Certamen 1

Cálculo II - FOGEC
FC - UV - 01 - 10 - 2021

1.- (12 Puntos) Calcule mediante el método de sustitución:

$$\int \frac{2+\ln^2 x}{x\ln x - x}\,dx\,;\ \forall x>0$$

2.- (12 Puntos) Calcule mediante integración por partes

$$\int arctg\,\sqrt{x}\,dx$$

3.- (12 Puntos) Calcule mediante el método de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{x^3}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$$

4.- (12 Puntos) Calcule mediante sustitución e integración por fracciones parciales

$$\int \frac{(2+tg^2x)\,sec^2x\,dx}{1+tg^3x}$$

5.- (12 Puntos) Use sumas de Riemann para determinar

$$\int_{-2}^{1}(x+1)^2\,dx$$

y luego Interprete geométricamente el resultado obtenido.

Observaciones:

- Este certamen es individual.
- Debe prepararse en lo posible un único documento en PDF.
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV
- Disponen de 5 horas, hasta las 18:30 horas.
- Enviar documento de desarrollo al correo: ....@gmail.com

1.- Sea

$$ln\,x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$\int \frac{2+\ln^2 x}{x\ln x - x}dx = \int \frac{2+ln^2 x}{(\ln x - 1)x}dx$$

$$= \int \frac{2+t^2}{(t-1)}dt$$

$$= \int \frac{3+t^2-1}{t-1}dt$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t-1}dt + 3\int \frac{1}{t-1}dt$$

$$= \int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt + 3\int \frac{1}{t-1}dt$$

$$= \int (t+1)dt + ln(t-1)\,; t > 1$$

$$= \frac{t^2}{2} + t + ln(t-1) + c$$

$$= \frac{ln^2 x}{2} + \ln x + 3\ln(ln - 1) + c$$

2.-

Sea

$$u = arctg\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int arctg\,\sqrt{x}\,dx = x\,arctg\sqrt{x} - \int x\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= x\,arctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$= x\ arctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}2tdt\ ;x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt$$

$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt$$

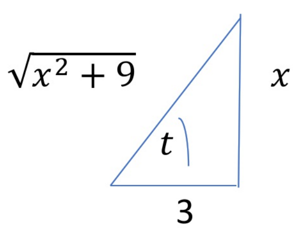
$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - t + \ arctg\ t + c$$

$$= x\ arctg\ \sqrt{x} - \sqrt{x} + \ arctg\ \sqrt{x} + c$$

$$= \ (x+1)\ arctg\ \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$$

3.- Sea

$$x = 3\ tg\ t\ \Rightarrow dx = 3\ sec^2x\ dx$$



$$\int \frac{x^3}{(x^2+9)^{3/2}}dx = \int \frac{(3tg\ x)^3}{((3tg\ t)^2+9)^{3/2}}3sec^2tdt$$

$$= \int \frac{27tg^3t\ \cdot 3\sec^2 tdt}{\left(\sqrt{9tg^2t+9}\right)^3}$$

$$= \int \frac{81tg^3tsec^2tdt}{27sec^3t}$$

$$= 3\int \frac{tg^3\ t}{\sec t}dt$$

$$= 3\int \frac{tg\ t\ tg^2 t\ dt}{\sec t}$$

$$= 3\int \frac{tg\ t\ (sec^2 t - 1)}{\sec t} dt$$

$$= 3\left[\int \frac{tg\ t\ sec^2 t}{\sec t} - \int \frac{tg\ t}{\sec t}\right]$$

$$= 3\left[\int sect\ tg\ t\ dt - \int sen\ t\ dt\right]$$

$$= 3(\sec t - \cos t) + c$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right] + c$$

4.-

Sea $u = tg\ x \ \Rightarrow du = sec^2 xdx$

luego

$$\int \frac{(2 + tg^2 x)\ sec^2 x\ dx}{1 + tg^3 x} = \int \frac{(2 + u^2)}{1 + u^3} du$$

Ahora

$$\frac{2 + u^2}{1 + u^3} = \frac{u^2 + 2}{u^3 + 1} = \frac{u^2 + 2}{(u+1)(u^2 - u + 1)}$$

$$= \frac{A}{u+1} + \frac{Bu + C}{u^2 - u + 1}$$

$$= \frac{A(u^2 - u + 1) + (Bu + C)(u + 1)}{(u+1)(u^2 - u + 1)}$$

$$\Rightarrow u^2 + 2 = (A + B)u^2 + (B - A + C)u + A + C$$

De donde se obtiene el sistema

$$A + B = 1$$

$$B - A + C = 0$$

$$A + C = 2$$

$$\Rightarrow A = 1\,; B = 0 \text{ y } C = 1$$

$$\frac{2 + u^2}{1 + u^3} = \frac{1}{u + 1} + \frac{1}{u^2 - u + 1}$$

$$= \frac{1}{u + 1} + \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{u + 1} + \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Luego

$$\int \frac{(2 + tg^2x)\, sec^2x\, dx}{1 + tg^3x} = \int \frac{(2 + u^2)}{1 + u^3} du$$

$$\int \left(\frac{1}{u + 1} + \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) du$$

$$= \int \frac{du}{u + 1} + \int \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du$$

$$= ln|u + 1| + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arct \cdot g \left(\frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$= ln|u + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \left(\frac{2u - 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= ln|tg\ x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2\ tg\ x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

5.-

Como la función es continua en$[-2,1]$ entonces es integrable en $[-2,1]$, luego sea P_n una partición del intervalo $[-2,1] \Rightarrow$

$$\Delta x_i = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_0 = -2 < x_1 = -2 + \frac{3}{n} < \cdots < x_i = -2 + \frac{3i}{n} < \cdots < x_n = 1$$

$$\int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i + 1)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n} + 1\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n} - 1\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2} - \frac{6i}{n} + 1\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{27i^2}{n^3} - \frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n}n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18}{n}\frac{(n+1)}{2} + 3\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} - 9\cdot\frac{(n+1)}{n} + 3\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 9\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + 3\right)$$

$$= \frac{9}{2}(2+0+0) - 9(1+0+3) = 9 - 9 + 3 = 3$$

Interpretación geométrica:

El valor obtenido corresponde al área de la región sombreada