Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 1

Mauro Jélvez Jélvez

02/04/2024

1)

Solución: Sabemos que el producto punto de dos vectores se define como $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = AB\cos\theta$ Donde θ es el ángulo formado por $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Si aplicamos una rotación R(ϕ) en el espacio a $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, obtenemos:

$$\overrightarrow{A'} = R(\phi)\overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{B'} = R(\phi)\overrightarrow{B}$$

donde R(ϕ)=$\begin{pmatrix} Cos\phi & Sen\phi \\ -Sen\phi & Cos\phi \end{pmatrix}$, aquí ϕ es el ángulo de rotación con respecto a los ejes originales. Si sabemos ya que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = AB\cos\theta$

$$\overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B'} = (R\overrightarrow{A})(R\overrightarrow{B})$$

Y por definición tenemos que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A}^t\overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B'} = (R\overrightarrow{A})(R\overrightarrow{B}) = (R\overrightarrow{A})^t(R\overrightarrow{B}) = (R^t\overrightarrow{A}^t)(R\overrightarrow{B})$$

Ordenando nos queda

$$\overrightarrow{A'}\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{A}^t(R^tR)\overrightarrow{B}$$

Recordando que $R^tR = I$ la cual es la matriz identidad, por lo que tendremos:

$$\overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{A}^t(I)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A}^t\overrightarrow{B}$$

Finalmente obteniendo:

$$\overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{A}^t \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = AB\cos\theta$$

2)

Solución: Las identidades usadas fueron: $\vec{\bigtriangledown}(fg) = f(\vec{\bigtriangledown}g) + g(\vec{\bigtriangledown}f)$

$$\bigtriangledown^2(fg) = \overrightarrow{\bigtriangledown}(\overrightarrow{\bigtriangledown}fg) = \overrightarrow{\bigtriangledown}(f(\overrightarrow{\bigtriangledown}g) + g(\overrightarrow{\bigtriangledown}f)) = \overrightarrow{\bigtriangledown}(f\overrightarrow{\bigtriangledown}g) + \overrightarrow{\bigtriangledown}(g\overrightarrow{\bigtriangledown}f)$$

Haciendo la propiedad dsitributiva de este operador diferencial:

$$\bigtriangledown^2(fg) = \overrightarrow{\bigtriangledown}f\overrightarrow{\bigtriangledown}g + f\bigtriangledown^2 g + \overrightarrow{\bigtriangledown}g\overrightarrow{\bigtriangledown}f + g\bigtriangledown^2 f$$

Y ordenando términos obtenemos:

$$\bigtriangledown^2(fg) = f\bigtriangledown^2 g + g\bigtriangledown^2 f + 2\overrightarrow{\bigtriangledown}g\overrightarrow{\bigtriangledown}f$$

3)

Solución: Definimos nuestro vector posición en coordenadas polares como $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = rCos\theta\hat{i} \ + rSin\theta\hat{j}$ también podemos escribirlo como $\vec{r} = r\hat{r}$, y a su vez podemos definir su diferencial de la forma:

$$d\vec{r} = r[\hat{i}(-Sen\theta d\theta) + \hat{j}(Cos\theta d\theta)] = rd\theta\hat{\theta}$$

Donde $\hat{\theta} = -Sen\theta\hat{i} + Cos\theta\hat{j}$ el cual es el vector tangente a la superficie ϕ (debemos saber que producto punto del vector desplazamiento por el gradiente de ϕ es igual a 0, por lo tanto el plano XY forma un ángulo de 90° con la dirección de máximo crecimiento de ϕ), y para comprobarlo haremos el producto punto del vector unitario del desplazamiento por el tangente la superficie ϕ:

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = (rCos\theta\hat{i} + rSin\theta\hat{j})(-Sen\theta\hat{i} + Cos\theta\hat{j}) = r(-Cos\theta Sin\theta + Sin\theta Cos\theta) = r(0)$$

Por lo que finalmente comprobamos que el vector desplazamiento es tangente a la superficie de ϕ.

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$$

4)

Solución: Tenemos que $\phi(x, y, z) = 2x^2 + y + 4z^2$, y que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|r\|}$, por lo tanto tendremos:

$$\vec{\bigtriangledown} \cdot \phi = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y + 4z^2)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y + 4z^2)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 + y + 4z^2)\hat{k} = 4x\hat{i} + \hat{j} + 8z\hat{k}$$

Para encontrar el vector unitariol, usaremos la difinición de arriba:

$$(\hat{\bigtriangledown\phi}) = \frac{\vec{\bigtriangledown}\phi}{\left\|\vec{\bigtriangledown}\phi\right\|} = \frac{4x\hat{i} + \hat{j} + 8z\hat{k}}{\sqrt{16x^2 + 1 + 64z^2}}$$

Por lo que obtendremos que el vector unitario es:

$$(\hat{\bigtriangledown\phi}) = \frac{4x\hat{i} + \hat{j} + 8z\hat{k}}{\sqrt{16x^2 + 1 + 64z^2}}$$

5)

Solución:

$$\vec{A}\times(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}) = \vec{A}\times\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (y^2\hat{i}+x^2\hat{j})\times[\hat{i}(\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2))-\hat{j}(\frac{\partial}{\partial x}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(y^2))+\hat{k}(\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2))]$$

$$\vec{A} \times (\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A}) = (y^2\hat{i} + x^2\hat{j}) \times (2x - 2y)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ y^2 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \end{vmatrix} = \hat{i}(2x^2(x - y)) - \hat{j}(2y^2(x - y)) + \hat{k}(0)$$

Por lo tanto finalmente tendremos:

$$\vec{A} \times (\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A}) = \hat{i}(2x^2(x - y)) - \hat{j}(2y^2(x - y))$$

6)

Solución: Primero definiremos $x = rCos\theta$,$y = rSin\theta$ y análogamente sus diferenciales $dx = -rSin\theta d\theta$ y finalmente $dy = rCos\theta d\theta$

$$\vec{F} = \frac{\hat{e_x} rCos\theta}{r^2Cos^2\theta + r^2Sin^2\theta} + \frac{\hat{e_y} rSin\theta}{r^2Cos^2\theta + r^2Sin^2\theta} = \frac{\hat{e_x}Cos\theta}{r(Cos^2\theta + Sin^2\theta)} + \frac{\hat{e_y}Sin\theta}{r(Cos^2\theta + Sin^2\theta)}$$

Finalmente obtenemos que:

$$\vec{F} = \frac{1}{r}(Cos\theta\hat{e_x} + Sin\theta\hat{e_y})$$

Sabemos que el trabajo para un fuerza se define como: $W = \int \vec{F}\vec{dr}$, aquí definiremos nuestro vector posición como $\vec{dr} = (-rSin\theta)d\theta\hat{e_x} + (rCos\theta)d\theta\hat{e_y}$ Por lo tanto tendremos:

$$W = \int \vec{F}\vec{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{r}(Cos\theta\hat{e_x} + Sin\theta\hat{e_y}))((-rSin\theta)d\theta\hat{e_x} + (rCos\theta)d\theta\hat{e_y})$$

Si sabemos que $\hat{e_x} \cdot \hat{e_y} = \hat{e_y} \cdot \hat{e_x} = 0$ y $\hat{e_x} \cdot \hat{e_x} = \hat{e_y} \cdot \hat{e_y} = 1$

$$W = \frac{r}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-Sen\theta Cos\theta + Sen\theta Cos\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0)d\theta$$

Finalmente obtenemos que:

$$W = 0$$

7)

Solución: Calculamos el rotacional de $\vec{t}$

$$\vec{\bigtriangledown} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \hat{e_x} & \hat{e_y} & \hat{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{e_x}(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x)) - \hat{e_y}(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-y)) + \hat{e_z}(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y))$$

$$\vec{\bigtriangledown} \times \vec{t} = 2\hat{e_z}$$

Como tenemos que el rotacional de $\vec{t}$ no es cero podemos relacionar la integral de línea y la de superficie. Por lo tanto tedremos que nuestro vector es:

$$\vec{t} = -y\hat{e_x} + x\hat{e_y}$$

Y el vector para la integral de línea es:

$$\vec{d\lambda} = \hat{e_x}dx + \hat{e_y}dy$$

Por lo tanto tendremos:

$$\oint_C \vec{t}\vec{d\lambda} = \oint_C (-y\hat{e_x} + x\hat{e_y})(\hat{e_x}dx + \hat{e_y}dy) = \oint_C (-ydx + xdy) = \int_S (\vec{\bigtriangledown} \times \vec{t})d\vec{\sigma}$$

Donde $d\vec{\sigma}$ es un diferencial de área normal a la superficie.

$$\int_S (\vec{\bigtriangledown} \times \vec{t})d\vec{\sigma} = \int_S (2)d\vec{\sigma} = 2\int_S d\vec{\sigma} = 2A$$

Donde A es el área. Ordenando todo y multiplicándolo por $\frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\oint_C \vec{t}\vec{d\lambda} = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_S (\vec{\bigtriangledown} \times \vec{t})d\vec{\sigma} = A$$

8)

Solución: Las ecuaciones usadas serán:

$$\int_S \vec{E} d\vec{\sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V (\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\bigtriangledown} \Phi$$

$$\bigtriangledown^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Definiremos: $d\vec{\sigma} = \hat{n} dA$, donde $\hat{n} = \hat{r}$ para este caso, los diferenciales de área y volumen en coordenadas esféricas son:

$$dA = r^2 Sen\theta d\theta d\phi$$

$$dV = r^2 dr Sen\theta d\theta d\phi$$

Como sabemos que la carga neta está distribuida uniformemente en la esfera de volumen $V = \frac{4\pi a^3}{3}$, obtenemos la densidad de carga:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{Q}{V} \rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

I) $0 < r < a$

$$\int_S \vec{E} d\vec{\sigma} = \int_V (\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{E}) dV = \int_V (\frac{\rho}{\epsilon_0}) dV$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 dr Sen\theta d\theta d\phi = E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{n} \cdot \hat{r} dA = E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 Sen\theta d\theta d\phi$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} (\frac{4\pi r^3}{3}) = E(4\pi r^2) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

De aquí obtenemos el campo eléctrico dentro de la esfera:

$$\vec{E}_{in} = \frac{\rho r \hat{r}}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{in} = \frac{Q r \hat{r}}{4\pi a^3 \epsilon_0}$$

Para sacar el potencial usaremos la formula de arriba.

$$\Phi_{in} = -\int_0^r \vec{E}_{in}(r') dr' = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_0^r r' dr' = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\frac{r^2}{2})$$

Por lo que obtenemos que el potencial dentro de la esfera es:

$$\Phi_{in} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_{in} = -\frac{Q r^2}{8\pi a^3 \epsilon_0}$$

Para el caso r=a, sólo reemplazamos en Φ_{in} quedando:

$$\Phi_{in}(r = a) = -\frac{Q}{8\pi \epsilon_0 a}$$

II) $a < r < \infty$, en este caso para calcular el campo eléctrico en términos de Q podemos hacerlo con el Teorema de Gauss:

$$\int_S \vec{E} d\vec{\sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{out} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Por lo que para el potencial afuera tendremos:

$$\Phi_{out} = -\int_{\infty}^a \vec{E}_{in}(r') dr' - \int_a^r \vec{E}_{out}(r') dr' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} (-\int_{\infty}^a \frac{dr'}{r'^2} - \frac{1}{a^3} \int_a^r r' dr')$$

$$\Phi_{out} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[-(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{\infty}) - \frac{1}{a^3}(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2})] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}(\frac{r^2-a^2}{2}))$$

Por lo que finalmente tendremos el potencial para fuera de la esfera:

$$\Phi_{out} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3}(3a^2 - r^2) \Rightarrow \Phi_{out} = \frac{\rho(3a^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$$

Ahora para comprobar que son correctos estos potenciales, usaremos la ecuación de Poisson en Φ_{in} y Φ_{out}, obteniendo:

$$\bigtriangledown^2\Phi_{in} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi_{in}}{dr}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2(\frac{-2r\rho}{6\epsilon_0})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(\frac{-r^3\rho}{3\epsilon_0}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}(\frac{-3r^2\rho}{3\epsilon_0}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quedando así comprobado para Φ_{in}, ahora con Φ_{out}:

$$\bigtriangledown^2\Phi_{out} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi_{out}}{dr}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}(\frac{\rho(3a^2-r^2)}{6\epsilon_0})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(-r^2\frac{2\rho r}{6\epsilon_0}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{-3r^2\rho}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

9)

Solución: Sabemos que $\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \times \vec{A}$ y definiremos $K = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$

$$\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} = K(\frac{-y\hat{i}}{x^2+y^2} + \frac{x\hat{j}}{x^2+y^2}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$K(\frac{-y\hat{i}}{x^2+y^2} + \frac{x\hat{j}}{x^2+y^2}) = \hat{i}(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y) - \hat{j}(\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x + \hat{k}(\frac{\partial}{\partial x}A_x - \frac{\partial}{\partial y}A_y)$$

De aquí podremos derivar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{-Ky}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \rightarrow (1)$$

$$\frac{Kx}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x \rightarrow (2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \rightarrow (3)$$

De aquí podemos concluir que $\frac{\partial}{\partial x}A_y = \frac{\partial}{\partial y}A_x$, también debemos saber que la corriente es paralela al potencial vectorial magnético, por lo tanto $A_y = A_x = 0$. Por lo que nos quedaremos con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{-Ky}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}A_z \rightarrow (1.1)$$

$$\frac{Kx}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}A_z \rightarrow (2.1)$$

De la ecuación (2.1) podemos obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}A_z = \frac{Kx}{x^2+y^2} \rightarrow dA_z = \frac{Kxdx}{x^2+y^2} \rightarrow \int dA_z = \int \frac{Kxdx}{x^2+y^2} \rightarrow A_z = K\int \frac{xdx}{x^2+y^2} = \frac{K}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$A_z = \frac{K}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y) \rightarrow (4)$$

Donde C es una función, para encontrarla tomaremos la derivada parcial con respecto a y para igualarla a la ecuación (1.1), con lo que tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial y}A_z = \frac{K}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} + C'(y)$$

Igualando esta ecuación con (1.1):

$$\frac{Ky}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{-Ky}{x^2+y^2} \rightarrow C'(y) = \frac{-Ky}{x^2+y^2} - \frac{Ky}{x^2+y^2} \rightarrow C'(y) = \frac{-2Ky}{x^2+y^2}$$

Integrando obtenemos:

$$C(y) = -2K\int \frac{ydy}{x^2+y^2} \rightarrow C(y) = -2K\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}$$

$$C = -K\ln(x^2+y^2)$$

$$A_z = \frac{K}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y) \rightarrow A_z = \frac{K}{2}\ln(x^2+y^2) - K\ln(x^2+y^2)$$

$$A_z = -\frac{K}{2}\ln(x^2+y^2) \rightarrow A_z = -\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(x^2+y^2)$$

Por lo que finalmente obtendremos que:

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln(x^2+y^2)\hat{k}$$