Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Recuperativa 0
Mecánica Cuántica I
Licenciatura en Física - 2022

Problema I : Misceláneos

1. (15 pts.) Demuestre que $\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$. Suponga que trabaja en un espaciode N dimensiones y con una base ortonormal completa $\{|u_i\rangle\}$.
2. (25 pts.) Sea cierto operador hermitiano $\widehat{A}$ y un estado arbitrario $|\phi\rangle$. Demuestre que $\left\langle \phi \left| \widehat{A}^2 \right| \phi \right\rangle \geq 0$.
3. (30 pts.) En un espacio de N dimensiones existe cierto operador hermitiano $\widehat{A}$ tal que:
$$\widehat{A}\,|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle$$
suponga que no hay degenerancia. Se tiene el operador $\widehat{P} = \prod_i \left(\widehat{A} - a_i\right)$, halle el valor de la operación $\widehat{P}\,|\psi\rangle$, donde $|\psi\rangle$ es un vector arbitrario. Este es un problema de análisis.
4. (25 pts.) Para un espacio de N dimensiones, demuestre que $\det\left(\widehat{\mathrm{B}}\right) = e^{Tr\left(\ln \widehat{\mathrm{B}}\right)}$. Recordar que el determinante y la traza de un operador son independientes de la base.
5. (30 pts.) Evalúe el siguiente bracket "paso a paso": $\left\langle x \left| \exp\left(i\alpha\widehat{k}\right) \right| \phi \right\rangle$.

Problema II : Ecuación diferencial y transformada de Fourier

Para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) + (\alpha x - E)\,\varphi_E(x) = 0$$

donde α y $E \geq 0$ son escalares reales constantes que pueden asumir valores arbitrarios, responda:

1. (15 pts.) ¿Esta ecuación corresponde a un problema de valores propios?. De ser así ¿En el espacio de Hilbert, de qué operador $\widehat{D}$ se trata y cuál es el autovalor respectivo? (obviamente esta última pregunta no se responde si la primera no es afirmativa).
2. (20 pts.) Determine si el operador $\widehat{D}$ es hermítico.
3. (30 pts.) Escriba en el espacio físico (en coordenadas) las condiciones de ortogonalidad y completitud para $\varphi_E(x)$.
4. (30 pts.) Exprese la ecuación diferencial en términos de la variable k (número de onda) y la función $\tilde{\varphi}_E(k)$ (transformada de Fourier de $\varphi_E(x)$). Puede utilizar las reglas de equivalencia.
5. (25 pts.) Halle la solución para $\tilde{\varphi}_E(k)$.
6. (15 pts.) A partir del resultado anterior escriba la integral que determina $\varphi_E(x)$, no intente resolverla.

Obs.: Recordar que la transformada de Fourier está dada por las siguientes expresiones:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) F(k)\ dk$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x)\ dx$$

Otra fórmula de interés:

$$\langle x | k \rangle = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}}$$

Reglas de equivalencia:

<u>En espacio del dominio x</u>

$$f(\widehat{x}) \longleftrightarrow f(x)$$

$$g\left(\widehat{k}\right) \longleftrightarrow g\left(-i\frac{d}{dx}\right)$$

<u>En espacio del dominio k</u>

$$f(\widehat{x}) \longleftrightarrow f\left(i\frac{d}{dk}\right)$$

$$g\left(\widehat{k}\right) \longleftrightarrow g(k)$$

Pauta corrección

Probl. I)

1) $$|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n |u_n\rangle \implies \langle\varphi| = \sum_{m=1}^{N} a_m^* \langle u_m|$$

$$\therefore \langle\varphi|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m}^{N} a_m^* a_n \underbrace{\langle u_m|u_n\rangle}_{\delta_{mn}}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$; dado que $|a_n|^2 \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0 \quad //$$

QED.

2) $$\langle\phi|\hat{A}^2|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\phi\rangle = \langle\hat{A}\phi|\hat{A}\phi\rangle$$

sea $\hat{A}|\phi\rangle = |f\rangle$

$$\therefore \langle\phi|\hat{A}^2|\phi\rangle = \langle f|f\rangle \geq 0$$ (se deduce del resultado anterior)

3) si $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Si $\hat{A}^{\dagger}=\hat{A} \Rightarrow \{|a_i\rangle\}$ $\Downarrow$ BASE ORTONORMAL COMPLETA

y $\hat{P} = \prod_{i=1}^{N} (\hat{A}-a_i)$

Usando la base $\{|a_i\rangle\}$ para trabajar, se cumple que:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} b_n|a_n\rangle$$

$$\therefore\ \hat{P}|\psi\rangle = \prod_{i=1}^{N}(\hat{A}-a_i)\cdot\sum_{n=1}^{N} b_n|a_n\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{N} b_n \prod_{i=1}^{N}(\hat{A}-a_i)|a_n\rangle$$

importante

Obs. $\prod_{i=1}^{N}(\hat{A}-a_i)|a_n\rangle = (\hat{A}-a_1)(\hat{A}-a_2)\ldots(\hat{A}-a_n)\ldots(\hat{A}-a_N)|a_n\rangle$

pero $(\hat{A}-a_n)|a_n\rangle = \hat{A}|a_n\rangle - a_n|a_n\rangle$

$= a_n|a_n\rangle - a_n|a_n\rangle = 0$

Se concluye que $\hat{P}|\psi\rangle = 0$

Obs. Al operador se le denomina operador nulo.

4) Dado que el resultado no depende de la base escogida, seleccionamos por conveniencia la base de vectores propios de $\hat{B}$ 3

$$\downarrow$$

$$\{|b_i\rangle\}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_N \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\det \hat{B} = b_1 \cdot b_2 \cdots b_N$

$$Tr\, \hat{B} = b_1 + \cdots + b_N$$

$$\Downarrow$$

$$Tr\, f(\hat{B}) = f(b_1) + \cdots + f(b_N)$$

en particular:

$$Tr(\ln \hat{B}) = \ln(b_1) + \cdots + \ln(b_N)$$

luego $e^{Tr \ln \hat{B}} = e^{\sum_{i=1}^{N} \ln b_i} = e^{\ln b_1} \cdots e^{\ln b_N}$

$$= b_1 \cdots b_N = \det(\hat{B})$$

QED.

I 4

5) $\langle x | e^{i\alpha\hat{k}} | \phi \rangle = ??$

se conoce que $\hat{k}|k\rangle = k|k\rangle \Rightarrow f(\hat{k})|k\rangle = f(k)|k\rangle$

análogamente $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \Rightarrow g(\hat{x})|x\rangle = g(x)|x\rangle$

$$\therefore \langle x | e^{i\alpha\hat{k}} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{i\alpha\hat{k}} | k \rangle \langle k | \phi \rangle \, dk$$

$$\hat{\mathbb{1}} = \int_{-\infty}^{\infty} |k\rangle\langle k| \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{i\alpha k} | k \rangle \langle k | \phi \rangle \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k} \underbrace{\langle x | k \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}} \langle k | \phi \rangle \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(\alpha + x)}}{\sqrt{2\pi}} \langle k | \phi \rangle \, dk \quad ; \text{ pero } \frac{e^{ikx'}}{\sqrt{2\pi}} = \langle x' | k \rangle$$

con $x' = \alpha + x$

$$\therefore = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \alpha + x | \underbrace{k \rangle \langle k}_{\hat{\mathbb{1}}} | \phi \rangle \, dx = \langle \alpha + x | \phi \rangle = \phi(\alpha + x)$$

Probl. II)

1) $$\frac{d^2}{dx^2}\phi_E(x) + (\alpha x - E)\phi_E(x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x\right]\phi_E(x) = E\,\phi_E(x)$$

$\therefore$ Es un probl. de autovalores

El operador es:

$$\hat{D} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \alpha x \Rightarrow -\hat{k}^2 + \alpha\hat{x} = \hat{D}$$

$\underline{\text{obs.}}$ $\hat{k} \longleftrightarrow -i\frac{d}{dx}$

$\hat{k}^2 \longleftrightarrow -\frac{d^2}{dx^2}$

$\therefore \hat{D}|\phi_E\rangle = E|\phi_E\rangle$

$(-\hat{k}^2 + \alpha\hat{x})|\phi_E\rangle = E|\phi_E\rangle$ con E = autovalor del operador $\hat{D} = -\hat{k}^2 + \alpha\hat{x}$

2) $$\hat{D}^{+} = (-\hat{k}^2 + \alpha\hat{x})^{+} = -(\hat{k})^{+2} - \alpha^{*}\hat{x}^{+}$$
$$= -\hat{k}^2 - \alpha\hat{x}$$

$\therefore \hat{D}^{+} = \hat{D}$ (Hermitiano)

3) Condición de ortogonalidad (E continuo)

$$\langle \phi_{E'} | \phi_E \rangle = \delta(E-E')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| dx$$

$$\langle \phi_{E'} | \phi_E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{E'}^*(x)\, \phi_E(x)\, dx = \delta(E-E')$$

y

Condición de completitud

$$\langle x| \Big/ \int_0^{\infty} |\phi_E\rangle\langle\phi_E| dE = \hat{\mathbb{I}} \Big/ |x'\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\infty} \phi_E(x)\, \phi_E(x')\, dE = \delta(x-x')$$

4) $$(-\hat{k}^2 + \alpha \hat{x}) |\phi_E\rangle = E |\phi_E\rangle \Big/ \langle k|$$

$$-k^2 \tilde{\phi}_E(k) + \alpha i \frac{d\tilde{\phi}_E(k)}{dk} = E \tilde{\phi}_E(k)$$

5) $$\frac{d\tilde{\phi}_E(k)}{dk} = \frac{(E+k^2)}{i\alpha} \tilde{\phi}_E(k)$$ (del item anterior)

7

$\therefore$ $$\frac{d\tilde{\phi}_E(k)}{\tilde{\phi}_E(k)} = \frac{1}{i\alpha} E\, dk + \frac{1}{i\alpha} k^2 dk$$

$$\ln \tilde{\phi}_E(k) = \frac{Ek}{i\alpha} + \frac{1}{3i\alpha} k^3 + C$$

cte de integración

$\therefore$ $$\tilde{\phi}_E(k) = \tilde{C}\, e^{-\frac{iE}{\alpha}k - \frac{ik^3}{3\alpha}}$$

cte. de integración (otra)

6) $$\phi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} \tilde{\phi}_E(k)\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\frac{iE}{\alpha}k} e^{-\frac{ik^3}{3\alpha}} dk$$