4ª. prueba parcial

16 de Diciembre de 2021

Instrucciones:

* **La prueba es individual. Se recomienda no comentar el trabajo con otros estudiantes.**
* **El plazo de entrega de la prueba es el <u>16 de Diciembre a las 22.00 horas</u>.**
* **Se deberá enviar un documento único (pdf o Word con fotos pegadas) conteniendo fotos de la resolución escrita a mano por el estudiante. Se sugiere escanear para mayor claridad.**
* **El correo deberá enviarse desde el correo institucional del estudiante al correo <u>mario.marotti@uv.cl</u>**
* **En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible.**

1. Considere la transformación **T: P^3(x) → P^2(x)** que a cada polinomio de tercer grado (o menor) le asigna su "derivada", esto es:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$

(a) Encuentre núcleo e imagen de T, indicando nulidad y rango. **(1,0 puntos)**

(b) ¿Es **T** inyectiva y/o sobreyectiva? Explique brevemente. **(0,5 puntos)**

2. Para la transformación lineal **T: $R^3 \to R^3$** dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre valores y vectores propios. **(1,0 puntos)**

(b) ¿Es posible diagonalizar esa matriz? Explique brevemente. **(0,5 puntos)**

3. (a) Encuentre para que valores del ángulo α, la rotación en **R^2** definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

tiene valores propios reales. **(1,0 puntos)**

(b) Encuentre valores y vectores propios para el ángulo encontrado. **(0,5 puntos)**

4. Demostrar que si dos matrices A y B (no singulares) son **semejantes**, esto es, si existe una matriz C invertible tal que

$$B = C.A.C^{-1}$$

entonces:

(a) A^{-1} es semejante a B^{-1} **(1,0 puntos)**

(b) Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}. **(0,5 puntos)**

Ejercicio 1:

(a) La transformación es:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Su matriz es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Núcleo: $A \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{b=0} \quad \boxed{c=0} \quad \boxed{d=0}$$

Núcleo: Núcleo $T = \{(1,0,0,0)\}$ $\boxed{\text{Nulidad} = 1}$

Imagen: Imagen $T = \{(1,0,0)(0,2,0)(0,0,3)\}$ $\boxed{\text{Rango} = 3}$

Teorema de las dimensiones:

Nulidad T + Rango T = dim V (siendo V el conjunto de partida)

$1 + 3 = 4$

(b) Rango = dim W

$3 = 3$ Es sobreyectiva

Núcleo = $\{(1,0,0,0)\}$ Nul $T \neq 0$

No es inyectiva

Ejercicio 2:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2-\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

$$(2-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2-1) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) = 0$$

$$\boxed{(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0}$$

Valores propios: $\lambda = 2$ doble (orden de multiplicidad algebraica 2)

$\lambda = 4$ simple

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = 0 \quad z = 0 \quad x = \alpha$

$(x, y, z) = (\alpha, 0, 0) = \alpha \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\boxed{\vec{v}_{p_1} = \langle 1, 0, 0 \rangle}$ Orden de multiplicidad geométrica 1

Para $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$z = \alpha \quad y = -\alpha \quad x = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{p_2} = \langle 0, -1, 1 \rangle}$

No es diagonalizable. Tiene sólo 2 vectores propios.

Ejercicio 3:

(a)

$$\text{Matriz: } \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

$$\underbrace{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha.\lambda + \lambda^2 + \operatorname{sen}^2\alpha}_{\text{sumen } 1} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4.1.1}}{2}$$

Para que tenga valores propios reales deberá ser:

$$4\cos^2\alpha - 4 \geq 0$$

$$\cos^2\alpha - 1 \geq 0$$

$$\cos^2\alpha \geq 1$$

$$\cos\alpha = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0^\circ} \\ \boxed{\alpha = 180^\circ} \end{cases}$$

(b) Si $\alpha = 0$

$$\text{Matriz: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{\lambda = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \alpha \quad y = \beta \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_p} = \{\langle 1,0\rangle \langle 0,1\rangle\}$$

Si $\alpha = 180^\circ$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda = -1$$

Los mismos $\vec{v_p}$

Ejercicio 4: (de propiedades)

(a) $\boxed{B = C.A.C^{-1}}$

Multiplicando por izquierda o por derecha:

$$B.C = C.A.\underbrace{C^{-1}.C}_{I}$$

$$B.C = C.A$$

$$B.C.A^{-1} = C.\underbrace{A.A^{-1}}_{I}$$

$$B C.A^{-1} = C$$

$$\underbrace{B^{-1}.B}_{I}.C.A^{-1} = B^{-1}.C$$

$$C.A^{-1} = B^{-1}.C$$

$$\underbrace{C^{-1}.C}_{I}.A^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.C$$

$$\boxed{A^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.C} \Rightarrow A^{-1} \text{ y } B^{-1} \text{ son semejantes.}$$

(b) Si λ es valor propio de A.

$$A.X = \lambda.X$$

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{I}.X = A^{-1}.\lambda.X$$

$$X = A^{-1}.\lambda.X$$

$A^{-1}.\lambda = \lambda.A^{-1}$
Conmutan
(Puedo cambiar orden)
ya que $\lambda \in \mathbb{R}$ (no es una matriz)

$$\lambda^{-1}.X = \underbrace{\lambda^{-1}.\lambda}_{1}.A^{-1}.X.$$

$$\boxed{\lambda^{-1}.X = A^{-1}.X}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda^{-1} \text{ es valor propio de } A^{-1}}$