Clase nº7

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

6 de Septiembre 2021

Clase anterior

Ejemplo 28

Integrar por medio de sustituciones trigonométricas

$$\int \frac{2e^{4x}}{\sqrt{10 - e^{4x}}} \cdot dx$$

Integración de funciones racionales

Objetivo de la clase

Integrar una función racional por medio de fracciones simples o parciales.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 29

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$
$$= 2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C$$

Integración de funciones racionales

Definición 9

Una función racional $R(x)$ es un cociente de polinomios,
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Idea

Para integrar $R(x)$ estudiaremos la descomposición de $R(x)$ en fracciones parciales simples.

Integración de funciones racionales

Descomposición de un polinomio en factores

Consideremos el polinomio $Q(x)$ de grado n, este polinomio se puede descomponer en factores lineales para las raíces reales y de factores cuadráticos no reducible en $\mathbb{R}$ para las raíces complejas conjugadas. Es decir,

$$Q(x) = (x - r_1)^{n_1} ... (x - r_j)^{n_j} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} ... (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k},$$

donde, $n_1 + ... + n_j + m_1 + ... + m_k = n$, y $a_k x^2 + b_k x + c_k$ son polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 =$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

b) $x^2 + 1$, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son i y $-i$.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$

b) $x^2 + 1$, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son i y $-i$.

c) $x^4 - 1 =$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

b) $x^2 + 1$, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son i y $-i$.

c) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 30

a) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

b) $x^2 + 1$, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son i y $-i$.

c) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

d) $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 =$

Integración de funciones racionales

Descomposición de una función racional en fracciones simples

Sea $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Si el grado del numerador es igual o mayor que el denominador, entonces realizando la división de polinomios obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $F(x)$ y $G(x)$ son polinomios tal que el grado de $G(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 31

a) $\dfrac{x^2 + 9x + 18}{x + 3} =$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 31

a) $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3} = x+6.$ En este caso $F(x) = x+6$ y $G(x) = 0$.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 31

a) $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3} = x+6$. En este caso $F(x) = x+6$ y $G(x) = 0$.

b) $\dfrac{8x^3+5x^2-3x+5}{x^2-1} =$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 31

a) $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3} = x+6$. En este caso $F(x) = x+6$ y $G(x) = 0$.

b) $\dfrac{8x^3+5x^2-3x+5}{x^2-1} = 8x+5+\frac{5x+10}{x^2-1}$. En este caso $F(x) = 8x+5$ y $G(x) = 5x+10$.

Integración de funciones racionales

Teorema 10

Sea $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y tales que

a) $Q(x)$ puede descomponerse de la forma

$$Q(x) = (x - r_1)^{n_1} \dots (x - r_j)^{n_j} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \dots (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k},$$

b) $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes,

c) el grado del numerador es menor que el del denominador.

Entonces $R(x)$ puede escribirse de la forma:

Integración de funciones racionales

Teorema 10

$$
\begin{aligned}
R(x) = {} & \frac{A}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{B}{(x-r_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{C}{(x-r_1)} \\
& + \frac{D}{(x-r_2)^{n_2}} + \frac{E}{(x-r_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{F}{(x-r_2)} \\
& + \dots + \\
& + \frac{Gx+H}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \frac{Ix+K}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{m_1-1}} + \dots \\
& + \frac{Lx+M}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \dots + \\
& + \frac{Nx+P}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k}} + \frac{Qx+R}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k-1}} + \dots \\
& + \frac{Sx+T}{(a_kx^2+b_kx+c_k)}
\end{aligned}
$$

para todo x tal que $Q(x) \neq 0$; y donde $A, B, C, \dots,$ son constantes reales.

Integración de funciones racionales

Observación

Para encontrar las constantes $A, B, C, \ldots$, (del teorema anterior) se debe realizar la suma de fracciones del segundo miembro cuyo mínimo común denominador es $Q(x)$, y se obtiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

donde $S(x)$ involucra los coeficientes desconocidos $A, B, C, \ldots$.
De la ecuación (3) se obtiene

$$P(x) = S(x).$$

Recordamos y utilizamos el hecho de que dos polinomios son iguales si sus respectivos coeficientes de las potencias de x son iguales, se obtienen las ecuaciones cuyas soluciones dan los valores de $A, B, C, \ldots$.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 32

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 32

Integración de funciones racionales

Ejemplo 33

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 33

Integración de funciones racionales

Integración de funciones Racionales

Desarrollando una función racional en fracciones simples o parciales, la integral de dicha función se transforma en una suma de integrales del tipo:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx,$
2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n\,dx},\ \ n \neq -1,$
3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, cuando ax^2+bx+c no tiene raíces reales.

Integración de funciones racionales

Ejemplo 34

$$\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 34

Integración de funciones racionales

Ejercicio propuesto

$$\int \frac{x^5 + 8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6}\, dx =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 35

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 35

Integración de funciones racionales

Ejemplo 36

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx =$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo 36

Integración de funciones racionales

Ejemplo 36

Integración de funciones racionales

Observación

Podemos notar que:

1. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,\ \ n \neq -1, a > 0.$$

Integración de funciones racionales

Observación

Para calcular $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales, podemos:

a) Completar el cuadrado del binomio en el denominador

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned} \tag{2}$$

Integración de funciones racionales

Observación

b) Consideramos z una variable que cumple con:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a}z^2 \tag{3}$$

Despejando nos quedaremos con:

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{ac-b^2}}{2a}z; a>0 \tag{4}$$

Integración de funciones racionales

Observación

c) Utilizando (2) y (3) se obtiene que

$$ax^2 + bx + c = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}\right](z^2 + 1)$$

Integración de funciones racionales

Observación

d) Utilizando (4) se obtiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \int \frac{Cz+D}{(z^2+1)^n}\,dz \\ &= C\int \frac{z}{(z^2+1)^n}\,dz + D\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dx;\end{aligned}$$

donde A, B, C, D son constantes.

Integración de funciones racionales

Ejercicio Propuesto

$\int \frac{x+1}{3x^2+6x+9}\,dx = I$ Para resolver I :

a) ¿Puedo utilizar algo similar a los ejemplos anteriores?

b) ¿Qué problemas surgen al intentar resolver esta integral?

c) ¿Qué diferencia hay entre los polinomios $Q(x)$ de los ejemplos anteriores y el polinomio $3x^2+6x+9$?

Integración de funciones racionales

Ejercicio Propuesto

Resolver

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{(x+2)(x-1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+4)(x-5)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.