Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre II 2023

*Nombre:*____ *RUT:*________________

Prueba 2: P1:_____ P2:_____ P3:_____ P4:_____ NF:______

1. Encuentre el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del círculo $|z - i| = 2$ en el sentido positivo cuando

   (a) $g(z) = 1/(z^2 + 4)$

   (b) $g(z) = 1/(z^2 + 4)^2$

   Solución:

   (a) La formula integral de Cauchy dice que

   $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{1}$$

   donde $f(z)$ es analítica en C y adentro. Entonces escribimos

   $$g(z) = \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)} \tag{2}$$

   Hay dos singularidades en $z = \pm 2i$. El contorno de la integral es un círculo de radio 2 centrado en $z = i$, así que adentro del contorno hay la singularidad en $z = 2i$. Entonces tenemos que escribir

   $$f(z) = \frac{1}{z + 2i} \tag{3}$$

   ya que $f(z)$ es analítica en C y adentro. Ahora usamos esta $f(z)$ y $z_0 = 2i$ en la formula de Cauchy, con $n = 0$:

   $$2\pi i f(2i) = \int_C \frac{dz}{(z + 2i)(z - 2i)} \tag{4}$$

   La integral a la derecha es exactamente la integral que queremos evaluar. Solamente tenemos que calcular $2\pi i f(2i) = 2\pi i/4i = \pi/2$.

   (b) En este caso escribimos

   $$g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{[(z + 2i)(z - 2i)]^2} = \frac{1}{(z + 2i)^2(z - 2i)^2} \tag{5}$$

Así que escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \tag{6}$$

y usamos la formula de Cauchy con $n = 1$:

$$2\pi i f'(2i) = \int_C \frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \tag{7}$$

Así que $f'(2i) = -2/(4i)^3 = 2/(64i) = 1/(32i)$, y $2\pi i/(32i) = \pi/16$.

2. Encuentre la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{z} \tag{8}$$

alrededor del punto $z_0 = 2$. Después, por derivación de la serie término por término, muestre que

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2| < 2) \tag{9}$$

Solución: Para encontrar la primera serie se puede aplicar directamente el teorema de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{10}$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{11}$$

adentro de un disco centrado en $z_0 = 2$ con radio 2 (para excluir la singularidad en $z = 0$). En este caso $z_0 = 2$ y $f(z) = 1/z$. Así que tenemos

$$a_n = (-1)^n n! \frac{1}{n! 2^{n+1}} = (-1)^n \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} \tag{12}$$

La serie queda

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \tag{13}$$

Otra opción es comenzar a partir de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \tag{14}$$

Podemos escribir $f(z) = 1/z$ en una forma tal que se puede aplicar la serie geométrica:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \tag{15}$$

Ahora, aplicando la serie geométrica tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \tag{16}$$

Ajustando la condición de válidez de la serie geométrica tenemos que hay convergencia para $|(z-2)/2| < 1$, que es equivalente a $|z-2| < 2$, exactamente la misma condición que vimos antes. La derivación de la serie es directa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\frac{1}{z} &= -\frac{1}{z^2} \\ \frac{d}{dz}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(z-2)^{n-1} \end{aligned} \tag{17}$$

Notar que la última suma en la segunda línea comienza en $n=1$! Ahora trasladamos el índice $n \to n+1$ para escribir

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(z-2)^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}(n+1)(z-2)^n = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \tag{18}$$

Entonces hemos demostrado que

$$-\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \tag{19}$$

Cancelando los signos menos tenemos el resultado.

3. Por multiplicación de series muestre que

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < 1) \tag{20}$$

Solución: La serie va hasta orden $\mathcal{O}(z^2)$. Ya que hay un factor de $1/z$, necesitamos la serie de Taylor de los otros factores analíticos solamente hasta orden $\mathcal{O}(z^3)$. Por lo tanto consideramos solamente términos a ese orden para los factores analíticos. El dominio de validez de la serie muestra que es una expansión alrededor del origen, así que podemos usar

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \tag{21}$$

y

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + \mathcal{O}(z^4) \tag{22}$$

Multiplicando estas dos series tenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{1+z^2} &= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - z^2 - z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= 1 + z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{5}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned} \tag{23}$$

Multiplicando por $1/z$ llegamos a

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < 1) \tag{24}$$

4. Evalue las siguientes integrales en el círculo $|z| = 3$ (sentido positivo):

   (a)

$$\int_C \frac{1}{z+z^2} \tag{25}$$

(b)
$$\int_C z\cos(z) \tag{26}$$
(c)
$$\int_C \frac{\exp(-z)}{z^2} \tag{27}$$
(d)
$$\int_C \frac{\exp(-z)}{(z-4)^2} \tag{28}$$

Solución:

(a) Esta pregunta es la más difícil de la prueba! Hay (al menos) dos formas de proceder. Una es ocupando la fórmula integral de Cauchy, y la otra es con residuos. Para aplicar la fórmula de Cauchy escribimos

$$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{-1}{z+1} \tag{29}$$

por fracciones parciales. Entonces tenemos dos integrales:

$$\int_C \frac{1}{z}dz + \int_C \frac{-1}{z+1}dz \tag{30}$$

En ambos casos el contorno de integral incluye el punto z_0 donde el integrando es singular: $z_0 = 0$ para la primera integral, $z_0 = -1$ para la segunda. Podemos aplicar la fórmula de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{31}$$

si identificamos $f(z) = 1$ para la primera integral y $f(z) = -1$ para la segunda. Así que la primera integral es igual a $2\pi i$ y la segunda es igual a $-2\pi i$. La suma entonces es cero y tenemos

$$\int_C \frac{1}{z+z^2} = 0 \tag{32}$$

Otra forma es con residuos. La serie alrededor del origen del integrando es

$$\frac{1}{z}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{z}\cdot(1 - z + z^2 - \cdots) = \frac{1}{z} - 1 + \mathcal{O}(z) \tag{33}$$

Así que el residuo en el origen es 1. La serie alrededor de $z = -1$ del integrando es

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{(z+1)-1} &= -\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1}\cdot(1 + (z+1) + (z+1)^2 + \cdots) \\ &= -\frac{1}{z+1} - 1 - \mathcal{O}(z)\end{aligned} \tag{34}$$

Así que el residuo en $z = -1$ es -1. Por el teorema de los residuos tenemos

$$\int_C \frac{1}{z+z^2}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z+z^2} = 1 + (-1) = 0 \tag{35}$$

(b) El integrando es analítico en todo el plano complejo, así que (por Cauchy-Goursat) la integral es cero.

(c) De nuevo, hay (al menos) dos formas de proceder: con fórmula de Cauchy o con residuos. En el caso de la fórmula de Cauchy, usamos la extensión:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{36}$$

En este caso tenemos $f(z) = \exp(-z)$ (entera), $z_0 = 0$ y $n = 1$ para tener z^2 en el denominador. Entonces tenemos

$$f^{(1)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz \tag{37}$$

y $f^{(1)}(0) = -\exp(0) = -1$, así que

$$\int_C \frac{\exp(-z)}{z^2} = -2\pi i \tag{38}$$

Con residuos:

$$\frac{1}{z^2} \exp(-z) = \frac{1}{z^2}(1 - z + \frac{z^2}{2} - \mathcal{O}(z^3)) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1) \quad (0 < |z| < \infty) \tag{39}$$

y el residuo es -1. Por el teorema de los residuos:

$$\int_C \frac{\exp(-z)}{z^2} dz = -2\pi i \tag{40}$$

(d) El integrando NO es analítico en todo el plano complejo (hay una singularidad en $z = 4$) pero si es analítico en C y adentro. Por Cauchy-Goursat la integral es cero.