Ecuación de Poisson y función de Green

Formulación del problema general (Caso 1-variable)

$$\hat{D}_x f(x) = \mathcal{S}(x)$$

OPERADOR DIFERENCIAL — INCÓGNITA — FUENTE

Para hallar la función de Green se debe resolver el siguiente problema (para el ~~mismo~~ mismo operador diferencial)

$$\hat{D}_x G(x,x') = \delta(x-x')$$

Si hallamos $G(x,x')$ entonces:

$$f(x) = \int_{\substack{\text{TODO } x' \text{ DONDE} \\ \text{EXISTA } \mathcal{S}(x')}} G(x,x')\,\mathcal{S}(x')\,dx'$$

Salvo una función arbitraria $g(x)$ ∋ $\hat{D}_x g(x)=0$. Supongamos que esta fn. es nula (no se pierde generalidad).

$\Downarrow$

Extensión 3D

$$\hat{D}_r f(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$\Downarrow$

Existe $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ $\ni$ $\hat{D}_r G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Y por lo tanto:

$$f(\vec{r}) = \int_{\substack{\text{sobre todo}\\ \vec{r}\,' \text{ donde}\\ \rho(\vec{r}\,')\neq 0}} G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

— Aplicación a Ec. de Poisson —

$\Downarrow$

$$\nabla_r^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Hacemos $\hat{D}_r \to \nabla_r^2$

$f(\vec{r}) \to \phi(\vec{r})$

$\rho(\vec{r}) \to -\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

luego $\displaystyle \phi(\vec{r}) = -\int G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}\,d^3r'$

Hallando $G(\vec{r},\vec{r}')$ para la ecuación de Poisson

$$\Downarrow$$

Se debe cumplir que: $\nabla_r^2 G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (*)$

Por otro lado $\Longrightarrow$ Una carga puntual "q" ubicada en $\vec{r}'$ genere un potencial en la posición $\vec{r}$ dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

también se conoce que $\rho(\vec{r}') = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$. Entonces debe cumplirse la ec. de Poisson, esto es:

$$\nabla_r^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_r^2 \left[\frac{1}{4\pi\cancel{\varepsilon_0}}\frac{\cancel{q}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{\cancel{q}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_r^2 \left[-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Lo que concluye que (por comparación con $(*)$):

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Así para cualquier distribución de carga se cumple que el potencial puede hallarse por la integral:

$$\phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,')\left[-\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}\right] d^3r'$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')\, d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Resultado conocido considerando elementos diferenciales de carga dq.