Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish   Semestre I 2025

Tarea 5

---

1. Mostrar que
$$\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = \sum_{\ell=0}^{n} P_\ell(\cos\theta) P_{n-\ell}(\cos\theta)$$

2. Mostrar que, cuando $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, la función $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ satisface la ecuación de Laplace. Encontrar el potencial electrostatico adentro de una región esférica limitada por dos hemisferios (conductores) donde el potencial toma los valores $\pm V$ respectivamente. [Pista: la relación de ortogonalidad entre los polinomios de Legendre será útil.]

3. El potentical ϕ satisface la ecuación de Laplace adentro del disco unitario $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | r \leq 1\}$ con condición de contorno
$$\phi(r=1,\theta) = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi/2 & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$
Por el método de separación de variables mostrar que
$$\phi(r,\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} \frac{\sin[(2n-1)\theta]}{2n-1} \tag{1}$$

4. Demostrar la formula de Rodrigues para la ecuación de Legendre:
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$$

5. Demostrar la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel:
$$\int_0^a J_n(k_{nj} r/a) J_n(k_{ni} r/a) r dr = \frac{a^2}{2} \delta_{ij} \left[J_n'(k_{ni})\right]^2 = \frac{a^2}{2} \delta_{ij} [J_{n+1}(k_{ni})]^2$$

6. Demostrar el resultado que vimos en clase:
$$B_{0j} = \frac{2C}{a^2} \frac{1}{[J_1(k_{0j})]^2} \int_0^a J_0(k_{0j} r/a) r dr = \frac{2C}{k_{0j}} \frac{1}{J_1(k_{0j})}$$