TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición

Dada una función $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Si la integral:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \text{ converge, se denomina transformada de Laplace de } f(t)$$

Notación:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{R}$ constante y $f(t) = e^{at}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\
&= \left.\tfrac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } s \leq a \\ \frac{1}{s-a} & \text{si } s > a \end{cases}
\end{aligned}$$

entonces la T.L. de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = \frac{1}{s-a}$, para s $> a$ en forma inversa decimos que : $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}$.

Definición

Sea $f(t)$ una función definida en $[0, +\infty[$.

Diremos que es *continua por tramos* si es continua en todo intervalo finito $0 \leq x \leq b$ exepto por un número finito de puntos, donde tiene discontinuidades por salto.

Diremos que $f(t)$ es de *orden exponencial* si exiten $\alpha, M, t_0 \geq 0$ tales que:
para $t \geq t_0$ se cumple $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Teorema

Sea $f(t)$ una función continua por tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial entonces $\mathcal{L}\{f\}$ existe para $s > a$.

Ejemplos

- $\frac{1}{t}\,; t \geq 0$ tiene una discontinuidad infinita en 0
- $senh(t) \leq e^t ; senh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) < \frac{1}{2}e^t$
- $t^n \leq n!e^t \quad ; e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{1}{n!}t^n + ...$ con $t > 0$ entonces $\frac{1}{n!}t^n \leq e^t$
- existe t tal que $e^{t^2} > Me^{\alpha t}$, para todo $M,\ \alpha$.

Teorema (de Lerch)

Sean f y g dos funciones continuas por tramos de orden exponencial talque:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \text{ para } s > s_0$$

entonces $f(t) = g(t)$ para $t > 0$, salvo en los puntos de discontinuidad.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Dominio de definición
c , constante	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$

Teorema (linealidad)

Si existe la TL de f y g, entonces para $a, b\ \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{b\}}$$

Teorema (Primera propiedad de traslación)

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > b$, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a)}$$ o bien

$$\boxed{e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\}(t)}$$

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s-2)\\ &= \tfrac{s}{s^2+3^2}\Big|_{s=s-2}\\ &= \tfrac{s-2}{(s-2)^2+3^2}\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{s^2+6s+13}\right\}$

Usando completación de cuadrados $\frac{s+9}{s^2+6s+13}=\frac{s+9}{(s+3)^2+2^2} = \frac{s+3+6}{(s+3)^2+2^2}$

entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{s^2+6s+13}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3+6}{(s+3)^2+2^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}+\frac{6}{(s+3)^2+2^2}\right\}$

$$\begin{aligned}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+3)^2+2^2}\right\}\\ &=e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\}\\ &= e^{-3t}\cos(2t)+3e^{-3t}\text{sen}(2t)\end{aligned}$$

Teorema

Sea $f(t)$ continua por tramos y de orden exponencial, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}$$

Observación. El resultado se puede aplicar iteradamente, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\\ \mathcal{L}\{f'''(t)\}(s) &= s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}\{\text{sen}^2(at)\}$

Si $f(t) = \text{sen}^2(at)$ entonces $f'(t) = 2a\text{sen}(at)\cos(at) = a\text{sen}(2at)$, entonces :

$$a\tfrac{2a}{s^2+(2a)^2} = \mathcal{L}\{a\text{sen}(2at)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

luego, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\}$

Sea $f(t) = t\text{sen}(at)$ entonces $f'(t) = \text{sen}(at) + at\text{cos}(at)$

$$f''(t) = 2a\text{cos}(at) - a^2 t\text{sen}(at)$$

además $f(0) = f'(0) = 0$, entonces

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{2a\text{cos}(at)\} - a^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\}$

$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = 2a\frac{s}{s^2+a^2} - a^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\}$

$s^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\} + a^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\} = 2a\frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\}(s^2+a^2) = 2a\frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{t\text{sen}(at)\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

Aplicación a la resolución de edo lineales de 2º orden con coeficientes constantes.

Ejemplo

Resolver $y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$

$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{4t - 6\}$

$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 3\big[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\big] + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s}$

$\mathcal{L}\{y\}[s^2 - 3s + 2] = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s} + s$

$\mathcal{L}\{y\}[s^2 - 3s + 2] = \frac{s^3-6s+4}{s^2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s^3-6s+4}{s^2(s^2-3s+2)} = \frac{(s-2)(s^2+2s-2)}{s^2(s-2)(s-1)} = \frac{s^2+2s-2}{s^2(s-1)} \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2} \qquad /\mathcal{L}^{-1} \\
y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} \\
y &= e^t + 2t
\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver $y'' - 5y' + 4y = e^{2t} \ ; \quad y(0) = 1 \ ; \quad y'(0) = 0$

Resolución,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\
&s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 5\big[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\big] + 4\mathcal{L}\{y\} = \tfrac{1}{s-2} \\
&\mathcal{L}\{y\}[s^2 - 5s + 4] = \tfrac{1}{s-2} + s - 5 \\
&\mathcal{L}\{y\}(s-4)(s-1) = \tfrac{s^2-7s+11}{s-2} \\
&\mathcal{L}\{y\} = \tfrac{s^2-7s+11}{(s-2)(s-4)(s-1)}
\end{aligned}$$

descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \tfrac{-\frac{1}{6}}{(s-4)} + \tfrac{\frac{5}{3}}{(s-1)} + \tfrac{-\frac{1}{2}}{(s-2)} \qquad /\mathcal{L}^{-1} \\
y &= -\tfrac{1}{6}e^{4t} + \tfrac{4}{3}e^{t} - \tfrac{1}{2}e^{2t}
\end{aligned}$$

Teorema

Dada $f(t)$ una función continua por tramos de orden exponencial, se cumple que: $\quad \mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$

Observación,

usando recursivamente ésta fórmula, se tiene:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Ejemplo

Resolver: $\qquad ty'' - ty' - y = 0\,; \quad y(0) = 0 \ ; \quad y'(0) = 3$

Resolución: definimos $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ entonces :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ty''\} &= -\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\} \\
&= -\tfrac{d}{ds}(s^2Y - sy(0) - y'(0)) = -\tfrac{d}{ds}(s^2Y - 3) \\
&= -(2sY + s^2Y')
\end{aligned}$$

también: $$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ty'\} &= -\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} \\
&= -\tfrac{d}{ds}(sY - y(0)) \\
&= -(sY' + Y)
\end{aligned}$$

reemplazando en la ec.

$$ty'' - ty' - y = 0 \qquad /\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\{ty''\} - \mathcal{L}\{ty'\} - \mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$-(2sY + s^2Y') + sY' + Y - Y = 0$$

$$Y'(s - s^2) = 2sY$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{2s}{s-s^2} = \frac{-2}{s-1} \; /\int$$

$$ln(Y) = \int -\frac{2}{s-1}ds = -2ln(s-1) + c$$

$$Y = \frac{c}{(s-1)^2} \qquad /\mathcal{L}^{-1}$$

$$y = cte^t$$

como $y'(0) = 3$ entonces $ce^t + cte^t\Big|_{t=0} = 3 \;\Rightarrow c = 3$

luego: $\qquad y = 3te^t$

Funciones escalón unitario

Definición

Se define la función escalón unitario por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Observación:

Usando la función escalón unitario se pueden definir otras funciones escalón para $a \in \mathbb{R}$; $\quad u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-a < 0 \\ 1 & \text{si } t-a > 0 \end{cases}$

Así, $\quad u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}$

Ejemplos

1) Usando funciones escalón expresar la función por tramos: $f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < 4 \\ b & \text{si } t > 4 \end{cases}$

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < 4 \\ a & \text{si } t > 4 \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4 \\ b-a & \text{si } t > 4 \end{cases} = a + (b-a)u(t-4)$$

2) Definir la función: $f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < 3 \\ b & \text{si } 3 < t < 6 \\ c & \text{si } 6 < t \end{cases}$

$$f(t) = a + \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ b-a & \text{si } 3 < t < 6 \\ c-a & \text{si } 6 < t \end{cases} = a + \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ b-a & \text{si } 3 < t < 6 \\ b-a & \text{si } 6 < t \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ 0 & \text{si } 3 < t < 6 \\ c-b & \text{si } 6 < t \end{cases}$$

$$f(t) \quad = a + (b-a)\begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ 1 & \text{si } t > 3 \end{cases} + (c-b)\begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

$$= a + (b-a)u(t-3) + (c-b)u(t-6)$$

Calculemos su transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} \quad = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)dt = \int_a^{\infty} e^{-st}dt \quad = \frac{e^{-as}}{s}$$

entonces, $\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}}$

Teorema (Segundo teorema de traslación)

Sea $a > 0$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \qquad \text{o bien}$$

$$u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t)$$

Ejemplo

Calcular: $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } 0 < t \leq 2\pi \\ e^t + cos(t) & \text{si } t > 2\pi \end{cases}$

Se tiene que: $f(t) = e^t + u(t-2\pi)cos(t)$, luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{u(t-2\pi)cos(t)\} \\
&= \tfrac{1}{s-1} + \mathcal{L}\{u(t-2\pi)cos(t-2\pi)\} \\
&= \tfrac{1}{s-1} + \mathcal{L}\{u(t-2\pi)cos(t-2\pi)\} \\
&= \tfrac{1}{s-1} + e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{cos(t)\} \\
&= \tfrac{1}{s-1} + e^{-2\pi s}\ \tfrac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular: $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi s}{2}}}{1+s^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{1+s^2}\right\}\\ &= sen(t) - u(t-\tfrac{\pi}{2})\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}(t-\tfrac{\pi}{2})\\ &= sen(t) - u(t-\tfrac{\pi}{2})sen(t-\tfrac{\pi}{2})\\ &= sen(t) + u(t-\tfrac{\pi}{2})cos(t)\end{aligned}$$

Función de Impulso Unitario o Función Delta de Dirac

Para $\epsilon > 0$ definimos $\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } |t| < \epsilon \\ 0 & \text{si } |t| > \epsilon \end{cases}$

$\delta_\epsilon(t)$ es continua por tramos y se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}dt = 1$$

entonces definimos la función impulso unitario o delta de Dirac por

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

luego, $$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a \end{cases}$$

entonces, $$\begin{aligned}\delta(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(t+\epsilon)-u(t-\epsilon)}{2\epsilon}\\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(t+\epsilon)-u(t)}{2\epsilon} + \frac{u(t)-u(t-\epsilon)}{2\epsilon}\\ \delta(t) &= \tfrac{1}{2}u'(t) + \tfrac{1}{2}u'(t)\\ \delta(t) &= u'(t)\end{aligned}$$

Así entonces,

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\{u'(t)\} = s\mathcal{L}\{u(t)\} - u(0) = s\,\dfrac{1}{s} = 1$

y

$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)u(t-a)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\}e^{-as}$

y finalmente tenemos que,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}}$$

Ejemplo

Resolver $y'' + 2y' + y = \delta(t-1) \qquad ; y(0) = 2 \quad ; y'(0) = 3$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 2s - 3 + 2(s\mathcal{L}\{y\} - 2) + \mathcal{L}\{y\} = e^{-s}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 + 2s + 1) = e^{-s} + 2s + 7$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \tfrac{e^{-s}}{(s+1)^2} + \tfrac{2s}{(s+1)^2} + \tfrac{7}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \tfrac{2s+2}{(s+1)^2} + \tfrac{5}{(s+1)^2} + \tfrac{e^{-s}}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \tfrac{2}{(s+1)} + \tfrac{5}{(s+1)^2} + \tfrac{e^{-s}}{(s+1)^2} \qquad \Big/\mathcal{L}^{-1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\tfrac{2}{(s+1)}\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\tfrac{5}{(s+1)^2}\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\tfrac{e^{-s}}{(s+1)^2}\Big\}$$

$$y = 2e^{-t} + 5te^{-t} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\tfrac{e^{-s}}{(s+1)^2}\Big\}$$

$$y = 2e^{-t} + 5te^{-t} + u(t-1)[te^{-t}]\big|_{t\leftarrow t-1}$$

$$y = 2e^{-t} + 5te^{-t} + u(t-1)(t-1)e^{-t+1}$$

Ejercicio

Resolver $y'' + 4y' + 13y = f(t) \qquad ; y(0) = y'(0) = 0$

donde: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$

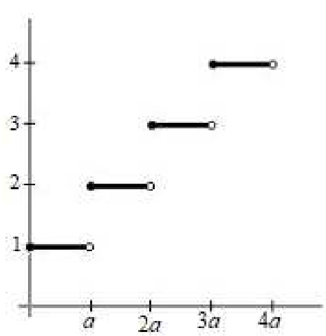
Ejercicio

Resolver $y'' - 2y' + 2y = f(t) \qquad ; y(0) = y'(0) = 0$

donde: $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \ \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \\ 2 & \text{si } \ \frac{3\pi}{2} < t \end{cases}$

Ejemplo (función escalera)

Para $f(t) = u(t) + u(t-a) + u(t-2a) + ...$



entonces,

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{u(t-ka)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kas}}{s} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-as})^k = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-as}}$

Teorema (funciones periódicas)

Si $f(t)$ es una función periódica de periódo T, dónde T es el menor real tal que: $T > 0$, $f(t+T) = f(t)$ entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)dt \underset{\substack{u = t - kT \Rightarrow du = dt \\ t = kT \Rightarrow u = 0}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(u+kT)} f(u+kT)du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T e^{-su} e^{-skT} f(u)du = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \cdot \int_0^T e^{-su} f(u)du$$

$$= \left(\int_0^T e^{-su} f(u)du \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-su} f(u)du}{1 - e^{-sT}}$$

Ejemplo Calcular: $\mathcal{L}\{|\text{sen}(at)|\}$ función periódica de período $T = \frac{\pi}{a}$

$$\mathcal{L}\{|\text{sen}(at)|\} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}} = \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)} \cdot \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} \left(- s \cdot \text{sen}(at) - a\cos(at) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{a}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)} \cdot a \frac{e^{-\frac{\pi}{a}s} + 1}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{a}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}}$$

Proposición

Si $f(t)$ es una función periódica de periódo T, dónde T es el menor real tal que: $T>0$, $f(t+T)=f(t)$ entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\mathcal{L}\{\overline{f}(t)\}}{1-e^{-Ts}}$$

donde, $\overline{f}(t)=\begin{cases} f(t) & \text{si } t<T \\ 0 & \text{si } t>T \end{cases}$

Demostración

$\mathcal{L}\{\overline{f}(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)-f(t)u(t-T)\}=\mathcal{L}\{f(t)-f(t-T)u(t-T)\}=$
$=\mathcal{L}\{f(t)\}-e^{-Ts}\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\left(1-e^{-Ts}\right)$

entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\mathcal{L}\{\overline{f}(t)\}}{1-e^{-Ts}}$$

Ejemplo Calcular $\mathcal{L}\{|\text{sen}(at)|\}$

Aquí $f(t)=|\text{sen}(at)|$,

luego $\overline{f}(t)=\begin{cases} |\text{sen}(at)| & \text{si } t<\frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{si } t>\frac{\pi}{a} \end{cases}=\begin{cases} \text{sen}(at) & \text{si } t<\frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{si } t>\frac{\pi}{a} \end{cases}$

entonces, $\overline{f}(t)=\text{sen}(at)+(0-\text{sen}(at))u\left(t-\frac{\pi}{a}\right)=\text{sen}(at)-\text{sen}(at)u\left(t-\frac{\pi}{a}\right)$

$$\mathcal{L}\{|\text{sen}(at)|\}=\frac{\mathcal{L}\left\{\text{sen}(at)-\text{sen}(at)u\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}=\frac{\mathcal{L}\left\{\text{sen}(at)+\text{sen}\left(a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right)u\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}$$

$$=\frac{\frac{a}{s^2-a^2}+e^{-s\frac{\pi}{a}}\cdot\frac{a}{s^2-a^2}}{\left(1-e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)}=\frac{\frac{a}{s^2-a^2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)}{\left(1-e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)}=\frac{a}{s^2+a^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{a}s}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}$$

Observación :

$$\mathcal{L}\{f\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g\}(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\right)$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\right) e^{-su} f(u)du\right) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-su} e^{-sv} f(u)g(v)dv\right)du$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dv\right)du = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dvdu$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \int_u^a e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu$$

$$\uparrow$$

$$t = u + v \Rightarrow dt = dv$$

$$v = 0 \Rightarrow t = u$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)g(t-u)dudt = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}$$

Definición (Producto Convolución)

Sean f y g funciones continuas por tramos para $t \geq 0$, se define el producto convolución entre f y g por:

$$(f{*}g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Se puede demostrar que:

El producto convolución es conmutativo: $f{*}g = g{*}f$

y asociativo: $f{*}(g{*}h) = (f{*}g){*}h$.

Teorema

Si f y g son funciones continuas por tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces : $\mathcal{L}\{f*g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g\}(s)$

o en términos de la inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Ejemplo

Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\cdot\frac{s}{(s^2+4)}\right\}$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\text{sen}(2t)*\cos(2t) \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^t \text{sen}(2\eta)\cos(2t-2\eta)d\eta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^t \text{sen}(2\eta)\Big[\cos(2t)\cos(2\eta) + \text{sen}(2t)\text{sen}(2\eta)\Big]d\eta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^t \left[\text{sen}(2\eta)\cos(2t)\cos(2\eta) + \text{sen}(2t)\text{sen}^2(2\eta)\right]d\eta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^t \left[\text{sen}(2\eta)\cos(2t)\cos(2\eta) + \text{sen}(2t)\text{sen}^2(2\eta)\right]d\eta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^t \left[\tfrac{1}{2}\text{sen}(4\eta)\cos(2t) + \text{sen}(2t)\tfrac{1}{2}(1-\cos(4\eta))\right]d\eta \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^t [\text{sen}(4\eta)\cos(2t) + \text{sen}(2t) - \text{sen}(2t)\cos(4\eta)]\,d\eta \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^t [\text{sen}(4\eta-2t) + \text{sen}(2t)]d\eta \\
&= \tfrac{1}{4}\Big[-\tfrac{1}{4}\cos(4\eta-2t) + \text{sen}(2t)\eta\Big]\Big|_{\eta=0}^{\eta=t} \\
&= \tfrac{1}{4}\Big[-\tfrac{1}{4}\cos(4t-2t) + \text{sen}(2t)t + \tfrac{1}{4}\cos(0-2t)\Big] \\
&= \tfrac{1}{4}\text{sen}(2t)t
\end{aligned}$$

Ejemplo

Si $f(t)$ es una función continua por tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\cdot 1(t-u)du\right\} = \mathcal{L}\{f*1\} = \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Hallar } \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-u}\cos(u)du\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(t)\}(s) \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s+1) \\ &= \frac{1}{s}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Obs.}\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}s}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t}\cos(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\text{sen}(t) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[1 - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\text{sen}(t)\right] \end{aligned}$$

luego, $\int_0^t e^{-\eta}\cos(\eta)d\eta = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\text{sen}(t)\right]$

Ejemplo (Ecuaciones Integrales)

Resolución de ecuaciones de la forma: $y = f(t) + \displaystyle\int_0^t g(t-u)y(u)du$

Resolver: $y(t) = t^2 + \displaystyle\int_0^t sen(t-u)y(u)du$

$$y(t) = t^2 + \int_0^t sen(t-u)y(u)du \ \ / \ \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \tfrac{2}{s^3} + \mathcal{L}\{sen(t) * y(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \tfrac{2}{s^3} + \mathcal{L}\{sen(t)\}\mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \tfrac{2}{s^3} + \tfrac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}\big(1 - \tfrac{1}{s^2+1}\big) = \tfrac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}\left(\tfrac{s^2}{s^2+1}\right) = \tfrac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = 2\tfrac{s^2+1}{s^5} = \tfrac{2}{s^3} + \tfrac{2}{s^5} \qquad / \, \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{\tfrac{2}{s^3}\big\} + \mathcal{L}^{-1}\big\{\tfrac{2}{s^5}\big\}$$

$$y(t) = t^2 + \tfrac{t^4}{12}$$

Ejercicio

Resolver: $y'(t) = 1 - sen(t) - \displaystyle\int_0^t y(u)du$

tal que : $y(0) = 0$

Solución: $y(t) = (1 - \frac{t}{2})sen(t)$