Método de las transformaciones por filas para obtener la inversa de una matriz. Sistemas en forma matricial. Rango. Teorema de Rouché-Frobenius

El método de la clase anterior sólo es útil para matrices 2×2. Si bien sería válido para matrices 3×3, o de mayor orden, se debería resolver un sistema de por lo menos nueve incógnitas lo cuál es incómodo. Existe otro método, el **método de la transformación de la matriz por filas.** La idea es la siguiente,

Partimos de una matriz ampliada, $(A|I)$, a la izquierda se coloca la matriz que deseamos invertir y a la derecha la identidad. Transformamos las matrices por filas (como ya hemos hemos en los métodos de Gauss y Gauss-Jordan hasta convertir a la matriz izquierda en la matriz identidad. En ese momento, la matriz de la derecha será la matriz buscada A^{-1}.

Resumiendo:

$$(A|I) \quad \rightarrow \quad (I|A^{-1})$$

Ejemplo:

Intentemos encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo primero que se debe comprobar es que, por la regla de Sarrus,

$$\det A = 1 \neq 0$$

Si fuera $\det A = 0$, la matriz sería **singular**. Una matriz singular, como ya se dijo, **no es invertible.**

Comencemos armando la matriz $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = 2F_1 + F_2 \\ F'_3 = +F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = -F_2 + F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 - 2F_3 \\ F'_3 = F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \overrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 - F_3 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz de la izquierda es la identidad, la de la derecha la matriz inversa A^{-1}

Comprueben que

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Sistemas de ecuaciones en forma matricial

Aprovechando el cálculo anterior, resolvamos el sistema siguiente en forma matricial.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y = -2 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Ahora multiplicamos por A^{-1} (por izquierda a ambos lados, cuidado allí):

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Aplicamos asociativa al primer miembro,

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Como $A^{-1} \cdot A = I$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Y como $I \cdot X = X$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Finalmente, encontramos el vector de las incógnitas, multiplicando esas dos matrices.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Rango de una matriz

Lo explicaremos con un ejemplo. Consideren la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si su determinante fuera distinto de cero, su rango sería 3. Pero $\det M = 0$.

Ahora busquen matrices cuadradas de orden 2 dentro de M, cuyo determinante sea distinto de 0. Si encuentran una, el rango es 2. Si no encuentran ninguna el rango < 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & \;\;1 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

Esa matriz marcada con [ ] tiene determinante distinto de cero. Por tanto M tiene rango 2. Es decir, existeentre las filas y las columnas de M, una matriz 2×2 cuyo determinante es distinto de cero. De allí que el rango de M sea 2.

Finalmente:

Teorema de Rouché-Frobenius:

"Para que un sistema de ecuaciones tenga solución es necesario y suficiente que la matriz del sistema y su matriz ampliada tengan el mismo rango"

El número de grados de libertad del sistema, será igual al **número de incógnitas** menos el **rango** de la matriz del sistema

Ejercicio de una clase anterior

Observa el siguiente sistema. Es un sistema **homogéneo**: todos sus términos independientes son cero.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ \quad\;\; 2y - z = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Podrías hallar una solución **trivial**?
(b) Decide, mediante el valor del discriminante del sistema si esa solución es única.
(c) Halla la solución general.

Resolución:

Es fácil de ver que si la columna de términos independientes de todas las ecuaciones está formada por todos ceros, existe una solución evidente que es

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

El sistema se llama **homogéneo** y esa **solución trivial**. Sabemos entonces que el sistema tiene solución, es compatible, pero ¿habrá otras? Ya que todavía puede ser determinado o indeterminado.

Calculemos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, es indeterminado. Hay otras. El rango de la matriz es 2. Hay un grado de libertad. La solución será,

$$S = \{(-\frac{7}{2}\alpha, \frac{\alpha}{2}, \alpha)\}$$

Multiplicando todo por 2, se puede presentar así …

$$S = \{(-7\alpha, \alpha, 2\alpha\}$$

Ejercicios:

1. Considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 15y = 12 \end{cases}$$

(a) Exprésalo como una ecuación matricial de la forma $A.X = B$.
(b) Mediante transformaciones de las ecuaciones, llévalo a la forma $U.X = C$ donde U es una matriz triangular superior.
(c) Termina de resolverlo de forma análoga al procedimiento de **subir la escalera.**
(d) Halla la matriz A^{-1}, inversa de la matriz A. Comprueba que $X = A^{-1}.B$

2. Encuentra una matriz 2 x 2, distinta de la nula y de la identidad tal que:

(a) Se cumpla $A^2 = A$. Calcula en ese caso: A^3, A^4.

3. Encuentra la matriz inversa S^{-1} de la **matriz triangular superior**

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante "operaciones elementales de filas" aplicadas a la matriz ampliada $(S \mid I)$
¿Qué tipo de matriz es S^{-1} ?

4. Comprueba, utilizando para ello los sistemas de ecuaciones de las guías anteriores, que se cumple el Teorema de Rouché-Frobenius.