Pauta de corrección
Prueba III

Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Módulo III
Mecánica Intermedia
Licenciatura en Física - 2023[1]

Instrucciones : La prueba consta de cuatro problemas, el problema (I) y (II) son obligatorios para tod@s, de los dos restantes solo deben escoger uno. De resolver (parcial o totalmente) un cuarto problema, se hará la corrección considerando la suma de los puntajes de todos los problemas como base de evaluación. Se puede utilizar formulario.

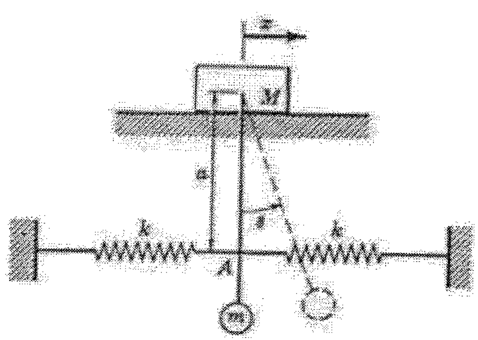
Nombre completo : ....

Puntaje obtenido / Puntaje total : ____ / 240

Nota final :

Problema I (Obligatorio): Péndulo y resortes (80 puntos)

Un bloque de masa M se mueve a lo largo de un plano horizontal liso y conduce un péndulo simple de longitud L y masa m, como se muestra en la figura. La conexión entre M y m es a través de una barra rígida de masa despreciable. En el punto A están unidos al péndulo dos resortes de igual constante de elasticidad k:



1. **(30 ptos.)** Halle el lagrangiano considerando pequeñas oscilaciones.
2. **(20 ptos.)** Escriba el lagrangiano como producto matricial.

[1] Hora de INICIO: 12:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 13:30 hrs.

3. **(15 ptos.)** Halle las ecuación que permite hallar las frecuencias de los modos normales.

4. **(15 ptos.)** ¿Cuáles son dichas frecuencias?.

Problema II (Obligatorio): Problema inverso (100 puntos)

Las **coordenadas normales** de cierto sistema acoplado se relacionan con las coordenadas físicas cartesianas de la siguiente manera:

$$\eta_1(t) = \alpha\left[x_1(t) + x_2(t)\right]$$
$$\eta_2(t) = \beta\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

siendo α y β constantes positivas arbitrarias, se conoce que las ecuaciones de movimiento para cada coordenada normal es:

$$\ddot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

1. **(25 ptos.)** Halle la matriz de transformación $\hat{\mathbf{U}}$ y los valores de α y β.

2. **(25 ptos.)** Suponga que las frecuencias de modo normal son conocidas y tienen los valores ω_1 y ω_2. Determine la matriz $\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}}$.

3. **(20 ptos.)** ¿Cuáles son los vectores propios de $\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}}$?.

4. El lagrangiano en términos de coordenadas normales tiene la siguiente forma:

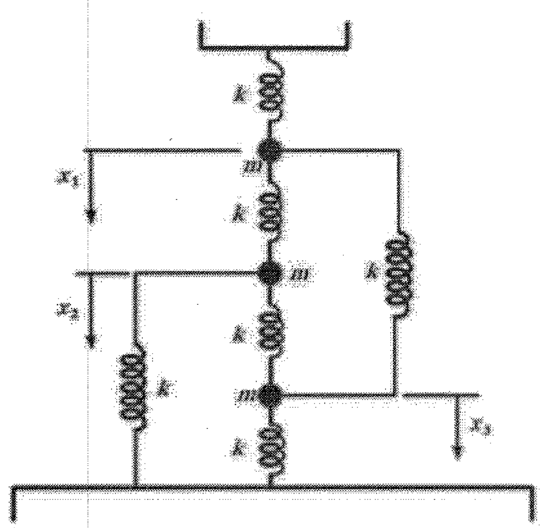
$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T\hat{\mathbf{G}}\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T\hat{\mathbf{H}}\eta$$

   (a) **(20 ptos.)** Demuestre que $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{diag}\left(\omega_1^2, \omega_2^2\right)$.

   (b) **(10 ptos.)** A partir de lo anterior determine las matrices $\hat{\mathbf{M}}$ y $\hat{\mathbf{K}}$.

Problema III : Masas y resortes (60 puntos)

Respecto al siguiente sistema que está dispuesto en un plano horizontal:



1. **(15 ptos.)** Halle la energía potencial del sistema.

2. **(15 ptos.)** Halle las matrices $\hat{\mathbf{M}}$ y $\hat{\mathbf{K}}$.

3. Si la masa central se deja fija:

   (a) **(15 ptos.)** ¿Cómo cambia el lagrangiano?. Reescríbalo.

   (b) **(15 ptos.)** ¿Uno de los modos normales tiene frecuencia $\omega = \left(\frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$?. ¿Qué significaría esto?.

Problema IV : Modos normales, geometría y simetría. (60 puntos)

Para los siguientes casos, utilizando argumentos de geometría y simetría determine al menos una de las frecuencias de modo normal y las condiciones iniciales para oscilar en dicho modo. Ud. debe establecer las referencias necesarias para las coordenadas.

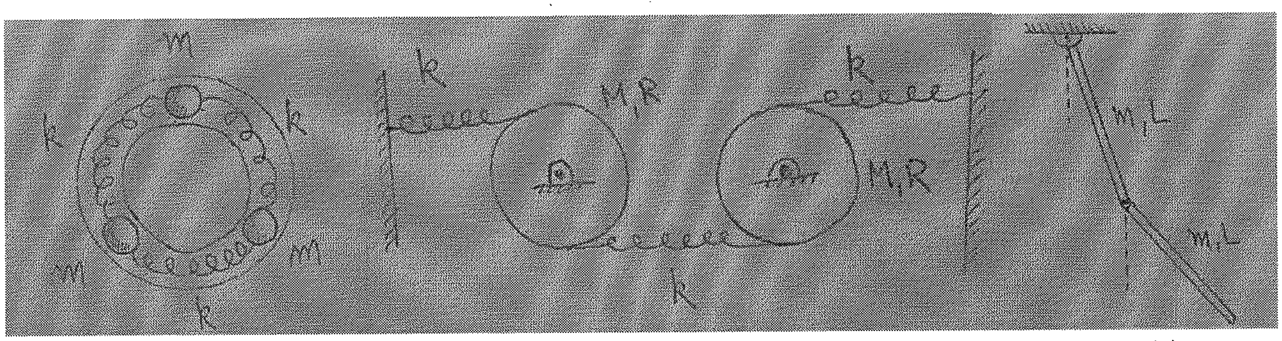


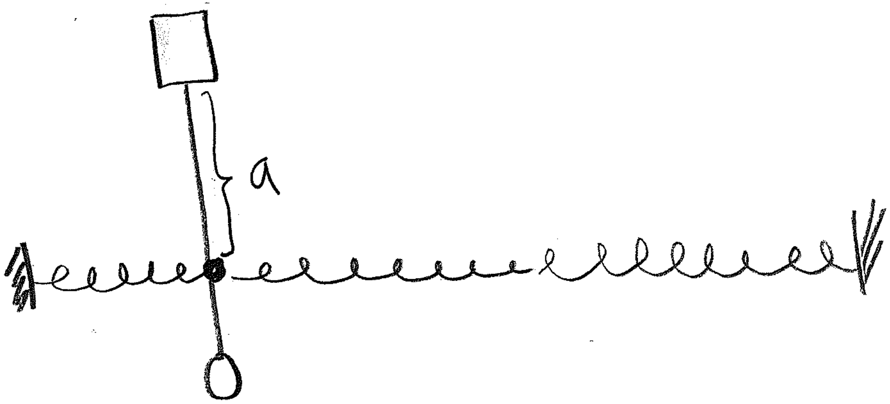
Fig. (1) Fig. (2) Fig. (3)

Obs.: Cada problema presentado tiene un valor de **20 ptos.**
Obs.: En las figura (1) el sistema se muestra en equilibrio, los resortes son de igual longitud y están en estado natural.
Obs.: Para este problema puede utilizar mecánica newtoniana para hallar la ecuación de movimiento y la frecuencia natural del sistema.

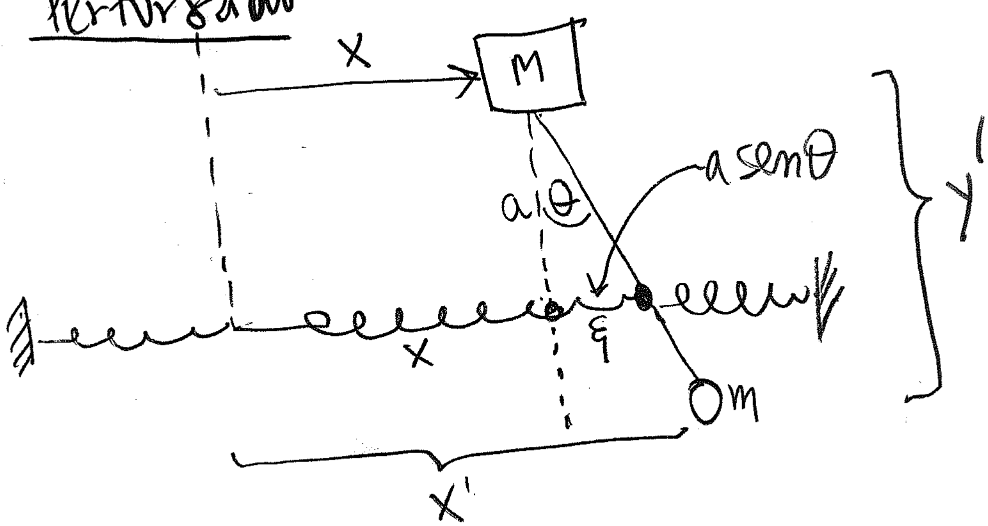
Probl. I)

1) **Equilibrio**

30



Perturbado



$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) - mgy' - \frac{1}{2}(2k)\left(x + a\,\mathrm{sen}\theta\right)^2$$

con $x' = x + l\,\mathrm{sen}\theta$ $\Rightarrow$ $\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$

$y' = -l\cos\theta$ $\quad\quad$ $\dot{y}' = l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta$

$$\xi = a\,\mathrm{sen}\theta \simeq a\theta$$

I.2

$\overset{\circ}{\circ}\circ$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\,\overset{1}{\cancel{\cos\theta}} + L^2\dot{\theta}^2\right) + mgL\,\underset{1-\frac{\theta^2}{2}}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$- \frac{1}{2}(2k)\left(x + a\,\underset{\theta}{\cancel{\sin\theta}}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}L\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{mgL}{2}\theta^2$$

$$- \frac{1}{2}(2k)x^2 - \frac{1}{2}(2 \cdot 2kx\theta) + \frac{1}{2}(2k)a^2\theta^2.$$

2) 20/

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}\ \dot{\theta})\begin{pmatrix} M+m & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{2}(x\ \theta)\begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & 2ka^2 + mgL \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

3) 15/

$$\begin{vmatrix} 2k - w^2(M+m) & 2k - mLw^2 \\ 2k - mLw^2 & 2ka^2 + mgL - mL^2w^2 \end{vmatrix} = 0$$

etc.

Probl. II) $\eta_1 = \alpha(x_1 + x_2)$

$\eta_2 = \beta(x_1 - x_2)$

II. 1

Se conoce que cada coordenada normal cumple con:

$$\ddot{\eta}_j + w_j^2 \eta_j = 0$$

1) se tiene que $\eta = \hat{U} X$

25

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

por otro lado se cumple que:

$$\hat{U}\hat{U}^T = \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha^2 = 1 \wedge 2\beta^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \;\|$$

finalmente

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Se tiene que:

25

$$\hat{U}\hat{M}^{-1}\hat{K}\hat{U}^{T} = \hat{D}^{2}, \qquad \text{con } \hat{D}^{2} = \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}^{-1}\left(\hat{U}\hat{M}^{-1}K\hat{U}^{T}\right)\left(U^{T}\right)^{-1} = \hat{U}^{-1}\hat{D}^{2}\left(U^{T}\right)^{-1}$$

luego: $\hat{M}^{-1}\hat{K} = \hat{U}^{T}\hat{D}^{2}\hat{U}$

Obs. se utilizó el hecho que $\hat{U}^{T} = \hat{U}^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\left(\hat{U}^{T}\right)^{-1} = \hat{U}^{T}$$

entonces

$$\hat{M}^{-1}\hat{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1^2 + w_2^2 & w_1^2 - w_2^2 \\ w_1^2 - w_1^2 & w_1^2 + w_2^2 \end{pmatrix}$$

3) Dado que la filas de $\hat{U}$ son los vectores propios normalizados entonces los vectores propios de $\hat{M}^{-1}\hat{K}$ son:

20/

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad y \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

4) a) Basta demostrar que L da origen a les ecuaciones de movimiento pere les coord. normales, esto es:

20/

$$\ddot{\eta} + \hat{D}^2\eta = 0$$

veamos

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T\hat{G}\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T\hat{H}\eta$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1\\\dot{\eta}_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\eta_1\eta_2)\begin{pmatrix}w_1^2&0\\0&w_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}w_1^2\eta_1^2 - \frac{1}{2}w_2^2\eta_2^2$$

$$L = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2 - \frac{1}{2}w_1^2\eta_1^2\right)}_{L_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}w_2^2\eta_2^2\right)}_{L_2}$$ II.4

$$L = L_1 + L_2 \quad ; \text{ con } L_i = \frac{1}{2}\dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2}w_i^2\eta_i^2$$

luego la ec. de movimiento para la coord. η_i

es
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial L_i}{\partial \eta_i} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\eta}_i\right) + w_i^2\eta_i = 0$$
$$\Downarrow$$

Finalmente $\ddot{\eta}_i + w_i^2\eta_i = 0 \quad (i = 1,2)$

lo que comprueba que L dado en términos de coord. normales es correcto!!! //

b) si $\eta_1 = \alpha(x_1+x_2) \rightarrow \dot{\eta}_1 = \alpha(\dot{x}_1+\dot{x}_2)$

$\eta_2 = \beta(x_1-x_2) \rightarrow \dot{\eta}_2 = \beta(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$

$\Downarrow \qquad \alpha=\beta$

$\eta_1^2 = \alpha^2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)$; $\dot{\eta}_1^2 = \alpha^2(\dot{x}_1^2+2\dot{x}_1\dot{x}_2+\dot{x}_2^2)$

$\eta_2^2 = \alpha^2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$; $\dot{\eta}_2^2 = \alpha^2(\dot{x}_1^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2+\dot{x}_2^2)$

Luego

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2\eta_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\eta_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2(2\dot{x}_1^2+2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}\omega_1^2\alpha^2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)$$

$$- \frac{1}{2}\omega_2^2\alpha^2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{2}x_2^2$$

$$- \frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2-\omega_2^2)}{2}\cdot 2x_1x_2$$

Luego $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1^2 + w_2^2 & w_1^2 - w_2^2 \\ w_1^2 - w_2^2 & w_1^2 + w_2^2 \end{pmatrix}$$

<u>Obs.</u> Esto confirme item(2) y además

$\Downarrow$

se tiene que $\hat{M}^{-1}\hat{K} = \hat{K}$.

Probl. III) III.1

1) $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right)$

1,5

$U = \frac{3}{2} k x_1^2 + \frac{3}{2} k x_2^2 + \frac{3}{2} k x_3^2 - k x_1 x_2 - k x_1 x_3 - k x_2 x_3$

2) $\hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

1,5

$\hat{K} = \begin{pmatrix} 3k & -k & -k \\ -k & 3k & -k \\ -k & -k & 3k \end{pmatrix}$

3) Basta hacer $\dot{x}_2 = 0$ y $x_2 = 0$ (posición de equilibrio)

1,5

$\Downarrow$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 \ \dot{x}_3) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (x_1 \ x_3) \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4) $|\hat{K} - w^2 \hat{M}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3k - w^2 m & -k \\ -k & 3k - w^2 m \end{vmatrix} = 0$

1,5

$$\Downarrow$$

$$(3k - w^2 m)^2 - k^2 = 0$$

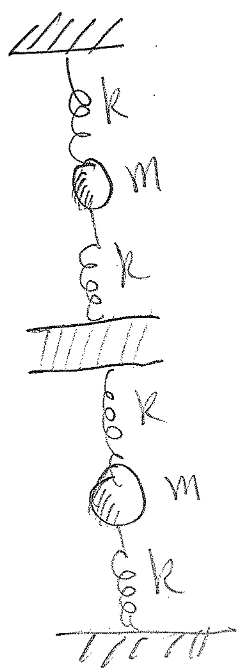
$$\Downarrow$$

$$3k - w^2 m = \pm k$$

$$w^2 = \frac{3k \pm k}{m} \Rightarrow w^2 = \frac{4k}{m} \quad // \qquad w^2 = \frac{2k}{m} \quad //$$

Esto desacopla la interacción de las masas m_1 y m_3

$$\Downarrow$$



2 osciladores independientes

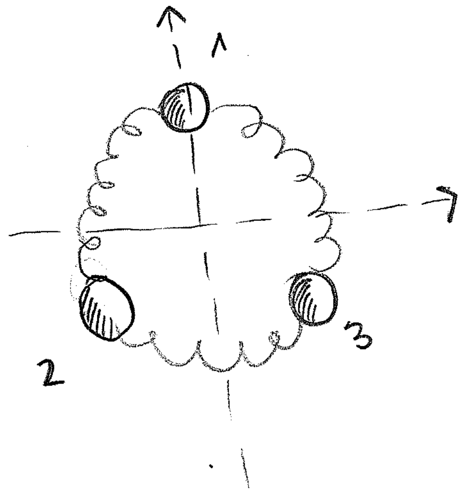
$$\Downarrow$$

El resorte q' conecta las masas no se estira ni se encoge //

Probl. IV)

IV.1

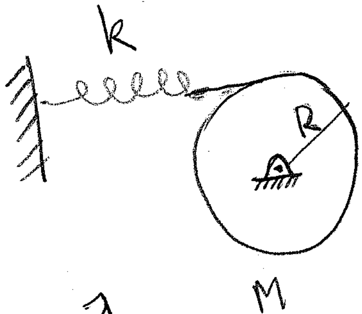
1)



20

$$\omega = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot\phi_1(0) = \dot\phi_2(0) = \dot\phi_3(0) \\ \phi_1(0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \phi_2(0) = \phi_1(0) + \frac{2\pi}{3} = 210^\circ \quad (120^\circ) \\ \phi_3(0) = \phi_2(0) + \frac{2\pi}{3} = 330^\circ \quad (120^\circ) \end{array} \right.$$

2)



20

Caso cuando resorte central no se estira ni se encoge.

$$I\alpha = -kX \qquad \alpha = \ddot\phi$$

$$X = R\phi$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot\phi + \frac{kR}{I}\phi = 0 \quad ; \ \frac{1}{2}MR^2$$

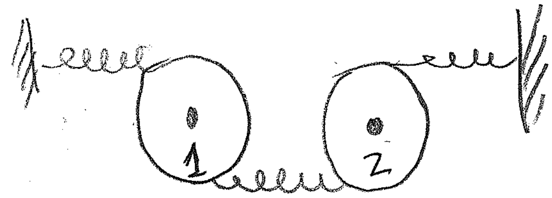
$$\Downarrow$$

$$\ddot\phi + \frac{k\cancel{R}}{\frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}}\phi = 0$$

$$\Downarrow$$

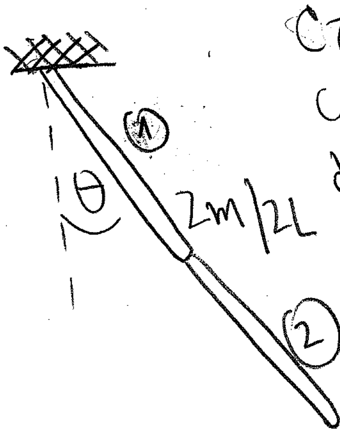
$$\ddot\phi + \omega^2\phi = 0 \quad \text{con } \omega = \left[\frac{2k}{M}\right]^{1/2}$$

IV.2



$$\begin{cases} \dot\phi_1(0) = \dot\phi_2(0) \\ \phi_1(0) = \phi_2(0) \end{cases}$$

3) 20/



Caso cuando ambas barras conforman une única barra de masa 2m y longitud 2L

$$-2mgL \operatorname{sen}\theta = I\ddot\theta \qquad I = \frac{1}{3}(2m)(2L)^2$$

$$= \frac{8}{3} mL^2.$$

$$\therefore \ddot\theta + \frac{3 \cdot 2mgL}{8mL^2}\theta = 0$$

con $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$$\Downarrow$$

$$\ddot\theta + \frac{3}{4}\frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{\ell}}$$ (oscilaciones pequeñas)

$$\Downarrow$$

$$\therefore \begin{cases} \dot\theta_1(0) = \dot\theta_2(0) \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) \end{cases}$$