Clase nº36

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

29 de Noviembre 2021

Objetivo de la clase

- Conocer y utilizar criterios de convergencia de series.

Series de términos positivos

Teorema 27: Criterio de D'Alembert o de la razón o del cuociente

Si

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \textit{convergente si} & \rho < 1, \\ \textit{divergente si} & \rho > 1, \\ \textit{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Series de términos positivos

Ejemplo 33

Determinar si la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}.$$

Series de términos positivos

Teorema 28: Criterio de la raíz o de Cauchy

Si

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \textit{convergente si} & \rho < 1, \\ \textit{divergente si} & \rho > 1, \\ \textit{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Series de términos positivos

Ejemplo 34

Determine si la siguiente serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n.$$

Series de términos positivos

Ejemplo 35

Determine si la siguiente serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}.$$

Series de términos alternados

Definición 29

Si a_n es positivo para cada n, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ se llama serie alternada.

Observación

Como el comportamiento de una serie no cambia si se modifica un número finito de términos, podemos tener series alternadas de la forma

$$\sum(-1)^n a_n \quad o \quad \sum(-1)^{n-1}a_n,$$

siendo $a_n > 0$. También, se puede considerar series alternadas donde el índice toma un valor inicial $n = n_0$.

Series de términos alternados

Teorema 30: Criterio de Leibniz

Si la sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a cero, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge. Además, si S denota la suma y S_n es su enésima suma parcial, se tiene la desigualdad $0 < (-1)^n(S - S_n) < a_{n+1}$.

Series de términos positivos

Ejemplo 36

Determine si la siguiente serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Convergencia absoluta y condicional de series

Definición 31

- Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge absolutamente** si la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$
converge.

- Si una serie converge y la serie de sus valores absolutos diverge, diremos que es **condicionalmente convergente.**

Ejemplo 37

Del ejemplo 36 tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente. Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente. (ver ejemplo 27)

Ejemplo 37

Luego,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es condicionalmente convergente

Ejemplo 38

Por criterio de Leibniz la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

es convergente. Además, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente (ver ejemplo 30).

Ejemplo 38

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

converge absolutamente.

Convergencia absoluta y condicional de series

Ejemplo 39

La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \textit{es} \quad \begin{cases} \textit{absolutamente convergente si} & p > 1 \\ \textit{condicionalmente convergente si} & 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Convergencia absoluta y condicional de series

Teorema 32

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Convergencia absoluta y condicional de series

Observación

Para demostrar que una serie converge absolutamente podemos utilizar los criterios que se vieron para la convergencia de series de términos positivos. Además se puede ocupar otros criterios (investigar):

- Criterio de Abel.
- Criterio de Dirichlet.

Convergencia absoluta y condicional de series

Observación

- La convergencia absoluta de una serie implica la convergencia a la misma suma de cualquier arreglo entre los términos de la serie.
- Si la serie sólo converge condicionalmente, siempre existe un arreglo de sus términos de modo que la suma del arreglo converge a un número dado a priori (Investigar Teorema de Riemann).

Series de funciones

Series de funciones

Definición 33

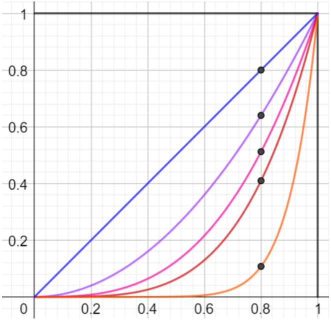
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente o simplemente** a la función f si para cada $x \in [a, b]$ y cada $\epsilon > 0$, Existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = N_0(\epsilon, x)$, tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para } n \geq N_0(\epsilon, x).$$

Series de funciones

Ejemplo 40

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde cada $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = x^n$. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.
Mostrar que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función f.



Ejercicio propuesto

Utilizando los criterios vistos, determine si la siguiente serie es convergente o divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{n})}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(n^3+1)^{5/3}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Ejercicio propuesto

¿Se puede determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

utilizando el Criterio de D'Alembert?

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.