Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

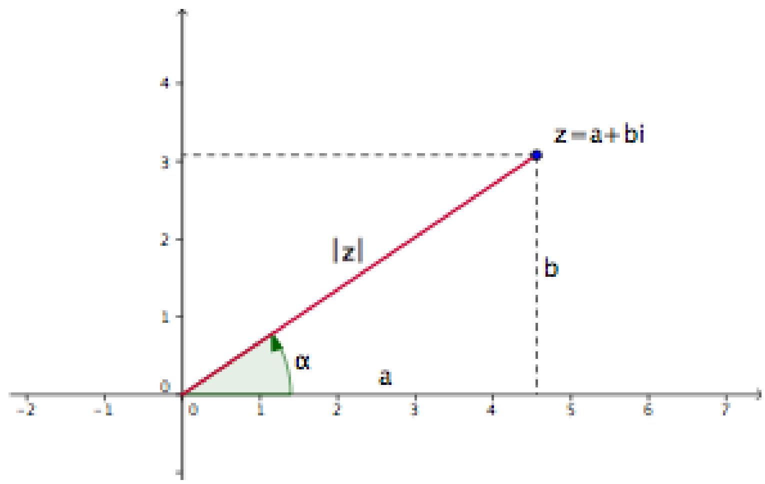
CLASE No. 19

Forma polar de un número complejo

Revisemos los conceptos de **modulo y argumento de un número complejo**, vistos la clase pasada.
Siendo,

$$\boldsymbol{z = a + bi}$$

al segmento con extremos en los puntos (0,0) y (a,b) en el diagrama de Argand-Euler lo llamaremos **radio.vector** del número z.



A la longitud del radio vector, la llamaremos **módulo de z**. Con un simple Pitágoras vemos que,

$$\boldsymbol{\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Y al ángulo α que forma el radio-vector de z con el semieje real positivo, lo llamaremos **argumento de z.**

Aplicando lo ya visto en trigonometría, vemos que

$$\cos\alpha = \frac{a}{\rho} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\rho}$$

Por tanto,

$$a = \rho\cdot\cos\alpha \qquad b = \rho\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

A cualquier número complejo de la forma

$$z = a + bi$$

Podemos ahora escribirlo como,

$$\boldsymbol{z = \rho(cos\ \alpha + i\cdot sen\ \alpha)}$$

que se denomina **forma polar de un número complejo.**

Multiplicación y división de complejos en forma polar

Multiplicación:

Dados dos complejos

$$z_1 = \rho_1(cos\ \varphi_1 + i \cdot sen\ \varphi_1) \qquad\qquad z_2 = \rho_2(cos\ \varphi_2 + i \cdot sen\ \varphi_2)$$

para multiplicarlos en forma polar hacemos,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_1) \cdot \rho_2(\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_1)(\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos \varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\ \varphi_1 \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_2) + \\ + \mathrm{i}(\mathrm{sen}\ \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \mathrm{sen}\ \varphi_2)$$

Recordando propiedades trigonométricas,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \mathrm{sen}\ (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Conclusión: para multiplicar dos complejos se escritos en forma polar se deben multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos.

División:

Intenten demostrar que entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \mathrm{sen}\ (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Potencias de i

Hemos definido la unidad imaginaria como,

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

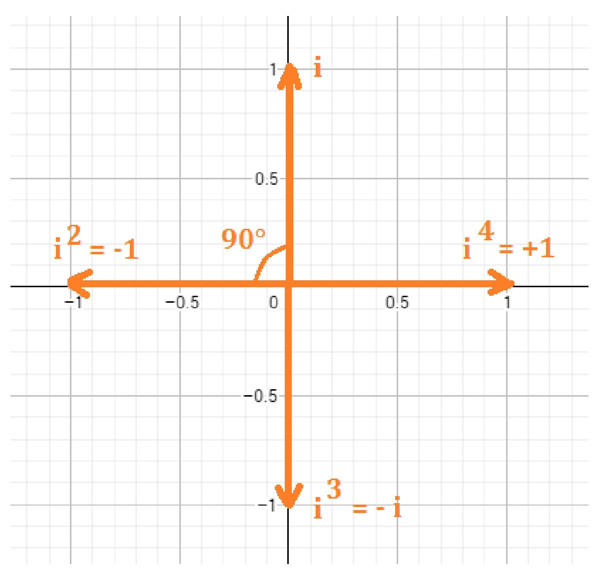
Por tanto,

$$\boldsymbol{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$$

$$\boldsymbol{i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1}$$

$$\boldsymbol{i^5 = i^4 \cdot i = i}$$

Por tanto, tenemos un ciclo de cuatro pasos:



$$\boldsymbol{i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1}$$

$$\boldsymbol{i^5 = i \qquad i^6 = -1 \qquad i^7 = -i \qquad i^8 = 1}$$

$$\boldsymbol{i^9 = i \qquad i^{10} = -1 \qquad i^{11} = -i \qquad i^{12} = 1}$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

Ejemplo:

¿A qué es igual i^{123}?

Solución:

El ciclo tiene 4 pasos, ¿en cuál de las cuatro posiciones caerá i^{123}? Observamos que los exponentes en la última columna son múltiplos de 4. Dividamos 123 entre 4, nos da cociente 30 y resto 3, por tanto …

$$\boldsymbol{i^{123} = i^{30\cdot4+3} = (i^4)^{30}\cdot i^3 = 1^{30}\cdot i^3 = i^3 = -i}$$

Respuesta: $\boldsymbol{i^{123} = -i}$

Potencia de un número complejo

¿Qué ocurrirá entonces si multiplicamos un número complejo por sí mismo?

Sabemos que:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot \text{sen}\,(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Si $z_1 = z_2$, nos quedará:

$$(z_1)^2 = {\rho_1}^2[\cos(2\varphi_1) + i\cdot\text{sen}\,(2\varphi_1)]$$

Generalizando esta idea a cualquier potencia de exponente natural n:

$$(z_1)^n = {\rho_1}^n[\cos(n\varphi_1) + i\cdot\text{sen}\,(n\varphi_1)]$$

Dejaremos para la clase que viene el problema de las raíces de un complejo z.

Ejemplo:

Calcular z^4 siendo, $z = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

Solución:

Será
$$z^4 = 2^4(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$

$$z^4 = 16(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$

$$\boldsymbol{z^4 = -8 - 13{,}85\, i}$$

Fórmula de De Moivre

Hemos demostrado que:
$$(z_1)^n = {\rho_1}^n[\cos(n\varphi_1) + i \cdot \operatorname{sen}(n\varphi_1)]$$
cuando
$$z_1 = \rho_1(cos\ \varphi_1 + i \cdot sen\ \varphi_1)$$

Reemplacemos, esta expresión en la primera,

$$[\rho_1(cos\ \varphi_1 + i \cdot sen\ \varphi_1)]^n = {\rho_1}^n[\cos(n\varphi_1) + i \cdot \operatorname{sen}(n\varphi_1)]$$

Eliminemos los subíndices y tomemos $\rho = 1$.

$$(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \operatorname{sen}(n\varphi)$$

que se conoce como **fórmula de De Moivre.** Nos hubiera sido muy útil en trigonometría como mostraremos ahora.

Ejemplo:

En una prueba de trigonometría, se nos pidió demostrar que …

$$\cos(3\varphi) = 4(\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi$$

$$\operatorname{sen}(3\varphi) = 3 \operatorname{sen}\varphi - 4(\operatorname{sen}\varphi)^3$$

Solución:

Ahora lo haremos ocupando la fórmula de De Moivre. Reemplacemos $n = 3$ en dicha formula,
$$(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)^3 = \cos(3\varphi) + i \cdot \operatorname{sen}(3\varphi)$$

Y recordemos que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Por tanto,

$(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)^3 =$

$$= (\cos\varphi)^3 + 3(\cos\varphi)^2(\operatorname{sen}\varphi)i + 3(\cos\varphi)\,(\operatorname{sen}\varphi)^2 i^2 + (\operatorname{sen}\varphi)^3 i^3$$

Y recordando que:

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i$$

se obtiene:

$$(cos\ \varphi + i \cdot sen\ \varphi)^3 =$$
$$= [(\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)\,(\operatorname{sen}\varphi)^2] + [3(\cos\varphi)^2(\operatorname{sen}\varphi) - (\operatorname{sen}\varphi)^3]i$$

Reemplazando ese desarrollo en la fórmula,

$$[(\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)\,(\operatorname{sen}\varphi)^2] + [3(\cos\varphi)^2(\operatorname{sen}\varphi) - (\operatorname{sen}\varphi)^3]i =$$
$$= \cos\,(3\varphi) + i \cdot \operatorname{sen}\,(3\varphi)$$

Igualando partes reales:

$$\cos\,(3\varphi) = (\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi)^2$$

$$\cos\,(3\varphi) = (\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi\,[1 - (\cos\varphi)^2]$$

$$\cos\,(3\varphi) = 4\,(\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi$$

Igualando partes imaginarias:

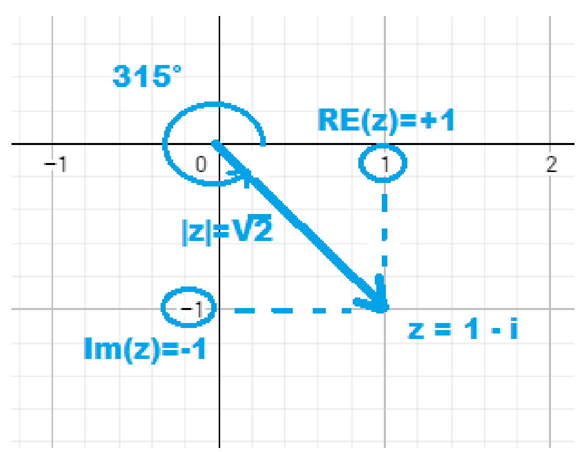
$$\operatorname{sen}\,(3\varphi) = 3(\cos\varphi)^2(\operatorname{sen}\varphi) - (\operatorname{sen}\varphi)^3$$

$$\operatorname{sen}\,(3\varphi) = 3(1 - \operatorname{sen}\varphi^2)(\operatorname{sen}\varphi) - (\operatorname{sen}\varphi)^3$$

$$\operatorname{sen}\,(3\varphi) = 3\operatorname{sen}\varphi - 4(\operatorname{sen}\varphi)^3$$

Ejemplo 1
Calcular $\qquad (\mathbf{1} - \boldsymbol{i})^{\mathbf{10}}$

Solución:
Comencemos expresando el número complejo $z = 1 - i$ en notación polar:



$$a = 1 \qquad b = -1$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Buscando en el círculo trigonométrico, obtenemos: $\varphi = 315°$

Por tanto, $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

Recordando que: $(z_1)^n = {\rho_1}^n[\cos(n\varphi_1) + i \cdot \operatorname{sen}(n\varphi_1)]$

$$(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}(\cos 3150° + i \operatorname{sen} 3150°)$$

Pero un ángulo de 3150° implica varios giros completos. Dividimos 3150 entre 360. Nos da cociente 8 (número de giros completos) y resto 270°. Por tanto,

$$(1-i)^{10} = 32(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$$

Buscando en la circunferencia trigonométrica:

$$(1-i)^{10} = 32(0 - i)$$

$$\boldsymbol{(1-i)^{10} = -32i}$$

Ejemplo 2:

Expresar en forma binomial el número complejo

$$z = i^1 - i^2 + i^3 - i^4 + \cdots - i^{2222}$$

Sugerencia: notar que se suman números que forman una progresión geométrica.

2) Identificamos la suma de términos en progresión geométrica, con primer término:

$$a_1 = i$$

razón:

$$r = -i$$

y número de términos

$$n = 2222$$

Así el complejo está dado por la suma

$$z = a_1\frac{r^n - 1}{r - 1} = i \cdot \frac{(-i)^{2222} - 1}{(-i) - 1}$$

Calculando el término con potencia alta:

$$(-i)^{2222} = (-1 \cdot i)^{2222} = (-1)^{2222} \cdot (i)^{2222} = i^{2222}$$

Como $2222 = 555 \cdot 4 + 2$, entonces $i^{2222} = i^2 = -1$, de este modo

$$z = i \cdot \frac{(-1) - 1}{(-i) - 1} = i \cdot \frac{-2}{-i - 1} = \frac{2i}{i + 1} \cdot \frac{i - 1}{i - 1} = \frac{2i(i - 1)}{i^2 - 1} = \frac{2i^2 - 2i}{-1 - 1} = \frac{-2 - 2i}{-2} = 1 + i$$

así

$$\boldsymbol{z = 1 + i}$$

Ejercicios

1. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones, expresando el resultado en forma binomial:

(a) $3 \cdot \mathrm{Re}(z) - \frac{5}{i} = 8 + \bar{z}$ (b) $2 + z^2 = |z|^2 - 2i$

Respuestas: (a) z = 4 – 5i
(b) {-1 + i, 1 - i}

2. Calcule, usando la forma trigonométrica o polar de un complejo:

(a) $\left(\sqrt{3} + i\right)(1 + i)$ (b) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)(1 - i)$ (c) $\frac{1-i}{1+i}$

Respuestas: (a) $2\sqrt{2}(\cos 75° + i.sen75°)$
(b) $2\sqrt{2}(cos\ 15° - i.sen15°)$
(c) $1(cos\ 90° - i.sen90°) = -i$

3. Demuestre que: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$