Tarea 4
Sumatorias

Instrucciones

- Esta tarea es individual y de carácter formativo.
- Debe prepararse un único documento pdf con imágenes con los desarrollos escritos a mano.
- El documento debe iniciar con el nombre y apellido del estudiante.
- Enviar el documento pdf al correo algebra@emttec.cl
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV y solo se corregirá el primer correo recibido.
- El plazo de entrega máximo es el martes 8 de junio a las 23:59:59.
- Los puntajes se encuentran indicados, hay 1,0 puntos base si se respetan estas instrucciones.

1) Considere la siguiente suma con los ángulos en radianes:

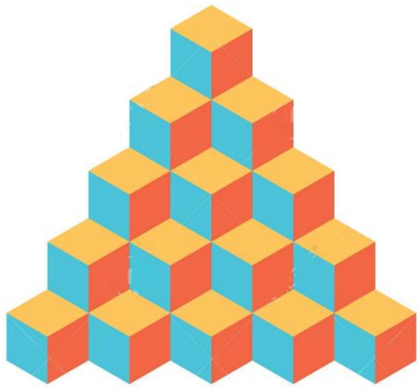
$$S = \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\right) + \cos\left(\frac{7}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2021}{2}\right)$$

A) Expresar S con notación de sumatoria. **(0,5 pts.)**
B) Usando la propiedad telescópica, hallar el valor exacto para S y aproximarlo con 2 decimales. **(1,5 pts.)**

$$\text{Ayuda:} \quad \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

2) En la figura se muestra una pirámide maciza de 5 pisos formada por cubos de lado 1 cm. En su piso superior tiene 1 cubo, en el inmediatamente inferior 3, en el que sigue 6 y así sucesivamente. Para una pirámide con el mismo patrón de construcción, pero de n pisos hallar:

A) Volumen total. **(1,0 puntos)**
B) Área total de la superficie, incluyendo su base. **(1,0 puntos)**



3) Hallar el término general a_k con tal que: **(2,0 pts.)**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Solución

1A) Expresamos la suma con notación de sumatoria:

$$S = \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\right) + \cos\left(\frac{7}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2021}{2}\right) = \boldsymbol{\sum_{k=0}^{1010} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)}$$

B) Consideramos la identidad y reemplazamos $\alpha = k+1$ y $\beta = k$:

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen}(k) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

y despejamos el coseno:

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen}(k)}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Reemplazamos el término general en la sumatoria y sacamos el término constante:

$$S = \sum_{k=0}^{1010} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{1010} \frac{\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen}(k)}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{1010} [\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen}(k)]$$

aplicamos la propiedad telescópica:

$$S = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{1010} [\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen}(k)] = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)} [\operatorname{sen}(1010+1) - \operatorname{sen}(0)]$$

así:

$$\boldsymbol{S = \frac{\operatorname{sen}(1011)}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)} \approx -0,583}$$

2A) Tenemos la siguiente cantidad de cubos por piso:

Piso	**Número de cubos**
1	$1=1$
2	$1+2=3$
3	$1+2+3=6$
4	$1+2+3+4=10$
$\vdots$	$\vdots$
k	$1+2+3+4+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$1+2+3+4+\cdots+k+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Así el total de cubos en n pisos es:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

ahora reunimos términos y factorizamos:

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Con respecto al volumen, como cada cubo es lado 1 cm y por lo tanto de volumen 1 cm^3, tenemos:

$$\boldsymbol{V=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\ \mathbf{cm}^3}$$

2B) Con respecto al área, las 6 vistas de la pirámide muestran el mismo patrón de caras, así el número total de caras expuestas es:

$$S=6\cdot(1+2+3+\cdots+n)=6\cdot\frac{n}{2}(n+1)=3n(n+1)$$

como cada cara tiene área 1 cm^2, tenemos:

$$\boldsymbol{A=3n(n+1)\ \mathbf{cm}^2}$$

3) Podemos escribir el último término como:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$$

así el término general es:

$$\boldsymbol{a_k = \frac{k(k+1)}{2}}$$

En el problema anterior surgió de manera natural una sumatoria con dicho término general, también podía aludirse a ello.