GUÍA 1
Curso : Cálculo I
Fecha : 29 de marzo de 2021
I.1 - Números Reales, Desigualdades y Funciones

---

1. Pruebe que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a^2 + b^2 \geq 2ab$

   Solución: $a^2+b^2 \geq 2ab \leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

2. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2ac}{a+c} + \frac{2bc}{b+c} \leq a + b + c$

   Solución: De 1 sabemos que $a^2+b^2 \geq 2ab \leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$. Haciendo esto para los 3 pares de variables a, b, b, c y a, c podemos sumar las desigualdades y obtener:

   $$\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ac}{a+c}$$

   que, operando el lado izquierdo, es equivalente a lo pedido.

3. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

   Solución: Como $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces sus raíces están bien definidas, luego, $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ obteniendo la segunda desigualdad. Para la primera basta con desarrollarla como sigue: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2} \leftrightarrow \sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ que es también la segunda desigualdad, la cual ya probamos que es cierta.

4. Simplificar para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén definidas las siguientes expresiones:

   - $x = \frac{\frac{a}{1-a}+\frac{1-a}{a}}{\frac{1-a}{a}-\frac{a}{1-a}}$

     Solución: $\frac{\frac{a}{1-a}+\frac{1-a}{a}}{\frac{1-a}{a}-\frac{a}{1-a}} = \frac{\frac{z^2+(1-a)^2}{a(1-a)}}{\frac{(1-a)^2-a^2}{a(1-a)}} = \frac{2a^2+1-2a}{1-2a}$

   - $x = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} + (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}$

     Solución: $x = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2+b^2)}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$. Desarrollando el numerador, nos damos cuenta que es 0, por lo tanto $x = 0$

5. Sea $x \in \mathbb{R}$. Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

   - $|x - |x-1|| \leq 2$

     Solución: $|x - |x-1|| \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq x - |x-1| \leq 2 \leftrightarrow$ $-2 - x \leq -|x-1| \leq 2 - x \leftrightarrow 2 + x \geq |x-1| \geq x - 2$.

     Si $x \geq 2$ entonces $x - 2 \leq x - 1 \leq x + 2 \leftrightarrow -2 \leq -1 \leq 2$.

     Entonces $S_A = [1, +\infty)$

     Si $x < 1$ entonces $x - 2 \leq 1 - x \leq x + 2$

     $\leftrightarrow -2 \leq 1 - 2x \leq 2 \leftrightarrow -3 \leq -2x \leq 1 \leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

     Pero como $x < 1$, entonces $S_B = [-\frac{1}{2}, 1)$.

     Finalmente $S = S_A \cup S_B = [-\frac{1}{2}, +\infty)$

   - $|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{x^2 - 3}$

     Solución: Restricción: $x^2 - 3 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \geq 3 \leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3}$ $\leftrightarrow (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$. Ahora, elevando al cuadrado la desigualdad tenemos que:

     $|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{x^2 - 3} \leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 \leq x^2 - 3$

$\leftrightarrow -2\sqrt{2}x + 2 \leq -3 \leftrightarrow x \leq \frac{5}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ Conj. Sol: $R \cap [\frac{5}{2\sqrt{2}}, +\infty) = [\frac{5}{2\sqrt{2}}, +\infty)$

- $|\frac{x-|x|}{x} - \frac{1}{x}| \geq |x|$

  Solución: Claramente, $x \neq 0$. Si $x > 0$ entonces $|x| = x$ y luego

  $|-\frac{1}{x}| \geq x \leftrightarrow 1 \geq x^2 \leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Pero como $x > 0$ entonces $x \leq 1$.

  Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ y luego

  $|\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}| \geq -x \leftrightarrow \frac{|2x-1|}{|x|} \geq -x \leftrightarrow \frac{-2x+1}{-x} \geq -x \leftrightarrow -2x+1 \geq x^2$

  $\leftrightarrow 0 \geq x^2 + 2x - 1 \leftrightarrow x \in [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$.

  Por lo tanto $x \in [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}] - \{0\}$

- $\sqrt{\frac{1}{-2x+1}} \leq |x-1|$

  Solución: Restricción: $\frac{1}{2} > x$.

  Notemos que si $x < \frac{1}{2}$ entonces $\sqrt{\frac{1}{-2x+1}} \leq 1 - x$

  $\leftrightarrow \frac{1}{-2x+1} \leq (1-x)^2$

6. Determinar Dominio y Recorrido de las siguientes funciones. Además verifique si son pares o impares (pueden no ser ninguna):

   - $f(x) = 1 + x^2$

     Solución: $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = [1, +\infty)$ y par

   - $f(x) = -\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

     Solución: $Dom(f) = \mathbb{R} - (1, 2)$, $Rec(f) = (-\infty, 0]$, ni par ni impar

   - $f(x) = \frac{3x-7}{5x^2-10}$

Solución: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$, ni par ni impar $Rec(f) = (-\infty, \frac{7-\sqrt{31}}{20}] \cup [\frac{7+\sqrt{31}}{20}, +\infty)$

- $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$
  Solución: $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = [0, +\infty)$, par

7. Exprese como funciones :

- El área de un triángulo equilatero como función de su altura.
  Solución: $A = L * h$ y $\frac{2}{\sqrt{3}}h = L$ (por Pitágoras), entonces $A = \frac{2}{\sqrt{3}}h^2$
- El lado de un cuadrado como función de su diagonal.
  Solución: Por Pitágoras $L = \frac{D}{\sqrt{2}}$
- Sea (x, y) un punto que pertenece a la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de x.
  Solución: La distancia entre (x, y) y $(4, 0)$ es $d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, pero como $y = \sqrt{x-3}$, entonces $d = \sqrt{(x-4)^2 + x - 3}$

8. En los siguientes ejercicios, calcule $f \circ g \circ h$:

- $f(x) = x + 1$ $g(x) = 3x$ $h(x) = 4 - x$
  Solución: $(f \circ g \circ h)(x) = 13 - 3x$
- $f(x) = 3x + 4$ $g(x) = 2x - 1$ $h(x) = x^2$
  Solución: $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\frac{5x+1}{1+4x}}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$ $g(x) = \frac{1}{x+4}$ $h(x) = \frac{1}{x}$
  Solución: $(f \circ g \circ h)(x) = 13 - 3x$
- $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$ $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ $h(x) = \sqrt{2-x}$
  Solución: $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{8-3x}{7-2x}$