Funciones implícitas definidas por sistemas de ecuaciones

Problema

Sea el sistema

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

que bajo ciertas condiciones define implícitamente las funciones $y=y(x)$ y $z=z(x)$. Se quiere determinar las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$.

Solución

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz=0 \cdots (1)$$

$$dg=g_x dx+g_y dy+g_z dz=0 \cdots (2)$$

Entonces, de (1) y (2) es

$$\begin{cases} f_y dy+f_z dz=-f_x dx \\ g_y dy+g_z dz=-g_x dx \end{cases}$$

Usando regla de Cramer, resulta que si

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$dy=\frac{\begin{vmatrix} -f_x dx & f_z \\ -g_x dx & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

Por propiedad del determinante, se tiene que

$$dy = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} dx$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

Análogamente

$$dz = \frac{\begin{vmatrix} f_y & -f_x dx \\ g_y & -g_x dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

O bien

$$dz = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} dx$$

Luego

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

Definición

Se denomina Jacobiano de las funciones f y g con respecto a las variables y y z ; y se denota como

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}$$

al determinante $\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}$

Esto es,

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la notación los resultados anteriores obtenidos se pueden indicar como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} \; ; \; \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dy}$ si

$$\begin{cases} 2x - y^2 + 5z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z^4 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Solución

Considerando

$$f = 2x - y^2 + 5z + 3$$

y

$$g = 3x - 4y - z^4$$

el jacobiano es

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 5 \\ -4 & -4z^3 \end{vmatrix} \qquad \boxed{\begin{array}{c} f = 2x - y^2 + 5z + 3 \\ g = 3x - 4y - z^4 \end{array}}$$

$$= 8yz^3 + 20$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4z^3 \end{vmatrix}}{8yz^3 + 20} = \frac{8z^3 + 15}{8yz^3 + 20}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -2y & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{8yz^3 + 20} = \frac{6y - 8}{8yz^3 + 20}$$

Ejemplo 2

Evaluar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ en $p_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\pi, 0,0)$ si

$$\begin{cases} 4\cos x + sen\ y\cos z = -4 \\ sen\ x + \cos y\ sen\ z = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Solución

Considerando

$$f = 4\cos x + sen\ y\cos z + 4$$

y

$$g = sen\ x + \cos y\ sen\ z$$

el jacobiano es

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y \cos z & -\,seny\ sen\ z \\ -\,sen\ y\ sen\ z & \cos y \cos z \end{vmatrix}$$

$$= cos^2 y\ cos^2 z - sen^2 y\ sen^2 z$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -4\ \ sen\ x & -sen\ y\ sen\ z \\ \cos x & \cos y \cos z \end{vmatrix}}{cos^2 y\ cos^2 z - sen^2 y\ sen^2 z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f &= 4\cos x + sen\ y \cos z \\ g &= sen\ x + \cos y\ sen\ z \end{aligned}}$$

En el punto $p_0 = (\pi, 0{,}0)$, $\frac{dy}{dx}$ resulta

$$\frac{dy}{dx}(\pi, 0{,}0) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0$$

Ahora calculemos $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \cos y \cos z & -4\ sen\ x \\ -\,sen\ y\ sen\ z & \cos x \end{vmatrix}}{cos^2 y\ cos^2 z - sen^2 y\ sen^2 z}$$

En el punto $p_0 = (\pi, 0{,}0)$, $\frac{dz}{dx}$ resulta

$$\frac{dz}{dx}(\pi, 0{,}0) = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 1$$

Consideremos ahora el siguiente sistema

$$\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0 \\ g(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

que define implícitamente las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.
Se quiere determinar las derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solución

Procederemos de manera similarmente como se hizo antes.

$$df = f_x dx + f_y dy + f_u du + f_v dv = 0 \cdots (3)$$

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_u du + g_v dv = 0 \cdots (4)$$

Luego, de (3) y (4) es

$$\begin{cases} f_u du + f_v dv = -f_x dx - f_y dy \\ g_u du + g_v dv = -g_x dx - g_y dy \end{cases}$$

El sistema tiene solución única si el jacobiano

$$\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces aplicando la regla de Cramer, se tiene

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -f_x dx - f_y dy & f_v \\ -g_x dx - g_y dy & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

Por propiedad de determinante, resulta

$$du = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} dx - \frac{\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} dy \cdots (5)$$

Además,

$$u = u(x, y)$$

luego se tiene que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \cdots (6)$$

Comparando las expresiones (5) y (6), se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

O bien

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Análogamente se obtienen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_x \\ g_u & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} \;\; ; \;\; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

O bien

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \;\; ; \;\; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Ejemplo 3

El sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4y + u^3 + v^2 = 0 \\ 3x + y^3 - 2u - v = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$; determinar

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ b) $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

Solución

Consideremos

$$f = x^2 - 4y + u^3 + v^2$$

y

$$g = 3x + y^3 - 2u - v$$

Entonces

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & 2v \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2x + 6v}{-3u^2 + 4v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -4 & 2v \\ 3y^2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & 2v \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 6vy^2}{-3u^2 + 4v}$$

b)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_x \\ g_u & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 3u^2 & 2x \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & 2v \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-9u^2-4x}{-3u^2+4v}=\frac{9u^2+4x}{3u^2-4v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 3u^2 & -4 \\ -2 & 3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & 2v \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-9u^2y^2+8}{-3u^2+4v}$$

Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{cases} f(x,t,u,v)=0 \\ g(x,t,u,v)=0 \\ h(x,t,u,v)=0 \end{cases}$$

que define implícitamente las funciones de una variable independiente $t=t(x)$; $u=u(x)$ y $v=v(x)$; procediendo como en los casos anteriores se tiene que

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,u,v)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}}\ ;\ \frac{du}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,x,v)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}}\ ;$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,x)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}}$$

Veamos a continuación un par de ejemplos de este resultado.

Ejemplo 4

Hallar $\dfrac{dt}{dx}$ si el sistema

$$\begin{cases} t+2x-u=0 \\ v+x-3t=0 \\ u^3+v^3+1=0 \end{cases}$$

define implícitamente las funciones de una variable independiente $t=t(x)$; $u=u(x)$ y $v=v(x)$.

Solución

Si

$$f=t+2x-u$$

$$g=v+x-3t$$

$$h=u^3+v^3+1$$

Resulta

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,u,v)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}}$$

O bien

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_u & f_v \\ g_x & g_u & g_v \\ h_x & h_u & h_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_t & f_u & f_v \\ g_t & g_u & g_v \\ h_t & h_u & h_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}}=-\frac{2u^2-v^2}{u^2+3v^2}$$

Ejemplo 5

Sea el sistema

$$\begin{cases} t - x + u + 2 = 0 \\ 4\, cosv - x + 4 = 0 \\ 3t - sen\, u - 6 = 0 \end{cases}$$

que define implícitamente las funciones siguientes,

$$t = t(x); u = u(x) \text{ y } v = v(x).$$

Evaluar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dv}{dx}$ $en\, p_0 = (x_0, t_0, u_0, v_0) = \left(4{,}2{,}0, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Sean

$$f(x, t, u, v) = t - x + u + 2$$

$$g(x, t, u, v) = 4\, cosv - x + 4$$

$$h(x, t, u, v) = 3t - sen\, u - 6$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,x,v)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_t & f_x & f_v \\ g_t & g_x & g_v \\ h_t & h_x & h_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_t & f_u & f_v \\ g_t & g_u & g_v \\ h_t & h_u & h_v \end{vmatrix}}$$

Donde

$$f_t = 1\,;\ f_x = -1\,;\ f_u = 1\,;\ f_v = 0$$

$$g_t = 0;\ g_x = -1\,;\ g_u = 0\,;\ g_v = -4senv$$

$$h_t = 3\,;\ h_x = 0\,;\ h_u = -\cos u\ ;\ h_v = 0$$

Luego

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4\,sen\,v \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4sen\,v \\ 3 & -\cos u & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4\,sen\,v \end{vmatrix}}{4sen\,v\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -\cos u \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{3(4\,sen\,v)}{4\,sen\,v\,(-cosu - 3)} = \frac{3}{3 + \cos u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}(P_0) = \frac{du}{dx}\left(\left(4{,}2{,}0{,}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

Similarmente

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,x)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(t,u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_t & f_u & f_x \\ g_t & g_u & g_x \\ h_t & h_u & h_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_t & f_u & f_v \\ g_t & g_u & g_v \\ h_t & h_u & h_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -\cos u & 0 \end{vmatrix}}{4\,sen\,v\,(-cosu - 3)} = -\frac{1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -\cos u \end{vmatrix}}{4\,sen\,v\,(-cosu - 3)}$$

$$= -\frac{-cosu - 3}{4\,sen\,v\,(-cosu - 3)} = \frac{-1}{4\,sen\,v}$$

Entonces

$$\frac{dv}{dx}(P_0) = \frac{dv}{dx}\left(\left(4{,}2{,}0{,}\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{4}$$

A continuación, veremos que en general un sistema puede definir n funciones implícitas siempre que se cumplan ciertas condiciones que enunciamos en seguida.

Teorema de Cauchy – Dini

Sea un sistema de n funciones continuas

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

para $i = 1,2, \cdots, n$; así como también sus derivadas parciales en una vecindad de $p_0 = \left(a_1, a_2, \cdots, a_{m,} b_1, b_2, \cdots, b_n\right)$, tal que las funciones $f_i(p_0) = 0$ y el jacobiano

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}(p_0) \neq 0$$

entonces existen n funciones $u_i = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ continuas en la vecindad considerada y que satisfacen el sistema de ecuaciones que la definen implícitamente.

La derivada parcial de una función u_n con respecto a una variable x_m está dada por la fórmula

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_m} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, x_m)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}}$$

Ejemplo 5

Analizar la existencia de las funciones $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$ ligadas por el sistema

$$\begin{cases} 2x + 10y - 4z + u^3 + \dfrac{v^3}{3} + \dfrac{10}{3} = 0 \\ x^2 - y + zu + 2v - 2 = 0 \end{cases}$$

en una vecindad de $p_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0,2,6,1,-1)$ aplicando el teorema de Cauchy – Dini.

Solución

Siendo

$$f = 2x + 10y - 4z + u^3 + \frac{v^3}{3} + \frac{10}{3}$$

Y

$$g = x^2 - y + zu + 2v - 2$$

Entonces se tiene

$$f(0,2,6,1,-1) = 0 \text{ y } g(0,2,6,1,-1) = 0$$

Las derivadas parciales

$$f_u = 3u^2 \ ; \ f_v = v^2; \ f_x = 2 \ ; \ f_y = 10; \ f_z = -4$$

$$g_u = z \ ; \ g_v = 2; \ g_x = 2x \ ; \ g_y = -1; g_z = u$$

Y son funciones son continuas en el entorno de p_0. Ahora bien, el Jacobiano de f y g es

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & v^2 \\ z & 2 \end{vmatrix} = 6u^2 - zv^2$$

Y en $p_0 = (0,2,6,1,-1)$ resulta

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(p_0) = 6(1)^2 - 6(1)^2 = 0$$

Luego, el teorema de Cauchy – Dini no es aplicable pues el Jacobiano es nulo.

Ejemplo 6

Verificar la existencia de las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ definidas implícitamente por el sistema

$$\begin{cases} u^4 + v^4 - x^2 u - y^2 = 0 \\ 2u^2 + 4v^2 + y^2 + x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

en una vecindad de $p_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,1,1,1)$ aplicando el teorema de Cauchy – Dini y hallar $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, donde $w = 4uv$.

Solución

Si llamamos

$f = u^4 + v^4 - x^2 u - y^2 = 0$ y $g = 2u^2 + 4v^2 + y^2 + x^2 - 8$

Se tiene

$$f(1,1,1,1) = 0$$

$$g(1,1,1,1) = 0$$

Las derivadas parciales

$$f_u = 4u^3 - x^2 \; ; f_v = 4v^3 \; ; \; f_x = -2xu \; ; \; f_y = -2y$$

$$g_u = 4u \; ; \; g_v = 8v \; ; \; g_x = 2x \; ; \; g_y = 2y$$

y las funciones son continuas en la vecindad de p_0

El jacobiano es

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u^3 - x^2 & 4v^3 \\ 4u & 8v \end{vmatrix} = 8v(4u^3 - x^2) - 16uv^3$$

Y en p_0 , resulta

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(p_0) = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1) = 24 - 16 = 8 \neq 0$$

Luego el sistema define implícitamente las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en la vecindad de p_0.

Calculemos ahora $\frac{\partial w}{\partial x}$ donde $w = 4uv$; en este caso se tiene

$$\begin{tikzcd}
& w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
u \arrow[dr] & + & v \arrow[dl] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4v\frac{\partial u}{\partial x} + 4u\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -2xu & 4v^3 \\ 2x & 8v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4u^3 - x^2 & 4v^3 \\ 4u & 8v \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{16xuv + 8xv^3}{8v(4u^3 - x^2) - 16uv^3}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_x \\ g_u & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 4u^3 - x^2 & -2xu \\ 4u & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4u^3 - x^2 & 4v^3 \\ 4u & 8v \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-2x(4u^3 - x^2) - 8xu^2}{8v(4u^3 - x^2) - 16uv^3}$$

Luego

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4v\,\frac{16xuv + 8xv^3}{8v(4u^3 - x^2) - 16uv^3} - 4u\,\frac{2x(4u^3 - x^2) + 8xu^2}{8v(4u^3 - x^2) - 16uv^3}$$

De tarea

Calcular $\frac{\partial w}{\partial y}$

Apéndice:

Regla de Cramer

Dado un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

entonces tiene solución única dado por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

siempre que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Esta regla se extiende a n ecuaciones con n incógnitas.