Mecánica Intermedia (LFIS 312)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva   e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 7

---

1. Un aro delgado de radio R y masa M oscila en su propio plano con un punto del aro fijo. Unido al aro hay una masa puntual M obligada a moverse sin fricción a lo largo del aro. El sistema está en un campo gravitacional $\vec{g}$. Considere sólo pequeñas oscilaciones.

   (a) Muestre que las frecuencias de modos normales son

   $$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{R}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{R}} \tag{1}$$

   (b) Encuentre los autovectores de modos normales. Dibuje su movimiento.

   (c) Construya la matriz modal.

   (d) Encuentre las coordenadas normales y muestre que ellas diagonalizan el Lagrangiano.

2. Considere las oscilaciones longitudinales, i.e. a lo largo del eje, del sistema mecánico mostrado en la figura 1, asumiendo iguales las dos masas a m y los tres resortes iguales a k. Trabaje desde primeros principios.

   (a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler–Lagrange.

   (b) ¿Cuáles son las frecuencias y autovectores de modos normales? Describa los movimientos.

   (c) Construya la matriz modal y las coordenadas normales, y escriba el Lagrangiano en forma diagonal.

   (d) Suponga que la masa de la izquierda está desplazada una distancia α desde el equilibrio hacia la derecha. Calcule el movimiento subsecuente.

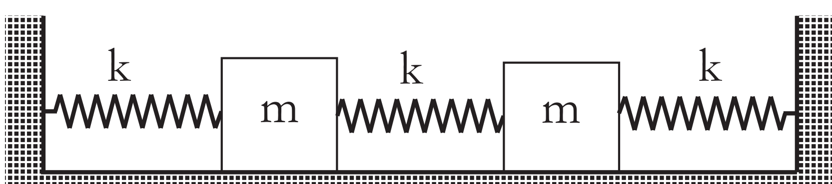

Figure 1: Esquema del problema 2.

3. Un péndulo doble con longitudes iguales ℓ y masas diferentes m_1 y m_2 realiza pequeñas oscilaciones en un plano. Introduzca los desplazamientos transversales de la primera partícula desde la vertical η_1, y de la segunda partícula desde la primera partícula η_2.

   (a) Muestre que el Lagrangiano viene dado por

   $$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2)^2 - \frac{g}{2\ell} \left[(m_1 + m_2) \eta_1^2 + m_2 \eta_2^2 \right] \tag{2}$$

   (b) Derive las frecuencias de modos normales

   $$\omega_\pm^2 = \frac{g/\ell}{(1 \pm \gamma)}, \qquad \text{donde} \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}. \tag{3}$$

   (c) Construya los autovectores de modos normales y describa los movimientos. Muestre que estos reproducen el comportamiento esperado para grandes y pequeños valores de m_1/m_2.

   (d) Verifique que la matriz modal tiene la forma

   $$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{bmatrix} (1-\gamma)^{1/2} & -(1-\gamma)^{1/2} \\ \gamma^{-1}(1-\gamma)^{1/2} & \gamma^{-1}(1-\gamma)^{1/2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

   y demuestre explícitamente que $\mathcal{A}$ diagonaliza las matrices $\overline{m}$ y $\overline{v}$.

   (e) Construya las coordenadas normales.

   (f) Asuma que $m_2 \ll m_1$. Si la masa superior es desplazada ligeramente desde la vertical y luego se suelta, muestre que el movimiento subsecuente es tal que a intervalos regulares un péndulo es estacionario y el otro oscila con la máxima amplitud.

4. Una partícula con masa m desliza sin fricción alrededor de la circunferencia de un aro de alambre circular de radio a. El aro se coloca en posición vertical en un campo gravitatorio uniforme y gira alrededor del diámetro vertical con velocidad angular uniforme Ω (compare con el problema 1)

   (a) Construya el Lagrangiano, usando como coordenada generalizada el desplazamiento angular θ a lo largo del aro medido desde la vertical hacia abajo. Derive la ecuación diferencial para el movimiento y construya la correspondiente primera integral.

   (b) Usando las ecuaciones de movimiento, obtenga todas las posiciones de equilibrio dinámico y clasifíquelos como estables o inestables. Para aquellas configuraciones que son estables, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a esa posición. Discuta los casos límites $\Omega^2 \ll g/a$ y $\Omega^2 \gg g/a$.

5. Una masa puntual se mueve sin fricción sobre el interior de una superficie de revolución $z = f(r)$, cuyo eje de simetría está a lo largo de un campo gravitacional $-g\,\widehat{k}$

   (a) Encuentre la condición para una órbita circular estacionaria de radio r_0 y muestre que ésta es estable o inestable bajo pequeños impulsos a lo largo de una superficie transversal a la dirección del movimiento de acuerdo a que si $3f'(r_0) + r_0\, f''(r_0)$ es positivo o negativo. Para una órbita estable, encuentre la frecuencia ω de pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio.

   (b) Aplique la teoría precedente a cada uno de los perfiles (i) $z = -\sqrt{R^2 - r^2}$, (ii) $z = \alpha\, R$ y (iii) $z = \alpha\,[1 - \cos(\pi r/R)]$, dibujando la superficie de revolución para $r < R$. Relacione la velocidad angular Ω a r_0 y determine la razón ω^2/Ω^2. Indíque sobre el dibujo la región sobre la cual el movimiento es estable.

6. Una partícula se mueve en una órbita circular bajo la influencia de un potencial central atractivo $V(r)$.

   (a) Expanda el Lagrangiano a segundo orden en torno a las coordenas de equilibrio $r = r_0$ y $\phi = \Omega\, t$, donde r_0 es el radio de la órbita circular y Ω es la frecuencia angular de equilibrio. Encuentre las condiciones para la estabilidad.

   (b) Muestre cómo el mismo criterio puede ser obtenido directamente a partir del potencial unidimensional equivalente.

   (c) Si $V(r) = -\lambda\, r^{-n}$, muestre que las oscilaciones son estables para $n < 2$.

   (d) ¿Cuál es el criterio para la estabilidad si el potencial es $V(r) = -(\lambda/r)\, e^{-r/a}$?

7. Suponga que el potencial gravitacional del sol tiene la forma

$$V(r) = -\frac{GM_\odot\, m}{r} + \delta V, \tag{5}$$

   donde δV es una pequeña perturbación del potencial Newtoniano. Muestre que el perihelio de una órbita casi circular con radio medio r_0 precesa con un ángulo

$$-\left(\frac{\pi\, r_0}{GM_\odot\, m}\right)\left[2\, r_0\, \delta V'(r_0) + r_0^2\, \delta V''(r_0)\right], \tag{6}$$

   por ciclo, omitiendo términos de orden $(\delta V)^2$ y superiores. Evalúe esta cantidad para el caso específico $\delta V = -\alpha\, m\, (G\, M_\odot/rc)^2$.

8. Cuatro varillas sin masa de longitud L están articuladas entre sí en sus extremos para formar un rombo. Una partícula de masa M está unida en cada articulación. Las esquinas opuestas del rombo están unidas por resortes, cada uno con una constante de resorte k. En la configuración de equilibrio (cuadrado), los resortes están sin estirar. El movimiento está confinado a un plano, y las partículas sólo se mueven a lo largo de la diagonal del rombo. Introduzca las coordenadas generalizadas adecuadas y encuentre el Lagrangiano del sistema. Deduzca las ecuaciones de movimiento y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a la configuarción de equilibrio.

9. Una molécula consiste de tres átomos iguales localizados en los vértices de un triángulo rectángulo isóceles, con constantes de resortes iguales a k entre cada par de átomos. Derive la ecuación secular de autovalores para el movimiento en el plano y muestre que ésta tiene tres modos degenerados para $\omega^2 = 0$. ¿Cuál es su interpretación física? Encuentre las otras tres autofrecuencias distintas de cero.

10. Para discutir el caso donde la ecuación secular de autovalores tiene raices múltiples y los correspondientes autovalores son *degenerados* considere dos grados de libertad con

$$\overline{v} \equiv \begin{bmatrix} v & v_{12} \\ v_{12} & v \end{bmatrix} \qquad \overline{m} \equiv \begin{bmatrix} m & m_{12} \\ m_{12} & m \end{bmatrix} \tag{7}$$

   (a) Encuentre los autovalores y autovectores. Muestre que en el límite $(m_{12}, v_{12}) \to 0$ o $(m, v) \to 0$ los autovalores se vuelven degenerados con $\omega_1^2 = \omega_2^2$.

   (b) Muestre que en estos límites se pierde información concerniente a los correspondientes autovectores y que uno siempre puede encontrar dos soluciones *linealmente independientes* de la forma $z_\sigma^{(s)} = e^{i\,\phi_s}\, \overline{\rho}_\sigma^{(s)}$ con $s = 1, 2$ y $\overline{\rho}_\sigma^{(s)}$ real.

(c) Muestre que estas soluciones pueden ser ortonormales de acuerdo a la ecuación

$$\sum_{\lambda} \sum_{\sigma} \rho_{\sigma}^{(t)} \, m_{\sigma\lambda} \, \rho_{\lambda}^{(s)} = \delta_{st}$$

escogiendo

$$\rho_{\sigma}^{(1)} \equiv C_1 \, \overline{\rho}_{\sigma}^{(1)}, \qquad \text{y} \qquad \rho_{\sigma}^{(2)} \equiv C_2 \left(\overline{\rho}_{\sigma}^{(2)} - \alpha \, \overline{\rho}_{\sigma}^{(1)} \right), \tag{8}$$

con

$$\alpha \equiv \frac{\sum_{\lambda} \sum_{\sigma} \overline{\rho}_{\sigma}^{(2)} \, m_{\sigma\lambda} \, \overline{\rho}_{\lambda}^{(1)}}{\sum_{\lambda} \sum_{\sigma} \overline{\rho}_{\sigma}^{(1)} \, m_{\sigma\lambda} \, \overline{\rho}_{\lambda}^{(1)}} \tag{9}$$

¿Qué son C_1 y C_2?

11. Una masa m es libre para deslizarse en una mesa sin fricción y está conectada, a través de una cuerda que pasa por un agujero en la mesa, a una masa M que cuelga de ella, como es mostrado en el panel izquierdo de la Fig. 2. Suponga que M se mueve sólo en la línea vertical, y que la cuerda siempre se mantiene tensa.

    (a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para las variables r y θ mostradas en el panel izquierdo de la figura 2.

    (b) ¿Bajo qué condiciones m tendrá un movimiento circular?

    (c) ¿Cuál es la frecuencia de pequeñas oscilaciones (en la variable r) en torno a este movimiento circular?

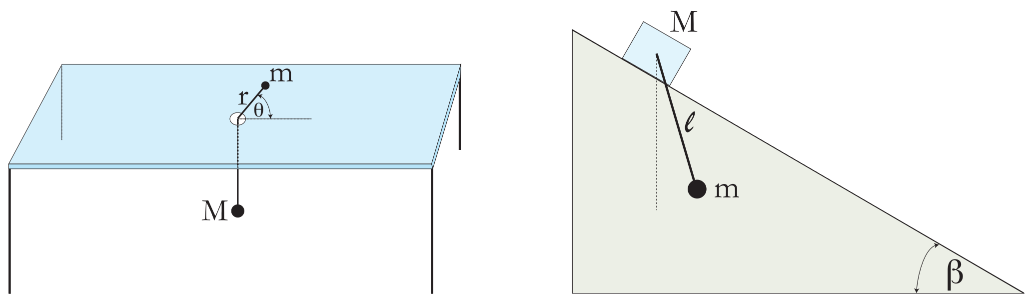

Figure 2: Panel Izquierdo: esquema del problema 11; Panel Derecho: esquema del problema 12.

12. Una masa M es libre de deslizarse sin fricción por un plano inclinado de ángulo β. Un péndulo de largo ℓ y masa m cuelga de M, como es mostrado en el panel derecho de la figura 2. Encuentre las ecuaciones de movimiento. Para pequeñas oscilaciones, encuentre las frecuencias y los modos normales. Construya la matriz modal y encuentre las coordenadas normales.

13. Un péndulo simple está unido a un soporte que se mueve horizontalmente en función del tiempo, ver figura 3.

    (a) Escriba el Lagrangiano del sistema en términos de las coordenadas generalizadas θ e y, donde θ es el desplazamiento angular desde el equilibrio e $y(t)$ es la posición horizontal del soporte.

    (b) Encuentre la ecuación de movimiento para θ.

    (c) Para pequeños desplazamientos angulares y un movimiento sinusoidal del soporte

    $$y(t) = y_0 \, \cos \omega t.$$

    Encuentre la solución de estado estacionario a la ecuación de movimiento.

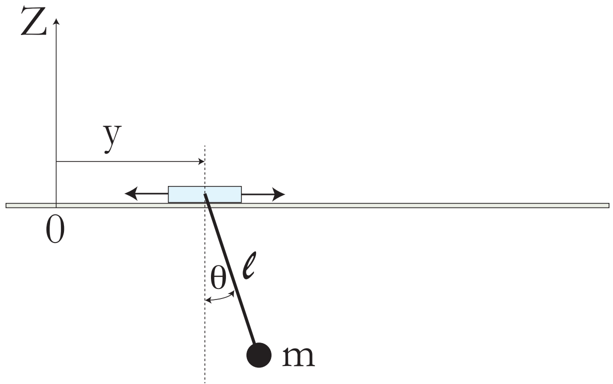

Figure 3: Esquema del problema 13.

14. Una partícula en un potencial armónico isotrópico tridimensional tiene una frecuencia angular natural ω_0. Encuentre sus frecuencias de vibración si ésta está cargada y está sujeta simultáneamente a un campo eléctrico uniforme y a un campo magnético uniforme. Discuta su resultado en los límites de campo fuerte y campo débil.

15. Tres partículas de masas iguales m se mueven sin fricción en una dimensión. Cada par de partículas están unidas por resortes iguales con constante de resorte k. Encuentre los modos normales de oscilación y sus correspondientes frecuencias. Construya la matriz modal y las coordenadas normales.

16. La energía potencial de dos átomos en una molécula puede aproximarse por la función de *Morse*,
$$U(r) = A\left[\left(e^{\frac{R-r}{S}}\right)^2 - 1\right], \tag{10}$$
donde r es la distancia entre los dos átomos y A, R y S son constantes positivas con $R \gg S$.
   (a) Dibuje el potencial para $0 < r < \infty$ con distintos valores de A, R y S.
   (b) Encuentre la separación de equilibrio r_0 para la cual $U(r)$ es un mínimo.
   (c) Escriba $r = r_0 + x$, tal que x es el desplazamiento desde el equlibrio, y muestre que, para pequeños desplazamientos, U tiene la forma aproximada $U = U_0 + \frac{1}{2}kx^2$. Esto es, se aplica la ley de Hooke. ¿Cuánto vale la constante de fuerza k?.

17. La fuerza sobre una masa m que está en la posición x de su eje X es $F(x) = -F_0 \sinh \alpha x$, donde F_0 y α son constantes positivas. Encuentre la energía potencial $U(x)$, y dé una forma aproximada de $U(x)$ apropiada para las oscilaciones pequeñas. ¿Cuál es la frecuencia angular de tales oscilaciones?.

18. Considere un oscilador armónico simple con período T. Denotemos por $\langle f\rangle$ al valor medio de la variable $f(t)$, promediada sobre un ciclo completo:
$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{11}$$
Pruebe que $\langle T\rangle = \langle U\rangle = \frac{1}{2}E$ donde E es la energía total del oscilador. [*Sugerencia:* Comience por probar las más generales y útiles relaciones $\langle\sin^2(\omega t-\delta)\rangle = \langle\cos^2(\omega t-\delta)\rangle = \frac{1}{2}$. Explique por qué estos dos resultados resultan obvios, y luego pruebelas usando identidades trigonométricas para reescribir $\sin^2\theta$ y $\cos^2\theta$ en términos de $\cos 2\theta$.]

19. La energía potencial de una masa m a una distancia r del origen es

$$U(r) = U_0 \left(\frac{r}{R} + \lambda^2 \frac{R}{r} \right), \tag{12}$$

para $0 < r < \infty$, con U_0, R y λ todas constantes positivas. Encuentre la posición de equilibrio r_0. Sea x la distancia desde la posición de equilibrio, muestre que, para x pequeños, la energía potencial tiene la forma $U = \text{const} + \frac{1}{2}kx^2$. ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones pequeñas?.

20. Una barra uniforme de longitud ℓ y masa m está suspendida por dos resortes iguales de longitud natural L y constante de resorte k, según se indica en la figura 4. Encuentre los modos normales de oscilación en el plano.

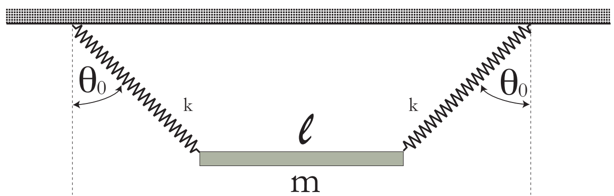

Figure 4: Esquema del problema 20.