Límite de funciones

Definición

Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ y a un puntos de acumulación de D. Se dice que $L \in \mathbb{R}^m$ es el límite de f en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

donde para $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $a = (a_1, \cdots, a_n)$,

$$\|x - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

y

$$\|f(x) - L\| = \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + ((f_m(x) - L_m)^2}$$

Este límite se escribe de forma estándar:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Observación

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función tal que $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ y donde $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las función componente de f, luego para $a \in D$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

$$= \left(\lim_{x \to a} f_1(x), \cdots, \lim_{x \to a} f_m(x),\right) = (L_1, \cdots, L_m) = L$$

Por tanto, f tiene límite en a si y sólo si cada f_i lo tiene, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ sí y sólo si } \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i \text{ ; } \forall 1 \leq i \leq m$$

Ejemplo 1

La función

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x,-3y,x-y)$$

puede escribirse como $f = (f_1, f_2, f_3)$, lo cual verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(3,-2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(3,-2)} (2x,-3y,x-y)$$
$$= \left(\lim_{(x,y)\to(3,-2)} 2x\,, \lim_{(x,y)\to(3,-2)} -3y\,, \lim_{(x,y)\to(3,-2)} x-y\right)$$
$$= (6,6,5)$$

En definitiva, el límite de una función se reduce al cálculo en cada una de sus componentes. Por tanto, el estudio de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una consecuencia del correspondiente estudio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Así que nos centraremos por ahora en el estudio de límites de funciones escalares.

Veremos a continuación la definición de límite para una función escalar de dos variables.

En efecto, sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función tal que $z = f(x,y)$, luego la definición de límites en $\mathbb{R}^2$ es la siguiente:

Definición $(\boldsymbol{\varepsilon - \delta})$

El número real L es el límite de una función $f(x,y)$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que depende de ε tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

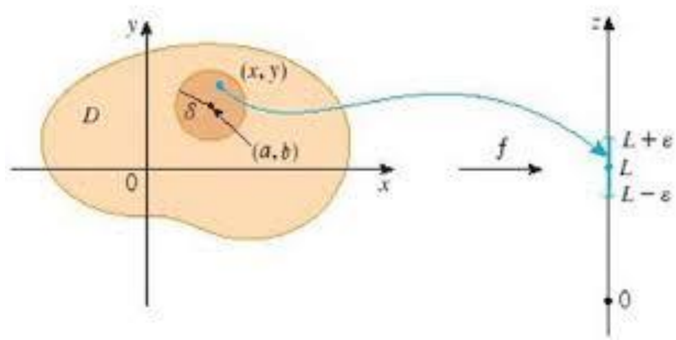
Y se denota

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

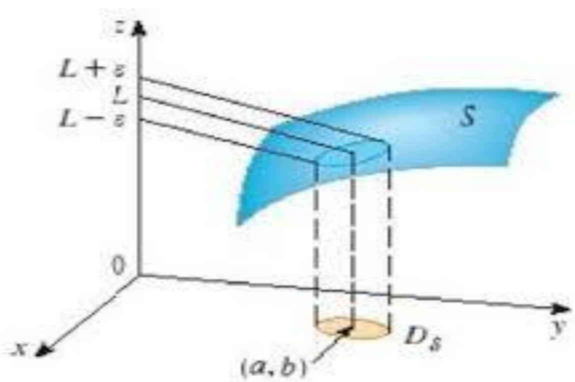
Nótese que la función está definida en una bola centrada en el punto (a,b) donde este punto de acumulación de D no necesariamente está en la bola.

La definición dada se ilustra en la siguiente figura:

En el plano



En el espacio



Nótese que $L-\varepsilon < f(x,y) < L+\varepsilon$ siempre que (x,y) pertenezca a la bola de centro (a,b) donde (a,b) no necesariamente está en $B((a,b),\delta)$.

Ejemplo

Demostrar utilizando la definición $\varepsilon - \delta$ que se cumple la siguiente afirmación:

$$\lim_{(x,y)\to(2,6)} (4x + y) = 14$$

Solución

Hay que probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que

$|(4x + y) - 14| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} < \delta$

Debemos determinar un δ en términos de ε ; para ello consideramos la expresión $|(4x + y) - 14|$ y la escribimos en términos de $|x - 2|$

y $|y - 6|$; en efecto

$$|(4x + y) - 14| = |4x + y - 8 - 6| = |4(x - 2) + (y - 6)|$$
$$\leq 4|x - 2| + |y - 6| \cdots (1)$$

Pero

$$|x - 2| \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} < \delta \Rightarrow |x - 2| < \delta \cdots (2)$$

y

$$|y - 6| \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} < \delta \Rightarrow |y - 6| < \delta \cdots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) tenemos que

$$|(4x + y) - 14| < 4\delta + \delta = 5\delta$$

Luego puede elegirse $5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Una vez conocida la dependencia entre δ y ε, demostraremos lo pedido a partir de la definición. Debe probarse que,

$|(4x+y)-14|<\varepsilon$ siempre que $0<\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}<\delta$

Para ello tomando $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ resulta

$0<\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}<\delta \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}<\dfrac{\varepsilon}{5}$

$$\Rightarrow 5\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}<\varepsilon$$

Considerando (2) y (3) resulta $4|x-2|+|y-6|<5\delta=\varepsilon$ pero por (1) se tiene

$$|(4x+y)-14|\le 4|x-2|+|y-6|<\varepsilon.$$

Luego esto demuestra que el límite de la función $f(x,y)=4x+y$ es 14 para $(x,y)\to(2,6)$.

Propiedades de límites de funciones

Se mantiene las propiedades de límites vistas en el cálculo de una variable, estas son:

I.- Considerando que

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)=L_1 \text{ y } \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} g(x,y)=L_2$$

entonces se cumplen

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)}(f(x,y)+g(x,y))=L_1+L_2$
2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)}(f(x,y)-g(x,y))=L_1-L_2$
3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)}(k\,f(x,y))=kL_1$
4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)}(f(x,y)g(x,y))=L_1L_2$

5) $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} \left(\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$

6) $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} (f(x,y)^{\frac{p}{q}} = L_1^{\frac{p}{q}}$ si p y q son enteros y $L_1^{\frac{p}{q}}$ es un número real.

II.- Si $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ definidas en una bola centrada en (x_1, y_1) y para las funciones g y h

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} g(x,y) = L \text{ y } \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} h(x,y) = L$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L$$

III.- Si $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = 0$ y $g(x,y)$ es una función acotada entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)\, g(x,y) = 0$$

IV.- $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} |f(x,y)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = 0$

V.- $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} (f(x,y) - L) = 0$

VI.- $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_1 + h, y_1 + k) = L$

En esta última propiedad, si hacemos una simple traslación cualquier límite en un punto $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ se puede convertir en un límite en el origen.

En efecto, si $(x,y) \to (x_1, y_1)$ se consideran

$$h = x - x_1 \text{ y } k = y - y_1 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_1+h, y_1+k) = L$$

Observación

Las propiedades de límites dadas se pueden extender a límites de funciones de tres o más variables.

Ejemplo 1

Si $f(x,y) = x + y^2$ entonces haciendo $h = x - 1$ y $k = y - 3$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,3)} x + y^2$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} (h+1) + (k+3)^2$$

$$= 1 + 3^2 = 10$$

Ejemplo 2

Evaluar

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{5xy - x^2}{x^6 + y^2}$$

Solución

Aplicando las propiedades, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{5xy - x^2}{x^6 + y^2} = \frac{5(1)(3) - 1^2}{1^6 + 3^2}$$

$$= \frac{15-1}{1+9} = \frac{15-1}{10} = \frac{14}{10}$$

Ejemplo 3

Evaluar

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)}{(x-1)-(y-1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right) = 0$$

Ejemplo 4

Evaluar

$$\lim_{(x,y)\to(5,0)} (x-5)\left(\frac{sen\ y}{y}\right)$$

Solución

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{(x,y)\to(5,0)} \frac{sen\ y}{y} = 1 \Leftrightarrow \lim_{y\to 0} \frac{sen\ y}{y} = 1$$

Por tanto, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(5,0)}(x-5)\left(\frac{sen\ y}{y}\right)=\lim_{(x,y)\to(5,0)}(x-5)\lim_{(x,y)\to(5,0)}\frac{sen\ y}{y}$$

$$=(5-5)(1)=0(1)$$

$$=0$$

Otra forma:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ y $cos\left(\frac{3}{x}\right)$ es una función acotada por -1 y 1 por consiguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xycos\left(\frac{3}{x}\right)=0$$

Ejemplo 5

Evaluar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xycos\left(\frac{3}{x}\right)$

Solución

Siendo $-1 \leq cos\left(\frac{3}{x}\right) \leq 1$, multiplicamos por xy, se tiene que

$$-xy \leq xy\ cos\left(\frac{3}{x}\right) \leq xy\ .$$

Llamando $g(x,y)=-xy$; $h(x,y)=xy$ y $f(x,y)=xy\ cos\left(\frac{3}{x}\right)$

resulta que

$$g(x,y)\leq f(x,y)\leq h(x,y)$$

Además

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} h(x,y)=0$$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

Ejemplo 6

Evaluar

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Solución

Como $x^2 + y^2 \geq x^2$ entonces

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Luego

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^2 y|}{x^2} = \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y|$$

Como

$$0 \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leq |y|$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Ejemplo 7

Evaluar : $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^6}$

Solución

Sean $u = x - 1$ y $v = y + 1 \Rightarrow$ si $(x, y) \to (1, -1) \Rightarrow (u, v) \to (0,0)$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^6}$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2 v}{u^2+v^6}$$

Ahora

$$0 \leq \left|\frac{u^2 v}{u^2+v^6}\right| = \frac{|u^2 v|}{u^2+v^6} \leq \frac{u^2|v|}{u^2} = |v|$$

Como

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} 0 = 0 = \lim_{(u,v)\to(0,0)} |v|$$

entonces

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2 v}{u^2+v^6} = 0$$

Por tanto

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^6} = 0$$

Ejemplo 8

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^4+y^2+z^2}$$

Solución

$$0 \leq \left|\frac{xy^2z}{x^4+y^2+z^2}\right| \leq \frac{|x|y^2|z|}{y^2} = |x||z|$$

Luego

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 = 0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x|\,|z|$$

Dado que los límites de las funciones extremas convergen a 0 la del medio converge al mismo límite, entonces

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2+z^2} = 0$$

Ejemplo 9

Determinar:

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{tg(2x-3y)}{sen\left(x-\frac{3}{2}y\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \lim_{u\to 0} \frac{sen\,u}{u} \quad (con\; u = x^2 - y^2\;)$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

Método 1:

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{tg(2x-3y)}{sen\left(x-\frac{3}{2}y\right)} = \lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\frac{sen(2x-3y)}{\cos(2x-3y)}}{sen\left(x-\frac{3}{2}y\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\frac{sen\,(2x-3y)}{2x-3y}\;(2x-3y)\frac{1}{\cos(2x-3y)}}{\frac{sen\,\left(x-\frac{3}{2}y\right)}{\left(x-\frac{3}{2}y\right)}\left(x-\frac{3}{2}y\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\dfrac{sen\,(2x-3y)}{2x-3y}(2)\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)\dfrac{1}{\cos(2x-3y)}}{\dfrac{sen\,\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)}\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)}$$

$$= 2\,\frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{sen\,(2x-3y)}{2x-3y} \lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{1}{\cos(2x-3y)}}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{sen\,\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)}}$$

$$= 2\,\frac{(1)(1)}{(1)} = 2$$

Método 2:

O bien sea

$$u = x - \frac{3}{2}y \Rightarrow 2u = 2x - 3y$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{tg\ 2u}{sen\ u} = \lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{sen\ 2u}{\cos 2u}}{sen\ u} = \lim_{u\to 0} \frac{sen\ 2u}{sen\ u}\frac{1}{\cos 2u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{2sen\ u\cos u}{sen\ u} \lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos 2u}$$

$$= 2\lim_{u\to 0} \cos u\ \frac{1}{\cos 0} = 2\,(1)\frac{1}{(1)} = 2$$