Erick C. Pastén
Ondas y óptica
December 7, 2022

Ecuaciones de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

Question 1. Resuelva la ecuación de onda unidimensional para una onda electromagnética que se propaga en el vacío en la dirección $+\hat{z}$ en una cavidad de largo L con las condiciones de borde:

$$\vec{E}(0,t) = 0 \tag{1}$$

$$\vec{E}(L,t) = 0 \tag{2}$$

Para un armónico n, exprese el campo magnético, el vector de Poynting y la densidad de Energía Electromagnética. ¿Está relacionada la energía electromagnética con los valores permitidos de frecuencia?

Solución: Este caso es análogo al de una cuerda sujeta a dos extremos fijos, por lo que usaremos la misma solución de siempre. Para un modo normal n de oscilación, debemos notar el caracter vectorial de la onda:

$$\vec{E}_n(z,t) = \vec{E}_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Donde $\vec{E}_{0n} = (E^x_{0n}, E^y_{0n})$ es un coeficiente de amplitud vectorial, $k_n = \frac{n\pi}{L}$ y $\omega_n = k_n c$, con n número entero. Notese que hemos asumido una polarización lineal, en donde todas las componentes del campo eléctrico oscilan con la misma fase. Desarrollando:

$$\vec{E}_n(z,t) = E^x_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)\hat{\imath} + E^y_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)\hat{\jmath}$$

El campo está en el plano XY ya que debe ser perpendicular a la propagacion en dirección $\hat{k}$. Además, no necesariamente ámbos componentes deben tener la misma fase. Esto ocurre cuando tenemos tipos distintos de polarización como la polarización *elíptica*:

$$\vec{E}_n(z,t) = E^x_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi^x_n)\hat{\imath} + E^y_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi^y_n)\hat{\jmath}$$

Por simplicidad, para nuestro caso utilizaremos una polarización lineal y además debido a la simetría presente, siempre podemos escoger el eje de polarización como el eje x. También siempre podemos escoger un instante inicial t_0 para el cual la fase se anule. Por esta razón podemos escribir simplemente y sin pérdida de generalidad:

$$\vec{E}_n(z,t) = E_{0n}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t)\hat{\imath}$$

El campo magnético $\vec{B}$ se puede calcular desde la ley de faraday:

$$\nabla \times \vec{E}_n = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial z}\hat{\jmath} = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}$$

Derivando e integrando con respecto a t obtenemos:

$$\vec{B}_n(z,t) = \frac{E_{0n}k_n}{\omega_n}\cos(k_n z)\sin(\omega_n t)\hat{\jmath} = \frac{E_{0n}}{c}\cos(k_n z)\sin(\omega_n t)\hat{\jmath}$$

El vector de Poynting es entonces:

$$\vec{S}_n(z,t) = \frac{E_n B_n}{\mu_0}\hat{k} = \frac{E_{0n}^2}{\mu_0 c}\sin(k_n z)\cos(\omega_n t)\cos(k_n z)\sin(\omega_n t)\hat{k}$$

El que puede ser escrito como:

$$\vec{S}_n(z,t) = \frac{E_n B_n}{\mu_0}\hat{k} = \frac{E_{0n}^2}{4\mu_0 c}\sin(2k_n z)\sin(2\omega_n t)\hat{k}$$

Note que al integrar el vector de Poyting sobre una longitud de onda $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ o sobre un periodo $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ se obtiene 0:

$$\int_0^{\lambda_n} \sin(\frac{4\pi}{\lambda_n}z)dz = 0$$
$$\int_0^{T_n} \sin(\frac{4\pi}{T_n}t)dt = 0$$

Lo que tiene sentido puesto que esta onda es estacionaria: no transporta energía de manera efectiva como lo hace una onda viajera.

Finalmente la densidad de energía electromagnética:

$$u_n(z,t) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_n^2 + \frac{B_n^2}{\mu_0}) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_{0n}^2 \sin(k_n z)^2\cos(\omega_n t)^2 + \frac{E_{0n}^2\cos(k_n z)^2\sin(\omega_n t)^2}{\mu_0 c^2})$$

Simplificando:

$$u_n(z,t) = \epsilon_0 E_n^2(\sin(k_n z)^2\cos(\omega_n t)^2 + \cos(k_n z)^2\sin(\omega_n t)^2)$$

Calculemos ahora la energía total U_n de la onda estacionaria integrando la densidad de energía desde $z=0$ a $z=L$. Para esto resulta util calcular las integrales:

$$\int_0^L \sin(k_n z)^2 dz = \frac{L}{2}$$
$$\int_0^L \cos(k_n z)^2 dz = \frac{L}{2}$$

Y se tiene entonces:

$$U_n = \int_0^L u_n(z,t)dz = \frac{L\epsilon_0 E_n^2}{2}(\cos(\omega_n t)^2 + \sin(\omega_n t)^2) = \frac{L\epsilon_0 E_n^2}{2}$$

La energía total de la onda electromagnética no depende explicitamente de la frecuencia de la onda, sino solo de su amplitud.

Question 2. Resuelva la ecuación de onda inhomogénea para una onda armónica que se propaga a la derecha con velocidad c, asumiendo una solución $\psi(x,t) \propto e^{i(kx-\omega t)}$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3}$$

¿Qué características tiene el número de onda?. Escriba la ecuación de onda para una onda electromanética unidimensional que se propaga en un material óhmico conductor donde no existe polarización interna ni carga libre. Encuentre la función de onda armónica para el campo eléctrico y grafique su magnitud cualitativamente.

Solución: Propongamos como solución una onda armónica de la forma $\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t)}$. Reemplazando en la ecuación podemos obtener la relación de dispersión:

$$(ik)^2 = \frac{(i\omega)^2}{c^2} - i\alpha\omega \to k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\alpha\omega}$$

Podemos notar que k es un número complejo. Esto implica que podemos escribir:

$$k = k_R + ik_I$$

Por lo que la onda tendrá un término de amortiguación, llamado *extinción*:

$$\psi_0 e^{i(kx-\omega t)} = \psi_0 e^{-k_I x} e^{i(k_R x-\omega t)}$$

Podemos encontrar las componentes reales e imaginarias del número de onda si notamos que:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\alpha\omega = k_R^2 - k_I^2 + i2k_R k_I$$

Por lo que tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_R^2 - k_I^2$$
$$\alpha\omega = 2k_R k_I$$

De este sistema podemos llegar a una ecuación para la componente real del número de onda como:

$$k_R^4 - \frac{\omega^2}{c^2}k_R^2 - \frac{(\alpha\omega)^2}{4} = 0$$

La cual tiene como solución:

$$k_R^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \alpha^2\omega^2}\right)$$

Debido a que físicamente $k_R \geq 0$ seleccionamos solo la solución con signo $(+)$. Podemos reescribir esta solución como:

$$k_R^2 = \frac{\omega^2}{2c^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 c^4}{\omega^2}}\right)$$

Luego la parte real del número de onda es:

$$k_R = \frac{\omega}{\sqrt{2}c}\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\frac{\alpha^2c^4}{\omega^2}}\right)}$$

Y la parte imaginaria o *coeficiente de extinción*:

$$k_I = \frac{\alpha\omega}{2k_R} = \frac{\alpha c}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\frac{\alpha^2c^4}{\omega^2}}\right)}}$$

Para la ecuación de onda para una onda electromagnética que se propaga en la dirección $\hat{x}$ en un conductor óhmico sonde $\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$,sin polarización interna ni carga libre:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Podemos ver que la estructura es la misma que la ecuación analizada anteriormente, donde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ y $\alpha = \mu_0\sigma$:

$$k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 + i\mu_0\sigma\omega$$

Debido al número de onda complejo, la intensidad de la onda electromagnética decrece de forma exponencial a medida que avanza en el conductor:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)} = \vec{E}_0e^{-k_Ix}e^{i(k_Rx-\omega t)}$$

Esto tiene sentido ya que la energía electromagnética se transforma en energía cinética al mover las cargas en el conductor y provocar la corriente eléctrica.

Question 3. La fuerza de Lorentz que experimenta un electrón de carga e y masa m puede ser escrita como:

$$F_L = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{4}$$

Determine el movimiento en función del tiempo de un electrón ligado al núcleo por una fuerza proporcional a su desplazamiento $F_k \sim -kx$ en presencia de un campo eléctrico de magnitud oscilante de frecuencia ω:

$$E = E_0\cos\omega t \tag{5}$$

¿Qué sucede si se agrega una fuerza de amortiguación $F_A = -b\dot{x}$ proporcional a velocidad del electrón?

Imagine ahora un medio repleto de este tipo de electrones, considerando su fuerza de ligadura y de amortiguación. Muestre que la permitividad eléctrica ϵ de este medio está dada por:

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1 + \frac{e^2N}{\epsilon_0 m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right) \tag{6}$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural de un electrón sin amortiguación y N es la densidad de electrones . Una onda que se propaga en este medio puede ser escrita como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0e^{i(\frac{n\omega}{c}x-\omega t)} \tag{7}$$

Donde n es el índice de refracción del medio.

Solución: La ecuación de un electrón ligado con fuerza $F_k \sim -kx$ sometido a un campo eléctrico constante se puede escribir como:

$$m\ddot{x} + kx = eE$$

La que puede ser escrita como:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - \frac{eE}{k}) = 0$$

La solución es entonces:

$$x(t) = \frac{eE}{k} + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y A_0, φ_0 son constanstes que dependen de las condiciones iniciales. Considerando un campo eléctrico oscilante podemos escribir:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

Donde podemos escribir la solución como una homogénea mas una particular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Recordemos que si hacemos el límite $\omega \to \omega_0$, obtenemos la resonancia:

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) = \frac{eE_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Si ahora agregamos una fuerza de amortiguación, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

Y recordando lo estudiado en la **tarea 1**, la componente de esta solución que perdura en el tiempo es sólo la particular:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Notemos que el desplazamiento está desfasado con respecto al campo eléctrico y por ende la magnitud de la polarización se puede escribir:

$$P = Np = Nex = \frac{Ne^2 E_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Donde p es el módulo del dipolo eléctrico. Ignorando la diferencia de fase, la razón entre las amplitudes de la polarización y el campo eléctrico se puede escribir como:

$$\frac{P}{E} = \epsilon_0 \chi_e = \frac{Ne^2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Por lo que la permitividad se del medio es:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon_0(1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}})$$

Para el índice de refracción tenemos:

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}}$$

Por lo que la velocidad de la onda electromagnética es dependiente de la frecuencia del campo eléctrico. Tenemos entonces, un medio dispersivo.

Question 4. Del ejercicio anterior, considere ahora la parte compleja del campo eléctrico oscilante, esto es:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \tag{8}$$

En este caso, la permitividad será una expresión compleja. Exprese esta permitividad. Debido a ésto, el índice de refracción tambien es un número complejo y puede ser representado por:

$$n = n_R - in_C \tag{9}$$

Donde n_R y n_C son números reales y positivos. Exprese una onda electromagnética que se propaga por este medio y describa cualitativamente el efecto de permitir una parte imaginaria en el índice de refracción.

La parte real n_R es el índice de refracción normal y la parte compleja n_C es llamada comunmente **coeficiente de extinción**. Este último coeficiente es importante cuando aparece el fenómeno de resonancia, debido a que el material disipa gran cantidad de energía (es decir, absorbe la onda). ¿Cómo podría relacionar este fenómeno con el color de un objeto?

Solución: Considerar la parte compleja de la permitividad, implica que consideramos ahora el desfase entre la polarización y el campo eléctrico. La solución compleja para $x(t)$ en tiempos grandes es:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m(\omega^2-\omega_0^2+i\gamma\omega)}e^{i\omega t}$$

Y por ende, la razón entre la polarización y el campo eléctrico es en este caso:

$$\frac{P}{E} = \frac{\frac{Ne^2E_0}{m(\omega^2-\omega_0^2+i\gamma\omega)}e^{i\omega t}}{E_0e^{i\omega t}} = \frac{Ne^2}{m(\omega^2-\omega_0^2+i\gamma\omega)}$$

Y el índice de refracción se puede escribir como:

$$n(\omega) = \sqrt{1+\frac{Ne^2}{m\epsilon_0(\omega^2-\omega_0^2+i\gamma\omega)}}$$

Notemos que podemos escribir n como:

$$\begin{aligned}
n(\omega) &= \sqrt{1+\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)+i\gamma\omega}} \\
&= \sqrt{1+\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)-i\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right) - i\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

De este modo podemos calcular la parte real e imaginaria del coeficiente del índice de refracción. Veamos el límite cuando la susceptibilidad es pequeña (por ejemplo para los gases). Podemos expandir la serie de taylor de la raíz hasta el primer término $\sqrt{1+\xi} \sim 1+\frac{\xi}{2}$:

$$n(\omega) \sim 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0}\frac{(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2} - i\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0}\frac{\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

La parte compleja del índice de refracción implica nuevamente un decrecimiento en la amplitud del campo electromagnético y por ende en la intensidad de la onda. Note que este decrecimiento (o absorción por parte del material) se da preferentemente al rededor de la frecuencia ω_0. En efecto la parte imaginaria:

$$n_I(\omega) = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0}\frac{\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

Se concentra alrededor de esta frecuencia. Esto implica que ondas al rededor de esta frecuencia son fuertemente absorbidas por el material mientras las demás solo pasan a través de éste. Los colores de los objetos pueden ser explicados de esta manera: ciertas frecuencia de la luz son absorbidas por el material y luego reemitidas por este, resultando en el color característico de cada objeto.

Question 5. Resuelva la ecuación de onda para la radiación que emite una estrella de radio R, en cuya superficie se emite una luz de frecuencia constante ω_0. Esto es:

$$E(r=R,t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \tag{10}$$

Escriba la función de onda para $r = 2R$. Calcule la intensidad de radiación a esta distancia y compruebe la ley del inverso de los cuadrados.

Solución: La magnitud de una onda esférica isotrópica puede ser escrita como:

$$E(r,t) = \frac{A_0}{r}e^{i(kr-\omega t)}$$

Donde hemos asumido que la onda viaja en dirección creciente de r. Note que podemos escribir la misma función como:

$$E(r,t) = \frac{A_0}{r}e^{i(\omega t-kr)}$$

Debido a que la parte real (física) es un coseno y se mantiene igual si cambiarmos el signo del argumento. Basta reemplazar la condición de borde:

$$E(R,t) = \frac{A_0}{R}e^{i(\omega t-kR)} = E_0 e^{i\omega_0 t}$$

Puesto que esto se debe cumplir para todo t podemos notar que $\omega = \omega_0$. La amplitud está relacionada mediante:

$$\frac{A_0}{R}e^{-ikR} = E_0 \to A_0 = RE_0 e^{ikR}$$

Por lo que la solución final es:

$$E(r,t) = \frac{RE_0 e^{ikR}}{r}e^{i(\omega_0 t-kr)} = \frac{RE_0}{r}e^{i(\omega_0 t-k(r-R))}$$

Si tomamos la parte real:

$$E(r,t) = \frac{RE_0}{r}\cos\left(\omega_0 t - k(r-R)\right)$$

Por lo que la intensidad promedio de la onda puede ser escrita recordando que $\langle cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$ al integrar sobre un periodo:

$$\langle I(r,t)\rangle = c\epsilon_0\langle E\rangle^2 = \frac{c\epsilon_0 R^2 E_0^2}{2r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

Obtenemos entonces la ley del inverso de los cuadrados. Para $r = R$ tenemos:

$$\langle I(r=R,t)\rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Mientras que para $r = 2R$:

$$\langle I(r=R,t)\rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{8}$$

Es decir, al incrementar la distancia el doble, la intensidad de la onda se reduce en un factor de 4.

Question 6. Debido a que las ondas perfectamente planas son imposibles de construir en la realidad, una aproximación de la ecuación de onda se puede usar para describir ondas aproximadamente planas (como un láser). Para una frente que viaja preferentemente hacia la dirección $+z$ podemos escribir la función de onda espacial como:

$$\psi(x,y,z) = \psi_0(x,y,z)e^{-ikz} \tag{11}$$

Si la función $\psi_0(x,y,z)$ varía lentamente con respecto a z, entonces se debe cumplir:

$$\left|\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\right| < \left|k\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right| \tag{12}$$

Demuestre que bajo estas condiciones, la función ψ_0 debe satisfacer la ecuación de onda *paraxial* dada por:

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

Solución: Podemos obtener la forma en la que la onda se propaga en el tiempo si hacemos $z \to z - ct$ para la parte oscilatoria de la onda:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi_0(x,y,z)e^{-ik(z-ct)}$$

Esta función debe resolver la ecuación de onda. Reemplazando, podemos obtener la ecuación que rige a la parte espacial de la onda:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \to \nabla^2\psi = -k^2\psi$$

Para desarrollar el laplaciano, primero resulta conveniente calcular el gradiente de la función ψ:

$$\nabla\psi \;=\; \nabla(\psi_0 e^{-ikz}) = e^{-ikz}\nabla\psi_0 + \psi_0\nabla e^{-ikz}$$

Y luego la divergencia:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi = \nabla\cdot\nabla\psi &= \nabla\cdot(e^{-ikz}\nabla\psi_0 + \psi_0\nabla e^{-ikz}) \\
&= e^{-ikz}\nabla^2\psi_0 + (\nabla e^{-ikz})\cdot(\nabla\psi_0) + (\nabla\psi_0)\cdot(\nabla e^{-ikz}) + \psi_0\nabla\cdot(\nabla e^{-ikz}) \\
&= e^{-ikz}\nabla^2\psi_0 + 2(\nabla e^{-ikz})\cdot(\nabla\psi_0) + \psi_0\nabla\cdot(\nabla e^{-ikz})
\end{aligned}$$

Además:

$$-k^2\psi = -k^2 e^{-ikz}\psi_0$$

Luego, desarrollando:

$$\nabla^2\psi = e^{-ikz}\nabla^2\psi_0 - 2ike^{-ikz}\frac{\partial\psi_0}{\partial z} - e^{-ikz}k^2\psi_0 = -k^2e^{-ikz}\psi_0$$

De donde obtenemos simplificando:

$$\nabla^2\psi_0 - 2ik\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0$$

Aplicando la condición:

$$\left|\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\right| < \left|k\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right| \tag{14}$$

Podemos ignorar el término $\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}$. Finalmente:

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0$$

Argumente explicitamente los pasos que siguió al desarrollar los ejercicios

Universidad de Valparaíso