Ondas y óptica: Tarea 2

Mauro Jélvez Jélvez

30/05/2024

1)

Para este problema haremos uso de las siguientes ecuaciones:

$$P(y) = P_0 - g\rho y$$

$$T(y) = T_0 cy$$

$$PV = nRT$$

$$m = nM$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Empezando de la ecuación de estado de gas ideal, la reescribiremos para quedar en términos de la densidad.

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} \rightarrow P = \frac{\rho RT}{M}$$

Si reemplazamos la temperatura que depende de la altura y:

$$P = \frac{R}{M}(T_0 - cy)\rho \rightarrow \rho(y) = \frac{MP}{R(T_0 - cy)}$$

Si reemplazamos la densidad en la ecuación hidrostática:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{MPg}{R(T_0 - cy)} \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mgdy}{R(T_0 - cy)}$$

Ahora integrando:

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{R}\int_0^y \frac{dy}{T_0 - cy}$$

Y si tomamos: $u = T_0 - cy$ y $du = -cdy$ lo que nos lleva a :

$$\ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{Rc}\ln\frac{T_0 - cy}{T_0} \rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{cy}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rc}}$$

Lo que nos lleva a:

$$P(y) = P_0\left(1 - \frac{cy}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rc}}$$

Ahora reemplazando la presión en la densidad:

$$\rho(y) = \frac{M}{R(T_0 - cy)}P_0\left(1 - \frac{cy}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rc}} = \frac{MP_0}{RT_0^{\frac{Mg}{Rc}}}(T_0 - cy)^{\frac{Mg}{Rc}-1} = \frac{MP_0}{RT_0}\left[\frac{1}{T_0^{\frac{Mg-Rc}{Rc}}}(T_0 - cy)^{\frac{Mg-Rc}{Rc}}\right] = \frac{MP_0}{RT_0}\left(1 - \frac{cy}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rc}-1}$$

$$\rho(y) = \rho_0\left(1 - \frac{cy}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rc}-1}$$

Reemplazando ese término en la presión, Para la velocidad tendremos $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}}$, lo que nos lleva a:

$$c = \sqrt{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{P_0}{T_0\rho_0}\rho\right)(T_0 - cy)} = \sqrt{\left(\frac{P_0}{T_0\rho_0}\right)(T_0 - cy)} = \sqrt{\frac{c_0^2}{T_0}(T_0 - cy)}$$

Donde c_0 es la velocidad del sonido al nivel del mar:

$$c = c_0\sqrt{1 - \frac{cy}{T_0}}$$

Podemos ver que la velocidad del sonido decrece linealmente debido a que la temperatura igual decrece.

2)

Para ondas estacionarias en tubo de extremos abiertos:

$$y_n(x,t) = A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \phi_n)$$

I) Longitud L

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Lo que nos lleva a que sus modos normales:

$$y_L(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi c}{L}t)$$

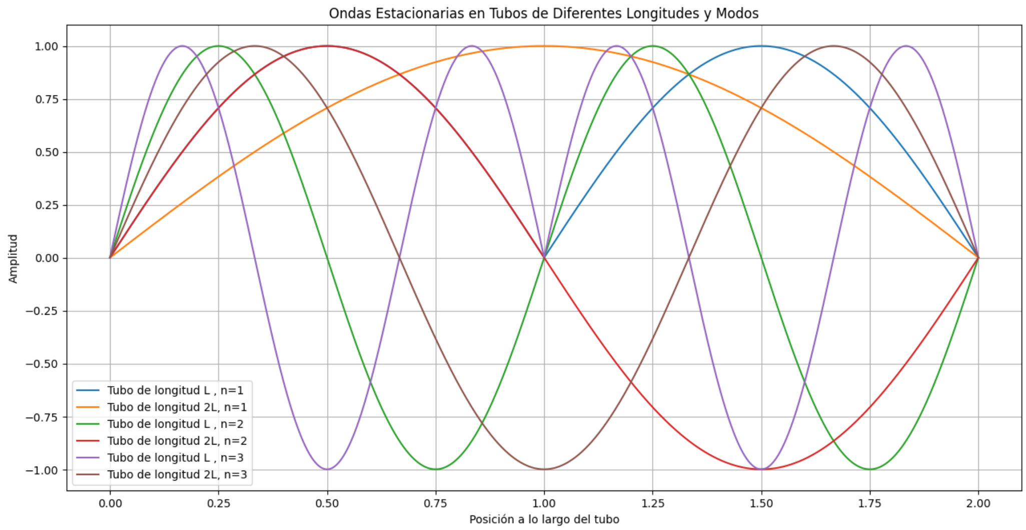
Donde cada n, es un modo normal para la cuerda de longitud L

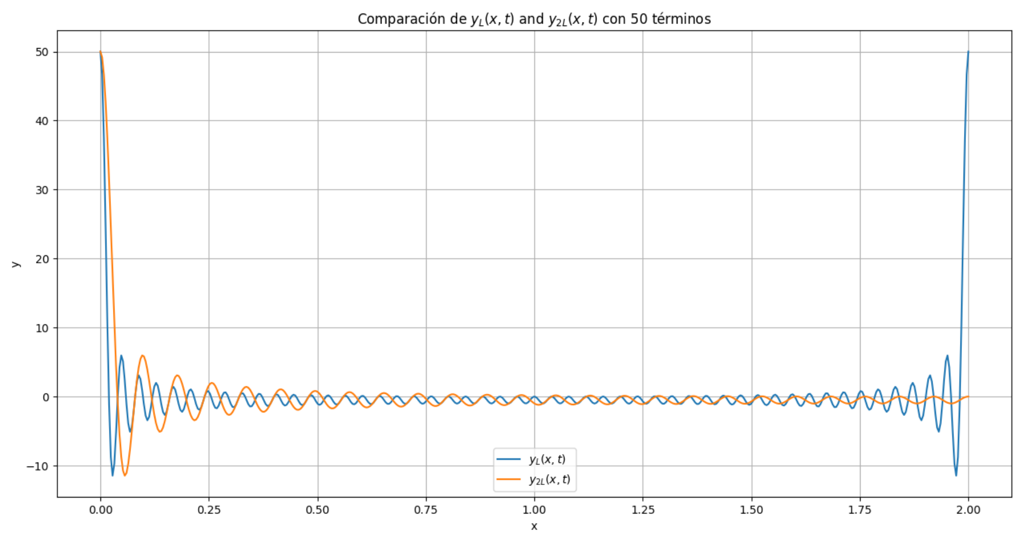
II) Longitud 2L

$$\lambda'_n = \frac{4L}{n}$$
$$\omega'_n = \frac{n\pi c}{2L}$$
$$k'_n = \frac{n\pi}{2L}$$

Ahora, los modos normales para cuerda de largo $2L$:

$$y_{2L}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\frac{m\pi}{2L}x - \frac{m\pi c}{2L}t)$$





3)

Si sabemos que:

$$v(r) = \frac{H}{r} = \frac{dr}{dt}$$

Por lo que tendremos:

$$rdr = Hdt$$

Integrando ambos lados:

$$\int rdr = \int Hdt \rightarrow \frac{r^2}{2} = Ht + C$$

Si sabemos que se empezó a expandir en $t = 0$, el desplazamiento también es $0 \rightarrow r = 0$

$$C = 0$$

Por lo que tendremos:

$$\frac{r^2}{2} = Ht \rightarrow r^2 = 2Ht$$

$$r(t) = \sqrt{2Ht}$$

Ahora para encontrar $v(t)$ derivaremos la posición con respecto al tiempo.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2Ht}) \rightarrow v(t) = \frac{1}{2\sqrt{2Ht}}2H$$

Finalmente obteniendo:

$$v(t) = \frac{H}{\sqrt{2Ht}}$$

Ahora para calcular la longitud de onda percibida usaremos efecto Doppler con emisor alejándose y receptor estático.

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{H}{c\sqrt{2Ht}}\right)$$

Donde c es la velocidad de la luz ya que es un pulso de radiación.

4)

Proponemos una solución de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left[A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct)\right]$$

Si tenemos como condiciones inciales:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{x^2}{L} - x$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

Podemos concluir que $A_n = 0, \forall n$, por lo que se reduce a:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin(k_n x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{x^2}{L} - x\right)\sin(k_n x)dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^L \frac{x^2}{L}\sin(k_n x)dx - \int_0^L x\sin(k_n x)dx\right]$$

$$B_n = \frac{2}{L}\left[\frac{-k_n L\cos(k_n L) + \sin(kL)}{Lk_n^2} + \frac{-2(2 - k_n^2 L^2)\cos(k_n L) - 2k_n L\sin(k_n L)}{k^3}\right]$$

$$B_n = \frac{2}{k_n^3 L^2}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)$$

Por lo que tendremos:

$$u(x,t) = \frac{2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)}{k_n^3}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)$$

Y si sabemos que $P_\epsilon = -c^2\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)}{k_n^2}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)$$

Reemplazando esta expresión en P_ϵ:

$$P_\epsilon = -c^2\rho_0 \left[\frac{2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)}{k_n^2}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)\right]$$

Reordenando obtenemos:

$$P_\epsilon = -\frac{2c^2\rho_0}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)}{k_n^2}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)$$

Ahora si consideramos un gas ideal que se mantiene a temperatura constante al estar en un tubo cerrado.

$$P_\epsilon = -\frac{2RT\rho_0}{ML^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)}{k_n^2}\left(2\cos(k_n L) + k_n L\sin(k_n L) - 2\right)$$

5)

Si tenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial P_\epsilon}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Y la variación de presión:

$$P_\epsilon = -c^2\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}$$

Si derivamos la euación de variación de presión con respecto a t y por conmutatividad de las derivadas podemos escribir:

$$\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Igualando los factores $\left(-\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)$

$$\partial x\left(\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t}\right)\frac{1}{c^2} = \partial t\left(\frac{\partial P_\epsilon}{\partial x}\right)$$

Lo que nos lleva a la ecuación de onda para la presión:

$$\frac{\partial^2 P_\epsilon}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 P_\epsilon}{\partial x^2}$$

Usando la ecuación obtenida anteriormente:

$$\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Podemos reescribirla de la forma:

$$\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

Y multiplicando por P_ϵ ambos lados, nos queda la primera relación:

$$\frac{P_\epsilon}{\rho_0 c^2}\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t} = -P_\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

Si tomamos la energía por unidad de volumen: $\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ y tomamos su derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = \rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ahora usando la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = -\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial P_\epsilon}{\partial x}$$

Lo cual es la segunda relación. Para obtener la tercera solo debemos sumar la primera y segunda expresión:
Para eso primero reescribiremos la primera relación:

$$\frac{P_\epsilon}{\rho_0 c^2}\frac{\partial P_\epsilon}{\partial t} = -P_\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_\epsilon^2}{2\rho_0 c^2}\right) = -P_\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

Ahora sumándolas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P_\epsilon^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = -P_\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial P_\epsilon}{\partial x}$$

Tendremos que la parte derecha de la ecuación no es nada más que la derivada del producto con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P_\epsilon^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P_\epsilon\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Los cual nos da la tercera relación.

Tendremos que el término de la derecha describe la tasa a la que la energía sonora está siendo transportada a través del medio.

6)

Si tenemos la siguiente solución propuesta:

$$\Phi(z,t) = F(z)\cos(kz-\omega t)$$

Y las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=-h} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=0} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}|_{z=0}$$

Ahora calcularemos sus respectivas derivadas que nos serán útiles:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = F'\cos(kz-\omega t) - Fk\sin(kz-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = F''\cos(kz-\omega t) - 2kF'\sin(kz-\omega t) - Fk^2\cos(kz-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = F\omega^2\cos(kz-\omega t)$$

Ahora utilizaremos la condición $z=-h$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=-h} = F'(-h)\cos(-kh-\omega t) - F(-h)k\sin(-kh-\omega t) = F'(-h)\cos(kh+\omega t) + F(-h)k\sin(kh+\omega t) = 0$$

$$F'(-h)\cos(+kh+\omega t) + F(-h)k\sin(kh\omega t) = 0 \tag{1}$$

La cual será nuestra primera relación, ahora aplicaremos la condición $z=0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=0} = F'(0)\cos(\omega t) + F(0)k\sin(\omega t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}|_{z=0} = -\frac{1}{g}F(0)\omega^2\cos(\omega t)$$

Obteniendo la segunda relación:

$$F'(0)\cos(\omega t) + F(0)k\sin(\omega t) = -\frac{1}{g}F(0)\omega^2\cos(\omega t) \tag{2}$$

Si sabemos que F sólo depende de z, podemos considerar $t = 0$, quedándonos de la siguiente forma nuestras relaciones:

$$F'(0) = -\frac{1}{g}F(0)\omega^2 \tag{3}$$

$$F'(-h)\cos(+kh) + F(-h)k\sin(kh) = 0 \tag{4}$$

Ahora haremos uso de la ecuación de Laplace, que al tener solamente coordenada en z, tendremos: $\bigtriangledown^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = F''\cos(kz - \omega t) - 2kF'\sin(kz - \omega t) - Fk^2\cos(kz - \omega t) = 0$$

La ecuación $\bigtriangledown^2\Phi = 0$ implica que sólo el término que depende de z debe ser cero, obteniendo:

$$F'' - k^2 = 0$$

La cual tendrá las soluciones reales:

$$D_+ = k$$

$$D_- = -k$$

Por lo cual tendremos la siguiente solución general para $F(z)$

$$F(z) = c_1e^{kz} + c_2e^{-kz}$$

Y tomando su derivada:

$$F'(z) = c_1ke^{kz} - c_2ke^{-kz}$$

Ahora haremos uso de las condiciones de contorno, primero usaremos $z = 0$, para reemplazar las expresiones de F en (3)

$$F(0) = c_1 + c_2$$

$$F'(0) = k(c_1 - c_2)$$

Reemplazando en (3), obtenemos:

$$k(c_1 - c_2) = -\frac{\omega^2}{g}(c_1 + c_2) \rightarrow$$

Despejando c_1:

$$c_1 = c_2\left(\frac{k - \frac{\omega^2}{g}}{k + \frac{\omega^2}{g}}\right) \tag{5}$$

Ahora haciendo el mismo procedimiento para $z = -h$:

$$F(-h) = c_1e^{-kh} + c_2e^{kh}$$

$$F'(-h) = c_1ke^{-kh} - c_2ke^{kh}$$

Reemplazando en (4), obtendremos:

$$c_1 = c_2\left(\frac{ke^{kh}\cos kh - e^{kh}\sin kh}{ke^{-kh}\cos kh + e^{-kh}\sin kh}\right) \tag{6}$$

Igualando las ecuaciones (5) y (6), obtendremos:

$$\frac{ke^{kh}\cos kh - e^{kh}\sin kh}{ke^{-kh}\cos kh + e^{-kh}\sin kh} = \frac{k - \frac{\omega^2}{g}}{k + \frac{\omega^2}{g}}$$

Haciendo el respectivo álgebra llegamos a:

$$\frac{\omega^2}{g}\cos kh = \sin kh \to \omega^2 = g\tan kh$$

Y de aquí obtendremos nuestra relación de dispersión:

$$\omega(k) = \sqrt{g\tan kh}$$

Ahora nos iremos al caso extremo en que

$$kh >> 1$$

Para lo que haremos la aproximación:

$$\tan kh \approx kh$$

Velocidad de Fase

Sabemos que:

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} \approx \frac{\sqrt{gkh}}{k}$$
$$v_{ph} \approx \sqrt{gh}$$

Velocidad de Grupo

Sabemos que:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{1}{2}\frac{gk}{\sqrt{gkh}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gk}{h}}$$
$$v_g \approx \frac{1}{2}\sqrt{gk}$$