Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre II 2023

Tarea 4

---

1. Evaluar las siguientes integrales:

   (a) $\int_0^1 (1+it)^2 dt$

   Solución:

   $$\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2 + 2it) dt = [t - \frac{1}{3}t^3 + it^2]_0^1 = \frac{2}{3} + i \tag{1}$$

   (b) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

   Solución:

   $$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1 - \frac{2i}{t}\right) dt = [-\frac{1}{t} - t - 2i\ln(t)]_0^1 = -\frac{1}{2} - 2i\ln(2) \tag{2}$$

   Notar que el logaritmo es el logaritmo natural (no complejo) ya que se supone que $t \in \mathbb{R}$.

   (c) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$

   Solución: Escribimos las partes real e imaginario: $e^{i2t} = \cos(2t) + i\sin(2t)$, entonces

   $$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} (\cos(2t) + i\sin(2t))\, dt &= \int_0^{\pi/6} \cos(2t)dt + i\int_0^{\pi/6} \sin(2t)dt \\ &= \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi/6} - i\,\frac{1}{2}\cos(2t)\Big|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4} \end{aligned} \tag{3}$$

   (d) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ con $\mathrm{Re}(z) > 0$.

   Solución: Podemos escribir: $e^{-zt} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt}e^{-iyt} = e^{-xt}[\cos(yt) - i\sin(yt)]$, entonces

   $$\int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt}\cos(yt)dt - i\int_0^{\infty} e^{-xt}\sin(yt))dt \tag{4}$$

Vemos la razón por restringir $\mathrm{Re}(z) > 0$: la parte real es x, entonces si $x < 0$ el factor exponencial iría al infinito en el límite superior de la integral, y la integral no existiría. Podemos evaluar cada integral usando integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt)dt &= \frac{1}{y}\sin(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-x}{y}\sin(yt)e^{-xt}dt \\ &\frac{1}{y}\sin(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \left[\frac{x}{y^2}\cos(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-x^2}{y^2}\cos(yt)e^{-xt}dt\right] \\ &\frac{1}{y}\sin(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \frac{x}{y^2}\cos(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty - \frac{x^2}{y^2}\int_0^\infty \cos(yt)e^{-xt}dt\end{aligned} \tag{5}$$

Tenemos la misma integral en ambos lados de la ecuación arriba:

$$\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt)dt = \frac{1}{y}\sin(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \frac{x}{y^2}\cos(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty \tag{6}$$

En el límite $t \to \infty$ la exponencial $e^{-xt} \to 0$ mientras $|\sin(yt)| \leq 1$ y $|\cos(yt)| \leq 1$, por lo tanto el lado derecho arriba es cero en el límite $t \to \infty$. Sustituyendo $t = 0$ podemos evaluar la integral:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt)dt = \left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{-1}\frac{x}{y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{7}$$

La otra integral en ec. (4) es

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xt}\sin(yt)dt &= -\frac{1}{y}\cos(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x}{y}\cos(yt)e^{-xt}dt \\ &-\frac{1}{y}\cos(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \left[\frac{x}{y^2}\sin(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^2}{y^2}\sin(yt)e^{-xt}dt\right] \\ &-\frac{1}{y}\cos(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \frac{x}{y^2}\sin(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty - \frac{x^2}{y^2}\int_0^\infty \sin(yt)e^{-xt}dt\end{aligned} \tag{8}$$

De nuevo, podemos reorganizar la ecuación arriba para obtener la integral:

$$\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\int_0^\infty e^{-xt}\sin(yt)dt = -\frac{1}{y}\cos(yt)e^{-xt}\Big|_0^\infty - \frac{x}{y^2}\sin(yt)e^{-xt}dt\Big|_0^\infty \tag{9}$$

Evaluando el lado derecho tenemos

$$\int_0^\infty e^{-xt}\sin(yt)dt = \frac{1}{y}\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{-1} = \frac{y}{x^2+y^2} \tag{10}$$

Combinando estos resultados llegamos a

$$\int_0^\infty e^{-zt}dt = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \tag{11}$$

Podemos evaluar la integral **formalmente** en una manera mucho más rápida:

$$\int_0^\infty e^{-zt}dt = -\frac{1}{z}e^{-zt}\Big|_0^\infty = \left[0-\frac{-1}{z}\right] = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{12}$$

Este es igual a lo que obtenemos por el desarrollo más largo.

2. Muestre que si m y n son enteros

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases} \tag{13}$$

Solución:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\theta]d\theta + i\int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\theta]d\theta \tag{14}$$

En el caso de $m = n$ las integrales son

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\theta]d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\theta]d\theta &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

así que tenemos el primer caso de la ecuación 14. Para el segundo caso $(m \neq n)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\theta]d\theta &= \frac{1}{m-n}\sin[(m-n)\theta]\Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\theta]d\theta &= \frac{-1}{m-n}\cos[(m-n)\theta]\Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

por la periodicidad de estas funciones.

3. Sea $y(x)$ una función real definida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ por medio de las siguientes ecuaciones:

$$y(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\pi/x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{17}$$

   (a) Muestre que la ecuación $z = x + iy$ con $(0 \leq x \leq 1)$ representa un arco C que tiene intersecciones con el eje real en los puntos $z = 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$ y $z = 0$ como está mostrado en la figura.

   Solución: En el punto $z = 0$ tenemos $x = 0$ y $y = 0$, así que hay una intersección con el eje real en ese punto. Para encontrar las otras intersecciones resolvemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/n \tag{18}$$

   donde $n = 1, 2, \ldots$.

   (b) Verifique que el arco C en la parte (a) es, de hecho, un arco **suave**.
   Sugerencia: Para establecer la continuidad de $y(x)$ en $x = 0$ se puede observar que

$$0 \leq \left|x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq x^3 \tag{19}$$

   cuando $x > 0$. Una observación parecida aplica en encontrar $y'(0)$ y mostrar que $y'(x)$ es continua en $x = 0$.
   Solución: La primera parte de la respuesta es casi lista. La definición de continuidad dice que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad |z - z_0| < \delta. \tag{20}$$

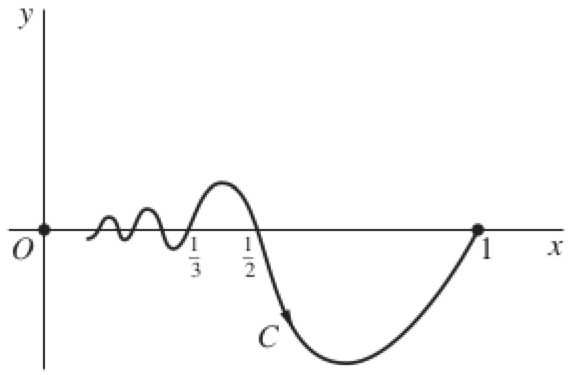

Figure 1: Arco para la pregunta 3.

En este caso tenemos $z_0 = 0$ y el valor de la función en ese punto es 0. De la desigualdad dada en la pregunta, sabemos que $|y(x)| \leq x^3$ cuando $x > 0$ (este resultado es porque $|\sin(\pi/x)| \leq 1$). Entonces, $\delta = x$, y siempre podemos encontrar un valor de δ para cualquier valor de $\epsilon = x^3$ para satisfacer la desigualdad. Ahora aplicamos un procedimiento similar a la derivada:

$$y'(x) = 3x^2 \sin(\pi/x) - x\pi \cos(\pi/x) \tag{21}$$

Por desigualdad triangular tenemos

$$|y'(x)| = |3x^2 \sin(\pi/x) - x\pi \cos(\pi/x)| \leq |3x^2 \sin(\pi/x)| + |-x\pi \cos(\pi/x)| \tag{22}$$

El primer módulo en el lado derecho es

$$|3x^2 \sin(\pi/x)| \leq 3x^2 \tag{23}$$

El segundo módulo es

$$|-x \cos(\pi/x)| \leq x \tag{24}$$

Las desigualdades arriba vienen del hecho que $|\sin(\pi/x)| \leq 1$ y $|\cos(\pi/x)| \leq 1$. Entonces, con $\epsilon = 3x^2 + x$, siempre existe un $\delta = x$ tal que

$$|y'(x)| < \epsilon \tag{25}$$

así que la derivada es continua en el origen, y el arco es suave.

4. Evaluar la integral

$$\int_C f(z)dz \tag{26}$$

para cada función $f(z)$ y contorno C:

(a) $f(z)$ es la rama principal de z^{-1-2i}

$$z^{-1-2i} = \exp[(-1-2i)\text{Log}z] \quad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg}z < \pi) \tag{27}$$

y C es el contorno $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$.

Solución: podemos escribir la integral de contorno como

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(\theta)]z'(\theta)d\theta \tag{28}$$

donde $z'(\theta) = ie^{i\theta}$ y $f[z(\theta)] = \exp[(-1-2i)(\ln 1 + i\theta)$. Por lo tanto la integral queda

$$\int_0^{\pi/2} i\exp[(-1-2i)(i\theta)]\exp(i\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} i\exp[-i\theta + 2\theta + i\theta]d\theta = \int_0^{\pi/2} ie^{2\theta}d\theta \tag{29}$$

Se puede evaluar esa integral inmediatamente:

$$i\int_0^{\pi/2} e^{2\theta}d\theta = i\left[\frac{1}{2}e^{2\theta}\right]_0^{\pi/2} = i\frac{1}{2}\left[e^{\pi}-1\right] \tag{30}$$

(b) $f(z) = \pi\exp(\pi\bar{z})$ y C es el borde del cuadro con vertices en los puntos 0, 1, $1+i$ y i. La orientación de C es positiva.

Solución: Evaluamos primero la parte del camino entre $(0,0)$ y $(1,0)$. Podemos parametrizar el camino usando las coordenadas rectangulares, así que $z = x + iy$. En esta parte del contorno $y = 0$, $x \in [0,1]$, $z = x$, $\bar{z} = x$ y $dz = dx$. La integral queda

$$\int_0^1 \pi\exp(\pi x)dx = \exp(\pi x)|_0^1 = e^{\pi} - 1 \tag{31}$$

La segunda parte es entre $(1,0)$ y $(1,1)$. En esta línea tenemos $x = 1$, $y \in [0,1]$, así que $z = 1 + iy$, $\bar{z} = 1 - iy$, $dz = idy$. La integral queda

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi\exp[\pi(1-iy)]idy &= \pi\exp(\pi)\int_0^1 i\exp(-i\pi y)dy \\ &= \pi\exp(\pi)\left[-\frac{i}{i\pi}\exp(-i\pi y)\right]_0^1 = \exp(\pi)\left[-\exp(-i\pi)+1\right] = 2e^{\pi}\end{aligned} \tag{32}$$

ya que $\exp(-i\pi) = -1$. La tercera parte es entre $(1,1)$ y $(0,1)$. En esta línea tenemos $y = 1$, $x \in [1,0]$, así que $z = x + i$, $\bar{z} = x - i$, $dz = dx$. La integral queda

$$\int_1^0 \pi\exp[\pi(x-i)]dx = \pi\exp(-i\pi)\int_1^0 \exp(\pi x)dx = -\exp(\pi x)|_1^0 = -1 + e^{\pi} \tag{33}$$

Finalmente, la última parte es entre $(0,1)$ a $(0,0)$. En esta línea tenemos $x = 0$, $y \in [1,0]$, así que $z = iy$, $\bar{z} = -iy$ y $dz = idy$. La integral queda

$$\int_1^0 \pi\exp(-i\pi y)idy = \pi\left(-\frac{i}{i\pi}\right)\exp(-i\pi y)|_1^0 = -1 + (-1) = -2 \tag{34}$$

Sumando todas las cuatro contribuciones a la integral de contorno total tenemos

$$\int_C \pi\exp(\pi\bar{z})dz = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} - 1 + e^{\pi} - 2 = 4(e^{\pi}-1) \tag{35}$$

5. Sea C_0 un círculo centrado en z_0 con radio R. Utilice la parametrización

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \tag{36}$$

para mostrar que

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = \begin{cases} 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 2\pi i & n = 0 \end{cases} \tag{37}$$

Solución: Evaluamos la integral directamente usando

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(\theta)] z'(\theta) d\theta \tag{38}$$

Entonces, tenemos

$$f[z(\theta)] = (z(\theta) - z_0)^{n-1} = (z_0 + Re^{i\theta} - z_0)^{n-1} = R^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \tag{39}$$

$$z'(\theta) = iRe^{i\theta} \tag{40}$$

Por lo tanto la integral queda

$$\int_C (z - z_0)^{n-1} dz = iR^n \int_a^b e^{in\theta} d\theta = iR^n \frac{1}{in} e^{in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} \quad (n \neq 0) \tag{41}$$

Tenemos $\exp(in\pi) - \exp(-in\pi) = 0$ (por periodícidad) así que hemos demostrado el primer caso. Cuando $n = 0$ el integrando es igual a 1, así que tenemos

$$\int_C (z - z_0)^{-1} dz = iR^0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi i \tag{42}$$

6. Sin evaluar la integral, muestre que

(a)

$$\left| \int_C \frac{z+4}{z^3 - 1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{7} \tag{43}$$

(b)

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3} \tag{44}$$

cuando C es el arco del círculo $|z| = 2$ desde $z = 2$ a $z = 2i$.

Solución:

(a) El numerador satisface (desigualdad triangular)

$$|z + 4| \leq |z| + 4 = 6 \tag{45}$$

El denominador satisface (también por la desigualdad triangular)

$$|z^3 - 1| \geq ||z^3| - |-1|| = ||z|^3 - 1| = 7 \tag{46}$$

Entonces

$$\left| \frac{z+4}{z^3 - 1} \right| = \frac{|z+4|}{|z^3 - 1|} \leq \frac{6}{7} \tag{47}$$

En el teorema en clase vimos que

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \tag{48}$$

donde $|f(z)| \leq M$ en el contorno C y L es la longitud del contorno. En este caso el contorno es un arco del círculo $|z| = 2$ entre $z = 2$ (eje real positivo) y $z = 2i$ (eje imaginario positivo), así que $L = \pi$ y el resultado sigue.

(b) El numerador es simplemente 1, pero el denominador satisface

$$|z^2 - 1| \geq ||z^2| - |-1|| = ||z|^2 - 1| = 3 \tag{49}$$

Entonces

$$\frac{1}{|z^2 - 1|} \leq 3 \tag{50}$$

Por aplicación del teorema el resultado sigue. OJO con las desigualdades dependiendo si es el númerador o el denominador (en el caso de un cociente).

7. Utilice el teorema de la sección 48 para mostrar que

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{51}$$

cuando C_0 es cualquier contorno cerrado que no pasa a través del punto z_0.

Solución: Para cualquier dominio D que excluye el punto $z = z_0$ se puede encontrar inmediatamente la antiderivada del integrando $f(z) = (z - z_0)^{n-1}$:

$$F(z) = \frac{1}{n}(z - z_0)^n \quad (n \neq 0) \tag{52}$$

Notar que la pregunta especifíca que $n \neq 0$. Esta es una antiderivada del integrando ya que

$$F'(z) = f(z) \tag{53}$$

para todo $z \neq z_0$. Ya que la antiderivada existe en todo D, y el contorno C_0 está totalmente en D (es decir, no pasa por el punto z_0) por el teorema en la sección 48 tenemos que la integral de contorno a lo largo de cualquier contorno cerrado C_0 en D es nula. [Pregunta: sabemos de la pregunta 5 que en el caso $n = 0$ la integral NO es nula. ¿Qué pasa con el teorema de sección 48 en ese caso?]

8. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que

$$\int_C f(z) dz = 0 \tag{54}$$

cuando C es el círculo unitario $|z| = 1$ y

(a) $f(z) = ze^{-z}$

(b) $f(z) = \text{Log}(z + 2)$

Solución:

(a) La función ze^{-z} es entera (polinomio multiplicado por la exponencial compleja). Así que es analítica en todo el plano complejo. El teorema de Cauchy-Goursat dice que si $f(z)$ es analítica en C y también en todo punto adentro la integral de contorno es nula.

(b) La función $f(z) = \mathrm{Log}(z+2)$ tiene un punto de rama en $z = -2$ y el corte extiende de ese punto a lo largo del eje real imaginario. Así que, en el círculo $|z| = 1$ y adentro la función si es analítica y podemos aplicar el teorema para decir que la integral es nula. [NO podríamos decir lo mismo para $f(z) = \mathrm{Log}(z)$, por ejemplo.]

9. Muestre que si C es un contorno cerrado simple, con orientación positiva, el área de la región encerrada por C se puede escribir

$$\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz. \tag{55}$$

Sugerencia: se puede utilizar la expresión

$$\int_C f(z)dz = \int\int_R (-v_x - u_y)dA + i\int\int_R (u_x - v_y)dA \tag{56}$$

aunque $f(z) = \bar{z}$ no es analítica en ningún punto.

Solución: Primero, demostraremos la expresión dada en la sugerencia (este paso no es necesario para responder a la pregunta, pero es bueno ver todos los detalles!) En el libro habla del teorema de Green, que dice

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y)dA \tag{57}$$

En nuestro caso tenemos

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy) = \oint_C (u+iv)dx + i(u+iv)dy \tag{58}$$

Entonces, identificamos $P = u + iv$ y $Q = -v + iu$, y tenemos

$$\iint_R (Q_x - P_y)dA = \iint_R (-v_x + iu_x - u_y - iv_y)dA = \iint_R (-v_x - u_y)dA + i\iint_R (u_x - v_y)dA \tag{59}$$

Así que, por el teorema de Green, tenemos

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R (-v_x - u_y)dA + i\iint_R (u_x - v_y)dA \tag{60}$$

Ahora obtenemos las expresiones para $u(x,y)$ y $v(x,y)$:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \overline{z} = x - iy \quad u(x,y) = x \quad v(x,y) = -y \tag{61}$$

Por lo tanto $u_x = 1, u_y = 0, v_x = 0, v_y = -1$. Sustituimos estos valores en la integral arriba:

$$\iint_R (-v_x - u_y)dA + i\iint_R (u_x - v_y)dA = \iint_R 0dA + i\iint_R (1-(-1))dA = 2i\iint_R dA \tag{62}$$

Entonces

$$\frac{1}{2i}\oint_C \overline{z}dz = \frac{1}{2i}2i\iint_R dA = \iint_R dA \tag{63}$$

La última integral es simplemente el área de la región encerrada por C.

10. Encuentre el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del círculo $|z - i| = 2$ en el sentido positivo cuando

(a) $g(z) = 1/(z^2 + 4)$

(b) $g(z) = 1/(z^2+4)^2$

Solución:

(a) La formula integral de Cauchy dice que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{64}$$

donde $f(z)$ es analítica en C y adentro. Entonces escribimos

$$g(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} \tag{65}$$

Hay dos singularidades en $z = \pm 2i$. El contorno de la integral es un círculo de radio 2 centrado en $z = i$, así que adentro del contorno hay la singularidad en $z = 2i$. Entonces tenemos que escribir

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} \tag{66}$$

ya que $f(z)$ es analítica en C y adentro. Ahora usamos esta $f(z)$ y $z_0 = 2i$ en la formula de Cauchy, con $n = 0$:

$$2\pi i f(2i) = \int_C \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)} \tag{67}$$

La integral a la derecha es exactamente la integral que queremos evaluar. Solamente tenemos que calcular $2\pi i f(2i) = 2\pi i/4i = \pi/2$.

(b) En este caso escribimos

$$g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{[(z+2i)(z-2i)]^2} = \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \tag{68}$$

Así que escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \tag{69}$$

y usamos la formula de Cauchy con $n = 1$:

$$2\pi i f'(2i) = \int_C \frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \tag{70}$$

Así que $f'(2i) = -2/(4i)^3 = 2/(64i) = 1/(32i)$, y $2\pi i/(32i) = \pi/16$.

11. Muestre que, si f es analítica adentro y en un contorno cerrado simple C, y z_0 no está en C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} \tag{71}$$

Solución: La formula integral de Cauchy dice

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} \tag{72}$$

para $f(z)$ analítica en C y adentro, y z_0 adentro de C. Ya que $f(z)$ es analítica en C y adentro (por suposición de la pregunta) tenemos que $f'(z)$ también es analítica en el mismo dominio (teorema de sección 57). Por lo tanto podemos aplicar la fórmula de Cauchy a la derivada:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)dz}{z-z_0} \tag{73}$$

Pero también tenemos la extensión de la fórmula de Cauchy:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} \tag{74}$$

Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} \tag{75}$$

Notar que ambas integrales son nulas si z_0 está *fuera* de la región encerrada por C (teorema de Cauchy-Goursat). Así que la ecuación arriba aplica para cualquier z_0 no en C (no solamente para z_0 adentro de C).