Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 9

---

1. Obtener la función de Green que satisface
$$\frac{d^2G}{dx^2} - \lambda^2 G = \delta(x-\xi) \qquad G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0 \tag{1}$$
donde λ es real, $x \in [0,1]$, $\xi \in (0,1)$. Mostrar que la solución a la ecuación
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = f(x) \tag{2}$$
sujeta a las mismas condiciones de contorno es
$$y = -\frac{1}{\lambda \sinh\lambda}\left[\sinh(\lambda x)\int_x^1 f(\xi)\sinh[\lambda(1-\xi)]d\xi + \sinh[\lambda(1-x)]\int_0^x f(\xi)\sinh(\lambda\xi)d\xi\right] \tag{3}$$

Solución: Buscamos soluciones a la ecuación homogénea que satisfacen las condiciones de contorno:
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0$$
Por la forma dada de la solución, supongamos $y_1(x) = \sinh(\lambda x)$:
$$y_1''(x) = \lambda^2 \sinh(\lambda x)$$
asi que esta solución satisface la condición de contorno $y_1(0) = 0$. Para satisfacer $y_2(1) = 0$ intentamos con $y_2(x) = \sinh(\lambda(1-x))$
$$y_2''(x) = \lambda^2 \sinh(\lambda(1-x))$$
así que esta solución satisface la condición de contorno $y_2(1) = 0$. El operador diferencial en la ecuación diferencial es tal que $p(x) = 1$. El wronskiano en este caso es
$$\begin{aligned} W(x) &= -\lambda \sinh(\lambda x)\cosh(\lambda(1-x)) - \lambda\sinh(\lambda(1-x))\cosh(\lambda x) \\ &= -\lambda\sinh(\lambda x + \lambda(1-x)) = -\lambda\sinh(\lambda) \end{aligned}$$
En la clase vimos que la solución al problema inhomogéneo es
$$y(x) = y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}f(\xi)d\xi + y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}f(\xi)d\xi$$

Dado que el wronskiano es una constante, podemos escribir

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda \sinh \lambda}\left[\sinh(\lambda(1-x))\int_0^x \sinh(\lambda\xi)f(\xi)d\xi + \sinh(\lambda x)\int_x^1 \sinh(\lambda(1-\xi))f(\xi)d\xi\right]$$

que es exactamente la expresión dada en la pregunta.

2. Un operador diferencial lineal está definido por

$$\mathcal{L}_x y = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y \tag{4}$$

Por el uso de la sustición $y = z/x$ (o por cualquier método) encontrar las soluciones de $\mathcal{L}_x y = 0$ que son (a) acotada cuando $x \to 0$, o (b) acotada cuando $x \to \infty$. Encontrar la función de Green $G(x,a)$ que satisface

$$\mathcal{L}_x G(x,a) = \delta(x-a) \tag{5}$$

y ambas condiciones (a) y (b). Utilizar $G(x,a)$ para resolver

$$\mathcal{L}_x y(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,R] \\ 0 & x > R \end{cases} \tag{6}$$

sujeta a ambas condiciones (a) y (b). Mostrar que la solución tiene la forma

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{A}{x}\sinh x & x \in [0,R] \\ \frac{B}{x}e^{-x} & x > R \end{cases} \tag{7}$$

para constantes apropiadas A y B.

Solución: Usando la sustitución dada en la pregunta, podemos convertir el operador diferencial en

$$-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y = -\frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{z}{x}$$

Entonces la ecuación diferencial homogénea en términos de z es

$$\frac{d^2z}{dx^2} - z = 0$$

Posibles soluciones son

$$z_1(x) = \sinh(x), \quad z_2(x) = \exp(-x)$$

Así que las soluciones a la ecuación homogénea original son

$$y_1(x) = \frac{1}{x}\sinh(x), \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\exp(-x)$$

La primera solución satisface la condición de contorno en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} y_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sinh(x) = 1$$

La segunda solución satisface la condición de contorno en $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} y_2(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\exp(-x) = 0$$

Dado que estas son soluciones a la ecuación homogénea es fácil construir la solución a la ecuación inhomognénea simplemente por sumar 1 a la solución válida en $x = 0$. Se puede ajustar las constantes A y B para asegurar continuidad en $x = R$.