Guía IV

Cálculo II

Integrales impropias

9. Calcular

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx.$ **R:** $\frac{1}{4}$.

   b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx.$ **R:** $\frac{1}{\ln 2}$.

   c) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^8}\,dx.$ **R:** $\frac{1}{7(\ln 2)^7}$.

   d) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$ **R:** $\frac{\pi}{2}$.

   e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx.$ **R:** 2.

   f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **R:** $\frac{\pi^2}{8}$.

10. Hallar el área situada a la derecha de $x=3$ y limitada por la curva $y=\frac{1}{x^2-1}$ y el eje X. **R:** $\frac{\ln 2}{2}u^2$.

11. Hallar el área limitada por la curva y su asíntota:

$$y=\frac{8}{x^2+4}.$$

   R: $4\pi u^2$.

12. Demuestre que las siguientes integrales carecen de sentido.

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx.$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

13. Evaluar la integral

$$\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

   R: 6.

14. Hallar los valores de los parámetros a y b para que

$$\int_{1}^{\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx=1.$$

   R: $a=b=2e-2$

15. Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales

   a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}\,dx$
   R: converge

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\,dx$
R: converge

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x)(2+x)}}\,dx$
R: converge

d) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$
R: diverge

16. Se define la función gamma Γ de parámetro p como

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Demuestre que $\Gamma(p)$ es convergente si $p > 0$.

17. Use inducción para demostrar que

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!; \forall n \in \mathbb{N}.$$