Integrales triples

Tal como hicimos con las integrales dobles. Se puede definir la integral triple para una función de tres variables x, y, z. Para ello debemos pensar que nuestra región de integración se extenderá a la forma $[a, b]$ x $[c, d]$ x $[e, f]$ es decir a una región del tipo simple:

$$E = \{(x, y, z) \ / \ (a \leq x \leq b) \wedge (c \leq y \leq d) \wedge \ (e \leq z \leq f)\}$$

que corresponde geométricamente a un paralelepípedo (o caja).

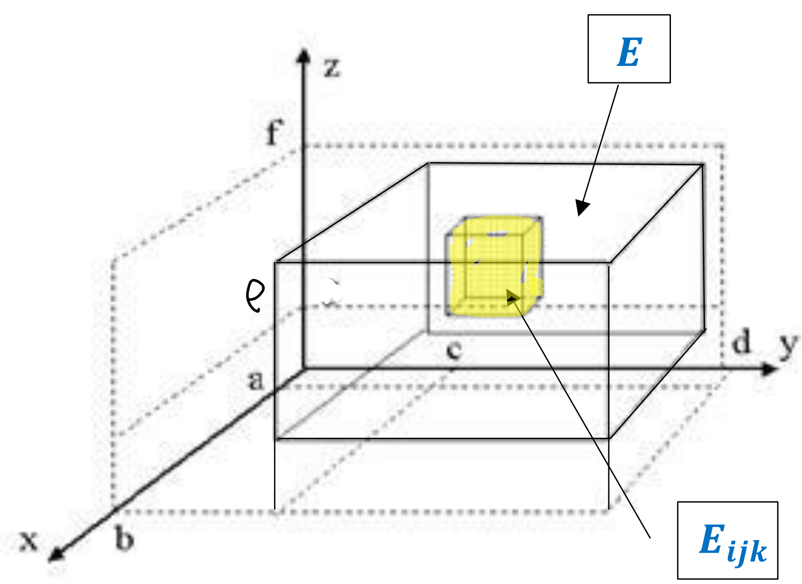

Figura 1

Si hacemos particiones de E, la ijk - ésima partición E_{ijk} tendrá la forma como se muestra en la figura 1.

Su volumen es

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \text{ (ver figura 2)}$$

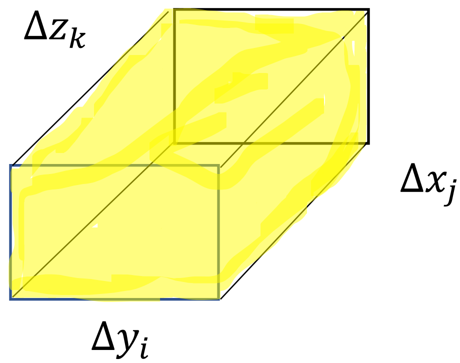

Figura 2

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ definida en E, para esta partición sera de la forma:

$$f\left(x_i, y_j, z_k\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

donde $\left(x_i, y_j, z_k\right)$ representa un punto cualquiera de la ijk - ésima partición E_{ijk}.

Para todo E, se debe considerar una cantidad infinita de particiones, es decir

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ l\to\infty}} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \cdots (1)$$

Suma de Riemann

De aquí surge la definición de integral triple.

Definición:

Sea f una función de tres variables definida en una región de $\mathbb{R}^3$,

$$E = \{(x, y, z) \ / \ (a \le x \le b) \wedge (c \le y \le d) \wedge (e \le z \le f)\}$$

Al límite (1) se le denomina la integral triple de f en E y se le denota como:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$$

Además, si existe el límite (1) decimos en ese ese caso que f es integrable en E.

Propiedades

Sean f y g integrables en $E = [a,b] \text{ x } [c,d] \text{ x } [e,f]$, entonces se cumplen:

1) $\iiint\limits_E c\, f(x,y,z)dV = c \iiint\limits_E f(x,y,z)dV, \text{donde } c \in \mathbb{R}$

2) $\iiint\limits_E \big(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\big)dV =$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV \pm \iiint\limits_E g(x,y,z)dV$$

3) $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)dV$

Donde $E = E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

4) Si la región $E \subseteq \mathbb{R}^3$ corresponde a un volumen entonces

$$V(E) = \iiint\limits_E dV$$

Observe que $f(x,y,z) = 1$ (ver figura 3)

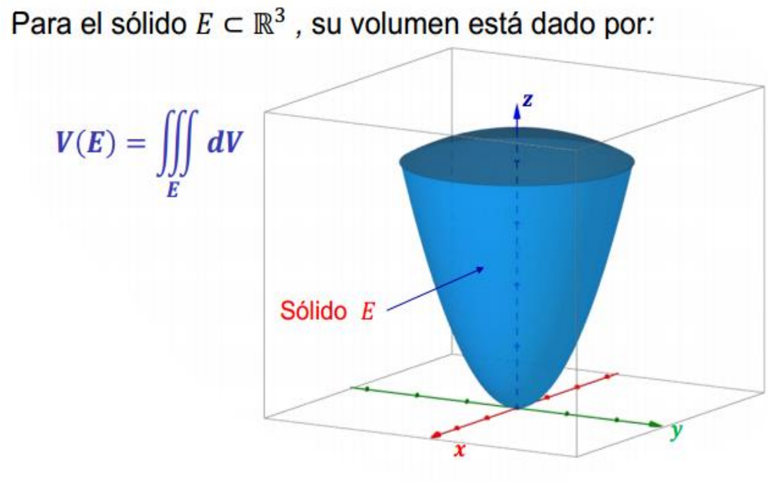

Figura 3

Tal como en las integrales dobles, las integrales triples se pueden escribir como una integral iterada (extensión del teorema de Fubini para funciones de tres variables)

Si $f(x, y, z)$ es continua en

$$E = \{(x, y, z) \ / \ (a \leq x \leq b) \wedge (c \leq y \leq d) \wedge (e \leq z \leq f)\}$$

Entonces

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

Observación:

El orden de la integración iterada es irrelevante, de modo que se puede escribir, asimismo:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)dzdydx$$

O cualquier otro orden.

Ejemplo

Calcule $\iiint\limits_{E} 3xy^3z^2dV$ donde

donde

$E = \{(x, y, z) \ / \ (-1 \leq x \leq 3\ ) \wedge (1 \leq y \leq 4) \wedge \ (0 \leq z \leq 2)\}$

Solución

$$\int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 3xy^3z^2\, dzdxdy = \int_1^4 \int_{-1}^3 [xy^3z^3]_0^2\, dxdy$$

$$= \int_1^4 \int_{-1}^3 8xy^3\, dxdy = \int_1^4 [4x^2y^3]_{-1}^3 dy$$

$$= \int_1^4 (36y^3 - 4y^3)\, dy = \int_1^4 32y^3\, dy$$

$$= \left[32\frac{y^4}{4}\right]_1^4 = [8y^4]_1^4 = 8[y^4]_1^4 = 8(4^4 - 1^4)$$

$$= 8(256 - 1)$$

$$= 8 \cdot 255 = 2040$$

Regiones más generales

Región del tipo I

Si el volumen de E está limitado entre las superficies $z = u_1(x, y)$ y $z = u_2(x, y)$ con $u_1(x, y) \leq u_2(x, y)$ y D la proyección de dicho volumen en el plano XY (ver figura 4).
Entonces se tiene que:

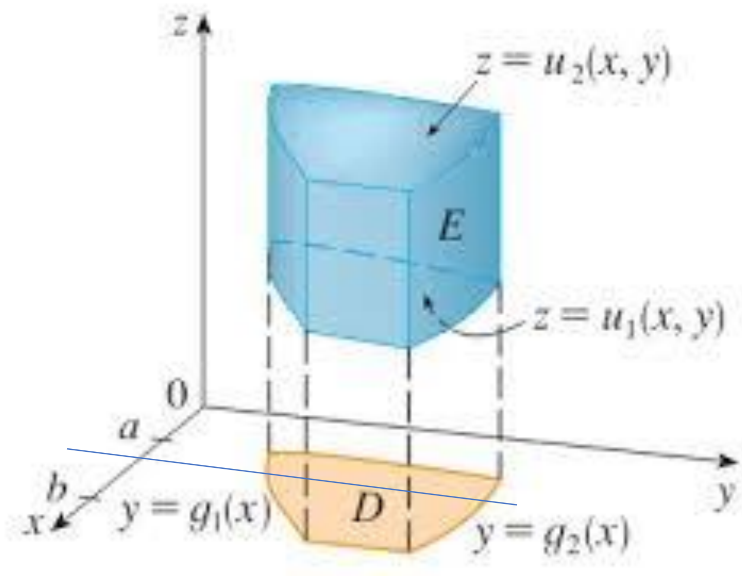

Figura 4

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dA \cdots (2)$$

De acuerdo con la figura

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx \cdots (3)$$

Observación

En la fórmula (2) tal como ya hemos visto la integral más interior es una integración parcial en la que mantenemos x e y constantes e integramos en z, y la integral doble exterior se calcula por los métodos vistos en integrales dobles, por ejemplo, de forma iterada indicada en (3) el cual que se integró verticalmente en la región D.

Por ejemplo, de la figura 5 se integra en D horizontalmente

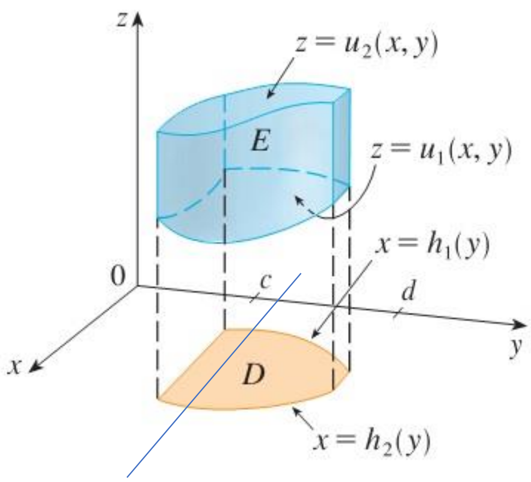

Figura 5

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Región del tipo II

Si el volumen de E está limitado entre las superficies $x = x_1(y,z)$ y $x = x_2(y,z)$ con $x_1(y,z) \leq x_2(y,z)$ y D la proyección de dicho volumen en el plano YZ (ver figura 6).

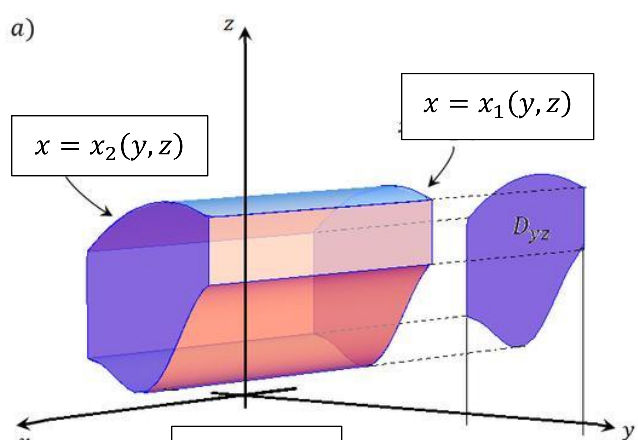

Figura 6

Entonces

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right) dA$$

Región del tipo III

Si el volumen de E está limitado entre las superficies $y = y_1(x,z)$ y $y = y_2(x,z)$ con $y_1(x,z) \leq y_2(x,z)$ y D la proyección de dicho volumen en el plano XZ (ver figura 7).
Entonces se tiene que:

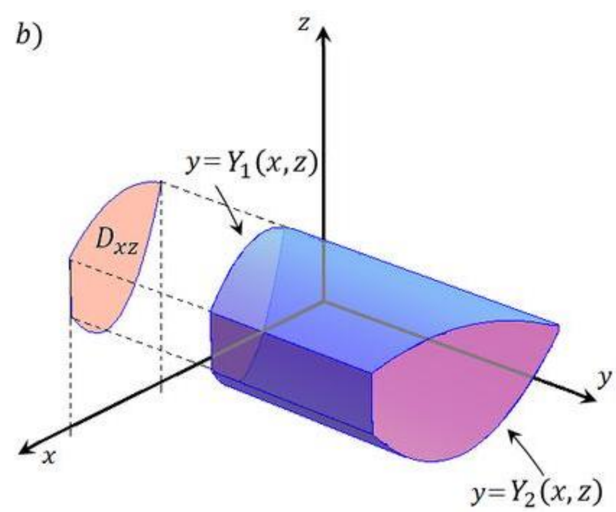

Figura 7

Entonces de la figura tenemos

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dA$$

Ejemplo

Calcular $\iiint\limits_{E} 6xy\, dV$, donde E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $2x + y + z = 4$ (ver figura 8).

Solución

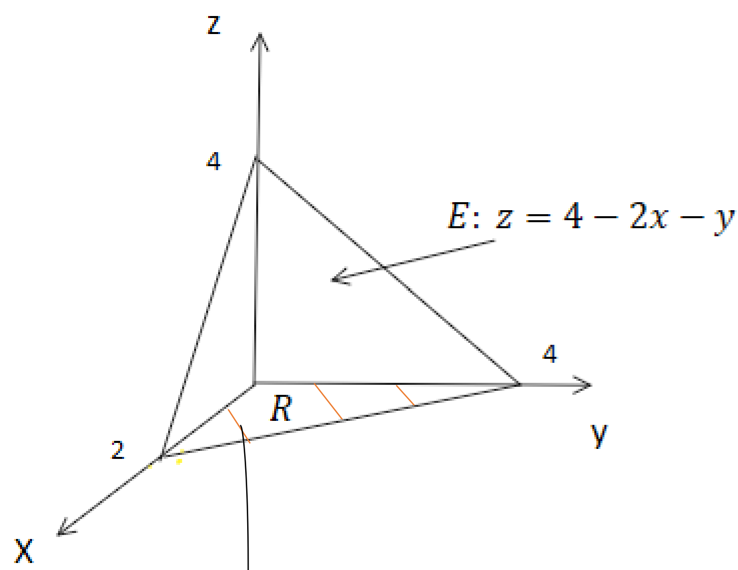

Figura 8

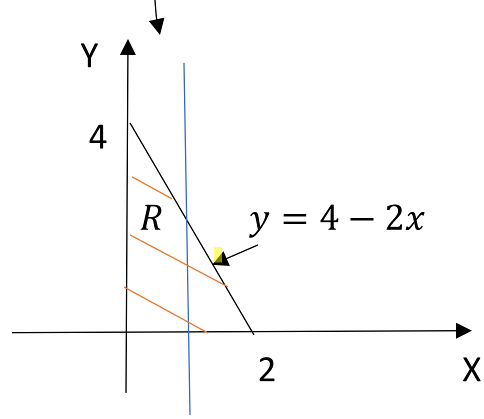

Figura 9

De la figura 8 y 9 tenemos

$$\iiint\limits_{E} 6xy\,dV = \iint\limits_{R} \left(\int_0^{4-2x-y} 6xy\,dz \right) dA$$

$$= \iint\limits_{R} [6xyz]_0^{4-2x-y}\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \big(6xy(4-2x-y)\big)\, dydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (24xy - 12x^2y - 6xy^2) dydx$$

$$= \int_0^2 \left(24x\frac{y^2}{2} - 12x^2\frac{y^2}{2} - 6x\frac{y^3}{3} \right)_0^{4-2x} dx$$

$$= \int_0^2 (12xy^2 - 6x^2y^2 - 2xy^3)_0^{4-2x} dx$$

$$= \int_0^2 (12x(4-2x)^2 - 6x^2(4-2x)^2 - 2x(4-2x)^3) dx = \frac{64}{5}$$

Otra forma

$$2x + y + z = 4$$
$$2x = 4 - y - z$$
$$x = 2 - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$$

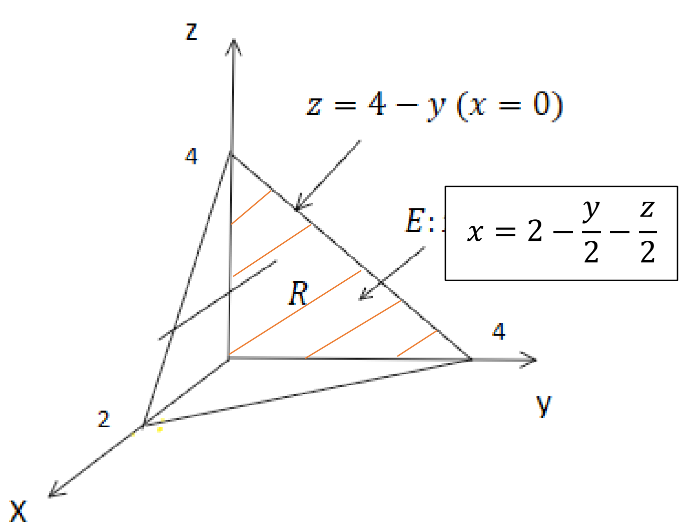

Figura 10

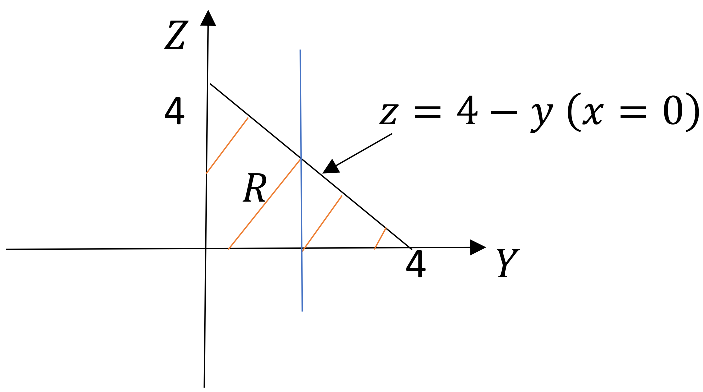

Figura 11

De la figura 10 y 11 tenemos

$$\iiint\limits_{E} 6xy\,dV = \iint\limits_{R} \left(\int_0^{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}} 6xy\,dx \right) dA$$

$$= \int_0^4 \int_0^{4-y} \left(\int_0^{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}} 6xy\,dx \right) dz\,dy = \frac{64}{5}$$

Otra forma

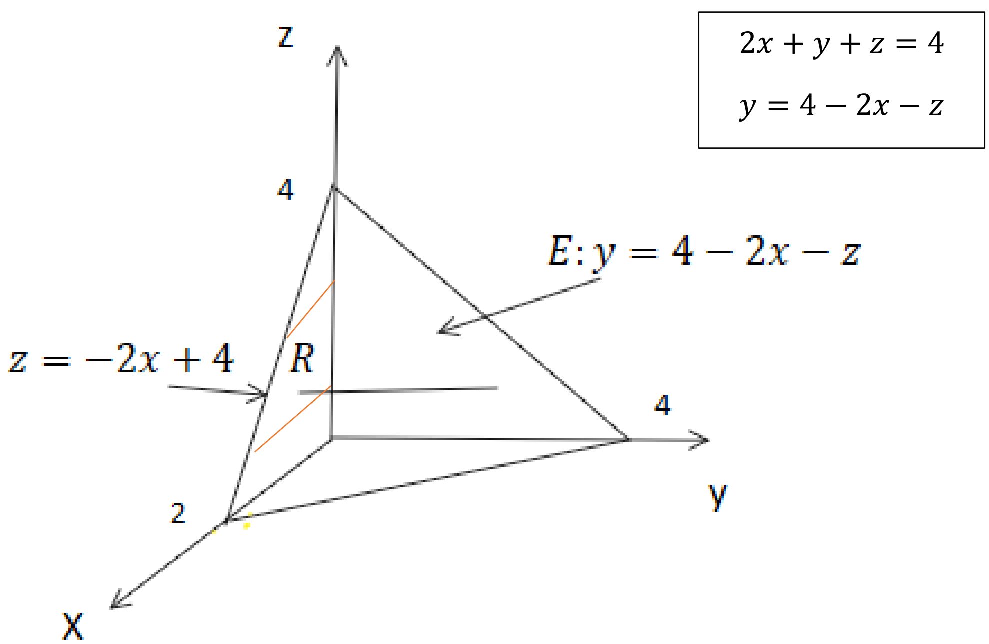

Figura 12

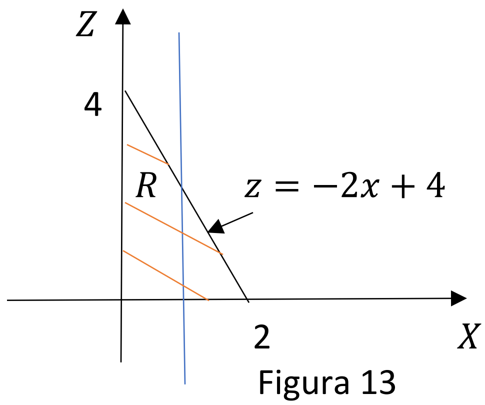

Figura 13

$$\iiint\limits_E 6xy\,dV = \iint\limits_R \left(\int_0^{4-2x-z} 6xy\,dy\right) dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \left(\int_0^{4-2x-z} 6xy\,dy\right) dz\,dx$$

$$= \frac{64}{5}$$