Clase nº29

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

12 de Noviembre 2021

Ejercicio 1

Sea la región

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -x^2 + 4 \geq y \quad \wedge \quad y \geq x^2 \quad \wedge \quad y \leq 3\}.$$

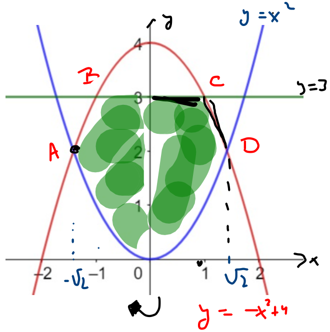
Determinar:

a) El área de R.

b) Calcular el perímetro de R.

c) El volumen generado por R al rotar con respecto al eje Y.

d) Calcular el área de la superficie generada al rotar R con respecto al eje X.



• Primero encontrar A, B, C y D. (ver Clase n°20)

Tenemos que

$A=(-\sqrt{2},2)$, $D=(\sqrt{2},2)$

$C=(1,3)$, $B=(-1,3)$

b

Luego

a) El área de R es

$$A_R = 2\left[\int_0^1 3 - x^2\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} -x^2+4-x^2\,dx\right]$$

$=$ calcular ...

b) $L_f = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

El Perímetro de R es

$$2\left[\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+(2x)^2}\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1+(-2x)^2}\, dx + \int_0^1 \sqrt{1+0^2}\, dx\right]$$

c) $V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$

$V_1 = 2\pi \int_0^1 x\,(3-x^2)\, dx$

$V_2 = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} x\,(-x^2+4-x^2)\, dx$

el volumen buscado es

$V = V_1 + V_2 = \ldots$ completar.

d)

Sea $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2+4$

$h(x) = 3$.

$$A(S_f) = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{1+[2x]^2}\, dx$$

$$A(S_g) = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (-x^2+4) \sqrt{1+[-2x]^2}\, dx$$

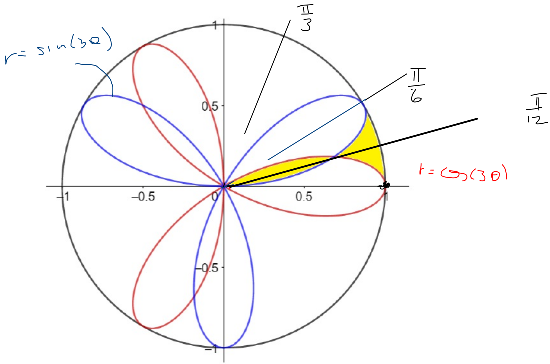
$$A(S_h) = 2\pi \int_0^1 3\sqrt{1+0^2}\, dx$$

$\therefore$ el área de la superficie buscada

$$A_T = 2\left(A(S_f) + A(S_g) + A(S_h)\right)$$

Ejercicio 2

Sean las curvas $r = \sin(3\theta)$; $r = \cos(3\theta)$ y $r = 1$. Calcular el área de la región pintada con color amarillo.



Notar que

- $\cos(3\theta) = 0 \iff 3\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

- $\sin(3\theta) = 0 \iff 3\theta = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

$$\theta = \frac{k\pi}{3}$$

- El ángulo en el cual se intersecan la curva

$r = \sin(3\theta)$ con $r = 1$ es $\frac{\pi}{6}$

$$\sin(3\theta) = 1 \iff 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

- El ángulo en el cual se intersecan la curva

$r = \sin(3\theta)$ con $r = \cos(3\theta)$ es $\frac{\pi}{12}$

$$\sin(3\theta) = \cos(3\theta) \iff 3\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

El área de la región en amarillo es

$$A_B = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} 1^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} [\cos(3\theta)]^2\, d\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} 1^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} [\sin(3\theta)]^2\, d\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} [\sin(3\theta)]^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} [\cos(3\theta)]^2\, d\theta$$

$= \ldots$ completar

Ejercicio 3

Calcular la longitud de arco de la función

$$y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin(\sqrt{x})$$

para $x \in [\frac{1}{4}, \frac{9}{10}]$.

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin(\sqrt{x})$

Luego

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$L_f = \int_{\frac{1}{4}}^{9/10} \sqrt{1 + \left[\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\right]^2}\, dx = \int_{\frac{1}{4}}^{9/10} \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x(1-x)}}\, dx$$

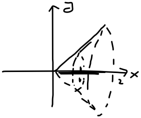
$$= \int_{\frac{1}{4}}^{9/10} \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}}\, dx = \int_{\frac{1}{4}}^{9/10} \sqrt{\frac{x+1-x}{x}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{9/10} \sqrt{\frac{1}{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]\Big|_{\frac{1}{4}}^{9/10} = 2\sqrt{\frac{9}{10}} - 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}.$$

Ejercicio 4

Hallar el área de la superficie generada por la rotación de la recta $y = mx$, (con $m > 0$) alrededor del eje X en $[1, 2]$. ¿Qué figura forma?

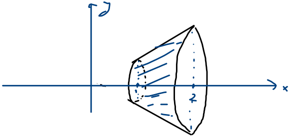
$$A(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



$$= 2\pi \int_1^2 m x \sqrt{1 + m^2}\, dx$$

$$= 3\pi m \sqrt{1+m^2}.$$

El área de la superficie generada corresponde al Área lateral de un cono truncado.



Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.