

Keppler y Newton

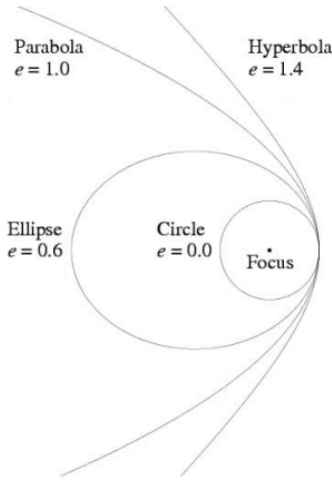
Mauro Jélvez

Análisis de Órbitas en un Potencial Gravitacional

El movimiento de dos cuerpos bajo una fuerza central gravitacional se reduce al problema de un cuerpo de masa reducida μ en el potencial:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (1)$$

donde M es la masa total del sistema. Las cantidades conser-



vadas son la energía total específica \mathcal{E} y el momento angular específico h :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GM}{r} \quad (2)$$

$$h = r^2\dot{\theta} = \text{constante} \quad (3)$$

La solución a las ecuaciones de movimiento resulta en la **ecuación de la órbita**:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{donde} \quad p = \frac{h^2}{GM} \quad (4)$$

La naturaleza de la órbita está determinada por la excentricidad e , que a su vez depende de \mathcal{E} y h :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{G^2M^2}} \quad (5)$$

Clasificación por Energía

- **Órbita Elíptica** ($\mathcal{E} < 0$): $e < 1$. Es la órbita de sistemas ligados.

$$\mathcal{E} = -\frac{GM}{2a} \quad (6)$$

- **Órbita Parabólica** ($\mathcal{E} = 0$): $e = 1$. Órbita de escape.
- **Órbita Hiperbólica** ($\mathcal{E} > 0$): $e > 1$. Órbita no ligada.

Relación Energía-Momento Angular para Órbitas Elípticas

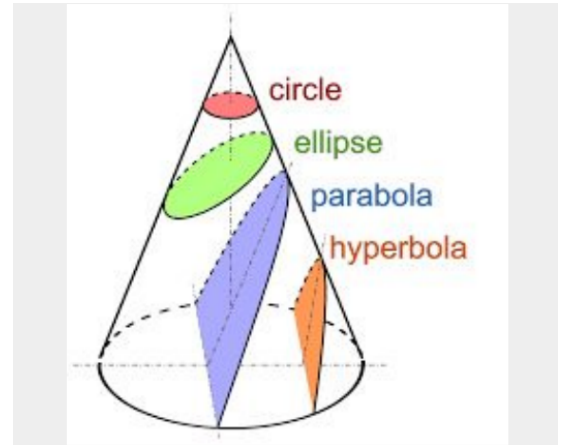
Para una energía dada (a fijo), la excentricidad depende de h :

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GMa}} \quad (7)$$

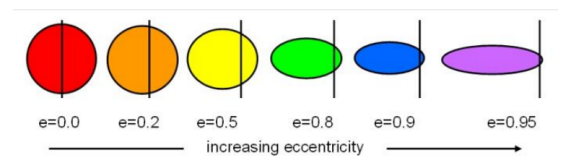
El **momento angular máximo** para una energía \mathcal{E} dada se da en la órbita circular ($e = 0$):

$$h_{\max} = \sqrt{GMa} \quad (8)$$

La órbita circular contiene la máxima cuantía de momento angular posible para su energía total.



Bound orbits are ellipses (or circle if $e = 0$)



Fundamentos Dinámicos de Sistemas Binarios Estelares

El movimiento de un sistema binario de estrellas se rige por la **Segunda Ley de Newton** y la **Ley de Gravitación Universal**. Consideremos dos estrellas de masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r .

1. Ecuaciones de Movimiento

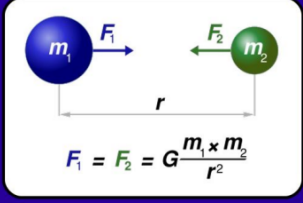
1.1. Fuerza Gravitacional Mutua

La fuerza gravitacional que cada estrella ejerce sobre la otra es igual en magnitud y opuesta en dirección (Tercera Ley de Newton):

•Star 1: $m_1 a_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

•Star 2: $m_2 a_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Newton's 2nd law **Universal law of gravitation**



$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

m_1 = mass of star 1
 a_1 = acceleration of star 1
 m_2 = mass of star 2
 a_2 = acceleration of star 2
 r = distance between stars

3. Movimiento del Centro de Masa

3.1. Definición del Centro de Masa

La posición del centro de masa (CM) está dada por:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

3.2. Propiedad del Centro de Masa

Derivando dos veces la ecuación (16) y usando (10) y (11):

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9) \quad M \ddot{\mathbf{R}}_{CM} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad (17)$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario dirigido de m_1 a m_2 , y G es la constante de gravitación universal.

Por lo tanto, el **centro de masa se mueve con velocidad constante** (o permanece en reposo) en un sistema de referencia inercial.

1.2. Aplicación de la Segunda Ley de Newton

Aplicando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a cada estrella:

$$\text{Para } m_1 : m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10)$$

$$\text{Para } m_2 : m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (11)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}_1$ y $\ddot{\mathbf{r}}_2$ son las aceleraciones de m_1 y m_2 respectivamente.

2. Reducción al Problema de Un Cuerpo

2.1. Ecuación de Movimiento Relativo

Definiendo el vector de posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y restando (10) de (11):

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (13)$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la **masa total del sistema**.

2.2. Masa Reducida

La ecuación (13) describe el movimiento de una partícula de **masa reducida**:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (14)$$

bajo la influencia de una masa central M . La ecuación se puede reescribir como:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M \mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (15)$$

4. Movimiento Individual Respecto al Centro de Masa

4.1. Posiciones Relativas al CM

Las posiciones de cada estrella respecto al centro de masa:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (18)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (19)$$

4.2. Semiejes Mayores Orbitales

Ambas estrellas orbitan alrededor del centro de masa con **órbitas geoméricamente similares** que comparten la misma excentricidad e y período orbital P , pero con **semiejes mayores**:

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad (20)$$

$$a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a \quad (21)$$

donde $a = a_1 + a_2$ es el **semieje mayor de la órbita relativa**.

5. Tercera Ley de Kepler Generalizada

El **período orbital** P para un sistema binario (elíptico o circular) está dado por:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (22)$$

5.1. Importancia Astrofísica

La ecuación (22) es fundamental porque permite **determinar la suma de las masas** de las estrellas a partir de mediciones observables del período orbital P y el semieje mayor a .

6. Relación de Masas

De las ecuaciones (20) y (21) se obtiene la **relación de masas**:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (23)$$

Esta relación es particularmente útil cuando se pueden medir las amplitudes de las órbitas individuales.

7. Conclusión

Este análisis proporciona la base teórica rigurosa para entender la dinámica de sistemas binarios, fundamental para:

- Determinar masas estelares
- Estudiar evolución estelar
- Detectar objetos compactos (agujeros negros, estrellas de neutrones)
- Calibrar relaciones masa-luminosidad

8. Energía en Sistemas Binarios

8.1. Expresiones Energéticas

Para un sistema binario con estrellas de masas m_1 y m_2 :

8.1.1. Energía Cinética

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 \quad (24)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 \quad (25)$$

8.1.2. Energía Potencial Gravitacional

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (26)$$

donde $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ es la distancia entre las estrellas.

8.2. Energía Total y su Conservación

8.2.1. Energía Total

$$E = K_1 + K_2 + U = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (27)$$

8.2.2. Conservación de Energía

$$\dot{E} = 0 \quad (28)$$

8.3. Formulación en Sistema de Centro de Masa

8.3.1. Energía Cinética Total

$$K_{\text{total}} = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 \quad (29)$$

donde $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida.

8.3.2. Energía Total Reducida

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (30)$$

8.4. Energía para Órbitas Elípticas

8.4.1. Teorema del Virial

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle \quad (31)$$

8.4.2. Energía en Función del Semieje Mayor

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \quad (32)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita relativa.

8.5. Clasificación de Órbitas

Elíptica (ligada): $E < 0$

Parabólica (escape): $E = 0$

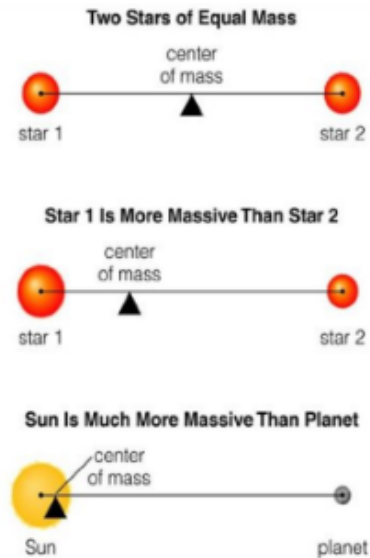
Hiperbólica (no ligada): $E > 0$

8.6. Verificación de la Conservación

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \right) \\ &= \mu\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{Gm_1m_2}{r^2}\dot{r} \\ &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \right) + \frac{Gm_1m_2}{r^2}\dot{r} = 0 \end{aligned}$$

9. Centro de Masa en Sistemas Binarios Estelares

El centro de masa (CM) es un concepto fundamental en la dinámica de sistemas binarios. Para un sistema de dos estrellas con masas m_1 y m_2 , el CM representa el punto balanceado donde se puede considerar concentrada toda la masa del sistema.



10. Definición Formal

La posición del centro de masa se define como:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (33)$$

donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son los vectores posición de las estrellas respecto a un sistema de referencia inercial.

11. Propiedades Geométricas

11.1. Localización Relativa

El centro de masa siempre se encuentra:

- Sobre la línea que une las dos estrellas
- Más cerca de la estrella más masiva
- En el punto medio cuando las masas son iguales

11.2. Distancias al Centro de Masa

Definimos las distancias de cada estrella al CM:

$$r'_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{CM}| \quad (34)$$

$$r'_2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{CM}| \quad (35)$$

$$r = r'_1 + r'_2 \quad (\text{distancia total entre estrellas}) \quad (36)$$

12. Relaciones Fundamentales

12.1. Relación de Masas y Distancias

De la definición del CM se deriva la relación fundamental:

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (37)$$

Esta ecuación muestra que las distancias al CM son inversamente proporcionales a las masas.

12.2. Expresiones Explícitas

Las distancias individuales al CM pueden expresarse como:

$$r'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (38)$$

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (39)$$

13. Casos Particulares

13.1. Estrellas de Masa Igual ($m_1 = m_2$)

$$r'_1 = r'_2 = \frac{r}{2}$$

$$\frac{r'_1}{r'_2} = 1$$

El CM se encuentra exactamente en el punto medio.

13.2. Estrella 1 más masiva que Estrella 2 ($m_1 > m_2$)

$$r'_1 < r'_2$$

$$\frac{r'_1}{r'_2} < 1$$

El CM está más cerca de la estrella más masiva.

13.3. Masa dominante ($m_1 \gg m_2$)

$$r'_1 \approx 0$$

$$r'_2 \approx r$$

$$\frac{r'_1}{r'_2} \approx 0$$

El CM prácticamente coincide con la posición de la estrella masiva.

14. Representación Gráfica

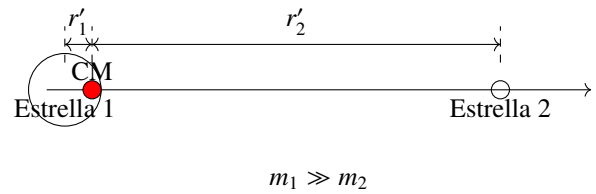
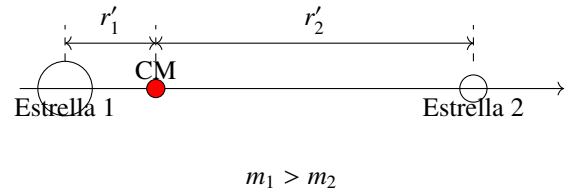
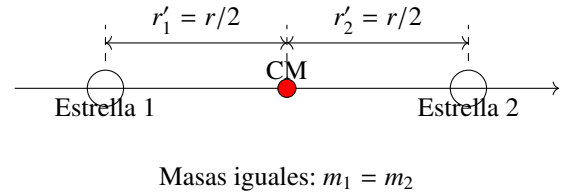


Fig. 1. Posición del centro de masa para diferentes relaciones de masa

15. Período Orbital Común

Ambas estrellas orbitan alrededor del centro de masa con el mismo período orbital P , dado por la Tercera Ley de Kepler generalizada:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (40)$$

donde $a = a_1 + a_2$ es el semieje mayor de la órbita relativa, y $a_1 = r'_1$, $a_2 = r'_2$ son los semiejes mayores de las órbitas individuales alrededor del CM.

16. Aplicaciones en Astrofísica

16.1. Determinación de Masas

La relación 47 permite determinar la relación de masas a partir de mediciones astrométricas:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r'_2}{r'_1} \quad (41)$$

16.2. Sistemas Binarios Resueltos

Para sistemas donde se pueden medir ambas órbitas:

$$m_1 = \frac{(r'_1 + r'_2)^2 r'_2}{GP^2} \quad (42)$$

$$m_2 = \frac{(r'_1 + r'_2)^2 r'_1}{GP^2} \quad (43)$$

17. Demostración de las Relaciones

Partiendo de la definición del CM (33):

$$m_1(\mathbf{R}_{\text{CM}} - \mathbf{r}_1) + m_2(\mathbf{R}_{\text{CM}} - \mathbf{r}_2) = 0$$

$$m_1 r'_1 - m_2 r'_2 = 0 \quad (\text{en magnitud})$$

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Además, como $r = r'_1 + r'_2$, tenemos:

$$r'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

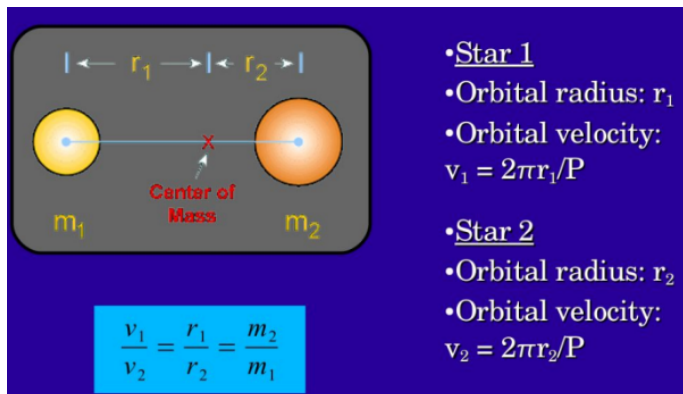
18. Conclusiones

El estudio del centro de masa en sistemas binarios proporciona:

- Un método fundamental para determinar masas estelares
- La base para entender órbitas keplerianas
- Herramientas para el análisis de sistemas múltiples
- Información crucial para estudios de evolución estelar

19. Órbitas Circulares en Sistemas Binarios Estelares

Las órbitas circulares representan un caso fundamental en el estudio de sistemas binarios estelares. En esta configuración, ambas estrellas describen trayectorias circulares alrededor del centro de masa común, manteniendo velocidades orbitales constantes en módulo.



20. Definiciones y Parámetros Orbitales

Consideremos un sistema binario con dos estrellas de masas m_1 y m_2 en órbita circular.

20.1. Posiciones Orbitales

$$r_1 = \text{distancia de } m_1 \text{ al centro de masa} \quad (44)$$

$$r_2 = \text{distancia de } m_2 \text{ al centro de masa} \quad (45)$$

$$r = r_1 + r_2 = \text{distancia entre las estrellas} \quad (46)$$

20.2. Relación Fundamental entre Masas y Distancias

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (47)$$

21. Cinemática Orbital

21.1. Velocidades Orbitales

Para órbitas circulares, las velocidades orbitales son constantes en módulo:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \quad (48)$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{P} \quad (49)$$

donde P es el período orbital común a ambas estrellas.

21.2. Relación entre Velocidades

De las ecuaciones (47) y (49):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (50)$$

22. Dinámica Orbital

22.1. Fuerza Gravitacional y Aceleración Centrípeta

Para cada estrella, la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular:

22.1.1. Para la estrella m_1 :

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \quad (51)$$

22.1.2. Para la estrella m_2 :

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2} \quad (52)$$

23. Tercera Ley de Kepler Generalizada

Combinando las ecuaciones dinámicas, obtenemos la tercera ley de Kepler para sistemas binarios:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3 \quad (53)$$

o equivalentemente:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^3 \quad (54)$$

24. Energía del Sistema

24.1. Energía Cinética Total

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

24.2. Energía Potencial Gravitacional

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

24.3. Energía Total

$$E = K + U = -\frac{Gm_1m_2}{2r}$$

La energía total negativa confirma que el sistema está ligado gravitacionalmente.

25. Expresiones Explícitas de Velocidades

25.1. Velocidades en Función de Parámetros Orbitales

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2)r}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{Gm_1^2}{(m_1 + m_2)r}}$$

25.2. Forma Alternativa

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r}}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r}}$$

26. Casos Particulares

26.1. Masas Iguales ($m_1 = m_2$)

$$r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$$

$$v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{Gm_1}{2r}}$$

26.2. Masa Dominante ($m_1 \gg m_2$)

$$r_1 \approx 0$$

$$r_2 \approx r$$

$$v_2 \approx \sqrt{\frac{Gm_1}{r}} \quad (\text{Velocidad Kepleriana})$$

27. Aplicaciones Observacionales

27.1. Determinación de Masas Estelares

Para sistemas binarios espectroscópicos de doble línea:

$$m_1 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_2 \quad (67)$$

$$m_2 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_1 \quad (68)$$

donde i es la inclinación orbital.

(56) 27.2. Relación de Masas

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (69)$$

(57) 28. Diagrama de Órbitas Circulares

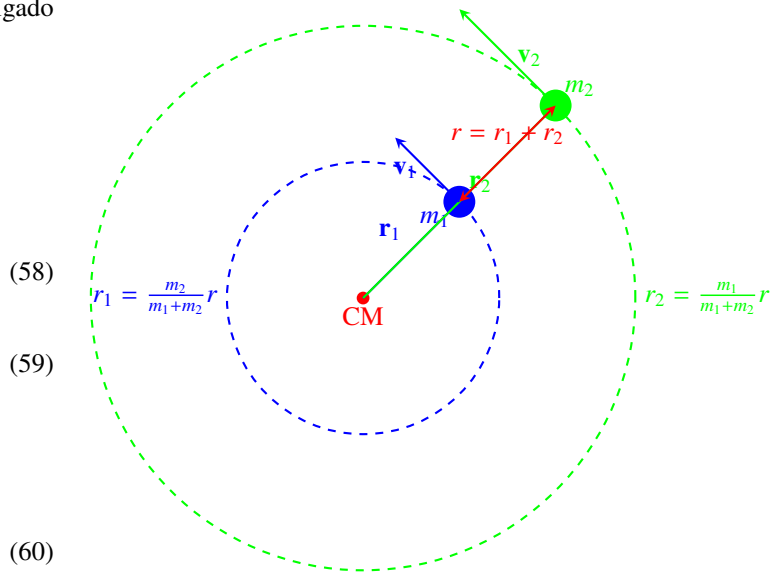


Fig. 2. Configuración de órbitas circulares en un sistema binario. Ambas estrellas orbitan alrededor del centro de masa (CM) con el mismo período orbital P .

(60) 29. Ejemplo Numérico

Consideremos un sistema binario con:

$$m_1 = 2.0 M_{\odot} \quad (62)$$

$$m_2 = 1.0 M_{\odot} \quad (63)$$

$$r = 1.0 \text{ UA}$$

$$r_1 = \frac{1.0}{3.0} \times 1.0 \text{ UA} = 0.333 \text{ UA} \quad (64)$$

$$r_2 = \frac{2.0}{3.0} \times 1.0 \text{ UA} = 0.667 \text{ UA} \quad (65)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{(1.0 \text{ UA})^3}{G \times 3.0 M_{\odot}}} \approx 0.48 \text{ años} \quad (66)$$

30. Conclusiones

El estudio de órbitas circulares en sistemas binarios proporciona:

- Las bases para entender sistemas orbitales más complejos
- Métodos directos para determinar masas estelares

- Relaciones fundamentales entre parámetros orbitales
- Herramientas para el análisis de sistemas múltiples

Table 1. Resumen de relaciones para órbitas circulares

Parámetro	Relación
Relación de distancias	$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$
Relación de velocidades	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$
Período orbital	$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3$
Energía total	$E = -\frac{Gm_1m_2}{2r}$

31. Momento Angular en Sistemas Binarios Estelares

El momento angular es una cantidad fundamental en la dinámica de sistemas binarios. Su conservación impone restricciones importantes sobre el movimiento orbital y determina la geometría del sistema.

32. Definición del Momento Angular

32.1. Momento Angular Individual

Para cada estrella, el momento angular se define como:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) \quad (70)$$

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_2(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) \quad (71)$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento lineal.

32.2. Momento Angular Total

El momento angular total del sistema es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) \quad (72)$$

33. Conservación del Momento Angular

33.1. Derivada Temporal

La derivada temporal del momento angular es:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (73)$$

33.2. Fuerzas Centrales

Para fuerzas gravitacionales centrales:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = 0 \quad (74)$$

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \quad (\text{porque } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r}) \quad (75)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{J} = \text{constante} \quad (76)$$

34. Consecuencias de la Conservación

34.1. Plano Orbital Invariable

Dado que \mathbf{J} es un vector constante:

- La dirección del momento angular es fija
- El movimiento está confinado a un plano perpendicular a \mathbf{J}
- Las órbitas son planares

34.2. Coordenadas en el Plano Orbital

En el plano orbital, usamos coordenadas polares:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \quad (77)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (78)$$

35. Momento Angular en el Sistema de Centro de Masa

35.1. Posiciones Relativas

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{CM} = -\frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad (79)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{CM} = \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \quad (80)$$

donde $M = m_1 + m_2$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

35.2. Velocidades en el Sistema CM

$$\mathbf{v}'_1 = -\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \quad (81)$$

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} \quad (82)$$

35.3. Momento Angular Total

$$\mathbf{J} = m_1(\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1) + m_2(\mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2) \quad (83)$$

$$= \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad (84)$$

donde $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ es la masa reducida.

36. Expresión en Coordenadas Polares

36.1. Vector Posición y Velocidad

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \quad (85)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (86)$$

36.2. Momento Angular Reducido

$$\mathbf{J} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad (87)$$

$$= \mu[r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})] \quad (88)$$

$$= \mu r^2 \dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) \quad (89)$$

$$= \mu r^2 \dot{\theta} \hat{k} \quad (90)$$

36.3. Módulo del Momento Angular

$$J = |\mathbf{J}| = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (91)$$

37. Segunda Ley de Kepler

37.1. Velocidad Areal

La velocidad areal es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{J}{2\mu} \quad (92)$$

37.2. Enunciado

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante} \quad (93)$$

"El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales."

38. Aplicaciones en Órbitas Elípticas

38.1. Excentricidad y Momento Angular

Para órbitas keplerianas:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu(GM)^2}} \quad (94)$$

donde E es la energía total.

38.2. Órbitas Circulares

Para órbitas circulares ($e = 0$):

$$J = \mu \sqrt{GM r} \quad (95)$$

39. Diagrama del Momento Angular

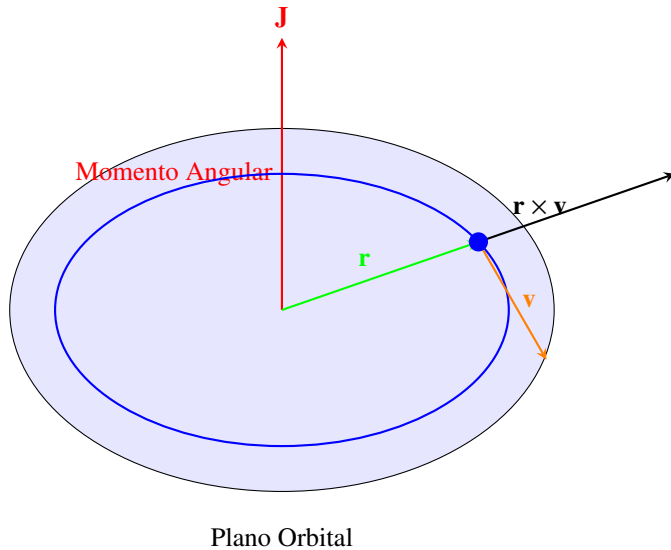


Fig. 3. El momento angular \mathbf{J} es perpendicular al plano orbital. Los vectores \mathbf{r} y \mathbf{v} yacen en el plano orbital.

40. Ejemplo Numérico

Para un sistema binario con:

$$m_1 = 1.5 M_{\odot}$$

$$m_2 = 0.5 M_{\odot}$$

$$r = 1.0 \text{ UA}$$

$$v_{\text{tan}} = 30 \text{ km/s}$$

$$\mu = \frac{1.5 \times 0.5}{2.0} M_{\odot} = 0.375 M_{\odot}$$

$$J = \mu r v_{\text{tan}} \approx 4.5 \times 10^{49} \text{ g}\cdot\text{cm}^2/\text{s}$$

41. Importancia Astrofísica

La conservación del momento angular es crucial para:

- Determinar la estabilidad orbital a largo plazo
- Estudiar la evolución de sistemas binarios
- Analizar transferencia de masa y momento angular
- Entender la formación de discos de acreción

Table 2. Resumen de propiedades del momento angular

Propiedad	Expresión
Momento angular total	$\mathbf{J} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2)$
Conservación	$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$
Masa reducida	$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
Momento angular reducido	$\mathbf{J} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$
Módulo	$J = \mu r^2 \dot{\theta}$
Velocidad areal	$\frac{dA}{dt} = \frac{J}{2\mu}$

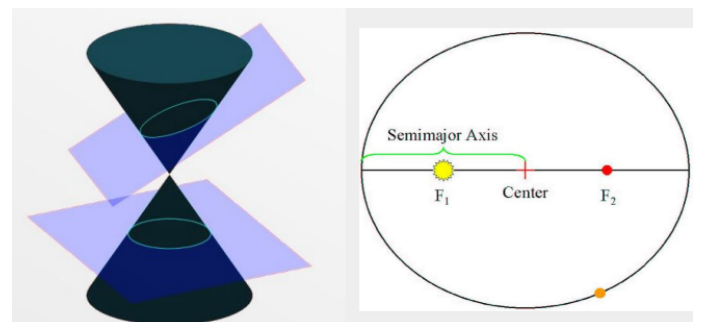
42. Conclusiones

El momento angular es una cantidad fundamental que:

- Se conserva en sistemas aislados
- Determina la geometría del plano orbital
- Proporciona restricciones para la evolución del sistema
- Es esencial para el análisis dinámico de binarias

43. Primera Ley de Kepler y su Generalización Newtoniana

La Primera Ley de Kepler, originalmente formulada para planetas orbitando el Sol, establece que las órbitas son elípticas con el Sol en uno de los focos. Newton generalizó este resultado para cualquier sistema de dos cuerpos bajo la ley de gravitación universal.



44. Enunciado Original de Kepler

44.1. Primera Ley de Kepler (1609)

"Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos."

44.2. Elementos de una Elipse

Para una elipse con semieje mayor a y semieje menor b :

$$\text{Excentricidad: } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (96)$$

$$\text{Distancia focal: } c = ae \quad (97)$$

$$\text{Distancia al foco: } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (98)$$

45. Generalización Newtoniana

45.1. Ley de Gravitación Universal

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (99)$$

45.2. Ecuación de Movimiento

Para el movimiento relativo:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (100)$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida.

45.3. Solución de la Ecuación Diferencial

La solución general para la órbita es:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{J^2} (1 + e \cos \theta) \quad (101)$$

donde:

- $M = m_1 + m_2$ es la masa total
- J es el momento angular
- e es la excentricidad

46. Tipos de Órbitas

46.1. Clasificación por Excentricidad

Circular: $e = 0$

Elíptica: $0 < e < 1$

Parabólica: $e = 1$

Hiperbólica: $e > 1$

46.2. Energía y Excentricidad

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu(GM)^2}} \quad (106)$$

donde E es la energía total:

$E < 0 \Rightarrow$ Órbita elíptica

$E = 0 \Rightarrow$ Órbita parabólica

$E > 0 \Rightarrow$ Órbita hiperbólica

47. El Centro de Masa como Foco

47.1. Posición del Centro de Masa

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (110)$$

47.2. Órbitas alrededor del CM

Cada cuerpo orbita alrededor del centro de masa, describiendo elipses similares con el CM en uno de los focos.

48. Diagrama de una Órbita Elíptica

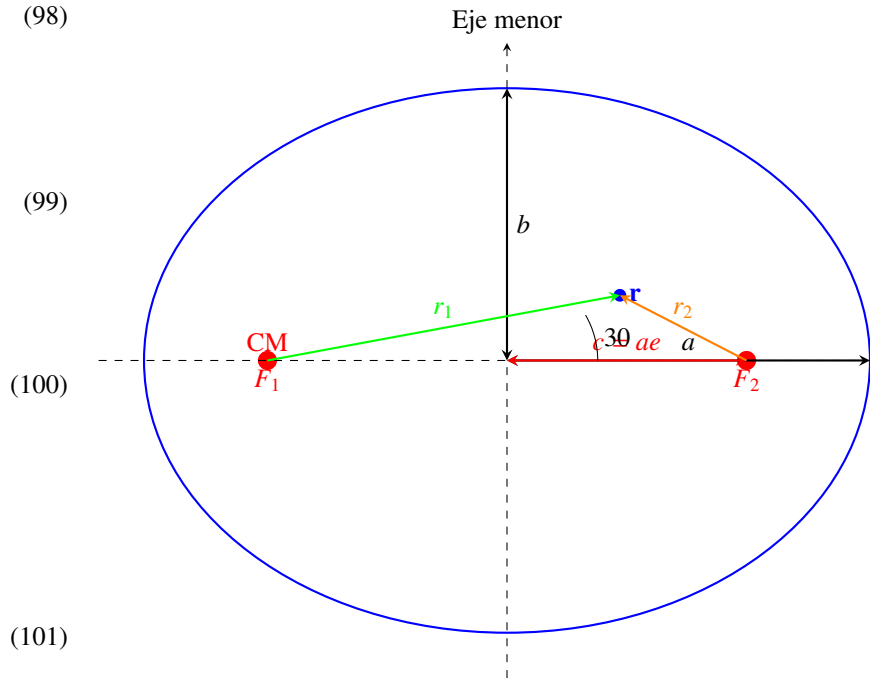


Fig. 4. Órbita elíptica mostrando los focos F_1 y F_2 , donde F_1 contiene el centro de masa.

49. Deducción Matemática

49.1. Ecuación Diferencial

Partiendo de la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM\mu^2}{J^2} \quad (111)$$

$$\text{donde } u = \frac{1}{r}. \quad (102)$$

$$(103)$$

$$(104)$$

$$(105)$$

49.2. Solución General

La solución es:

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM\mu^2}{J^2} \quad (112)$$

$$(106)$$

49.3. Forma Standard

Definiendo la excentricidad e y el semilatus rectum p :

$$p = \frac{J^2}{GM\mu^2} \quad (107)$$

$$(108)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (109)$$

$$(113)$$

$$(114)$$

50. Aplicaciones en Sistemas Binarios

50.1. Elementos Orbitales

Para un sistema binario, los elementos orbitales son:

- Semieje mayor a
- Excentricidad e
- Inclinación i
- Argumento del periastro ω
- Longitud del nodo ascendente Ω
- Época del paso por el periastro T_0

50.2. Relación con la Tercera Ley

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (115)$$

51. Ejemplos

51.1. Sistema Solar

Mercurio: $e = 0.206$

Venus: $e = 0.007$

Tierra: $e = 0.017$

Marte: $e = 0.093$

Júpiter: $e = 0.048$

51.2. Sistemas Binarios

Sirio A & B: $e = 0.59$

Cygnus X-1: $e = 0.02$

PSR B1913+16: $e = 0.62$

52. Importancia en Astrofísica

La Primera Ley de Kepler generalizada es fundamental para:

- Determinar masas estelares en sistemas binarios
- Estudiar la dinámica de sistemas múltiples
- Analizar la evolución orbital
- Entender la formación de sistemas planetarios

Table 3. Resumen de la Primera Ley de Kepler generalizada

Concepto	Descripción
Enunciado original	Órbitas elípticas con el Sol en un foco
Generalización	Válida para cualquier par de cuerpos
Foco	Contiene el centro de masa
Energía	$E < 0$ para órbitas elípticas
Ecuación orbital	$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$
Excentricidad	$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu(GM)^2}}$

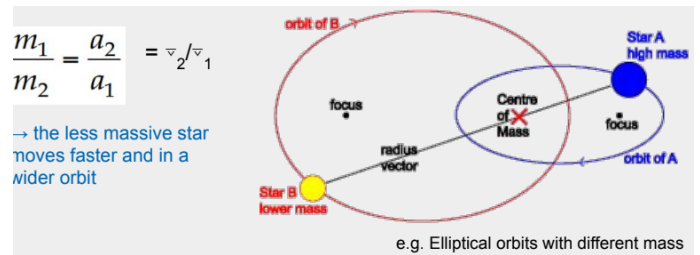
53. Conclusiones

La Primera Ley de Kepler, generalizada por Newton, constituye uno de los pilares de la mecánica celeste:

- Describe el movimiento de sistemas binarios con precisión
- Proporciona las bases para la determinación de masas
- Es aplicable a escalas desde sistemas planetarios hasta galaxias binarias
- Su validez ha sido confirmada por observaciones de alta precisión

54. Órbitas en Sistemas Binarios Estelares

En sistemas binarios, ambas estrellas orbitan alrededor del centro de masa común, describiendo órbitas que son secciones cónicas similares pero de tamaños diferentes, determinadas por la relación de masas.



55. Propiedades Fundamentales de las Órbitas

55.1. Similitud de las Órbitas

- Ambas estrellas describen **secciones cónicas similares**
- Misma **excentricidad** e para ambas órbitas
- Mismo **período orbital** P
- Misma **forma** de la órbita

55.2. Escala de las Órbitas

- **Tamaños diferentes** (excepto cuando $m_1 = m_2$)
- **Semiejes mayores** relacionados por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (116)$$

56. Relaciones entre Parámetros Orbitales

56.1. Relación Fundamental

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad (117)$$

56.2. Interpretación Física

- La estrella **menos masiva** se mueve en una órbita **más amplia**
- La estrella **menos masiva** tiene **mayor velocidad** orbital
- La estrella **más masiva** orbita **más cerca** del CM

57. Deducción Matemática

57.1. Definición del Centro de Masa

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad (118)$$

donde a_1 y a_2 son los semiejes mayores de las órbitas individuales.

57.2. Relación de Velocidades

Para órbitas circulares:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (119)$$

$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P} \quad (120)$$

Por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (121)$$

58. Energía y Momento Angular

58.1. Energía Total

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

donde $a = a_1 + a_2$ es el semieje mayor relativo.

58.2. Momento Angular

$$J = \mu \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

donde $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ es la masa reducida y $M = m_1 + m_2$.

59. Casos Particulares

59.1. Masas Iguales ($m_1 = m_2$)

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$$

$$v_1 = v_2$$

$$e_1 = e_2$$

Ambas estrellas describen órbitas idénticas.

59.2. Masa Dominante ($m_1 \gg m_2$)

$$a_1 \approx 0$$

$$a_2 \approx a$$

$$v_1 \approx 0$$

$$v_2 \approx \sqrt{\frac{Gm_1}{a}}$$

La estrella masiva prácticamente coincide con el CM.

60. Aplicaciones Observacionales

60.1. Determinación de Masas

$$m_1 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_1 + v_2)^2 v_2}{\sin^3 i}$$

$$m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_1 + v_2)^2 v_1}{\sin^3 i}$$

60.2. Sistemas Binarios Spectroscópicos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

61. Ejemplos de Sistemas Binarios

61.1. Sirio A y B

$$m_{\text{Sirio A}} = 2.02 M_{\odot}$$

$$m_{\text{Sirio B}} = 1.01 M_{\odot}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = 2.0$$

$$\frac{a_B}{a_A} = 2.0$$

$$e = 0.59$$

61.2. PSR B1913+16 (Púlsar Binario)

$$m_1 = 1.44 M_{\odot}$$

$$(122) \quad m_2 = 1.39 M_{\odot}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 1.036$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 1.036$$

$$e = 0.62$$

$$(123)$$

62. Importancia en Astrofísica

El estudio de órbitas binarias permite:

- **Determinar masas estelares** con precisión
- Estudiar la **evolución estelar** en sistemas interactivos
- Investigar **objetos compactos** (agujeros negros, estrellas de neutrones)
- Verificar la **relatividad general** mediante precesión orbital
- Comprender los **mecanismos de transferencia de masa**

Table 4. Resumen de relaciones orbitales en sistemas binarios

Relación	Expresión
Relación de masas	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1}$
Semiejes mayores	$a_1 + a_2 = a$
Período orbital	$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$
Excentricidad	$e_1 = e_2 = e$
Energía total	$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$
Momento angular	$J = \mu \sqrt{GMa(1 - e^2)}$

63. Conclusiones

Las propiedades orbitales de sistemas binarios proporcionan:

- Herramientas fundamentales para la determinación de masas
- Verificación de teorías gravitacionales
- Información crucial sobre la estructura y evolución estelar
- Laboratorios únicos para estudiar física en condiciones extremas

La relación $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1}$ constituye una de las piedras angulares de la astrofísica estelar moderna.

64. Órbitas Circulares en Sistemas Binarios

Las órbitas circulares representan un caso especial importante en el estudio de sistemas binarios. En esta configuración, ambas estrellas describen trayectorias circulares perfectas alrededor del centro de masa común, con velocidades orbitales constantes.

65. Propiedades Fundamentales

65.1. Características de Órbitas Circulares

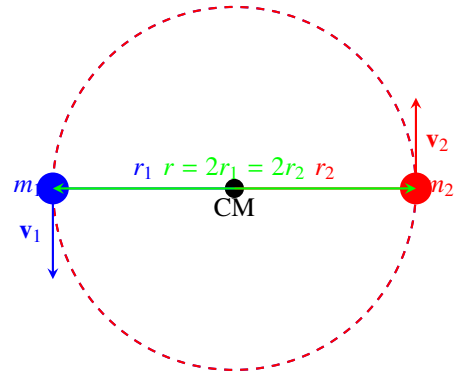
- Trayectorias perfectamente circulares
- Velocidades orbitales constantes en módulo
- Aceleración puramente centrípeta
- Mismo período orbital P para ambas componentes
- Misma excentricidad ($e = 0$)

65.2. Relaciones Básicas

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \quad (134)$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{P} \quad (135)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (136)$$



Masas iguales: $m_1 = m_2$, $r_1 = r_2$, $v_1 = v_2$

Fig. 5. Sistema binario con masas iguales. Ambas estrellas orbitan a la misma distancia del centro de masa.

66. Caso 1: Masas Iguales ($m_1 = m_2$)

66.1. Configuración Orbital

Cuando las dos estrellas tienen masas iguales:

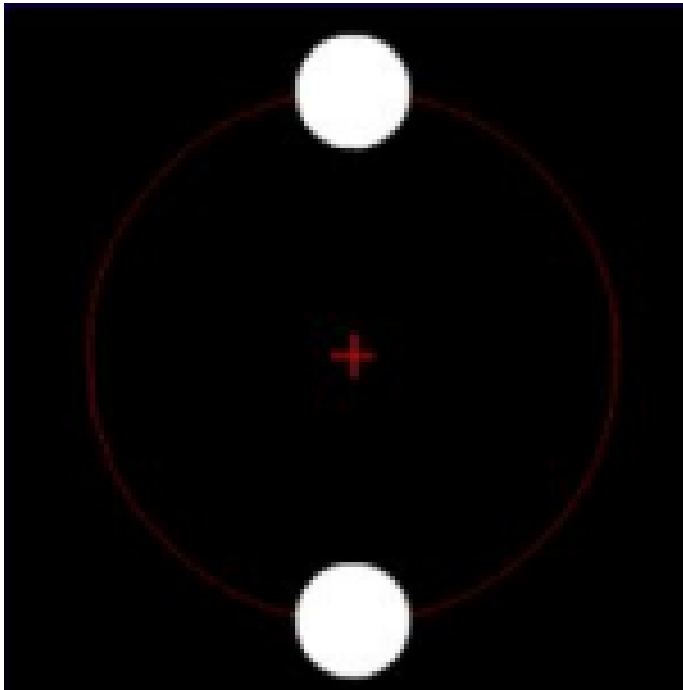
$$r_1 = r_2 = \frac{r}{2} \quad (137)$$

$$v_1 = v_2 \quad (138)$$

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2} \quad (139)$$

donde r es la distancia entre estrellas y a es el semieje mayor.

66.2. Diagrama para Masas Iguales



67. Caso 2: Masas Diferentes ($m_1 > m_2$)

67.1. Configuración Orbital

Cuando las masas son diferentes:

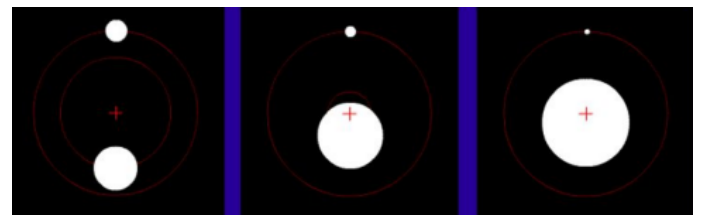
$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (140)$$

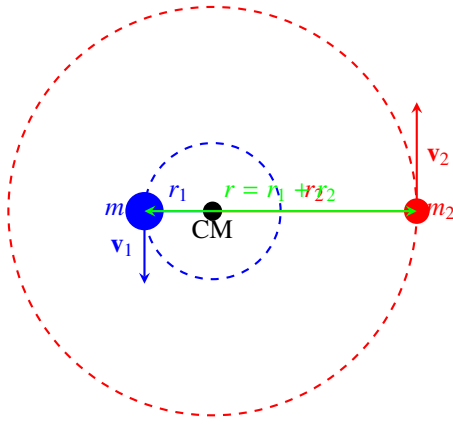
$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (141)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (142)$$

La estrella más masiva orbita más cerca del centro de masa.

67.2. Diagrama para Masas Diferentes





Masas diferentes: $m_1 > m_2$, $r_1 < r_2$, $v_1 < v_2$
 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}$

Fig. 6. Sistema binario con masas diferentes. La estrella más masiva (m_1) orbita más cerca del CM.

68. Dinámica Orbital

68.1. Fuerza Centrípetra

Para cada estrella, la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \quad (143)$$

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2} \quad (144)$$

68.2. Tercera Ley de Kepler

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3 \quad (145)$$

68.3. Velocidades Orbitales

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2)r}} \quad (146)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{Gm_1^2}{(m_1 + m_2)r}} \quad (147)$$

69. Energía del Sistema

69.1. Energía Cinética

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (148)$$

69.2. Energía Potencial

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (149)$$

69.3. Energía Total

$$E = K + U = -\frac{Gm_1m_2}{2r} \quad (150)$$

70. Evolución de Sistemas Binarios

70.1. Transferencia de Masa

En sistemas cercanos, puede ocurrir transferencia de masa mediante:

- Lóbulo de Roche
- Viento estelar
- Acreción

70.2. Efectos de Marea

Las fuerzas de marea pueden:

- Circularizar órbitas excéntricas
- Sincronizar rotación y revolución
- Transferir momento angular

71. Ejemplos Numéricos

71.1. Masas Iguales

$$m_1 = m_2 = 1.0 M_\odot$$

$$r = 1.0 \text{ UA}$$

$$r_1 = r_2 = 0.5 \text{ UA}$$

$$P \approx 0.5 \text{ años}$$

71.2. Masas Diferentes

$$m_1 = 3.0 M_\odot$$

$$m_2 = 1.0 M_\odot$$

$$r = 1.0 \text{ UA}$$

$$r_1 = 0.25 \text{ UA}$$

$$r_2 = 0.75 \text{ UA}$$

$$P \approx 0.4 \text{ años}$$

72. Aplicaciones Observacionales

72.1. Sistemas Binarios Resueltos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (151)$$

72.2. Sistemas Espectroscópicos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (152)$$

73. Conclusiones

Las órbitas circulares en sistemas binarios:

- Proporcionan casos fundamentales para el estudio dinámico
- Permiten determinar masas estelares con precisión
- Sirven como base para entender sistemas más complejos
- Son comunes en sistemas con interacciones de marea

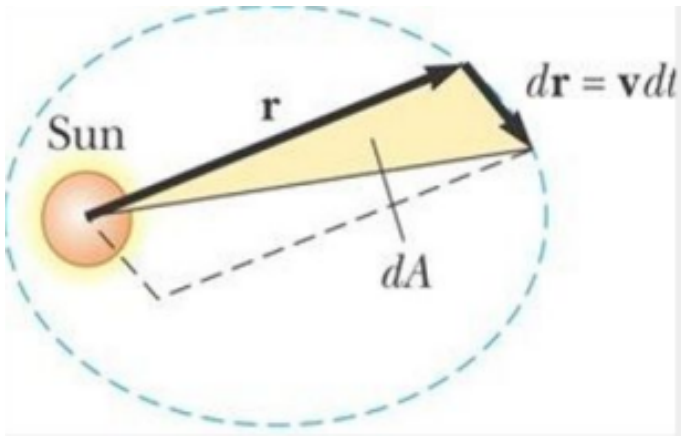
- Ofrecen laboratorios ideales para probar teorías gravitacionales

Table 5. Resumen de relaciones para órbitas circulares

Parámetro	Masas Iguales	Masas Diferentes
r_1/r_2	1	m_2/m_1
v_1/v_2	1	m_2/m_1
r_1	$r/2$	$\frac{m_2}{m_1+m_2}r$
r_2	$r/2$	$\frac{m_1}{m_1+m_2}r$
Energía	$-\frac{Gm^2}{2r}$	$-\frac{Gm_1m_2}{2r}$

74. Segunda Ley de Kepler y Conservación del Momento Angular

La Segunda Ley de Kepler, también conocida como la **Ley de las Áreas**, establece que el radio vector que une una estrella con el centro de masa barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley es una manifestación directa de la conservación del momento angular en sistemas binarios.



75. Enunciado de la Segunda Ley de Kepler

75.1. Formulación Original

“El radio vector que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.”

75.2. Generalización para Sistemas Binarios

“El radio vector de cada estrella respecto al centro de masa barre áreas iguales en tiempos iguales.”

76. Conservación del Momento Angular

76.1. Definición del Momento Angular

Para una estrella de masa m :

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (153)$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento lineal.

76.2. Conservación

Para fuerzas centrales como la gravedad:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{J} = \text{constante} \quad (154)$$

77. Deducción de la Segunda Ley

77.1. Velocidad Areal

Consideremos el área barrida por el radio vector en un tiempo infinitesimal dt :

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| \quad (155)$$

77.2. Relación con la Velocidad

Como $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, tenemos:

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt \quad (156)$$

77.3. Velocidad Areal Constante

Sustituyendo la ecuación (153):

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt \quad (157)$$

$$= \frac{1}{2m} |\mathbf{J}| dt \quad (158)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{J}|}{2m} = \text{constante} \quad (159)$$

78. Implicaciones Físicas

78.1. Variación de la Velocidad Orbital

$$v = \frac{2}{r} \frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{J}|}{mr} \quad (160)$$

La velocidad orbital es inversamente proporcional a la distancia al centro de masa.

78.2. Posiciones Orbitales

- **Periastro:** Distancia mínima, velocidad máxima
- **Apoastro:** Distancia máxima, velocidad mínima

79. Aplicaciones en Sistemas Binarios

79.1. Determinación de Parámetros Orbitales

$$\frac{dA}{dt} = \frac{J}{2m} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{constante} \quad (161)$$

79.2. Relación con la Excentricidad

$$J = m \sqrt{GMa(1 - e^2)} \quad (162)$$

80. Demostración Matemática Detallada

80.1. Coordenadas Polares

En coordenadas polares centradas en el foco:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \quad (163)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (164)$$

80.2. Momento Angular

$$\mathbf{J} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (165)$$

$$= m[r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})] \quad (166)$$

$$= mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) \quad (167)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad (168)$$

80.3. Velocidad Areal

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\theta \quad (169)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{J}{2m} \quad (170)$$

81. Ejemplos Numéricos

81.1. Sistema Binario Típico

$$m = 1.0 M_{\odot}$$

$$J = 1.0 \times 10^{50} \text{ g}\cdot\text{cm}^2/\text{s}$$

$$\frac{dA}{dt} = 5.0 \times 10^{19} \text{ cm}^2/\text{s}$$

81.2. Variación de Velocidad

Periastro: $r = 0.5 \text{ UA}$, $v = 60 \text{ km/s}$

Apoastro: $r = 2.0 \text{ UA}$, $v = 15 \text{ km/s}$

82. Importancia en Astrofísica

La Segunda Ley de Kepler es crucial para:

- Determinar masas estelares en sistemas binarios
- Estudiar la dinámica de sistemas exoplanetarios
- Verificar la conservación del momento angular
- Analizar la evolución orbital a largo plazo
- Comprender la transferencia de masa en binarias cercanas

83. Relación con Otras Leyes de Kepler

83.1. Primera Ley de Kepler

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

83.2. Tercera Ley de Kepler

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}a^3 \quad (172)$$

Table 6. Resumen de la Segunda Ley de Kepler

Concepto	Expresión Matemática
Momento angular	$\mathbf{J} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$
Conservación	$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$
Elemento de área	$dA = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} $
Velocidad areal	$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} $
Relación con J	$\frac{dA}{dt} = \frac{ \mathbf{J} }{2m}$
Velocidad orbital	$v = \frac{ \mathbf{J} }{mr}$

84. Conclusiones

La Segunda Ley de Kepler:

- Es una consecuencia directa de la conservación del momento angular
- Establece que la velocidad areal es constante
- Implica que la velocidad orbital varía inversamente con la distancia
- Proporciona una herramienta fundamental para la determinación de masas
- Es válida para cualquier fuerza central, no solo la gravedad newtoniana
- Constituye uno de los pilares de la mecánica celeste moderna

85. Tercera Ley de Kepler y su Generalización Newtoniana

La Tercera Ley de Kepler, también conocida como la **Ley de los Períodos**, establece una relación fundamental entre el período orbital y el tamaño de la órbita. Newton demostró que esta ley es consecuencia de su ley de gravitación universal y su segunda ley del movimiento.

86. Enunciado de la Tercera Ley de Kepler

86.1. Formulación Original

“El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.”

$$P^2 \propto a^3 \quad (173)$$

86.2. Generalización Newtoniana

$$(171) \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}a^3 \quad (174)$$

87. Deducción para Órbitas Circulares

87.1. Fuerza Gravitacional y Aceleración Centrípeta

Para una estrella de masa m_1 en órbita circular:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (\text{Fuerza gravitacional}) \quad (175)$$

$$a_c = \frac{v_1^2}{r_1} \quad (\text{Aceleración centrípeta}) \quad (176)$$

87.2. Aplicación de la Segunda Ley de Newton

$$F_g = m_1a_c \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1} \quad (177)$$

87.3. Relaciones Geométricas

$$r = r_1 + r_2 \quad (\text{Distancia entre estrellas}) \quad (178)$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r \quad (\text{Distancia al CM}) \quad (179)$$

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \quad (\text{Velocidad orbital}) \quad (180)$$

87.4. Deducción Completa

Sustituyendo en la ecuación (177):

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\frac{(2\pi r_1/P)^2}{r_1} \quad (181)$$

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{P^2} \quad (182)$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r_1 r^2}{Gm_2} \quad (183)$$

Usando $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r$:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}r \right) r^2 \quad (184)$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3 \quad (185)$$

88. Generalización para Órbitas Elípticas

88.1. Reemplazo del Radio por el Semieje Mayor

Para órbitas elípticas, se reemplaza r por el semieje mayor a :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (186)$$

88.2. Independencia de la Excentricidad

La Tercera Ley de Kepler es independiente de la excentricidad e de la órbita.

89. Formas Alternativas

89.1. En Términos de Velocidades Orbitales

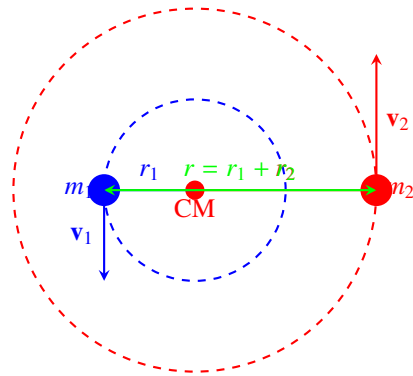
$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (187)$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{P} = \frac{2\pi a_2}{P} \quad (188)$$

89.2. En Términos de la Masa Reducida

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad \text{donde } M = m_1 + m_2 \quad (189)$$

90. Diagrama de un Sistema Binario Circular



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3$$

Fig. 7. Sistema binario circular mostrando las relaciones entre masas, distancias y velocidades.

91. Aplicaciones en Astrofísica

91.1. Determinación de Masas Estelares

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2} \quad (190)$$

91.2. Sistemas Binarios Resueltos

$$a = a_1 + a_2 \quad (191)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (192)$$

91.3. Sistemas Espectroscópicos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{K_2}{K_1} \quad (193)$$

92. Ejemplos Numéricos

92.1. Sistema Solar

Tierra: $P = 1$ año, $a = 1$ UA
 $P^2 = 1, a^3 = 1 \Rightarrow P^2 \propto a^3$

92.2. Sistema Binario Typical

$$m_1 + m_2 = 3.0 M_{\odot}$$

$$a = 2.0 \text{ UA}$$

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}} \approx 1.15 \text{ años}$$

93. Límites y Consideraciones

93.1. Sistemas Jerárquicos

Para sistemas múltiples, la ley se aplica a cada par orbital.

93.2. Efectos Relativistas

En campos gravitacionales intensos, se requieren correcciones relativistas.

93.3. Transferencia de Masa

En sistemas interactivos, la transferencia de masa afecta la órbita.

94. Importancia de la Tercera Ley

La Tercera Ley de Kepler es fundamental para:

- Determinar masas de estrellas y planetas
- Estudiar la dinámica de sistemas múltiples
- Confirmar la ley de gravitación universal
- Establecer la escala del sistema solar
- Investigar exoplanetas y sistemas planetarios

Table 7. Resumen de la Tercera Ley de Kepler

Forma	Ecuación
Original	$P^2 \propto a^3$
Newtoniana (circular)	$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} r^3$
Generalizada (elíptica)	$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$
Para determinar masas	$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}$
En unidades solares	$\frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} = \frac{a^3}{P^2}$

95. Unidades Solares

95.1. Forma Conveniente

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} = \frac{a^3}{P^2}$$

donde:

- a está en unidades astronómicas (UA)
- P está en años
- M_{\odot} es la masa solar

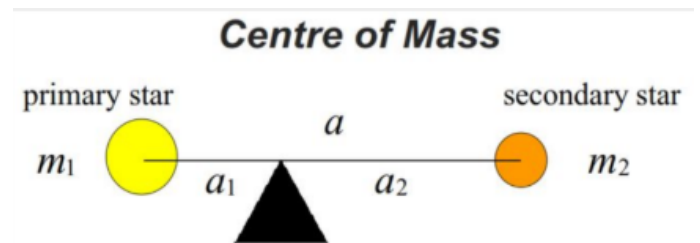
96. Conclusiones

La Tercera Ley de Kepler:

- Proporciona una relación fundamental entre período y tamaño orbital
- Permite determinar masas estelares con precisión
- Es válida para cualquier excentricidad orbital
- Constituye una verificación de la ley de gravitación universal
- Sigue siendo una herramienta esencial en astrofísica moderna

97. Determinación de Masas Dinámicas en Sistemas Binarios

La determinación de masas dinámicas es uno de los métodos más precisos para medir masas estelares en sistemas binarios. Se basa en el análisis de las órbitas y la aplicación de las leyes de Kepler y Newton.



98. Relación Fundamental del Centro de Masa

98.1. Ecuación del Centro de Masa

Para un sistema binario, la posición del centro de masa satisface:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad (195)$$

donde:

- m_1, m_2 : masas de las estrellas
- a_1, a_2 : semiejes mayores de las órbitas individuales

98.2. Relación de Masas

De la ecuación (195) se obtiene:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}} \quad (196)$$

99. Determinación de la Relación de Masas

99.1. Mediciones Astrométricas

Si se pueden medir los semiejes mayores a_1 y a_2 :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (197)$$

99.2. Mediciones Spectroscópicas

Si se pueden medir las amplitudes de velocidad radial v_{1r} y v_{2r} :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}} \quad (198)$$

100. Tercera Ley de Kepler Generalizada

100.1. Forma General

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (199)$$

donde $a = a_1 + a_2$ es el semieje mayor de la órbita relativa.

100.2. Relación con Velocidades Orbitales

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (200)$$

$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P} \quad (201)$$

$$v_1 + v_2 = \frac{2\pi a}{P} \quad (202)$$

101. Determinación de la Suma de Masas

101.1. Para Órbitas Circulares

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^3 \quad (203)$$

$$= \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} + v_{2r}}{\sin i} \right)^3 \quad (204)$$

donde i es la inclinación orbital.

102. Sistemas Binarios Spectroscópicos Doble Línea (SB2)

102.1. Determinación Completa de Masas

Para sistemas SB2 donde se miden ambas velocidades radiales:

$$m_1 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_2 \quad (205)$$

$$m_2 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_1 \quad (206)$$

102.2. Incertidumbre en la Inclinación

La inclinación orbital i introduce una incertidumbre:

$$m_{\text{verdadera}} = \frac{m_{\text{medida}}}{\sin^3 i} \quad (207)$$

103. Casos Especiales

103.1. Sistemas con Inclinación Conocida

Si la inclinación i se puede determinar (e.g., por eclipses):

$$m_1 = \frac{P}{2\pi G \sin^3 i} (v_1 + v_2)^2 v_2 \quad (208)$$

103.2. Sistemas de Una Línea (SB1)

Si solo una componente es visible:

$$m_2^3 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (m_1 + m_2)^2 v_{1r}^3 \quad (209)$$

104. Ejemplos Numéricos

104.1. Sistema Binario Typical SB2

$$P = 10 \text{ días}$$

$$v_{1r} = 100 \text{ km/s}$$

$$v_{2r} = 200 \text{ km/s}$$

$$i = 90^\circ$$

$$\sin i = 1$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{200}{100} = 2$$

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{300}{\sin i} \right)^3 \approx 8.0 M_\odot$$

$$m_1 = 5.33 M_\odot$$

$$m_2 = 2.67 M_\odot$$

105. Límites y Consideraciones

105.1. Incertidumbre en la Inclinación

$$\frac{\Delta m}{m} = 3 \frac{\Delta(\sin i)}{\sin i} \quad (210)$$

105.2. Órbitas Excéntricas

Para órbitas elípticas, se usan las velocidades orbitales equivalentes:

$$v = \frac{2\pi a}{P} \sqrt{1 - e^2} \quad (211)$$

106. Aplicaciones en Astrofísica

106.1. Calibración de Relaciones Masa-Luminosidad

$$L \propto m^\alpha \quad (212)$$

106.2. Estudio de Poblaciones Estelares

$$\phi(m) = \frac{dN}{dm} \quad (213)$$

106.3. Verificación de Modelos Evolutivos

$$m_{\text{dinámica}} \text{ vs } m_{\text{modelo}} \quad (214)$$

Table 8. Fórmulas para determinación de masas dinámicas

Parámetro	Fórmula
Relación de masas	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}}$
Suma de masas	$(m_1 + m_2) = \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} + v_{2r}}{\sin i} \right)^3$
Masa individual 1	$m_1 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_2$
Masa individual 2	$m_2 \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2 v_1$
En unidades solares	$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} + v_{2r}}{\sin i} \right)^3$

107. Conclusiones

La determinación de masas dinámicas:

- Proporciona las mediciones de masa más precisas en astrofísica
- Es fundamental para calibrar relaciones masa-luminosidad
- Permite verificar modelos de evolución estelar
- Es esencial para el estudio de objetos compactos
- Constituye la base de la escala de distancias cósmicas

108. Función de Masa en Sistemas Binarios Spectroscópicos de Una Línea (SB1)

En sistemas binarios donde solo una componente es visible espectroscópicamente (SB1), la **función de masa** proporciona una relación fundamental entre las masas de las componentes y los parámetros observables, permitiendo establecer límites inferiores para las masas.

109. Sistemas Binarios Spectroscópicos de Una Línea (SB1)

109.1. Características de Sistemas SB1

- Solo una estrella es visible espectroscópicamente
- Se mide solo una velocidad radial v_{1r}
- La componente secundaria puede ser débil o un objeto compacto
- Es común en sistemas con enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros

110. Deducción de la Función de Masa

110.1. Relaciones Fundamentales

Partimos de las relaciones conocidas:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}} \quad (215)$$

$$v_{2r} = \frac{m_1}{m_2} v_{1r} \quad (216)$$

110.2. Tercera Ley de Kepler

La tercera ley de Kepler generalizada:

$$(m_1 + m_2) = \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} + v_{2r}}{\sin i} \right)^3 \quad (217)$$

110.3. Sustitución de v_{2r}

Sustituyendo la ecuación (216) en (217):

$$(m_1 + m_2) = \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} + \frac{m_1}{m_2} v_{1r}}{\sin i} \right)^3 \quad (218)$$

$$= \frac{P}{2\pi G} \left(\frac{v_{1r} (1 + \frac{m_1}{m_2})}{\sin i} \right)^3 \quad (219)$$

$$= \frac{P}{2\pi G} \frac{v_{1r}^3}{\sin^3 i} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^3 \quad (220)$$

111. Función de Masa

111.1. Definición

La función de masa se define como:

$$f(m_1, m_2) = \frac{(m_2 \sin i)^3}{(m_1 + m_2)^2} \quad (221)$$

111.2. Expresión en Términos de Observables

$$f(m_1, m_2) = \frac{v_{1r}^3 P}{2\pi G} \quad (222)$$

111.3. Unidades y Significado

- Tiene unidades de masa
- Proporciona un límite inferior para m_2
- Es directamente medible a partir de observaciones
- $\sin i \leq 1 \Rightarrow f(m_1, m_2) \leq \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$

112. Interpretación Física

112.1. Límite Inferior para la Masa

$$m_2 \geq [f(m_1, m_2)(m_1 + m_2)^2]^{1/3} \quad (223)$$

112.2. Caso de Masa Dominante

Si $m_1 \gg m_2$:

$$f(m_1, m_2) \approx \frac{(m_2 \sin i)^3}{m_1^2} \quad (224)$$

112.3. Caso de Masas Similares

Si $m_1 \approx m_2$:

$$f(m_1, m_2) \approx \frac{(m_2 \sin i)^3}{4m_2^2} = \frac{m_2 \sin^3 i}{4} \quad (225)$$

113. Aplicaciones y Ejemplos

113.1. Determinación de Límites de Masa

$$m_2 \geq [f(m_1, m_2)]^{1/3} (m_1 + m_2)^{2/3} \quad (226)$$

113.2. Estimación de Masa Mínima

Asumiendo m_1 a partir de tipo espectral:

$$m_{2,\min} = \left[f(m_1, m_2)(m_1 + m_{2,\min})^2 \right]^{1/3}$$

114. Ejemplos Numéricos

114.1. Sistema con Agujero Negro Candidato

$$\begin{aligned} P &= 5.6 \text{ días} \\ v_{1r} &= 75 \text{ km/s} \\ f(m_1, m_2) &= 3.0 M_\odot \\ m_1 &\approx 20 M_\odot \quad (\text{supergigante}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{2,\min} &= \left[3.0 \times (20 + m_{2,\min})^2 \right]^{1/3} \\ &\approx 5.8 M_\odot > 3 M_\odot \quad (\text{posible agujero negro}) \end{aligned}$$

114.2. Sistema con Enana Blanca

$$\begin{aligned} P &= 0.5 \text{ días} \\ v_{1r} &= 150 \text{ km/s} \\ f(m_1, m_2) &= 0.1 M_\odot \\ m_1 &\approx 1.0 M_\odot \quad (\text{enana solar}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{2,\min} &= \left[0.1 \times (1.0 + m_{2,\min})^2 \right]^{1/3} \\ &\approx 0.5 M_\odot \quad (\text{enana blanca típica}) \end{aligned}$$

115. Límites y Consideraciones

115.1. Incertidumbre en la Inclinación

$$\frac{\Delta m_2}{m_2} = \frac{\Delta f}{3f} + \frac{2}{3} \frac{\Delta(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} + \frac{\Delta(\sin i)}{\sin i} \quad (228)$$

115.2. Órbitas Excéntricas

Para órbitas elípticas:

$$f(m_1, m_2) = \frac{v_{1r}^3 P (1 - e^2)^{3/2}}{2\pi G \sin^3 i} \quad (229)$$

116. Importancia en Astrofísica

116.1. Detección de Objetos Compactos

- Agujeros negros estelares
- Estrellas de neutrones
- Enanas blancas

116.2. Estudios de Población

$$\phi(m_2) = \frac{dN}{dm_2}$$

116.3. Verificación de Modelos

$$m_{2,\text{dinámica}} \stackrel{v.s.}{=} m_{2,\text{modelo}} \quad (231)$$

(227) **Table 9.** Resumen de la función de masa para sistemas SB1

Concepto	Expresión
Función de masa	$f(m_1, m_2) = \frac{v_{1r}^3 P}{2\pi G}$
Definición física	$f(m_1, m_2) = \frac{(m_2 \sin i)^3}{(m_1 + m_2)^2}$
Límite inferior	$m_2 \geq \left[f(m_1, m_2)(m_1 + m_2)^2 \right]^{1/3}$
Masa mínima	$m_{2,\min} = \left[f(m_1, m_2) \right]^{1/3} (m_1 + m_{2,\min})^{2/3}$
Unidades solares	$\frac{f(m_1, m_2)}{M_\odot} = 1.036 \times 10^{-7} \left(\frac{v_{1r}}{\text{km/s}} \right)^3 \left(\frac{P}{\text{días}} \right)$

117. Forma Práctica en Unidades Solares

117.1. Conversión de Unidades

$$\frac{f(m_1, m_2)}{M_\odot} = 1.036 \times 10^{-7} \left(\frac{v_{1r}}{\text{km/s}} \right)^3 \left(\frac{P}{\text{días}} \right) \quad (232)$$

117.2. Ejemplo de Cálculo

Para $v_{1r} = 100 \text{ km/s}$ y $P = 10 \text{ días}$:

$$f(m_1, m_2) = 1.036 \times 10^{-7} \times (100)^3 \times 10 = 10.36 M_\odot \quad (233)$$

118. Conclusiones

La función de masa en sistemas SB1:

- Proporciona un método crucial para determinar masas en sistemas donde una componente no es visible
- Establece límites inferiores robustos para las masas de componentes ocultas
- Es fundamental para la identificación de objetos compactos
- Permite estudios estadísticos de poblaciones binarias
- Constituye una herramienta esencial en astrofísica moderna

119. Función de Masa en Sistemas Binarios: Casos Circular y Excéntrico

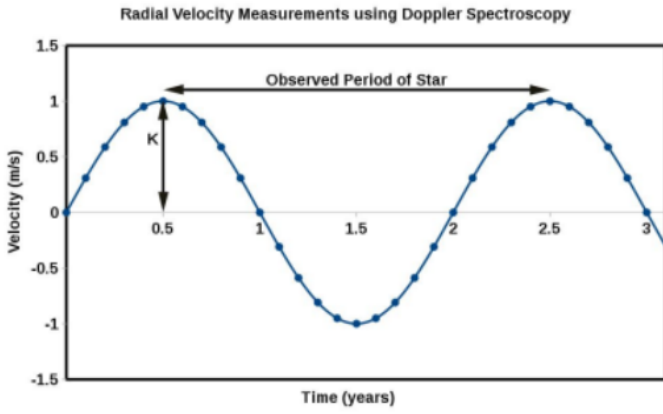
La función de masa es una herramienta fundamental en el estudio de sistemas binarios, particularmente cuando solo una componente es observable. Proporciona información crucial sobre las masas del sistema y permite establecer límites inferiores para la masa de componentes no visibles.

120. Notación y Definiciones

120.1. Amplitud de Velocidad Radial

La máxima velocidad radial se denota convencionalmente como K :

$$K \equiv v_{r,\max} \quad (234)$$



Usando la tercera ley de Kepler:

$$f = \frac{PK^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2} \quad (242)$$

$$= \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} \quad (243)$$

123. Aplicaciones y Casos de Estudio

123.1. Sistemas de Corto Período

Para períodos orbitales cortos ($P < 10$ días), often $e \approx 0$:

$$f \approx \frac{PK^3}{2\pi G} \quad (244)$$

123.2. Sistemas de Largo Período

Para períodos orbitales largos, la excentricidad puede ser significativa:

$$f = \frac{PK^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2} \quad (245)$$

124. Determinación de Parámetros Orbitales

124.1. Ajuste de Curvas de Velocidad Radial

$$v_r(t) = K [\cos(\theta(t) + \omega) + e \cos \omega] \quad (246)$$

$$\theta(t) : \text{anomalía verdadera} \quad (247)$$

$$\omega : \text{argumento del periastro} \quad (248)$$

124.2. Extracción de K y e

$$K = \frac{v_{r,\max} - v_{r,\min}}{2} \quad (249)$$

$$e = \frac{v_{r,\max} + v_{r,\min}}{v_{r,\max} - v_{r,\min}} \quad (250)$$

125. Ejemplos Numéricos

125.1. Sistema con Órbita Circular

$$P = 4.0 \text{ días}$$

$$K = 150 \text{ km/s}$$

$$e = 0.0$$

$$f = \frac{4 \times (150)^3}{2\pi G} \approx 0.25 M_\odot$$

125.2. Sistema con Órbita Excéntrica

$$P = 4.0 \text{ días}$$

$$K = 200 \text{ km/s} \quad (240)$$

$$e = 0.5$$

$$f = \frac{4 \times (200)^3}{2\pi G} (1 - 0.5^2)^{3/2} \approx 0.32 M_\odot \quad (241)$$

120.2. Función de Masa para Órbitas Circulares

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P_{\text{orb}} K^3}{2\pi G} \quad (235)$$

121. Interpretación de la Función de Masa

121.1. Caso con Inclinación Conocida

Si la inclinación orbital i es conocida:

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{f}{\sin^3 i} \quad (236)$$

121.2. Caso con Masa Primaria Estimada

Si M_1 se puede estimar (e.g., por ajuste espectral):

$$M_2 = [f(M_1 + M_2)^2]^{1/3} \csc i \quad (237)$$

121.3. Límite Inferior para Masa Secundaria

Si i no es conocida ($0 < \sin i \leq 1$):

$$M_2 \geq [f(M_1 + M_2)^2]^{1/3} \quad (238)$$

122. Función de Masa para Órbitas Excéntricas

122.1. Forma General

Para órbitas con excentricidad $e > 0$:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P_{\text{orb}} K^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2} \quad (239)$$

122.2. Deducción para Órbitas Excéntricas

Partiendo de la velocidad orbital en el periastro:

$$v_p = \frac{2\pi a}{P} \frac{1 + e}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (240)$$

$$K = v_p \sin i = \frac{2\pi a \sin i}{P} \frac{1 + e}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (241)$$

126. Límites Inferiores de Masa

126.1. Caso Conservador

$$M_{2,\min} = [f(M_1 + M_{2,\min})^2]^{1/3} \quad (251)$$

126.2. Aproximación Iterativa

$$M_{2,\min}^{(1)} = f^{1/3} M_1^{2/3} \quad (252)$$

$$M_{2,\min}^{(2)} = f^{1/3} (M_1 + M_{2,\min}^{(1)})^{2/3} \quad (253)$$

$$\vdots \quad (254)$$

127. Importancia en la Detección de Objetos Compactos

127.1. Criterios de Identificación

- $M_2 > 3 M_\odot$: Posible agujero negro
- $M_2 > 1.4 M_\odot$: Posible estrella de neutrones
- $M_2 > 0.5 M_\odot$: Posible enana blanca

127.2. Ejemplo: Cygnus X-1

$$f \approx 0.25 M_\odot$$

$$M_1 \approx 20 M_\odot$$

$$M_2 \geq 8 M_\odot > 3 M_\odot \quad (\text{Agujero negro confirmado})$$

Table 10. Resumen de funciones de masa para diferentes tipos orbitales

Tipo Orbital	Función de Masa	Observables
Circular ($e = 0$)	$\frac{PK^3}{2\pi G}$	P, K
Excéntrico ($e > 0$)	$\frac{PK^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2}$	P, K, e
Elíptico general	$\frac{PK^3}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2}$	P, K, e, ω

128. Forma en Unidades Solares

128.1. Conversión Práctica

$$\frac{f}{M_\odot} = 1.036 \times 10^{-7} \left(\frac{P}{\text{días}} \right) \left(\frac{K}{\text{km/s}} \right)^3 (1 - e^2)^{3/2} \quad (255)$$

128.2. Ejemplo de Cálculo Rápido

$$P = 10 \text{ días}$$

$$K = 100 \text{ km/s}$$

$$e = 0.3$$

$$f = 1.036 \times 10^{-7} \times 10 \times (100)^3 \times (1 - 0.09)^{3/2} \approx 9.2 M_\odot$$

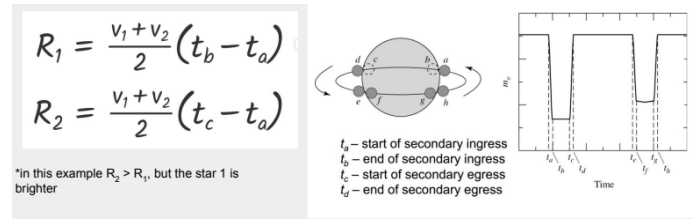
129. Conclusiones

La función de masa:

- Proporciona un método robusto para determinar masas en sistemas binarios
- Permite establecer límites inferiores para masas de componentes no visibles
- Es esencial para la identificación de objetos compactos
- Su forma general incluye correcciones por excentricidad orbital
- Constituye una herramienta fundamental en astrofísica moderna
- Es aplicable desde sistemas solares hasta binarias de agujeros negros

130. Determinación de Radios y Temperaturas Efectivas en Binarias Eclipsantes

Las binarias eclipsantes constituyen laboratorios únicos para la determinación precisa de parámetros estelares. El análisis de sus curvas de luz permite medir directamente radios y temperaturas efectivas con alta precisión.



131. Determinación de Radios Estelares

131.1. Principio Fundamental

La duración de los eclipses proporciona información directa sobre los tamaños relativos de las estrellas. Para órbitas circulares:

$$R_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} (t_b - t_a) \quad (256)$$

$$R_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} (t_c - t_a) \quad (257)$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades orbitales.

131.2. Definición de los Tiempos Característicos

- t_a : inicio del ingreso secundario
- t_b : fin del ingreso secundario
- t_c : inicio del egreso secundario
- t_d : fin del egreso secundario

132. Determinación de Temperaturas Efectivas

132.1. Principio de la Profundidad de los Eclipses

La relación entre las profundidades de los eclipses primario y secundario depende del cociente de temperaturas:

$$\frac{F_o - F_{\text{prim}}}{F_o - F_{\text{sec}}} = \left(\frac{T_{\text{eff},1}}{T_{\text{eff},2}} \right)^4 \quad (258)$$

132.2. Flujo fuera de Eclipse

$$F_o = F_1 + F_2 = \sigma(T_{\text{eff},1}^4 R_1^2 + T_{\text{eff},2}^4 R_2^2) \quad (259)$$

133. Deducción de las Fórmulas

133.1. Tiempos de Tránsito

Para una órbita circular, el tiempo de tránsito es:

$$\Delta t = \frac{2R}{v_{\text{orb}}} \quad (260)$$

donde $v_{\text{orb}} = v_1 + v_2$ es la velocidad orbital relativa.

133.2. Radios Estelares

Combinando con las velocidades orbitales:

$$R_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\Delta t_{12} \quad (261)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\Delta t_{34} \quad (262)$$

134. Análisis Detallado de la Curva de Luz

134.1. Contactos de los Eclipses

- **Primer contacto:** Inicio del eclipse
- **Segundo contacto:** Fin del ingreso, inicio de la totalidad
- **Tercer contacto:** Fin de la totalidad, inicio del egreso
- **Cuarto contacto:** Fin del eclipse

134.2. Formas de la Curva de Luz

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{t_c - t_a}{t_b - t_a} \quad (263)$$

135. Ejemplo Numérico

135.1. Parámetros Observados

$$t_b - t_a = 0.05 \text{ días}$$

$$t_c - t_a = 0.08 \text{ días}$$

$$v_1 + v_2 = 300 \text{ km/s}$$

$$F_o - F_{\text{prim}} = 0.3 \text{ mag}$$

$$F_o - F_{\text{sec}} = 0.1 \text{ mag}$$

135.2. Cálculo de Radios

$$R_1 = \frac{300 \times 86400}{2} \times 0.05 \approx 1.2 R_{\odot}$$

$$R_2 = \frac{300 \times 86400}{2} \times 0.08 \approx 1.9 R_{\odot}$$

135.3. Cálculo de Temperaturas

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{0.3}{0.1} = 3$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 3^{1/4} \approx 1.32$$

136. Correcciones por Geometría Orbital

136.1. Inclinación Orbital

Para inclinación $i < 90^\circ$:

$$R = \frac{v_1 + v_2}{2 \sin i} \Delta t \quad (264)$$

136.2. Excentricidad Orbital

Para órbitas elípticas:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi a}{P} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 \pm e \cos \omega} \quad (265)$$

137. Aplicaciones en Astrofísica

137.1. Calibración de Relaciones

$$R = f(T_{\text{eff}}, L) \quad (266)$$

137.2. Pruebas de Modelos Estelares

$$R_{\text{observado}} \text{ vs } R_{\text{modelo}} \quad (267)$$

138. Limitaciones y Consideraciones

138.1. Efectos de Limb Darkening

$$I(\mu) = I(0)(1 - u(1 - \mu)) \quad (268)$$

138.2. Reflexión y Elipsoidal

$$\Delta F_{\text{reflexión}} \propto \frac{R_2^2}{a^2} \quad (269)$$

Table 11. Parámetros determinables desde curvas de luz de binarias eclipsantes

Parámetro	Método de Determinación
R_1/R_2	Duración de los eclipses
$T_{\text{eff},1}/T_{\text{eff},2}$	Profundidad de los eclipses
i	Forma de la curva de luz
e	Asimetría de la curva
ω	Timing de los eclipses
$R_1 + R_2$	Duración total del eclipse
$a \sin i$	Combinación con velocidades radiales

139. Técnicas Avanzadas de Análisis

139.1. Modelado por Inversión

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{F_{\text{obs}} - F_{\text{model}}}{\sigma} \right)^2 \quad (270)$$

139.2. Métodos de Monte Carlo

$$P(\theta|D) \propto P(D|\theta)P(\theta) \quad (271)$$

140. Importancia en Cosmología

140.1. Calibración de Candelas Standard

$$M = f(P, \text{color}) \quad (272)$$

140.2. Determinación de Distancias

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (273)$$

141. Conclusiones

El estudio de binarias eclipsantes permite:

- Medir radios estelares con precisiones del 1-2%
- Determinar temperaturas efectivas de manera absoluta
- Calibrar relaciones fundamentales de astrofísica estelar
- Probar modelos de estructura y evolución estelar
- Establecer la escala de distancias cósmicas
- Detectar y caracterizar exoplanetas por tránsitos