Integral de línea

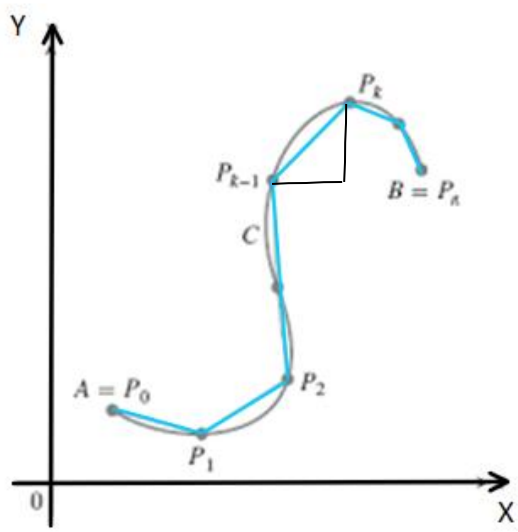
Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva definida en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)\ ; a \leq t \leq b$$

Supongamos que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ poseen primeras derivadas continuas en $[a, b]$. También supongamos que las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultáneamente iguales a cero, lo cual significa que la curva no tiene esquinas o puntas (la curva es suave). Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2 \cdots, P_n = B$ (ver figura)



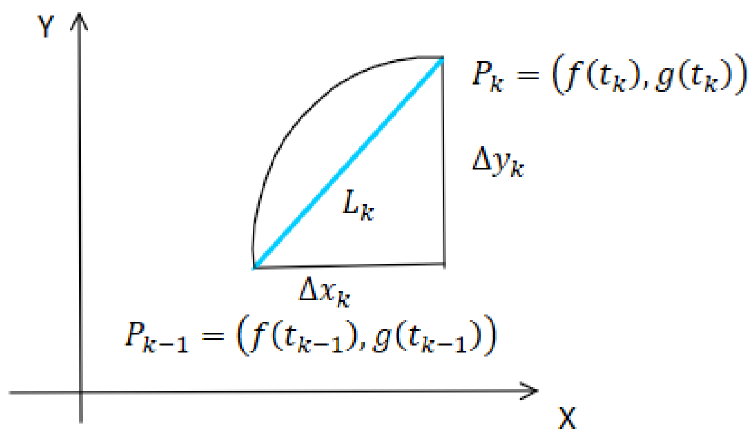
Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ en :

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

donde $P_k = \left(f(t_k), g(t_k)\right)$. Se unen los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (ver figura anterior).

Un segmento representativo tiene longitud

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$



Si Δt_k es pequeño, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud de arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, sabemos que existen al menos c_k y c_k' en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(c_k)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(c_k')\Delta t_k$$

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta desde $t = a$ a $t = b$, sin invertir el sentido del movimiento y sin pasar dos veces por el mismo punto, una aproximación a la longitud (aún por definir) de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f'(c_k)\Delta t_k)^2 + (g'(c'_k)\Delta t_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(c_k)\right)^2 + \left(g'(c'_k)\right)^2}\,\Delta t_k$$

Por tanto, cuando $n \longrightarrow \infty \Rightarrow$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(c_k)\right)^2 + \left(g'(c'_k)\right)^2}\,\Delta t_k$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$$

Por tanto, podemos definir la longitud de la curva desde A a B como:

Definición

Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = x(t)$ y $y = y(t)$; $a \leq t \leq b$ donde x' y y' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y la trayectoria de la curva C recorre conforme a t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces la longitud de C es la integral

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt}$$

Observación

La fórmula anterior también se puede escribe como

$$x = x(t) \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$y = y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

Ejemplo

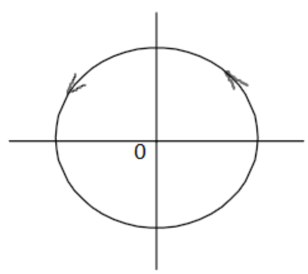
Con base a la definición, determine la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r\cos t$$

$$y = r\ sen\ t\ ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución

t varia de 0 a 2π, la circunferencia se recorre exactamente una sola vez, así tenemos que el perímetro es;



$$\frac{dx}{dt} = -r\ sen\ t\ ;\ \frac{dy}{dt} = r\ cos\ t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(cos^2 t + sen^2 t) = r^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r[t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Observación

1) Si para $a \leq t \leq b$, $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ parametriza una curva C entonces $r'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$. Luego la norma del vector es:

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}$$

Por consiguiente

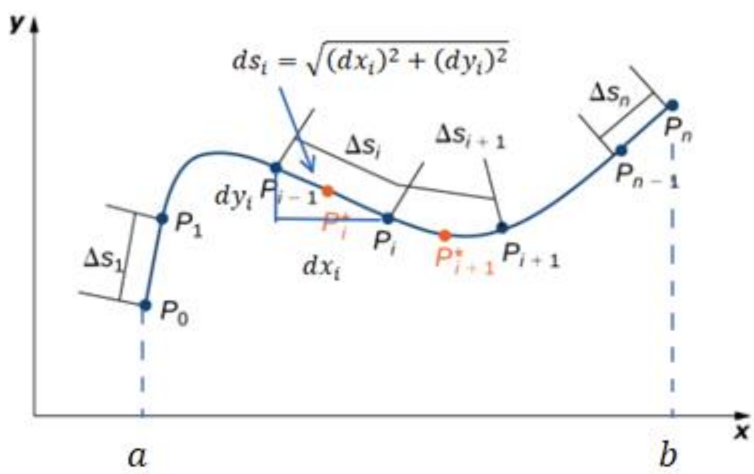
$$L = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

Por tanto, la longitud de la curva C es dada por

$$L = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

También L se puede escribir como,

2) Si se particiona la curva C en n trozos desde a a b



$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} ds_i = \int_a^b ds \approx \int_C ds$$

$$\therefore\ L = \int_a^b ds = \int_C ds = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

Definición

Una curva C se dice que es regular (o alisada) si tiene una parametrización $r(t) = (x(t), y(t))$ definida en un intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que las derivadas x'y y' son continuas en I y no se anula simultáneamente excepto tal vez en los extremos de I.

Definición

Una curva C se dice que es regular parte por parte si se puede partir el intervalo I en subintervalos cerrados de manera que C sea regular en cada subintervalo. La representación de una curva regular no tiene puntas.

En matemáticas, **una integral de línea es aquella integral cuya función para integrar es evaluada sobre una curva**. **La función para integrar puede ser un campo escalar o un campo vectorial**.

Definición (Integral de línea de un campo escalar)

Sea F un campo escalar continua dado por

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y)$$

Y sea C una curva acotada contenida en el dominio de F, regular y parametrizada por :

$$r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Por consiguiente:

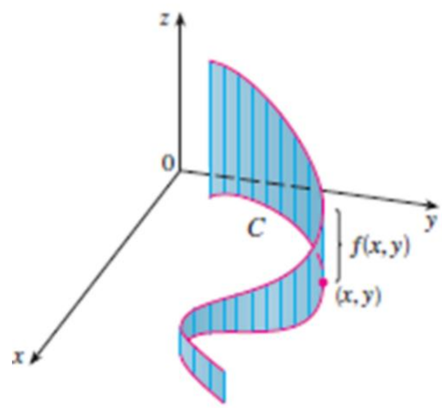
Se define la integral de línea de F con respecto a la curva C como

$$\int_C F(x,y)d\,s = \int_a^b F\big(r(t)\big)\|r'(t)\|dt$$

$$\boxed{L_C = \int_C ds = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt}$$

Interpretación geométrica

Si $F(x,y) \geq 0$ sobre los puntos de C, la integral anterior puede interpretarse como el área lateral de la porción de superficie cilíndrica recta que tiene como base en $z = 0$ la curva $z = F(x,y)$ para los que $(x,y) \in C$ (ver figura).



Propiedades

Sean F y G dos campos escalares continuas dado por

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ y } G: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto F(x,y) \qquad (x,y) \mapsto G(x,y)$$

Sea C una curva acotada contenida en el dominio de F y G regular y parametrizada por:

$$r: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

1) $\int_C \big(F(x,y)+G(x,y)\big)ds = \int_C F(x,y)\,ds + \int_C G(x,y)ds$

2) $\int_C k\,F(x,y)ds = k\int_C F(x,y)\,ds\,; k = cte.real$

3) $\int_C F(x,y)ds = \int_{C_1} F(x,y)ds + \int_{C_2} F(x,y)ds\ \ ; C = C_1 \cup C_2$

4) $\int_C ds = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt$; longitud de la curva C

5) $A\ = \int_C F(x,y)ds;$ área de una superficie parametrizada

6) La integral de línea de un campo escalar es independiente de la parametrización escogida para la trayectoria de integración.

Obs. La integral de línea también puede evaluarse, no solo con respecto a la longitud de la curva, sino con respecto a las variables x e y. Así pues, sea $F(x,y)$ un campo escalar, y sea C una curva dada paramétricamente por r: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y donde $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, entonces la integral de línea de F a lo largo de la curva C con respecto x, se define como

$$\int_C F(x,y)dx$$

Y la integral de línea de F a lo largo de la curva C respecto a y,

$$\int_C F(x,y)dy$$

Estas integrales se plantearán en términos del parámetro t de la curva C, respectivamente, de la siguiente manera:

Dado que

$$dx = x'(t)dt$$

$$dy = y'(t)dt$$

tenemos que

$$\int_C F(x,y)dx = \int_a^b F\big(r(t)\big)\, x'(t)dt$$

$$\int_C F(x,y)dy = \int_a^b F\big(r(t)\big)\, y'(t)dt$$

Todos los resultados anteriores se pueden extender para una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$. En efecto sea el campo escalar

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$$

Y sea C una curva acotada contenida en el dominio de F, parametrizada y regular :

$$r: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

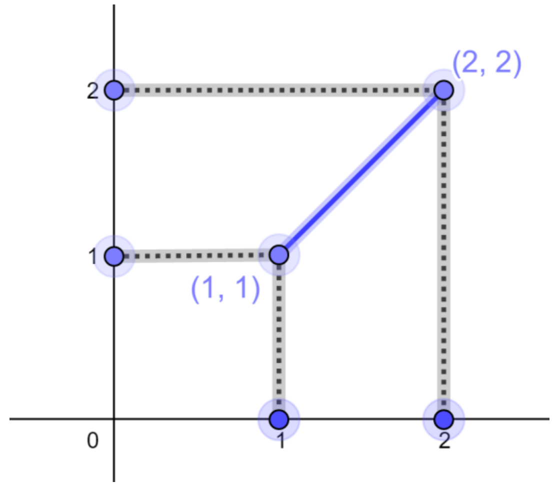
donde la integral de línea de F con respecto a la curva C es

$$\int_{\mathrm{C}} F(x,y,z)d\,s = \int_a^b F\big(r(t)\big)\|r'(t)\|dt$$

Las propiedades dadas en la integral de línea de un campo escalar de $\mathbb{R}^2$, también se cumple para un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos

Sea C el segmento de recta $y = x$ con $x \in [1,2]$



Calcular: $\int_C \frac{1}{2x-y} ds$

Solución

Usaremos la parametrización $r(t) = (t,t)$; $t \in [1,2]$ para la curva C. Luego

$$r'(t) = (1,1) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2x-y} \Rightarrow F\big(r(t)\big) = F(t,t) = \frac{1}{2t-t} = \frac{1}{t}$$

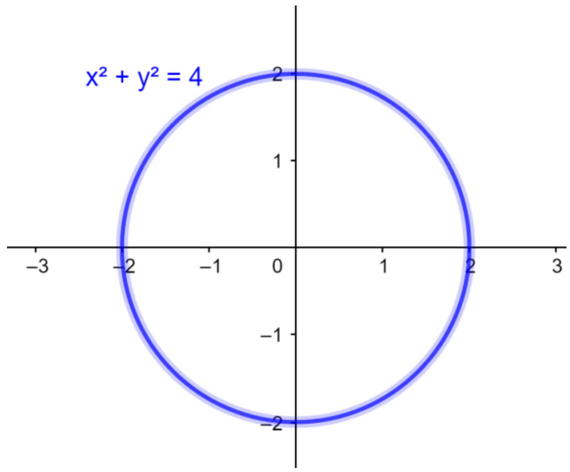
Por tanto,

$$\int_C \frac{1}{2x-y} d\,s = \int_1^2 F\big(r(t)\big)\|r'(t)\|dt$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{t} dt = \sqrt{2}(ln\ t)_1^2 = \sqrt{2}\ln 2$$

2) Calcular $\int_C (x^2+y^2)^5 \, ds$ donde $C: x^2+y^2=4$

Solución



Parametrización de $C: x^2+y^2=4$

$$r(t) = (2\cos t, 2\,sen\ t)\ ;\ t \in [0,2\pi]$$

$$r'(t) = (-2sen\ t, 2\cos t)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{4sen^2t + 4cos^2t} = \sqrt{4} = 2$$

$$\int_C (x^2+y^2)^5 \, ds = \int_0^{2\pi} F\big(r(t)\big)\|r'(t)\|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4cos^2t + 4sen^2t)^5 2dt = \int_0^{2\pi} (4(cos^2t + sen^2t))^5 2dt$$

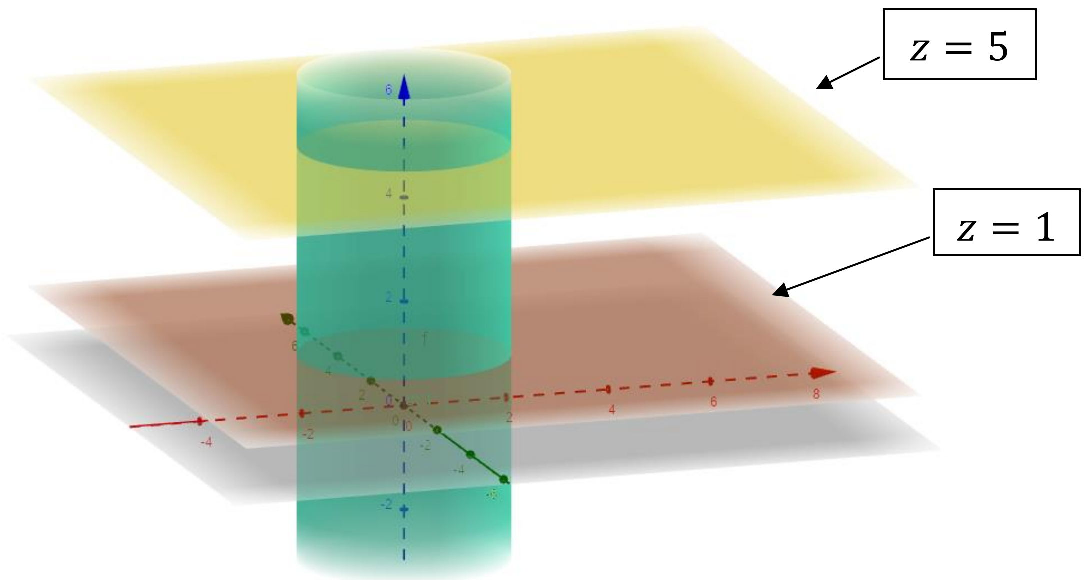
$$= \int_0^{2\pi} (4^5 2)\, dt = 4^5 2[t]_0^{2\pi}$$

$$= 4^5 2(2\pi)$$

$$= 4^6\pi = 4096\,\pi$$

3) Aplicar la integral de línea de un campo escalar para determinar área de la superficie de un cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = 1$ y $z = 5$.

Solución



$$C: x^2 + y^2 = 4$$

$$r(t) = (2\cos t, 2\,sen\ t)\ ;\text{parametrización del cilindro}$$

$$r'(t) = (-2\,sen\ t, 2\cos t\ )$$

$$\|r'(t)\| = 2$$

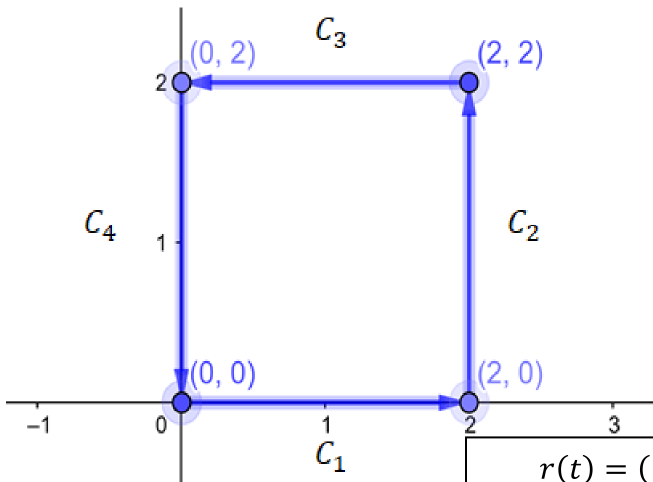
$$A = \int_C F\,ds = \int_0^{2\pi} F\big(r(t)\big)\|r'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} (4)\cdot(2)\,dt = 16\pi$$

De lo que sabemos

$$A_C = \pi r^2 h = \pi\cdot(2)^2\cdot 4 = 16\pi$$

4) Determinar $\int_{C} (x + 4\sqrt{y})ds$

donde C es la curva correspondiente a un cuadrado de vértices $(0,0), (2,0), (2,2)$ y $(0,2)$, ver figura.



$$r(t) = (1-t)A + tB\,, \quad t \in [0,1]$$

$$r(t) = A + (B-A)t$$

Solución

Parametrización punto por punto:

$$\begin{aligned} C_1: r_1(t) &= (0,0) + t\big((2,0) - (0,0)\big) \\ &= (0,0) + t(2,0) \\ &= (0,0) + (2t, 0) \\ &= (2t, 0) \ \ , t \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2: r_2(t) &= (2,0) + t\big((2,2) - (2,0)\big) \\ &= (2,0) + t(0,2) \\ &= (2,0) + (0,2t) \\ &= (2,2t) \ \ , t \in [0,1] \end{aligned}$$

$$C_3: r_3(t) = (2,2) + t\big((0,2) - (2,2)\big)$$
$$= (2,2) + t(-2,0)$$
$$= (2,2) + (-2t, 0)$$
$$= (2 - 2t, 2)\ \ , t \in [0,1]$$
$$C_4: r_4(t) = (0,2) + t\big((0,0) - (0,2)\big)$$
$$= (0,2) + t(0,-2)$$
$$= (0,2) + (0,-2t)$$
$$= (0,2 - 2t)\ \ , t \in [0,1]$$

Resumiendo $\forall\ t \in [0,1]$

$$C_1: r_1(t) = (2t, 0) \Rightarrow {r_1}'(t) = (2,0)$$
$$C_2: r_2(t) = (2,2t) \Rightarrow {r_2}'(t) = (0,2)$$
$$C_3: r_3(t) = (2 - 2t, 2) \Rightarrow {r_3}'(t) = (-2,0)$$
$$C_4: r_4(t) = (0,2 - 2t)\ \Rightarrow {r_4}'(t) = (0,-2)$$

De ahí tenemos

$$\|{r_1}'(t)\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\|{r_2}'(t)\| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\|{r_3}'(t)\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\|{r_4}'(t)\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\boxed{\int_C \left(x + 4\sqrt{y}\right) ds}$$

Luego

$$\int_0^1 F\big(r_1(t)\big)\|{r_1}'(t)\|dt = \int_0^1 (2t)2dt = 2[t^2]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 F\big(r_2(t)\big)\|r_2{}'(t)\|dt = \int_0^1 \big(2 + 4\sqrt{2t}\big)\,2dt$$

$$= \int_0^1 \big(4 + 8\sqrt{2t}\big)dt = \int_0^1 4dt + \int_0^1 8\sqrt{2}t^{1/2}dt$$

$$= 4[t]_0^1 + 8\sqrt{2}\int_0^1 t^{1/2}dt = 4 + 8\sqrt{2}\left(\left[\frac{2\,t^{3/2}}{3}\right]_0^1\right)$$

$$= 4 + \frac{16\sqrt{2}}{3}(1-0)$$

$$= 4 + \frac{16\sqrt{2}}{3} = 11.5$$

$$\int_0^1 F\big(r_3(t)\big)\|r_3{}'(t)\|dt = \int_0^1 \big(2 - 2t + 4\sqrt{2}\big)2dt$$

$$= \int_0^1 \big(4 - 4t + 8\sqrt{2}\big)dt$$

$$= \int_0^1 4dt - \int_0^1 4t\,dt + \int_0^1 8\sqrt{2}dt$$

$$= 4[t]_0^1 - 2[t^2]_0^1 + 8\sqrt{2}\int_0^1 dt$$

$$= 4(1-0) - 2(1-0) + 8\sqrt{2}([t]_0^1)$$

$$= 4 - 2 + 8\sqrt{2}(1-0)$$

$$= 2 + 8\sqrt{2}$$

$$= 13.3$$

Por último

$$\int_0^1 F\big(r_4(t)\big)\|r_4{}'(t)\|dt = \int_0^1 \big(0 + 4\sqrt{2-2t}\big)2dt$$

$$= \int_0^1 \big(8\sqrt{2-2t}\big)dt = 8\int_0^1 \sqrt{2-2t}dt$$

$$= -\frac{8}{3}\Big[\big(\sqrt{2-2t}\big)^3\Big]_0^1 = \frac{16}{3}\sqrt{2} = 7.5$$

$$\int\limits_{C} \big(x + 4\sqrt{y}\big)ds = 2 + 11.5 + 13.3 + 7.5 = 34.3$$

$C = C_1 \cup C_2 \cup C \cup_3 C_4$

5) Ejemplo

Sea $F(x,y) = x^3 + y$ y la curva C dada paramétricamente por

$$r\text{: } [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $r(t) = (3t, t^3)$; calcule las integral de línea

$$\int\limits_C F\ dx \quad y \quad \int\limits_C F\ dy$$

Solución

$$x = x(t) = 3t\ ; y = y(t) = t^3$$

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (3t, t^3)$$

$$F(x,y) = F\big(r(t)\big) = (3t)^3 + t^3\ ;$$

$$\int\limits_C F(x,y)dx = \int_a^b F\big(r(t)\big)\, x'(t)dt\ ;$$

$$\int\limits_C F(x,y)dy = \int_a^b F\big(r(t)\big)y'(t)dt$$

Entonces

$$\int_C F(x,y)dx = \int_C (x^3 + y)dx$$

$$= \int_0^1 ((3t)^3 + t^3)\, 3dt$$

$$= \int_0^1 (27t^3 + t^3)3dt$$

$$= \int_0^1 (28\, t^3)3\, dt$$

$$= \int_0^1 (84\, t^3)\, dt$$

$$= 84\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{84}{4} = 21$$

Similarmente

$$\int_C F(x,y)dy = \int_C (x^3 + y)dy$$

$$= \int_0^1 ((3t)^3 + t^3)\, 3t^2 dt$$

$$= \int_0^1 (27t^3 + t^3)3t^2 dt$$

$$= \int_0^1 (28\, t^3)3t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 (84t^5)\, dt = 84\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1$$

$$= 84\,\frac{1-0}{6} = \frac{84}{6}$$

$$= 14$$

Integral de línea de campos vectoriales

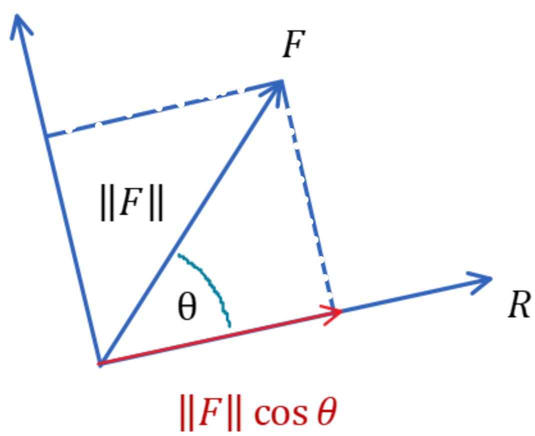
Las integrales de líneas de campos vectoriales son útiles en física para calcular el trabajo que realiza una fuerza sobre un objeto en movimiento

Si una fuerza constante F desplaza una partícula a lo largo de un vector R, el trabajo realizado por esta fuerza se define como el producto punto de la medida de la fuerza ejercida en la dirección del desplazamiento por la medida del desplazamiento.

Si θ es la medida del ángulo formado por F y R entonces el número

$$\|F\| \cos\theta$$

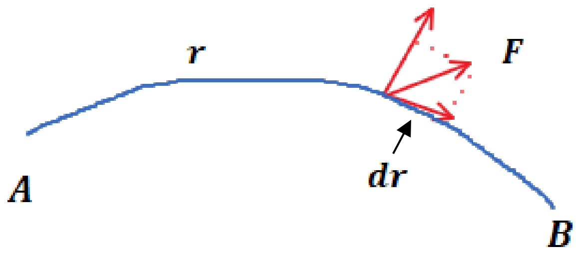
es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento



Trabajo se define en física como la fuerza que se aplica sobre un cuerpo para desplazarlo de un punto a otro

Luego el trabajo T realizado es $F \cdot R = \|F\|\|R\| \cos\theta$

Para calcular el trabajo sobre una curva, se consideran pedazos muy pequeños de la curva, tan pequeños que son, aproximadamente, segmentos de recta y la fuerza es casi constante sobre estos pedazos del tamaño $\|dr\|$. El trabajo hecho por F para mover la partícula desde el inicio hasta el final de dr es $F \cdot dr$ $(ver\ figura)$.



$$\frac{dr}{ds} = T \Rightarrow$$

$$dr = Tds$$

Sumando todos los trabajos obtenemos

$$Trabajo = \int_C F \cdot dr$$

Si C esta parametrizada por $r(s)$ usando la longitud de arco s como parámetro con $0 \leq s \leq l$ entonces de la figura se desprende que T $(ver\ recuadro)$es el vector tangente, luego $dr = Tds \Rightarrow$

$$\int_C F \cdot\ dr = \int_0^l (F \cdot T\ )ds$$

C es regular si es suave , esto es

$r'(t) \neq \vec{0}\ \forall\ t$

Definición

Sea $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo definido sobre los puntos de una curva C de $\mathbb{R}^2$ acotada y regular . Definimos la integral de línea del campo vectorial F a lo largo de la curva C como la integral de línea sobre C del campo escalar $F \cdot T$ siendo T el vector tangente unitario en cada punto de C , esto es:

$$\int_C (F \cdot T)\ ds$$

C es una curva parametrizada contenida en el dominio del campo vectorial

Sea C una curva parametrizada por:

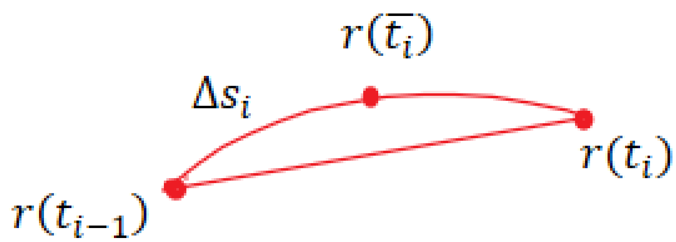
$$r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longrightarrow r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Veamos cómo podemos escribir la integral de línea

$$\int_C F \cdot T \; ds = \int_C F(x,y) \cdot T(x,y) \; ds$$

Consideremos la longitud Δs_i del arco de extremidades $r(t_{i-1})$ y



$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(t)\| dt$$

$$= \|r'(\overline{t_i})\|(t_i - t_{i-1}) (Tvm \text{ para integrales})$$

$$= \|r'(\overline{t_i})\|\Delta t_i$$

$$= \|r'(\overline{t_i})\| dt_i$$

$$\therefore \; ds = \|r'(t)\| dt$$

Para algún

$\overline{t_i} \in \,]t_{i-1}, t_i[$

Para una trayectoria $r: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $r'(t) \neq 0 \; \forall t \in [a,b]$. Si

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

denota un vector tangente unitario a la curva C , entonces

$$\int_C F \cdot T \; ds = \int_a^b \left[F\big(r(t)\big) \cdot T(t)\right] \|r'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \left[F\big(r(t)\big) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \right] \|r'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt$$

$$= \int_C F\, dr$$

Por tanto, sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo definida en una región $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $C \subset U$ una curva suave (regular) a trozos parametrizado por una función r: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la integral de línea del campo vectorial F sobre C en la dirección de r , está definida como

$$\int_C F dr = \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt$$

Forma diferencial de la integral de línea

Otra forma normalmente utilizada para escribir una integral de línea de un campo vectorial F es la siguiente. Considere que es un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$F = Pi + Qj = (P, Q)$$

y C es una curva parametrizada por la función $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ con $a \leq t \leq b$ entonces

$$\int_C F dr = \int_C F \cdot \frac{dr}{dt} dt$$

$$= \int_a^b (P, Q) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_C P dx + Q dy$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\int_C F dr = \int_C P dx + Q dy}$$

Forma diferencial

Propiedades

1) $\int_C (F + G) \cdot dr = \int_C F \cdot dr + \int_C G \cdot dr$; F, G campos vectoriales

2) $\int_C (k\, F) \cdot dr = k \int_C F \cdot dr$; $k \in \mathbb{R}$

3) $\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$; $C = C_1 \cup C_2$

4) El valor de la integral de línea de un campo vectorial es, salvo el signo, independiente de la parametrización (ver propiedad 5).

5) Sea F un campo vectorial sobre la curva C parametrizada por la función $r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Si denotamos por $-C$ a la curva orientada por r pero en sentido contrario, se tiene que

$$\int_{-C} F dr = -\int_C F\, dr$$

Obs Los resultados anteriores se puede extender a campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y de dimensión mayores a 3.

Ejemplo

Calcular la integral de línea en el siguiente caso:

$$F(x,y) = (x+y)i + yj \ \text{ y } \ C: r(t) = (t, t^2) \ ; \ t \in [-1,2]$$

Solución

$$\int_C F\, dr = \int_{-1}^{2} F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

$$r'(t) = (1,2t)$$

$$F(r(t)) = F(t, t^2) = (t + t^2, t^2)$$

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = (t + t^2, t^2) \cdot (1,2t) = t + t^2 + 2t^3$$

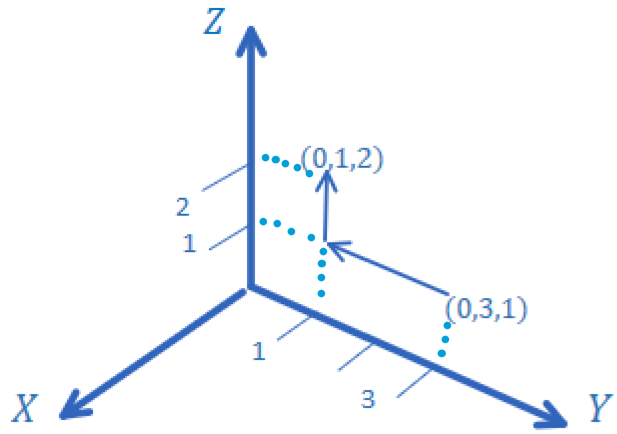
$$\therefore \int_C F\, dr = \int_{-1}^{2} (t + t^2 + 2t^3) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{121}{20} = 6{,}05$$

Ejemplo

Sea $F(x,y,z) = 2x\ln(yz)i + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right)j + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right)k$ y sea C la curva de la figura. Calcular

$$\int_C F\, dr$$



Curva $C = C_1 \cup C_2$

Solución

$$F(x,y,z) = 2xln(yz)i + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right)j + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right)k$$

Primero parametrizar C :

$r_1(t) = (0,1,t)$ con $t \in [1,2]$, parametriza a C_1

$r_2(t) = (0,t,1)$ con $t \in [1,3]$, parametriza a $-C_2$

entonces

$$r_1'(t) = (0,0,1) \text{ y } r_2'(t) = (0,1,0)$$

Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

$$= \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{-C_2} F \cdot dr$$

$$= \int_1^2 F\big(r_1(t)\big) \cdot r_1'(t)\, dt - \int_1^3 F\big(r_2(t)\big) \cdot r_2'(t)\, dt$$

$$= \int_1^2 F(0,1,t) \cdot (0,0,1)dt - \int_1^3 F(0,t,1) \cdot (0,1,0)dt$$

$$= \int_1^2 (0,-5,2t)\cdot(0,0,1)dt - \int_1^3 (0,-5,2)\cdot(0,1,0)dt$$

$$= \int_1^2 (0+0+2t)dt - \int_1^3 (0-5+0)dt$$

$$= \int_1^2 2t\,dt + 5\int_1^3 dt$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 5[t]_1^3$$

$$= 2\left(2-\frac{1}{2}\right) + 5(3-1)$$

$$= 4 - 1 + 10$$

$$= 13$$

Por tanto

$$\int\limits_C F\cdot\, dr = 13$$

Observación

También es posible parametrizar C_2 en el sentido de la orientación de la curva, ya que conocemos la parametrización $-C_2$, valiéndose del siguiente hecho que vale la pena tener en cuenta:

Cambio de orientación

Si $r(t)$ es una parametrización con $t \in [a,b]$, entonces una parametrización que invierte la orientación es,

$$r_1(t) = r(a+b-t) \text{ con } t \in [a,b]$$

En el ejemplo la parametrización de C_1 se mantiene luego

$$\int\limits_{C_1} F \cdot dr = 3$$

Por otro lado, usando la observación tenemos en $-C_2$,

$$1 + 3 - t = 4 - t$$

luego

$$\overline{r}_2(t) = (0{,}4 - t, 1)\ ;\ \ t \in [1{,}3]$$

Observe que

$$\overline{r}_2(1) = (0{,}3{,}1)$$

$$\overline{r}_2(3) = (0{,}1{,}1)$$

Se puede ver que esta parametrización sigue la orientación dada en la figura, por tanto

$$\overline{r}_2{}'(t) = (0, -1{,}0)$$

luego

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C} F \cdot dr &= \int\limits_{C_1} F \cdot dr + \int\limits_{C_2} F \cdot dr \\
&= 3 + \int\limits_{C_2} F \cdot dr \\
&= 3 + \int_1^3 F\big(\overline{r}_2(t)\big) \cdot \overline{r}_2'(t)\, dt \\
&= 3 + \int_1^3 F(0{,}4 - t, 1) \cdot (0, -1{,}0) dt
\end{aligned}$$

$$= 3 + \int_1^3 (0, -5,0) \cdot (0, -1,0) dt$$

$$= 3 + \int_1^3 (0 + 5 + 0) dt$$

$$= 3 + \int_1^3 5dt$$

$$= 3 + 5[t]_1^3$$

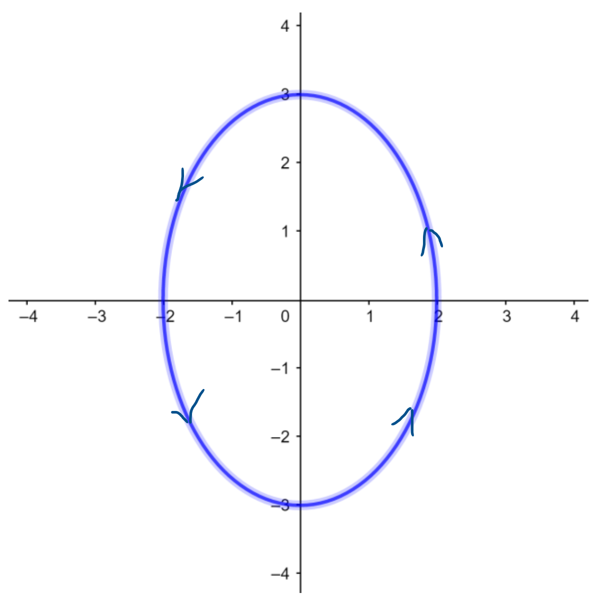
$$= 3 + 5(3 - 1) = 3 + 10 = 13$$

Que es el resultado esperado.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_C y^2 dx + x^2 dy$ donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Solución



Curva C

Podemos usar la parametrización

$$r(t) = 2\cos\theta\ i + 3\ sen\ \theta\ j\ \ \text{con}\ t \in [0,2\pi]$$

Entonces

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (3sen\ \theta)^2(-2\operatorname{sen}\theta)d\theta + (2\cos\theta)^2(3cos\ \theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} ((3sen\ \theta)^2(-2\operatorname{sen}\theta) + (2\cos\theta)^2(3cos\ \theta))d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-18sen^3\ \theta + 12\ cos^3\theta)\ d\theta$$

$$= 0$$

La integral se calculó, usando

$$cos^3\theta = (1 - sen^2\theta)cos\theta$$

$$sen^3\theta = (1 - cos^2\theta)sen\theta$$

Campos conservativos

Sea $F(x,y) = (M,N)$ una función vectorial definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, donde sus componentes , M y N son sus funciones escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Entonces

1.- el gradiente de F es un campo vectorial,

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

2.- un campo vectorial F se llama conservativo si es el gradiente de alguna función f. Es decir

$$F(x,y) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3.- la condición para que la función F sea conservativo es que exista una función f talque

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

La función f se denomina función potencial del campo vectorial F.

Ejemplo

$$F(x,y) = (2xy, x^2)$$

$$f(x,y) = x^2 y$$

F es conservativo ya que el gradiente coincide con el campo vectorial dado que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad y \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

4.- otro resultado equivalente , un campo vectorial F es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo

$$F(x,y) = (M,N) = (2xy, x^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces F es conservativo .

Encontremos ahora la función potencial para F. Para ello tenemos

$$F = (M, N) =$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Entonces

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \;\; ; \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$(1) \qquad\qquad (2)$$

integrando (2) respecto a y

$$f(x, y) = \int x^2 \, dy$$

$$f(x, y) = x^2 y + g(x)$$

$$\boldsymbol{cte}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + g'(x)$$

Comparando este resultado con (1) obtenemos

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = cte = c$$

Por tanto, la función potencial de F es

$$\boldsymbol{f(x, y) = x^2 y + c}$$

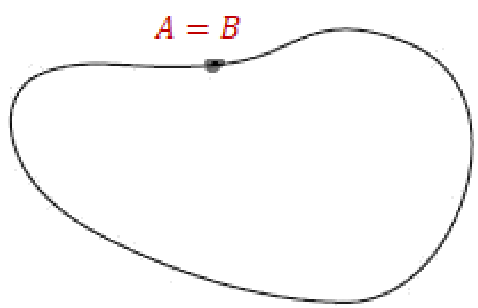
Teorema fundamental para integrales de línea

(Independencia de la trayectoria)

Si F es un campo vectorial conservativo, entonces la integral de línea de F no depende de la trayectoria, sólo depende del punto inicial y el punto final de esta curva. Más aún, si f es una función potencial, A y B son los puntos iniciales y finales de la curva; entonces:

$$\int_C F\,dr = f(B) - f(A)$$

¿Qué pasa si F es conservativo y r es una curva cerrada? (ver figura)



Notación si C es cerrada

$$\int_C F dr = \oint_C F dr$$

$$\int_C F\,dr = f(B) - f(A)$$

$$= f(B) - f(B) = 0$$

En el sentido práctico :

Se dice que un **campo** vectorial es **conservativo** si la trayectoria del campo a lo largo de una curva es independiente del camino, solo depende de los puntos inicial y final de la circulación.

La función potencial de un campo vectorial conservativo corresponde a una suerte de primitiva, ya que (por el Teorema de la independencia del camino) se tiene, al igual que en el llamado Teorema Fundamental del Cálculo :

$$\int_C F\, dr = f(B) - f(A)$$

donde A es el punto inicial y B el punto final de la curva r. Entonces, saber calcular la función potencial de los campos vectoriales conservativos permite el cálculo de las integrales de línea.

Ejemplo

Consideremos el campo vectorial $F(x,y) = (2xy, x^2)$. Ya vimos que es conservativo y además obtuvimos su función potencial que es:

$$f(x,y) = x^2y + c$$

Por tanto, si queremos calcular la integral de línea de este campo sobre una curva C , nos basta conocer el punto inicial y el punto final de esta curva. Por ejemplo, calculemos la integral de este campo sobre la curva C parametrizada por

$$r(t) = (2t, t+1)\,; t \in [1,3]$$

Entonces

$$\int_{\mathrm{C}} F\, dr = f(6{,}4) - f(2{,}2)$$

$$= (6^2 \cdot 4 + c) - (2^2 \cdot 2 + c)$$

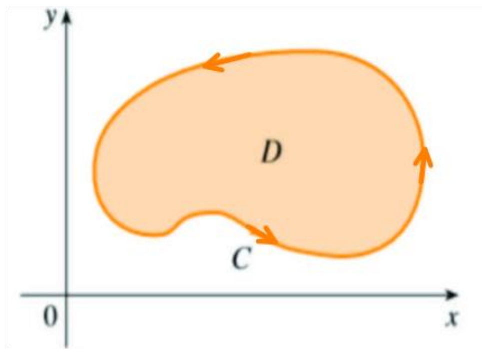
$$= 144 - 8$$

$$= 136$$

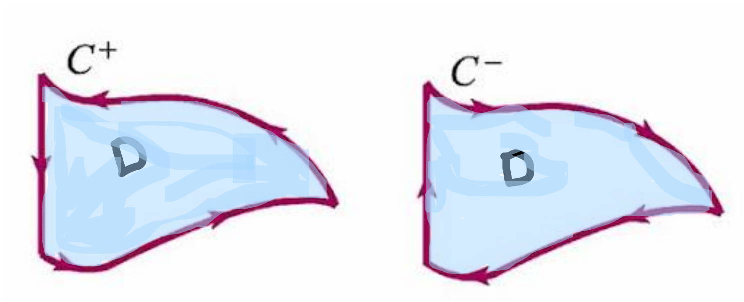
Teorema de Green (TG)

Previo:

Sea F un campo vectorial y sea C una curva cerrada, llamamos D a la región encerrada por la curva



También decimos que C es la frontera de la región D. Además, esta curva es recorrida en sentido contrario de las agujas del reloj, intuitivamente esto significa que al caminar a lo largo de C la región D está siempre a la izquierda.



Orientación positiva   Orientación negativa

TG

Sean $M, N: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones componentes de F continuas con $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$ continuas en una región D del plano el cual es el interior de una curva plana C, cerrada, simple y regular a trozos entonces

$$\int\limits_{C} F \cdot dr = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C} Mdx + Ndy$$

donde C es la frontera de la región D, orientada positivamente.

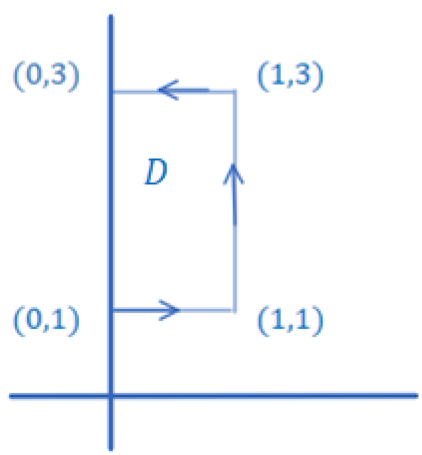
Este teorema establece una relación entre la integral de línea de un campo vectorial y la integral doble.

Verificaremos el teorema de Green en el siguiente ejemplo.

Si $F(x,y) = (y - x^2e^x, cos(2y^2) - x)$, donde C es el rectángulo con vértices $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(0,3)$, orientada en sentido contrario al reloj, se pide calcular

$$\int\limits_{C} F \cdot dr$$

ocupando TG.



Solución

$$\int\limits_{C} Fdr = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$M = y - x^2e^x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = cos(2y^2) - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Luego

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -1 - (1) = -2$$

$$\therefore \quad \iint\limits_D (-2)\, dA = \int_0^1 \int_1^3 (-2) dydx$$

$$= (-2) \int_0^1 \int_1^3 dydx$$

$$= (-\mathbf{2}) \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} [y]_1^3\, dx$$

$$= (-\mathbf{2}) \int_0^1 (3-1) dx$$

$$= \int_0^1 -4\, dx$$

$$= -4[x]_0^1 = (-4)(1) = -4$$

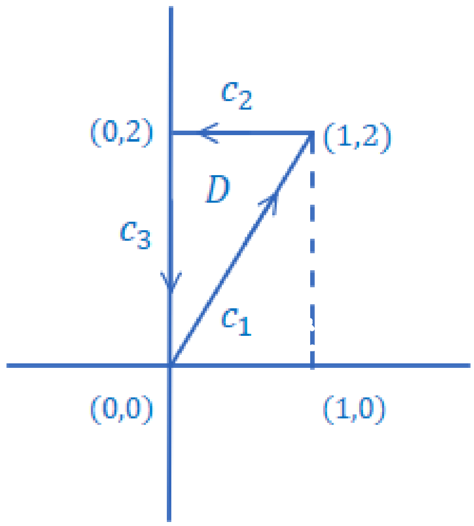
2.- Sea C la frontera del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(0,2)$. Calcule

$$\int\limits_C 4x^2ydx + 2ydy$$

Por dos métodos distintos.

Solución

i)



$C_1 : y = 2x$ luego $r(t) = (t, 2t)$; $\forall t \in [0,1]$ luego

$$\int_{C_1} 4x^2ydx + 2ydy = \int_0^1 4t^2\,(2t)dt + 8tdt$$

$$= \int_0^1 (8t^3 + 8t)\,dt$$

$$= [2t^4 + 4t^2]_0^1 = 6$$

$C_2 : r(t) = (1,2) + \big((0,2) - (1,2)\big)t\ ; t \in [0,1]$

$$= (1,2) + (-1,0)t;\ t \in [0,1]$$

$$= (1,2) + (-t, 0);\ t \in [0,1]$$

$$= (1 - t, 2) + (-t, 0);\ t \in [0,1]$$

$$\int_{C_2} 4x^2ydx + 2ydy = \int_0^1 -8(1 - t)^2dt$$

$$= \int_0^1 (-8 + 16t - 8t^2)\, dt$$

$$= \left[-8t + 8t^2 - \frac{8t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{8}{3}$$

$$C_3 : r(t) = (0,2) + \big((0,0) - (0,2)\big)t\ ; t \in [0,1]$$

$$= (0,2) + (0,-2)t;\ t \in [0,1]$$

$$= (1,2) + (0,-2\mathrm{t});\ t \in [0,1]$$

$$= (1,2 - 2\mathrm{t});\ t \in [0,1]$$

$$\int\limits_{C_3} 4x^2 y dx + 2y dy = \int_0^1 2(2-2t)(-2dt)$$

$$= \int_0^1 (-8 + 8t) dt$$

$$= [-8t + 4t^2]_0^1$$

$$= -8 + 4 = -4$$

$$\int\limits_{C} 4x^2 y dx + 2y dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = \frac{18 - 8 - 12}{3} = -\frac{2}{3}$$

ii) Usando el teorema de Green

$$M = 4x^2 y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x^2$$

$$N = 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0-4x^2=-4x^2$$

$$\int_C 4x^2ydx+2ydy=\int_0^2\int_0^{y/2}-4x^2\,dxdy$$

$$=\int_0^2\left[-\frac{4}{3}x^3\right]_0^{y/2}dy=\int_0^2-\frac{4}{3}\frac{y^3}{8}dy=\int_0^2-\frac{y^3}{6}\,dy$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2=-\frac{1}{6}\cdot\frac{16}{4}=-\frac{2}{3}$$

Observaciones

1.- El teorema de Green sirve para deducir una fórmula para calcular el área A de una región acotada por una curva regular parte por pare y cerrada simple C. En efecto, definiendo $M=0$ y $N=x$ y usando el Teorema de Green,

$$\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA=\oint_C Mdx+Ndy$$

se obtiene

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=1-0=1$$

$$\Rightarrow A=\iint_D dA=\oint_C x\,dy\ \cdots(1)$$

Sin embargo , definiendo $M=-y$ y $N=0$ el resultado es

$$A=\iint_D dA=-\oint_C y\,dx\ \cdots(2)$$

Se pueden combinar estas dos fórmulas para A sumando las dos ecuaciones (1) y (2) , y dividiendo por 2. Esto da el siguiente resultado.

Si la frontera de una región D en el plano XY es una curva regular parte por parte y cerrada simple C, entonces el área A de R es

$$\boldsymbol{A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx \; = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \cdots (3)}$$

Aunque las dos primeras fórmulas parecen más fáciles de aplicar, se enuncia la tercera porque para ciertas curvas lleva a una integración más sencilla.

Ejemplo

Usar el resultado (3) para calcular el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución

La elipse C tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t\,,\;\; y = b\;sen\;t\,;0 \leq t \leq 2\pi$$

Aplicando la tercera fórmula en el teorema

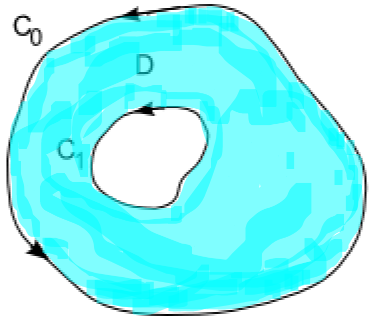
$$\boldsymbol{A = = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)\,(b\cos t)dt + (b\;sen\;t)(a\;sen\;t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(cos^2t + sen^2t)\;dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}(2\pi)$$

$$= \pi ab$$

2.- El teorema de Green se puede extender también a regiones acotadas por curvas cerradas simples y regulares a trozos con uno o más agujeros, como muestra la figura siguiente.

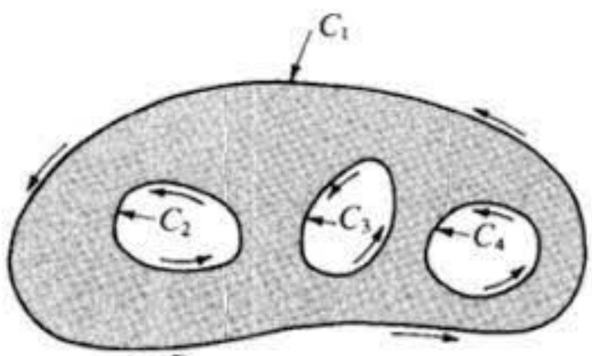


C_0 y C_1 se entiende recorridas en sentido positivo

En este caso

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C_0} Mdx + Ndy - \oint\limits_{C_1} Mdx + Ndy$$

En la figura siguiente



$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C_1} Mdx + Ndy - \sum_{k=2}^{4} \oint\limits_{C_k} Mdx + Ndy$$

C_1, C_2, C_3 y C_4 se entiende recorridas en sentido positivo

En general si C_1, C_2, C_3 ... C_n son curvas cerradas simples y regulares a trozos tales que C_2, C_3 ... C_n están contenidas en el interior de C_1 y no se intersecan dos a dos, entonces

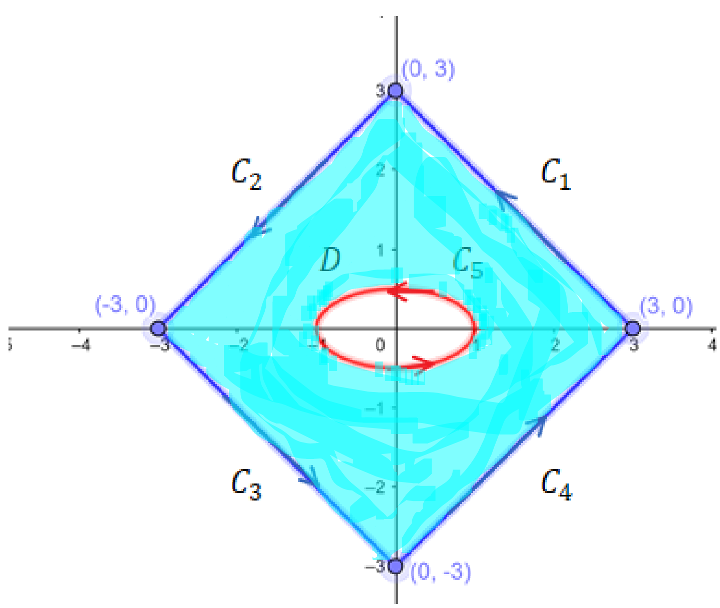
$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C_1} Mdx + Ndy - \sum_{k=2}^{n} \oint\limits_{C_k} Mdx + Ndy$$

Donde C_1, C_2, C_3 ... C_n se entiende recorridas en sentido positivo

Ejemplo

Calcular el área A entre el **paralelogramo** y la **elipse** de semi ejes igual a 1 en el eje X y ½ en el eje Y (ver figura).

Solución



Podemos usar el campo vectorial

$$F(x, y) = 0i + xj = M(x, y)i + N(x, y)j = xj = (0, x)$$

queremos determinar

$$A = \iint\limits_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint\limits_D dA$$

$$= \int\limits_{C_1} xdy + \int\limits_{C_2} xdy + \int\limits_{C_3} xdy + \int\limits_{C_4} xdy - \int\limits_{C_5} xdy$$

Donde

$$C_1: r_1(t) = (3,0) + \big((0,3) - (3,0)\big)t$$

$$= (3,0) + (-3,3)t = (3 - 3t, 3t)$$

$$\boldsymbol{C_1: r_1(t) = (3 - 3t, 3t)\,; 0 \leq t \leq 1}$$

$$\boldsymbol{r_1'(t) = (-3, 3)}$$

$$C_2: r_2(t) = (0,3) + \big((-3,0) - (0,3)\big)t$$

$$= (0,3) + (-3,-3)t = (-3t, 3 - 3t)$$

$$\boldsymbol{C_2: r_2(t) = (-3t, 3 - 3t)\,; 0 \leq t \leq 1}$$

$$\boldsymbol{r_2'(t) = (-3, -3)}$$

$$C_3: r_3(t) = (-3,0) + \big((0,-3) - (-3,0)\big)t$$

$$= (-3,0) + (3,-3)t = (-3 + 3t, -3t)$$

$$\boldsymbol{C_3: r_3(t) = (-3 + 3t, -3t)\,; 0 \leq t \leq 1}$$

$$\boldsymbol{r_3'(t) = (3, -3)}$$

$$C_4: r_4(t) = (0,-3) + \big((3,0) - (0,-3)\big)t$$

$$= (0,-3) + (3,3)t = (3t, -3 + 3t)$$

$$\boldsymbol{C_4: r_4(t) = (3t, -3 + 3t)\,; 0 \leq t \leq 1}$$

$$\boldsymbol{r_4'(t) = (3, 3)}$$

$$\boldsymbol{C_5 : r_5(t) = \left(\cos t\,, \frac{1}{2} sen\ t\right)\ ; 0 \leq t \leq 2\pi}$$

$$\boldsymbol{r_5'(t) = \left(-sen\ t, \frac{1}{2} cos\ t\right)}$$

$$A = \int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy + \int_{C_3} xdy + \int_{C_4} xdy - \int_{C_5} xdy$$

$$= \int_0^1 (3-3t)\,3dt + \int_0^1 (-3t)(-3)dt + \int_0^1 (-3+3t)\,(-3)dt$$

$$+ \int_0^1 (3t)\,3dt - \int_0^{2\pi} \cos t \left(\frac{1}{2}\right) \cos t\ dt$$

$$= \int_0^1 9 - 9t + 9t + 9 - 9t + 9t\ dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos^2\ t\ dt$$

$$= \int_0^1 18\ dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= 18[t]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t\ dt$$

$$= 18 - \frac{1}{4}[t]_0^{2\pi} - \frac{1}{8}[sen\ 2t]_0^{2\pi}$$

$$= 18 - \frac{2\pi}{4} - \frac{1}{8}(0)$$

$$= 18 - \frac{\pi}{2}$$

Resumiendo

$$\boldsymbol{A = 18 - \frac{\pi}{2}}$$

Forma vectorial del Teorema de Green

La conclusión del TG

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C} M dx + N dy \cdots (3)$$

se puede expresar en forma vectorial, en efecto, primero observamos que, si F es un campo vectorial en dos dimensiones esta puede escribirse

$$F(x, y) = Mi + Nj + 0k = (M, N, 0)$$

donde $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$. El rotacional de F es

$$rot\ F = \nabla \text{ x } F$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0 - \frac{\partial N}{\partial z}\right) i - \left(0 - \frac{\partial M}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

$$= 0i + 0j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

$$= \left(0{,}0 \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

Ahora observemos que el vector normal a la región D es k y , por otro lado

$$rot\ F \cdot k = \left(0{,}0, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \cdot (0{,}0{,}1) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Por tanto, la integral en (3) queda como

$$\int_C F dr = \oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D rot\ F \cdot k\ dA$$

Observación

$$\int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F dr} = \iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{rot\ F} \cdot \boldsymbol{k\ dA}$$

O bien

$$\int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F dr} = \iint_{\boldsymbol{D}} (\boldsymbol{\nabla} \ \mathbf{x} \ \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k\ dA}$$

Cualquiera de las dos fórmulas anteriores se llama forma vectorial del Teorema de Green en el plano (se le llama también el teorema de Stokes en el plano).

Ahora para contemplar otra perspectiva del TG , supongamos que el campo vectorial F está definida como $F(x, y) = Mi + Nj$ y D es una región del plano XY cuya curva frontera de esta región C es suave a trozos, cerrada , simple y con orientación positiva y que C viene descrita por la función vectorial

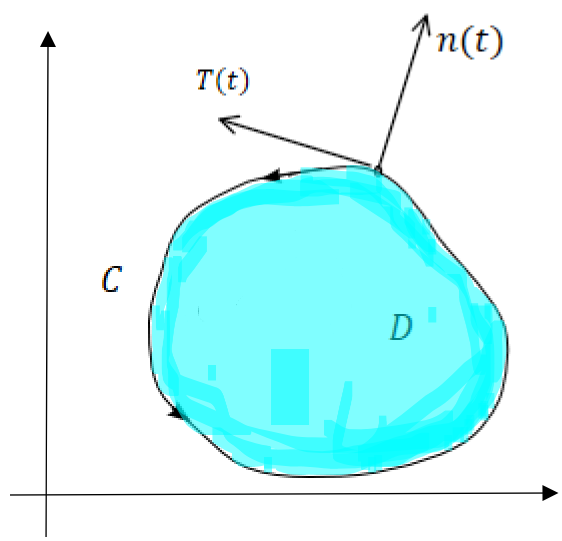
$$r(t) = (x(t), y(t))\ ; a \leq t \leq b$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ tiene primeras derivadas parciales continuas en el intervalo $[a, b]$. Recordemos que el vector unitario tangente a la curva es

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\left(\frac{x'(t)}{\|r'(t)\|},\frac{y'(t)}{\|r'(t)\|}\right)$$

Es fácil verificar que el vector unitario normal exterior a C en cualquier punto (el que apunta hacia el exterior de D) viene dado por

$$n(t)=\left(\frac{y'(t)}{\|r'(t)\|},\frac{-x'(t)}{\|r'(t)\|}\right)$$



Vectores tangente y normal unitario exterior en D

Ahora

$$\int_C F\cdot n\ ds=\int_a^b\left[F\big(r(t)\big)\cdot n(t)\right]\|r'(t)\|dt$$

$$=\int_a^b\left[\frac{M\big(x(t),y(t)\big)y'(t)}{\|r'(t)\|}-\frac{N\big(x(t),y(t)\big)x'(t)}{\|r'(t)\|}\right]\|r'(t)\|dt$$

$$=\int_a^b\left[M\big(x(t),y(t)\big)y'(t)-N\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\right]dt$$

$$= \oint_C M(x,y)\,dy - N(x,y)dx$$

$$= \iint_C \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \ \ (Por\ TG)$$

Finalmente , en el integrando de la integral doble reconocemos la divergencia de F, con lo que llegamos a esta otra forma vectorial del Teorema de Green:

$$\oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{dA} = \iint_{\boldsymbol{D}} \mathbf{div}\ \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{dA}$$

Esta forma del teorema de Green será generalizada al teorema de la divergencia en la sección que sigue.

0bservación

En relación de esta última fórmula tenemos la siguiente interpretación física.

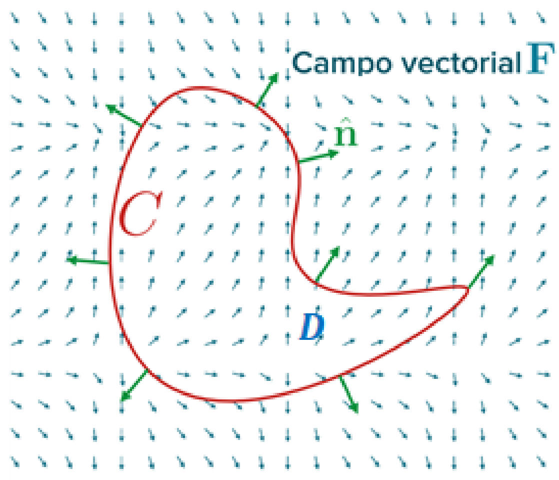
El teorema de la divergencia en 2d dice que el flujo de F a través de la curva frontera C es igual a la integral doble de la $div\ F$ sobre la región D

$$\underbrace{\oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{ds}}_{\textbf{Integral de flujo}} = \iint_{\boldsymbol{D}} \mathbf{div}\ \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{dA}$$

La idea intuitiva es que, si F representa el flujo de un fluido, la tasa del flujo total hacia afuera de D, como lo mide la integral de flujo, equivale a la suma de todos los pedacitos del flujo hacia afuera en cada punto , como lo mide la divergencia.

La visión global del flujo

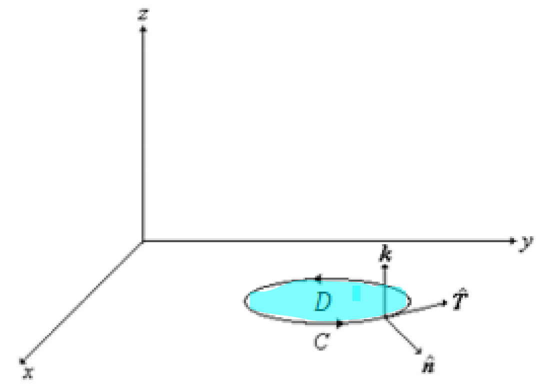
El fluido en dos dimensiones evalúa la tasa en la cual un fluido pasa a través de una curva C. Cuando esta curva encierra alguna región, como D, el flujo es una medida de la tasa a la que el fluido sale de la región D.



Dado un campo vectorial $F(x, y)$ este representa el campo vectorial de la velocidad del fluido, el flujo de $F(x, y)$ a través de C se mide con la integral

$$\oint_{C} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \; d\boldsymbol{s}$$

Esta integral es a lo largo de cada punto de la frontera C, y utiliza la componente del vector F (ver página 46) en la dirección del vector unitario normal n que apunta hacia afuera. Cuando más grande es el valor en un punto, más rápido es el flujo que sale de D en ese punto, cuanto más negativo es, hay más flujo hacia adentro en ese punto.

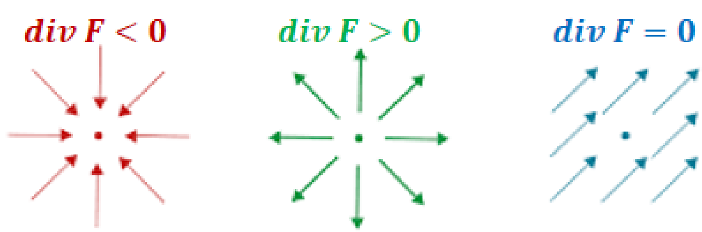


La visión local de la divergencia

La divergencia de $F(x, y)$ es una función que nos dice cuanto fluido tiende a divergir desde cada punto (x, y) . En efecto sea $F(x, y) = v(x, y)$ el vector velocidad del fluido en (x, y) luego

Si $div\ F(x_0, y_0) > 0$, existe una fuente del fluido en (x_0, y_0)

Si $div\ F(x_0, y_0) < 0$, existe un sumidero del fluido en (x_0, y_0)



Si $div\ F(x_0, y_0) = 0$ no hay fuente ni sumidero.
Resumiendo, el teorema de la divergencia en 2d expresa estas dos ideas

$$\underbrace{\oint_{C} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ ds}_{\text{Flujo total que sale de D}} = \underbrace{\iint_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dA}_{\text{suma de todos los pedacitos de flujo hacia afuera}}$$

Área de una superficie parametrizada

Por lo visto antes, sabemos que las gráficas de una función de dos variables son las superficies que son más fáciles de parametrizar.

Recordemos que la gráfica de una función $z = f(x\,,y)$ es el conjunto de puntos en el espacio tridimensional cuyas coordenadas son: $(\boldsymbol{x}\,, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ **para (x , y) en un dominio** $\boldsymbol{D}$ **de** $\mathbf{R}^2$

Estas superficies también pueden ser definidas como la imagen de una función vectorial, de dos parámetros (o variables independientes). En este curso representaremos a los dos parámetros con las letras u y v y a la función vectorial como $\boldsymbol{S}(u\,,v)$.

De este modo una superficie en $\mathbb{R}^3$ que es la imagen de una función $z = f(x\,,y)$ (ver Figura 1) se puede definir a través de tres funciones de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

esto es: $\mathbf{S}(\mathrm{u}\,,\mathrm{v}) = (\mathrm{u}\,,\mathrm{v}, \mathrm{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v}))$

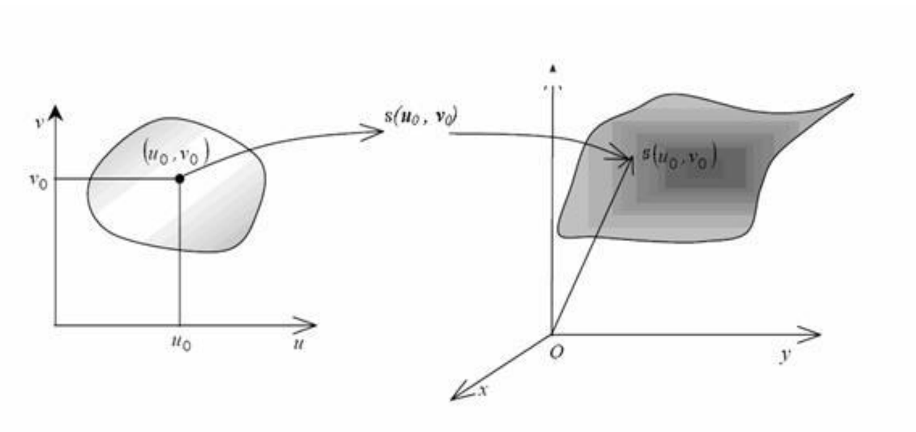


Figura 1

Si mantenemos constantes el parámetro v en v_0 y variamos sólo u , el vector $\boldsymbol{S}(u\,, v_0)$ tiene como imagen una curva en la superficie

$$\boldsymbol{c_u} = (u\,, v_0).$$

Lo mismo podemos decir con el otro parámetro v, que tiene como imagen otra una curva en la superficie

$$\boldsymbol{c_v} = (u_0\,, v),$$

cuando $u\ =\ u_0$ (ver Figura 2)

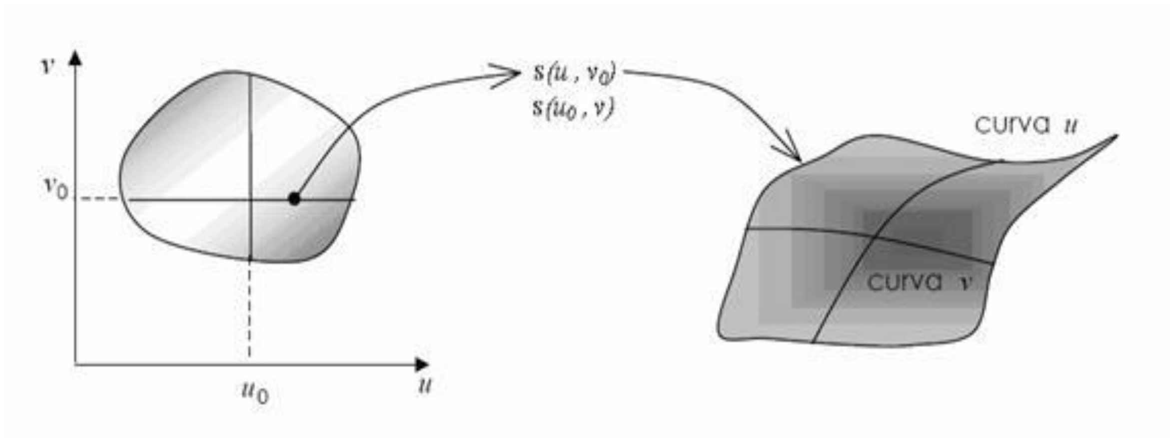


Figura 2

Vectores tangentes a las curvas $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$:

Vector tangente a la curva u:

$$T_u = \frac{\partial S}{\partial u} = \left(1{,}0{,}\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

Vector tangente a la curva v:

$$T_v = \frac{\partial S}{\partial v} = \left(0{,}1{,}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

Vector Normal a la superficie:

Cuando evaluamos estos vectores para un punto de la superficie los cuales resultan no nulos y además no paralelos, el producto vectorial

$$n = T_u \text{ x } T_v$$

que es perpendicular a la superficie se dice que en el punto es regular, o no singular, y la superficie se dice que es regular, o suave en dicho punto (ver Figura 3).

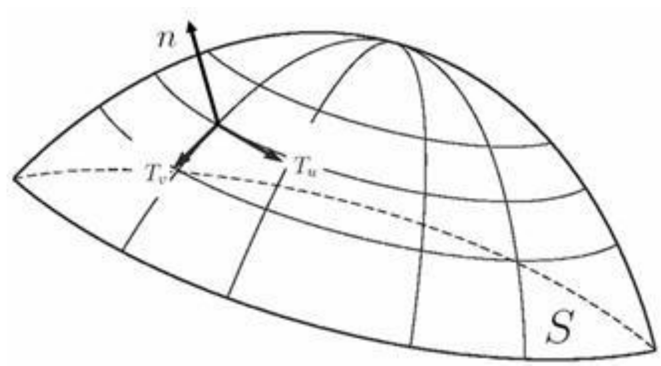


Figura 3

Definición de Plano Tangente:

Si una superficie parametrizada $\boldsymbol{S}(u\ , v)$ es suave en $(u_0\ , v_0)$, definimos el ***plano tangente*** a la superficie en $\boldsymbol{S}(u_0\ , v_0)$, como el plano determinado por los vectores $\boldsymbol{T_u}\ y\ \boldsymbol{T_v}$ **.**

Así

$$n = T_u \text{ x } T_v$$

es un vector normal (perpendicular) a la superficie y

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot n = 0 \cdots (1)$$

donde n está evaluado en (u_0, v_0), es una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen (1).

Si $n = (n_1, n_2, n_3)$ entonces la fórmula (1) se convierte en:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Las superficies que son imágenes de funciones diferenciables de dos variables son superficies regulares (ver Figura 4).

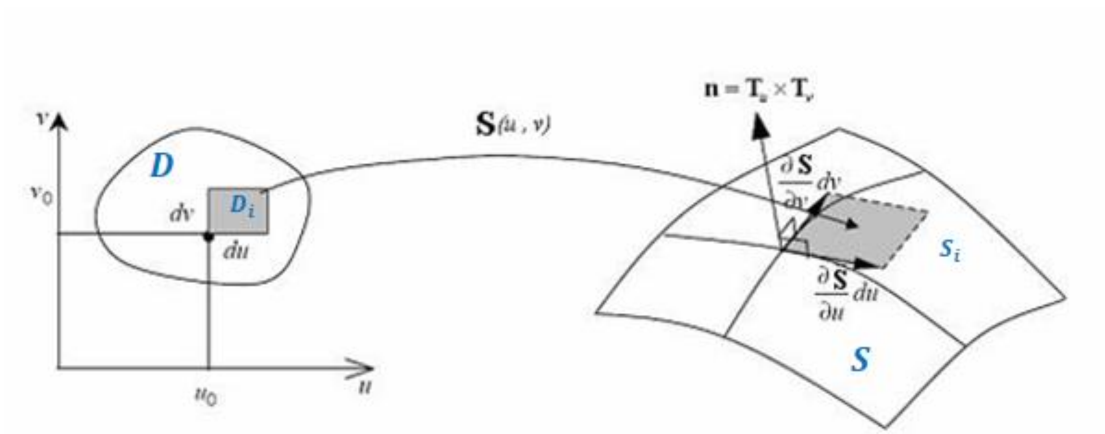


Figura 4

Si $du \longrightarrow 0$ y $dv \longrightarrow 0$ la porción sombreada puede conceptualizarse como una sección infinitésima de la superficie S cuya área del paralelogramo es:

$$dA = \left\| \frac{\partial s}{\partial u} du \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v} dv \right\|$$

que es un escalar positivo.

Desde el punto de vista vectorial el área será:

$$dA = \left\| \frac{\partial s}{\partial u} du \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v} dv \right\|$$

$$= \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v} \right\| dudv$$

$$= \|n\| \, dudv$$

Donde $dudv$ es el área del rectángulo en el plano uv y donde

$$n = T_u \text{ x } T_v = \frac{\partial s}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v}$$

es el vector normal a la superficie.

Sumando el área de todos los paralelogramos similares al representativo genérico tenemos que el área de la superficie S es una unión de superficies S_i , su área es aproximadamente la suma de las áreas de las S_i , esto es

$$S \approx \sum_{\forall u, v} \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v} \right\| dudv$$

Lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición:

(Área de una superficie parametrizada)

Definimos el área $A(\boldsymbol{S})$ de una superficie regular S definida en D parametrizada como:

$$\boldsymbol{A(S) = \iint_{D} \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v} \right\| dudv \cdots (2)}$$

donde

$$\boldsymbol{S: s(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k \text{ ;}}$$
$$\boldsymbol{\text{con } (u, v) \in D.}$$

Observe que si ahora desarrollamos el producto vectorial:

$$dA = \frac{\partial s}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial v}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial s}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \left(-\frac{\partial s}{\partial u}, -\frac{\partial s}{\partial u}, 1\right) dudv$$

Ahora si a este último resultado le apliquemos la fórmula (2), obtenemos finalmente :

$$\boldsymbol{A(S) = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)^2 + 1}\, dudv\right)}$$

esto es,

$$\boldsymbol{A(S) = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{s_u{}^2 + s_v{}^2 + 1}\, dudv\right)}$$

Observación

1.- Si $S: z = f(x, y)$ entonces $s(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y

$$A(S) = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\, dA\right)$$

2.- Si $S: F(x, y, z) = 0$ donde S se puede proyectar uno a uno sobre la región D del plano xy si F define implícitamente como función de x e y y si $F_z \neq 0$ entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

y la fórmula anterior queda escrita de la siguiente manera y en su forma no vectorial:

$$A(S) = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{\frac{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}{|F_z|}} \, dA \right)$$

Ejemplo

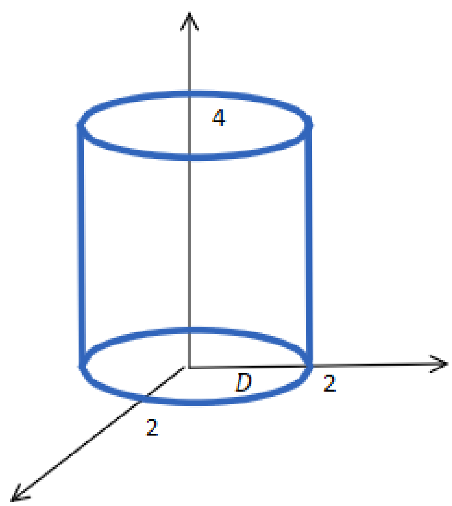
Calcular el área del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ de altura 4, $0 \leq z \leq 4$.

Solución

Como ya se sabe, la parametrización de esta superficie es:

$$S: s(\theta, z) = 2\cos\theta i + 2\,sen\,\theta\, j + zk$$

con $(\theta, z) \in D = [0,2\pi] \text{ x } [0,4]$



Cilindro

Luego

$$s_\theta = \frac{\partial s}{\partial \theta} = (-2\,\text{sen}\,\theta\,, 2\,cos\,\theta, 0)$$

$$s_z = \frac{\partial s}{\partial z} = (0,0,1)$$

$$\left\|\frac{\partial s}{\partial \theta} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial z}\right\| = \left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\ sen\ \theta & 2\ cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\|$$

$$= \|(2\cos\theta, 2\ sen\ \theta, 0)\| = 2$$

Luego

$$A(S) = \iint\limits_{D} \left\|\frac{\partial s}{\partial \theta} \text{ x } \frac{\partial s}{\partial z}\right\| dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 2dzd\theta = \int_0^{2\pi} 2[z]_0^4\, d\theta = 8\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 8[\theta]_0^{2\pi} = 16\pi$$

La integral de una superficie

La Integral de superficie es una extensión del concepto de integral doble, de igual modo la integral de línea es una extensión del concepto de integral de Riemann clásica. Como el nombre lo dice, es aquella integral cuya función es evaluada sobre una superficie.

Sea S una superficie regular parametrizada por la función $r(u, v)$ de clase C^1, (esto es , si las derivadas de sus componentes son continuas) en D, y donde para todo $(u, v) \in D$ se tiene que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de modo que

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial r}{\partial v}\right\| \neq 0$$

Y además r es una biyección entre D y S $(r(D) = S)$.

Sea $f(x, y, z)$ una función escalar definida y acotada en S, se define la integral de superficie de f sobre S por la integral

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(r(u,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv$$

Observe que si $f(x,y,z) = 1$

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv$$

Que corresponde al área de la superficie S, formula indicada en la página 54.

Si $z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre D, se puede parametrizar S con $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ y entonces

$$\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \iint\limits_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}dxdy$$

Si $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ entonces

$$\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_i} g(x,y,z)dS$$

Integral de fluido

Si F es la densidad de flujo de una corriente de fluido y N es el vector normal unitario a S, entonces la masa total de fluido que pasa por S por unidad de tiempo en la dirección de N es

$$\underbrace{\iint\limits_S F \cdot N\, dS}_{\text{Integral de flujo}} = \iint\limits_D F\big(r(u,v)\big)N(r(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \text{ x } \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv}_{NdS}$$

Como consecuencia tenemos que si

$S : z = f(x, y)$, con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$, se puede parametrizar S con $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y entonces

$$\iint\limits_S F \cdot N dS = \iint\limits_D F(x, y, z) \left(-f_x, -f_y, 1\right) dx\, dy$$

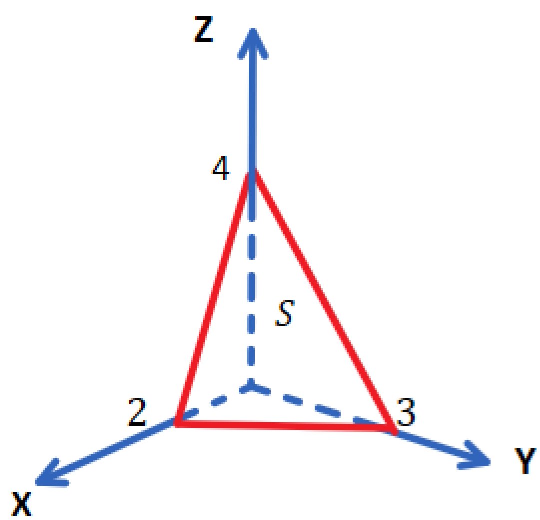
Ejemplo

Calcular

$$\iint\limits_S z + 2x + \frac{4}{3} y\, dS$$

con S la parte del plano $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ situada en el 1^{er} octante

Solución



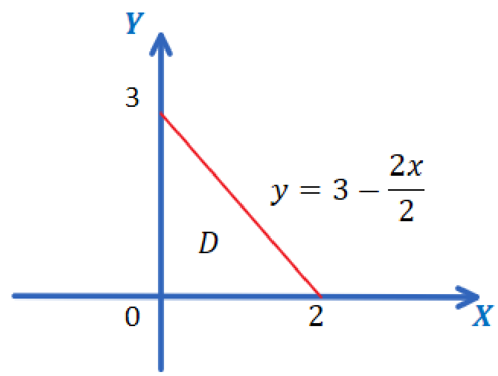
Superficie S

$$S : z = 4 - 2x - \frac{4}{3} y$$

entonces

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{\sqrt{61}}{3}$$

Ahora



Luego

$$\iint z+2x+\frac{4y}{3}dS$$

$$=\int_0^2\int_0^{3-\frac{3x}{2}}\left(4-2x-\frac{4y}{3}+2x+\frac{4y}{3}\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dydx$$

$$=\int_0^2\int_0^{3-\frac{3x}{2}}\frac{4\sqrt{61}}{3}dydx=4\sqrt{61}$$

Superficies orientables

Sea S una superficie y $r(u,v)$ una parametrización de esta. Los vectores normales a S, en (u,v) puede escogerse entre dos vectores unitarios opuestos

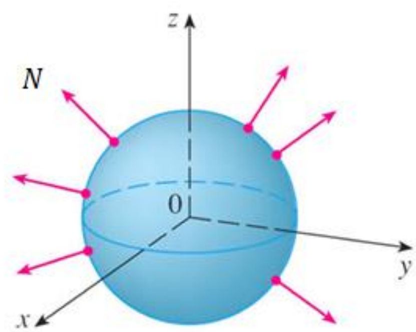
$$N(u,v)=\pm\frac{\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|}$$

En el caso de que $S: z = f(x, y)$, si $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ entonces

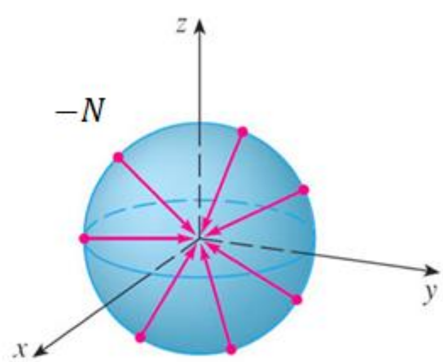
$$N = \pm \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

Si la superficie tiene dos caras, el signo hace que cada vector normal está en un lado u otro de la superficie. Este hecho se usa para orientar una superficie. Orientar una superficie significa escoger un signo para N , una cara de la superficie es caracterizado por N y la otra cara por $-N$.

En el caso de una esfera, el vector N (con signo negativo) opuesta al exterior (y el otro opuesto al interior),



N con orientación opuesto al exterior de la esfera



$-N$ con orientación opuesto al interior de la esfera

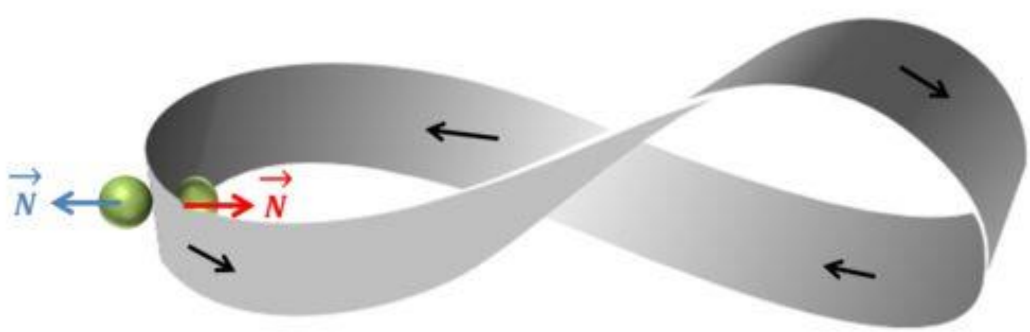
Definición

Si en cada punto (x, y, z) de la superficie regular S es posible asociar un vector unitario $N(x, y, z)$ de tal manera que como función N sea continua sobre toda la superficie S, entonces se dice que S es orientable.

Esta definición supone que la superficie tiene dos lados. Uno de los lados queda determinado por la función continua $N(x, y, z)$ sobre S y el otro lado por la normal de signo contrario.

Hay superficies de una sola cara, como la banda de Mobius, que no son orientables.

Note que en esta superficie el escoger N no orienta la banda, es decir la presencia de los vectores N arriba y debajo de la banda, muestran que hay una sola cara.



Banda de Mobius

Ejemplo

Tomemos un vector de la superficie

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$N_1 = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$$

es el vector normal unitario exterior a S

$$N_2 = -\frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$$

es el vector normal unitario hacia dentro de S.

Teorema de la divergencia

Sea Q un sólido limitado por una Superficie orientable S y sea N la normal unitaria exterior a S. Si F es un campo vectorial continua y derivable sobre Q entonces

$$\iiint\limits_{Q} div\, F dV = \iint\limits_{S} F \cdot N\, dS$$

donde $div\, F = P_x + Q_y + R_z$ si $F = (P, Q, R)$.

Ejemplo

Calcular

$$\iint\limits_{S} F \cdot N dS$$

si N es el vector unitario, $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ y S es la frontera del sólido Q comprendido entre las superficies $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2 + x^2 + y^2$.

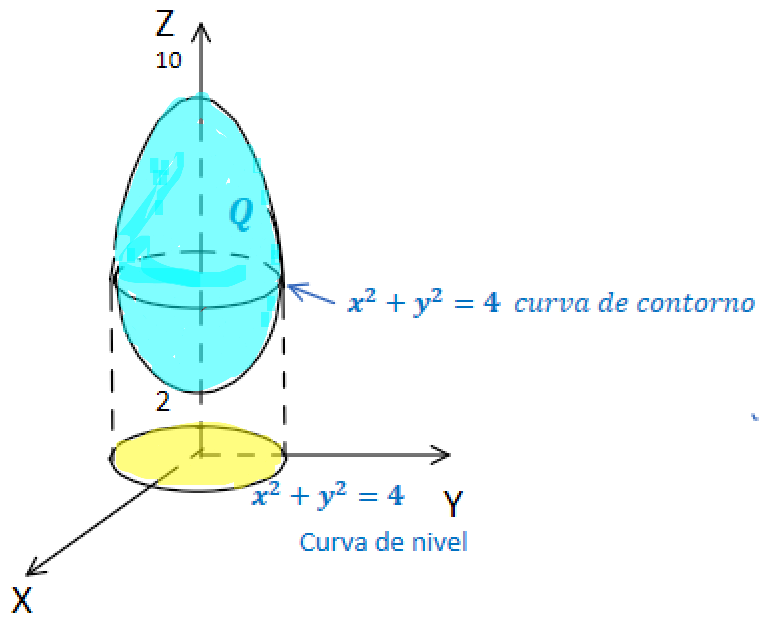
Solución

Podemos usar el teorema de la divergencia. En efecto, la proyección del sólido sobre el plano XY es un círculo de radio 2 pues

$$z = 10 - x^2 - y^2$$

$$z = 2 + x^2 + y^2$$

De donde se obtiene la curva de contorno que corresponde a una circunferencia de radio 4, $x^2 + y^2 = 4$



Superficie *S*

Ahora bien,

$$F(x, y, z) = xi + yj + zk = (x, y, z)$$

$$div\ F = 1 + 1 + 1 = 3$$

Por tanto

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iiint_Q div\ F\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2+r^2}^{10-r^2} 3dzdrd\theta = 48\pi$$

Teorema de Stokes (T.G. en el espacio)

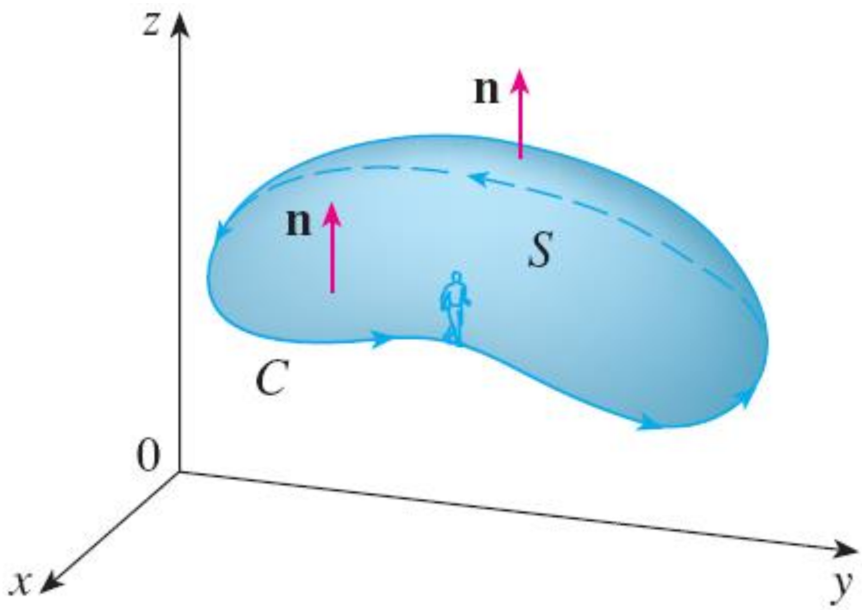
Rotacional de un campo vectorial

Sea $F = (P, Q, R)$ entonces

$$rotF = \left(R_y - Q_Z, P_Z - R_x, Q_x - P_y\right)$$

Orientación positiva de la curva C respecto a N

El teorema Stokes nos permite calcular una integral de línea sobre una curva cerrada en el espacio, como una integral de superficie (la superficie encerrada por la curva) si el vector unitario $N/\|N\|$, en la integral de superficie, se escoge de tal manera que, si caminamos sobre la curva, en el lado de la superficie en la que está el vector normal, la superficie va quedando hacia nuestra izquierda.



Orientación positiva de C respecto a N

En este caso decimos que N se escogió de tal manera que C tiene orientación positiva respecto a N

El Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientable, regular a trozos y limitado por una curva C cerrada y regular a trozos. Si $F = (P, Q, R)$ es de clase C^1 sobre S entonces

$$\int_C F dr = \iint_S rot\, F \cdot N dS$$

Integral de un campo vectorial a lo largo de C

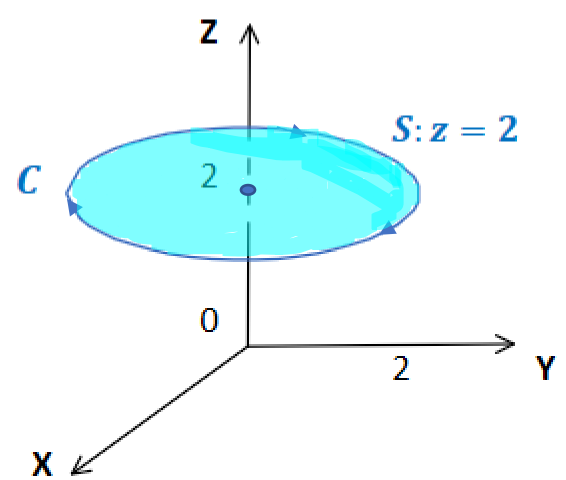
flujo del rotacional del campo a través de una superficie S orientada

donde N es elegido de tal manera que C tiene orientación positiva respecto a N

El teorema de Stokes se puede extender a más de dos o más curvas.

Ejemplo 1

Sea S la superficie de ecuación $z = 2$, tal que y como se muestra en la figura siguiente



La curva C es el borde de S , una parametrización para C es

$$r(t) = 2\cos t\; i - 2\; sen\; t\; j + 2k\; ;\; t \in [0,2\pi]$$

Si $F(x,y,z) = 3yi - xzj + yz^2k$ se pide calcular:

$a)\ Calcular \int_C F\ dr$ usando la definición de integral de línea

Solución

$$\int_C F\ dr = -\int_C F(r(t))\ r'(t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (6\ sen\ t, 4\cos t\ , 8\ sen\ t\ )\ (-2\cos t, -2\cos t, 0)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\ sen\ t, 4\cos t\ , 8\ sen\ t\ )\ (2\cos t, 2\cos t, 0)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (12sen^2 t + 8cos^2 t)\ dt = 20\pi$$

$b)$ Usando $T.S.$

$$S: z = 2$$

Proyección es el circulo $x^2 + y^2 = 4$

El vector N se debe escoger de acuerdo con la regla de la mano derecha, como la orientación de la curva tiene sentido horario , el vector normal tiene coordenada $N = -(0,0,1) = (0,0,-1)$ y

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x + z^2, 0, -3 - z)$$

Luego

$$\int_C Fdr = \iint_S rot\, F \cdot N\, dS$$

$$= \iint_{R_{xy}} (x + z^2, 0, -3 - z)\,(0,0,-1)\, dA$$

$$\Rightarrow \int_C Fdr = \iint_{R_{xy}} (3 + z\,)\, dA$$

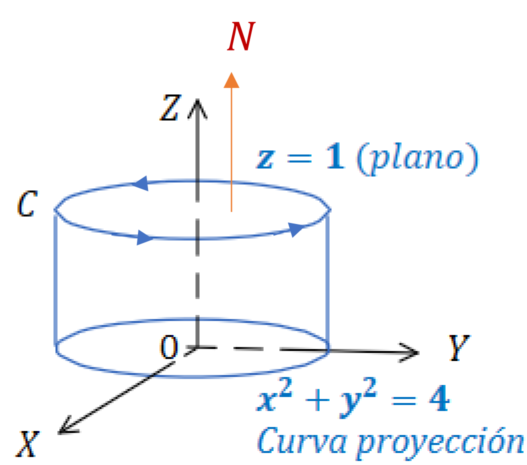
$$= \iint_{R_{xy}} (5\,)\, dA \quad \text{por ser } S\!: z = 2$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 5rdrd\theta = 20\pi$$

Ejemplo 2

Sea $F(x, y, z) = -3yi + 3xj + zk$ un campo vectorial

Sea $C: x^2 + y^2 = 4$ la curva de contorno que resulta al interceptar el cilindro de igual ecuación con el plano $z = 1$.



$$rotF \cdot N = \nabla \,\mathrm{x}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{x} & \frac{\partial}{y} & \frac{\partial}{z} \\ -3y & 3x & z \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)i - (0-0)j + \big(3-(-3)\big)k$$

$$= 0i + 0j + 6k = (0,0,6)$$

Por tanto $rot\ F \cdot N = (0,0,6)(0,0,1) = 6,$ luego

$$\oint_C F\ dr = \iint_R rot\ F \cdot NdS$$

$$= \iint_R 6\ dA$$

$$= 6\ A(R) = 6(\pi r^2) = 6(\pi 2^2) = 24\pi$$

$A(R)$ es el área de la región R en el plano XY

siendo R el circulo : $x^2 + y^2 \leq 4$

Interpretación del resultado:

24π es el trabajo que hace la partícula al moverse por una curva en el espacio bajo la influencia de un campo vectorial, es decir, es el trabajo que hace la partícula al recorrer la curva C a todo su largo , y que es influenciado por un campo de fuerzas en unidades de energía.