Clase nº41

Cálculo II

Universidad de Valparaíso Profesor: Juan Vivanco

13 de Diciembre 2021

Objetivo de la clase

► Resolver ecuaciones ordinarias homogéneas.

Función Homogénea

Se dice que una función F(x, y) es homogénea de grado n si

Se dice que una función
$$F(x,y)$$
 es homogénea de grado n si
$$F(tx,ty)=t^nF(x,y),$$

para todo x, y, t tales que los puntos (x, y) y (tx, ty) están en el dominio de definición de F.

La función
$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$
 es homogénea de grado 2.

[(+x,+y)= (+x)2+(+x)(+y) - (+y)2

 $= t^2 + (x_1 x_1)$

- + (x2+x4-y)

La función
$$f(x, y) = 3x^3 + 4x^2y - 4xy^2$$
 es homogénea de grado 3.

- f3 f(x/2)

 $\int (t \times_1 t \cdot_3) = 3(t \times_2)^3 + 4(t \times_2)^2(t \cdot_3) - 4(t \times_2)(t \cdot_3)^2$

- t3 (3x3+4x14-4xy1)





= E. f(x15).

La función
$$f(x,y) = 4\sqrt[3]{x^3 + y^3}$$
 es homogénea de grado 1.

La funcion
$$f(x,y) = 4\sqrt[3]{x^3 + y^3}$$
 es homogenea de grado 1.

 $f(tx, ty) = 4 \sqrt[3]{t^3 x^3 + t^3 y^3} = t 4 \sqrt{x^3 + y^3}$

Ecuación diferencial ordinaria homogénea

grado.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es homogénea si se puede escribir de la forma

M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0donde M(x, y) y N(x, y) son funciones homogéneas del mismo

La ecuación diferencial ordinaria

$$(x+3y)dx + (4y-5x)dy = 0$$

SPh

$$N(x_1y) = 4y - 5x = N(tx_1ty_1) = t(4y - 5x_1) = t N(x_1$$

M. N son funciones homogéneus de grado 1.

Resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$
 es homogénea.

Ser
$$\Pi(x_1, y) = x^2 - 2y^2 = 1 \Pi(x_1, y) = x^2 - 2x^2 - 2x^2y^2 = x^2 \Pi(x_1, y)$$

N(x,3) = xy =) $N(tx,ty) = txty = t^2 N(x,y)$ coi M. N financier homogéness de gredo 2.

Notor que

$$\Pi(x,y)dx + \Psi(x,y)dy = 0$$

=> $N(x,y)dy = -\Pi(x,y)dx$.

Je grado Do En =fecto

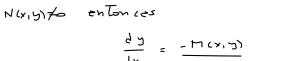
donde
$$f(x,y) = -H(x,y)$$
 es fu con homogéner

to
$$F(x,y) = -\frac{H(x,y)}{N(x,y)}$$
 es función homogénea

N(tx, ty) +2 N(tx, 1/3)

 $F(tx,ty)=-\frac{\Gamma(tx,ty)}{}=-\frac{t^2M(x,y)}{}=-t^2F(x,y),txy.$

$$\frac{4x}{4\lambda} = \frac{N(\lambda^1 J)}{-M(\lambda^1 J)}$$



Considerente XXO

Luego
$$\frac{dy}{dx} = F(x_1y_1) = F(1,y_1) = -\frac{(1-2y_1^2)}{y_1^2}$$

$$\frac{qx}{q\lambda} = x \frac{qx}{qx} + r$$

$$x \frac{du}{dx} + u = -\frac{(1-zu^2)}{u}$$

_ 1 + 2 u - u 2

Método para resolver ecuaciones ordinarias homogéneas

1. Expresar la ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

- 2. Verificar que M(x, y) y N(x, y) son funciones homogéneas del mismo grado.
- 3. Transformar la ecuación diferencial homogénea en una variable separable, utilizando cualquiera de las siguientes sustituciones:
- 4. Resolver la ecuación diferencial en variables separables, para luego regresar al cambio de variable realizado.

y = ux o x = uy, con sus respectivos diferenciales.

Resolver
$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

$$\Pi(x,y) = x^2 - 2y^2$$

$$\begin{cases} 5 - x \text{ for convex homogeness de} \\ y \text{ grades 2.} \end{cases}$$



Consideration $y = u \times = 1$ $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$

=) dy = xdu + edx





N(x,5)=×5









ا الم عود ١٦٠

 $y = \pm x \sqrt{x^2 c + 1}$

 $\int \frac{a}{u^2 - 1} du = \int \frac{1}{x} dx$

Luego

Resolver

$$xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$$

es homogénea.

Note: me

$$\square(\lambda^{1/2}) = -\left(\lambda + \sqrt{x_2 - 2_2}\right) \qquad \lambda \qquad N(\lambda^{1/2}) = x$$

Son funciones homogéners de quedo 1.

Lugo, utilizeremos
$$y = u \times = 1 \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy} = n + \times \frac{dy}{dx}$$

S: X>0 ENTOLICS

$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{N(x/2)} = \frac{x + \sqrt{x^2 - u^2 x^2}}{x}$$

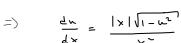
$$x \neq 0.$$

$$u + \frac{du}{dx} = u + \sqrt{\frac{1}{x^2 - u^2 x^2}}$$

$$= \frac{du}{dx} = \sqrt{x^2 - u^2 x^2}$$

 $\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{x} dy = \frac{1-u^2}{x} = \frac{1}{x}$

 $\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu = \int \frac{x}{4} dx$



$$\Rightarrow Arcsm(u) = |n|x| + C$$

$$\Rightarrow Arcsm(u) = |n|x| + C$$

$$\Rightarrow Arcsm(u) = |n|x| + C$$

$$\Rightarrow Arcsm(u) = -\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow Arcsm(u) = -|n|x| + C$$

=) Arcsin (7)=- | n | x | + C.

$$= \int Arcsim \left(\frac{y}{x}\right) = -\ln |x| + C.$$

in la soluci general

Arcsin (크) = + In 1>1 + C.

Ejercicios propuestos

- 1. Resolver: (x y)dx + (x y)dy = 0.
- 2. Resolver: $(x^2 + xy)dy + (y^2 xy)dx = 0$.

3. Use el cambio de variable
$$y = ux$$
 para encontrar la solución de

3. Use el cambio de variable
$$y = ux$$
 para encontrar la s

- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2(\frac{y}{x})}{y^2}$
- 4. Muestre que la ecuación diferencial
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$
- se transforma en ecuación de variables separadas usando el cambio de variables y = vx.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw- Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

 $Pue de \ encontrar \ bibliografía \ complementaria \ en \ el \ programa.$