Clase nº37

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

1 de Diciembre 2021

Objetivo de la clase

- Determinar la convergencia de series de funciones.
- Calcular radio e intervalo de convergencia de series de potencias.

Series de funciones

Definición 35

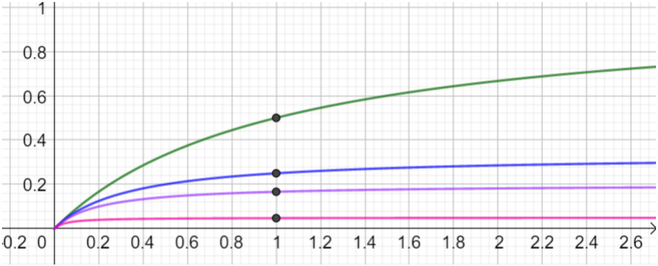
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si para cada $\epsilon > 0$, Existe $N_0 \in \mathbb{N},\ N_0 = N_0(\epsilon)$, tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para cada } n \geq N_0 \text{ y } x \in [a, b].$$

Series de funciones

Ejemplo 41

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$. Mostrar que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.



Series de funciones

Observación

La convergencia uniforme implica la convergencia puntual. El recíproco **no** siempre es cierto.

Ejemplo 42

La sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

es puntualmente convergente a

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Pero, $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f.

Series de funciones

Observación

Sea $S_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ la sucesión de sumas parciales asociada a la serie de funciones de término general f_n. Esta sucesión está dada por:

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x).$$

Para cada n se tiene que s_n es una función de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$.

Series de funciones

Definición 36

Diremos que la serie de funciones de término general f_n converge

- **puntualmente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sumas parciales converge puntualmente a $S(x)$.
- **uniformemente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente a $S(x)$.

En ambos casos escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n = S(x),$$

especificando en palabras el tipo de convergencia.

Series de funciones

Criterio de Cauchy

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente convergente si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(x)\right| < \epsilon$ para cada $n \geq N(\epsilon)$, cada $p \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [a, b]$.

Series de funciones

Criterio de Weierstrass

Si existe una serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ convergente, tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente y absolutamente convergente.

Series de funciones

Ejemplo 43

La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$
converge absoluta y uniformemente en $[2, 10]$.

Series de funciones

Ejemplo 44

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

es uniformemente convergente para $|x| \leq 1$.

Series de términos positivos

Ejercicio propuesto

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \text{ Si } x \in [1,2] n \geq 1.$$

   Estudie si esta sucesión de funciones converge puntualmente o uniformemente.

2. Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

   Estudie si esta sucesión de funciones converge puntualmente o uniformemente para $x \in [a, b]$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.