Funciones Diferenciables

Para una función de una variable $f(x)$ se define la derivada en x_0 como

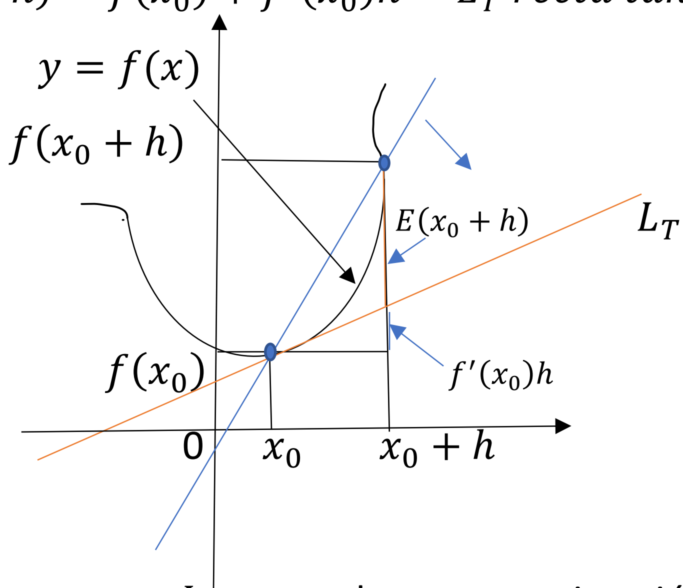
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esto quiere decir que para h pequeño.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si y sólo si $f'(x_0)h \approx \ f(x_0 + h) - f(x_0)$

Si y sólo si $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \approx L_T\ recta\ tangente$



Por tanto, la recta tangente L_T es una buena aproximación de la función cerca del punto $(x_0, f(x_0))$.

Sea $E(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$, luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Formalmente

Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, una función $f: U \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable en $x_0 \in U$ si y sólo si existe $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(x_0+h)}{\|h\|} = 0$$

f es diferenciable si existe su derivada y la diferencia entre la función y la tangente es un infinitésimo.

donde $E(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ y $\|h\| = \sqrt{h^2}$

Observaciones

1.- $E(x_0+h)$ es el error de la aproximación lineal a la recta tangente $f(x_0) + f'(x_0)h$.

2.- De manera intuitiva, podemos decir que una función de dos variables x e y es diferenciable en (x_0, y_0) si existe un plano no vertical que contiene al punto $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ de ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

que se acerca al gráfico de f en las proximidades del punto $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$

Veremos más adelante que esta ecuación corresponde a la ecuación del plano tangente a la superficie.

Definición

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in U$. Diremos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(x_0 + h, y_0 + k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

donde

$E(x_0 + h, y_0 + k)$

$$= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Y $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$

Propiedades

1.- Si $z = f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0).

2.- Si $z = f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Observaciones

1.- Si $z = f(x,y)$ no es continua en (x_0, y_0) entonces f no es diferenciable en (x_0, y_0)

2.- Si alguna de las derivadas parciales de $z = f(x,y)$ no existen en (x_0, y_0) entonces f no es diferenciable en el punto.

Ejemplo 1

Pruebe que $f(x,y) = x^2 + y^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Por tanto, las derivadas parciales de $f(x,y)$ existen $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Ahora

$E(x+h,y+k)$

$$= f(x+h,y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$$

$$= (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk$$

$$= h^2 + k^2$$

Luego

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(x+h,y+k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

Ejemplo 2

Es la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $(0,0)$?

Solución

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, no existe límite lo que significa que f es discontinua $(0,0)$ y por tanto no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 3

Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por lo tanto, existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

Ahora determinemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(0+h,0+k)}{\|(h,k)\|}$$

donde

$E(0+h,0+k)$

$$= f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k$$

Esto es

$E(0+h,0+k)$

$$= f(h,k) - 0 - 0h - 0k = f(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Luego

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(0+h,0+k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}$$

Ahora el límite no existe pues para $k = mh$, para diferentes m

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 m}{h^2+m^2h^2}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 m}{h^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

que depende de m luego no existe límite y por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

El siguiente resultado prueba que la continuidad de las derivadas parciales de una función en un punto garantiza la diferenciabilidad de una función en ese punto.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y sean $f: U \to \mathbb{R}$ una función definida en U y $(x_0, y_0) \in U$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en una vecindad $B\big((x_0, y_0), r\big) \subseteq U$ y son continuas en $P_0 = (x_0, y_0)$, entonces f es diferenciable en P_0.

Ejemplo 4

Sea $f(x,y) = 4y^3 - x^2 + 10$, determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Solución

f es continua en $\mathbb{R}^2$ pues $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 4{y_0}^3 - {x_0}^2 + 10 = f(x_0, y_0)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2$$

Son continuas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

El reciproco del resultado no es cierto pues existen funciones diferenciables cuyas derivadas parciales no son continuas.

Resumiendo

Derivadas parciales continuas $\Rightarrow$ Diferenciable $\Rightarrow$ existencia de derivadas parciales

$\Downarrow$

Continua

Observación

El concepto de diferenciabilidad puede ser extendido a funciones de 3 o más variables.

En efecto para 3 variables

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, U abierto en $\mathbb{R}^3$, y $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$, diremos que f es diferenciables en P_0, si y sólo si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ existen en P_0 y

$$\lim_{(h,k,s)\to(0,0,0)} \frac{E(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + s)}{\|(h,k,s)\|} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} E(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + s) \\ = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + s) - f(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h \\ - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)k - \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)s \end{aligned}$$

Y $\|(h,k,s)\| = \sqrt{h^2 + k^2 + s^2}$

Propiedades más generales:

1.- Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si las funciones derivadas parciales:

$\frac{\partial f}{\partial x}: \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $i = 1, \cdots, n$ y $\overline{U} \subseteq U$ son continuas en el punto $x_0 \in \overline{U}$, entonces f es diferenciable en x_0.

2.- Sean $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, diferenciable en $p \in U$, entonces

i) La suma $f + g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ es una función diferenciable en p.

ii) El producto $f \cdot g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$ es una función diferenciable en p.

iii) Si $g(p) \neq 0$, el cociente

$\frac{f}{g}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(p) = \frac{f(p)}{g(p)}$ es una función diferenciable en el punto p.

3.- Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $f(p)$ entonces $gof: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p .

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x\, sen\left(\frac{x + y}{1 + x^2}\right) + (y^2 - xy + 1)\, cos(x^2 + y^2)$$

Es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pues está formada por sumas, productos cocientes y composición de funciones diferenciables.

Ejercicio

Sea $f(x, y) = 2xy^2 + 1$ una función. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de f en el origen, además determinar la diferencial total de f en $(0,0)$.

$$f_x = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h \cdot 0^2 + 1 - (0+1)}{h} \quad \boxed{f(x,y) = 2xy^2 + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f_y = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot 0 \cdot h^2 + 1 - (0+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k$$

$$= f(h,k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k$$

$$= 2hk^2 + 1 - 1 = 2hk^2$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(0+h,0+k)}{\|h,k\|} =$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{2hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \le \left| \frac{2hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{2|h||k|^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{2|h|k^2}{|h|} = 2k^2$$

0

Por tanto,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(0+h,0+k)}{\|h,k\|} = 0$$

Y por consiguiente f es diferenciable en $(0,0)$.

Como diferenciabilidad ⇒ continuidad, entonces f es continua en $(0,0)$

Finalmente, la diferencial total en $(0,0)$ es

$$df(0,0) = f_x(0,0)dx + f_y(0,0)dy$$

$$= 0\,dx + 0\,dy = 0$$

Observación

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, una función $f: U \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable en U si es diferenciable en cada $x_0 \in U$.

(ver ejemplo 1 página 3)