1ª. prueba parcial

10 de Septiembre de 2021

Instrucciones:

* **La prueba es individual. Se recomienda no comentar el trabajo propio con otros estudiantes.**
* **El plazo de entrega de la prueba es el viernes 10 de Septiembre a las 20.00 horas.**
* **Se deberá enviar un documento único (pdf o Word con fotos pegadas) conteniendo fotos de la resolución escrita a mano por el estudiante. De ser posible, se sugiere escanear para mayor claridad.**
* **El correo deberá enviarse desde el correo institucional del estudiante al correo mario.marotti@uv.cl**
* **En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible.**

1. (a) Encuentre para qué valor del parámetro k, el sistema siguiente tiene solución:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 1 \\ x - 2y + 7z = k \end{cases}$$

(0.5 puntos)

(b) Halle la solución general del sistema para el valor de k hallado. **(0.5 puntos)**

(c) ¿Puede el sistema ser determinado? Explique brevemente su respuesta. **(0.5 puntos)**

2. (a) Pruebe que el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única. **(0.5 puntos)**

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

(b) Exprese el sistema en forma matricial, es decir $A \cdot X = B$, y resuélvalo por el método de la matriz inversa, hallando previamente la matriz inversa A^{-1} **(1.0 puntos)**

3. (a) Siendo B una matriz 2×2 regular, pruebe que si $B^2 - B = 2I$ entonces:

$$B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I)$$

(1.0 puntos)

(b) Compruebe que la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumple con la condición dada y halle B^{-1} por el método presentado. **(0.5 puntos)**

4. (a) Compruebe utilizando las matrices A y B que el producto de matrices **no es conmutativo.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(0.5 puntos)

(b) Encuentre a y b para que el producto de las matrices C y D conmute, es decir para que $C \cdot D = D \cdot C$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.0 puntos)

Ejercicio 1

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & k \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = -2F_1 + F_2 \\ F'_3 = -F_1 + F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 10 & k-1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = +2F_2 + F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$

Deberá ser $k - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 3}$

(b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad\;\; 2y - 5z = -1 \end{cases}$

z no tiene pivote $\Rightarrow \boxed{z = \alpha}$, un grado de libertad

$\boxed{y = \dfrac{-1+5\alpha}{2}} \Rightarrow x + \cancel{2}\left(\dfrac{-1+5\alpha}{\cancel{2}}\right) - 3\alpha = 1$

$\boxed{x = +2 - 2\alpha}$

La solución general es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(c) No. Si $k = 3$ es INDETERMINADO con un grado de libertad.
Si $k \neq 3$, la última ecuación después de escalerizarlo muestra que es INCOMPATIBLE

Ejercicio 2:

(a)

Bastará probar que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{2} + 0 - \cancel{2} - (-1) = +1 \neq 0.$$

Por tanto, es un sistema DETERMINADO y la matriz es invertible.

(b) Hallemos A^{-1} por el método $(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1})$

El sistema queda expresado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = -2F_1 + F_3}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = F_2 + 2F_3}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 + F_3 \\ F'_3 = F_3}]{}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = 1/2\, F_2 \\ F'_3 = F_3}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 - F_2 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = F_3}]{} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Luego,

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 0$

La solución es $\boxed{S = \{(1, 2, 0)\}}$

Ejercicio 3:

(a) $$B^2 - B = 2I$$

Multiplicamos ambos miembros por B^{-1} a la izquierda:

$$B^{-1} \cdot (B^2 - B) = B^{-1} \cdot (2I)$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot B - B^{-1} \cdot B = 2B^{-1}$$

$$\underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} \cdot B - \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} = 2B^{-1}$$

$$I \cdot B - I = 2B^{-1}$$

$$\Longrightarrow B - I = 2B^{-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(B - I) = B^{-1}}$$

(b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 - B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

B cumple la condición

$$\Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 7/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que $\boxed{B \cdot B^{-1} = I}$

¡Está bien!

Ejercicio 4

(a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{A.B \neq B.A}$$

(b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C.D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ a & a+b \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \\ D.C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2+a & 3+b \\ a & b \end{pmatrix} \end{array}$$

Para que se cumpla $C.D = D.C$ deberá ser:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 3+b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2+a & \Rightarrow \boxed{a=0} \\ 5 = 3+b & \Rightarrow \boxed{b=2} \\ a = a & \text{Se cumple } \forall a \\ a+b = b & \rightarrow \boxed{a=0} \end{cases}$$

Respuesta: $\boxed{a=0}$ $\boxed{b=2}$