Erick C. Pastén
Ondas y óptica
July 22, 2024

Prueba Recuperativa. Nivel Difícil

Question 1. Utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$$

Derive la ecuación de una onda electromagnética en un medio óhmico conductor de conductividad σ, permitividad ϵ y permeabilidad μ a partir de las ecuaciones de Maxwell. Muestre que la intensidad de una onda electromagnética en un conductor decrecerá de forma exponencial con la distancia. Recuerde que un material óhmico sigue la relación:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente eléctrica y $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico.

Solución: Las ecuaciones de Maxwell para un conductor óhmico son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Tomando el rotor de la ley de faraday:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

Por otro lado, usando la ley de ampere:

$$\nabla \times (\nabla \times -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Tenemos entonces:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Si proponemos una solución de la forma $\mathbf{E} \propto e^{i(kx-\omega t)}$, obtenemos la relación de dispersión:

$$k^2 = \mu\sigma\omega i + \mu\epsilon\omega^2$$

De donde se deriva que $k = k_R + ik_I$ es un número complejo. Si reemplazamos k en nuestra solución, la onda puede ser escrita como:

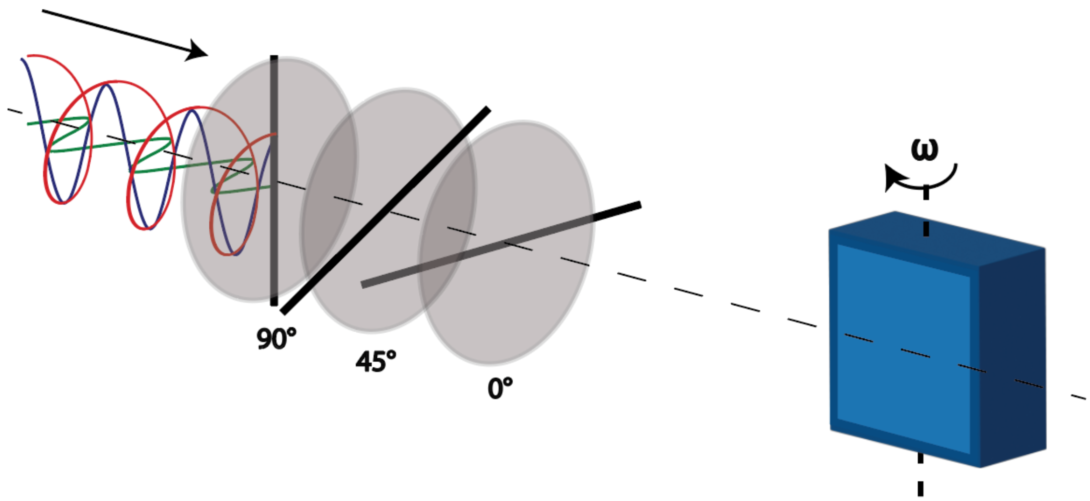
$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{-k_I x} e^{i(k_R x - \omega t)}$$

De donde se obtiene que la intensidad decae de forma exponencial con la distancia como:

$$I \propto |\mathbf{E}|^2 \propto e^{-2k_I x}$$

Question 2. Una onda circularmente polarizada viaja por el vacío e ingresa a un sistema compuesto por 3 polarizadores con ángulos de 90°, 45° y 0° con respecto al plano horizontal. Al salir del sistema de polarizadores, la onda llega al centro de un material de índice de refracción n en el instante $t = 0$. En ese mismo instante, el material comienza a girar con una velocidad angular constante ω (Ver Figura). Utilizando las fórmulas de Fresnel para los coeficientes reflexión de una onda s y una p polarizada:

$$r_s = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)}$$
$$r_p = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)}$$



Determine el instante $t \in]0, \frac{2\pi}{\omega}[$ para el cual la onda reflejada por la superficie del material se anula.

Solución: La onda al salir del sistema de polarizadores sale polarizada en la direción del último polarizador. Note que al llegar entonces al material refractivo esta tendrá una polarización **p** (paralela al plano de incidencia). Del coeficiente de reflexión para la onda p podemos obtener el ángulo de Brewster, o ángulo de íncidencia donde la componente p polarizada luego de la reflexión es nula:

$$\cos(\theta_B) - n \cos(\theta_t) = 0$$

Podemos encontrar el ángulo θ_t usando la ley de Snell:

$$\theta_t = \arcsin \frac{\sin(\theta_B)}{n}$$

Por lo que el ángulo de Brewster queda definido según la ecuación (no es necesario resolver):

$$\cos(\theta_B) - n \cos(\arcsin \frac{\sin(\theta_B)}{n}) = 0$$

Considerando que el material gira a una frecuencia angular ω, basta encontrar t tal que:

$$t = \frac{\pi/2 - \theta_B}{\omega}$$

Question 3. La impedancia mecánica de un medio Z_{ac} se puede definir como una razón entre la fuerza F de restitución y la velocidad v de las particulas de la onda sonora:

$$Z_{ac} = \frac{F}{v}$$

Estableciendo similitudes entre ondas mecánicas y electromagnéticas, explique por qué la impedancia de una onda electromagnética se puede definir como:

$$Z_{em} = \frac{E}{H}$$

Donde H es la magnitud de la intensidad de campo magnético y E es la magnitud del campo eléctrico. Describa el efecto **físico** que tendría una impedancia compleja sobre la relación entre los campos eléctricos y magnéticos en una onda electromagnética.

Solución: La impedancia se puede entender comprendiendo las condiciones de borde. En general para una onda mećanica la impedancia se define según la continuidad de la fuerza y de la velocidad como (ver PDF de clases *El efecto de los números complejos en la física de ondas*):

$$v_I + v_R = v_T \tag{1}$$
$$F_I + F_R = F_T \rightarrow -Z_1 v_I + Z_1 v_R = -Z_2 v_T \tag{2}$$

Lo que es análogo a las condiciones de borde del campo electromagnético:

$$E_I + E_R = E_T \tag{3}$$
$$-\frac{E_I}{Z_1} + \frac{E_R}{Z_1} = -\frac{E_T}{Z_2} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

De esta forma, la impedancia se define para hacer un paralelo entre el campo eléctrico y la fuerza, y entre la corriente eléctrica y la velocidad. Una impedancia compleja puede ser expresada en forma fasorial como:

$$Z = |Z|e^{i\varphi} \tag{6}$$

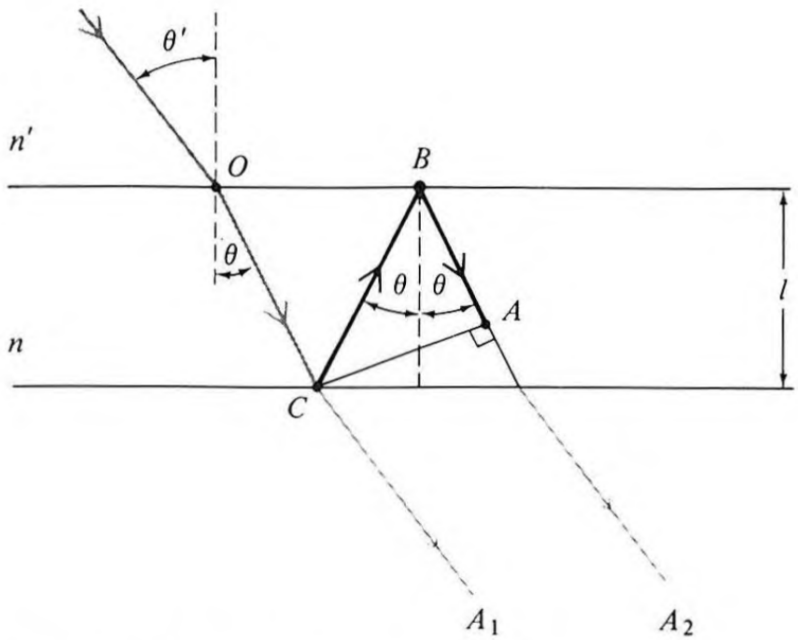
Lo que significa que:

$$|Z|e^{i\varphi} = \frac{E}{H}$$

O bien desarrollando:

$$E = H|Z|e^{i\varphi}$$

Esto implica que además de haber una diferencia en magnitud entre los campos eléctricos y magnéticos debido a la magnitud de la impedancia, la parte compleja provoca que ámbos campos estén **desfasados**.



Question 4. Considere un rayo de luz que viene desde un medio de índice de refracción n' e ingresa con un ángulo de incidencia θ' a un medio de índice de refracción n con geometría rectangular de ancho l (Ver Figura).

Si el ángulo de refracción con el que el rayo ingresa al medio es θ, demuestre que los dos primeros rayos que salen desde el medio (A_1, A_2) alcanzan un máximo de interferencia constructiva aproximadamente cuando:

$$\lambda = \frac{2nl\cos(\theta)}{m}$$

Donde λ es la longitud de onda del rayo en el vacío y m es un número entero. (Considere que n y n' son parecidos).

Solución: Una inteferencia constructiva se da cuando la diferencia de fase entre dos ondas es un múltiplo entero de 2π. Esto es:

$$\Delta\varphi = m2\pi$$

Con m número entero. Notemos que la diferencia de fase se relaciona con la diferencia de camino recorrido Δr:

$$\Delta r = k\Delta\varphi$$

Donde k es el número de onda en el medio. De la figura podemos notar que esta diferencia de camino recorrido corresponde aproximadamente a la suma de los tramos $C-B$ y $A-B$. Geométricamente se puede determinar con las cantidades del problema como:

$$\Delta r = \frac{l}{\cos(\theta)} + \frac{l\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$$

Utilizando la identidad $\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2$:

$$\Delta r = 2l\cos(\theta)$$

Y por lo tanto la condición para un máximo es:

$$k\Delta r = 2kl\cos(\theta) = m2\pi$$

Notemos que si λ es la longitud de onda en el vacío, entonces k en el medio con índice de refracción n será:

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

Reemplazando:

$$\lambda = \frac{2nl\cos(\theta)}{m}$$

Universidad de Valparaíso