Geometría vectorial: el plano R²

Concepto de vector

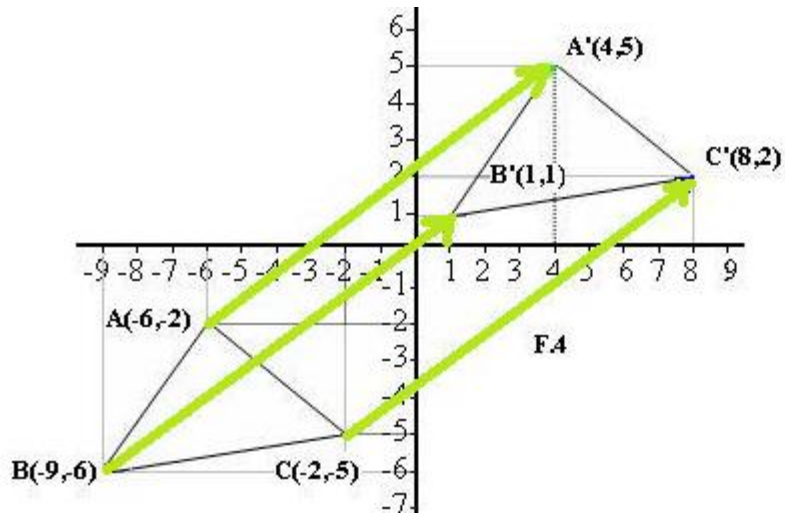
Consideremos una triángulo de vértices $A(-6,-2), B(-9,-6), C(-2,-5)$ y traslADémoslo

10 unidades en la dirección positiva del eje "x" y 7 en la dirección positiva del eje "y". Se obtiene un nuevo triángulo, congruente con el anterior.

Sus vértices serán ahora:

$A(-6,-2)$	$\overrightarrow{\langle 10,7 \rangle}$	$A'(4,5)$
$B(-9,-6)$	$\overrightarrow{\langle 10,7 \rangle}$	$B'(1,1)$
$C(-2,-5)$	$\overrightarrow{\langle 10,7 \rangle}$	$C'(8,2)$

Basta con sumar 10 a las abscisas de los puntos y 7 a todas sus ordenadas.



Hablaremos entonces del **vector de traslación** $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle 10,7 \rangle$

Su componente según "x" será: $v_x = 10$

Su componente según "y" será: $v_y = 7$

Durante dos o tres clases, utilizaremos diferentes notaciones para puntos (,) y vectores < , > para evitar confusiones. Más adelante, cuando entremos de lleno al álgebra lineal usaremos esta notación de vector, como matriz columna:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Notas:

Si alguien les pregunta, ¿cuántos vectores ven en el gráfico anterior, ustedes estarían tentados de contestar "tres vectores" porque ven tres flechas verdes. No. Lo que ven son **tres representantes del mismo vector**, el vector $\vec{v} = \langle 10,7 \rangle$

Los **vectores horizontales** sólo tienen componente según "x". La componente según "y" es 0. Ejemplo: $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 4,0 \rangle$

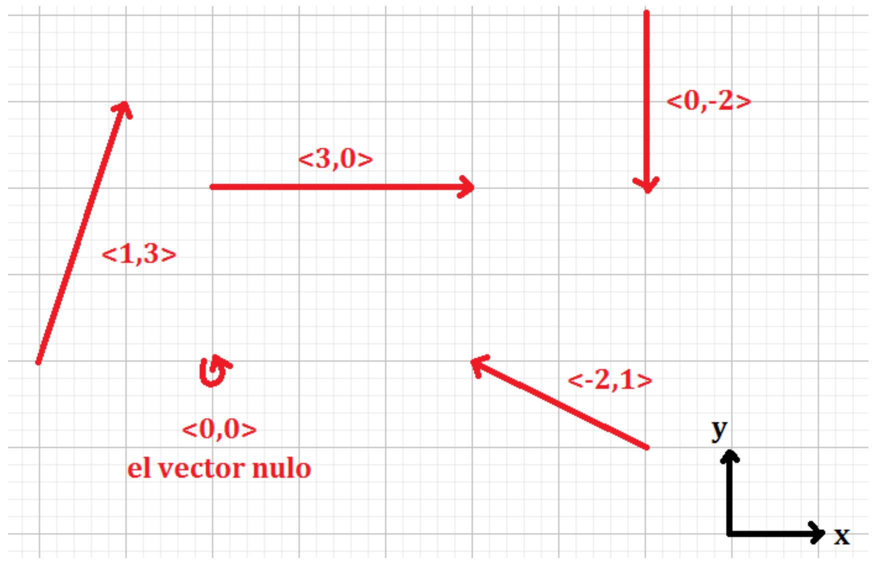
Los **vectores verticales** sólo tienen componente según "y". La componente según "x" es 0. Ejemplo: $\vec{\boldsymbol{b}} = \langle 0,-3 \rangle$

Los puntos tienen **coordenadas**. Los vectores tienen **componentes**.

Ejemplos:

Si al moverse desde la cola a la punta del vector, se mueven en la dirección positiva del eje "x", la componente según "x" del vector será positiva. En caso contrario, negativa.

Si al moverse desde la cola a la punta del vector, se mueven en la dirección positiva del eje "y", la componente según "y" del vector será positiva. En caso contrario, negativa.

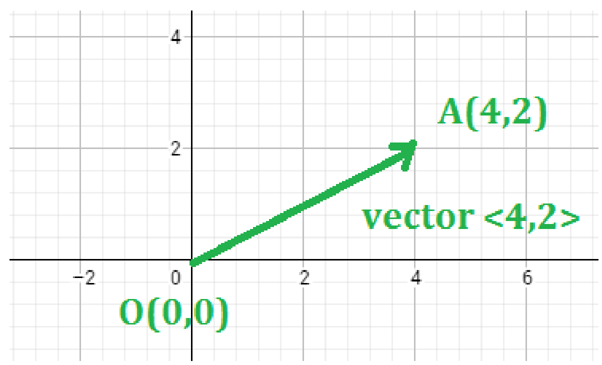


Representante canónico de un vector:

Observen que cuando el **origen** de un vector es el punto O(0,0), entonces las coordenadas de su **extremo** A(4,2) coinciden con las componentes del vector <4,2> ya que:

$$O(0,0) \quad \overrightarrow{\langle 4,2 \rangle} \quad A(4,2)$$

A ese vector de origen (0,0) lo llamaremos **representante canónico del vector.**



Módulo y dirección de un vector

A la longitud de la flecha del representante de un vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle v_x, v_y \rangle$ la llamaremos **módulo del vector**, lo cual simbolizaremos $|\vec{v}|$. Por Pitágoras:

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Y llamaremos **dirección del vector** a:

$$dir\ \vec{v} = \frac{v_y}{v_x}$$

En los hechos, la dirección de un vector es la pendiente de la recta sobre la cual están su origen y su extremo.

Operaciones con vectores

1) Adición

Los vectores se suman componente a componente. Es decir, si

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y \rangle \quad \text{y} \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \langle b_x, b_y \rangle$$

entonces:

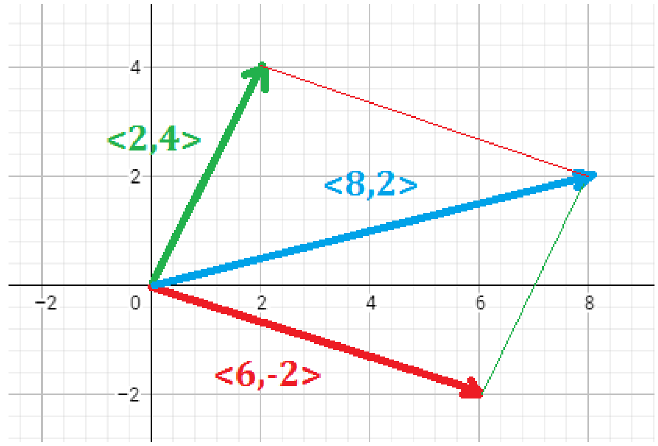
$$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \langle a_x + b_x, a_y + b_y \rangle$$

En el ejemplo de la figura:

$$\langle \mathbf{6}, -\mathbf{2} \rangle + \langle \mathbf{2}, \mathbf{4} \rangle = \langle \mathbf{6} + \mathbf{2}, -\mathbf{2} + \mathbf{4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{6}, -\mathbf{2} \rangle + \langle \mathbf{2}, \mathbf{4} \rangle = \langle \mathbf{8}, \mathbf{2} \rangle$$

lo que se ilustra en la conocida **regla del paralelogramo.**



Propiedades: 1) La adición de vectores es **conmutativa:** $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}}$

2) El vector nulo $\vec{\boldsymbol{o}} = \langle 0,0 \rangle$ es el neutro, es decir: $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{o}} = \vec{\boldsymbol{a}}$

siendo $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ vectores cualesquiera.

2) Sustracción

Siendo $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ los vectores anteriores:

$$\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = \langle a_x - b_x, a_y - b_y \rangle$$

o lo que es lo mismo,

$$\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{b}})$$

El vector $-\vec{\boldsymbol{b}}$ se denomina **opuesto de $\vec{\boldsymbol{b}}$.**

En el ejemplo anterior: $-\vec{\boldsymbol{b}} = \langle -2, -4 \rangle$

3) Multiplicación por un escalar

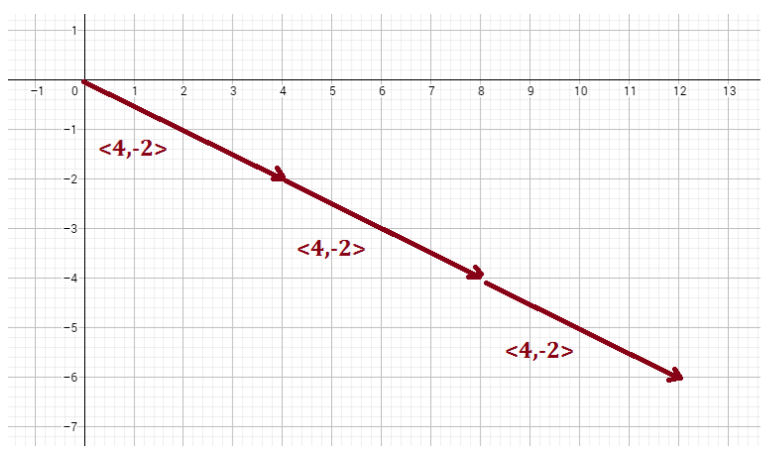
En geometría vectorial se denomina **escalar** a cualquier número real α, para distinguirlo de los vectores.

Dado un escalar α y un vector $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y \rangle$, definimos

$$k\vec{\boldsymbol{a}} = \langle ka_x,\ ka_y \rangle$$

Por ejemplo, si $\alpha = 3$ y $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 4, -2 \rangle$ entonces

$$3\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 12, -6 \rangle$$



4) Multiplicación escalar de vectores

La siguiente operación que exploraremos es la multiplicación escalar de vectores, también llamada **producto punto** de vectores.

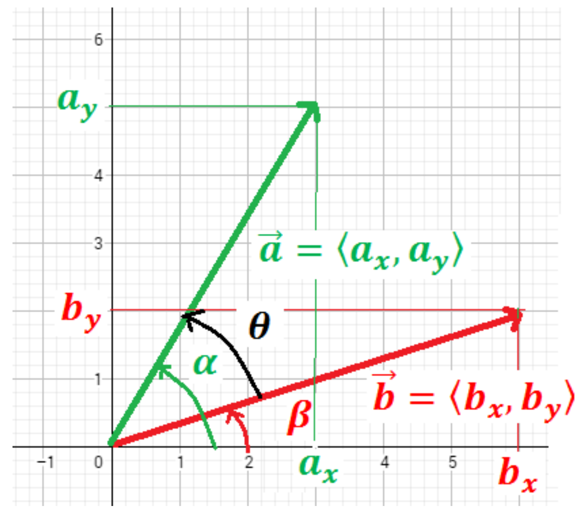
Se define de la siguiente manera:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Teorema: A los efectos prácticos, puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\text{Si} \quad \vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle \ \text{ y } \ \vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Demostración:



Sabemos por las clases de trigonometría que:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \qquad a_y = |\vec{a}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$b_x = |\vec{b}| \cdot \cos\beta \qquad b_y = |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Además,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

La definición del producto punto es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Reemplazando:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \ + \ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \ + \ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\beta \ + \ |\vec{a}| \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

tal como se quería demostrar.

Nota: observen que el producto punto de dos vectores es un escalar (es decir un número). No es un vector.

Aplicación: ángulo entre dos vectores

Una aplicación interesante del producto punto es hallar el ángulo que forman dos vectores del plano ya que, si despejamos el coseno en la definición queda:

$$\frac{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}|} = \cos\theta$$

Ejemplo: ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 2,3 \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{b}} = \langle -1,4 \rangle$?

$$\cos\theta = \frac{\langle 2,3 \rangle \cdot \langle -1,4 \rangle}{\sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+4^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4}{\sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+4^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\theta \approx 48°$$

Consecuencia importante:

Si $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ son vectores no nulos, entonces

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90° \quad \text{(los vectores son perpendiculares)}$$

Vectores unitarios

Llamaremos así a los vectores que tiene módulo 1. Dos vectores unitarios muy útiles son los vectores:

$$\vec{\boldsymbol{\imath}} = \langle 1,0 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \langle 0,1 \rangle$$

Así, a cualquier vector de R^2, podemos escribirlo como combinación lineal de $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ y $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$.

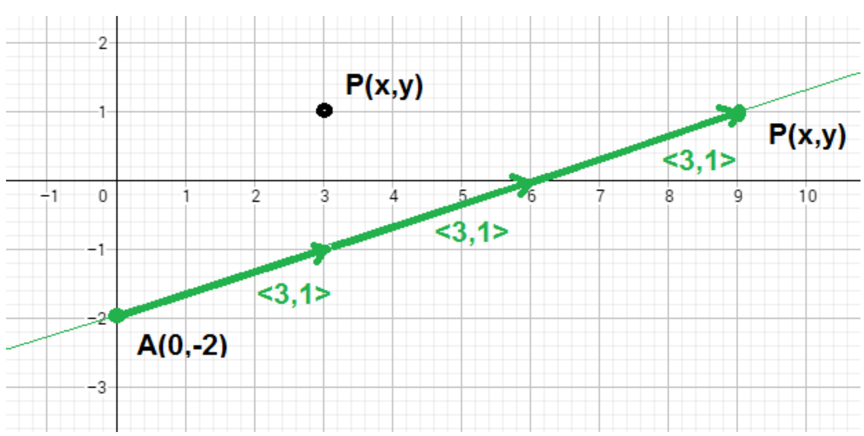
Por ejemplo:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle 4,-2 \rangle = 4\langle 1,0 \rangle - 2\langle 0,1 \rangle$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = 4\vec{\boldsymbol{\imath}} - 2\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

que es la notación que habitualmente utilizan los físicos.

Ecuaciones de la recta



Consideremos un punto $A(0,-2)$ y un vector director $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle 3,1 \rangle$. Queda claro que un punto y un vector definen una recta.

¿Qué condición deberá cumplir un punto genérico $P(x,y)$ del plano para pertenecer a la recta dada?

Respuesta: deberá poder ser alcanzado desde el punto A sumando ponderaciones del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$**.** Esto es, deberá existir un número real k tal que,

$$(x,y) = (0,-2) + k \cdot \langle 3,1 \rangle$$

En el caso de la figura, $k = 3$.

En general, dado un punto de coordenadas (x_1, y_1) y un vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle v_x, v_y \rangle$, llamaremos **ecuación vectorial de la recta** así definida a:

$$(x,y) = (x_1, y_1) + k \cdot \langle v_x, v_y \rangle$$

Descomponiendo en coordenadas, obtenemos las **ecuaciones paramétricas de la recta:**

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_x \\ y = y_1 + k \cdot v_y \end{cases}$$

Despejando k de ambas ecuaciones e igualando, se obtiene la **ecuación continua de la recta**:

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Operando allí, podemos encontrar una **ecuación general** de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Ejemplo 1:

Decida si el punto (3,1) pertenece a la recta de la figura anterior.

x = 3, y = 1

$$(3,1) = (0,-2) + k \cdot \langle 3,1 \rangle$$

Yendo a las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 3 = 0 + k \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad k = 1 \\ 1 = -2 + k \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \end{cases}$$

No existe un mismo número k que cumpla ambas ecuaciones. Respuesta: NO.

Ejemplo 2:

Probemos ahora con el punto (9,1):

$$(9,1) = (0,-2) + k \cdot \langle 3,1 \rangle$$

Yendo a las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 9 = 0 + k \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \\ 1 = -2 + k \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \end{cases}$$

Existe u número $k = 3$ que cumple ambas ecuaciones. Respuesta: Sí. El punto $P(9,1)$ pertenece a la recta.

Ejemplo 3:

Halle el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases}(x,y) = (0,-2) + \alpha \cdot \langle 3,1 \rangle \\ (x,y) = (6,0) + \beta \cdot \langle -1,2 \rangle\end{cases}$$

Encontramos las paramétricas de ambas rectas,

$$\begin{cases}x = 0 + 3\alpha \\ y = -2 + \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = 6 - \beta \\ y = 0 + 2\beta\end{cases}$$

Igualamos "x" e "y":

$$0 + 3\alpha = 6 - \beta$$

$$-2 + \alpha = 2\beta$$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones encontramos $\alpha = 2, \beta = 0$.

Sustituyendo alguno de esos valores en las ecuaciones vectoriales originales de las rectas, encontramos el punto buscado.

$$(x,y) = (0,-2) + 2 \cdot \langle 3,1 \rangle$$

$$(x,y) = (6,0)$$

El punto buscado es (6.0).

Ejemplo 4:

Encuentre la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es:

$$(x,y) = (4,-3) + k \cdot \langle 1,2 \rangle$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases}x = 4 + k \\ y = -3 + 2k\end{cases}$$

Despejando k e igualando, obtenemos

$$x - 4 = \frac{y+3}{2}$$

Finalmente,

$$2x - y - 11 = 0$$

Otras propiedades del producto escalar (o producto punto)

En general, el producto escalar de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se define así …

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Propiedades del producto escalar:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ y además $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$,
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$,
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$,
4. $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

La norma euclídea de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (que los físicos llaman módulo) se define como

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}.$$

Es evidente que $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$, y que $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz):

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Demostración. Consideramos la función definida por

$$p(\lambda) = (\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Está claro que $p(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$p(\lambda) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\lambda^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\lambda + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y},$$

es decir, que $p(\lambda)$ es una función polinómica de segundo grado con a lo sumo una raíz real, y por lo tanto su discriminante deberá ser:

$$\Delta \leq 0$$

donde ... $$\Delta = 4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}).$$

Esta última desigualdad implica que: $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Es lo que queríamos demostrar.

Consecuencia: Desigualdad de Minkowski

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

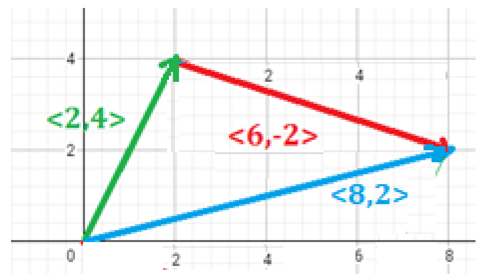
Demostración: Tenemos que ...

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \leq$$

$$\leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

y tomando raíces cuadradas se deduce la desigualdad.

Nota: La desigualdad de Minkowski es muy conocida en física. Establece que el módulo del vector suma es siempre menor que la suma de los módulos de los vectores intervinientes.



Ejercicios:

1. Encuentre el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases}(x,y) = (3,2) + \alpha\cdot\langle 1,1\rangle \\ (x,y) = (0,3) + \beta\cdot\langle 2,0\rangle\end{cases}$$

Respuesta: P(4,3)

2. Encuentre (de ser posible) el punto de intersección de las rectas. ¿Qué concluyes?

$$\begin{cases}(x,y) = (-5,2) + \alpha\cdot\langle 1,-2\rangle \\ (x,y) = (7,7) + \beta\cdot\langle 2,-4\rangle\end{cases}$$

3. Encuentre la ecuación general de la recta

$$(x,y) = (4,2) + \alpha\cdot\langle -1,3\rangle$$

4. Halle el ángulo entre las rectas:

$$\begin{cases}(x,y) = (-5,1) + \alpha\cdot\langle 3,-2\rangle \\ (x,y) = (0,6) + \beta\cdot\langle 2,3\rangle\end{cases}$$

Respuesta: Son perpendiculares. $\boldsymbol{\alpha = 90°}$

5. Encuentre el punto de intersección de las rectas:

$$(x,y) = (4,-2) + \alpha\cdot\langle 1,7\rangle$$
$$3x + y + 10 = 0$$

Respuesta: (2,-16)

6. Se tienen dos rectas en el plano, de ecuaciones:

$$(x,y) = t\,\langle -3,a\rangle + (1,b)$$
$$(x,y) = s\,\langle 2,b\rangle + (1,a)$$

¿Qué condición deben cumplir “a” y “b” para que sean perpendiculares?

Respuesta: $\boldsymbol{a\cdot b = 6}$

7. Encuentre el o los puntos P pertenecientes a la recta contenida en $\boldsymbol{R^2}$

$$r: (x, y) = (-2, -11) + \mu < 3, 4 >$$

cuya distancia al punto A(0,0) cumpla

$$d(P, A) = 5$$

¿Cuántos puntos encontró?

Respuesta: $\boldsymbol{\mu = 2}$, un punto solamente: $\boldsymbol{P(4, -3)}$