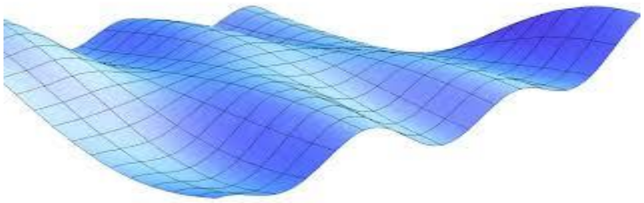
# Funciones de varias variables



**Definición**

Llamaremos **función vectorial** a toda aplicación $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que a cada punto $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ de $U$ le hace corresponder un único vector $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ en $\mathbb{R}^m$.

**Observación**

- $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
  $\vec{x} \longmapsto f(x) = \vec{y}$ (forma explícita)
  Donde $f(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_m)$
- Además

  $f(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$

  Con $y_i = f_i(\vec{x})$ , $\forall i = 1, \cdots, m$.

  Vale decir que $f$ tiene $n$ variables y $m$ funciones coordenadas de la forma $f_i: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

**Definiciones**

A las coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ se le denomina variables independientes y a las coordenadas $(y_1, \cdots, y_m)$ se le denomina variables dependientes.

Las funciones vectoriales con imagen en $\mathbb{R}$, se llaman **funciones escalares.**

**Ejemplo 1**

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (función vectorial de dos variables)

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2, 4x_1 + 7x_2)$$

Sus funciones coordenadas son,

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2\ ,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2\ ,$$

$$f_3(x_1, x_2) = 4x_1 + 7x_2$$

**Ejemplo 2**

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (función vectorial de tres variables)

$$(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1x_2x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

Sus funciones coordenadas son,

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3\ ,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

**Ejemplo 3**

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (función escalar de tres variables)

$$(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 6x_3$$

**Ejemplo 4**

Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ (función escalar de cuatro variables)

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) \to f(&x_1, x_2, x_3, x_4)\\ &= sen(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + 6\ln(x_1 + x_2x_3x_4)\end{aligned}$$

**Dominio y Recorrido de una función vectorial**

**Definición**

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} \longmapsto f(x) = \vec{y}$$

Se define:

Dominio de $f = Domf$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^m\} = U \subseteq \mathbb{R}^n$$

Recorrido de $f = Recf$ (o imagen de $f$ , $Imf$)

$$= \{f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^m / (x_1, \cdots, x_n) \in Domf\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

**Observación**

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial, el dominio de $f$ es igual a la intersección de los dominios de las funciones componentes. Por tanto, si

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

para determinar el $Domf$ hay que determinar primero el $Domf_i$ para cada $\forall i = 1, \cdots, m$ . Luego

$$Domf = Domf_1 \cap Domf_2 \cap \cdots \cap Domf_m$$

**Definición** (Gráfica de una función escalar)

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función. Se llama gráfica de $f$ al conjunto de puntos $\left(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)\right)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Las funciones con dominio en $\mathbb{R}$, en general tienen como gráfica una curva.

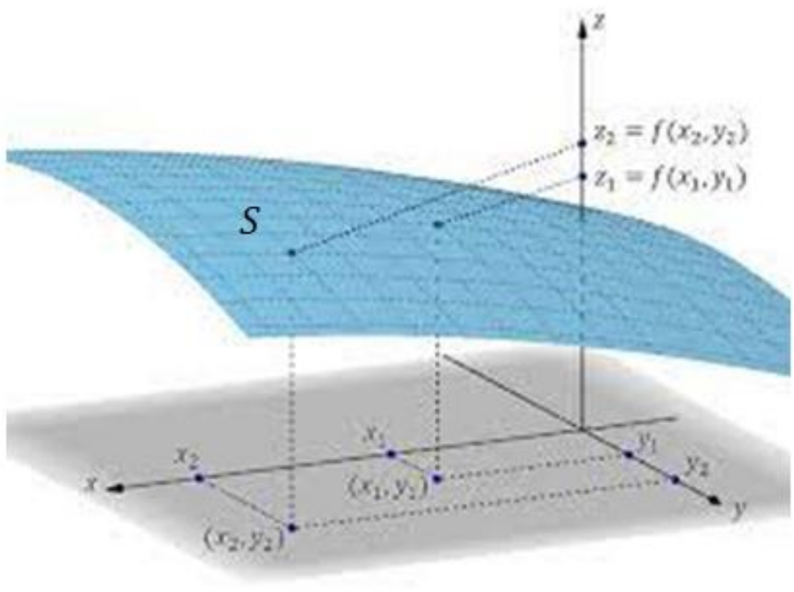
**Observaciones**

En el caso $n = 2$ corresponde al gráfico de una superficie de una función $f$ de dos variables el cual se define como el conjunto de puntos del espacio con coordenadas $(x, y, z)$ tales que $(x, y)$ está en el dominio de $f$ y $z = f(x, y)$.

Por tanto, si llamamos $S$ a la superficie que representa la gráfica de $f$, entonces

$$S = \{(x, y, z)/(x, y) \in Dom\ f \wedge z = f(x, y)\}$$

Por consiguiente, la gráfica de $f$ de una función de dos variables es una superficie $S$ en el espacio con ecuación $z = f(x, y)$




Gráfica de una función de 2 variables

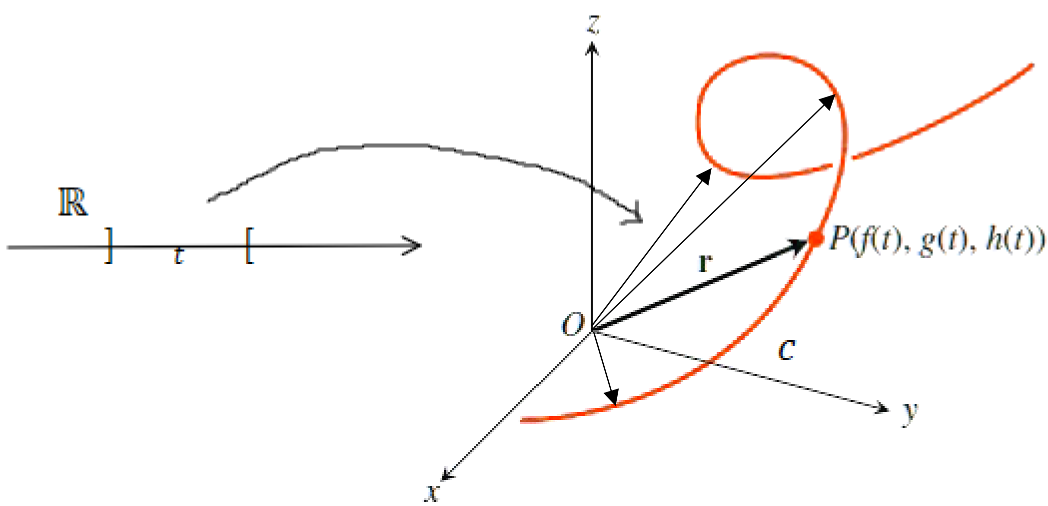
Cabe recordar de los cursos pasados que para $f(x)$ de una variable, su gráfica es una curva $c$ en el plano, con ecuación $y = f(x)$.

Consideremos ahora una función vectorial de un parámetro $r$ y de variable real dada por:

$r: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ donde $f, g$ y $h$ son funciones escalares.

Observe que para $t \in I$ se obtiene un vector $r(t)$, que es el vector posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$.

La función vectorial define una curva $c$ en el espacio formado por los extremos del vector $r(t)$ donde $t \in I$.




Curva vectorial (paramétrica)

Observe que la curva $c$ es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ del espacio tal que:

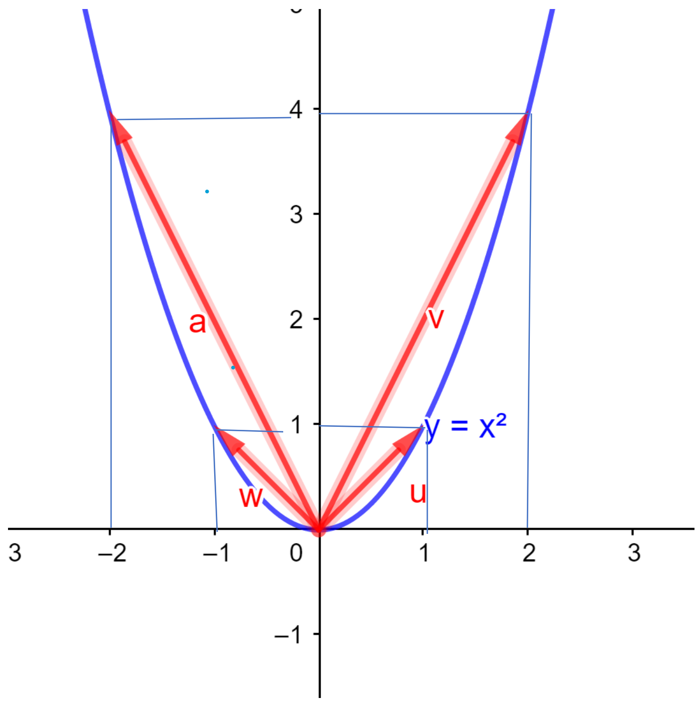
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Donde estas expresiones son llamadas ecuaciones para métricas de la curva $c$ y donde $t \in I$ es su parámetro.

**Ejemplo 1**

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = (x, x^2)$, su grafica es una parábola

Representación:




$Domf \;=\; \mathbb{R}$

$Recf \;= \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$

**Ejemplo 2**

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ función tal que $f(x, y) = (\sqrt{x+y}, \sqrt{x-y})$,

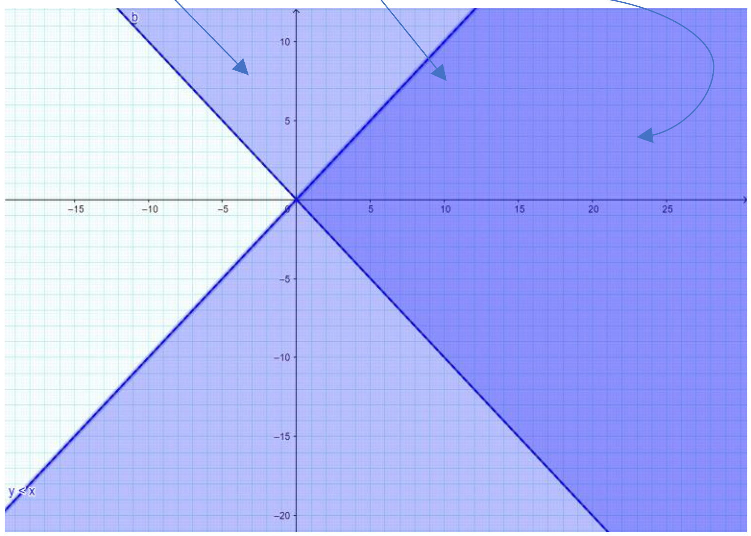
$$Domf \;= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0 \wedge \; x - y \geq 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x \;\wedge\; y \leq x\} = U$$

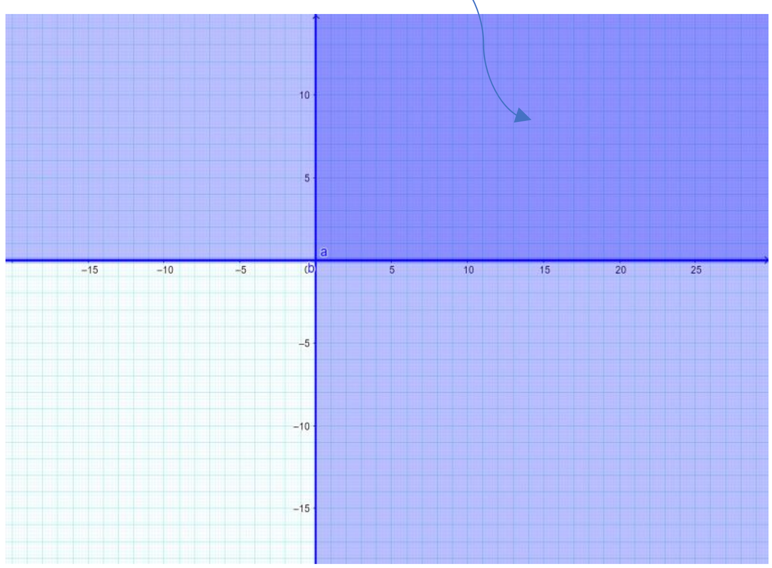
$$Recf \;= \left\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 / z_1 = \sqrt{x+y} \geq 0 \wedge z_2 = \sqrt{x-y} \geq 0\right\}$$

Las siguientes figuras muestran gráficamente el dominio y el recorrido de la función $f$, que es $Recf \;= \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$

$y \geq -x$ $\quad$ $y \leq x$ $\quad$ $Domf$



$Recf\ = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$

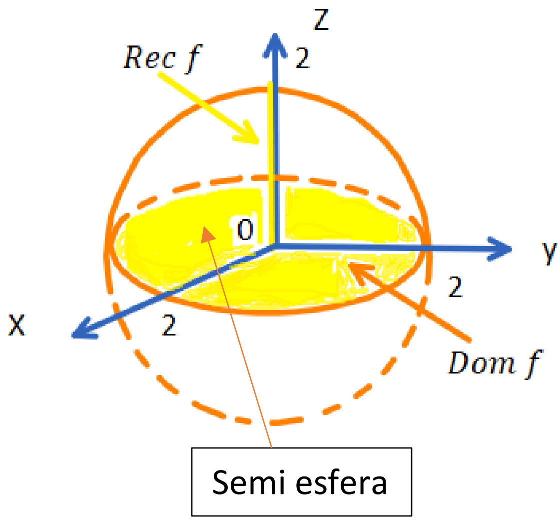


## Ejemplo 3

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , tal que $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

Sea $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (semi esfera) pues $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ (esfera)

$Domf\ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $Recf\ = [0,2]$

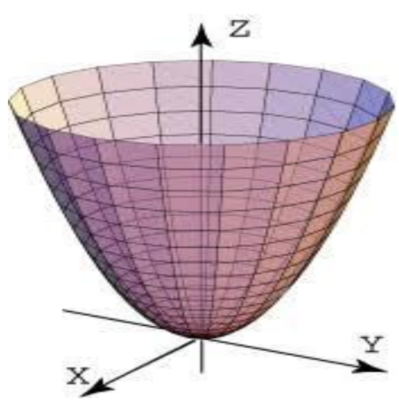



**Ejemplo 4**

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Sea $z = x^2 + y^2$ (paraboloide)

$Domf\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ y $Recf\ = \mathbb{R}_0^+$




Paraboloide

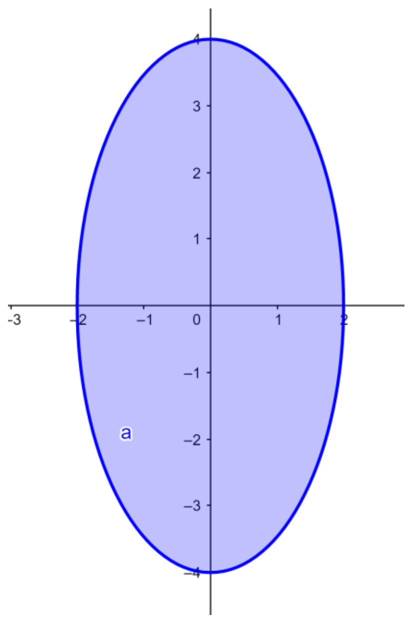
**Ejercicio**

Sea $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ función. Hallar el dominio, el recorrido de $f$ y esboce su gráfico.

En primer lugar, observe que la cantidad subradical no puede ser negativo. Por tanto

$$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$$

El cual constituye el recinto interior a la elipse de semiejes 2 y 4 en el plano XY.




Por otra parte, al ser $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$, el valor máximo de $f$ se alcanza en el punto $(0,0)$, donde $f(0,0) = \sqrt{16} = 4$ mientras que el valor mínimo se alcanza en los puntos $(\mp 2,0)$ de $4x^2 + y^2 = 16$, es decir, sobre la elipse anterior, donde la función es idénticamente nula, así pues,

$$Recf = \{z = f(x,y) \in \mathbb{R} / (x,y) \in Domf\}$$
$$= \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 4\}$$

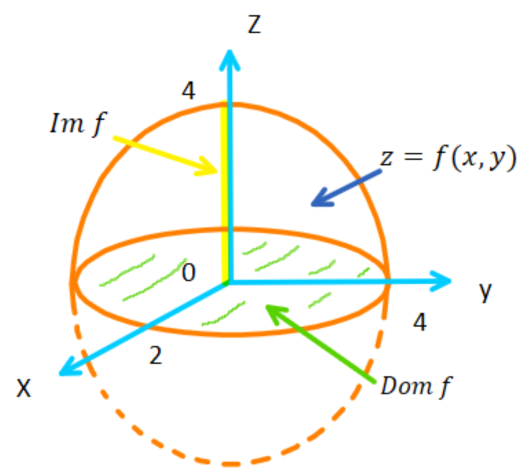
El Gráfico de $f$ viene dado por

$$G_f = \left\{\left(x, y, \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}\right) / (x, y) \in Domf\right\}$$

$$= \left\{\left(x, y, \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}\right) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$$

El cual se representa como la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, z \geq 0$$




La figura muestra el dominio, recorrido y gráfica de la función considerada.

**Operaciones con funciones vectoriales**

Sean $f$ y $g$ funciones de varias variables.

1. $(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$ ; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   $Dom(\alpha f) = Domf$

2. $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$

   $Dom(f + g) = Domf \cap Domg$

3. $(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$

   $Dom(f \cdot g) = Dom f \cap Dom g$

4. Si $f$ y $g$ funciones vectoriales con recorrido en $\mathbb{R}^3$

$$(f \text{ x } g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \text{ x } g(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

5. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} C \subseteq \mathbb{R}^p$

   $gof$

   Donde $(gof)(\vec{x}) = g\big(f(\vec{x})\big)$

**Ejemplo 1**

Se definen las funciones

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + y, y, x - y)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y) = (x, y, x + y)$,

entonces

$$(f \text{ x } g)(x, y) = f(x, y) \text{ x } g(x, y) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x + y & y & x - y \\ x & y & x + y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} y & x - y \\ y & x + y \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} x + y & x - y \\ x & x + y \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} x + y & y \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\,(yx + y^2 - yx + y^2) - \hat{\jmath}(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + xy) + \hat{k}(xy + y^2 - xy)$$

$$= \hat{\imath}\,(2y^2) - \hat{\jmath}(3xy + y^2) + \hat{k}(y^2)$$

$$= (2y^2, 3xy + y^2, y^2)\ .$$

**Ejemplo 2**

Sean $g(x,y) = ((x+y)^2, x-y)$ y $f(x,y,z) = \left(e^{x+y}, \frac{1}{z}\right)$ luego

$$(gof)(x,y,z) = g\big(f(x,y,z)\big)$$

$$= g\left(e^{x+y}, \frac{1}{z}\right)$$

$$= \left(\left(e^{x+y} + \frac{1}{z}\right)^2, e^{x+y} - \frac{1}{z}\right)$$

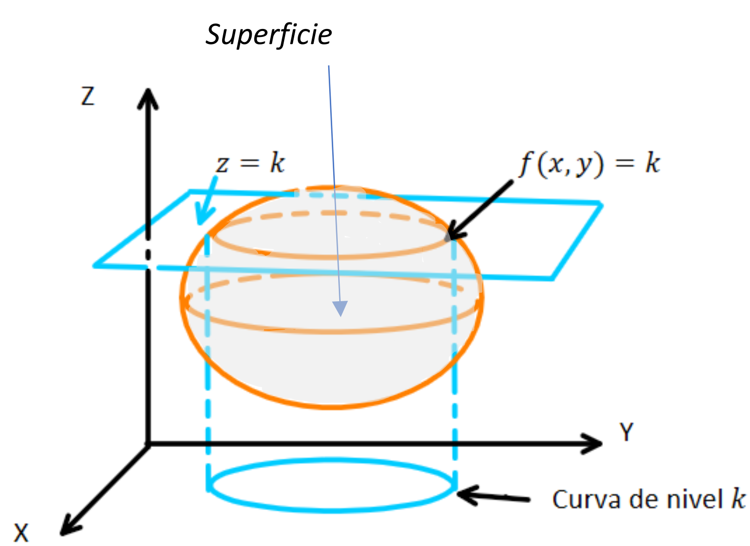
**Curvas de Nivel**

Sea $z = f(x,y)$ una superficie. Para valores de $z = k$ constante, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, determinan curvas o líneas de contorno, la proyección de esta sobre el plano XY definen las curvas de nivel.

**Definición**

Una curva de nivel $k$ es el conjunto

$$\{(x,y) \in Dom\, f / f(x,y) = k\}$$



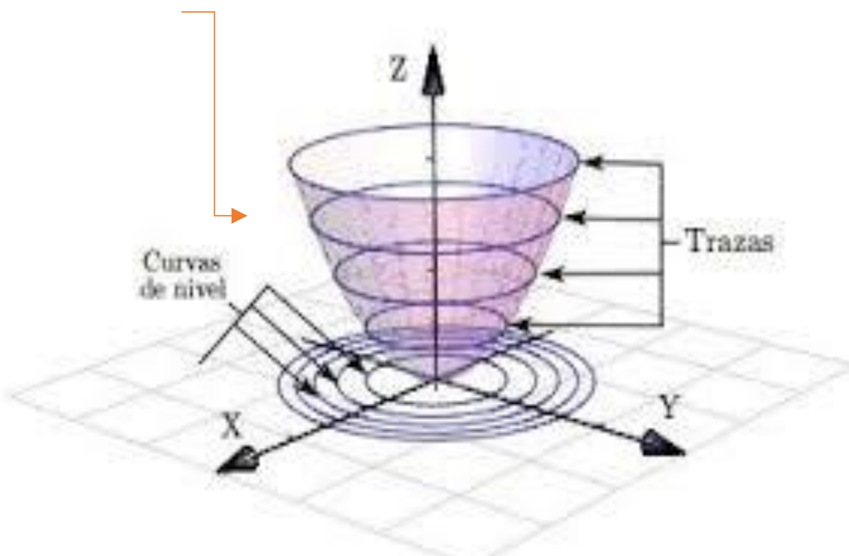
**Ejemplo**

Consideremos la función $z = x^2 + y^2$. Tomando $k > 0$, la curva de nivel correspondiente a $z = k$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = k$ y tomando $k = 0$ la curva de nivel corresponde a la descrita por los puntos $(x, y)$ tales que $x^2 + y^2 = 0$, le concierne únicamente al punto $(0,0)$ .

Para diversos $k$ tenemos diversas curvas de nivel que corresponden a circunferencias en el plano.

A continuación, mostramos la gráfica de $z = x^2 + y^2$ y las diversas curvas de nivel $k$ de la función $f$.

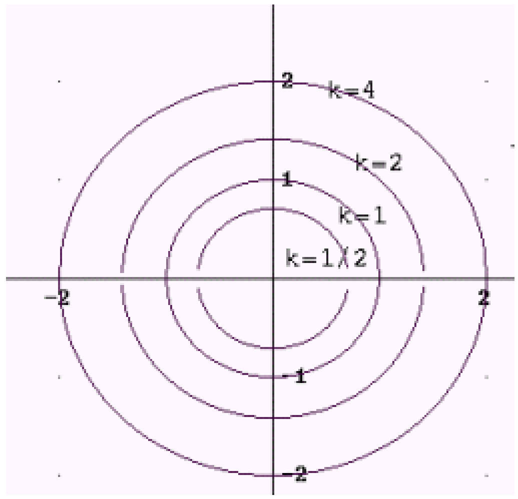
$$z = x^2 + y^2$$



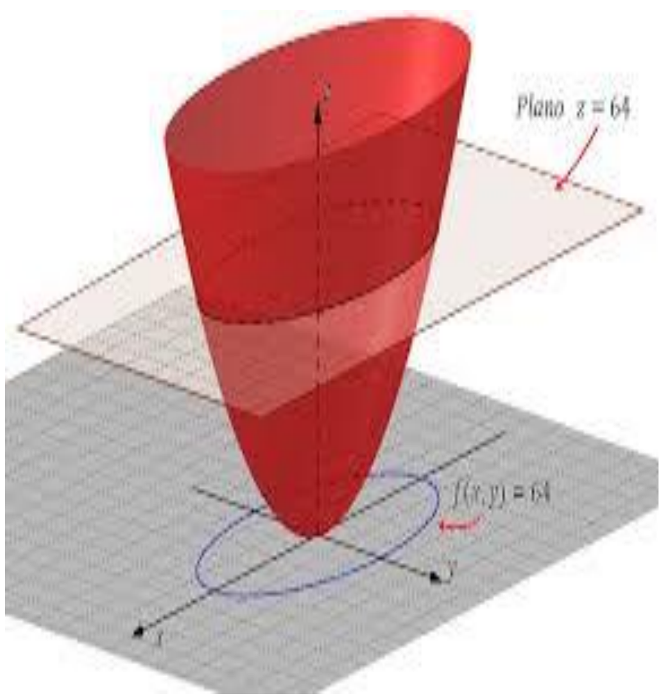

Resumiendo:

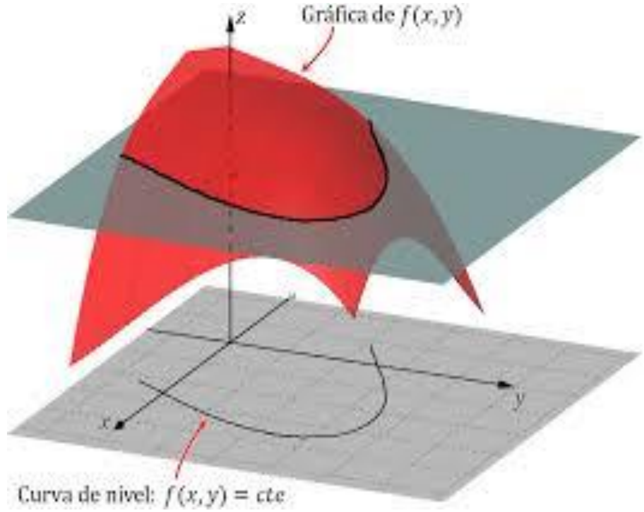
Dada una función $f$ con dominio en $\mathbb{R}^2$ y un número cualquiera $k$, la curva de nivel $k$ de la función $f$ está formada por el conjunto de puntos del plano que satisfacen $f(x, y) = k$.

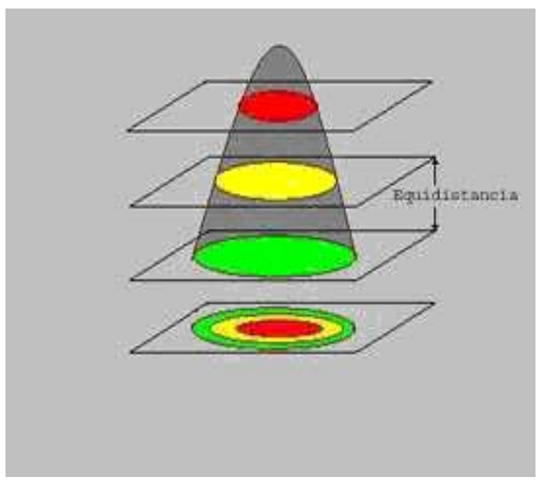
En el ejemplo tenemos las diversas curvas de nivel,

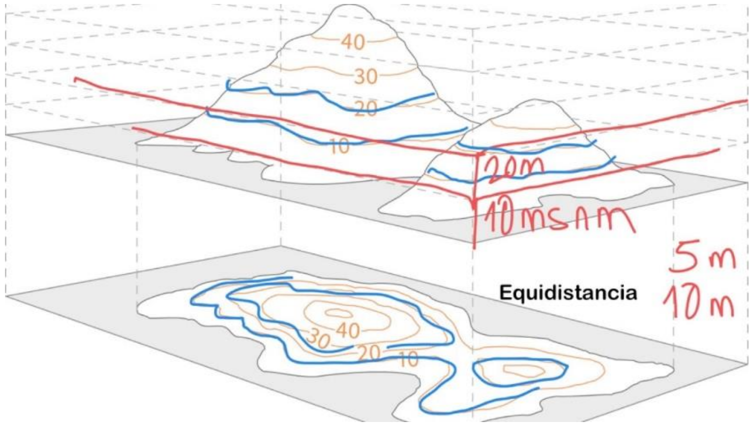



**Otros ejemplos gráficos**




z
Gráfica de $f(x, y)$
y
x
Curva de nivel: $f(x, y) = cte$


Equidistancia


40
30
20
10
20m
10msnm
5 m
Equidistancia
10 m
30
40
20
10

# Funciones escalares y vectoriales desde un punto de vista de la vida real.

## Campos escalares y vectoriales

En la realidad es natural trabajar con magnitudes escalares y vectoriales en regiones planas y en el espacio.

**Definición**

Se denomina **magnitudes** a los atributos físicos mensurables (medibles) de los objetos o de las interacciones entre ellos, tales como fuerzas, temperatura, longitud, carga eléctrica o muchas otras variables. Dependiendo de ciertas características, las magnitudes pueden ser de dos tipos: escalares y vectoriales.

**Definición**

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Un campo escalar es una función real de varias variables en la que a cada punto de su dominio se le asigna el valor que toma una determinada magnitud escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un campo vectorial es una función vectorial de varias variables en la que a cada punto de su dominio se le asigna el vector correspondiente a una determinada magnitud vectorial que actúa sobre dicho punto.

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Los conceptos anteriores tienen sentido físico para $n = 2\ y\ 3$. En efecto veremos a continuación algunos ejemplos de campos escalares y vectoriales

**Ejemplos**

1.- Campos escalares: Se describe completamente usando un número y una unidad

Masa: 25 kg (cantidad de materia de un cuerpo)

distancia: 20 $m$ (longitud)

Temperatura: $30°c$ (calor)

rapidez: 60 m/s (indica que tan deprisa se mueve un objeto)

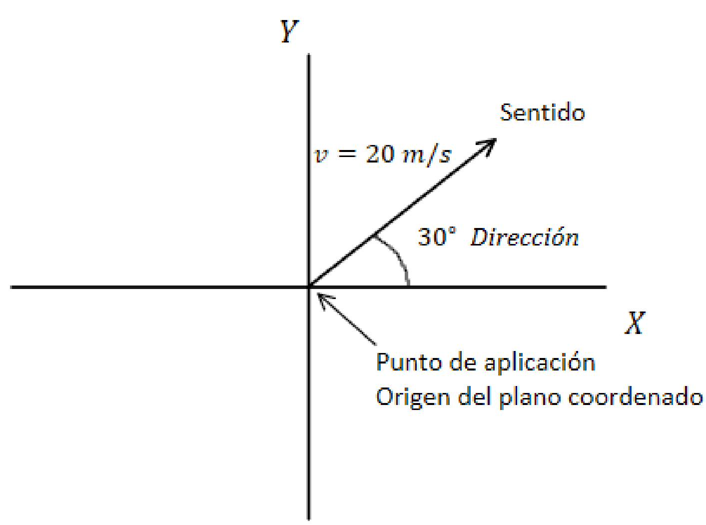
Área: 20 $m^2$ (superficie que ocupa un recinto u objeto)

Volumen: 25 $m^3$ (espacio tridimensional ocupado por un cuerpo)

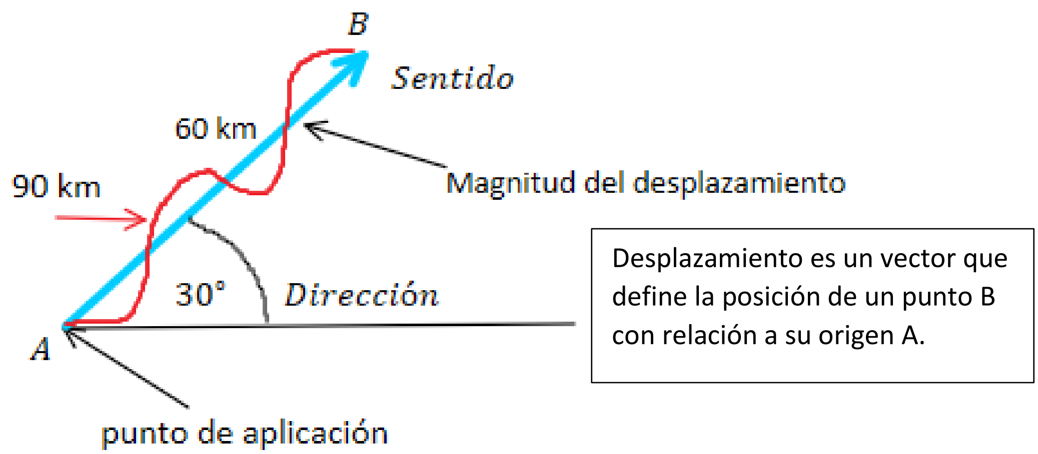
Densidad: $20\ Kg/m^3$ (relación existente entre la masa de un cuerpo y el volumen que este ocupa)

2.- Campos vectoriales: Se representa mediante vectores los cuales tiene punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido.

i) Velocidad: es un vector que Indica que tan de prisa se mueve un objeto y en que dirección y sentido lo hace.



ii) Desplazamiento: Un vehículo que viaja desde la ciudad $A$ a la ciudad $B$ recorrerá una distancia de 90Km (magnitud escalar) pero tendrá un desplazamiento de 60 Km (magnitud vectorial)




Observe que  La curva en rojo es una magnitud escalar (distancia)

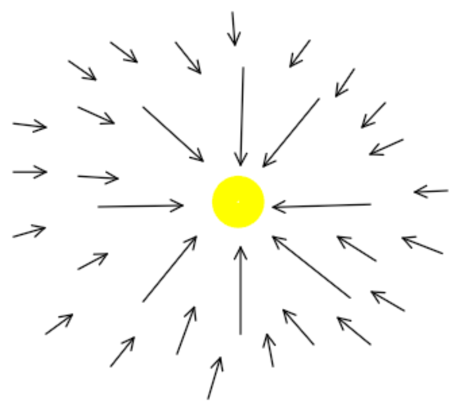
La línea en celeste es una magnitud vectorial (desplazamiento)

ii) **La Aceleración** también es una magnitud vectorial que indica la variación de la velocidad por unidad de tiempo. Una aceleración siempre posee una dirección y un sentido, no es lo mismo acelerar positivamente (ir cada vez más rápido) que frenar. La diferencia se expresa con un cambio de sentido en el vector aceleración.

iii) Los campos vectoriales son usados para describir la atracción gravitacional del sol, por ejemplo, definimos un campo de vectores fuerza, asociando a cada punto del espacio el vector que es igual a la fuerza gravitacional que el sol ejercer sobre un objeto de masa compacta.

La siguiente figura es un trazado de la parte de este campo vectorial que corresponde a los puntos en un plano que pasa por el centro del sol.

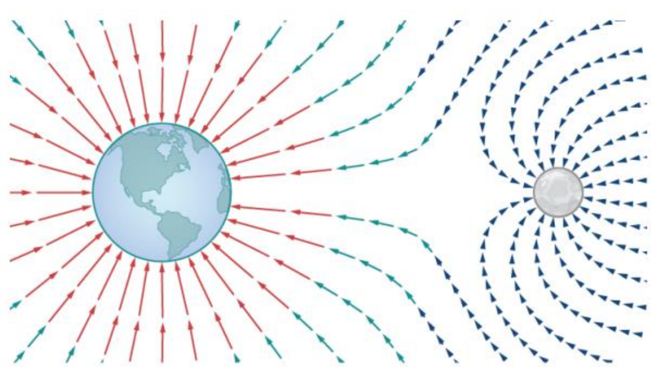
Podemos imaginar que existe un vector en cada punto. Todos estos puntos son dirigidos para el centro del sol, porque ese es el sentido de la fuerza. Los vectores son más alargados próximos del sol, porque ahí la fuerza es mayor.



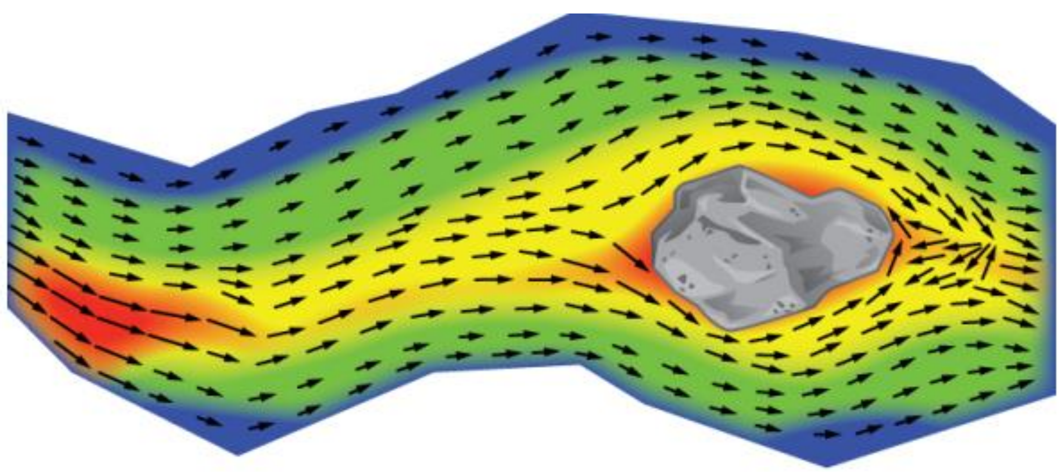
Campo gravitacional del sol

iv) La siguiente figura muestra un campo gravitacional ejercido por dos objetos astronómicos, como una estrella y un planeta o un planeta y una luna. En cualquier punto de la figura, el vector asociado con un punto proporciona la fuerza gravitacional neta ejercida por los dos objetos sobre un objeto de unidad de masa. Los vectores de mayor magnitud en la figura son los vectores más cercanos al objeto más grande. El objeto más grande tiene mayor masa, por lo que ejerce una fuerza gravitacional de mayor magnitud que el objeto más pequeño.

*Fuerza gravitacional*



v) El ejemplo siguiente muestra la velocidad del agua de un río en puntos de su superficie. El vector asociado con un punto dado en la superficie del río da la velocidad del agua en ese punto. Observe que los vectores cercanos a la orilla son pequeños en magnitud, el agua fluye lentamente en esa parte de la superficie. Eso cambia en puntos cercano al centro del rio. A medida que el agua se mueve de izquierda a derecha, se encuentra con algunos rápidos alrededor de una roca. La velocidad del agua aumenta y se produce un remolino en parte de los rápidos.



v) Podemos representar gráficamente un campo vectorial en el plano mediante un conjunto de flechas, donde cada una corresponderá el vector $f(x,y)$ con origen en el punto $(x,y)$ del plano. Así, por ejemplo, representar gráficamente el campo vectorial

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y) = (-y,x)$$

Solución

Sabemos que si $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, entonces

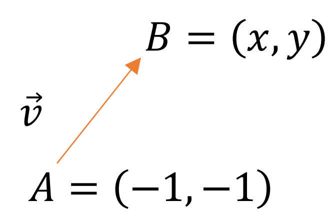
$$f(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$$

donde $f_1(x,y) = -y$ y $f_2(x,y) = x$

Evaluemos algunos puntos $(x, y)$ en la función $f(x, y) = (-y, x)$ y construimos una tabla de valores

| $(x, y)$ | $(-1, -1)$ | $(1, -1)$ | $(-1,1)$ | $(1,1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-y, x)$ | $(1, -1)$ | $(1,1)$ | $(-1, -1)$ | $(-1,1)$ |

Tomemos el primer vector resultante $(1, -1)$ y lo graficaremos tomando como origen el punto $A = (-1, -1)$ . Como $f(-1, -1) = (1, -1) = \vec{v}$ entonces sea $B = (x, y)$, luego



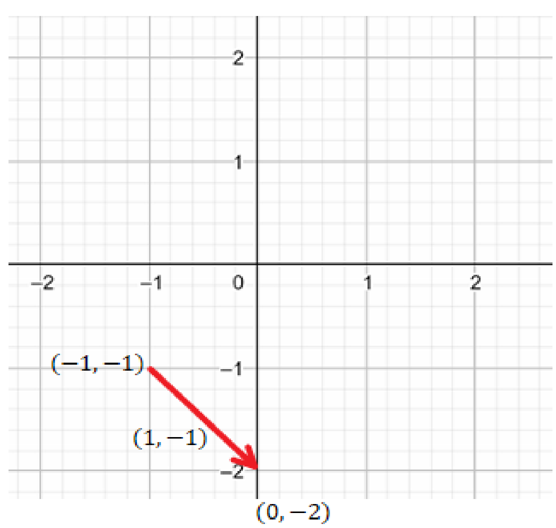

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} \Leftrightarrow B - A = \vec{v}$$

$$(x, y) - (-1, -1) = (1, -1) \Leftrightarrow (x + 1, y + 1) = (1, -1)$$

$$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$y + 1 = -1 \Rightarrow y = -2$$

Por tanto $B = (0, -2)$ y ahora tazamos el vector $\overrightarrow{AB}$



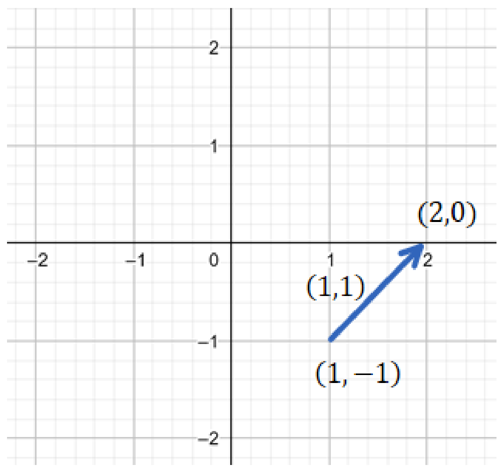
Similarmente tenemos

$$(x, y) - (1, -1) = (1,1) \Leftrightarrow (x - 1, y + 1) = (1,1)$$

$$x - 1 = 1 \ \Rightarrow x = 2$$

$$y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0$$

Luego el extremo del vector con origen el punto $(1, -1)$ es $(2,0)$

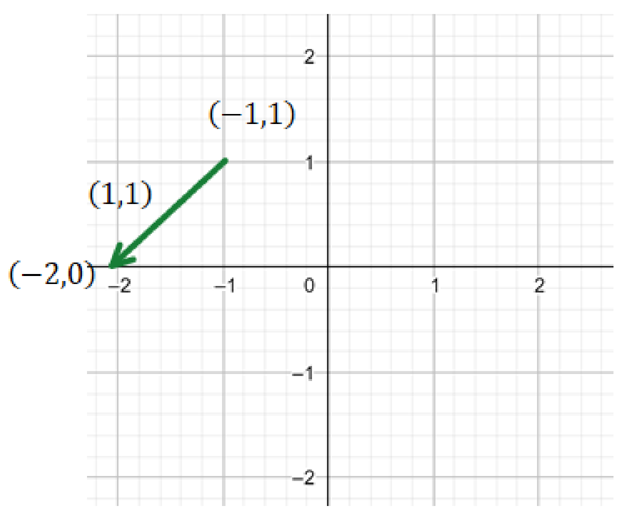



$$(x, y) - (-1,1) = (-1, -1) \Leftrightarrow (x + 1, y - 1) = (-1, -1)$$

$$x + 1 = -1 \ \Rightarrow x = -2$$

$$y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0$$

Luego el extremo del vector con origen el punto $(-1,1)$ es $(-2,0)$

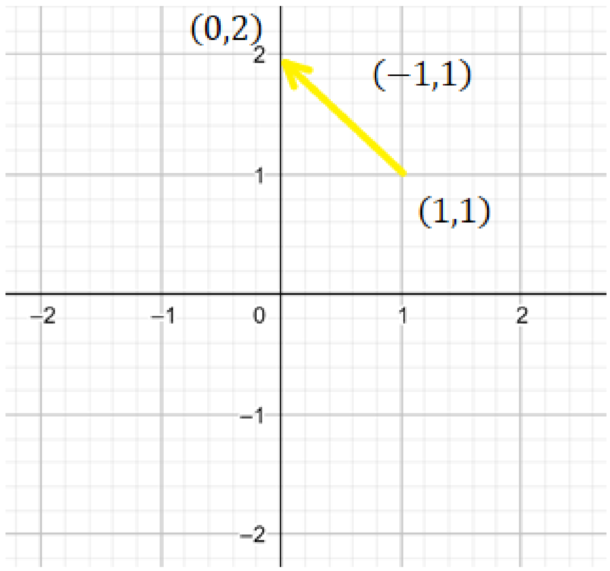


$$(x, y) - (1,1) = (-1,1) \Leftrightarrow (x - 1, y - 1) = (-1,1)$$

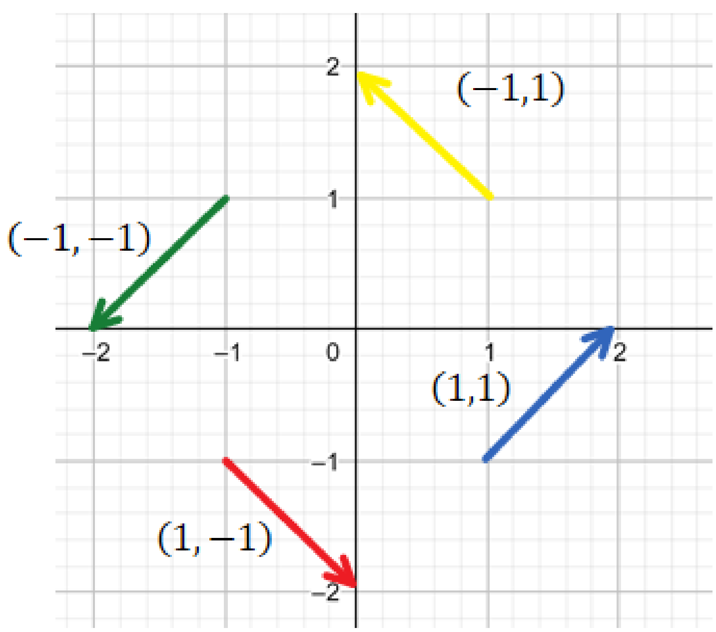
$$x - 1 = -1 \ \Rightarrow x = 0$$

$$y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$$

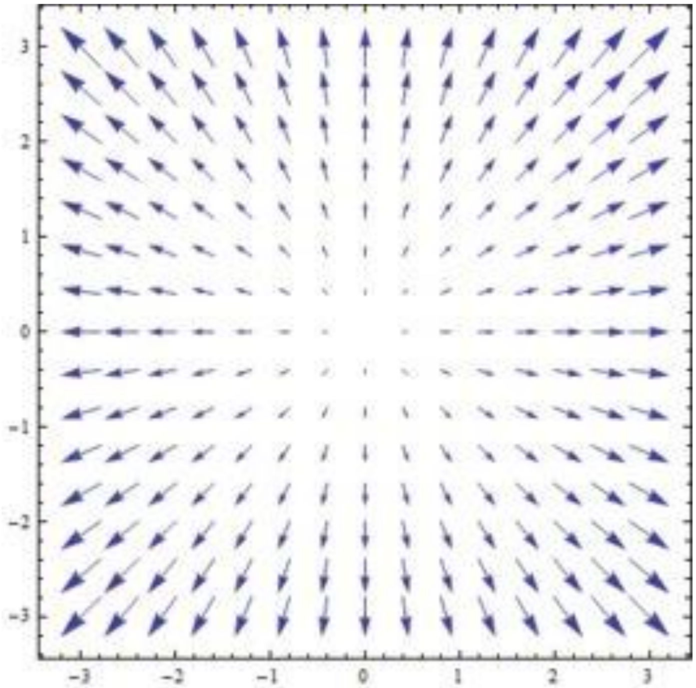
Luego el extremo del vector con origen el punto $(1,1)$ es $(0,2)$




Resumiendo



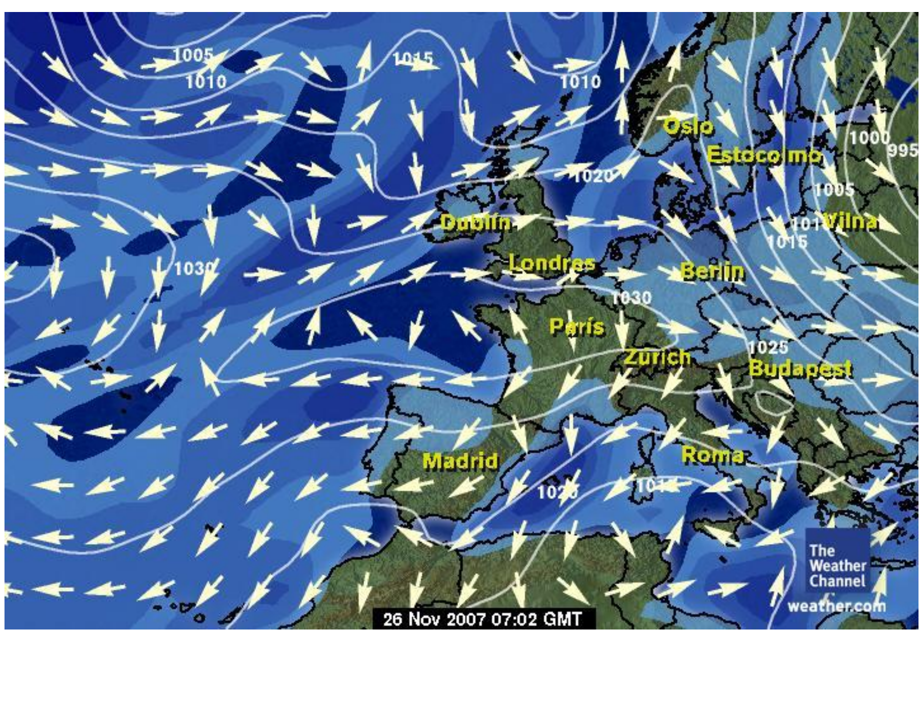
vi) Un campo vectorial en el plano




$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$f(x, y) = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right)$

vii) Un ejemplo de distribución de velocidades en el aire (lo que conocemos habitualmente como viento), donde en cada punto de la atmósfera posee tanto una intensidad como una dirección y un sentido.



Así, por ejemplo, el servicio meteorológico informa el índice de sensación térmica $I$ que refleja el efecto que ejerce la acción del viento sobre la temperatura real del aire; este índice combina, bajo determinadas condiciones, la velocidad del viento $v$ y la temperatura real $T$, mediante una función de dos variables: $I(v, T)$

viii) Un campo vectorial en el espacio