Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 1

---

1. Mostrar que el producto punto es invariante bajo una rotación de los vectores.
2. Demostrar la siguiente identidad (f y g son escalares):
$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\boldsymbol{\nabla} f)\cdot(\boldsymbol{\nabla} g)$$
3. Mostrar que un vector de desplazamiento que es ortogonal al gradiente de ϕ es tangente a una superficie de $\phi =$ constante (a veces llamado *superficie equipotencial*).
4. Utilizando el resultado anterior, encontrar el vector unitario normal a la superficie equipotencial dada por $\phi(x, y, z) = 2x^2 + y + 4z^2 = 6$.
5. Calcular $\mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})$ donde $\mathbf{A} = (y^2, x^2, 0)$.
6. Calcular el trabajo realizado contra una fuerza dada por
$$\mathbf{F} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_x x}{x^2 + y^2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_y y}{x^2 + y^2}$$
A lo largo del circulo unitario en el plano xy desde $\theta = 0$ (que es el punto $(1, 0)$) hasta $\theta = \pi/2$ (el punto $(0, 1)$).
7. Dado un vector $\mathbf{t} = -\hat{\mathbf{e}}_x y + \hat{\mathbf{e}}_y x$, mostrar, con la ayuda del teorema de Stokes, que
$$\frac{1}{2}\oint \mathbf{t} \cdot d\lambda = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = A$$
donde el camino C es un camino continuo y cerrado, y A es el área encerrada por la curva.
8. Una esféra de radio a está cargada uniformemente en todo su volumen. Encontrar el potencial electrostático $\varphi(r)$ para $0 \leq r < \infty$, donde
$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
y ρ es la densidad de carga.
9. Un alambre largo y recto que lleva una corriente I es fuente de un campo de inducción magnética $\mathbf{B}$ dado por
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$
Encontrar un potencial magnetico $\mathbf{A}$.