— Pauta Prueba Recuperativa —

Universidad de Valparaíso CHILE

Prueba Recuperativa
Mecánica Intermedia
Licenciatura en Física - 2023[1]

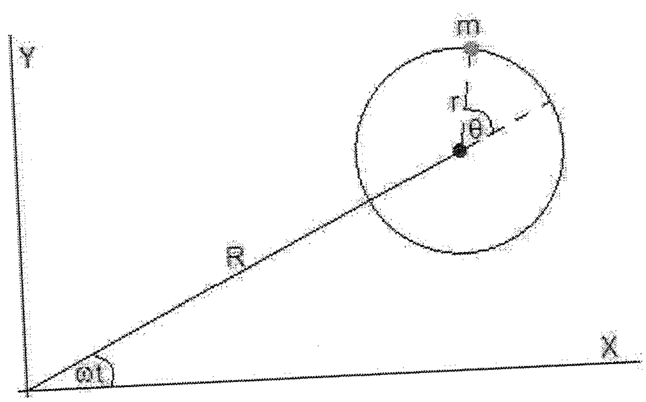
Nombre completo : ....

Puntaje obtenido / Puntaje total : $\frac{}{250}$

Nota final :

Problema I : Lagrangiano y algo más

El centro de un aro de radio r se desplaza con velocidad angular ω constante describiendo una trayectoria circular de radio R en el plano horizontal. Una partícula de masa m puede deslizar sin rozamiento a lo largo del aro:

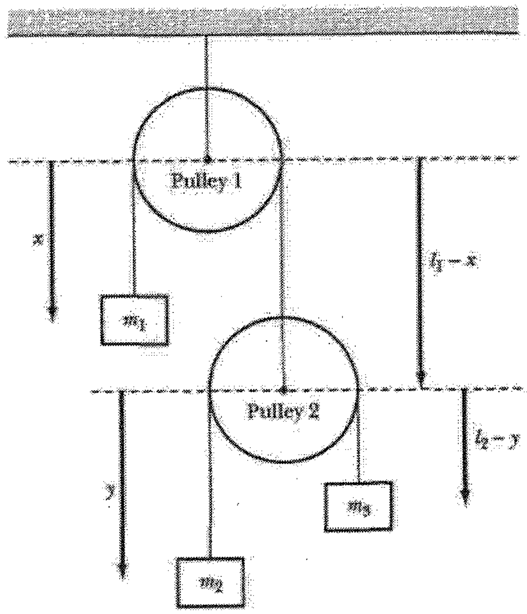


1. **(15 ptos.)** Halle el vector posición de la partícula en términos de θ.
2. **(15 ptos.)** Halle el vector velocidad de la partícula en términos de θ. ¿Cuál es su módulo?.
3. **(25 ptos.)** Escriba la energía cinética de la partícula.
4. **(10 ptos.)** Escriba el lagrangiano para este sistema.
5. **(10 ptos.)** Halle la ecuación de movimiento.
6. **(15 ptos.)** ¿Existe alguna posición de equilibrio θ_0 para m?.
7. **(10 ptos.)** ¿Cuál es el periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio?.

[1]Hora de INICIO: 12:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 13:30 hrs.

Problema II : Lagrangiano y Hamiltoniano

Consideremos el siguiente sistema mecánico formado por los bloques de masas m_1, m_2 y m_3. Los bloques de masas m_2 y m_3 forman una máquina de Atwood pero la polea de masa despreciable no es fija sino móvil. Esta polea forma parte de otra máquina de Atwood con la masa m_1, la polea superior de masa despreciable es fija.



donde l_1 y l_2 son las longitudes de las cuerdas. A partir de la figura y de las variables presentadas:

1. **(20 ptos.)** Determine la energía potencial, la cinética y el lagrangiano del sistema.
2. **(15 ptos.)** ¿Qué cantidades físicas se conservan en este sistema?. Argumente.
3. **(20 ptos.)** Halle las ecuaciones de movimiento.
4. **(20 ptos.)** Escriba matricialmente la ecuación que permite hallar las aceleraciones. ¿Estas son constantes o variables?.

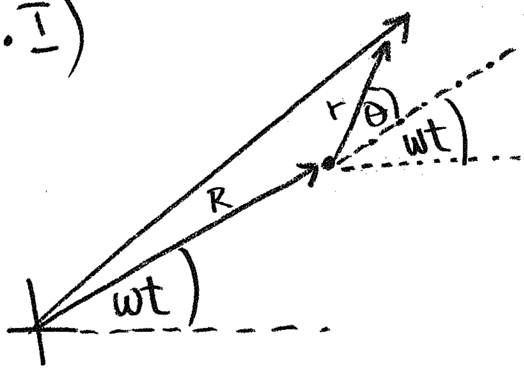
Problema III : Fuerzas centrales

Una partícula de masa m se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza $F(r) = Ar^{\alpha-1}$ dirigida hacia el origen; A y α son constantes positivas. Se conoce que la energía potencial es cero en el origen.

1. **(20 ptos.)** Halle la energía potencial. ¿Qué condición debe cumplir α?.
2. **(15 ptos.)** Encuentre el lagrangiano.
3. **(10 ptos.)** Halle la ecuación de movimiento de cada coordenada independiente.
4. **(10 ptos.)** ¿Cuáles son las constantes de movimiento?.
5. **(20 ptos.)** Reescriba el lagrangiano en función solo de la coordenada radial.

Probl. I)

1) 15/



$$\vec{r} = \left[R\cos(wt) + r\cos(wt+\theta)\right]\hat{\imath} + \left[R\,\text{sen}(wt) + r\,\text{sen}(wt+\theta)\right]\hat{\jmath}$$

2) 15/

v) $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[-Rw\,\text{sen}(wt) - r(w+\dot{\theta})\,\text{sen}(wt+\theta)\right]\hat{\imath} + \left[Rw\cos(wt) + r(w+\dot{\theta})\cos(wt+\theta)\right]\hat{\jmath}$$

$$\Downarrow$$

3) 25/

$$|\vec{v}|^2 = R^2w^2 + r^2(w+\dot{\theta})^2 + 2Rr\,w(w+\dot{\theta}) \cdot \left[\text{sen}(wt)\,\text{sen}(wt+\theta) + \cos(wt)\cos(wt+\theta)\right]$$

Obs. $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$$\Downarrow$$

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = R^2 w^2 + r^2(w+\dot{\theta})^2 + 2Rr\,w(w+\dot{\theta})\cos\theta$$

$\therefore$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 w^2 + \frac{1}{2} m r^2 (w+\dot{\theta})^2$$

$$+ mRr\,w(w+\dot{\theta})\cos\theta$$

4) $L = T - \cancel{V}^{\,0}$

10/

5) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2(w+\dot{\theta}) + Rr w \cos\theta \cdot m$$

10/

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} - Rrw\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -Rrw(w+\dot{\theta})m\,\mathrm{sen}\,\theta = -m\left(Rrw^2\,\mathrm{sen}\,\theta + Rrw\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Finalmente: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$mr^2\ddot{\theta} + mRrw^2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{R}{r} w^2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

I.3

6) θ equilibrio $\Longrightarrow$ $\ddot{\theta} = 0$ $\quad \dot{\theta} = 0$

15/

$\therefore$ de la ec. de movimiento $\theta_{equilibrio} = 0$.

7) Luego a pequeña oscilación (una vez que a llegado a equilibrio) la frecuencia natural es

NO/

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R}{r}}\ \omega$$

Probl. II)

1) 20/ $V = -m_1 g x - m_2 g(l_1 - x + y) - m_3 g(l_1 - x + l_2 - y)$

$$= -(m_1 - m_2 - m_3) g x - (m_2 - m_3) g y$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{x} - \dot{y})^2$$

luego $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2$$

$$+ (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} + (m_1 - m_2 - m_3) x + (m_2 - m_3) y$$

$$+ \text{ctes.}$$

2) 15/ "x" y "y" no son variables cíclicas, ∴ $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ y $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ no son ctes. de movimiento. Si se conserva E. //

$\underline{\text{II.2}}$

3) 20/ $\underline{\text{para } x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_3-m_2)\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = +(m_1-m_2-m_3)g$$

$$\Downarrow$$

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_3-m_2)\ddot{y} = (m_1-m_2-m_3)g \quad //$$

$\underline{\text{para } y}$ (análogamente)

$$(m_2+m_3)\ddot{y} + (m_3-m_2)\ddot{x} = (m_2-m_3)g \quad //$$

4) 20/

$$\begin{pmatrix} m_1+m_2+m_3 & m_3-m_2 \\ m_3-m_2 & m_2+m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1-m_2-m_3)g \\ (m_2-m_3)g \end{pmatrix} \quad //$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1+m_2+m_3 & m_3-m_2 \\ m_3-m_2 & m_2+m_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} (m_1-m_2-m_3)g \\ (m_2-m_3)g \end{pmatrix} \quad //$$

Probl. III)

III. 1

1) $V(r) - \cancel{V(0)}^{0} = -\int_0^r \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = +\int_r^0 A r^{\alpha-1}\, dr$ — radial hacia el centro

20

$$V(r) = \int_0^r A r^{\alpha-1}\, dr = A\frac{r^\alpha}{\alpha}\Big|_0^r = A\frac{r^\alpha}{\alpha}.$$

$\alpha > 0$ para que $V(r)$ esté definido;

luego:

$$V(r) = A\frac{r^\alpha}{\alpha}$$

2) 15

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - A\frac{r^\alpha}{\alpha}$$

3) 10

para r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = -A\cancel{\alpha}\frac{r^{\alpha-1}}{\cancel{\alpha}} + mr\dot{\theta}^2$$

$\Downarrow$

$$m\ddot{r} + A r^{\alpha-1} - mr\dot{\theta}^2 = 0$$

para θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot\theta\right) = 0 \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\right)$$

4) $\circledast$ $H = cte. \Leftarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

10/

$$\Downarrow$$

$$H = E = cte.$$

$\circledast$ $\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \Pi_\theta = l = m r^2 \dot\theta = cte.$ (Momentum angular)

5) $l^2 = m^2 r^4 \dot\theta^2 \Rightarrow r^2 \dot\theta^2 = \frac{l^2}{m^2 r^2}$

20/

$$\therefore \; L = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m r^2} - \frac{A r^\alpha}{\alpha} \;//$$