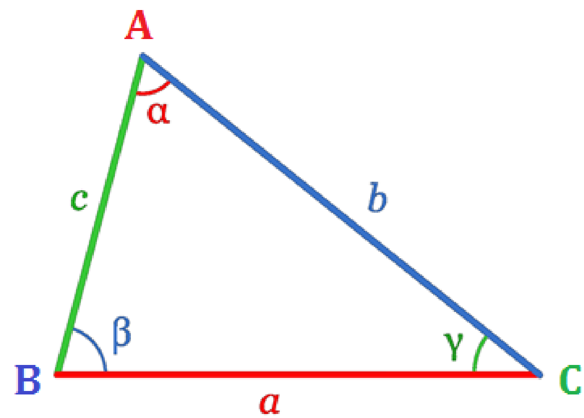
Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 9

Teoremas del seno y del coseno



Finalmente, el problema que nos queda pendiente, es el de poder resolver triángulos que no tengan ningún ángulo de 90°. Es decir, triángulos no rectángulos.

Para ello debemos enunciar dos teoremas útiles en tales casos. Luego, demostraremos uno de ellos.

Consideremos un triángulo cualquiera.

Nota: Observen bien como se colocaron las letras, lados a, b, c, respectivamente opuestos a vértices A, B, C, cuyos ángulos interiores miden α, β, γ.

Teorema del seno:

En todo triángulo como el de la figura, se cumple:

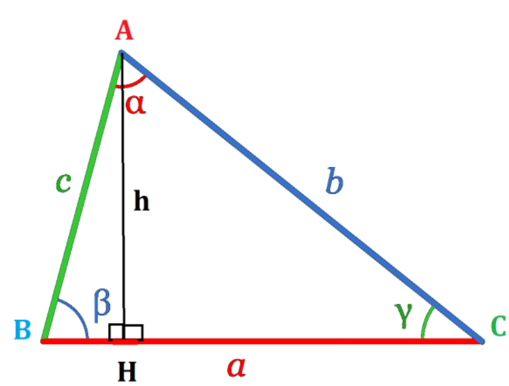
$$\frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{c}}$$

Demostración del teorema:

Trazemos la altura h por el vértice A del triángulo.

Quedan definidos dos triángulos rectángulos BHA y AHC. Trabajando en cada uno de ellos en la forma habitual (son rectángulos), tenemos …

En el triángulo de la izquierda (BHA):



$$sen\ \beta = \frac{cat.op.}{hip.}$$

$$sen\ \beta = \frac{h}{c}$$

En el triángulo de la derecha (CHA):

$$sen\ \gamma = \frac{h}{b}$$

Despejando h de ambas igualdades e igualando:

$$c \cdot sen\, \beta = b \cdot sen\, \gamma$$

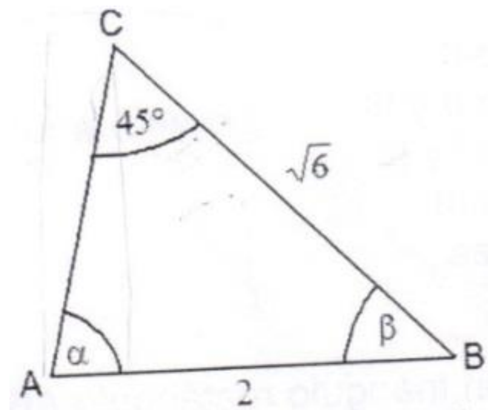
Despejando:

$$\frac{sen\, \beta}{b} = \frac{sen\, \gamma}{c}$$

lo cual demuestra una parte del teorema, la otra igualdad se demuestra análogamente tomando otra altura.

Ejemplo

Calcule β (nota: hay dos casos) sabiendo que el triángulo tiene medidas:



Solución:

Viendo como están colocadas las letras, vemos que los datos son:

$$\gamma = 45° \qquad a = \sqrt{6} \qquad c = 2$$

$$\frac{sen\, \alpha}{\sqrt{6}} = \frac{sen\, \beta}{b} = \frac{sen\, 45°}{2}$$

No podríamos despejar β, ya que tampoco tenemos b, por tanto, despejemos α:

$$\frac{sen\, \alpha}{\sqrt{6}} = \frac{sen\, 45°}{2}$$

$$\frac{sen\, \alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\frac{sen\, \alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{4}$$

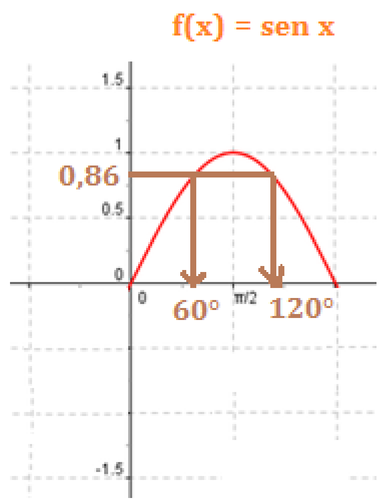
$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$$

$$\alpha = 60° \quad \text{o} \quad \alpha = 120°$$

Nota importante:
Observen que la función seno, no es inyectiva en el intervalo [0°, 180°], intervalo que es de nuestro interés porque el ángulo buscado es un ángulo interior de un triángulo, por tanto: $0 < \gamma < 180°$



Si $\alpha = 60°$, entonces,

$$60° + \beta + 45° = 180°$$

$$\beta = 75°$$

Si $\alpha = 120°$, entonces,

$$120° + \beta + 45° = 180°$$

$$\beta = 15°$$

Solución = {15°, 75°}

Teorema del coseno:

En todo triángulo como el de la figura, se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

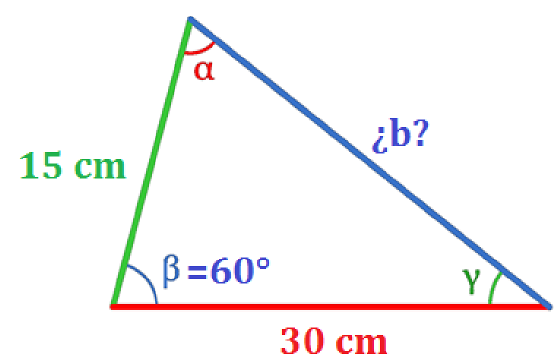
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

No demostramos este teorema.

El teorema del coseno es útil en dos situaciones diferentes, cuando los datos que se tienen son dos lados y el ángulo comprendido, y cuando se tienen las medidas de los tres lados y se desean hallar los ángulos. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2:

Calcular la medida del lado b, con los datos de la figura.



Solución:

Observemos que los datos dados son:

$$\beta = 60°$$
$$a = 30\ cm$$
$$c = 15\ cm$$

Dado que el ángulo cuya valor se conoce es β, utilizamos esta relación:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

Reemplazando valores: $b^2 = 30^2 + 15^2 - 2 \cdot 30 \cdot 15 \cdot \cos 60°$

$$b^2 = 30^2 + 15^2 - 2 \cdot 30 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 = 900 + 225 - 450$$

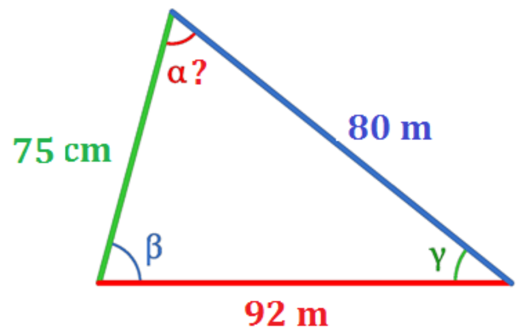
$$b^2 = 675$$

$$b = \sqrt{675}$$

$$b = 15 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}$$

Ejemplo 3:

Encontrar el valor de α con los datos de la figura.



Solución:

Ahora ocupamos esta alternativa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Despejando el coseno, obtenemos:

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \alpha$$

O equivalentemente:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \alpha$$

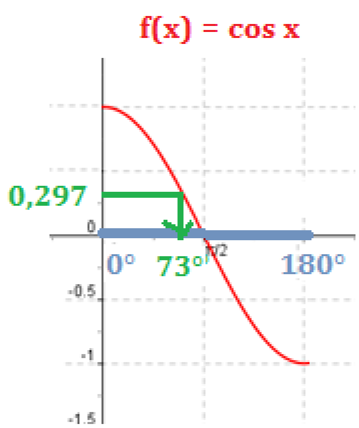
Reemplazando valores:

$$\frac{80^2 + 75^2 - 92^2}{2 \cdot 80 \cdot 75} = \cos \alpha$$

$$0{,}297 = \cos \alpha$$

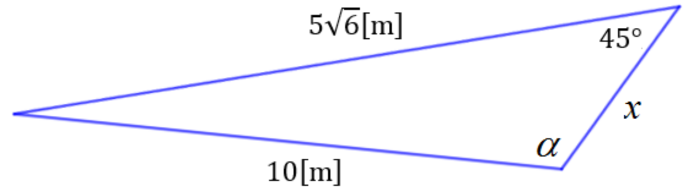
$$\alpha \approx 73°$$

Nota importante 2:
Observen que la función coseno es inyectiva en el intervalo [0, 180°], por tanto no tiene los problemas que tiene el seno que en ese intervalo no lo es. Siempre dará una sola solución.



Ejercicios:

1. Para el triángulo de la figura, calcular:
a) El ángulo obtuso α.
b) El lado x.

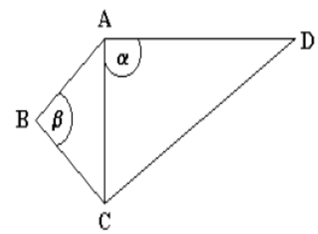


Respuesta: $\boldsymbol{\alpha}$=120°, $\boldsymbol{x}$ = 5($\sqrt{3}$ − 1) [m]

2. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m a ambos lados del edificio, resultando 33° y 46°. ¿Cuál es la altura del mismo?

Respuesta: h ≈ 40 m

3. En la figura; $\beta = 105°$, $\alpha = 120°$, $AB = 6\ cm$, $BC = 4\ cm$ y $AC = AD$. Calcule la longitud del segmento CD.



Respuesta: CD ≈ 13,89 cm

4. Dos personas distantes entre sí 840 metros ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación de 60° y 47°. ¿A qué altura vuela el avión?

5. Siendo ABC un triángulo y a, b, c los lados opuestos de los ángulos α, β y γ respectivamente, calcular lo que se pide:
a) $a = 7$; $b = 9$; $\gamma = 60°$; $c = ?$
b) $c = 1.2$; $a = 1.7$; $\beta = 120°$; $b = ?$
c) $a = 80$; $b = 57$; $c = 61$; $\beta = ?$

6. Dos barcos *A* y *B* zarpan a las 12:00 hrs. desde un mismo puerto y en línea recta formando sus trayectorias un ángulo de 120º. Si el barco *A* se desplaza en línea recta a *6* km/hr. y el *B* a *4* km/hr. ¿A qué distancia estará uno de otro a las 16:00 horas?

Respuesta: 34,9 km