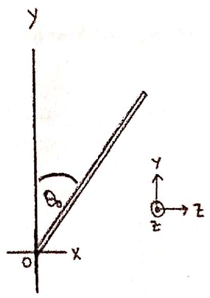
Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Módulo IV - Forma ~~A~~ B
Mecánica Intermedia
Licenciatura en Física - 2021[1]

Problema I

Se tiene una barra de masa M y longitud L "pegada" a un eje vertical, formando un ángulo θ_0 respecto a dicho eje, tal como se indica en la figura:



Para el sistema coordenado indicado, determine:

1. (35%) La densidad volumétrica de masa para el sistema coordenado (x, y, z). Sugerencia: calcule la densidad para un sistema coordenado (x', y', z') cuyo origen coincida con el del sistema (x, y, z) y tal que la barra coincide con x', posteriormente haga el cambio de variables $(x', y', z') \rightarrow (x, y, z)$. Recuerde que $M = \int \int_{\substack{\text{All} \\ \text{universe}}} \int \rho(\overrightarrow{r})\, dV$
2. (35%) El tensor inercia respecto al sistema de referencia indicado en la figura.
3. (30%) Si la barra gira con rapidez angular ω_0 respecto al eje y, detemine la energía mecánica de la barra.

---

[1]**Hora de inicio:** 17:00 hrs.
Hora de término: 20:30 hrs.
Envíe el documento en formato pdf

FORMA B

Problema II

Un sistema consiste en 3 partículas de masas m_1, m_2 y m_3 y coordenadas (x_1, x_2, x_3) tal que:

$$\begin{aligned} m_1 &= 3m \text{ situada en } (-b, b, b) \\ m_2 &= 2m \text{ situada en } (b, b, 0) \\ m_3 &= 4m \text{ situada en } (0, -b, b) \end{aligned}$$

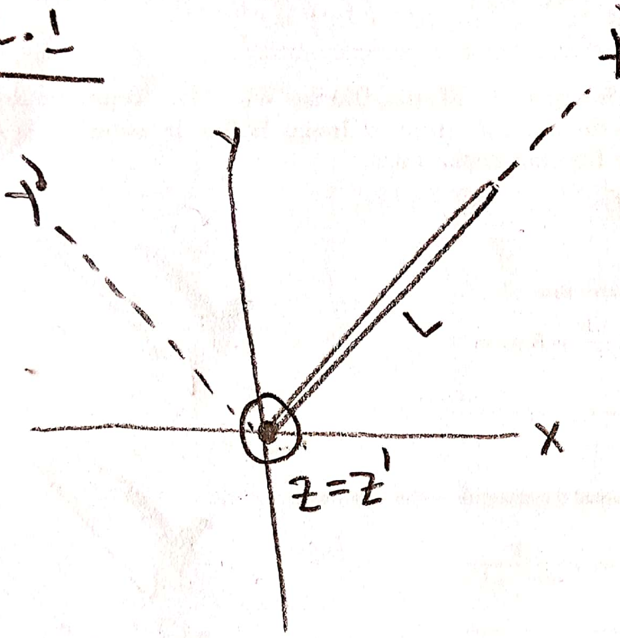
Determine:

1. (20%) La densidad volumétrica de masa.
2. (30%) El tensor inercia.
3. (15%) Los momentos de inercia principales, esto es, las componentes no nulas del tensor de inercia diagonalizado.
4. (35%) Las direcciones de los ejes (ejes principales) del sistema, respecto al cual el tensor inercia resulta ser diagonal.

I.1

PROBL. I

1)



$$\rho(\vec{r}\,') = \alpha\, \delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]$$

hallando la cte. α.

$$M = \int \rho(\vec{r}\,')\, dV' = \alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]\,dV'$$

$$= \alpha \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y')\,dy'} \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z')\,dz'} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x') - H(x'-L)]\,dx$$

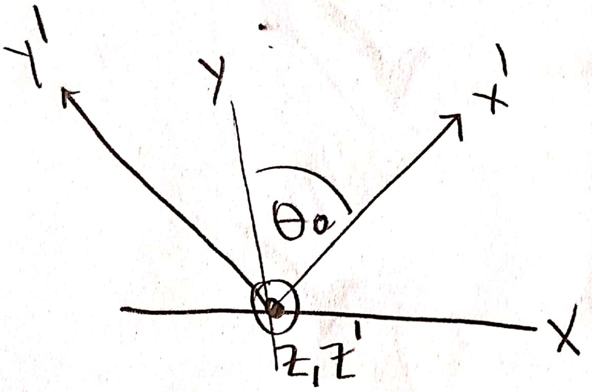
$$= \alpha \int_0^L dx' = \alpha L \Longrightarrow \alpha = \frac{M}{L}.$$

Finalmente $\rho(\vec{r}\,') = \dfrac{M}{L}\,\delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]$

I.2

- Ahora bien en el sistema de referencia (X, Y, Z) usando la transformación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ -\cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



$$\therefore \quad \rho(\vec{r}) = \frac{M}{L}\, \delta(-X\cos\theta_0 + Y\operatorname{sen}\theta_0)\, \delta(Z)$$
$$\times \left[H(X\operatorname{sen}\theta_0 + Y\cos\theta_0) - H(X\operatorname{sen}\theta_0 + Y\cos\theta_0 - L) \right]$$

etq.

—— FORMA B ——

$\underline{\text{II}}.1$

$\underline{\text{II}}$) 1)

$$\rho(\vec{r}) = m_1\,\delta(x+b)\,\delta(y-b)\,\delta(z-b) + m_2\,\delta(x-b)\,\delta(y-b)\,\delta(z) + m_3\,\delta(x)\,\delta(y+b)\,\delta(z-b)$$

2)

$$I_{11} = \int \rho(\vec{r})\,[y^2+z^2]\,dV$$

$$= m_1(b^2+b^2) + m_2 b^2 + m_3(b^2+b^2)$$

$$= 6mb^2 + 2mb^2 + 8mb^2 = 16\,mb^2 \,//$$

$$I_{22} = \int \rho(\vec{r})\,[x^2+z^2]\,dV$$

$$= m_1(b^2+b^2) + m_2(b^2) + m_3(b^2)$$

$$= 6mb^2 + 2mb^2 + 4mb^2 = 12\,mb^2 \,//$$

$$I_{33} = \int \rho(\vec{r})\,[x^2+y^2]\,dV = m_1(b^2+b^2) + m_2(b^2+b^2) + m_3(b^2)$$

$$= 6mb^2 + 4mb^2 + 4mb^2 = 14\,mb^2 \,//$$

$$I_{12} = -\int \rho(\vec{r})\, xy\, dV$$

$$= -\left(m_1(-b^2) + m_2 b^2 + 0\right) = -\left(-3mb^2 + 2mb^2\right) = mb^2$$

$$= I_{21}$$

$$I_{31} = I_{13} = -\int \rho(\vec{r})\, xz\, dV$$

$$= -\left(m_1(-b^2) + m_2 \cdot 0 + m_3\, 0\right) = 3mb^2$$

$$I_{23} = I_{32} = -\int \rho(\vec{r})\, yz\, dV$$

$$= -\left(m_1(b^2) + m_2 \cdot 0 + m_3(-b^2)\right) = -3mb^2 + 4mb^2$$

$$= mb^2$$

3)

$$I = mb^2 \begin{pmatrix} 16 & 1 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

itemes (3), (4) y (5)

II.3

$$I = mb^2 \begin{pmatrix} 16 & 1 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

eigenvectors sin normalizar:,

$$\left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 12$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2\sqrt{3}-4}\left(-3\sqrt{3}+5\right) \\ -\frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-4} \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 15-2\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2\sqrt{3}+4}\left(-3\sqrt{3}-5\right) \\ -\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4} \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 2\sqrt{3}+15$$

Autovectores normalizados

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \leftrightarrow 12$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}-4}(-3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} \\ \frac{-\frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-4}}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} \end{array} \right\} \leftrightarrow 15-2\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}+4}(-3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \\ \frac{-\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \end{array} \right\} \leftrightarrow 2\sqrt{3}+15$$

VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

Matriz de transformación:

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}-4}(-3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}+4}(-3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-4}}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} & \frac{-\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt{3}}(42-24\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt{3}+14}(24\sqrt{3}+42)}} \end{pmatrix}$$

Matriz de vectores propios.

II.4

Testeo de unitariedad de U:

$$
\begin{aligned}
UU^T &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3-4}(-3\sqrt3+5)}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3+4}(-3\sqrt3-5)}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac13\sqrt3 & \frac13\sqrt3 & \frac13\sqrt3 \\ -\frac{(-3\sqrt3+5)}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} & -\frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} & \frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} \\ -\frac{(-3\sqrt3-5)}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} & -\frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} & \frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Diagonalizando el tensor de inercia (Test):

$$
\begin{aligned}
I' &= mb^2 \begin{pmatrix} -\frac13\sqrt3 & \frac13\sqrt3 & \frac13\sqrt3 \\ -\frac{(-3\sqrt3+5)}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} & -\frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} & \frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}} \\ -\frac{(-3\sqrt3-5)}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} & -\frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} & \frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3-4}(-3\sqrt3+5)}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3+4}(-3\sqrt3-5)}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15-2\sqrt3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt3+15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Momentos de inercia principales

5).- Hallando sistema coordenado (primado) tal que I' es diagonal:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} &= U^T \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3-4}(-3\sqrt3+5)}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{1}{2\sqrt3+4}(-3\sqrt3-5)}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-\frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{-\frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{14-8\sqrt3}(42-24\sqrt3)}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8\sqrt3+14}(24\sqrt3+42)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac13\sqrt3\mathbf{i} - \frac{(-3\sqrt3+5)}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}}\mathbf{j} - \frac{(-3\sqrt3-5)}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}}\mathbf{k} \\ \frac13\sqrt3\mathbf{i} - \frac{-\sqrt3+1}{2\sqrt3-4}\frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}}\mathbf{j} - \frac{-\sqrt3-1}{2\sqrt3+4}\frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}}\mathbf{k} \\ \frac13\sqrt3\mathbf{i} + \frac{\sqrt{-8\sqrt3+14}}{\sqrt{-24\sqrt3+42}}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{8\sqrt3+14}}{\sqrt{24\sqrt3+42}}\mathbf{k} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vectores unitarios del sistema coord. donde I es diagonal $\Rightarrow I'$.