Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

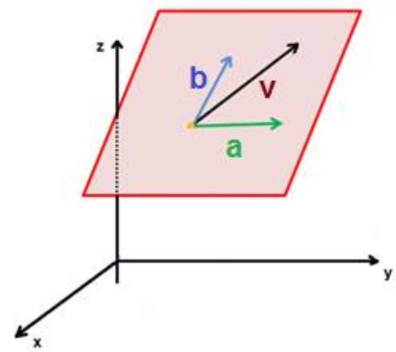
CLASE No. 12

Combinaciones lineales de vectores

Definición: diremos que el vector $\vec{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ si es posible encontrar números reales $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (no todos iguales a cero) tales que:

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c}$$

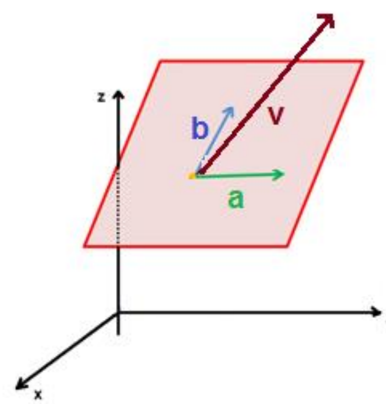
Ejemplo:



El vector $\vec{v} = \langle 13, 9, 23 \rangle$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a} = \langle 2,3,4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -2,1 \rangle$ ya que:

$$\langle 13, 9, 23 \rangle = 5 \cdot \langle 2,3,4 \rangle + 3 \cdot \langle 1, -2,1 \rangle$$

Geométricamente, significa que el vector $\vec{v}$ pertenece a un plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



En caso contrario, el vector $\vec{v}$ no es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Geométricamente esto, significa que el vector $\vec{v}$ **NO** pertenece a un plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En ese caso, el conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}\}$ se dice que es un conjunto **linealmente independiente** de vectores.

Nota: Los conceptos de combinación lineal e independencia lineal son quizá los dos conceptos más importantes de este curso.

Ejemplo 1:

¿Es el vector $\vec{c} = \langle 1,1,7 \rangle$ combinación lineal de los vectores $\vec{a} = \langle 2,3,4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -2,1 \rangle$?

Si la respuesta fuera SÍ entonces la ecuación siguiente debería tener una solución distinta de la trivial (0,0,0):

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c} = \vec{o}$$

O sea:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eso es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta + 7\gamma = 0 \end{cases}$$

Ese sistema es homogéneo, y por lo visto en clases anteriores tendrá solución distinta de la trivial (sistema indeterminado) si

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Pero,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto la respuesta es NO. El vector $\vec{\boldsymbol{c}}$ **NO** es combinación lineal de los vectores $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 2,3,4 \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{b}} = \langle 1,-2,1 \rangle$.

Ejemplo 2:

Volvamos al vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle 13, 9, 23 \rangle$ del principio que sabemos que si es combinación lineal de los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$**.** Deberá ser entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 9 \\ 4 & 1 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

Realizando los cálculos, se confirma el resultado …

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 9 \\ 4 & 1 & 23 \end{vmatrix} = -92 + 39 + 36 - (-104 + 18 + 69) = 0$$

Ejemplo 3:

Decida si el conjunto de vectores $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\}$ del plano $\mathbf{R}^2$, con

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es linealmente independiente. En caso negativo, exprese el vector $\vec{\boldsymbol{c}}$ como combinación lineal de los otros vectores.

Para ello debemos ver si existe una solución no trivial de la ecuación:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta}.\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{\gamma}.\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que es lo mismo que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. No puede ser totalmente escalerizado, por tanto es indeterminado. El conjunto de vectores no es linealmente independiente.

Realizando $F'_2 = -2F_1 + F_2$, es equivalente a:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ \quad -\beta - 7\gamma = 0 \end{cases}$$

Tiene un grado de libertad:

$$\gamma = k$$

$$\beta = -7k$$

$$\alpha = 2k$$

Elijamos la solución con $k = -1$:

$$\alpha = -2 \qquad \beta = 7 \qquad \gamma = -1$$

$$-2.\vec{\boldsymbol{a}} + 7.\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

Por tanto:

$$\vec{\boldsymbol{c}} = -2.\vec{\boldsymbol{a}} + 7.\vec{\boldsymbol{b}} = -2.\binom{1}{2} + 7 \cdot \binom{1}{1}$$

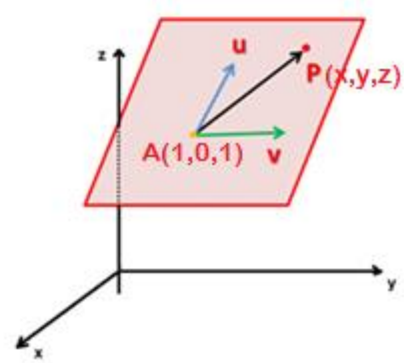
$$\vec{\boldsymbol{c}} = \binom{5}{3}$$

lo cual es correcto.

Otra forma de hallar la ecuación general del plano

Consideremos el plano generado por el punto A(1,0,1) y los vectores:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \langle 2,1,1 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \langle 3,-2,1 \rangle$$



Su ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) \;=\; (1,0,1) + \;\alpha \cdot \langle 2,1,1 \rangle + \beta \cdot \langle 3,-2,1 \rangle$$

donde $P(x, y, z)$ es el punto genérico de la recta.

Por lo analizado antes, el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \langle x-1, y, z-1 \rangle$ pertenece al plano generado por los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$**,** por tanto deberá ser combinación lineal de ellos.

Deberá cumplirse entonces que:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos ese determinante por la **primera columna**:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix} = 0$$

$$3(x-1) + y - 7(z-1) = 0$$

Finalmente la ecuación general de ese plano es:

$$3x + y - 7z + 4 = 0$$

Una alternativa mucho más fácil que el tedioso método de eliminar los dos parámetros.

Teorema: El vector normal al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

es

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \langle A, B, C\rangle$$

Demostración:

Supongamos un plano cuya ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \alpha\left(v_x, v_y, v_z\right) + \beta(u_x, u_y, u_z)$$

Hallemos su ecuación general por el método visto antes. Será:

$$\begin{vmatrix}x - x_1 & u_x & v_x\\ y - y_1 & u_y & v_y\\ z - z_1 & u_z & v_z\end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera columna:

$$(x - x_1)\cdot\begin{vmatrix}u_y & v_y\\u_z & v_z\end{vmatrix} - (y - y_1)\cdot\begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_z & v_z\end{vmatrix} + (z - z_1)\cdot\begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_y & v_y\end{vmatrix} = 0$$

Los coeficientes A, B y C en la ecuación general son por tanto:

$$A = \begin{vmatrix}u_y & v_y\\u_z & v_z\end{vmatrix} \quad B = -\begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_z & v_z\end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_y & v_y\end{vmatrix}$$

Por otro lado el vector normal es:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{u_x} & \boldsymbol{u_y} & \boldsymbol{u_z}\\ \boldsymbol{v_x} & \boldsymbol{v_y} & \boldsymbol{v_z}\end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primer fila,

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{\imath}}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{u_y} & \boldsymbol{u_z}\\ \boldsymbol{v_y} & \boldsymbol{v_z}\end{vmatrix} - \vec{\boldsymbol{\jmath}}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{u_x} & \boldsymbol{u_z}\\ \boldsymbol{v_x} & \boldsymbol{v_z}\end{vmatrix} + \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{u_x} & \boldsymbol{u_y}\\ \boldsymbol{v_x} & \boldsymbol{v_y}\end{vmatrix}$$

Recordando que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta, confirmamos que as componentes $A, B\ y\ C$ en:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = A\cdot\vec{\boldsymbol{\imath}} + B\cdot\vec{\boldsymbol{\jmath}} + C\cdot\vec{\boldsymbol{k}}$$

son los mismos que obtuvimos antes, con lo que queda demostrada la propiedad.

Ejemplo:

Hallar las **ecuaciones paramétricas** y la ecuación general del plano que pasa por el punto A(1, 1, 1) y tiene como vectores directores a $\vec{\boldsymbol{u}} = (1,-1,1)$ y $\vec{\boldsymbol{p}} = (2,3,-1)$.

Ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha \cdot \langle 1,-1,1 \rangle + \beta \cdot \langle 2,3,-1 \rangle$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 - \alpha + 3\beta \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x - 1 = \alpha + 2\beta \\ y - 1 = -\alpha + 3\beta \\ z - 1 = \alpha - \beta \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Deberá ser:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 3 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por adjuntos de la primera columna:

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(x-1) + 3(y-1) + 5(z-1) = 0$$

$$-2x + 3y + 5z - 6 = 0$$

La otra alternativa para hallar la ecuación general es trabajar con el vector normal al plano::

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \langle -2,3,5 \rangle$$

La ecuación será de la forma:

$$-2x + 3y + 5z + D = 0$$

Finalmente, hallamos D sabiendo que el punto (1,1,1) pertenece al plano:

-2.1 + 3.1 + 5.1 + D = 0

$$D = -6$$

$$-2x + 3y + 5z - 6 = 0$$

Ejercicios:

1. Si se conocen las ecuaciones vectoriales de dos planos en el espacio, ¿cómo es posible determinar si son paralelos?

2. ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos $(2, 3, 4), (-2, 4, 8), (-1, -1, 1)$?

Respuesta: $\boldsymbol{-13x + 24y - 19z = -30}$

3. Encontrar el ángulo que forma el vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle 3,4,1 \rangle$ con el plano de ecuación

$$4x - 3y - 15 = 0$$

Respuesta: Es paralelo

4. ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto (3, 1, 2) y a la recta $L: (x, y, z) = (6, 0, 0) + t(-1, 1, 0)$?

Respuesta: $\boldsymbol{x + y + z = 6}$

5. Hemos probado antes que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es un **vector normal** al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

(b) Utilizando dicho resultado encontrar el ángulo que forma el vector $\vec{\boldsymbol{p}} = (4,3,0)$ con el plano de ecuación $3x - 4y + 5z + 5 = 0$. ¿Qué concluyes?

(c) ¿Y el vector $\vec{\boldsymbol{q}} = (2,2,1)$ con ese mismo plano?