Clase nº41

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

13 de Diciembre 2021

Objetivo de la clase

- Resolver ecuaciones ordinarias homogéneas.

Función Homogénea

Se dice que una función $F(x, y)$ es homogénea de grado n si

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y),$$

para todo x, y, t tales que los puntos (x, y) y (tx, ty) están en el dominio de definición de F.

Ejemplo 13

La función $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ es homogénea de grado 2.

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) - (ty)^2$$

$$= t^2 (x^2 + xy - y^2)$$

$$= t^2 f(x, y)$$

Ejemplo 14

La función $f(x,y) = 3x^3 + 4x^2y - 4xy^2$ es homogénea de grado 3.

$$f(tx,ty) = 3(tx)^3 + 4(tx)^2(ty) - 4(tx)(ty)^2$$

$$= t^3(3x^3 + 4x^2y - 4xy^2)$$

$$= t^3 f(x,y)$$

Ejemplo 15

La función $f(x, y) = 4\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de grado 1.

$$f(tx, ty) = 4\sqrt[3]{t^3x^3 + t^3y^3} = t\,4\sqrt{x^3+y^3}$$

$$= t \cdot f(x,y).$$

Ecuación diferencial ordinaria homogénea

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es homogénea si se puede escribir de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplo 16

La ecuación diferencial ordinaria

$$(x + 3y)dx + (4y - 5x)dy = 0$$

es homogénea.

Sea

$$M(x,y) = x + 3y \Rightarrow M(tx,ty) = t(x+3y) = t\,M(x,y)$$

$$N(x,y) = 4y - 5x \Rightarrow N(tx,ty) = t(4y-5x) = t\,N(x,y).$$

M, N son funciones homogéneas de grado 1.

Ejemplo 17

Resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

es homogénea.

Sea

$$M(x,y) = x^2 - 2y^2 \Rightarrow M(tx,ty) = t^2x^2 - 2t^2y^2 = t^2 M(x,y)$$

$$N(x,y) = xy \Rightarrow N(tx,ty) = tx\,ty = t^2 N(x,y)$$

con M, N funciones homogéneas de grado 2.

Notar que

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad N(x,y)\,dy = -M(x,y)\,dx.$$

Si $N(x,y) \neq 0$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$$

donde $F(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ es función homogénea de grado 0. En efecto

$$F(tx,ty) = -\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = -\frac{t^2 M(x,y)}{t^2 N(tx,ty)} = -t^0 F(x,y), \ t \neq 0.$$

Considerando $x \neq 0$

$$F(x,y) = F\left(x,\ x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^0 F\left(1, \frac{y}{x}\right) = F(1,u)$$

donde $u = \dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y = ux$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = F(1,u) = -\frac{(1-2u^2)}{u}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

$\therefore$,

$$x\frac{du}{dx} + u = -\frac{(1-2u^2)}{u}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-1+2u^2-u^2}{u} \quad , u \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u}{u^2-1}\,du = \frac{1}{x}\,dx \quad , \quad x \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u}{u^2-1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|u^2-1| = \ln|x| + \frac{\ln c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|u^2-1| = 2\ln|x| + \ln c$$

$$\Rightarrow \quad |u^2-1| = x^2\cdot c$$

$$\Rightarrow \quad u^2-1 = \pm c x^2$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = c_1 x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{c_1 x^2+1} \quad , \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{c_1 x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm x\sqrt{c_1 x^2+1}.$$

$\therefore$, la solución general es

$$y = \pm x\sqrt{c_1 x^2+1}.$$

Método para resolver ecuaciones ordinarias homogéneas

1. Expresar la ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2. Verificar que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.
3. Transformar la ecuación diferencial homogénea en una variable separable, utilizando cualquiera de las siguientes sustituciones: $y = ux$ o $x = uy$, con sus respectivos diferenciales.
4. Resolver la ecuación diferencial en variables separables, para luego regresar al cambio de variable realizado.

Ejemplo 18

Resolver

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^2 - 2y^2 \\ N(x,y) = xy \end{array}\right\}$$ Son funciones homogéneas de grado 2.

Consideremos $y = ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$

$\Rightarrow dy = xdu + udx$

Luego

$$(x^2-2u^2x^2)\,dx + ux^2(x\,du+u\,dx) = 0$$

$\Rightarrow$ $$(x^2-2u^2x^2)\,dx + ux^3\,du + u^2x^2\,dx = 0$$

$\Rightarrow$ $$ux^3\,du = -(x^2-2u^2x^2+u^2x^2)\,dx$$

$\Rightarrow$ $$ux^3\,du = -x^2(1-u^2)\,dx \quad , \quad 1-u^2\neq 0 \; , \; x\neq 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{u}{u^2-1}\,du = \frac{1}{x}\,dx$$

$\Rightarrow$ $$\int \frac{u}{u^2-1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

⋮ ver ejemplo 17

$\Rightarrow$ $$y = \pm x\sqrt{x^2c+1}$$

Ejemplo 19

Resolver

$$xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx = 0$$

es homogénea.

Notar que

$$M(x,y) = -\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) \quad y \quad N(x,y) = x$$

son funciones homogéneas de grado 1.

Luego, utilizaremos

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \quad y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{ux + \sqrt{x^2 - u^2x^2}}{x}$$

$\therefore$, considerando $x \neq 0$.

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{\sqrt{x^2 - u^2x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - u^2x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{|x|\sqrt{1-u^2}}{x^2}$$

Si $x > 0$ entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{x}\,dx, \quad 1-u^2 \neq 0.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcsin}(u) = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

si $x < 0$ entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\sqrt{1-u^2}}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = -\frac{1}{x}\,dx, \quad 1-u^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcsin}(u) = -\ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + C.$$

$\therefore$, la solución general es

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{x}\right) = \pm \ln|x| + c.$$

Ejercicios propuestos

1. Resolver: $(x - y)dx + (x - y)dy = 0$.
2. Resolver: $(x^2 + xy)dy + (y^2 - xy)dx = 0$.
3. Use el cambio de variable $y = ux$ para encontrar la solución de
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2(\frac{y}{x})}{y^2}$$
4. Muestre que la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$
se transforma en ecuación de variables separadas usando el cambio de variables $y = vx$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.