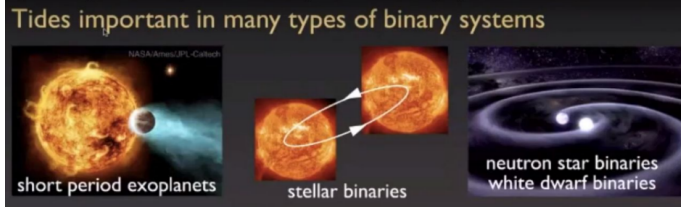


Interacting Close Binaries

Mauro Jélvez

1. Binarias Cercanas y Efectos de Marea

Los sistemas binarios constituyen un laboratorio fundamental para el estudio de la física estelar y la gravitación. En las **binarias cercanas (interacting binaries)**, la separación entre los componentes es lo suficientemente pequeña como para que surjan fenómenos de interacción significativos, siendo los **efectos de marea** los más cruciales. Estos efectos alteran la estructura, evolución y órbita de los componentes, llevando a estados de equilibrio como la **sincronización rotacional** y la **circularización orbital**.



2. El Potencial de Marea

2.1. Derivación del Potencial

Consideremos un sistema binario con dos cuerpos de masas M_1 y M_2 , separados por una distancia a . Nos interesa calcular la fuerza que M_2 ejerce sobre una masa de prueba dm en la superficie de M_1 , en comparación con la fuerza que ejerce sobre el centro de masa de M_1 .

El potencial gravitatorio en un punto \mathbf{r} debido a M_2 , tomando el centro de M_1 como origen, es:

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = -\frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \quad (1)$$

donde \mathbf{a} es el vector desde M_1 a M_2 . El potencial de marea se define como la diferencia entre el potencial en el punto \mathbf{r} y el potencial en el centro de M_1 más el gradiente a través de M_1 :

$$\Phi_{\text{marea}} = \Phi_2(\mathbf{r}) - \Phi_2(0) - \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_2|_{\mathbf{r}=0} \quad (2)$$

Desarrollando $\Phi_2(\mathbf{r})$ en serie de Taylor alrededor de $\mathbf{r} = 0$:

$$\Phi_2(\mathbf{r}) \approx \Phi_2(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_2|_{\mathbf{r}=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_i r_j \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{\mathbf{r}=0} + \dots \quad (3)$$

Sustituyendo, encontramos que el potencial de marea de segundo orden es:

$$\Phi_{\text{tidal}} \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_i r_j \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{\mathbf{r}=0} \quad (4)$$

Para un punto en la línea que conecta los dos centros de masa (eje x), este potencial se simplifica. El campo de marea es la derivada segunda del potencial. La fuerza de marea por unidad de masa es $-\nabla \Phi_{\text{tidal}}$.

2.2. Expresión de la Fuerza de Marea

La aceleración de marea en la dirección radial (eje \mathbf{a}) a una distancia R (radio de la estrella) desde el centro de M_1 es:

$$a_{\text{tidal}} \approx \frac{2GM_2 R}{a^3} \quad (5)$$

Esta expresión muestra que la fuerza de marea es **proporcional** a la masa de la perturbadora M_2 y al radio R de la perturbada, e **inversamente proporcional al cubo de la separación** a . Esta fuerte dependencia ($\propto a^{-3}$) explica por qué los efectos son dominantes sólo en binarias muy cercanas.

3. Consecuencias Dinámicas de las Mareas

Las fuerzas de marea realizan trabajo sobre el sistema, disipando energía orbital y angular a través de la fricción interna (p. ej., por viscosidad turbulenta o radiacional). Esto conduce a la evolución secular de los parámetros orbitales y rotacionales.

3.1. Tiempo de Sincronización

El tiempo característico para que la rotación de una componente (M_1) se sincronice con el período orbital (P_{orb}) debido al torque de marea es:

$$t_{\text{sync}} \approx \frac{I_1 k_2}{9GM_2^2 R_1^5} \left(\frac{a^6}{Q} \right) |\Omega_1 - n| \quad (6)$$

donde:

- I_1 es el momento de inercia de M_1 .
- k_2 es el número de Love (que depende de la estructura interna, ~ 0.01 para una estrella de secuencia principal).
- Q es el factor de disipación de marea (inverso del factor de calidad).
- Ω_1 es la velocidad angular de rotación de M_1 .
- $n = 2\pi/P_{\text{orb}}$ es el movimiento medio orbital.

Este tiempo escala fuertemente con la separación: $t_{\text{sync}} \propto a^6$.

3.2. Tiempo de Circularización

De manera análoga, el tiempo para que la excentricidad orbital e se amortigüe hacia cero es:

$$t_{\text{circ}} \approx \frac{2}{21} \frac{Q}{k_2} \frac{M_1^2 a^8}{GM_2(M_1 + M_2)R_1^{10} n} \quad (7)$$

con una dependencia aún más fuerte con la separación: $t_{\text{circ}} \propto a^8$. Por lo tanto, las órbitas de binarias muy cercanas son casi perfectamente circulares.

4. Implicaciones Astrofísicas en Diferentes Sistemas

4.1. Binarias de Estrellas de Neutrones y Agujeros Negros

En estos sistemas compactos ($R \sim 10$ km), las fuerzas de marea son extremas a pesar de la pequeña size, debido a las enormes densidades y masas involucradas. Las mareas son cruciales en la fase final de inspiral antes de la coalescencia, dominando la forma de la onda gravitacional detectada (p. ej., eventos GW170817). La ecuación de estado de la materia nuclear ultradensa puede ser restringida por los efectos de marea observados en las ondas gravitacionales, parametrizados por la **deformabilidad de marea** Λ .

4.2. Exoplanetas de Período Corto (*Hot Jupiters*)

Estos gigantes gaseosos ($R \sim R_J$) en órbitas de \sim pocos días están fuertemente influenciados por las mareas de su estrella anfitriona. Se espera que estén **sincronizados rotacionalmente** ($P_{\text{rot}} = P_{\text{orb}}$) y en **órbita circular**. La disipación de energía de marea en el interior del planeta puede conducir a un **calentamiento por marea** significativo, inflando su radio y afectando su estructura térmica y evolución.

4.3. Binarias Estelares Cerradas y Binarias de Enanas Blancas

En sistemas como **Algol** o **beta Lyrae**, las mareas han moldeado la evolución, facilitando la transferencia de masa y llevando a las componentes a sincronización y circularización. En las binarias de enanas blancas cercanas (predecesoras de Supernovas Tipo Ia o variables cataclísmicas), las mareas pueden afectar la tasa de acreción y la estabilidad del disco. La detección de ondas gravitacionales por LISA se basará en gran medida en el conocimiento preciso de las órbitas circulares forzadas por las mareas en estos sistemas.

5. Conclusión

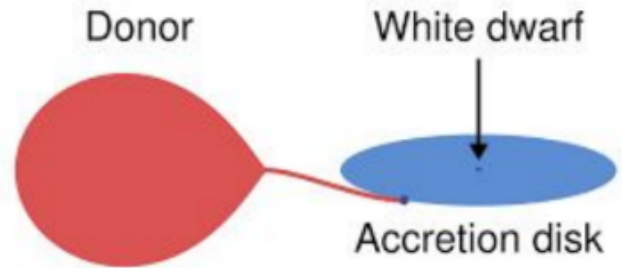
Los efectos de marea son un elemento fundamental en la dinámica y evolución de los sistemas binarios cercanos. Su modelado requiere un tratamiento riguroso de la estructura interna de los cuerpos (a través de k_2 y Q) y su acoplamiento con la dinámica orbital. El estudio de estos efectos no sólo es esencial para entender la población observada de binarias, sino que también proporciona una poderosa sonda para investigar la física interna de estrellas, planetas y remanentes compactos.

6. Sincronización Orbital

Como se introdujo, en sistemas binarios cercanos (períodos orbitales $P_{\text{orb}} < 10d$) es común observar que la rotación de, al menos, uno de los componentes está sincronizada con el período orbital, cumpliendo la relación:

$$P_{\text{orb}} = P_{\text{rot}} \quad (8)$$

Esto contrasta con la rotación típica de estrellas individuales de tipo espectral similar, que suelen rotar más rápido. El mecanismo físico subyacente es la disipación de energía por fricción de marea, que actúa para igualar la velocidad angular orbital (n) y la velocidad angular rotacional (Ω) de la estrella.



6.1. Mecanismo de Sincronización

El torque de marea τ que actúa sobre la estrella (asumiendo M_1 como la estrella perturbada y M_2 como la perturbadora) puede expresarse, en una aproximación de equilibrio, como:

$$\tau = \int_{M_1} \mathbf{r} \times (-\rho \nabla \Phi_{\text{tidal}}) dV \quad (9)$$

Este torque realiza trabajo sobre la rotación de la estrella, cambiando su momento angular rotacional $L_{\text{rot}} = I\Omega$:

$$\frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = \tau \quad (10)$$

donde I es el momento de inercia de la estrella. El torque τ es proporcional a la diferencia $(n - \Omega)$ y actúa para reducir esta diferencia. Para pequeñas desviaciones del equilibrio ($\Omega \approx n$), podemos linealizar:

$$\tau \approx -k(\Omega - n) \quad (11)$$

donde k es una constante que depende de los parámetros del sistema (masas, separación, estructura interna de la estrella). Sustituyendo en la ecuación del momento angular:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{k}{I}(\Omega - n) \quad (12)$$

Esta es una ecuación diferencial simple cuya solución es un decaimiento exponencial de la diferencia $(\Omega - n)$ hacia cero:

$$\Omega(t) - n = (\Omega_0 - n)e^{-t/t_{\text{sync}}} \quad (13)$$

donde Ω_0 es la velocidad angular inicial y t_{sync} es el **tiempo de sincronización** característico, definido como:

$$t_{\text{sync}} = \frac{I}{k} \quad (14)$$

La expresión detallada para t_{sync} , considerando la disipación dinámica en una envoltura convectiva, fue proporcionada en la sección anterior (Ec. 6).

6.2. El Caso de las Variables Cataclísmicas

Las **variables cataclísmicas (CVs)** son binarias cercanas consistiendo típicamente de una **enana blanca (WD)** primaria y una estrella donante de la secuencia principal (o subgigante) de baja masa. Son un laboratorio ideal para estudiar la sincronización tidal.

- **Estrella Donante:** La estrella de secuencia principal (MS) en sistemas CV típicos ($P_{\text{orb}} \sim 1.3 - 10h$) llena su **lóbulo de Roche**, por lo que está extremadamente cerca de la enana blanca. El fuerte acoplamiento tidal resultante asegura que la donante esté **sincronizada rotacionalmente** ($P_{\text{rot, donor}} = P_{\text{orb}}$) en la gran mayoría de los casos. Su rotación es, por tanto, mucho más lenta ($P_{\text{rot}} > 1h$) que la de una estrella de secuencia principal aislada de tipo espectral similar (que podría tener $P_{\text{rot}} \sim 0.5 - 2d$).
- **Enana Blanca:** La enana blanca primaria, al ser un objeto compacto ($R_{\text{WD}} \sim 0.01R_{\odot}$) en comparación con la separación orbital ($a \sim 0.5R_{\odot}$ para un período de 2 h), experimenta fuerzas de marea significativamente más débiles (recuérdese $a_{\text{tidal}} \propto R/a^3$). Por lo tanto, su tiempo de sincronización es orders de magnitud mayor. **No está sincronizada** ($P_{\text{rot, WD}} \neq P_{\text{orb}}$) en la mayoría de los sistemas CV no magnéticos. Su período de rotación es generalmente mucho más corto ($P_{\text{rot, WD}} \sim 10 - 1000s$) que el período orbital ($P_{\text{orb}} \sim 10000s$). La acreción de masa con alto momento angular desde el disco puede incluso *aumentar* su velocidad de rotación (llevándola hacia un estado de "equilibrio de spin-up"), oponiéndose al efecto de sincronización tidal.
- **Excepción: Sistemas Fuertemente Magnéticos (Polars):** En los sistemas donde la enana blanca posee un campo magnético muy intenso ($B > e7G$), el mecanismo de acreción cambia radicalmente. El flujo de masa desde la donante es guiado por las líneas del campo magnético de la WD hacia sus regiones polares, impidiendo la formación de un disco de acreción. En estos casos, el campo magnético puede acoplar **rígidamente** la enana blanca con la órbita y/o con la donante, potencialmente llevando a un estado de **sincronización triple** ($P_{\text{rot, WD}} = P_{\text{rot, donor}} = P_{\text{orb}}$). Este acoplamiento magnético proporciona un torque adicional mucho más fuerte que las mareas puras.

6.3. Evidencia Observacional

La sincronización de la donante en CVs y otras binarias cercanas (como las binarias de rayos X de baja masa) está bien establecida a través de técnicas observacionales:

- **Modulaciones Fotométricas:** La rotación sincronizada de la donante (que a menudo presenta manchas estelares) produce modulaciones en la curva de luz con el período orbital.
- **Amplitud de Elipsoidal:** La donante, distorsionada tidalmente en una forma elipsoidal, varía en área proyectada a lo largo de la órbita, creando una modulación característica de doble honda (período $P_{\text{orb}}/2$) cuya amplitud depende de la relación R_2/a y de la inclinación. La consistencia de esta amplitud con los parámetros del sistema confirma que la donante está corotando y en una órbita circularizada.
- **Perfiles de Líneas Espectroscópicas:** La rotación sincronizada de la donante ensancha sus líneas espectrales de una manera característica y predecible ($v \sin i \propto R_2/P_{\text{orb}}$), lo cual se confirma con las observaciones.

La no sincronización de la enana blanca se infiere de la detección de pulsaciones no radiales (como en las enanas blancas pulsantes GW Lib) con períodos mucho más cortos que P_{orb} , o directamente de modulaciones pulsadas en la curva de luz en sistemas con acreción polar (donde el período de pulso revela $P_{\text{rot, WD}}$).

7. Evolución Tidal en el Sistema Tierra-Luna

El sistema Tierra-Luna es un ejemplo clásico y cuantificable de evolución tidal en acción, que ilustra perfectamente la conservación del momento angular en un sistema aislado.

7.1. Estado Actual

La Luna está **sincronizada tidalmente** con la Tierra:

$$P_{\text{rot, Moon}} = P_{\text{orb}} \approx 27.3 \text{ días} \quad (15)$$

Esto significa que las deformaciones de marea en la Luna se han estabilizado, disipando energía hasta que su rotación se igualó a su traslación.

7.2. Mecanismo en Curso

Sin embargo, la Tierra **no** está sincronizada. Su rotación (~ 24 h) es mucho más rápida que el período orbital de la Luna. Las protuberancias de marea levantadas en la Tierra (océanos y, en menor medida, la corteza sólida) son, por tanto, "arrastradas" por la rotación terrestre. Esto crea un abultamiento que se adelanta ligeramente a la línea Tierra-Luna.

Gravitacionalmente, este abultamiento desalineado ejerce un **torque** sobre la Luna:

1. **Frena la rotación de la Tierra:** Transfiere momento angular rotacional de la Tierra al orbital de la Luna.
2. **Hace que la Luna se aleje** ($a \uparrow$): Al ganar momento angular orbital, la Luna debe migrar a una órbita más alta (donde su velocidad orbital es menor, $v_{\text{orb}} \downarrow$).

7.3. Evolución Futura y Destino Final

El proceso continuará hasta que la **rotación de la Tierra se frene lo suficiente como para igualar el período orbital de la Luna**, alcanzando un estado de **doble sincronización**:

$$P_{\text{rot, Earth}} = P_{\text{rot, Moon}} = P_{\text{orb}} \quad (16)$$

Los cálculos predicen que este estado de equilibrio se alcanzaría con un período de ~ 47 días.

7.4. La Ironía Cósmica

Este estado final **nunca se alcanzará**. La escala de tiempo para este proceso ($\sim 50 \times 10^9$ años) es mayor que la vida restante del Sol. En ~ 5 mil millones de años, el Sol se convertirá en una gigante roja, engullendo probablemente al sistema Tierra-Luna mucho antes de que este complete su evolución tidal.

En pocas palabras: Las mareas están frenando la Tierra y alejando a la Luna. El destino final es que ambos días (el terrestre y el lunar) duren 47 días, pero el Sol se lo impedirá.

8. Sincronización Orbital en Planetas

El estudio de la sincronización tidal se extiende más allá de los sistemas binarios estelares hacia los sistemas planetarios. La proximidad a la estrella anfitriona y las interacciones gravitatorias pueden llevar a diversos estados de acoplamiento rotacional-orbital.

8.1. El Caso de Mercurio: Resonancia 3:2

Entre los planetas del Sistema Solar, Mercurio presenta el caso más interesante de acoplamiento tidal no trivial. A diferencia de la Luna con la Tierra, Mercurio **no está sincronizado** en una resonancia 1:1 con el Sol, sino en una **resonancia spin-órbita 3:2**:

$$2P_{\text{orb}} = 3P_{\text{rot}} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{P_{\text{rot}}}{P_{\text{orb}}} = \frac{2}{3} \quad (17)$$

Esto significa que Mercurio completa tres rotaciones sobre su eje por cada dos órbitas alrededor del Sol. La razón física por la que se estabiliza en esta resonancia y no en la 1:1 radica en su **alta excentricidad orbital** ($e \approx 0.206$).

- **Energía de Deformación:** En una órbita excéntrica, la fuerza tidal varía con la distancia ($F_{\text{tidal}} \propto 1/r^3$). La energía disipada por fricción tidal durante un ciclo orbital depende de la configuración spin-órbita.
- **Estabilidad en Resonancia:** Para Mercurio, el estado de mínima disipación de energía tidal (y por tanto, el estado de equilibrio) ocurre cuando el planeta se encuentra en **periastro** en el mismo estado de orientación (e.g., con el mismo "abultamiento" tidal hacia el Sol). Esto se garantiza cuando la rotación y la órbita están en una relación racional. La resonancia 3:2 es particularmente estable para su valor de excentricidad.
- **Prueba Observacional:** El período rotacional de Mercurio es de 58.646 días terrestres, mientras que su período orbital es de 88 días. Efectivamente, $3 \times 58.646 \approx 2 \times 88$.

8.2. El Enigma de Venus

Venus presenta una situación única y contraintuitiva:

- **Rotación Retrógrada Extremadamente Lenta:** $P_{\text{rot}} \approx -243.023$ días (el signo negativo indica rotación retrógrada, opuesta a la dirección orbital).
- **No está sincronizada:** Su período orbital es de ~ 224.7 días, por lo que $P_{\text{rot}} \neq P_{\text{orb}}$.
- **Cuasi-resonancia con la Tierra:** Se ha observado que los períodos orbitales de Venus y la Tierra ($P_{\text{orb, Earth}} = 365.25$ días) están cerca de una resonancia con la rotación de Venus:

$$\frac{1}{P_{\text{rot, Venus}}} \approx \frac{1}{P_{\text{orb, Venus}}} - \frac{1}{P_{\text{orb, Earth}}} \quad (18)$$

Esto implica que Venus tiende a presentar la misma cara a la Tierra durante las **conjunciones inferiores** sucesivas. Sin embargo, esto **no es un bloqueo tidal verdadero** con la Tierra.

8.2.1. Posibles Mecanismos para la Rotación de Venus

La rotación lenta y retrógrada de Venus es probablemente el resultado de una combinación de efectos:

1. **Interacciones Tidal Sol-Venus:** Las mareas solares actuaron para frenar la rotación inicial de Venus. La disipación tidal en la densa atmósfera de Venus pudo jugar un papel crucial.

2. **Interacciones Seculares con la Tierra:** Aunque débiles, las perturbaciones gravitatorias de la Tierra sobre la órbita y rotación de Venus, integradas sobre miles de millones de años, pudieron bombear momento angular y llevar la rotación a su estado actual.
3. **Efectos de Marea Atmosférica:** La atmósfera masiva y densa de Venus (~ 92 bar) interactúa tidalmente con el Sol. La disipación de energía en esta atmósfera, acoplada a la superficie sólida a través de la fricción, pudo ser el motor principal para la despinización y eventual reversión de la rotación.
4. **Resonancia de Precesión:** La precesión del eje de rotación de Venus pudo haber pasado por una resonancia con la precesión de su órbita, atrapando efectivamente su rotación en el estado actual.

8.3. Comparación con Otros Planetas

La tabla de períodos de rotación revela tendencias:

Planeta	Período Rotacional (días)
Mercurio	58.646
Venus	-243.023
Tierra	0.997
Marte	1.026
Júpiter	0.414
Saturno	0.440
Urano	-0.718
Neptuno	0.671

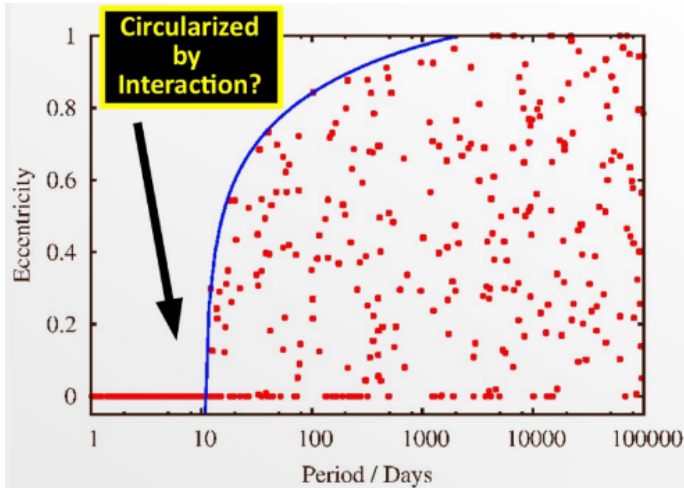
- **Planetas Terrestres:** Mercurio, Venus, Tierra y Marte muestran una gran diversidad, resultado de sus historias tidal y de impactos únicas.
- **Gigantes Gaseosos:** Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno rotan rápidamente (< 1 día), como era de esperar para cuerpos masivos y fluidos que se formaron por colapso gravitatorio y conservaron la mayor parte de su momento angular inicial. La rotación retrógrada de Urano es un misterio, posiblemente relacionado con un impacto gigante durante su formación.
- **Ausencia de Sincronización:** Ningún planeta del Sistema Solar está sincronizado 1:1 con el Sol. Esto se debe a que, para la mayoría, el tiempo de sincronización tidal $t_{\text{sync}} \propto a^6$ es mayor que la edad del Sistema Solar, o porque otros mecanismos (como la excentricidad en Mercurio o la atmósfera en Venus) han dominado la evolución rotacional.

9. Circularización Orbital

Un efecto tidal igualmente importante que la sincronización es la **circularización orbital**. Las fuerzas de marea disipan energía, amortiguando no sólo las rotaciones no sincrónicas sino también cualquier excentricidad orbital ($e > 0$), llevando eventualmente la órbita a ser circular ($e = 0$).

9.1. Mecanismo Físico de la Circularización

La excentricidad orbital implica que la separación entre los dos cuerpos varía a lo largo de la órbita. Dado que la fuerza de marea escala con el cubo inverso de la separación ($F_{\text{tidal}} \propto a^{-3}$), su efecto es mucho más fuerte en el **periastro** (mínima distancia) que en el **apoastro** (máxima distancia). Esta variación asimétrica



en la disipación de energía tidal actúa para reducir la excentricidad.

El torque tidal neto sobre la órbita realiza trabajo para reducir la energía en el movimiento orbital excéntrico, transformándolo en calor dentro de los cuerpos. El **tiempo de circularización** t_{circ} para un sistema binario con excentricidad inicial e_0 puede aproximarse por una evolución exponencial:

$$e(t) \approx e_0 \exp(-t/t_{\text{circ}}) \quad (19)$$

La expresión detallada para t_{circ} (mencionada anteriormente en la Ec. 7) tiene una fuerte dependencia con la separación:

$$t_{\text{circ}} \propto \frac{a^8}{R^{10}} \quad (20)$$

Esta formidable dependencia ($t_{\text{circ}} \propto a^8$) implica que sólo las binarias **muy cercanas** (con períodos orbitales cortos, $P_{\text{orb}} \lesssim 10$ días) tienen tiempo de circularizar dentro de la edad de la población estelar. Para binarias más separadas, t_{circ} excede la edad del Universo.

9.2. Evidencia Observacional: Diagramas Período-Excentricidad

La predicción teórica de que las binarias más cercanas deben tener órbitas circulares se confirma espectroscópicamente. La figura muestra un diagrama esquemático de excentricidad versus período orbital para una población de binarias.

Las características clave del diagrama son:

- **Binarias de Período Muy Corto** ($P \lesssim 10$ días): Todas las órbitas son **circulares** ($e = 0$). Este es el régimen donde t_{circ} es menor que la edad típica de las estrellas (\sim Giga-años). El valor exacto del período límite depende de la edad de la población y de los tipos espectrales (y por tanto, radios) de las estrellas involucradas. Poblaciones más viejas tendrán un período límite de circularización mayor.
- **Binarias de Período Intermedio** ($P \sim 10 - 1000$ días): Este es el régimen de **excentricidades diversas**. Las órbitas pueden tener desde $e = 0$ hasta $e \approx 0.8 - 0.9$. Aquí, t_{circ} es comparable o mayor que la edad de las estrellas, por lo que la excentricidad observada es un fósil de las condiciones iniciales de formación o de perturbaciones dinámicas pasadas, que no han sido borradas por las mareas.
- **Binarias de Período Largo** ($P \gtrsim 1000$ días): Las excentricidades pueden ser **muy altas** ($e \rightarrow 1$). En estas separaciones, las fuerzas de marea son despreciables, y la excentricidad orbital se conserva efectivamente.

9.3. Implicaciones para la Evolución de Binarias

La circularización tidal es un paso crítico en la evolución de muchos sistemas binarios interactivos:

- **Transferencia de Masa Estable:** Para que comience una fase de transferencia de masa estable por desbordamiento del lóbulo de Roche, la órbita debe estar esencialmente circularizada. Una excentricidad significativa provocaría una variación grande en el tamaño del lóbulo de Roche, haciendo la transferencia de masa dinámicamente inestable.
- **Binarias de Rayos X y Variables Cataclísmicas:** La órbita circular es un sello distintivo de estos sistemas, confirmando que han pasado por una larga fase de evolución tidal antes de iniciar la acreción.
- **Constraints en Edades:** El período límite de circularización en un cúmulo estelar puede usarse para estimar su edad. Un cúmulo más viejo habrá tenido más tiempo para circularizar binarias con períodos ligeramente más largos.

10. Dependencia de la Circularización con el Radio Estelar

El proceso de circularización tidal no depende únicamente del período orbital (o la separación a), sino de la relación adimensional entre el radio estelar R y la separación orbital a . Esta relación R/a determina la amplitud de las deformaciones tidal y, por consiguiente, la eficiencia de la disipación de energía.

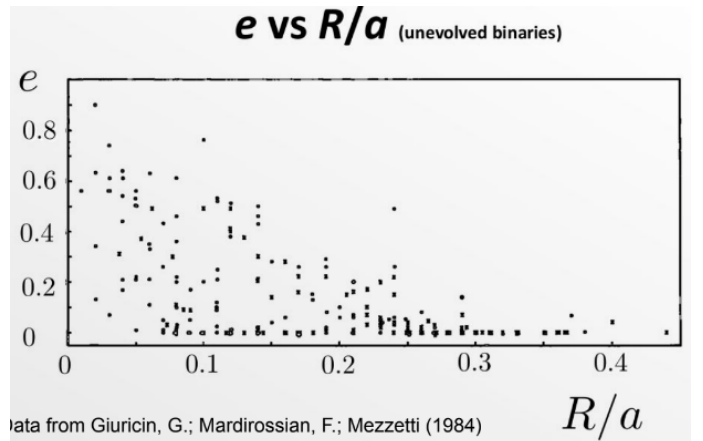


Fig. 1. Relación entre la excentricidad orbital e y la relación R/a para binarias no evolucionadas. Se observa un claro descenso de e hacia cero a medida que R/a aumenta. Para $R/a \gtrsim 0.25 - 0.30$, todas las órbitas son circulares ($e = 0$). La dispersión en e para valores bajos de R/a refleja diferentes edades y historiales de disipación tidal.

10.1. Interpretación Física de R/a

La fuerza de marea es un efecto diferencial. La aceleración tidal en la superficie de la estrella, como se derivó anteriormente ($a_{\text{tidal}} \approx \frac{2GM_2R}{a^3}$), puede reescribirse para destacar la dependencia clave:

$$a_{\text{tidal}} \propto \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \cdot \frac{GM_1}{R^2} \quad (21)$$

donde $\frac{GM_1}{R^2}$ es la gravedad superficial de la estrella. Esto muestra que la **deformación tidal** (y por ende la disipación de energía

que conduce a la circularización) es proporcional al cubo de la relación R/a :

$$\text{Deformación} \propto \left(\frac{R}{a}\right)^3 \quad (22)$$

Por lo tanto, para una separación a fija, una estrella más grande (mayor R) experimentará fuerzas de marea mucho más intensas.

10.2. Evidencia Observacional: e vs. R/a

La figura, basada en datos de Giuricin et al. (1984), muestra la excentricidad orbital e en función de la relación R/a para una población de binarias no evolucionadas.

El gráfico muestra claramente que:

- **R/a pequeño ($\lesssim 0.1$):** Las excentricidades pueden ser altas ($e \rightarrow 0.8$). Las estrellas son pequeñas comparadas con su separación, las deformaciones tidal son mínimas y el tiempo de circularización excede la edad del sistema.
- **R/a intermedio ($\sim 0.1 - 0.25$):** Existe una gran dispersión en los valores de e . Este es el régimen de transición donde t_{circ} es comparable a la edad de los sistemas. La excentricidad medida es un indicador de la eficiencia de la disipación tidal en cada sistema específico.
- **R/a grande ($\gtrsim 0.25 - 0.3$):** **Todas las órbitas son circulares** ($e = 0$). En este régimen, las estrellas están tan cerca que R/a es grande, las deformaciones son significativas y t_{circ} es menor que la edad de las estrellas. El valor crítico $(R/a)_{\text{crit}} \approx 0.25$ marca el límite por encima del cual la circularización es eficiente y completa.

10.3. Implicaciones para Objetos Degenerados

La fuerte dependencia $\propto (R/a)^3$ tiene una consecuencia crucial al comparar estrellas normales con objetos degenerados (enanas blancas, estrellas de neutrones):

- **Estrellas Normales:** Tienen radios grandes ($R \sim R_{\odot}$). Para una separación dada a , la relación R/a es relativamente grande, lo que lleva a deformaciones tidal significativas y, por tanto, a tiempos de circularización (y sincronización) cortos.
- **Objetos Degenerados:** Tienen radios muy pequeños ($R_{\text{WD}} \sim 0.01R_{\odot}$, $R_{\text{NS}} \sim e - 5R_{\odot}$). Para la **misma separación** a , la relación R/a es orders de magnitud más pequeña. Por lo tanto, las **deformaciones tidal son extremadamente débiles** y los **tiempos de circularización son enormemente largos**.

Ejemplo: Consideremos una binaria con $a = 1R_{\odot}$.

- Para una estrella de secuencia principal ($R \approx 1R_{\odot}$): $R/a = 1$. Las mareas son muy fuertes.
- Para una enana blanca ($R \approx 0.01R_{\odot}$): $R/a = 0.01$. La fuerza de marea es $(0.01)^3 = 10^{-6}$ veces más débil que en el caso de la estrella normal.
- Para una estrella de neutrones ($R \approx 10 \text{ km} \approx 1.4 \times 10^{-5}R_{\odot}$): $R/a \approx 1.4 \times 10^{-5}$. La fuerza de marea es $(1.4 \times 10^{-5})^3 \approx 2.7 \times 10^{-15}$ veces más débil.

10.4. Conclusión

La relación R/a es el parámetro fundamental que controla la eficiencia de los procesos tidal. Esto explica por qué:

1. Las binarias de estrellas normales de período corto están circularizadas y sincronizadas.
2. Las binarias de objetos compactos (como las enanas blancas en variables cataclísmicas) pueden tener órbitas circulares sólo si han sido forzadas a separaciones extremadamente pequeñas (donde a es tan pequeño que R/a se hace significativo nuevamente, p.ej., cuando el donante llena su lóbulo de Roche).
3. La circularización es mucho más lenta en sistemas que involucran objetos compactos, incluso para períodos orbitales cortos, hasta que la separación se reduce críticamente.

11. Energía Mínima y los Efectos de Marea

Los procesos de circularización orbital y sincronización rotacional no son arbitrarios; representan la evolución del sistema binario hacia su **configuración de mínima energía** para un momento angular total dado.

11.1. Configuración de Mínima Energía

Para un sistema binario aislado, el momento angular total L_{total} se conserva:

$$L_{\text{total}} = L_{\text{orb}} + L_{\text{rot},1} + L_{\text{rot},2} = \text{constante} \quad (23)$$

donde L_{orb} es el momento angular orbital y $L_{\text{rot},i}$ son los momentos angulares rotacionales de cada componente.

La energía total del sistema es:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{orb}} + E_{\text{rot},1} + E_{\text{rot},2} + E_{\text{tidal}} \quad (24)$$

La energía tidal E_{tidal} representa la energía de deformación de los cuerpos debido a las fuerzas de marea. El estado de **órbita circular y rotación sincronizada** corresponde al mínimo de E_{total} para el L_{total} fijo.

11.2. El Origen Físico de las Mareas

Las fuerzas de marea surgen de la **no uniformidad** del campo gravitatorio across un cuerpo extendido. Para un cuerpo de radio R y masa m sometido al campo de un cuerpo de masa M a distancia a , la diferencia de fuerza across el diámetro es:

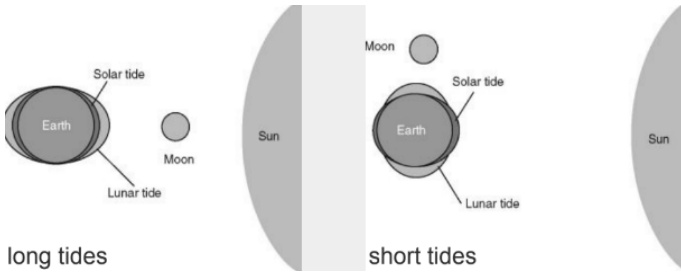
$$\Delta F \approx \frac{2GMmR}{a^3} \quad (25)$$

Esta fuerza diferencial es la responsable de deformar el cuerpo, creando abultamientos tidal.

11.3. Analogía con las Mareas Terrestres

El efecto es idéntico al que produce las mareas oceánicas en la Tierra, aunque en sistemas binarios estelares las escalas son enormemente mayores. En la Tierra tenemos:

- **Marea Lunar:** Producida por la Luna, es el efecto dominante.
- **Marea Solar:** Producida por el Sol, tiene aproximadamente la mitad de la amplitud de la marea lunar.
- **Marea Spring y Neap:** Cuando las fuerzas de marea lunar y solar se alinean (Luna nueva y Luna llena), se producen mareas más altas (spring tides). Cuando forman ángulo recto (cuartos creciente y menguante), se producen mareas más bajas (neap tides).



11.4. Tipos de Deformaciones Tidal

Las deformaciones tidal pueden ser de dos tipos principales:

11.4.1. Mareas de Onda Larga (Equilibrio Estático)

Cuando el período de la fuerza tidal es mucho mayor que el período de oscilación libre del cuerpo, la deformación puede seguir adiabáticamente el potencial tidal. Esto produce:

$$h_{\text{equilibrium}} \approx \frac{M_2 R^4}{M_1 a^3} \quad (26)$$

donde h es la altura del abultamiento tidal. Esta es una buena aproximación para mareas en planetas y estrellas con envolturas convectivas.

11.4.2. Mareas de Onda Corta (Respuesta Dinámica)

Cuando el período tidal es comparable o menor que el período de oscilación libre, se excitan ondas internas (de gravedad o Rossby) que propagan y disipan la energía. Esta disipación es crucial para la evolución tidal en estrellas con núcleos radiativos.

11.5. Disipación de Energía y Evolución Secular

La fricción interna asociada con las deformaciones tidal convierte energía mecánica en calor:

$$\dot{E}_{\text{diss}} = - \int_V \rho \epsilon dV \quad (27)$$

donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de masa. Esta disipación es responsable de:

1. Reducir la excentricidad orbital ($e \rightarrow 0$)
2. Sincronizar las rotaciones ($P_{\text{rot}} \rightarrow P_{\text{orb}}$)
3. Alinear los ejes rotacionales con el orbital

11.6. Importancia en Binarias Cercanas

Las observaciones confirman que los efectos de marea son cruciales en binarias cercanas:

- **Binarias de Contacto:** Sistemas donde ambas componentes llenan sus lóbulos de Roche están completamente sincronizadas y circularizadas.
- **Variables Cataclísmicas:** La donante está sincronizada mientras que la enana blanda generalmente no lo está.
- **Binarias de Rayos X:** Mostran evidencia de sincronización tidal de la estrella donante.
- **Exoplanetas Cercanos:** Esperamos que estén sincronizados y circularizados, con posible calentamiento tidal significativo.

11.7. El Parámetro de Calidad Tidal

La eficiencia de la disipación se parametriza mediante el **factor de calidad tidal** Q , definido como:

$$Q = \frac{2\pi E_{\text{stored}}}{\Delta E_{\text{diss}}} \quad (28)$$

donde E_{stored} es la energía almacenada en la deformación tidal y ΔE_{diss} es la energía disipada por ciclo. Valores bajos de Q indican disipación eficiente.

Los valores típicos son:

- $Q \sim 10^5 - 10^6$ para estrellas de secuencia principal
- $Q \sim 10^7$ para enanas blancas
- $Q \sim 10^8 - 10^9$ para estrellas de neutrones
- $Q \sim 10 - 100$ para planetas terrestres (disipación eficiente en mantos rocosos)

12. Distorsión Tidal y el Potencial Gravitatorio

Cuando dos componentes de un sistema binario están suficientemente cerca, las fuerzas de marea distorsionan sus formas, llevándolas a desviarse de la simetría esférica. Esta distorsión tiene implicaciones profundas en el potencial gravitatorio del sistema.

12.1. Ruptura de la Simetría Esférica

Para un cuerpo auto-gravitante y fluidodinámico en aislamiento, el equilibrio hidrostático y la minimización de energía llevan a una configuración esféricamente simétrica. El potencial gravitatorio en su exterior es entonces:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (29)$$

que depende únicamente de la distancia radial r al centro de masa.

En un sistema binario cercano, el gradiente del campo gravitatorio externo (el **tensor de marea**) ejerce un torque que deforma el cuerpo. La masa se redistribuye, creando un **abultamiento tidal** a lo largo de la línea que conecta los centros de masa y, para rotaciones no sincrónicas, un abultamiento fuera de fase.

12.2. Expansión del Potencial Gravitatorio

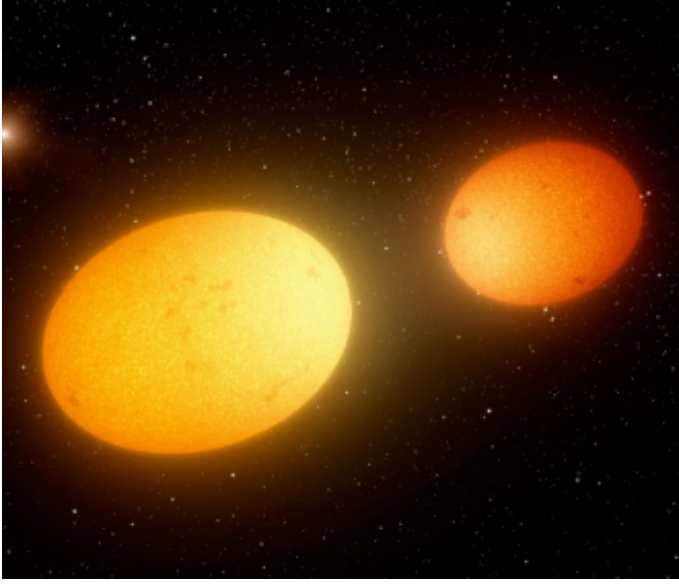
El potencial gravitatorio total que siente una partícula de prueba en las cercanías de la estrella perturbada (M_1) ya no es simplemente $-GM_1/r$. Debe incluir el potencial de la perturbadora (M_2) y la respuesta de M_1 a esta perturbación.

Se puede expandir el potencial en armónicos esféricos. Para una perturbación puntual M_2 en la dirección \mathbf{a} , el potencial tidal externo es:

$$\Phi_{\text{tidal}}^{(\text{ext})} = -\frac{GM_2}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad (30)$$

donde P_l son los polinomios de Legendre y θ es el ángulo desde la línea que une los centros. El término $l = 2$ (cuadrupolar) es dominante:

$$\Phi_{\text{tidal}}^{(\text{ext})} \approx -\frac{GM_2}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos \theta) = -\frac{GM_2 r^2}{a^3} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}\right) \quad (31)$$



12.3. Respuesta de la Estrella Perturbada

La estrella M_1 responde a este potencial externo redistribuyendo su masa. Esta respuesta se caracteriza por los **números de Love** k_l , que dependen de la estructura interna de la estrella. El potencial de marea total resultante (externo + respuesta) es:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{tidal}}^{(\text{ext})} + \Phi_{\text{response}} \quad (32)$$

Para el término cuadrupolar ($l = 2$), el potencial de respuesta es:

$$\Phi_{\text{response}} = k_2 \frac{R^5}{r^3} \frac{GM_2}{a^3} P_2(\cos \theta) \quad (33)$$

donde R es el radio de la estrella perturbada y k_2 es el número de Love de orden 2. El número de Love k_2 cuantifica la "deformabilidad" de la estrella. Para una esfera de densidad uniforme, $k_2 = 3/2$. Para una estrella de secuencia principal, $k_2 \sim 0.01$.

12.4. Deformación de la Superficie

La deformación radial de la superficie de la estrella (ΔR) debido al potencial tidal cuadrupolar es:

$$\Delta R(\theta) = h \cdot P_2(\cos \theta) \quad (34)$$

donde la amplitud h está dada por:

$$h = \frac{3}{2} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R}{a} \right)^3 R \cdot (1 + 2k_2) \quad (35)$$

Esta ecuación muestra explícitamente la dependencia cúbica con la relación R/a .

12.5. Energía de Deformación Tidal

La redistribución de masa requiere energía. La energía almacenada en la deformación tidal cuadrupolar es:

$$E_{\text{tidal}} \approx \frac{1}{2} k_2 \frac{GM_1^2}{R} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{R}{a} \right)^6 \quad (36)$$

Nótese la fuerte dependencia con la separación: $E_{\text{tidal}} \propto a^{-6}$. Esta energía se disipa gradualmente mediante procesos viscosos y de fricción interna, conduciendo a la evolución secular del sistema.

12.6. Consecuencias Dinámicas

La aparición de estos "términos extra" en el potencial gravitatorio tiene varias consecuencias importantes:

1. **Acoplamiento Tidal:** Los términos de momento multipolar adicionales acoplan la rotación con la órbita, permitiendo el intercambio de momento angular.
2. **Precesión Apsidal:** La distorsión tidal hace que el potencial no sea exactamente kepleriano, causando la precesión del periastro. La tasa de precesión apsidal $\dot{\omega}$ proporciona información observacional directa sobre los números de Love k_2 y, por tanto, sobre la estructura interna de las estrellas.
3. **Inestabilidades Seculares:** En sistemas triples o con alta excentricidad, los términos de marea de alto orden pueden llevar a resonancias e inestabilidades dinámicas.
4. **Ondas Gravitacionales:** Para objetos compactos, la deformación tidal afecta la fase de la señal de onda gravitacional durante la inspiral, permitiendo medir la deformabilidad tidal Λ que está relacionada con k_2 mediante $\Lambda = \frac{2}{3} k_2 (Rc^2/GM)^5$.

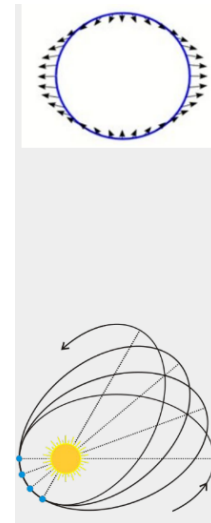
12.7. Implicaciones Observacionales

La desviación de la simetría esférica es directamente observable en:

- **Curvas de luz elipsoidales:** La variación en el área proyectada de la estrella distorsionada produce una modulación característica con el período orbital.
- **Espectroscopía de pulsaciones:** Las frecuencias de pulsación estelar se ven afectadas por la distorsión tidal.
- **Precesión apsidal:** La medición de $\dot{\omega}$ en binarias eclipsantes proporciona constraints en los números de Love.

13. Variación de Energía y Momento Angular Orbital

Los términos adicionales en el potencial gravitatorio, resultantes de la distorsión tidal, introducen fuerzas no conservativas que disipan energía y modifican el momento angular orbital. Este proceso es fundamental para la evolución secular del sistema binario.



13.1. Torque Tidal y Disipación de Energía

El torque tidal τ ejercido sobre la estrella perturbada (M_1) debido a la desalineación entre el abultamiento tidal y la línea que conecta los centros de masa está dado por:

$$\tau = \int_{M_1} \mathbf{r} \times (-\rho \nabla \Phi_{\text{tidal}}) dV \quad (37)$$

Este torque realiza trabajo sobre el sistema, cambiando su energía orbital. La tasa de disipación de energía orbital es:

$$\dot{E}_{\text{orb}} = -\tau \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\text{rel}} \quad (38)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{\text{rel}} = \boldsymbol{\Omega}_1 - \mathbf{n}$ es la velocidad angular relativa entre la rotación de la estrella ($\boldsymbol{\Omega}_1$) y el movimiento medio orbital ($\mathbf{n} = 2\pi/P_{\text{orb}}\hat{k}$).

13.2. Ecuaciones de Evolución Secular

Las ecuaciones de evolución para los elementos orbitales debido a la disipación tidal pueden derivarse usando el formalismo de perturbaciones. Para una excentricidad pequeña ($e \ll 1$), las ecuaciones secularizadas son:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{6k_2}{T} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \frac{\Omega_1 - n}{n} \quad (39)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{27}{2} \frac{k_2}{T} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 e \quad (40)$$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{3k_2}{IT} \frac{M_2^2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^3 (\Omega_1 - n) \quad (41)$$

donde T es el tiempo de retraso tidal (relacionado con la disipación) e I es el momento de inercia de M_1 .

13.3. Movimiento de los Ápsides

Los términos no keplerianos en el potencial gravitatorio causan que la línea de los ápsides (línea que une el periastro con el apoastro) preceda. La tasa de precesión apsidal $\dot{\omega}$ para el caso de una binaria con ambas componentes distorsionadas es:

$$\dot{\omega} = \frac{2\pi}{P_{\text{aps}}} = \frac{15\pi}{P_{\text{orb}}} \left[k_2^{(1)} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 + k_2^{(2)} \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{a}\right)^5 \right] \quad (42)$$

donde P_{aps} es el período de precesión apsidal. Esta precesión es observable en binarias eclipsantes de período corto mediante el desplazamiento gradual del tiempo del eclipse.

13.4. Circularización como Estado Final

El sistema evoluciona hacia el estado de mínima energía para un momento angular total fijo. Para una excentricidad dada, la energía orbital es:

$$E_{\text{orb}} = -\frac{GM_1M_2}{2a} \quad (43)$$

mientras que el momento angular orbital es:

$$L_{\text{orb}} = M_1M_2 \sqrt{\frac{Ga(1-e^2)}{M_1+M_2}} \quad (44)$$

La disipación tidal reduce E_{orb} (haciendo a disminuir) mientras conserva L_{total} . El estado final de equilibrio corresponde a $e = 0$ (órbita circular) y $\Omega_1 = \Omega_2 = n$ (rotaciones sincronizadas), ya que esta configuración minimiza la energía tidal disipada.

13.5. Pruebas Observacionales de la Circularización

La evolución hacia órbitas circulares se confirma mediante:

- **Curvas de velocidad radial:** Las órbitas circulares producen curvas de velocidad radial perfectamente sinusoidales, mientras que las excéntricas producen curvas asimétricas.
- **Tiempos de eclipse:** En binarias eclipsantes, las órbitas circulares producen eclipses separados por exactamente medio período orbital.
- **Estudios estadísticos:** Las muestras grandes de binarias muestran una clara correlación entre el período orbital y la excentricidad, con $e \rightarrow 0$ para $P_{\text{orb}} \lesssim 10$ días.
- **Pulsaciones estelares:** En sistemas como AS Camelopardalis, la medición de las tasas de precesión apsidal concuerda con las predicciones de la teoría tidal.

13.6. Escalas de Tiempo Características

Las escalas de tiempo para circularización (t_{circ}) y sincronización (t_{sync}) escalan como:

$$t_{\text{circ}} \propto \frac{1}{k_2} \frac{M_1^2 a^8}{M_2(M_1+M_2)R_1^{10}} \quad (45)$$

$$t_{\text{sync}} \propto \frac{1}{k_2} \frac{M_1 a^6}{M_2^2 R_1^2} \quad (46)$$

Estas dependencias explican por qué:

1. Las binarias de período muy corto ($P \lesssim 10$ días) están completamente circularizadas y sincronizadas.
2. Las binarias con componentes de gran radio (gigantes, subgigantes) circularizan más rápido que las de secuencia principal.
3. Los sistemas con objetos compactos (enanas blancas, estrellas de neutrones) tienen tiempos de circularización extremadamente largos a menos que estén muy cercanos.

14. La Línea de Ápsides y su Movimiento

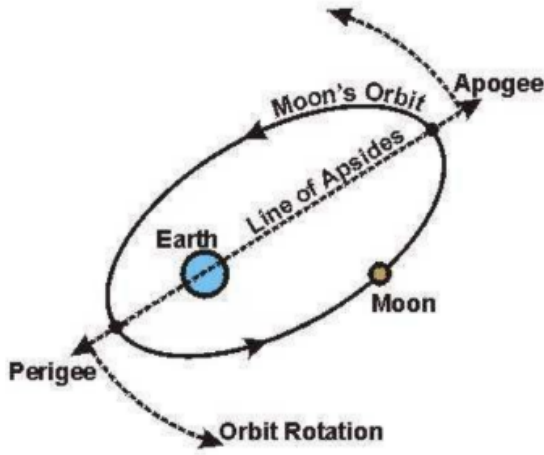
Los ápsides son puntos fundamentales en cualquier órbita kepleriana elíptica, y su estudio es crucial para entender las perturbaciones en sistemas binarios.

14.1. Definición de Ápsides

Para una órbita elíptica alrededor de un cuerpo central, los dos ápsides son:

- **Periastro** (r_{min}): Punto de máxima aproximación al foco de la elipse donde se encuentra el cuerpo central.
- **Apoastro** (r_{max}): Punto de máximo alejamiento del cuerpo central.

La distancia entre estos dos puntos define el **eje mayor** de la elipse ($2a$), y la línea que los conecta se denomina **línea de ápsides**.



14.2. Elementos Orbitales Relacionados

La posición de los ápsides se define mediante los elementos orbitales:

$$r_{\min} = a(1 - e) \quad (47)$$

$$r_{\max} = a(1 + e) \quad (48)$$

$$(49)$$

donde a es el semieje mayor y e la excentricidad orbital. El argumento del periastro ω especifica la orientación de la línea de ápsides respecto al sistema de referencia.

14.3. Movimiento de la Línea de Ápsides

En un potencial kepleriano puro ($\Phi \propto 1/r$), la línea de ápsides permanece fija en el espacio. Sin embargo, cuando existen perturbaciones al potencial kepleriano, la línea de ápsides precede:

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0 \quad (50)$$

Las principales causas de precesión apsidal en sistemas binarios son:

14.3.1. Precesión por Distorsión Tidal

Como se mencionó anteriormente, la distorsión tidal de las componentes produce un potencial adicional que causa precesión apsidal. La tasa de precesión para un sistema binario es:

$$\dot{\omega}_{\text{tidal}} = \frac{15\pi}{P_{\text{orb}}} \left[k_2^{(1)} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 + k_2^{(2)} \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{a} \right)^5 \right] \quad (51)$$

14.3.2. Precesión por Relatividad General

En campos gravitatorios intensos, los efectos relativistas contribuyen significativamente:

$$\dot{\omega}_{\text{GR}} = \frac{6\pi G M_{\text{tot}}}{c^2 a (1 - e^2) P_{\text{orb}}} \quad (52)$$

donde $M_{\text{tot}} = M_1 + M_2$.

14.3.3. Precesión por Rotación Estelar

El achatamiento rotacional de las estrellas también contribuye:

$$\dot{\omega}_{\text{rot}} = \frac{\pi}{P_{\text{orb}}} \left[k_2^{(1)} \frac{\Omega_1^2 R_1^3}{G M_1} + k_2^{(2)} \frac{\Omega_2^2 R_2^3}{G M_2} \right] \quad (53)$$

14.4. El Caso de la Luna

Para la órbita lunar alrededor de la Tierra, la línea de ápsides precede con un período de aproximadamente 8.85 años. Las contribuciones principales son:

- **Precesión solar:** Perturbación gravitatoria del Sol
- **Achatamiento terrestre:** El potencial cuadrupolar de la Tierra (J_2)
- **Precesión relativa:** Efectos de relatividad general (menor contribución)

14.5. Importancia en Astrofísica Estelar

El estudio del movimiento apsidal proporciona información crucial sobre:

14.5.1. Estructura Interna Estelar

La tasa de precesión apsidal $\dot{\omega}$ depende directamente de los números de Love k_2 , que están relacionados con la concentración de masa de la estrella:

$$k_2 \approx \frac{3 - \eta_2(R)}{4 + 2\eta_2(R)} \quad (54)$$

donde $\eta_2(R)$ es la función de Ledoux evaluada en la superficie. Valores medidos de k_2 proporcionan tests precisos de modelos de estructura estelar.

14.5.2. Edad de Sistem Binarios

La sincronización entre rotación y órbita afecta la precesión apsidal. Sistemas más viejos muestran diferentes tasas de precesión que sistemas jóvenes.

14.5.3. Pruebas de Teorías de Gravitación

Las desviaciones entre las tasas de precesión observadas y predichas pueden revelar física beyond el modelo estándar.

14.6. Medición Observacional

La precesión apsidal se mide mediante:

- **Tiempos de eclipse:** El desplazamiento gradual del tiempo de eclipse mínimo
- **Curvas de velocidad radial:** Cambios en la forma de la curva con el tiempo
- **Astrometría de precisión:** Medición directa de la posición de los ápsides

14.7. Ejemplo: DI Herculis

El sistema DI Herculis muestra una discrepancia entre la precesión apsidal observada y la predicha por la relatividad general + tides, lo que ha llevado a varias interpretaciones, including posible desalineación entre los ejes rotacionales y orbitales.

15. Mareas de Equilibrio y Mareas Dinámicas

El estudio de los efectos de marea en binarias cercanas ha evolucionado significativamente desde los modelos iniciales de mareas de equilibrio hacia tratamientos más complejos que consideran la naturaleza dinámica del fenómeno.

15.1. Mareas de Equilibrio: El Modelo Clásico

Las primeras investigaciones sobre mareas en binarias cercanas, desarrolladas en la primera mitad del siglo XX, se basaron en la aproximación de **mareas de equilibrio**. Este modelo hace las siguientes suposiciones fundamentales:

15.1.1. Hipótesis del Modelo

1. **Equilibrio Hidrostático:** La estrella responde instantáneamente al potencial tidal, alcanzando siempre una configuración de equilibrio hidrostático.
2. **Órbita Circular:** La órbita relativa del compañero es perfectamente circular ($e = 0$).
3. **Rotación Sincronizada:** La rotación del componente primario está sincronizada con el movimiento orbital ($\Omega_1 = n$).

Bajo estas condiciones, la distorsión tidal es **estática** en un sistema de coordenadas que gira con la estrella.

15.2. Potencial de Marea de Equilibrio

En esta aproximación, el potencial tidal efectivo sobre la superficie de la estrella M_1 es:

$$\Phi_{\text{tidal}}^{\text{eq}} = -\frac{GM_2}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad (55)$$

La respuesta de la estrella se caracteriza por una deformación radial:

$$\Delta R(\theta) = \sum_{l=2}^{\infty} h_l P_l(\cos \theta) \quad (56)$$

donde las amplitudes h_l están dadas por:

$$h_l = \frac{(l-1)R^{l+3}}{GM_1} \frac{M_2}{a^{l+1}} k_l \quad (57)$$

15.3. Números de Love en el Régimen de Equilibrio

Los números de Love k_l adquieren una forma particular en esta aproximación. Para una esfera de densidad uniforme:

$$k_l^{\text{uniform}} = \frac{3}{2(l-1)} \quad (58)$$

Para $l = 2$ (término dominante), $k_2 = 3/2$. Para estrellas reales, los números de Love dependen de la distribución de densidad:

$$k_l = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{\frac{2l+1}{l+1} + \frac{l}{\eta_l(R)}} \quad (59)$$

donde $\eta_l(R)$ es la función de Ledoux evaluada en la superficie.

15.4. Limitaciones del Modelo de Equilibrio

Aunque útil como primera aproximación, el modelo de mareas de equilibrio presenta serias limitaciones:

- **No considera la disipación:** Asume que no hay retraso entre la fuerza tidal y la respuesta de la estrella.
- **Ignora la dinámica interna:** No considera la excitación de modos oscilatorios internos.
- **No aplica a órbitas excéntricas:** La suposición de órbita circular es restrictiva.
- **Asume sincronización completa:** No describe la transición hacia la sincronización.

15.5. Transición hacia Mareas Dinámicas

Cuando las suposiciones del modelo de equilibrio no se cumplen, debemos considerar **mareas dinámicas**. Esto ocurre cuando:

1. **Órbitas excéntricas:** $e > 0$ introduce dependencia temporal en el potencial tidal.
2. **Rotación no sincronizada:** $\Omega \neq n$ produce un torque tidal neto.
3. **Respuesta dinámica:** El período tidal es comparable a los períodos de oscilación natural de la estrella.

15.6. Ecuaciones para Mareas Dinámicas

El potencial tidal general dependiente del tiempo es:

$$\Phi_{\text{tidal}}(\mathbf{r}, t) = -GM_2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{a^{l+1}} W_{lm} e^{-im\Phi(t)} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (60)$$

donde $\Phi(t)$ es la anomalía verdadera y W_{lm} son constantes geométricas.

15.7. Excitación de Modos Oscilatorios

En el régimen dinámico, el potencial tidal excita modos de oscilación en la estrella. La amplitud de un modo con frecuencia ω_α satisface:

$$\frac{d^2 a_\alpha}{dt^2} + \omega_\alpha^2 a_\alpha = \frac{1}{E_\alpha} \int \rho \nabla \Phi_{\text{tidal}} \cdot \xi_\alpha^* dV \quad (61)$$

donde ξ_α es el eigenvector del modo y E_α su energía.

15.8. Disipación en el Régimen Dinámico

La disipación de energía ocurre mediante varios mecanismos:

15.8.1. Viscosidad Nuclear

En regiones radiativas, la viscosidad nuclear domina:

$$\nu_{\text{rad}} \approx 2 \times 10^{17} \left(\frac{T}{10^7 \text{ K}} \right)^5 \left(\frac{\rho}{10^5 \text{ kg/m}^3} \right)^{-2} \text{ m}^2/\text{s} \quad (62)$$

15.8.2. Viscosidad Turbulenta

En zonas convectivas, la viscosidad turbulenta es eficiente:

$$\nu_{\text{turb}} \approx \frac{1}{3} \nu_{\text{conv}} l_{\text{mix}} \quad (63)$$

15.8.3. Radiación de Ondas de Gravedad

Los modos excitados pueden radiar energía mediante ondas de gravedad.

15.9. Aplicaciones a Sistemas Reales

El tratamiento dinámico es esencial para:

- **Binarias de exoplanetas:** Donde las excentricidades son comunes
- **Sistemas con giro no sincronizado:** Como estrellas jóvenes o sistemas con transferencia de masa reciente
- **Objetos compactos:** Donde los efectos relativistas son importantes
- **Estrellas de neutrones binarias:** Donde las mareas afectan la fase de inspiral

15.10. Conclusión

La evolución desde el modelo de mareas de equilibrio hacia tratamientos dinámicos ha permitido entender mejor la evolución de sistemas binarios cercanos. Mientras las mareas de equilibrio proporcionan una buena aproximación para sistemas circulares y sincronizados, las mareas dinámicas son necesarias para describir la rica fenomenología observada en sistemas reales.

16. Mareas Dinámicas: Teoría y Aplicaciones

El tratamiento completo de las mareas dinámicas requiere considerar la respuesta no adiabática de la estrella a un potencial tidal dependiente del tiempo, lo que lleva a fenómenos complejos como resonancias y una rica variedad de modos oscilatorios.

16.1. Formulación General del Problema Dinámico

La respuesta dinámica de una estrella a un potencial tidal dependiente del tiempo se describe mediante la ecuación de perturbación:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mathcal{L}(\xi) = -\rho \nabla \Phi_{\text{tidal}} \quad (64)$$

donde $\xi(\mathbf{r}, t)$ es el vector desplazamiento Lagrangiano y \mathcal{L} es el operador que describe las fuerzas de restauración (presión, gravedad).

16.2. Expansión en Modos Propios

La solución se expande en los modos propios de oscilación de la estrella:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(t) \xi_{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (65)$$

donde los modos ξ_{α} satisfacen:

$$-\omega_{\alpha}^2 \xi_{\alpha} = \frac{1}{\rho} \mathcal{L}(\xi_{\alpha}) \quad (66)$$

16.3. Ecuación de Amplitud para Modos Tidalmente Excitados

La amplitud de cada modo satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 a_{\alpha}}{dt^2} + \gamma_{\alpha} \frac{da_{\alpha}}{dt} + \omega_{\alpha}^2 a_{\alpha} = \frac{1}{E_{\alpha}} \int_V \rho \nabla \Phi_{\text{tidal}} \cdot \xi_{\alpha}^* dV \quad (67)$$

donde γ_{α} es la tasa de amortiguamiento del modo y E_{α} es su energía:

$$E_{\alpha} = \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 \int_V \rho |\xi_{\alpha}|^2 dV \quad (68)$$

16.4. Resonancias y Amplificación

Cuando la frecuencia tidal ω se acerca a la frecuencia natural de un modo ω_{α} , ocurre resonancia:

$$a_{\alpha}^{\text{res}} \approx \frac{F_{\alpha}}{2\omega_{\alpha}(\omega - \omega_{\alpha} + i\gamma_{\alpha}/2)} \quad (69)$$

donde F_{α} es la fuerza tidal para el modo α . La amplitud resonante puede exceder significativamente la respuesta estática.

16.5. Dependencia del Transporte de Energía

La respuesta dinámica depende críticamente del mecanismo de transporte de energía en la envoltura estelar:

16.5.1. Envolturas Convectivas

En zonas convectivas, la viscosidad turbulenta domina la disipación:

$$\gamma_{\alpha}^{\text{turb}} \approx \frac{\int \rho \nu_{\text{turb}} |\nabla \xi_{\alpha}|^2 dV}{2E_{\alpha}} \quad (70)$$

donde la viscosidad turbulenta es:

$$\nu_{\text{turb}} \sim \frac{1}{3} \nu_{\text{conv}} l_{\text{mix}} \quad (71)$$

16.5.2. Envolturas Radiativas

En zonas radiativas, los mecanismos dominantes son:

$$\gamma_{\alpha}^{\text{rad}} \approx \frac{\int \kappa |\nabla \delta T|^2 dV}{2E_{\alpha}} \quad (\text{difusión térmica}) \quad (72)$$

$$\gamma_{\alpha}^{\text{visc}} \approx \frac{\int \mu |\nabla \mathbf{v}|^2 dV}{2E_{\alpha}} \quad (\text{viscosidad molecular}) \quad (73)$$

16.6. Campo Gravitacional y Momentos Multipolares

El campo gravitacional resultante incluye contribuciones de:

16.6.1. Atracción entre Centros de Masa

$$\Phi_{\text{point}} = -\frac{GM_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (74)$$

16.6.2. Contribución Multipolar

$$\Phi_{\text{multipole}} = -G \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Q_{lm} Y_l^m(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (75)$$

donde los momentos multipolares son:

$$Q_{lm} = \int_V \rho(\mathbf{r}) r^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) dV \quad (76)$$

16.7. Torque Tidal y Transferencia de Momento Angular

El torque tidal neto viene dado por:

$$\tau = - \sum_{\alpha} \Im [a_{\alpha}^* F_{\alpha}] - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 \frac{d\omega_{\alpha}}{d\Omega} \quad (77)$$

16.8. Aplicaciones a Sistemas Específicos

16.8.1. Binarias de Radiocontinuo

En binarias de rayos X de baja masa, las mareas dinámicas explican: - La sincronización de la donante - La circularización orbital - El calentamiento tidal observado

16.8.2. Exoplanetas de Período Corto

Para Júpiter calientes:

$$t_{\text{circ}} \sim \frac{2}{21} \frac{Q_p}{k_{2,p}} \frac{M_p^2 a^8}{GM_*(M_p + M_*) R_p^{10}} \frac{1}{n} \quad (78)$$

16.8.3. Estrellas de Neutrones Binarias

Las mareas dinámicas afectan la fase de inspiral:

$$\Psi_{\text{tidal}} = -\frac{39}{2} \frac{\tilde{\Lambda}}{v^5} \quad (\text{contribución a la fase de la onda gravitacional}) \quad (79)$$

donde $\tilde{\Lambda}$ es la deformabilidad tidal combinada.

16.9. Resultados Numéricos y Simulaciones

Los cálculos modernos utilizan: - Códigos de evolución estelar con tratamientos tidal mejorados - Simulaciones hidrodinámicas de interacciones tidal - Métodos de elementos espectrales para resolver la estructura fina

16.10. Conclusión

La teoría de mareas dinámicas proporciona el marco completo para entender la evolución de sistemas binarios cercanos, revelando una rica fenomenología que incluye resonancias, excitación de modos y complejos mecanismos de disipación que dependen críticamente de la estructura interna estelar.

17. Efectos de las Mareas Dinámicas: Los Trabajos Seminales

El tratamiento completo de las mareas dinámicas y la fricción tidal en binarias cercanas fue establecido en los trabajos fundamentales de Zahn (1977) y Hut (1980, 1981), que sentaron las bases teóricas para entender la evolución tidal en sistemas astrotíficos.

17.1. El Trabajo Fundacional de Zahn (1977)

En su artículo seminal "*Tidal Friction in Close Binary Stars*", Zahn (1977) desarrolló el primer tratamiento autoconsistente de la fricción tidal en binarias cercanas. Sus principales contribuciones incluyen:

17.1.1. Potencial Tidal Dependiente del Tiempo

Zahn expresó el potencial tidal para órbitas excéntricas como:

$$\Phi_{\text{tidal}}(\mathbf{r}, t) = -GM_2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} W_{lm} X_k^{l,m}(e) e^{-i\omega_{mk}t} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (80)$$

donde los coeficientes de Hansen $X_k^{l,m}(e)$ describen el desarrollo en Fourier para órbitas elípticas, y las frecuencias tidal son:

$$\omega_{mk} = m\Omega + kn \quad (81)$$

17.1.2. Función de Respuesta Tidal

Zahn introdujo la función de respuesta tidal $\tilde{k}_l(\omega)$ que relaciona el potencial perturbador con la respuesta de la estrella:

$$\Phi_{\text{response}} = \tilde{k}_l(\omega) \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \Phi_{\text{tidal}} \quad (82)$$

17.1.3. Tasa de Disipación de Energía

La tasa de disipación de energía para una estrella con envoltura convectiva es:

$$\dot{E}_{\text{diss}} = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{mk} \left| \frac{GM_2^2 R^{2l+1}}{a^{2l+2}} W_{lm}^2 X_k^{l,m}(e) \Im[\tilde{k}_l(\omega_{mk})] \right| \quad (83)$$

17.2. El Formalismo de Hut (1980, 1981)

Hut extendió el trabajo de Zahn y desarrolló un formalismo más general para la evolución tidal.

17.2.1. Ecuaciones de Evolución Secular

Hut (1981) derivó las ecuaciones de evolución para los elementos orbitales:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{6k}{T} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^8 \left[f_1(e^2) \frac{\Omega_1}{n} - f_2(e^2) \right] \quad (84)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{27k}{T} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^8 e \left[f_3(e^2) \frac{\Omega_1}{n} - \frac{18}{11} f_4(e^2) \right] \quad (85)$$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{3k}{IT} \frac{M_2^2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^6 \left[f_5(e^2) \frac{\Omega_1}{n} - f_6(e^2) \right] \quad (86)$$

donde las funciones $f_i(e^2)$ son polinomios en e^2 y T es el tiempo de retraso tidal.

17.2.2. Estabilidad del Equilibrio Tidal

Hut (1980) estudió la estabilidad del equilibrio tidal, mostrando que el estado sincronizado es estable si:

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\frac{\tau_{\text{tidal}}}{I} \right) < 0 \quad (87)$$

17.3. Excitación de Pulsaciones por Mareas

Como señala Zahn, estrellas en órbitas excéntricas y/o no corrotantes están sujetas a fuerzas tidal de amplitud variable, lo que las fuerza a pulsar. La amplitud de estas pulsaciones forzadas es:

$$a_\alpha(t) = \frac{1}{E_\alpha} \int_{-\infty}^t F_\alpha(t') e^{-\gamma_\alpha(t-t')} \sin[\omega_\alpha(t-t')] dt' \quad (88)$$

17.4. Transferencia de Momento Angular y Energía

Los torques tidal transfieren momento angular y energía desde la rotación estelar hacia la órbita:

$$\frac{dL_{\text{orb}}}{dt} = -\frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = \tau_{\text{tidal}} \quad (89)$$

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} - \dot{E}_{\text{diss}} \quad (90)$$

17.5. Aplicaciones a Diferentes Sistemas

17.5.1. Binarias de Alta Excentricidad

Para sistemas con $e > 0$, la disipación tidal es mucho más eficiente en el periastro:

$$\dot{E}_{\text{diss}} \propto \frac{1}{(1-e)^9} \quad (91)$$

17.5.2. Sistemas con Transferencia de Masa

En binarias interactivas, las mareas dinámicas afectan la estabilidad de la transferencia de masa:

$$\dot{M} \propto \left(\frac{R - R_L}{H} \right)^{3/2} \quad (92)$$

donde R_L es el radio del lóbulo de Roche y H es la escala de altura.

17.6. Resultados Numéricos y Comparación Observacional

Los modelos modernos combinan el formalismo de Zahn-Hut con códigos de evolución estelar, permitiendo reproducir:

- Los períodos límite de circularización en cúmulos estelares
- Las tasas de sincronización en binarias de rayos X
- La evolución de exoplanetas de período corto
- La fase de inspiral de binarias de estrellas de neutrones

17.7. Conclusión

Los trabajos de Zahn (1977) y Hut (1980, 1981) establecieron el marco teórico fundamental para entender la evolución tidal en binarias cercanas. Su formalismo sigue siendo la base de los modelos modernos que incorporan física estelar detallada y tratamientos numéricos avanzados para predecir y explicar las observaciones de sistemas binarios en todo el rango de masas y separaciones.

18. Dependencia de las Mareas en el Modo de Transporte de Energía

La eficiencia de la disipación tidal y los mecanismos de sincronización en binarias cercanas dependen críticamente del modo de transporte de energía en la envoltura estelar. Se han identificado dos mecanismos principales, cada uno dominante en diferentes regímenes estelares.

18.1. Envolturas Convectivas Profundas

Para estrellas con envolturas convectivas extensas (estrellas de tipo espectral tardío, gigantes rojas), la **viscosidad turbulenta** domina la disipación tidal.

18.1.1. Mecanismo de Disipación

La convección turbulenta actúa como un efectivo mecanismo de fricción. El tensor de esfuerzos viscosos es:

$$\sigma_{ij} = \rho \nu_{\text{turb}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (93)$$

donde la viscosidad turbulenta viene dada por la teoría de mezcla:

$$\nu_{\text{turb}} = \frac{1}{3} \alpha_{\text{MLT}} v_{\text{conv}} l_{\text{mix}} \quad (94)$$

18.1.2. Tasa de Disipación de Energía

La tasa de disipación de energía por unidad de volumen es:

$$\epsilon_{\text{diss}} = \frac{1}{2} \nu_{\text{turb}} \rho \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (95)$$

18.1.3. Tiempo de Sincronización

Para envolturas convectivas, el tiempo de sincronización escala como:

$$t_{\text{sync}}^{\text{conv}} \propto \frac{M_{\text{env}}}{M_*} \left(\frac{a}{R} \right)^6 \frac{1}{\nu_{\text{turb}}} \quad (96)$$

donde M_{env} es la masa de la envoltura convectiva.

18.2. Envolturas Radiativas

Para estrellas con envolturas radiativas (estrellas de tipo espectral temprano, main sequence de alta masa), la disipación ocurre principalmente mediante **amortiguamiento radiativo** y **viscosidad molecular**.

18.2.1. Amortiguamiento Radiativo

La difusión térmica amortigua las oscilaciones tidal. La tasa de amortiguamiento para un modo de orden l es:

$$\gamma_{\text{rad}} \approx \frac{l(l+1)\kappa\rho c_p}{r^2} \left(\frac{\nabla_{\text{ad}} - \nabla}{\nabla} \right) \quad (97)$$

donde κ es la opacidad y c_p el calor específico.

18.2.2. Viscosidad Molecular

En regiones radiativas, la viscosidad molecular es:

$$\nu_{\text{mol}} \approx 2.2 \times 10^{-15} \frac{T^{5/2}}{\rho} \quad \text{m}^2/\text{s} \quad (98)$$

18.2.3. Excitación de Modos de Oscilación

El potencial tidal excita modos de gravedad (modos-g) en la región radiativa. La amplitud de un modo-g con número de onda radial k_r es:

$$a_{\text{mode}} \propto \frac{F_{\text{tidal}}}{\omega^2 - N^2 + i\gamma_{\text{rad}}\omega} \quad (99)$$

donde N es la frecuencia de Brunt-Väisälä.

18.2.4. Tiempo de Sincronización

Para envolturas radiativas, el tiempo de sincronización es significativamente más largo:

$$t_{\text{sync}}^{\text{rad}} \propto \left(\frac{a}{R} \right)^{21/2} \frac{1}{\nu_{\text{mol}}} \quad (100)$$

18.3. Comparación de los Mecanismos

Parámetro	Convectivo	Radiativo
Mecanismo dominante	Viscosidad turbulenta	Amortiguamiento radiativo
Escala de tiempo	Corto ($10^6 - 10^8$ años)	Largo ($10^9 - 10^{11}$ años)
Dependencia en a/R	$\propto (a/R)^6$	$\propto (a/R)^{21/2}$
Dependencia en masa	Mayor para menores masas	Mayor para mayores masas
Eficiencia	Alta	Baja

Table 1. Comparación de los mecanismos de disipación tidal

18.4. Evidencia Observacional

18.4.1. Estrellas de Baja Masa (Convectivas)

Binarias con componentes de tipo M y K muestran: - Sincronización rápida ($P_{\text{orb}} < 10$ días) - Circularización eficiente - Ejemplo: Binarias RS CVn

18.4.2. Estrellas de Alta Masa (Radiativas)

Binarias con componentes de tipo O y B muestran: - Sincronización lenta o incompleta - Excentricidades residuales incluso para $P_{\text{orb}} \sim 3 - 4$ días - Ejemplo: Binarias de rayos X de alta masa

18.5. Implicaciones para la Evolución Estelar

La diferente eficiencia de la disipación tidal afecta:

18.5.1. Transferencia de Masa

En sistemas con envolturas convectivas, la sincronización rápida facilita la transferencia de masa estable.

18.5.2. Rotación Estelar

Las estrellas en binarias cercanas con envolturas radiativas pueden mantener rotación diferencial.

18.5.3. Edades de Sincronización

El período límite de sincronización proporciona un reloj dinámico para estimar edades estelares.

18.6. Modelos Numéricos Modernos

Los tratamientos actuales incorporan:

$$\nu_{\text{eff}} = \max(\nu_{\text{turb}}, \nu_{\text{rad}}, \nu_{\text{mol}}) \quad (101)$$

$$t_{\text{sync}} = f(M_*, R_*, M_{\text{env}}, a, e, \Omega) \times \frac{1}{\nu_{\text{eff}}} \quad (102)$$

18.7. Conclusión

La dependencia de los mecanismos de disipación tidal en el modo de transporte de energía explica la amplia variedad de comportamientos observados en binarias cercanas. Mientras las envolturas convectivas proporcionan disipación eficiente mediante turbulencia, las envolturas radiativas dependen de mecanismos menos eficientes como el amortiguamiento radiativo, resultando en tiempos de sincronización mucho más largos y una mayor diversidad de estados de equilibrio tidal.

19. Tiempos Característicos de Sincronización y Circularización

El trabajo seminal de Zahn (1977) proporciona expresiones cuantitativas para los tiempos de sincronización y circularización en binarias cercanas, particularmente para estrellas con envolturas convectivas.

19.1. Formalismo de Zahn para Envolturas Convectivas

Para estrellas con envolturas convectivas extensas, Zahn derivó expresiones basadas en la viscosidad turbulenta como mecanismo dominante de disipación.

19.2. Tiempo de Circularización

El tiempo de circularización para una binaria con excentricidad inicial e_0 se define como:

$$t_{\text{circ}} = -\frac{e}{de/dt} \quad (103)$$

Zahn obtuvo la siguiente expresión:

$$t_{\text{circ}} = 1.0 \times 10^6 \times \frac{1}{q} \left(\frac{1+q}{2} \right)^{5/3} P^{16/3} \text{ años} \quad (104)$$

donde:

- $q = M_2/M_1$ es la razón de masas ($q \leq 1$)
- P es el período orbital en días

19.2.1. Dependencia con el Período Orbital

La formidable dependencia $t_{\text{circ}} \propto P^{16/3}$ explica por qué sólo las binarias de período muy corto se circularizan dentro de la edad del Universo:

$$t_{\text{circ}} \propto P^{16/3} \approx P^{5.333} \quad (105)$$

19.3. Tiempo de Sincronización

El tiempo de sincronización para una estrella con velocidad angular inicial Ω_0 se define como:

$$t_{\text{sync}} = -\frac{\Omega - n}{d\Omega/dt} \quad (106)$$

La expresión de Zahn es:

$$t_{\text{sync}} = 1.0 \times 10^4 \times \left(\frac{1+q}{2q} \right)^2 P^4 \text{ años} \quad (107)$$

19.3.1. Dependencia con el Período Orbital

La dependencia $t_{\text{sync}} \propto P^4$ es fuerte pero menos extrema que para la circularización:

$$t_{\text{sync}} \propto P^4 \quad (108)$$

19.4. Comparación de Tiempos Característicos

19.4.1. Razón entre Tiempos

La razón entre los tiempos de circularización y sincronización es:

$$\frac{t_{\text{circ}}}{t_{\text{sync}}} = 100 \times \frac{1}{q} \left(\frac{1+q}{2} \right)^{5/3} \left(\frac{2q}{1+q} \right)^2 P^{16/3-4} \quad (109)$$

Simplificando:

$$\frac{t_{\text{circ}}}{t_{\text{sync}}} = 100 \times \frac{4q}{(1+q)^{1/3}} P^{4/3} \quad (110)$$

19.4.2. Orden de Magnitud

Para una binaria con $q = 1$ y $P = 10$ días:

$$t_{\text{sync}} \approx 1.0 \times 10^4 \times (1)^2 \times (10)^4 = 10^8 \text{ años} \quad (111)$$

$$t_{\text{circ}} \approx 1.0 \times 10^6 \times 1 \times (1)^{5/3} \times (10)^{16/3} \approx 10^6 \times 10^{5.333} = 10^{11.333} \text{ años} \quad (112)$$

19.5. Interpretación Física

19.5.1. ¿Por qué la Sincronización es más Rápida?

La diferencia en los tiempos característicos se debe a que:

1. **La sincronización** involucra el acoplamiento del momento angular rotacional, que depende de la superficie estelar.
2. **La circularización** requiere el reajuste global de la órbita, que depende de la redistribución de momento angular orbital.
3. La escala de tiempo para cambios orbitales es inherentemente más larga que para cambios rotacionales.

19.6. Implicaciones Observacionales

19.6.1. Límites de Período

Definiendo el período límite P_{lim} para el cual $t_{\text{sync}} = t_{\text{H}}$ (edad del Universo):

$$P_{\text{lim}}^{\text{sync}} = \left(\frac{t_{\text{H}}}{10^4} \right)^{1/4} \left(\frac{2q}{1+q} \right)^{1/2} \text{ días} \quad (113)$$

Para $t_{\text{H}} = 1.4 \times 10^{10}$ años y $q = 1$:

$$P_{\text{lim}}^{\text{sync}} \approx \left(\frac{1.4 \times 10^{10}}{10^4} \right)^{1/4} \approx (1.4 \times 10^6)^{1/4} \approx 34 \text{ días} \quad (114)$$

19.6.2. Edades de Poblaciones Estelares

La fracción de binarias sincronizadas y circularizadas en un cúmulo proporciona un reloj dinámico:

$$f_{\text{sync}} = 1 - \exp(-t_{\text{cúmulo}}/t_{\text{sync}}) \quad (115)$$

19.7. Extensiones Modernas del Formalismo

Las expresiones de Zahn han sido refinadas para incluir:

19.7.1. Dependencia con la Excentricidad

$$t_{\text{circ}}(e) = t_{\text{circ}}(0) \cdot f(e) \quad (116)$$

donde $f(e)$ es una función que aumenta con la excentricidad.

19.7.2. Estructura Estelar Detallada

$$t_{\text{sync}} \propto \frac{1}{k_2} \frac{M_* R_*^2}{M_{\text{env}} v_{\text{conv}} l_{\text{mix}}} \quad (117)$$

19.8. Aplicaciones a Diferentes Sistemas

19.8.1. Estrellas Pre-secuencia Principal

Para estrellas T Tauri en binarias:

$$t_{\text{sync}}^{\text{PMS}} \approx 10^3 \times P^4 \quad \text{años} \quad (118)$$

(más rápido debido a radios mayores y convección más eficiente)

19.8.2. Enanas Rojas

Para binarias de enanas M:

$$t_{\text{circ}}^{\text{M-dwarf}} \approx 10^5 \times P^{16/3} \quad \text{años} \quad (119)$$

19.9. Limitaciones del Modelo

Las expresiones de Zahn asumen: - Envolturas completamente convectivas - Viscosidad turbulenta constante - Órbitas de baja excentricidad - Rotación inicial no sincrónica pero no extremadamente rápida

19.10. Conclusión

El formalismo de Zahn proporciona las bases cuantitativas para entender la evolución tidal en binarias con envolturas convectivas. La fuerte dependencia con el período orbital ($t_{\text{sync}} \propto P^4$, $t_{\text{circ}} \propto P^{16/3}$) explica por qué la sincronización ocurre mucho más rápido que la circularización, y por qué sólo las binarias de período muy corto alcanzan ambos estados de equilibrio dentro de las escalas de tiempo cósmicas.

References

- Hut, P. (1981). *Tidal evolution in close binary systems*. A&A, 99, 126-140.
Eggleton, P. P. (2010). *Eggleton's Standard Book*. Cambridge University Press.
Verbunt, F., & Phinney, E. S. (2001). *Tidal circularization and the eccentricity of binaries containing giant stars*. A&A, 296, 709–721.
Poisson, E., & Will, C. M. (2014). *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press. (Capítulo sobre mareas en Relatividad General).