Fórmulas trigonométricas para el ángulo suma, para el ángulo resta y para el ángulo doble.

Para el ángulo suma:

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\,.\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,.\,sen\,\beta$$

$$cos\,(\alpha + \beta\,) = cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,.\,sen\,\beta$$

Para el ángulo resta:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\,.\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,.\,sen\,\beta$$

$$cos\,(\alpha - \beta\,) = cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,.\,sen\,\beta$$

Ejemplo 1:

Calcular sen 75°

$$75° = 30° + 45°$$

Y los valores de los senos y cosenos de 30° y 45° ya los hemos obtenido antes, lo cual fue resumido en la siguiente tabla:

	ÁNGULO				
RAZÓN	0°	30°	45°	60°	90°
$sen\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$

Luego, utilizando la primera de las igualdades anteriores:

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\,.\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,.\,sen\,\beta$$

$$sen\,(30° + 45°) = sen\,30°\,.\,cos\,45° + cos\,30°\,.\,sen\,45°$$

$$sen\,(75°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\,(75°) \approx 0{,}5\ \cdot 0{,}71 + 0{,}87 \cdot 0{,}71$$

$$sen\,(75°) \approx 0{,}97$$

Ejemplo 2:

Calcular sen 15°

$$15° = 45° - 30°$$

$$sen\,(45° - 30°) = sen\,45°\ .\ cos\,30° - cos\,45°\,.\ sen\,30°$$

$$sen\,(15°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$sen\,(15°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$sen\,(15°) \approx 0{,}71\ \cdot (0{,}87 - 0{,}5)$$

$$sen\,(15°) \approx 0{,}26$$

Ejemplo 3:

Demostrar utilizando las fórmulas de seno y coseno de la suma que:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

Solución:

Sabemos que:

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\ .\ cos\,\beta + cos\,\alpha\ .\ sen\,\beta$$
$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\ .\ cos\,\beta - sen\,\alpha\ .\ sen\,\beta$$

y de una clase anterior que:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sen\,(\alpha + \beta)}{\cos\,(\alpha + \beta)}$$

Reemplazando:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sen\,\alpha\ \cdot \cos\beta + \cos\alpha\ \cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\,.\cos\beta - sen\,\alpha\ \cdot sen\,\beta}$$

Ahora realicemos una pillería, amplificando la expresión por $\cos\alpha\ \cdot \cos\beta$:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sen\,\alpha\ \cdot \cos\beta + \cos\alpha\ \cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\,.\cos\beta - sen\,\alpha\ \cdot sen\,\beta} \cdot \frac{\cos\alpha\ \cdot \cos\beta}{\cos\alpha\ \cdot \cos\beta}$$

Y reescribimos así:

$$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen\ \alpha\ \cdot\cos\beta+\cos\alpha\ \cdot sen\ \beta}{\cos\alpha\ \cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\ .\cos\beta-sen\ \alpha\ \cdot sen\ \beta}{\cos\alpha\ \cdot\cos\beta}}$$

Operando:

$$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\beta}{cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{sen\ \beta}{\cos\beta}}{\dfrac{cos\ \alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\beta}{cos\beta}-\dfrac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{sen\ \beta}{\cos\beta}}$$

Simplificando factores, y recordando nuevamente que el cociente entre seno y coseno es tangente del ángulo, obtenemos:

$$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{tg\ \alpha+tg\ \beta}{1-tg\ \alpha\cdot tg\ \beta}$$

De forma similar se puede demostrar que:

$$tg\ (\alpha-\beta)=\frac{tg\ \alpha-tg\ \beta}{1+tg\ \alpha\cdot tg\ \beta}$$

Deténgase un momento a ver el orden de los signos.

Fórmulas trigonométricas para el ángulo doble:

Si en las fórmulas para el ángulo suma presentadas más arriba, consideramos ángulos iguales, es decir $\alpha\ =\ \beta$, obtenemos:

$$sen\ (\alpha+\ \beta)=\ sen\ \alpha\ .\ cos\ \beta\ +\ cos\ \alpha\ .\ sen\ \beta$$

$$sen\ (\alpha+\alpha)=\ sen\ \alpha\ .\ cos\ \alpha\ +\ cos\ \alpha\ .\ sen\ \alpha$$

$$sen\ (2\alpha)=\ 2\ .\ sen\ \alpha\ .\ cos\ \alpha$$

que es la fórmula para el seno del ángulo doble.

Con la fórmula del coseno:

$$cos\ (\alpha+\ \alpha\ )=\ cos\ \alpha\ .\ cos\ \alpha\ -\ sen\ \alpha\ .\ sen\ \alpha$$
$$cos\ (2\alpha)=(cos\ \alpha\ )^{\ 2}-(sen\ \alpha\ )^2$$

que suele escribirse así, sin paréntesis y con el cuadrado delante de α:

$$cos\ (2\alpha)=\ cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

Ejemplo 4:

Calcular cos 120° mediante la utilización de la fórmula:

$$cos\ (120°) = \ cos^2(60°) - sen^2(60°)$$

$$\cos 120° = \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos 120° \ \approx 0{,}25 - 0{,}75$$

$$\cos 120° = -\ 0{,}5$$

lo cual se confirma si recordamos las fórmulas vistas para ángulos del segundo cuadrante.

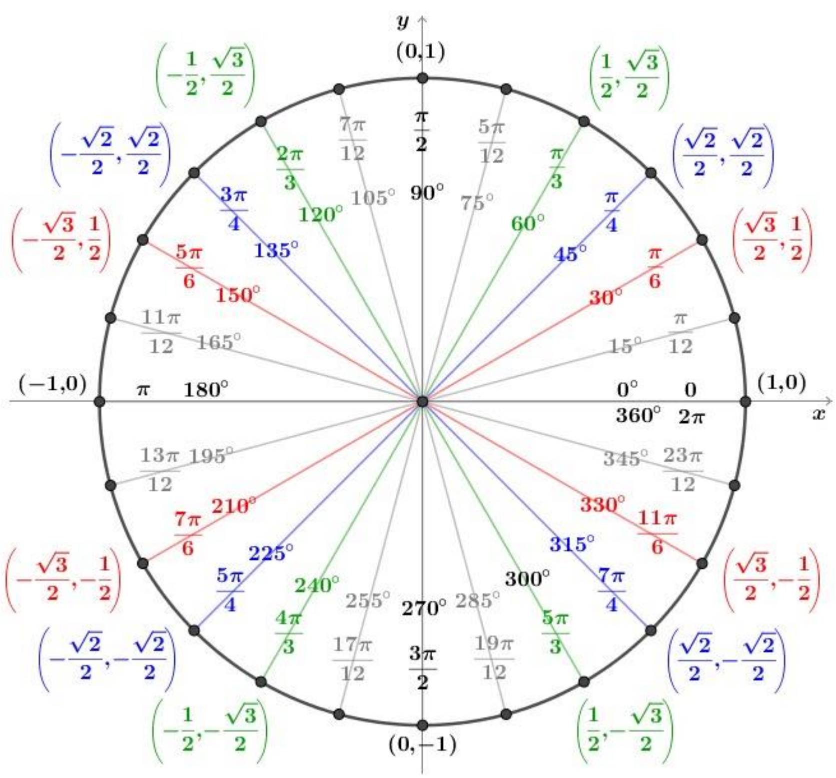
$$\cos\ (180° - 60°) = \ -\cos 60°$$

Por tanto,

$$\cos 120° = \ -\cos\ \ 60°$$

$$\cos 120° = \ -\frac{1}{2} = -\ 0{,}5$$

Se confirma el resultado.



Ejercicios:

1. Dado

$$sen\ \beta\ =\ -0.5$$

calcula cos β y y tan β.

¿Cuántas soluciones encontró en [0,2π) y en $(-\infty,+\infty)$?

2. Investigue si existe un ángulo x perteneciente al cuadrante que se indica que satisfaga las condiciones señaladas.

a)	cos x = 0.5, I cuadrante	b)	tan x = -3/4, I cuadrante
c)	sen x = -3/4, II cuadrante	d)	sen x = 3/4, II cuadrante
e)	tan x = 4/3, III cuadrante	f)	sen x = -3/4 IV, cuadrante

3. Si un ángulo x pertenece al I cuadrante,
¿a qué cuadrante pertenecen los ángulos $\pi + x, \pi - x, 2\pi + x, 2\pi - x$?

4. Suponiendo que α y β son ángulos del primer cuadrante y

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{12}{13}$$

calcular cos (α + β) y sen (α − β)

Respuesta: $\mathbf{\cos(\alpha+\beta) = \frac{33}{65}\ ;\ sen(\alpha-\beta) = \frac{16}{65}}$

5. Utilizando las fórmulas del seno, coseno y tangente del ángulo suma, demuestre que:

a) $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot sen^2\alpha$

b) $\cos\ (2\alpha) = 2 \cdot cos^2\alpha - 1$

c) $tg\ (2\alpha) = \frac{2 \cdot tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$

6. Demostrar:

a) $sen\alpha + sen\beta = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

b) $sen\alpha - sen\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(Pista: reemplazar α = u + v, β = u – v)

7. ¿Es verdadera la siguiente afirmación? Justifique la respuesta.

(cos x + cotg x)/(sen x + tg x) no puede tomar valores negativos

Respuesta: Sí

8. Demuestre que si $\alpha + \beta = 45º$, se cumple

$$(1+ \text{tg}\ \alpha) \cdot (1+ \text{tg}\ \beta) = 2$$

9. Demuestre que si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $0 < \alpha < 90º$, entonces

$$\text{tg}\ \alpha + \sec\ \alpha = 3$$