden:** $y'' + \lambda y = 0$, $\lambda > 0$.

Solución general: $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$

iii) Ecuación lineal de segundo orden: $y'' - \lambda y = 0$, $\lambda > 0$.

La solución general de esta **ecuación** diferencial tiene dos formas reales:

$$y = c_1 \cosh \sqrt{\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda}x$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$$

Debe hacerse notar que, en la práctica, con frecuencia se emplea la forma exponencial cuando el dominio de x es un intervalo* infinito o **semiinfinito**, y que se usa la forma hipérbólica cuando el dominio de x es un intervalo finito.

iv) Ecuación de Cauchy-Euler: $x^2 y'' + xy' - \lambda^2 y = 0$

Solución general: $\lambda \neq 0$: $y = c_1 x^\lambda + c_2 x^{-\lambda}$

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 \ln x$$

v) Ecuación paramétrica de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Solución general: $y = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x)$

Es importante que el lector reconozca el caso de la ecuación diferencial de Bessel cuando $n = 0$:

$$xy'' + y' + \lambda^2 xy = 0.$$

Solución general: $y = c_1 J_0(\lambda x) + c_2 Y_0(\lambda x)$

Recordemos que $Y_n(\lambda x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$.

vi) Ecuación diferencial de Legendre:

$$(1 - x)^2 y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Las soluciones particulares son los polinomios de Legendre $y = P_n(x)$, en donde

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

Las funciones ortogonales suelen surgir al resolver ecuaciones diferenciales. Además, se puede generar un conjunto ortogonal de funciones al resolver un problema de valor de frontera con dos puntos, donde intervenga una ecuación diferencial de segundo orden que contenga un parámetro λ .

Valores propios y funciones propias (eigenvalores y eigenfunciones) En el ejemplo 2 de la sección 5.2 vimos que las soluciones al problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad (1)$$

no son triviales sólo cuando el parámetro λ adopta ciertos valores. Los números $\lambda = n^2 \pi^2 / L^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ y sus soluciones no triviales correspondientes, $y = c_2 \sin(n\pi x / L)$, o simplemente $y = \sin(n\pi x / L)$ se llaman, respectivamente, **valores propios y funciones propias** del problema. Por ejemplo,

*Infinito: $(-\infty, \infty)$; semiinfinito: $(-\infty, 0]$, $(1, \infty)$, etcétera.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} y'' + \frac{9\pi^2}{L^2} y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{valor propio} \\ \text{la solución es } y = \text{sen} \frac{3\pi}{L} x; \end{array} \quad \text{función propia} \\
 \left. \begin{array}{l} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{no es un valor propio} \\ \text{la solución es } y = 0. \end{array} \quad \text{solución trivial}
 \end{array}$$

Para nuestros fines en este capítulo es importante reconocer que el conjunto $\{\text{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es el conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[0, L]$ que se usa como base para la serie de Fourier de senos.

EJEMPLO 1 Valores propios y funciones propias

Se deja como ejercicio comprobar que los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$y'' + Ay = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0 \quad (2)$$

son, respectivamente, $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $y = c_1 \cos(n\pi x/L)$, $c_1 \neq 0$. En contraste con las ecuaciones (1), $\lambda = 0$ es un valor propio de este problema y $y = 1$ es la función propia correspondiente. Esto último proviene de resolver $y'' = 0$ sujeta a las mismas condiciones en la frontera, $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$; pero se puede incorporar en $y = \cos(n\pi x/L)$ si permitimos que $n = 0$ y que $c_1 = 1$. El conjunto $\{\cos(n\pi x/L)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ es ortogonal en el intervalo $[0, L]$ y se usa en el desarrollo de Fourier de cosenos para funciones definidas en ese intervalo. ■

Problema normal de Sturm-Liouville Los problemas de valor en la frontera en las ecuaciones (1) y (2) son casos especiales del siguiente problema general:

Sean p , q , r y r' funciones de valor real continuas en un intervalo $[a, b]$, y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para todo x en el intervalo. El problema de valor en la frontera con dos puntos

$$\text{Resolver: } \frac{d}{dx} [r(x)y'] + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \quad (3)$$

$$\text{Sujeta a: } \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad (4)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (5)$$

se llama **problema normal de Sturm-Liouville**. Los coeficientes en las ecuaciones (4) y (5) se suponen reales e independientes de λ . Además, α_1 y β_1 no son cero ambas ni α_2 y β_2 son cero ambas.

Como la ecuación diferencial (3) es **homogénea**, el problema de Sturm-Liouville tiene siempre la solución trivial $y = 0$. Sin embargo, esta solución carece de interés para nosotros.

Como en el ejemplo 1, al resolver uno de estos problemas tratamos de buscar números λ (los valores propios) y soluciones y no triviales que dependan de λ (las funciones propias).

Las condiciones en la frontera en las ecuaciones (4) y (5) (combinación lineal de y y y' igual a cero en un punto) también son **homogéneas**. Las dos condiciones en la frontera de los ejemplos 1 y 2 (este último mas adelante), son homogéneas; una condición en la frontera como $\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = c$, cuando la constante c es distinta de cero, es no **homogénea**. Naturalmente, se dice que un problema de valor en la frontera que consista en una ecuación diferencial lineal homogénea y condiciones **homogéneas** en la frontera es **homogéneo**; de no ser así es no homogéneo. El problema de Sturm-Liouville expresado en las ecuaciones (3) a (5) es un problema homogéneo de valor en la frontera.

Propiedades El teorema 10.3 es una selección de las propiedades más importantes del problema normal de Sturm-Liouville. Sólo demostraremos la última.

TEOREMA 10.3 Propiedades del problema regular de Sturm-Liouville

- a) Existe una cantidad infinita de valores propios reales que se pueden ordenar en forma ascendente, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ de modo que $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- b) A cada valor propio corresponde sólo una función propia, (salvo por múltiplos distintos de cero).
- c) Las funciones propias que corresponden a los diversos valores propios son linealmente independientes.
- d) El conjunto de funciones propias que corresponde al conjunto de los valores propios es ortogonal con respecto a la función peso $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN DE d) Sean y_m y y_n las funciones propias que corresponden a los valores propios λ_m y λ_n , respectivamente. Entonces

$$\frac{d}{dx} [r(x)y'_m] + (q(x) + \lambda_m p(x))y_m = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} [r(x)y'_n] + (q(x) + \lambda_n p(x))y_n = 0. \quad (7)$$

Al multiplicar la ecuación (6) por y_n y la ecuación (7) por y_m y restar los resultados se obtiene

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_my_n = y_m \frac{d}{dx} [r(x)y'_n] - y_n \frac{d}{dx} [r(x)y'_m].$$

Integramos por partes este resultado, desde $x = a$ hasta $x = b$, y llegamos a

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)y_my_n dx &= r(b)[y_m(b)y'_n(b) - y_n(b)y'_m(b)] \\ &\quad - r(a)[y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)y'_m(a)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora bien, las funciones propias y_m y y_n deben satisfacer, ambas, las condiciones en la frontera (4) y (5). En particular, de acuerdo con (4) tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_m(a) + \beta_1 y'_m(a) &= 0 \\ \alpha_1 y_n(a) + \beta_1 y'_n(a) &= 0. \end{aligned}$$

Para que α_1 y β_1 satisfagan este sistema, no nulos simultáneamente, el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero:

$$y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)y'_m(a) = 0.$$

Aplicamos un argumento semejante a la ecuación (5) y obtenemos

$$y_m(b)y'_n(b) - y_n(b)y'_m(b) = 0.$$

Como los dos miembros del lado derecho de (8) son cero, hemos establecido la relación de ortogonalidad

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \quad (9)$$

■

EJEMPLO 2 Un problema regular de Sturm-Liouville

Resuelva el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \quad (10)$$

SOLUCIÓN El lector debe comprobar que para $\lambda < 0$ y para $\lambda = 0$, el problema planteado por la ecuación (10) sólo posee la solución trivial $y = 0$. Cuando $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación diferencial es $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Ahora bien, la condición $y(0) = 0$ implica que en esta solución $c_1 = 0$. Cuando $y = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$, se satisface la segunda condición en la frontera $y(1) + y'(1) = 0$, siempre que

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda} + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0.$$

Con $c_2 \neq 0$, tendremos que esta última ecuación equivale a

$$\tan \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}.$$

Si hacemos que $x = \sqrt{\lambda}$, entonces vemos que la figura 10.6 muestra la factibilidad de que exista una cantidad infinita de raíces de la ecuación $\tan x = -x$. Los valores propios del

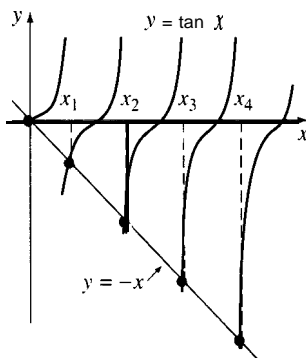


FIGURA 10.16

problema (10) son, entonces, $\lambda_n = x_n^2$, donde x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ son las raíces *positivas* consecutivas. Con ayuda de un sistema de computación (SAC) se demuestra con facilidad que, redondeando a cuatro decimales, $x_1 = 2.0288$, $x_2 = 4.9132$, $x_3 = 7.9787$ y $x_4 = 10.0855$, y que las soluciones correspondientes son $y_1 = \text{sen } 2.0288x$, $y_2 = \text{sen } 4.9132x$, $y_3 = 7.9787x$ y $y_4 = \text{sen } 10.0855x$. En general, las funciones propias del problema son $\{\text{sen } \sqrt{\lambda_n}x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Al identificar $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $p(x) = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, vemos que la ecuación (10) es un problema regular de Sturm-Liouville. Así, $\{\text{sen } \sqrt{\lambda_n}x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es un conjunto ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. ■

En algunos casos se puede demostrar la ortogonalidad de las soluciones de (3) sin necesidad de especificar una condición en la frontera en $x = a$ y en $x = b$.

Problema singular de Sturm-Liouville Si $r(a) = 0$, o $r(b) = 0$ o si $r(a) = r(b) = 0$, el problema de Sturm-Liouville que consiste en la ecuación diferencial (3) y las condiciones (4) y (5) en la frontera es un problema **singular**. En el primer caso, $x = a$ puede ser un punto singular de la ecuación diferencial y , en consecuencia, una Solución de la ecuación (3) puede crecer sin límite cuando $x \rightarrow a$. Sin embargo, de acuerdo con (8), si $r(u) = 0$ no se necesita condición en la **frontera** en $x = a$ para demostrar la ortogonalidad de las funciones propias, siempre que esas soluciones sean acotadas en ese punto. Este requisito garantiza la existencia de las integrales que intervinieron. Suponiendo que las soluciones de la ecuación (3) son acotadas en el intervalo cerrado $[u, b]$, podemos afirmar que

- i) Si $r(a) = 0$, la relación (9) de ortogonalidad es válida, sin ninguna condición en la frontera en $x = a$
- ii) Si $r(b) = 0$, la relación (9) de ortogonalidad es válida sin ninguna condición en la frontera en $x = b^*$
- iii) Si $r(u) = r(b) = 0$, la relación (9) de ortogonalidad es válida sin ninguna condición en la frontera, en $x = a$ ni en $x = b$.

De paso, observamos que un problema de Sturm-Liouville es singular cuando el intervalo que se considera es infinito. Véanse los problemas 11 y 12 de los ejercicios 10.4.

Forma autoadjunta Si los coeficientes son continuos y $a(x) \neq 0$ para todo x en algún intervalo, cualquier ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + (c(x) + \lambda d(x))y = 0$$

se puede llevar a la llamada **forma autoadjunta**, ecuación (3), si se multiplica por el factor integrante

$$\frac{1}{a(x)} e^{\int (b(x)/a(x)) dx} \quad (12)$$

Para comprobarlo, observemos que la ecuación diferencial

$$e^{\int (b/a) dx} y'' + \frac{b(x)}{a(x)} e^{\int (b/a) dx} y' + \left(\frac{c(x)}{a(x)} e^{\int (b/a) dx} + \lambda \frac{d(x)}{a(x)} e^{\int (b/a) dx} \right) y = 0$$

*Las condiciones i) e ii) equivalen a elegir $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$, respectivamente.

es la misma que

$$\underbrace{\frac{d}{dx} [e^{\int (b/a) dx} y']}_{r(x)} + \underbrace{\left(\frac{c(x)}{a(x)} e^{\int (b/a) dx} \right)}_{q(x)} + \lambda \underbrace{\frac{d(x)}{a(x)} e^{\int (b/a) dx}}_{p(x)} y = 0.$$

EJEMPLO 3 Ecuación paramétrica de Bessel

En la sección 6.4 explicamos que la solución general de la ecuación **paramétrica** de Bessel $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es $y = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x)$. De acuerdo con la expresión (12) nos encontramos con que $1/x$ es un factor integrante. Al multiplicar la **ecuación** de Bessel por ese factor obtenemos la forma autoadjunta

$$\frac{d}{dx} [xy'] + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0,$$

en que podemos identificar $r(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, a $p(x) = x$ y λ se sustituye por λ^2 . Ahora bien, $r(0) = 0$ y de las dos soluciones, $J_n(\lambda x)$ y $Y_n(\lambda x)$, sólo J_n es acotada en $x = 0$. Así, de acuerdo con *i*), el conjunto $\{J_n(\lambda_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_0^b x J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j,$$

siempre y cuando los valores **propios**, λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, se definan mediante una condición en la frontera en $x = b$, del tipo

$$\alpha_2 J_n(\lambda b) + \beta_2 \lambda J_n'(\lambda b) = 0. \quad (13)$$

Para cualquier elección de α_2 y β_2 , que no sean cero a la vez, se sabe que la ecuación (13) tiene una cantidad **infinita** de raíces $x_i = \lambda_i b$, de donde despejamos a $\lambda_i = x_i/b$. En el siguiente capítulo abundaremos sobre **los** valores propios. ■

EJEMPLO 4 Ecuación de Legendre

Los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, son soluciones acotadas de la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, en el intervalo $[-1, 1]$. A partir de la forma autoadjunta

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)y'] + n(n+1)y = 0$$

vemos que $r(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $p(x) = 1$ y $\lambda = n(n+1)$. Al observar que $r(-1) = r(1) = 0$, de acuerdo con *iii*) deducimos que el conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad \blacksquare$$

*El factor adicional de λ se debe a la regla de la cadena: $(d/dx) J_n(\lambda x) = \lambda J_n'(\lambda x)$.

EJERCICIOS 10.4

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

En los problemas 1 y 2 halle las funciones propias y la ecuación que define los valores propios de cada problema de valor en la frontera. Con un sistema algebraico de computación (SAC), calcule el valor aproximado de los cuatro primeros valores propios, λ_1 , λ_2 , λ_3 y λ_4 . Proporcione las funciones propias que corresponden a esas aproximaciones.

1. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 0$

3. Se tiene la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, sujeta a $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Demuestre que las funciones propias son $\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{L} x, \cos \frac{2\pi}{L} x, \dots \right\}$. Este conjunto, que es ortogonal en $[0, L]$, es la base de la serie de Fourier de cosenos.

4. Se tiene la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, sujeta a las condiciones periódicas de frontera $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$. Demuestre que las funciones propias son

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{L} x, \cos \frac{2\pi}{L} x, \dots, \sin \frac{\pi}{L} x, \sin \frac{2\pi}{L} x, \sin \frac{3\pi}{L} x, \dots \right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[-L, L]$, es la base de las series de Fourier.

5. Encuentre la norma cuadrada de cada función propia en el problema 1.

6. Demuestre que, para las funciones propias del ejemplo 2,

$$\|\sin \sqrt{\lambda_n} x\|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}].$$

7. a) Halle los valores y funciones propios del problema de valor en la frontera

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(5) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial en la forma autoadjunta.

c) Establezca una relación de ortogonalidad.

8. a) Encuentre los valores y funciones propios del problema de valor en la frontera

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial en la forma autoadjunta.

c) Establezca una relación de ortogonalidad.

9. a) DB una relación de ortogonalidad para el problema 1, de Sturm-Liouville.

b) Con un SAC compruebe la relación de ortogonalidad para las funciones propias como apoyo, y_1 y y_2 , que corresponden a λ_1 y λ_2 , los dos primeros valores propios, respectivamente.

10. a) Establezca una relación de ortogonalidad para el problema 2 de Sturm-Liouville.

b) Compruebe la relación de ortogonalidad para las funciones propias y_1 y y_2 que corresponden a λ_1 y λ_2 , los dos primeros valores propios, respectivamente, con un SAC como ayuda.

11. La **ecuación diferencial de Laguerre**, $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tiene soluciones polinomiales $L_n(x)$. Escriba la ecuación en su forma autoadjunta y deduzca una relación de ortogonalidad.
12. La **ecuación diferencial de Hermite**, $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tiene soluciones polinomiales $H_n(x)$. Escriba la ecuación en su forma autoadjunta y deduzca una relación de ortogonalidad.
13. Se tiene el problema normal de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}[(1+x^2)y'] + \frac{\lambda}{1+x^2}y = 0, \quad y(0) = 0, y(l) = 0.$$

- a) Halle los valores y funciones propios del problema de valor en la frontera. [Sugerencia: permita que $x = \tan \theta$ y a continuación aplique la regla de la cadena.]
- b) Establezca una relación de ortogonalidad.
14. a) Encuentre las funciones propias y la ecuación que define los valores propios del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - 1)y = 0, \quad y \text{ está acotada en } x = 0, \quad y(3) = 0.$$

- b) Con la tabla 6.1 halle los valores aproximados de los cuatro primeros valores propios, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Y λ_4 .

Problema para discusión

15. Veamos el caso especial del problema regular de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + \lambda p(x)y = 0, \quad y'(a) = 0 \quad y'(b) = 0.$$

$\lambda = 0$ ¿es un valor propio del problema? Respalde su respuesta.

10.5 SERIES DE BESSEL Y DE LEGENDRE

- Conjunto ortogonal defunciones de Bessel ■ Serie de Fourier-Bessel
- Relaciones de recurrencia diferenciales ■ Formas de la serie de Fourier-Bessel
- Convergencia de una serie de Fourier-Bessel ■ Conjunto ortogonal de polinomios de Legendre
- Serie de Fourier-Legendre ■ Convergencia de una serie de Fourier-Legendre

La serie de Fourier, la serie de Fourier de cosenos y la serie de Fourier de senos son tres formas de desarrollar una función en **términos** de un conjunto ortogonal de funciones. Pero esos desarrollos de ninguna manera se-limitan a conjuntos ortogonales de funciones trigonométricas. En la sección 10.1 vimos que una **función** f , definida en un intervalo (a, b) , se puede desarrollar, cuando menos formalmente, en términos de cualquier conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ que es ortogonal con respecto a una **función** peso en $[a, b]$. Muchas de estas llamadas series generalizadas de Fourier se originan en problemas de Sturm-Liouville planteados en las aplicaciones físicas de ecuaciones (diferenciales en derivadas parciales) lineales. Las series de Fourier

y las series generalizadas de Fourier, al igual que las dos series que describiremos en esta sección, reaparecen en consideraciones subsecuentes de estas aplicaciones.

10.5.1 Serie de Fourier-Bessel

En el ejemplo 3 de la sección 10.4 vimos que el conjunto de funciones de Bessel $\{J_n(\lambda_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, es ortogonal con respecto a la función **peso** $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$ cuando se definen los valores propios mediante una condición en la frontera

$$\alpha_2 J_n(\lambda b) + \beta_2 \lambda J'_n(\lambda b) = 0. \quad (1)$$

De acuerdo con (7) y (8) de la sección 10.1, el desarrollo generalizado de Fourier de una función **f definida** en $(0, b)$, en términos de este conjunto ortogonal es

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x), \quad (2)$$

en donde

$$c_i = \frac{\int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) dx}{\int_0^b x J_n^2(\lambda_i x) dx}. \quad (3)$$

La serie (2) con coeficientes definidos por la ecuación (3) se llama **serie de Fourier-Bessel**.

Relaciones diferenciales de recurrencia Estas relaciones, que aparecieron en (15) y (14) de la sección 6.4, son

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad (5)$$

y se usan con frecuencia para evaluar los coeficientes con la ecuación (3).

Norma cuadrada El valor de la norma cuadrada $\|J_n(\lambda_i x)\|^2 = \int_0^b x J_n^2(\lambda_i x) dx$ depende de cómo se definan los valores propios λ_i . Si $y = J_n(\lambda x)$, según el ejemplo 3 de la sección 10.4 sabemos que

$$\frac{d}{dx} [xy'] + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0.$$

Después de multiplicarla por $2xy'$, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\frac{d}{dx} [xy']^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} [y]^2 = 0.$$

Integramos por partes esta ecuación, en $[0, b]$ y obtenemos

$$2\lambda^2 \int_0^b xy^2 dx = ([xy']^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2)y^2) \Big|_0^b$$

En vista de que $y = J_n(\lambda x)$, el límite inferior es cero para $n > 0$, porque $J_n(0) = 0$. Cuando $n = 0$, la cantidad $[xy']^2 + \lambda^2 x^2 y^2$ es cero en $x = 0$. Entonces

$$2\lambda^2 \int_0^b x J_n^2(\lambda x) dx = \lambda^2 b^2 [J_n'(\lambda b)]^2 + (\lambda^2 b^2 - n^2) [J_n(\lambda b)]^2, \quad (6)$$

en que hemos aplicado $y' = \lambda J_n'(\lambda x)$.

Pasaremos a describir tres casos de la ecuación (1).

CASO I Si escogemos $\alpha_2 = 1$ y $\beta_2 = 0$, la ecuación (1) queda

$$J_n(\lambda b) = 0. \quad (7)$$

Hay una cantidad infinita de raíces positivas, x_i , de (7) (Fig. 6.2), de modo que los valores propios son positivos, y están definidos por $\lambda_i = x_i/b$. No se obtienen valores propios nuevos partiendo de las raíces negativas de la ecuación (7) porque $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$. (Véase el problema 38 en los ejercicios 6.4.) El número 0 no es un valor propio para alguna n porque $J_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y $J_0(0) = 1$. En otras palabras, si $\lambda = 0$, llegamos a la función trivial (que nunca es función propia) para $n = 1, 2, 3, \dots$ y para $n = 0$, $\lambda = 0$ no satisface a la ecuación (7). Cuando la ecuación (5) se expresa en la forma $x J_n'(x) = n J_n(x) - n J_{n+1}(x)$, de acuerdo con (6) y (7) se deduce que la norma cuadrada de $J_n(\lambda_i x)$ es

$$\|J_n(\lambda_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_i b). \quad (8)$$

CASO II Si escogemos $\alpha_2 = h \geq 0$, $\beta_2 = b$, entonces la ecuación (1) queda

$$h J_n(\lambda b) + \lambda b J_n'(\lambda b) = 0. \quad (9)$$

Esta ecuación tiene una cantidad infinita de raíces positivas x_i para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \dots$. Como antes, los valores propios se obtienen partiendo de $\lambda_i = x_i/b$. El valor $\lambda = 0$ no es valor propio para $n = 1, 2, 3, \dots$. Al sustituir $\lambda_i b J_n'(\lambda_i b) = -h J_n(\lambda_i b)$ en la ecuación (6), encontramos que la norma cuadrada de $J_n(\lambda_i x)$ es ahora

$$\|J_n(\lambda_i x)\|^2 = \frac{\lambda_i^2 b^2 - n^2}{2\lambda_i^2} + \frac{h^2}{2} J_n^2(\lambda_i b). \quad (10)$$

CASO III Si $h = 0$ y $n = 0$ en (9), los valores propios λ_i se definen a partir de las raíces de

$$J_0'(\lambda b) = 0. \quad (11)$$

Aun cuando esta ecuación es sólo un caso especial de (9), es el único para el cual $\lambda = 0$ sí es un valor propio. Para verlo, notemos que para $n = 0$, el resultado en (5) implica que

$$J_0'(\lambda b) = 0 \quad \text{equivale a} \quad J_1(\lambda b) = 0. \quad (12)$$

Como $x_1 = 0$ es una raíz de esta ecuación y $J_0(0) = 1$ no es trivial, llegamos a la conclusión de que $\lambda_1 = 0$ sí es un valor propio. Pero es obvio que no podemos aplicar (10) cuando $h = 0$, $n = 0$ y $\lambda_1 = 0$. Sin embargo, por la definición de norma cuadrada,

$$\|1\|^2 = \int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}. \quad (13)$$

Para $\lambda_i > 0$ podemos aplicar (10) con $h = 0$ y $n = 0$:

$$\|J_0(\lambda_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_0^2(\lambda_i b). \quad (14)$$

El resumen siguiente muestra las tres formas correspondientes de la serie (2).

DEFINICIÓN 10.7 Serie de Fourier-Bessel

La serie de Fourier-Bessel de una función f definida en el intervalo $(0, b)$ se expresa como sigue:

$$i) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \quad (15)$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) dx, \quad (16)$$

en donde las λ_i se definen mediante $J_n(\lambda b) = 0$.

$$ii) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \quad (17)$$

$$c_i = \frac{2\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 b^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) dx, \quad (18)$$

en donde las λ_i se definen mediante $J_n(\lambda b) + \lambda b J_n'(\lambda b) = 0$.

$$iii) \quad f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\lambda_i x) \quad (19)$$

$$c_i = \frac{2}{b^2} \int_0^b x f(x) dx,$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_n^2(\lambda_i b)} \int_0^b x J_n(\lambda_i x) f(x) dx, \quad (20)$$

en donde las λ_i se definen con $J_0'(\lambda b) = 0$.

Convergencia de una serie de Fourier-Bessel Las condiciones de suficiencia para la convergencia de una serie de Fourier-Bessel no presentan muchas restricciones.

TEOREMA 10.4 Condiciones de convergencia

Si f y f' son continuas por tramos en el intervalo abierto $(0, b)$, el desarrollo de f en serie de Fourier-Bessel converge hacia $f(x)$ en cualquier punto en donde f sea continua, y hacia el promedio $[f(x-) + f(x+)]/2$ en un punto donde f sea discontinua.

EJEMPLO 1 Desarrollo en serie de Fourier-Bessel

Desarrolle $f(x) = x$, $0 < x < 3$, en una serie de Fourier-Bessel aplicando funciones de Bessel de primer orden que satisfagan la condición en la frontera $J_1(3\lambda) = 0$.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación (15), cuyos coeficientes c_i están dados por la ecuación (16):

$$c_i = \frac{2}{3^2 J_2^2(3\lambda_i)} \int_0^3 x^2 J_1(\lambda_i x) dx.$$

Para evaluar esta integral hacemos que $t = \lambda_i x$ y usamos la ecuación (4) en su forma $(d/dt)[t^2 J_2(t)] = t^2 J_1(t)$:

$$c_i = \frac{2}{9\lambda_i^3 J_2^2(3\lambda_i)} \int_0^{3\lambda_i} \frac{d}{dt} [t^2 J_2(t)] dt = \frac{2}{\lambda_i J_2(3\lambda_i)}.$$

Por consiguiente, el desarrollo que buscamos es

$$f(x) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i J_2(3\lambda_i)} J_1(\lambda_i x).$$

EJEMPLO 2 Desarrollo en serie de Fourier-Bessel

Si se definen los valores propios λ_i del ejemplo 1 como $J_1(3\lambda) + \lambda J_1'(3\lambda) = 0$, lo único que cambia en el desarrollo es el valor de la norma cuadrada. Al multiplicar por 3 la condición en la frontera, obtenemos $3J_1(3\lambda) + 3\lambda J_1'(3\lambda) = 0$, que ya coincide con la ecuación (9) cuando $h = 3$, $b = 3$ y $n = 1$. Entonces, las ecuaciones (18) y (17) dan como resultado, respectivamente,

$$c_i = \frac{18\lambda_i J_2(3\lambda_i)}{(9\lambda_i^2 + 8)J_1^2(3\lambda_i)}$$

Y

$$f(x) = 18 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i J_2(3\lambda_i)}{(9\lambda_i^2 + 8)J_1^2(3\lambda_i)} J_1(\lambda_i x).$$

10.5.2 Serie de Fourier-Legendre

Por el ejemplo 4 de la sección 10.4, sabemos que el conjunto de polinomios de Legendre, $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$. Además, se puede demostrar que

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

La serie generalizada de Fourier de los polinomios de Legendre se define como sigue.

DEFINICIÓN 10.8 Serie de Fourier-Legendre

La **serie de Fourier-Legendre** de una función f definida en el intervalo $(-1, 1)$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (21)$$

en donde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad (22)$$

Convergencia de una serie de Fourier-Legendre En el siguiente teorema se dan las condiciones de suficiencia para la convergencia de una serie de Fourier-Legendre.

TEOREMA 10.5 Condiciones de convergencia

Si f y f' son continuas por tramos en $(-1, 1)$, la serie de Fourier-Legendre, ecuación (21), converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad, y hacia $[f(x+) + f(x-)]/2$ en un punto de discontinuidad.

EJEMPLO 3 Desarrollo en serie de Fourier-Legendre

Escriba los cuatro primeros términos distintos de **cero** de la serie de Fourier-Legendre para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN En la página 287 aparecen los primeros cinco polinomios de Legendre. Con ellos y la ecuación (22) determinamos

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} (3x^2 - 1) dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = -\frac{7}{16}$$

$$c_4 = \frac{9}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_4(x) dx = \frac{9}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) dx = 0$$

$$c_5 = \frac{11}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_5(x) dx = \frac{11}{2} \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{11}{32}.$$

Por consiguiente, $f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x) + \dots$

Forma alternativa En sus aplicaciones, la serie de Fourier-Legendre se maneja en una forma alternativa. Si hacemos que $x = \cos \theta$, entonces $dx = -\sin \theta d\theta$, y las ecuaciones (21) y (22) se transforman en

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta) \quad (23)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi F(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (24)$$

donde $f(\cos \theta)$ se ha remplazado con $F(\theta)$.

EJERCICIOS 10.5

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

10.5.1

1. Halle los cuatro primeros valores propios λ_k definidos por $J_1(3\lambda) = 0$. [Sugerencia: vea la tabla 6.1 en la página 283.1]

2. Encuentre los cuatro primeros valores propios λ_k , definidos por $J_0'(2\lambda) = 0$.

En los problemas 3 a 6 desarrolle a $f(x) = 1$, $0 < x < 2$, en una serie de Fourier-Bessel con funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la respectiva condición en la frontera.

3. $J_0(2\lambda) = 0$

4. $J_0'(2\lambda) = 0$

5. $J_0(2\lambda) + 2\lambda J_0'(2\lambda) = 0$

6. $J_0(2\lambda) + \lambda J_0'(2\lambda) = 0$

En los problemas 7 a 10 desarrolle la función respectiva en una serie de Fourier-Bessel, usando funciones de Bessel del mismo orden que el indicado en la condición en la frontera.

7. $f(x) = 5x$, $0 < x < 4$

8. $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$

$3J_1(4\lambda) + 4\lambda J_1'(4\lambda) = 0$

$J_2(\lambda) = 0$

9. $f(x) = x^2$, $0 < x < 3$

10. $f(x) = 1 - x^2$, $0 < x < 1$

$J_0'(3\lambda) = 0$ [Sugerencia: $3 = t^2 \cdot t$] $J_0(\lambda) = 0$

10.5.2

El desarrollo como serie de Fourier-Legendre de una función polinomial definida en el intervalo $(-1, 1)$ debe ser una serie finita. (¿Por qué?) En los problemas 11 y 12 halle el desarrollo de Fourier-Legendre de la función dada.

11. $f(x) = x^2$

12. $f(x) = x^3$

En las problemas 13 y 14, escriba los primeros cuatro términos distintos de cero en el desarrollo de la función respectiva como serie de Fourier-Legendre.

13. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

14. $f(x) = e^x$, $-1 < x < 1$

15. Los tres primeros polinomios de Legendre son $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Si $x = \cos \theta$, entonces $P_0(\cos \theta) = 1$ y $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$. Demuestre que $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$.
16. Con los resultados del problema 15 encuentre un desarrollo en serie de Fourier-Legendre, ecuación (23), de $F(\theta) = 1 - \cos 2\theta$.
17. Un polinomio de Legendre $P_n(x)$ es una función par o impar, dependiendo de si n es par o impar. Demuestre que si es una función par en $(-1, 1)$, las ecuaciones (21) y (22) se transforman respectivamente, en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} P_{2n}(x) \quad (25)$$

$$c_{2n} = (4n + 1) \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) dx. \quad (26)$$

18. Demuestre que si es una función impar en el intervalo $(-1, 1)$, las ecuaciones (21) y (22) se transforman, respectivamente, en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(x) \quad (27)$$

$$c_{2n+1} = (4n + 3) \int_0^1 f(x) P_{2n+1}(x) dx. \quad (28)$$

Las series (25) y (27) también se pueden emplear cuando f sólo está definida en $(0, 1)$. Ambas series representan a f en $(0, 1)$; pero la ecuación (25) representa su extensión par en $(-1, 0)$ y la (27) su extensión impar. En los problemas 19 y 20 escriba los primeros tres términos distintos de cero en el desarrollo indicado de la función respectiva. ¿Qué función representa la serie en $(-1, 1)$?

19. $f(x) = x$, $0 < x < 1$; (25)

20. $f(x) = 1$, $0 < x < 1$; (27)

EJERCICIOS DE REPASO

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

Conteste los problemas 1 a 10 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste cierto o falso, según el caso.

- Las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $f(x) = x^5$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$. _____
- El producto de una función impar por otra función impar es _____. _____
- Para desarrollar a $f(x) = |x| + 1$, $-\pi < x < \pi$ en una serie de Fourier se usa una serie de _____. _____
- Como $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$ no es una función par, no se puede desarrollar en una serie de Fourier de cosenos. _____
- La serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$ converge a _____ en $x = 0$.
- La ecuación $y = 0$ no es una función propia de problema alguno de Sturm-Liouville. _____

7. El valor $\lambda = 0$ no es valor propio de problema alguno de Sturm-Liouville. _____
8. Cuando $\lambda = 25$, la función propia correspondiente del problema de valor en la frontera $y'' + Ay = 0$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$ es _____
9. La **ecuación diferencial de Chebyshev** $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ tiene un polinomio solución $y = T_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. El conjunto de los polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a la función peso _____ en el intervalo _____
10. El conjunto $\{P_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$, y $P_0(x) = 1$. En consecuencia, $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ cuando $n > 0$.
- II. Demuestre que el conjunto

$$\left\{ \sin \frac{\pi}{2L} x, \sin \frac{3\pi}{2L} x, \sin \frac{5\pi}{2L} x, \dots \right\}$$

es ortogonal en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

12. Encuentre la norma de cada una de las funciones del problema II. Forme un conjunto ortonormal.
13. **Desarrolle** $f(x) = |x| - x$, $-1 < x < 1$ en una serie de Fourier.
14. **Desarrolle** $f(x) = 2x^2 - 1$, $-1 < x < 1$ en una serie de Fourier.
15. **Desarrolle** $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < 1$ en una serie de cosenos.
16. Desarrolle la función del problema 15 en forma de una serie de senos.
17. Halle los valores y funciones propios del problema de valor en la frontera

$$x^2 y'' + xy' + 9\lambda y = 0, \quad y'(1) = 0, y(e) = 0.$$

18. Formule una relación de ortogonalidad para las funciones propias del problema 17.
19. **Desarrolle** $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases}$ como una serie de Fourier-Bessel y emplee funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la condición en la frontera $J_0(4\lambda) = 0$.
20. **Desarrolle** $f(x) = x^4$, $-1 < x < 1$, como una serie de Fourier-Legendre.