Ejercitación: tres ejercicios

Ejercicio 14-2. En el espacio de las matrices cuadradas $M_{2x2}(R)$ consideramos la base canónica

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y la base

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en ambas bases.

Solución:

Debemos expresar a la matriz dada como combinación lineal de las matrices de la base.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rápidamente encontramos un sistema de ecuaciones, muy fácil de resolver:

$$\begin{cases} -4 = \alpha + 0 + 0 + 0 \\ 1 = 0 + \beta + 0 + 0 \\ 0 = 0 + 0 + \gamma + 0 \\ 2 = 0 + 0 + 0 + \delta \end{cases}$$

La solución es:

$$\alpha = -4 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = 0 \qquad \delta = 2$$

En esa base, la matriz se expresa …

$$\boldsymbol{A = (-4, 1, 0, 2)_N}$$

Ahora, hagámoslo para la base V:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4 = \alpha + \beta + \gamma + 5\delta \\ 1 = \alpha + 2\beta + \gamma + \delta \\ 0 = 2\alpha + \beta + \gamma + 2\delta \\ 2 = 3\alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$$

Es un sistema determinado (matriz con determinante distinto de cero) con solución:

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = -1 \qquad \delta = -1$$

Finalmente ... $\boldsymbol{A = (1, 1, -1, -1)_V}$

Ejemplo 2 (prueba 3 del 1er. Semestre de 2020)

Consideremos el subespacio U de **R**4 generado por la base:

$$U = \{(1,1,1,1), (1,1,2,4), (1,2,-4,-3)\}$$

Encuentre una base ortogonal de ese subespacio U (no es necesario normalizar) que contenga al vector (1,1,1,1).

No se pide normalizar.

$\vec{v_1} = \langle 1,1,1,1\rangle \quad \vec{v_2} = \langle 1,1,2,4\rangle \quad \vec{v_3} = \langle 1,2,-4,-3\rangle$

$\boxed{\vec{u_1} = \langle 1,1,1,1\rangle}$ (conservamos el 1er vector)

$$\vec{u_2} = \vec{v_2} - \frac{\vec{v_2}\cdot\vec{u_1}}{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}}\cdot\vec{u_1} = \langle 1,1,2,4\rangle - \frac{\langle 1,1,2,4\rangle\cdot\langle 1,1,1,1\rangle}{\langle 1,1,1,1\rangle\langle 1,1,1,1\rangle}\vec{u_1}$$

$$\vec{u_2} = \langle 1,1,2,4\rangle - \frac{8}{4}\cdot\langle 1,1,1,1\rangle$$

$$\vec{u_2} = \langle 1,1,2,4\rangle - \langle 2,2,2,2\rangle$$

$$\boxed{\vec{u_2} = \langle -1,-1,0,2\rangle}$$

$$\vec{u_3} = \vec{v_3} - \frac{\vec{v_3}\cdot\vec{u_1}}{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}}\cdot\vec{u_1} - \frac{\vec{v_3}\cdot\vec{u_2}}{\vec{u_2}\cdot\vec{u_2}}\cdot\vec{u_2}$$

$$\vec{u_3} = \langle 1,2,-4,-3\rangle - \frac{\langle 1,2,-4,-3\rangle\cdot\langle 1,1,1,1\rangle}{\langle 1,1,1,1\rangle\cdot\langle 1,1,1,1\rangle}\vec{u_1} - \frac{\langle 1,2,-4,-3\rangle\cdot\langle -1,-1,0,2\rangle}{\langle -1,-1,0,2\rangle\cdot\langle -1,-1,0,2\rangle}\cdot\vec{u_2}$$

$$\vec{u_3} = \langle 1,2,-4,-3\rangle - \left(-\frac{4}{4}\right)\langle 1,1,1,1\rangle - \left(\frac{-9}{6}\right)\langle -1,-1,0,2\rangle$$

$$\vec{u_3} = \langle 1,2,-4,-3\rangle + \langle 1,1,1,1\rangle - \langle \tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},0,-3\rangle$$

$$\vec{u_3} = \langle \tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-3,1\rangle$$

$$\boxed{\vec{u_3} = \langle 1,3,-6,2\rangle} \longleftarrow$$ Se puede hacer porque no se pide normalizar

Ejercicio 15-5.	Sean los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = (1, 2, 1, 4, 5)$ de $\mathbf{R}^5$. Completar una base de $\mathbf{R}^5$ agregándole al conjunto vectores de la base canónica $$(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), \text{etc},$$

Solución:

La explicación:

El vector

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = (0, 0, 2, 0, 0) = 2 \cdot (0,0,1,0,0)$$

Formen una combinación lineal de $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{w_2}}$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$$

No cualquier vector de $\mathbf{R}^5$ puede ser expresado así. Necesitan cinco grados de libertad. Por tanto, habría que agregar tres elementos más a la base. Asumiendo que α sea el grado de libertad de la primera componente y β el de la tercera, faltan grados de libertad en la segunda, cuarta, y quintas componentes. Por tanto, agreguen los vectores de la base canónica que permitan expresar vectores con esas componentes no nulas como combinación lineal de ellos.

B = {(1,2,3,4,5) (1,2,1,4,5}, (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)}

Pero hay otras posibilidades ya que pueden utilizar también α como grado de libertad de la segunda, de la cuarta o de la quinta componente y completar las que faltan.

Un procedimiento más mecánico:

Formen la matriz de vectores columna y escalerícenla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observen que los pivotes quedaron en la fila 1 y la fila 3. Completen con los vectores de la base canónica que les permiten tener pivotes en las filas que faltan: fila 2, fila 4 y fila 5. Esto es, agreguen a la base los vectores:

(0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)

Aunque hay otras soluciones posibles.