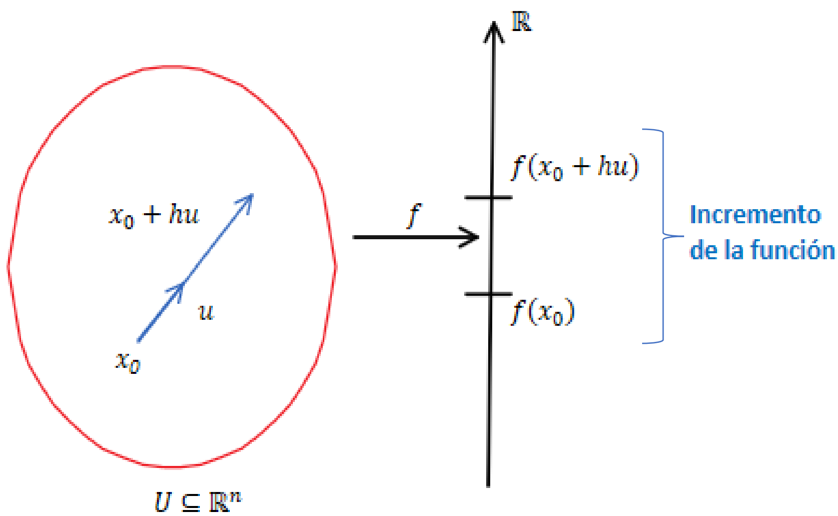
Derivada direccional

La derivada direccional de una función

Consideremos la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto U. Sea u un vector unitario dado en $\mathbb{R}^n$. Ahora estudiaremos la variación de la función f en el punto $x_0 \in U$ cuando su variable $x \in U$ varía en la dirección del vector u.

La idea es la siguiente, en el caso de las derivadas y en las derivadas parciales el incremento de la variable $x \in U$ corresponde a la variable que se va a derivar. Lo que haremos ahora será tomar el incremento de la variable, comenzando en el punto $x_0 \in U$ y yendo en la dirección del vector unitario $u \in U$ dado. Esquemáticamente tenemos:



Variación de la función en la dirección de u

Nótese que en este caso la variable $x \in U$ se mueve h unidades en dirección del vector u, pasando del punto x_0 al punto $x_0 + hu$, de este modo, la magnitud de esta variación es

$$\|hu\| = |h|\|u\| = |h|$$

Así, tomando el cuociente del incremento de la función

$$f(x_0 + hv) - f(x_0)$$

dividiendo por h y tomando el límite cuando h tiende a 0 , obtenemos la manera de variar de f en x_0 en la dirección de u.

A esto lo llamaremos derivada direccional de f en x_0 en la dirección del vector dado u .

Definición (derivada direccional)

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \to \mathbb{R}$ función, $x_0 \in U$ y $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$. Se llama derivada direccional de f en x_0, en la dirección de u y se anota

$$\boldsymbol{f_u(x_0)\ o\ \frac{\partial f}{\partial u}(x_0)}$$

al valor definido por: $\boldsymbol{f_u(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu) - f(x_0)}{h}}$

Observación

1. Si $u \neq 0$ y $\|u\| \neq 1$ entonces

$$\boldsymbol{\frac{u}{\|u\|}\ \text{es unitario}}$$

luego en ese caso decimos que $\boldsymbol{f_w(x_0)}$ es la derivada direccional en x_0 respecto al vector

$$\boldsymbol{w = \frac{u}{\|u\|}}$$

2.- Si no se impone la condición $\|u\| = 1$, $f_u(x_0)$ se llama simplemente derivada de f respecto al vector u en el punto x_0 .

Ejemplo

Si $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Hallar $f_u(x,y)$.

Solución

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Por lo tanto u es unitario

$$f_u(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x,y) + h(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x + h\frac{\sqrt{2}}{2}, y + h\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x + h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - x^2 - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h\sqrt{2}x + \frac{h^2}{2} + y^2 + h\sqrt{2}y + \frac{h^2}{2} - x^2 - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + h\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + h\right)$$

$$= \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

3.- Si $u = (1{,}0) = e_1$ (vector canónico de $\mathbb{R}^2$) entonces la derivada direccional es

$$f_{e_1}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y) + h(1{,}0)\big) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y) + (h,0)\big) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Luego

$$f_{e_1}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Por consiguiente, se deduce de este hecho que la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

tiene la misma dirección que el eje X.

En general sea $x_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ si $u = e_i = (0{,}0, \cdots, 1, \dots, 0)$ es el vector canónico $i - ésimo$ de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$f_{e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i)) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x_1, x_2, \cdots, x_n) + h(0{,}0, \cdots 1, \dots, 0))\big) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

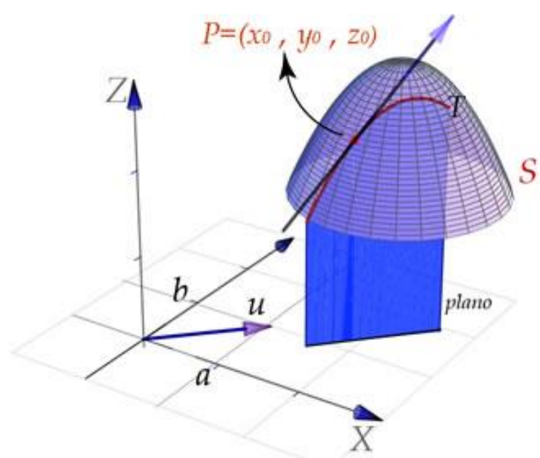
Luego

$$f_{e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Por tanto, las derivadas direccionales respecto a los vectores e_1,$e_2, \cdots, e_n$ determinan derivadas parciales con dirección los ejes coordenados.

Interpretación geométrica de la derivada direccional en $\mathbb{R}^3$

La derivada direccional de la función $z = f(x, y)$ representa la pendiente de la recta tangente L_T con dirección la del vector u en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la curva determinada por la intersección de la superficie y el plano vertical con sentido la del vector unitario u.



Propiedades de las derivadas direccionales

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \to \mathbb{R}$ función, $x \in U$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$ y $\|v\| = 1$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

1)$f_{\alpha u}(x) = \alpha\, f_u(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $f_{u+v}(x) = f_u(x) + f_v(x)$

3) $f_{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i}(x) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_{u_i}(x)$, $\forall\, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $f_{u_i}(x)$ existen y son continuas en $Dom\ f$ y u_i unitarias $\forall i$.

Observación

Con estas propiedades podemos evaluar la derivada direccional

$$f_u(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x)$$

sin necesidad de recurrir al cálculo del límite de la definición. En efecto:

Si $u = (u_1, \cdots, u_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ entonces $\forall x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

$$f_u(x) = f_{\sum_{i=1}^{n} u_i e_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i f_{x_i}(x)$$

Por lo tanto

$$f_u(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Lo cual es equivalente para $x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \cdots (3)$$

O bien

$$f_u(x) = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \cdots (4)$$

Ejemplo

Sean $f(x, y) = xy + y^2$, $x_0 = (2,1)$ y $u = (2,3)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$

Solución

Ocupando resultado dado en (3) o en (4) tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y \ \Rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2y \ \Rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=2+2=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,1)=(2,3)\cdot(1,4)=2+12=14$$

Definición (Gradiente)

Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U\to\mathbb{R}$ función y sea $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Se define el gradiente de f a la expresión

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$o\ \nabla f(x)=\left(f_{x_1}(x),f_{x_2}(x),\cdots,f_{x_n}(x)\right)$$

Propiedades

Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ funciones donde $U=Dom\ f\cap Dom\ g$, luego el operador ∇ cumple las siguientes propiedades

1.- $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

2.-$\nabla(\alpha f)=\alpha\nabla f$

3.- $\nabla(f\cdot g)=g\nabla f+f\nabla g$

4.- $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g)$

Observación (la derivada direccional como producto punto)

Sabemos que

$$f_u(x) = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot \left(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \cdots, f_{x_n}(x)\right)$$

Introducido la notación de gradiente se tiene que entonces que

$$f_u(x) = u \ \cdot \nabla f(x)$$

Ejemplo

Evaluar la derivada direccional de la función $f(x,y) = \frac{x-y^2}{x^2+y}$ en $(3,0)$ en la dirección dada por el vector $w = 2i - 4j$; donde $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$.

Solución

Calculemos el gradiente correspondiente

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right)$$

Siendo

$$f_x(x,y) = \frac{-x^2 + y + 2xy^2}{(x^2+y)^2} \ \ ;$$

$$f_y(x,y) = \frac{-2yx^2 - x - y^2}{(x^2+y)^2}$$

resulta

$$\nabla f(x,y) = \frac{-x^2 + y + 2xy^2}{(x^2+y)^2} i - \frac{2yx^2 + x + y^2}{(x^2+y)^2} j$$

En el punto $(3,0)$ el gradiente es

$$\nabla f(3,0) = -\frac{1}{9}i - \frac{1}{27}j = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$$

Ahora teniendo en cuenta que el vector

$$w = 2i - 4j$$

no es unitario lo transformamos en unitario haciendo

$$u = \frac{w}{\|w\|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}}i + \frac{(-4)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}}j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}i - \frac{2}{\sqrt{5}}j = \frac{\sqrt{5}}{5}i - \frac{2\sqrt{5}}{5}j = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Siendo la derivada direccional

$$f_u(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y)$$

entonces

$$f_u(3,0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{1}{27}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{45} + \frac{2\sqrt{5}}{135} = \frac{-135\sqrt{5} + 90\sqrt{5}}{(45)\,(135)}$$

$$= \frac{-45\sqrt{5}}{(45)\,(135)}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{135}$$

Valor máximo y mínimo de la derivada direccional

Siendo la derivada direccional el producto punto entre los vectores ∇f y u; y teniendo en cuenta la definición de dicho producto, se tiene

$$f_u(x) = u \cdot \nabla f(x)$$

$$f_u = \|u\| \|\nabla f\| \cos \theta$$

donde θ es ángulo entre los vectores y $0 \leq \theta \leq \pi$.

Como $\|u\| = 1$, resulta

$$f_u = \|\nabla f\| \cos \theta$$

Se observa que si $\theta = 0^0$, la derivada direccional es su máximo pues $\cos 0^0 = 1$ y por tanto $f_u = \|\nabla f\|$.

En este caso el vector u tiene la misma dirección que el vector gradiente ∇f. Por consiguiente, la dirección de máximo crecimiento de la función f es dada por la dirección del gradiente y la razón de máximo crecimiento f_u es su norma (o módulo)

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la derivada direccional es nula pues $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Entonces el vector u es perpendicular al vector gradiente. Por consiguiente, la razón de cambio de la función es nula en las direcciones perpendiculares al del vector gradiente.

Si $\theta = \pi$, la derivada direccional es mínima pues $\cos \pi = -1$ y por tanto $f_u = -\|\nabla f\|$. Esto significa que , la dirección de mínimo crecimiento de la función f es dada por la dirección opuesta del gradiente y la razón de mínimo decrecimiento f_u es menos su norma (o módulo). En este caso el vector u tiene la dirección opuesta a la del vector gradiente.

Ejemplo

Si $f(x,y,z) = xyz$ entonces $\nabla f = (yz, xz, xy)$ y

$\|\nabla f\| = (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)^{1/2}$

De ahí,

$$\nabla f(1,2,3) = (6,3,2) \Rightarrow$$

$$\|\nabla f(x)\| = \|\nabla f(1,2,3)\| = 7$$

$$w = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \frac{1}{7}(6,3,2)\ (unitario)$$

Por tanto, el máximo valor de la derivada direccional de la función f en el punto $x = (1,2,3)$ y con dirección dada por el vector w, $f_w(x)$ es 7 y en ese caso el vector w tiene la misma dirección que $\nabla f(x)$, es decir, son paralelos.