Ecuaciones trigonométricas

Como ya sabemos del colegio, una **ecuación** es una igualdad con incógnitas, esto es, letras que representan números desconocidos. Resolver la ecuación significa hallar el valor numérico de las incógnitas que convierten a la ecuación en una identidad numérica.

Así, por ejemplo, la ecuación

$$2x - 3 = 11$$

cuya incógnita es "x", tiene solución

$$x = 7$$

Reemplazado en la incógnita "x", la ecuación se convierte en una identidad numérica,

$$2 \cdot 7 - 3 = 11$$

$$11 = 11$$

No debemos confundir las **ecuaciones** con la **identidades**, ya que éstas se cumplen para todos los valores de x que satisfagan las restricciones de la ecuación.

Por ejemplo,

$$\frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$$

es una identidad, ya que desarrollando el cuadrado del primer miembro obtenemos,

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$$

que se cumple $\forall\ x \in R$ si $x \neq 2$ ya que si $x = 2$, los denominadores son 0 y la expresión carece de sentido.

Ya vimos en la clase pasada como demostrar algunas **identidades trigonométricas** (aunque exploramos poco el tema de las restricciones ya que a veces se hace complicado). Veremos ahora como resolver algunas **ecuaciones trigonométricas.**

Ejemplo:

Resolver:

$$2 \cdot sen^2\alpha - 3 \cdot sen\ \alpha + 1 = 0$$

Hagamos el reemplazo:

$$z = sen\ \alpha$$

lo que en matemáticas se llama un **cambio de variable**. Obtenemos:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación con la conocida fórmula:

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

con $\quad A = 2 \quad B = -3 \quad C = 1$

se obtiene:

$$z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$$

Por tanto,

$$z = +1 \quad \text{o} \quad z = +\tfrac{1}{2}$$

Deshaciendo el cambio de variable que hicimos antes, obtenemos;

$$\text{sen}\,\alpha = +1 \quad \text{o} \quad sen\ \alpha = +\tfrac{1}{2}$$

Recordando los resultados de la clase pasada, obtenemos:

Si $sen\ \alpha = +1$, entonces

$$\alpha = 90°$$

pero también sirven todos los ángulos de la forma $90° + 360°.k$ con k entero.

Escrito en radianes, queda el conjunto de soluciones,

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2.\pi.k\ con\ k\ \in Z\right\}$$

Ahora resolvemos la segunda ecuación que obtuvimos. Si $sen\ \propto = +\frac{1}{2}$, entonces, recordando los resultados de la clase pasada, $\alpha = 30°$ o $\alpha = 150°$.

Por tanto,

$$S_2 = \left\{\frac{\pi}{6} + 2.\pi.k \ con \ k \ \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2.\pi.k \ con \ k \ \in Z\right\}$$

Finalmente la solución total es la unión de ambos conjuntos:

$$S = S_1 \ \cup \ S_2$$

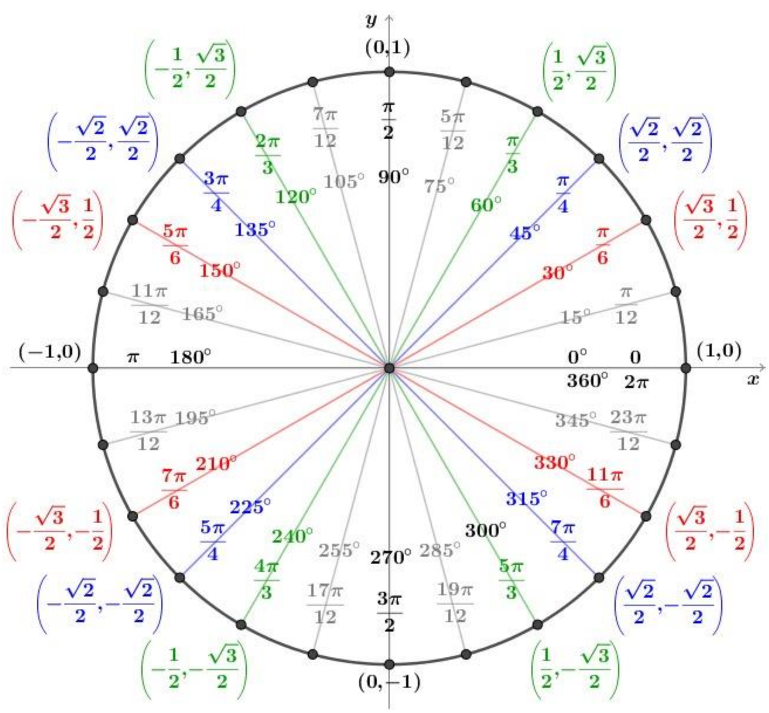
$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2.\pi.k \ con \ k \ \in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2.\pi.k \ con \ k \ \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2.\pi.k \ con \ k \ \in Z\right\}$$

Para visualizar ese conjunto solución mejor, diremos que la solución en el conjunto [0,2π[es:

$$30°, 90°, 150°$$

Para extender esa solución a todos los números reales (conjunto R) debemos agregar todos los valores que se obtienen sumando múltiplos de 360° a esos valores así obtenidos:

$$\{30°, 90°, 150°, 390°, 450°, 510°, 750°, 810°, 870°, \ldots\}$$



Ejemplo 2

Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^4(x) = 1 + \cos^4(x).$$

Solución:

Manipulando la ecuación algebraicamente tenemos:

$$\operatorname{sen}^4(x) = 1 + \cos^4(x)$$

$$\operatorname{sen}^4(x) - \cos^4(x) = 1$$

$$[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)] \cdot [\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)] = 1$$

ahora con la ayuda de una de las identidades pitagóricas y del coseno del ángulo doble se tiene:

$$[1] \cdot [-\cos(2x)] = 1$$

$$\cos(2x) = -1$$

En la primera vuelta coseno toma valor -1 solo para el ángulo π (ver circunferencia unitaria), al agregar todas las vueltas en sentido horario y antihorario logramos:

$$2x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

así finalmente despejando x:

$$\boldsymbol{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}}, \textbf{ con } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicios:

1. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi[$:

a) $2.sen\alpha - 1 = 0$

b) $sen^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$

c) $tgx + ctgx = 2$

d) $sen(90^o - \phi) + \cos\phi = \sqrt{3}$

e) $2.sen^2\beta + \cos(90^o - \beta) - 1 = 0$

f) $sen\alpha - 2.sen\alpha.\cos\alpha = 0$

g) $4\cos^2 x - 3 = 0$

h) $2\cos^2\beta - \cos\beta = 0$

Respuestas: **a)$\{30°, 150°\}$ o $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$** **b) $\{90°\}$ o $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$**
c) $\{45°, 135°\}$ o $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ **d)$\{60°, 330°\}$**
e)$\{30°, 150°, 270°\}$ **f)$\{0°, 60°, 180°, 300°\}$**
g)$\{30°, 150°, 210°, 330°\}$ **h)$\{30°, 90°, 270°, 330°\}$**

2. Resuelva en **R** la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2(1 + \cos x) = \frac{1 - sen\, x}{1 - \cos x}$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones en R, expresando el resultado en radianes:

a) $$cos^2 x + senx + 1 = 0$$

Respuesta: S = $\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in Z \right\}$

b) $$3 \cdot tg^3 x - tg\, x = 0$$

$$\boldsymbol{S = \{0 + k\pi, con\ k \in Z\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, con\ k \in Z \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, con\ k \in Z \right\}}$$