Tercera Prueba
Electrodinámica

LFIS 322

13 de diciembre de 2024

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder esta prueba. No puede consultar telefonos, cuadernos, libros, apuntes, formularios no oficiales ni a compañeros.

Problema 1

Use las ecuaciones de Maxwell y la ley de fuerza de Lorentz para derivar la ley de Coulomb para dos cargas estáticas de valor q.

Problema 2

Considere un condensador de placas paralelas infinitas con las placas a una distancia d y llevando una densidad de carga superficial σ en la placa inferior y $-\sigma$ en la placa superior.

(a) Considerando el eje z perpendicular a las placas, con el origen situado a media distancia entre las placas, calcule el tensor de tensión en forma matricial.

(b) ¿Cuánto vale el vector de Poynting?

(c) ¿Cuál es la fuerza por unidad de área sobre la placa inferior?

Problema 3

Un anillo circular aislante de radio a se encuentra en el plano xy centrado en el origen. El anillo tiene una densidad de carga lineal $\lambda(\phi) = \lambda_0 \cos\phi$, donde λ_0 es una constante y ϕ es el ángulo azimutal. El anillo gira alrededor del eje z con velocidad angular ω. Calcule la potencia total radiada.

Formulario oficial

$$T_ij = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \oint \mathbf{T}\cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \mathbf{S}\,d\mathcal{V} \qquad \mathcal{P} = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{6\pi c}, \text{ donde } \mathbf{p} = \int \lambda \mathbf{r}\,dl$$

Solución 3era Prueba

1.- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \longrightarrow \vec{F} = q\vec{E}$

de la ley de Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

y el lado izquierdo

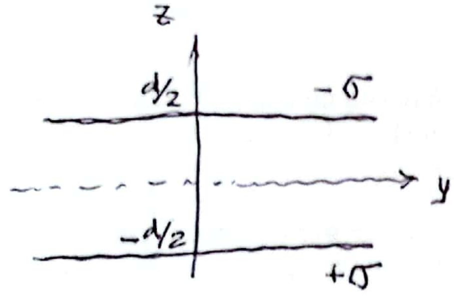
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E$$

Luego

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad //$$

2.-



El campo entre las placas (usando ley de Gauss) es

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

y $E_x = E_y = 0$. Luego, de la definición de T_{ij}, los términos no nulos son:

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(0 - 0 - \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2\right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$T_{yy} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(E_y^2 - E_x^2 - E_z^2\right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

luego

(a) $$T_{ij} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ /

(b) caso $\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{S}=0$ //

(c) La fuerza en la dirección z es entonces

$$F_z = \int T_{zz}\, da_z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{k} \quad //$$

3.— $P = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{6\pi c}$; $\vec{p} = \int \lambda \vec{r}\, dl$

En $t=0$

$$\vec{p}(t=0) = \vec{p}_0 = \int \lambda \vec{r}\, dl = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\phi \left(\hat{\imath}\, a\cos\phi + \hat{\jmath}\, a\sin\phi\right) d\phi\, a$$

$$= \lambda_0 a^2 \left\{ \hat{\imath}\int_0^{2\pi} (\cos\phi)^2 d\phi + \hat{\jmath}\int_0^{2\pi} \cos\phi \sin\phi\, d\phi \right\}$$

$$= \lambda_0 a^2 \{ \hat{\imath}\pi + \hat{\jmath}\, 0 \}$$

$$= \pi a^2 \lambda_0 \hat{\imath} \quad // \qquad \vec{p}_0 = p_0\hat{\imath} = (\pi a^2 \lambda_0)\hat{\imath}$$

En general,

$$\vec{p}(t) = p_0\left[\hat{\imath}\cos(\omega t) + \hat{\jmath}\sin(\omega t)\right]$$

así

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 p_0\left[\hat{\imath}\cos(\omega t) + \hat{\jmath}\sin(\omega t)\right] = -\omega^2 \vec{p}(t)$$

calculando el cuadrado

$$(\ddot{\vec{p}})^2 = (-\omega^2 \vec{p}(t))^2 = \omega^4 \vec{p}(t)^2 = \omega^4 p_0^2$$

entonces

$$(\ddot{\vec{p}})^2 = \omega^4 \pi^2 \lambda_0^2 a^4$$

finalmente

$$P \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 \pi \lambda_0^2 a^4}{6c} \quad //$$