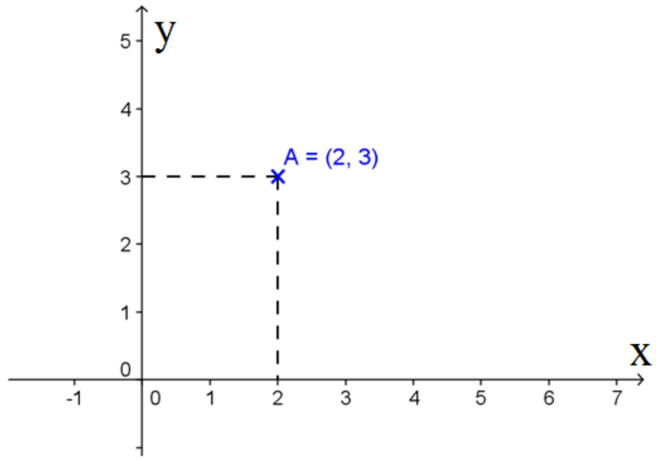
GEOMETRÍA ANALÍTICA

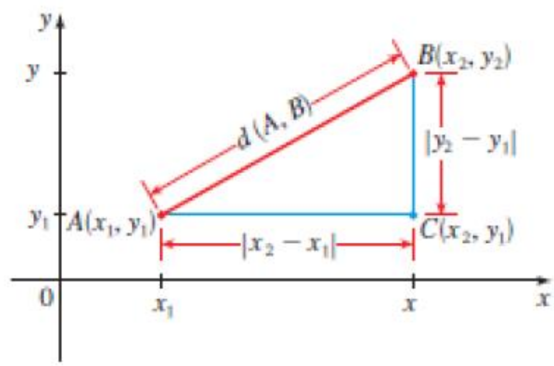
Sistemas de coordenadas



Distancia entre dos puntos

$A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ejemplo: Calcular la distancia entre los puntos $A(-1,2)$ y $B(3,5)$.

Vemos que las coordenadas de los puntos serían:

$$x_1 = -1, y_1 = 2,$$

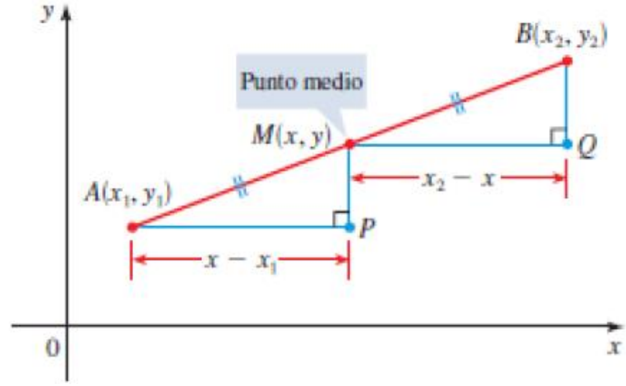
$$x_2 = 3, y_2 = 5.$$

Reemplazando en la fórmula obtenida:

$d(A, B) = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (5-2)^2} = 5$ unidades

Punto medio de un segmento

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Ejemplo: Si el segmento $\overline{AB}$ tiene extremos $A(-2,4)$ y $B(8,10)$, su punto medio M estará situado en:

$$M\left(\frac{-2+8}{2},\frac{4+10}{2}\right)$$

$$M(3,7)$$

Pendiente de la recta:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

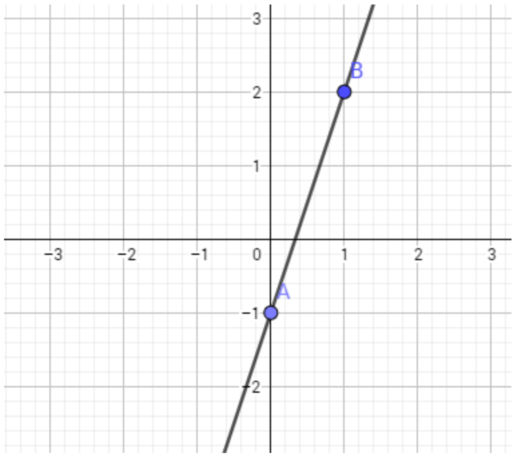
Ejemplo:

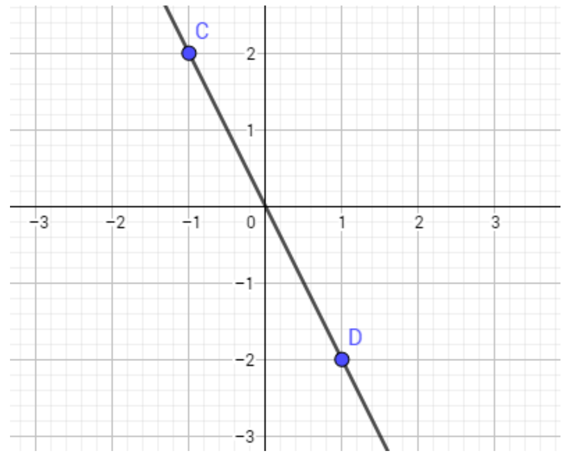
En el gráfico de la figura los puntos son A(0,-1) y B(1,2), por tanto, la pendiente de la recta es:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-1)}{1-0}=3$$

La interpretación es clara, por "cada unidad de avance hacia la derecha en el eje x", la recta AB sube"3 unidades en el eje y". Una recta como la de la figura, que sube de izquierda a derecha, tiene pendiente positiva.

$\boldsymbol{m > 0}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\boldsymbol{m < 0}$



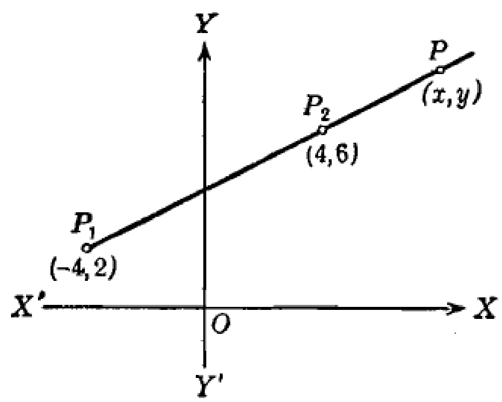


Las **rectas horizontales** tienen pendiente cero: $\boldsymbol{m = 0}$

Las **rectas verticales** no tienen definida una pendiente.

Ecuación de una recta por dos puntos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplo:

Con las coordenadas del gráfico será:

$$\frac{y - 2}{x - (-4)} = \frac{6 - 2}{4 - (-4)}$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

$$-x + 2y - 8 = 0$$

Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$

Ecuación principal o explícita de la recta: $y = mx + n$

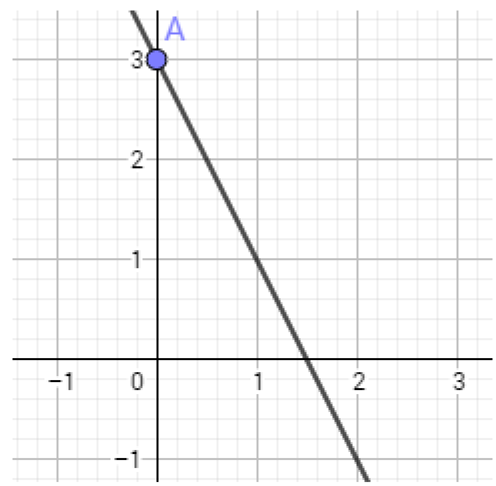
“m” es la **pendiente,**

“n” se llama **“coeficiente de posición”**

Interpretación geométrica del coeficiente de posición:

Tomemos una recta cualquiera dada por su ecuación principal

$$y = -2x + 3$$



¿Dónde intersecta esta recta al eje “y”?

Recordemos que los puntos del eje “y” tienen todos ellos $x = 0$, por tanto reemplazando,

$$y = -2 \cdot 0 + 3$$

o sea

$$y = 3$$

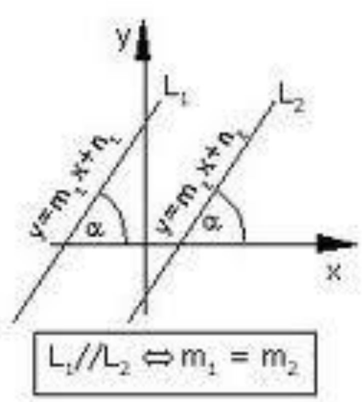
El punto de corte será (0,3) y “n” representa justamente eso, la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje “y”.

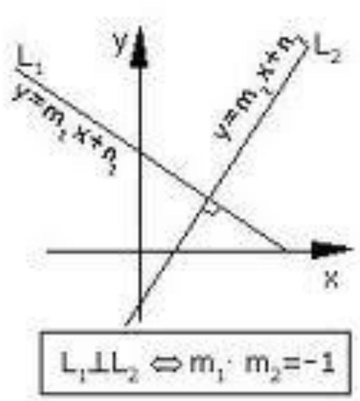
Condición de paralelismo:

$$m = m'$$

Condición de perpendicularidad:

$$m' = -\frac{1}{m}$$





Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,2) y es perpendicular a la recta

$$y = -2x + 5$$

La pendiente de la recta buscada será: $m' = \frac{1}{2}$

Reemplazando en la ecuación **punto-pendiente**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$$

se llega a: $-x + 2y + 1 = 0$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Tenemos que buscar soluciones comunes a dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathbf{2x - y = 0} \\ \mathbf{-x + 2y = 3} \end{cases}$$

Métodos: **A) analíticos**
- **1) reducción**
- **2) igualación**
- **3) sustitución**

B) gráfico
(poco práctico, útil para entender)

Método de reducción:

Vamos a resolverlo por reducción. Eliminemos x multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumándole la primera.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x - \quad y = 0 \\ -2x + 4y = 6 \\ \hline 3y = 6 \end{array}$$

o sea

$$y = 2$$

Reemplazando en alguna de las ecuaciones, $x = 1$.

Otra alternativa es volver a aplicar el método de reducción eliminando la otra incógnita.

La solución (que es única) la escribimos

$$S = \{(1, 2)\}$$

Un sistema con solución única se llama sistema determinado.

Método de igualación:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones:

$$y = 2x$$

$$y = \frac{x+3}{2}$$

Se igualan las expresiones obtenidas.

$$2x = \frac{x+3}{2}$$

Se halla x:

$$4x = x + 3$$

$$4x - x = 3$$

$$x = 1$$

Se reemplaza en alguna de las ecuaciones y se halla y:

$$y = \frac{x+3}{2}$$

$$y = \frac{1+3}{2}$$

$$S = \{(1, 2)\}$$

<u>Método de sustitución</u>:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas en una sola de las ecuaciones:

$$y = 8 - x$$

Reemplazamos esa expresión en la otra ecuación:

$$x^2 - (8 - x)^2 = 16$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$x^2 - (64 - 16x + x^2) = 16$$

$$x^2 - 64 + 16x - x^2 = 16$$

$$16x = 16 + 64$$

$$x = \frac{80}{16}$$

$$x = 5$$

Reemplazamos en la y:

$$y = 8 - 5$$

$$y = 3$$

La solución es: $S = \{(5, 3)\}$

Un nuevo punto de vista (método gráfico):

Volvamos al primero de nuestros sistemas.

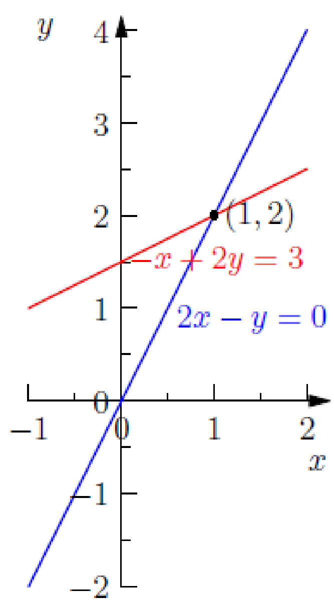
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Como sabemos de clases previas, cada una de las ecuaciones, representa una recta en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Las llamaremos la recta azul y la recta roja.

$$y = 2x \qquad\qquad y = \frac{x+3}{2}$$

x	y
0	0
1	2
2	4

x	y
0	1,5
1	2
2	2,5



Las dos rectas se intersectan en el punto de coordenadas (1, 2) que es la solución hallada antes.
En el caso de un sistema incompatible, las rectas serían paralelas.
En el caso de un sistema indeterminado, serían coincidentes, una sola recta ***"morada"*****.**

Otro ejemplo de utilización del método gráfico:

Encontrar el punto de intersección de los gráficos de las funciones f y g:

$$\begin{cases} f(x) = -x + 5 \\ g(x) = 0,5x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 0,5x + 2 \end{cases}$$

Igualamos:

$$-x + 5 = 0,5x + 2$$

$$-x - 0,5x = 2 - 5$$

$$-1,5x = -3$$

Multiplicamos por (-1):

$$1,5x = 3$$

$$x = \frac{3}{1,5} = 2$$

Si $x = 2$:

$$y = -2 + 5 = 3$$

Punto de intersección:

$$(2, 3)$$

Otras situaciones:

Ejemplo 1:

Resolvamos el siguiente sistema por reducción.

$$\begin{cases} 3x + \ y = 2 & (-2) \\ 6x + 2y = 4 & (+1) \end{cases}$$

Eliminemos x, multiplicando la primera ecuación por (-2) y sumemos la segunda,

$$\begin{array}{r} -6x - 2y = -4 \\ 6x + 2y = \ \ 4 \\ \hline 0y = \ \ 0 \end{array}$$

Cualquier número multiplicado por 0 es 0, por tanto "y" puede tomar cualquier valor. Eligiendo distintos valores de "y", obtenemos mútiples soluciones. Tomemos $y = \alpha$.

Despejando x: $x = \frac{2-\alpha}{3}$

La solución es: $S = \left\{\left(\frac{2-\alpha}{3}, \alpha\right)\right\}$

Un sistema con infinitas soluciones se llama <u>sistema indeterminado.</u>

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 3x + \ y = 2 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Realizando los mismos pasos que el anterior llegamos a:

$$0y = -4$$

Ecuación que no tiene solución. La solución la escribimos entonces:

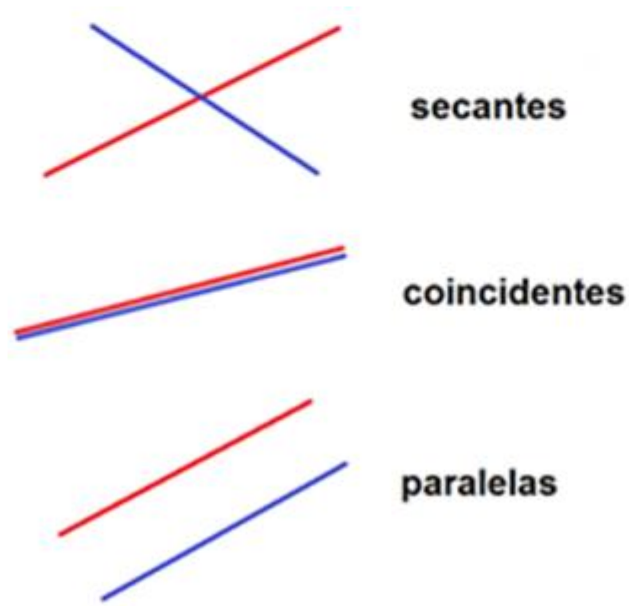
$$S = \{\ \} = \emptyset$$

Un sistema como ese, sin solución, se llama <u>sistema incompatible</u>.

En general:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

<u>Caso 1</u>: Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$



El sistema es compatible determinado, una sola solución. Las rectas se cortan en un punto. Son rectas secantes.

<u>Caso 2</u>: Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

El sistema es compatible indeterminado. Las rectas son coincidentes.

<u>Caso 3</u>: Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

El sistema es incompatible. Las rectas son paralelas no coincidentes.