

# Clase n°22

## Cálculo II

Universidad de Valparaíso  
Profesor: Juan Vivanco

20 de Octubre 2021

## Objetivo de la clase

- ▶ Calcular el volumen de un sólido de revolución.

# Clase pasada

## Ejercicio

Sean

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4y + 3 \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 4 \wedge x + y - 5 \leq 0 \wedge x \leq 2\}$$

- a) Graficar la región  $R = R_1 \cap R_2$ .
- b) Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región  $R$  alrededor del eje  $Y$ .

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4y + 3 \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Notar que

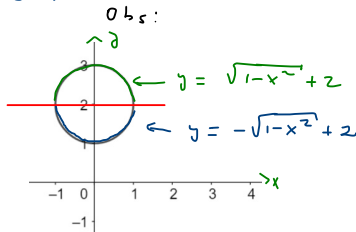
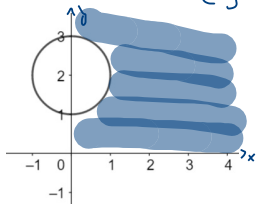
$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$x^2 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$$

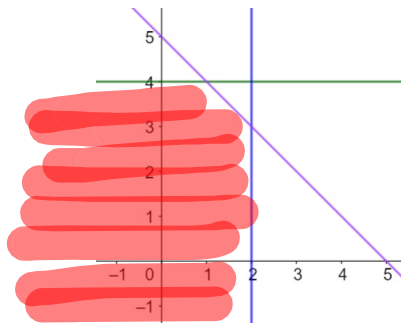
$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

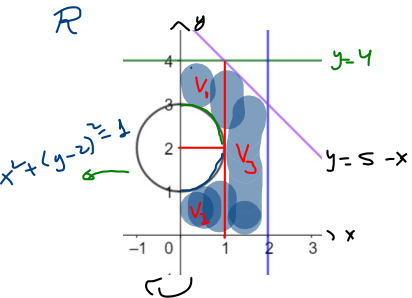
$$x^2 = 1 - (y-2)^2$$

$$x = \pm \sqrt{1 - (y-2)^2}$$



$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 4 \wedge x + y - 5 \leq 0 \wedge x \leq 2\}$$





$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Para calcular el volumen que se genera al rotar  $R$  en torno al eje  $y$ , tenemos

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3.$$

$$V_1 = 2\pi \int_2^4 x \cdot 4 dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2} + 2) dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 x (-\sqrt{1-x^2} + 2) dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

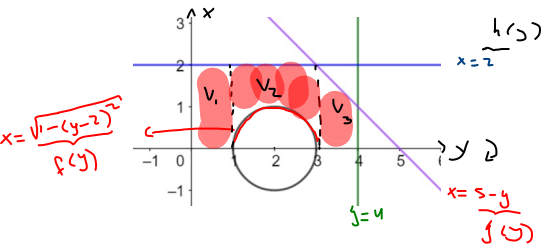
$$V_3 = 2\pi \int_1^2 x \cdot (5-x) dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{31\pi}{3}.$$

Luzes ,

$$V_T = 13\pi \text{ m}^3.$$



$$V_1 = \pi \int_0^2 2^2 dy$$

$$V_2 = \pi \int_2^3 (2^2 - [\sqrt{1-(y-2)^2}]^2) dy$$

$$V_3 = \pi \int_3^4 [5-y]^2 dy$$

El volumen buscado es

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 13\pi u^3$$



## Ejemplo 72

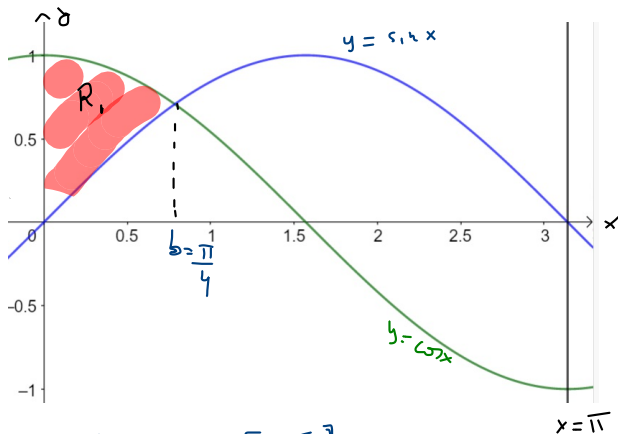
Sean

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sin x \wedge y \leq \cos x \wedge 0 \leq x \leq \pi\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^3 \wedge y \leq 0,8 \wedge y \leq \sqrt{x}\}$$

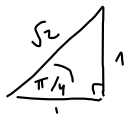
- a) Graficar  $R_1$  y  $R_2$ .
- b) Calcular el volumen generado al rotar  $R_1$  con respecto al eje  $X$  y al eje  $Y$ .
- c) Calcular el volumen generado al rotar  $R_2$  en torno al eje  $X$ . ← هذا هو المطلوب

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sin x \wedge y \leq \cos x \wedge 0 \leq x \leq \pi\},$$



Encontramos  $b$ ,  $b \in [0, \pi]$ .

$$\sin b = \cos b \Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$$



Así, el volumen generado al rotar  $R_1$  con respecto al eje  $X$  es

$$V(S_{R_1}) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x]^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x]^2 dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

• El volumen generado al rotar  $R_1$  con respecto al eje  $Y$  es

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x dx$$

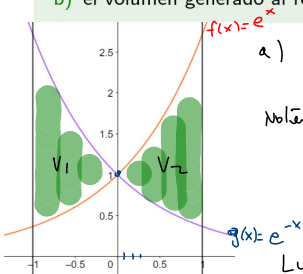
$$= \dots$$

$$= \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} - 2\pi.$$

### Ejemplo 73

Sea  $R$  la región encerrada por  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ ,  $x = -1$  y  $x = 1$ . Encuentre el

- el área de  $R$
- el volumen generado al rotar la región  $R$  sobre el eje  $X$ .



$$a) \quad A = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Notar que:  $\because x \in [-1, 0]$  se tiene que

$$g(x) \geq f(x)$$

•  $x \in [0, 1]$  se tiene que

$$f(x) \geq g(x)$$

Luego, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 g(x) - f(x) dx + \int_0^1 f(x) - g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{-x} - e^x dx + \int_0^1 e^x - e^{-x} dx \\ &= -4 + 2e + 2e^{-1}. \end{aligned}$$

para el volumen se tiene

$$V = V_1 + V_2.$$

donde,

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 [e^{-x}]^2 dx - \pi \int_{-1}^0 [e^x]^2 dx$$

$$= \dots$$

$$= \pi \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - 1 \right)$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 [e^x]^2 dx - \pi \int_0^1 [e^{-x}]^2 dx.$$

$$= \dots$$

$$= \pi \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - 1 \right)$$

Luego,

$$V = \pi (e^2 + e^{-2} - 2)$$

## Ejercicio Propuesto

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \in [0, 3[, \\ (x - 6)^2 & \text{Si } x \in [3, 6]. \end{cases}$$

Considerando  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Calcule el Volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar  $R$  en torno al eje  $X$ .

## Bibliografía

|   | Autor                 | Título   | Editorial                | Año  |
|---|-----------------------|--|--------------------------|------|
| 1 | Stewart, James        | Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas | México: Cengage Learning | 2021 |
| 2 | Burgos Román, Juan de | Cálculo infinitesimal de una variable                | Madrid: McGraw-Hill      | 1994 |
| 3 | Zill Dennis G.        | Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones            | Thomson                  | 2007 |
| 4 | Thomas, George B.     | Cálculo una variable                                 | México: Pearson          | 2015 |

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.