Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 10

Mauro Jélvez Jélvez

19/07/2024

1)

Si tenemos que:

$$f(x) = \exp[-n^2(x-\mu)^2]$$

Y definimos una función como $g(x)$ como:

$$g(x) = e^{-n^2x^2}$$

Para la transformada de Fourier de esta traslación tendremos:

$$\widetilde{f}(k) = e^{-ik\mu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}g(x)dx = e^{-ik\mu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}e^{-n^2x^2}dx$$

Ahora, haremos un poco de álgebra:

$$-n^2\left(x^2+\frac{ikx}{n^2}\right) = -n^2\left(x^2+\frac{ikx}{n^2}+\frac{k^2}{4n^4}-\frac{k^2}{4n^4}\right)$$

Y podemos escribir:

$$-n^2\left(\frac{k^2}{4n^4}+\left(x+\frac{ik}{2n^2}\right)^2\right)$$

Quedándonos la integral:

$$\widetilde{f}(k) = e^{-ik\mu}e^{-k^2/4n^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(x+ik/2n^2)^2}dx$$

Hacemos el cambio de variable: $u = x + ik/2n^2 \to du = dx$

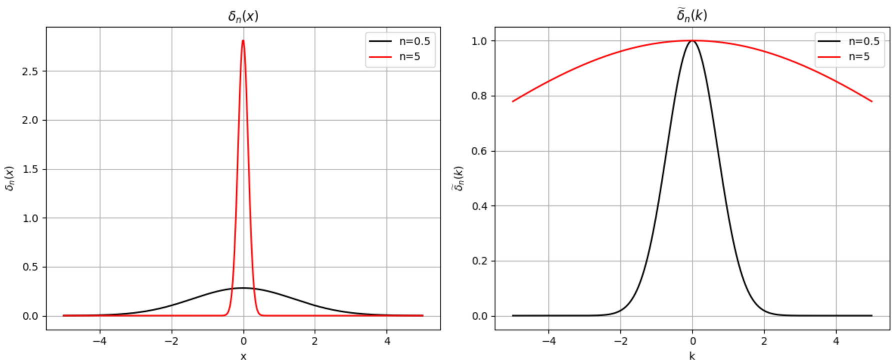
$$\widetilde{f}(k) = e^{-ik\mu}e^{-k^2/4n^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2u^2}du = e^{-ik\mu}e^{-k^2/4n^2}\frac{\sqrt{\pi}}{n} = \frac{e^{-k(i\mu+k/4n^2)\sqrt{\pi}}}{n}$$

Ahora para la siguiente parte tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{-n^2x^2}dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{n} = 1$$

Y su transformada será:

$$\widetilde{\delta}_n(k) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}e^{-n^2x^2}dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{n}e^{-k^2/4n^2} = e^{-k^2/4n^2}$$



2)

$$\widetilde{f}(k) = \int_0^\infty e^{-ikx}e^{-x}dx = \int_0^\infty \exp[-x(1+ik)]dx = \left[-\frac{1}{1+ik}e^{-x(1+ik)}\right]_0^\infty = \frac{1}{1+ik} = \frac{1}{1+ik}\frac{1-ik}{1-ik} = \frac{1-ik}{1+k^2}$$

La inversa será de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left(\frac{1-ik}{1+k^2}\right)dk$$

Tomando $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}dk - i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}dk\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty) - i\frac{1}{2}\ln(1+\infty) + i\frac{1}{2}\ln(1+-\infty)\right]$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}$$

3)

Si tenemos:

$$f(x) = \begin{cases}\cos x, |x| \leq \pi/2 \\ 0, x > \pi/2\end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases}-\sin x, |x| \leq \pi/2 \\ 0, x > \pi/2\end{cases}$$

Para la transformada de Fourier de $f(x)$ tenemos:

$$\widetilde{f}(k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx}\cos x dx$$

Por integración por partes llegamos a que:

$$\widetilde{f}(k) = \frac{k^2}{1-k^2}\left(\frac{e^{-ikx}\sin x}{k^2} + \frac{e^{-ikx}\cos x}{ik}\right)_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{e^{-ik\pi/2} + e^{ik\pi/2}}{1-k^2} = \frac{2\cos(k\pi/2)}{1-k^2}$$

Y por propiedad de la derivada tendremos:

$$\widetilde{f'}(k) = ik\widetilde{f}(k)$$

$$\widetilde{f}(k) = \frac{2\cos(k\pi/2)}{1-k^2}$$

Por lo que:

$$\widetilde{f'}(k) = \frac{2ik\cos(k\pi/2)}{1-k^2}$$

Haciendo el producto interno y usando teorema de Parseval tendremos:

$$(f,f)=\int_0^\infty f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(\frac{2\cos\left(k\pi/2\right)}{1-k^2}\right)^2dk=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{4\cos^2(k\pi/2)dx}{(1-k^2)}$$

Usando $t=k\pi/2\to k=2t/\pi, dk=2dt/\pi$, remplazando obtenemos:

$$(f,f)=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{2}\int_0^\infty\frac{\cos^2tdt}{(\pi^2/4-t^2)^2}$$

Por teorema de Paraseval tendrmos:

$$\frac{\pi^2}{4}\int_0^\infty\frac{\cos^2tdt}{(\pi^2/4-t^2)^2}=\int_0^{\pi/2}\cos^2xdx=\frac{(\pi/2)}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Ahora para la derivada:

$$(f',f')=\int_0^\infty f'(x)f'(x)^*dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{4k^2\cos^2(k\pi/2)}{(1-k^2)^2}dk$$

Usando el mismo cambio de vairable de antes y por Parseval tendremos que:

$$(f',f')=\int_0^\infty\frac{t^2\cos^2tdt}{(\pi^2/4-t^2)^2}=\int_0^{\pi/2}\sin^2xdx=\frac{\pi}{4}$$

4)

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 e^{ikx}(e^{k\alpha}-e^{-k\alpha})dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 2\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk$$

Usando integración por partes obtendremos:

$$\int_{-1}^1\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk=\left[\frac{\sinh(k\alpha)e^{ikx}}{ix}+\frac{\alpha\cosh(k\alpha)e^{ikx}}{x^2}-\frac{\alpha^2}{x^2}\int_{-1}^1\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk\right]_{-1}^1$$

$$\int_{-1}^1\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk=\left[\frac{x}{x^2+\alpha^2}\left(\frac{\alpha\cosh(k\alpha)e^{ikx}}{x}-i\sinh(k\alpha)e^{ikx}\right)\right]_{-1}^1=\frac{x}{x^2+\alpha^2}\left[\frac{\alpha\cosh\alpha}{x}(e^{ix}-e^{-ix})-i\sin\alpha(e^{ix}+e^{-ix})\right.$$

$$\int_{-1}^1\sinh(k\alpha)e^{ikx}dk=\frac{x}{x^2+\alpha^2}\left[\frac{2\alpha i\sin x\cosh\alpha}{x}-2i\cos x\sin\alpha\right]=\frac{2i}{x^2+\alpha^2}\left[\alpha\sin x\cosh\alpha-x\cos x\sinh\alpha\right]$$

Reemplazando obtenemos que :

$$f_\alpha(x)=\frac{2i}{\pi(x^2+\alpha^2)}\left[\alpha\sin x\cosh\alpha-x\cos x\sinh\alpha\right]$$

Para la segunda parte, para encontrar ϕ, tomamos su transformada de Fourier con respecto a x.

$$\widetilde{\phi}(k,y)=\int_{-\infty}^\infty\phi(x,y)e^{-ikx}dx$$

Y para la ecuación de Laplace que tiene la forma:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\phi}}{\partial y^2}-k^2=0$$

La cual tiene solución de la forma:

$$\widetilde{\phi}(k,y)=A(k)e^{ky}+B(y)e^{-ky}$$

Por la primera condición de contorno tenemos que:

$$\phi(x,0) = f_1(x) \to \widetilde{\phi}(k,0) = \widetilde{f}_1(x)$$

Con

$$\widetilde{f}_1(k) = e^k - e^{-k} = 2\sinh k$$

Por las condiciones de contorno tendremos:

$$\widetilde{f}_1(k) = A + B$$

$$Ae^k + Be^{-k} = 0 \to A = -Be^{-2k}$$

Reemplazando:

$$B(k) = \frac{\widetilde{f}_1(k)}{1 - e^{2k}} = \frac{2\sinh k}{1 - e^{-2k}}$$

$$A(k) = -\frac{2e^{-2k}\sinh k}{1 - e^{-2k}}$$

Reemplazando tenemos:

$$\widetilde{\phi}(k,y) = \frac{2\sinh k(e^{-ky} - e^{k(y-2)})}{1 - e^{-2k}}$$