Clase n^o5

Cálculo II

Universidad de Valparaíso Profesor: Juan Vivanco

1 de Septiembre 2021

Integrales de la forma
$$\int \sin^m \cos^n x \, dx$$

Caso a) Si *n* y *m* son números pares utilizamos simultáneamente las dos identidades

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
 y $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Luego utilizaremos los métodos vistos anteriormente.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx =$$

Observación

Como en el ejemplo anterior, a veces podemos resolver este tipo de integrales expresando seno en términos de coseno (o coseno en términos de seno) mediante la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Y luego podemos utilizar las estrategias antes vistas.

Integrales de la forma
$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

Caso b) Si n o m son números impares utilizaremos algo similar a lo expuesto para integrales de la forma $\int \sin^n x \, dx$ y $\int \cos^n x \, dx$, con n impar.

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^7 x \, dx =$$

Ejercicio propuesto

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x \, dx =$$

Integrales de la forma $\int \tan^n x \, dx$

Para $n \ge 2$, podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición

$$\tan^n x = \tan^2 x \cdot \tan^{n-2} x.$$

b) Sustituir

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

c) Integrar utilizando métodos trabajados.

Recordar

$$\int \tan^4 x \, dx =$$

Integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$

Caso a): Para *n* par podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición

$$\sec^n x = \sec^2 x \cdot \sec^{n-2} x.$$

b) Sustituir

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1.$$

 c) Integrar utilizando método de cambio de variable (sustitución).

$$\int \sec^4 x \, dx =$$

Integrales de la forma
$$\int \sec^n x \, dx$$

Caso b): Para *n* impar podemos hacer lo siguiente:

a) Realizar la descomposición

$$\sec^n x = \sec^2 x \cdot \sec^{n-2} x$$
.

b) Integrar utilizando método de integración por partes.

Ejemplo 26 $\int \sec x \, dx =$

$$\int \sec^3 x \, dx =$$

Integrales de la forma
$$\int \cot^n x \, dx$$
 y $\int \csc^n x \, dx$

De manera similar a las integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$, lo que realizaremos de manera general es:

Descomponer

$$\cot^n x = \cot^2 \cdot \cot^{n-2}$$
 o $\csc^n x = \csc^2 x \cdot \csc^{n-2}$

Utilizar de manera conveniente:

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Integrar por medio de método de sustitución o de integración por partes.

Recordar

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x \quad \text{y} \quad \frac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cdot \cot x.$$

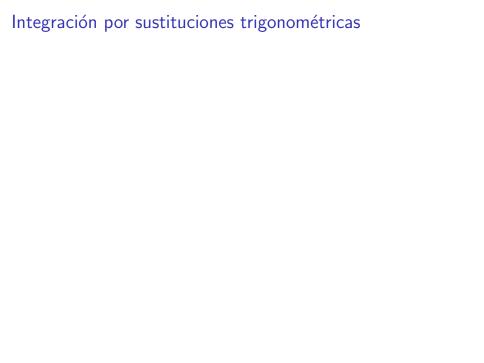
Ejercicio propuesto

a)
$$\int \csc x \, dx =$$

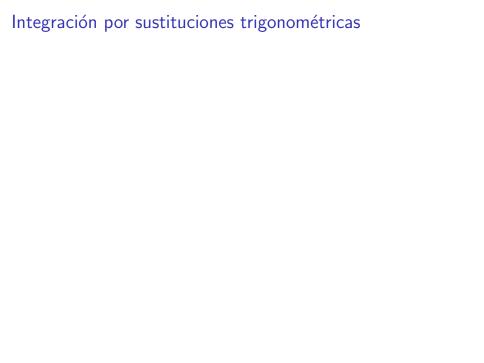
b)
$$\int \csc^6 x \, dx =$$

b)
$$\int \csc^6 x \, dx =$$

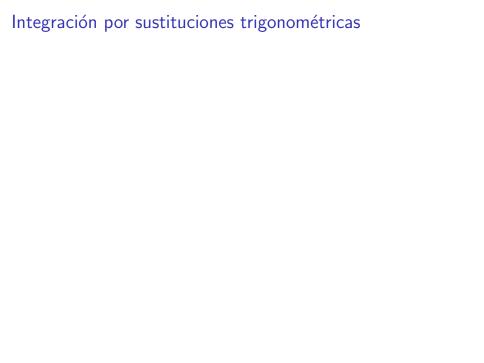
¿Cómo puedo integrar la función $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ con respecto a x?



¿Cómo puedo integrar la función $\frac{x^2}{x^2 + 16}$ con respecto a x?



¿Cómo puedo integrar la función $\frac{x^2}{x^2-9}$ con respecto a x?



Integración por sustituciones trigonométricas

Para las integrales que involucran potencias enteras de x y de una de las raíces: $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{x^2+a^2}$ se puede realizar las siguientes substituciones: $x=a\sin\theta, x=a\tan\theta, x=a\sec\theta$.

a) La substitución $x=a\sin\theta$. Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2-x^2}$, con a>0 se usa la substitución: $x=a\sin\theta$. Así tenemos:

$$x = a \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$-a \le x \le a \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos \theta| = a \cos \theta.$$

Integración por sustituciones trigonométricas

 $x = a \tan \theta$. Se tiene

b) La substitución $x = a \tan \theta$. Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 + a^2}$, con a > 0 se usa la substitución:

$$x = a \tan \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$x \in]-\infty, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a|\sec \theta| = a\sec \theta, \text{ pues } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Integración por sustituciones trigonométricas

c) La substitución $x = a \sec \theta$. Es adecuada para integrales de funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 - a^2}$, con a > 0. Si utilizamos $x = a \sec \theta$ entonces se tiene

$$x = a \sec \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a |\tan \theta|$$

Ejercicios propuestos

1.
$$\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx =$$

$$2. \int \sec^7 x \, dx =$$

$$dx =$$

3.
$$\int \csc^3 x \, dx =$$

$$4. \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx =$$

$$5. \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} \, dx =$$

$$\frac{1}{x^2 - 25} dx$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} \, dx =$$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables:	México: Cengage	2021
		trascendentes tempranas	Learning	
2	Burgos Román,	Cálculo infinitesimal	Madrid: McGraw-	1994
	Juan de	de una variable	Hill	
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales	Thomson	2007
		con Aplicaciones	THOMSON	2001
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.