INSTITUTO FISICA Y Astronomía

Termodinámica

Profesor: J. R. Villanueva II Semestre 2021

Nombre: Solucionario *RUT:*________

Examen: P1:______ P2:______ P3:______ P4:______ NF:________

1. Un mol de gas ideal, cuyo exponente adiabático es γ, se expande de modo que el calor comunicado a éste es igual a la disminución de su energía interna. Hallar
   (a) la capacidad calorífica molar del gas en este proceso.
   (b) la ecuación del proceso en los parámetros T, V;
   (c) el trabajo realizado por el gas al aumentar z veces su volumen.

2. Muestre que para un gas que obedece a la ecuación de estado de van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

y cuyo calor específico molar a volumen constante C_V es constante e independiente de la temperatura, la energía interna (por mol) U es dada por

$$U = C_V T - \frac{a}{V} + \text{cte.}$$

y que para un cambio adiabático cuasi-estático

$$T(V-b)^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \text{o} \quad \left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{\gamma} = \text{cte.},$$

donde $\gamma = (C_V - R)/C_V$. También determine el cambio de temperatura cuando este gas experimenta una expansión libre en vacío.

3. Un gas ideal cuyo exponente adiabático es γ efectúa un ciclo que se compone de dos isocoras y de dos isobaras. Determinar la eficiencia de este ciclo si la temperatura absoluta del gas crece n veces tanto durante el calentamiento isocoro como durante la expansión isobárica.

4. (a) Los muros de una casa, de 7 m de ancho y 6 m de alto, se construyen con ladrillos de 30 cm de espesor y cuya conductividad térmica es $\kappa = 0.6\,\frac{\text{W}}{\text{mK}}$. La temperatura superficial en el lado interior es de 16°C y la del lado exterior es de 6°C. Encuentre el flujo de calor a través del muro y la perdida total de calor a través de éste.
   (b) Encuentre la ecuación que determina la ley de Wien para la radiación de cuerpo negro.

Problema 1: a) $Q = -\Delta U = -C_V \Delta T$

Luego, la capacidad calorífica molar es

$$\boxed{C = -C_V < 0}$$

b) $$đQ = C\,dT = C_V\,dT + P\,dV$$

con $P = \frac{RT}{V} \rightarrow -C_V\,dT = C_V\,dT + \frac{RT}{V}dV$

$$\therefore\ 2C_V\,dT + \frac{RT}{V}dV = 0$$

$$2\left(\frac{C_V}{R}\right)\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

$C_p - C_V = R = C_V\left(\frac{C_p}{C_V} - 1\right)$

$\therefore R = C_V(\gamma - 1)$; $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

$\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$

$\rightarrow \frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$

$$\frac{2}{\gamma-1}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\ln\frac{T}{T_0} + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \ln C_1 \equiv \text{cte.}$$

$$\ln\left(\frac{T\,V^{\frac{\gamma-1}{2}}}{T_0\,V_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}\right) = \ln C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{T\,V^{\frac{\gamma-1}{2}} = \text{cte}}$$

c) $$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = \int_{V_i}^{V_f}\frac{RT}{V}dV = R\int_{V_0}^{zV_0}\left(\frac{T_0 V_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V^{\frac{\gamma-1}{2}}}\right)\frac{dV}{V}$$

$$W = RT_0V_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \times \int_{V_0}^{zV_0}\frac{dV}{V^{\frac{\gamma+1}{2}}} = RT_0V_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \times \left.\frac{V^{-\frac{\gamma+1}{2}+1}}{-\frac{\gamma+1}{2}+1}\right|_{V_0}^{zV_0}$$

$$W = RT_0V_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \cdot \left.\frac{V^{-\frac{\gamma-1}{2}}}{\frac{1-\gamma}{2}}\right|_{V_0}^{zV_0} = \frac{2RT_0V_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}{(1-\gamma)}\left[\frac{1}{(zV_0)^{\frac{\gamma-1}{2}}} - \frac{1}{V_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}\right]$$

$$\boxed{W = \frac{2RT_0}{1-\gamma}\left(z^{\frac{1-\gamma}{2}} - 1\right) = \frac{2RT_0}{\gamma-1}\left(1 - z^{\frac{1-\gamma}{2}}\right)}$$

Problema 2: Combinando la primera y segunda ley

$$dU = TdS - PdV = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left\{T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\right\} dV$$

Y también

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (T, V \text{ variables independientes})$$

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \quad \wedge \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

Ya que dU es diferencial exacta, tenemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]_V = \left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]_T$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\right)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial V}\left(T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right)\right]$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) - P \quad \wedge \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V$$

$$\rightarrow dU = \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right] dV + C_V dT$$

con $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{RT}{V-b} = P + \frac{a}{V^2}$

$$\rightarrow dU = \frac{a}{V^2} dV + C_V dT$$

$$\rightarrow \boxed{U = C_V T - \frac{a}{V} + cte}$$

$$T\,dS = dU + P\,dV \to dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}\,dV$$

$$dS = C_V\frac{dT}{T} + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - \frac{P}{T}\right]dV + \frac{P}{T}\,dV = C_V\frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

$$dS = C_V\frac{dT}{T} + \frac{R}{V-b}\,dV = C_V\frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{V-b}\,dV$$

$\therefore$ En un cambio adiabático cuasi-estático $dS = 0$

$$\to \quad C_V\frac{dT}{T} + \frac{C_V\left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right)}{V-b}\,dV = 0 \qquad \gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$$

$$\therefore \frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{V-b}\,dV = 0$$

$$\to \quad \ln T + (\gamma - 1)\ln(V-b) = \ln(cte)$$

$$\ln\left(T(V-b)^{\gamma-1}\right) = \ln(cte)$$

$$\to \boxed{T(V-b)^{\gamma-1} = cte.}$$

ó

$$\boxed{\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{\gamma} = cte'}$$

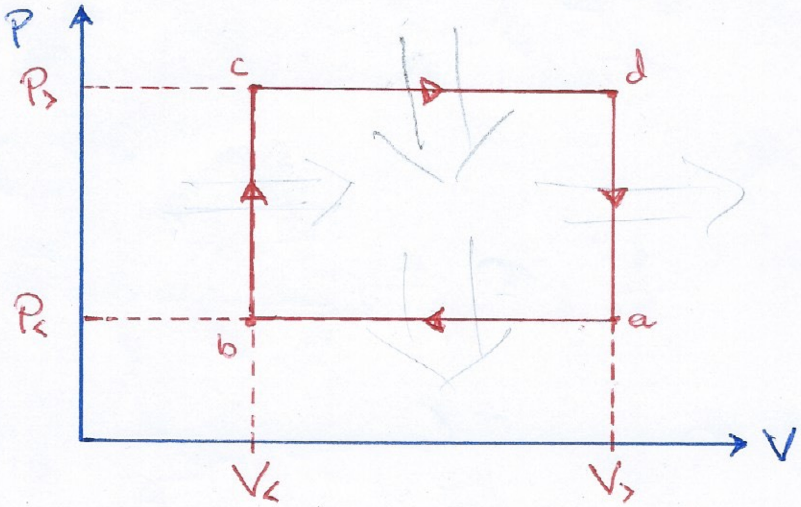
En el caso de una expansión adiabática en el vacío (¡irreversible!), tenemos que $U = cte$.

$$U_i = U = C_V T_i - \frac{a}{V_i} \quad \wedge \quad U_f = U = C_V T_f - \frac{a}{V_f}$$

$$\therefore \quad 0 = C_V(T_f - T_i) - a\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i}\right)$$

$$\to \boxed{T_f - T_i = \Delta T = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i}\right)}$$

Problema 3:



Gas ideal (1 mol):

$$PV = RT$$

$$RT_a = P_a V_a = P_< V_>$$
$$RT_b = P_b V_b = P_< V_<$$
$$RT_c = P_c V_c = P_> V_<$$
$$RT_d = P_d V_d = P_> V_>$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C_p - C_v = R = C_v(\gamma - 1) \\ &\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \\ &\frac{C_v}{R} + 1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}}$$

- $V_a = V_d = V_>$; $V_b = V_c = V_<$
  $P_a = P_b = P_<$; $P_c = P_d = P_>$

- Sabemos que $\underbrace{T_c = m T_b}_{\text{Calentamiento isocórico a } V_<}$ $\wedge$ $\underbrace{T_d = m T_c}_{\text{expansión isobárica a } P_>}$

$$\Rightarrow \frac{T_c}{T_b} = m = \frac{T_d}{T_c} = \frac{T_d - T_c}{T_c - T_b}$$

Entonces, $\frac{T_c}{T_b} = m \Rightarrow \frac{P_>}{P_<} = m \Rightarrow \boxed{P_> = m P_<}$

$\frac{T_d}{T_c} = m \Rightarrow \frac{V_>}{V_<} = m \Rightarrow \boxed{V_> = m V_<}$

Luego, $\boxed{RT_a = m P_< V_< \,;\, RT_b = P_< V_< \,;\, RT_c = m P_< V_< \,;\, RT_d = m^2 P_< V_<}$

i) El trabajo total corresponde al área encerrada por el ciclo:

$$\boxed{W = (V_> - V_<) \times (P_> - P_<) = P_< V_< (m-1)^2}$$

El gas absorbe calor en los procesos $b \to c$ ^ $c \to d$

$$Q_{bc} = C_v \Delta T = C_v (T_c - T_b) = \frac{C_v}{R} P_c V_c (m-1) = P_c V_c \left(\frac{m-1}{\gamma-1}\right)$$

$$Q_{cd} = C_v \Delta T + P_2 \Delta V = C_v (T_d - T_c) + P_2 (V_d - V_c) =$$

$$= \frac{C_v}{R} m(m-1) P_c V_c + m(m-1) P_c V_c = \left(\frac{C_v}{R} + 1\right) m(m-1) P_c V_c$$

$$= \gamma m \left(\frac{m-1}{\gamma-1}\right) P_c V_c$$

$$\therefore Q_{abs} = Q_{bc} + Q_{cd} = P_c V_c \left(\frac{m-1}{\gamma-1}\right) + \gamma m \left(\frac{m-1}{\gamma-1}\right) P_c V_c$$

$$\boxed{Q_{abs} = P_c V_c \left(\frac{m-1}{\gamma-1}\right)(1 + \gamma m)}$$

La eficiencia $\eta = \dfrac{W}{Q_{abs}} = \dfrac{\cancel{P_c V_c} (m-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{P_c V_c} \dfrac{\cancel{(m-1)}}{(\gamma-1)} \cdot (1+\gamma m)}$

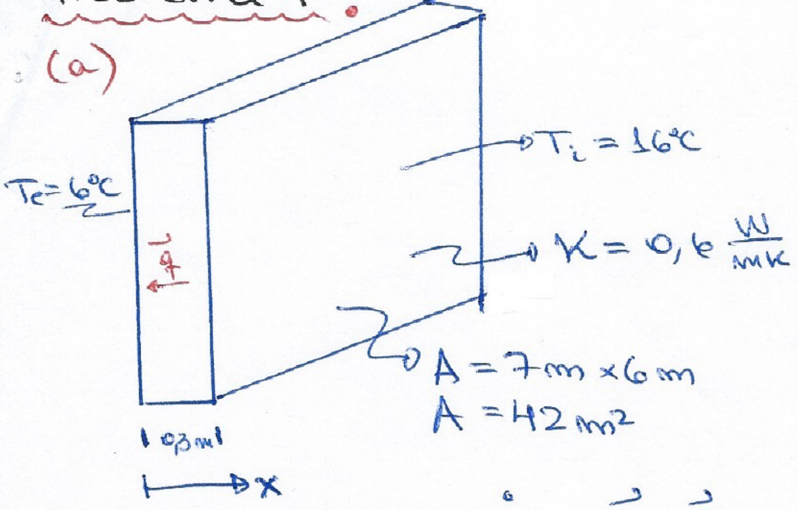
$$\boxed{\eta = \frac{(m-1)(\gamma-1)}{1+\gamma m}}$$

$$\eta = \frac{m\gamma - m - \gamma + 1}{1+\gamma m} = \frac{1 + \gamma m - (m+\gamma)}{1 + \gamma m}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{m+\gamma}{1+\gamma m}}$$

Problema 4:

(a)

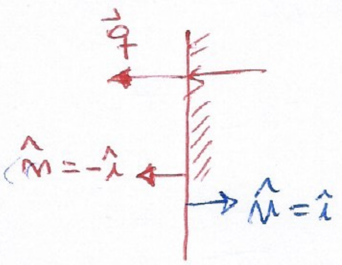


Ley de Fourier: $\vec{q} = -K\vec{\nabla}T$

$$\vec{q} = -K\frac{\Delta T}{\Delta x}\hat{\imath} = K\left(\frac{T_i - T_e}{\Delta x}\right)(-\hat{\imath})$$

$$\vec{q} = 0{,}6\left(\frac{W}{m\cancel{K}}\right)\times\frac{10\cancel{K}}{0{,}3m}(-\hat{\imath})$$

$$\boxed{\vec{q} = -20\left(\frac{W}{m^2}\right)\hat{\imath}}$$ ← fluye hacia afuera.



$$\dot{Q} = \vec{q}\cdot\vec{A} = -20\frac{W}{\cancel{m^2}}\times 42\cancel{m^2}\,(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath})$$

$$\boxed{\dot{Q} = -840\ W}$$

(b) Ley de Planck $\quad e_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k_BT\lambda}}-1\right)}$; $\quad x = \frac{hc}{k_BT\lambda}$

$$e_\lambda = \frac{2\pi h c^2 \times k_B^5 T^5}{h^5 c^5}\cdot\frac{x^5}{e^x-1} \qquad \frac{x^5\cdot k_B^5T^5}{h^5c^5} = \frac{1}{\lambda^5}$$

$$\frac{de_\lambda}{d\lambda} = \frac{dx}{d\lambda}\cdot\frac{de_\lambda}{dx} = -\frac{hc}{k_BT\lambda^2}\cdot\frac{de_\lambda}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x-1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5x^4}{e^x-1} - \frac{x^5e^x}{(e^x-1)^2} = 0 = \frac{5x^4(e^x-1)-x^5e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{x^4(5(e^x-1)-x)}{(e^x-1)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{5(e^x-1) - x = 0}$$ ← Ec. determina la ley de Wien.