

Clase n°18

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

8 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- ▶ Calcular áreas en coordenadas polares.

Cálculo de áreas en coordenadas polares

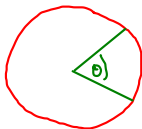
Recordar:

• Área del círculo de radio r :



$$A = \pi r^2$$

• Área de un sector circular de ángulo θ es



$$A_{\triangle} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

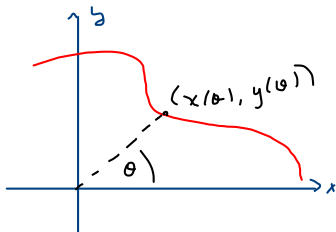
Cálculo de áreas en coordenadas polares

Supongamos que

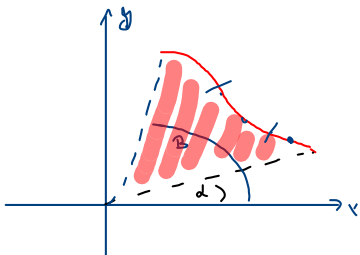
$$r = f(\theta)$$

$$x = f(\theta) \cdot \cos \theta$$

$$y = f(\theta) \cdot \sin \theta$$



¿Cuál es el área comprendida entre el ángulo α y β ?



Vamos a realizar una partición de $[\alpha, \beta]$. Supongamos que la longitud de los subintervalos sean iguales, y generemos n subintervalos de la forma

$[\theta_{i-1}, \theta_i]$, donde $\alpha = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n = \beta$.

Cálculo de áreas en coordenadas polares

En cada subintervalo vamos a elegir $E_i \in \mathbb{R}$, tal que
 $E_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

El área de cada sector circular es

$$A_i = \frac{[f(E_i)]^2 \cdot (\theta_i - \theta_{i-1})}{2}$$

Luego, una aproximación del área buscada es

$$A \approx \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [f(E_i)]^2 \cdot (\theta_i - \theta_{i-1})$$

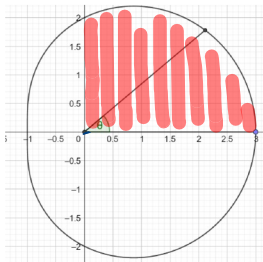
Cuando $n \rightarrow \infty$, el área buscada está dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Cálculo de áreas en coordenadas polares

Ejemplo 61

Encuentre el área acotada por la curva $r = 2 + \cos\theta$ y los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

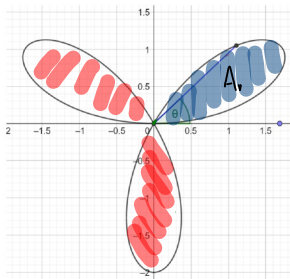


$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 + \cos\theta]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) + \frac{1}{4} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(2\theta)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) \\ &= \frac{9\pi}{8} + 2. \end{aligned}$$

Cálculo de áreas en coordenadas polares

Ejemplo 62

Encuentre el área encerrada por la curva $r = 2 \sin(3\theta)$.



$$\dot{?} r = 0?$$

$$2 \sin(3\theta) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \sin(3\theta) = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad 3\theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\Rightarrow) \quad \theta = \frac{k\pi}{3}$$

• si $k=0$ entonces

$$\theta = 0$$

• si $k=1$ entonces $\theta = \frac{\pi}{3}$

• si $k=2$ entonces $\theta = \frac{2\pi}{3}$

• si $k=3$ entonces $\theta = \pi$.

luego, el área A_1 está dada por

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [2 \cdot \sin(3\theta)]^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \sin^2(3\theta) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos(6\theta)}{2} d\theta$$

$$= \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sin(6\theta)}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} \left(\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - \sin(6 \cdot 0) \right)$$

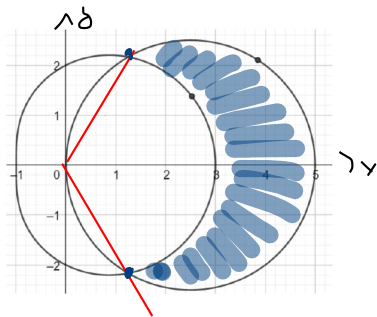
$$= \frac{\pi}{3}$$

\therefore , el área buscada es $\pi [u^2]$.

Cálculo de áreas en coordenadas polares

Ejemplo 63

Encuentre el área en el interior del círculo $r = 5 \cos \theta$ y fuera del cardioide $r = 2 + \cos(\theta)$.



Ejercicios propuestos

1. Calcular el área encerrada por la curva $r = 3 \sin(2\theta)$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.