Bases ortogonales

Consideremos la siguientes base de **R**^{3}**:**

$$\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0})(-\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0})(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{3})\}$$

Podemos observar que todos los vectores de dicha base son perpendiculares entre sí, lo cual se comprueba fácilmente mediante productos punto:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (2,1,0) \cdot (-1,2,0) = 2 \cdot (-1) + 1.2 + 0.0 = 0$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} = (2,1,0) \cdot (0,0,3) = 2 \cdot 0 + 1.0 + 0.3 = 0$$

$$\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} = (-1,2,0) \cdot (0,0,3) = (-1) \cdot 0 + 2.0 + 0.3 = 0$$

Definición 1: Una base de un espacio vectorial es **ortogonal** si cualesquiera sean los vectores $\overrightarrow{v_i}$ y $\overrightarrow{v_j}$ pertenecientes a la misma, se cumple,

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad i \neq j$$

La base anterior es ortogonal.

Definición 2: Una base de un espacio vectorial es **ortonormal** si, además de ser ortogonal, cada uno de los vectores que la forman es unitario, es decir,

$$|\overrightarrow{v_i}| = \mathbf{1} \qquad \forall i$$

o lo que es lo mismo, si

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = \mathbf{1} \qquad \forall i$$

Resumiendo deberá ser,

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \mathbf{1} \quad \text{si} \quad i = j$$

Ejemplo:

Es fácil de ver que la base canónica de **R**^{3} **es ortonormal:**

$$\vec{i} = \langle 1,0,0 \rangle \qquad \vec{j} = \langle 0,1,0 \rangle \qquad \vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$$

Los vectores son perpendiculares entre sí:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \mathbf{0}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \mathbf{0}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \mathbf{0}$$

Y son unitarios:

$$\vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} = \mathbf{1}$$
$$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = \mathbf{1}$$
$$\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{1}$$

Ejemplo:

¿Cómo convertir a la base

$$\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})(-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{3})\}$$

en una base ortonormal?

Solución: Fácil. Dividiendo cada uno de los vectores entre su módulo.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} = \frac{(2,1,0)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}} = \frac{(-1,2,0)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_3}} = \frac{(0,0,3)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}} = (0,0,1)$$

La base $\{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_3}}\}$ es una base ortonormal. Compuébenlo.

Matrices ortogonales

Definición: Una matriz A es **ortogonal** si su matriz inversa es igual a su traspuesta:

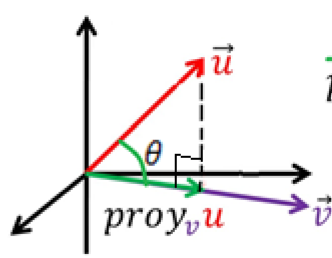
$$A^{-1} = A^t$$

Ortogonalización de bases - Método de Gram-Schmidt

Proyección de un vector sobre una recta

Supongamos que tenemos un vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ (vector rojo en la figura adjunta) y queremos calcular el vector verde, al cual llamaremos **proyección del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ sobre el vector $\vec{\boldsymbol{v}}$** y al cual anotaremos

$$\overrightarrow{proy_v u}$$



$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Sabemos de clases anteriores (por definición del producto punto) que

$$\frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{u}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}|} = \cos\theta$$

Mirando la figura adjunta, y razonando con trigonometría, vemos que el módulo del vector verde es

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$$

Y despejando en la definición del producto punto, o sea en la igualdad anterior obtenemos que:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cdot\cos\theta$$

Pero observen que ese es tan sólo el módulo del vector buscado, y nosotros buscamos un vector por tanto faltará multiplicar a la expresión anterior por un vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}$**.** Ese vector unitario es

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Por tanto, **el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$** será igual a:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

O simplemente,

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$$

donde la expresión verde es el módulo del vector buscado.

Un ejemplo sencillo:

Proyectar el vector $\vec{u} = (2,3,7)$ en la dirección del vector $\vec{k} = (0,0,1)$**.** Es fácil e intuitivo de ver que esa proyección es

$$\overrightarrow{proy_v u} = (0,0,7)$$

Comprobémoslo haciendo todas las cuentas.

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{(2,3,7)\cdot(0,0,1)}{(0,0,1)\cdot(0,0,1)}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{7}{1}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{proy_v u} = 7\vec{k} = (0,0,7)$$

Ejemplo 2:

Proyectemos el vector $\vec{u} = (2,3,7)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1,2,1)$**.**

Solución:

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{(2,3,7)\cdot(1,2,1)}{(1,2,1)\cdot(1,2,1)}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{proy_v u} = \left(\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+7\cdot 1}{1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1}\right)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{15}{6}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{proy_v u} = \frac{5}{2} \cdot (1, 2, 1)$$

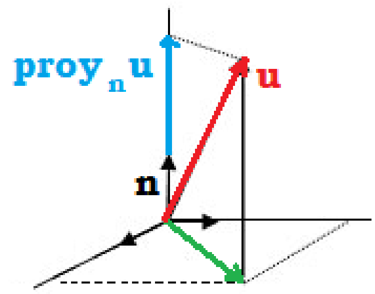
$$\overrightarrow{proy_v u} = \left(\frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}\right)$$

Que claramente es un vector colineal con **(1,2,1).**

Proyección de un vector sobre un plano

Para proyectar un vector $\vec{u}$ sobre un plano haremos lo siguiente:

Proyectaremos el vector $\vec{u}$ sobre el vector normal al plano $\vec{n}$, obteniendo el **vector azul** de la figura. Y luego restaremos el **vector azul** de la figura del **vector rojo**, obteniendo la **proyección de $\vec{u}$ sobre el plano que es el vector verde**.



Ejemplo:

Proyectar el vector $\vec{u} = (4, 2, 1)$ sobre el plano de ecuación

$$2x - y - z = 0$$

Solución:

Proyectamos vector $\vec{u} = (4, 2, 1)$ sobre el vector normal al plano que es $\vec{n} = (2, -1, -1)$

$$\overrightarrow{proy_n u} = \frac{(4, 2, 1) \cdot (2, -1, -1)}{(2, -1, -1) \cdot (2, -1, -1)} \vec{n}$$

$$\overrightarrow{proy_n u} = \frac{5}{6} \vec{n}$$

$$\overrightarrow{proy_n u} = \frac{5}{6}(2, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{proy_{\text{plano}} u} = (4, 2, 1) - \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

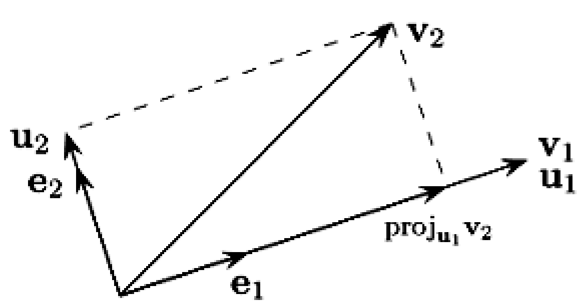
$$\overrightarrow{proy_{\text{plano}} u} = \left(\frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

Método de Gram-Schmidt para ortonormalizar bases

Supongamos que tenemos una base de un espacio vectorial,

$$B = \{(2, 1)(1, 4)\}$$

Y queremos ortonormalizarla, conservando el primer vector $\overrightarrow{v_1} = (2, 1)$. Dicho de otra manera, queremos encontrar dos vectores del plano definido por los vectores de la base, tales que sean perpendiculares entre sí, unitarios y que uno de ellos sea colineal con $\overrightarrow{v_1} = (2, 1)$



Primero busquemos una base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ ortogonal y después normalizando, a una base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de vectores normalizados.

Conservemos el primer vector tal como está:

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_1} = (2, 1)$$

Busquemos la proyección del segundo vector sobre el primero tal como muestra la figura.

$$\overrightarrow{proy_{v_1} v_2} = \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|^2} \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{proy_{v_1} v_2} = \frac{(1,4) \cdot (2,1)}{(2,1) \cdot (2,1)} \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{proy_{v_1} v_2} = \frac{6}{5} \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{proy_{v_1} v_2} = \frac{6}{5} (2, 1)$$

$$\overrightarrow{proy_{v_1} v_2} = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

Observen que el vector $\overrightarrow{u_2}$ ahora lo obtenemos, restándole esa proyección al vector $\overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|^2} \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{u_2} = (1, 4) - \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Comprobemos que sea una base ortogonal:

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = (2, 1)\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = -\frac{14}{5} + \frac{14}{5}$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$$

O sea que los vectores $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ son ortogonales. Forman un ángulo de 90°.

Finalmente, normalicemos los vectores.

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Es fácil de comprobar que son vectores ortogonales y unitarios. Por tanto, hemos encontrado una **base ortonormal**.

En caso de necesitar ocupar el método de Gram-Schmidt en bases de mayor dimensión, los vectores ortogonales $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ se obtienen a partir de la base original $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de la siguiente manera:

$$\vec{u_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{u_2} = \vec{v_2} - \frac{\vec{v_2}\cdot\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|^2}\,\vec{u_1}$$

$$\vec{u_3} = \vec{v_3} - \frac{\vec{v_3}\cdot\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|^2}\,\vec{u_1} - \frac{\vec{v_3}\cdot\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|^2}\,\vec{u_2}$$

Luego se normalizan para encontrar **la base ortonormal**

$$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$$

Ejercicios:

1. Comprobar que la matriz formada por tres vectores columnas ortonormales, es una matriz ortogonal. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Normalizar la base:

$$\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{5},\mathbf{0},\mathbf{0})(\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{3})(\mathbf{0},-\mathbf{3},\mathbf{4})\}$$

(b) Comprobar que la base obtenida es ortonormal.

3. Dados los vectores $(1,2,1)$ y $(2,2,-6)$,

(a) Compruebe que son ortogonales.
(b) Normalícelos para que el módulo de cada uno de ellos sea 1.
(c) Encuentre un tercer vector de forma que la terna de vectores sea una base ortogonal en **R**³.

4. Usando el proceso de Gram-Schmidt encontrar una base ortonormal del espacio W:

(a) $W = gen\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,2,1),(0,2,1)\}$.
(b) $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad 2x - y + z - 3w = 0\}$

5. Dadas las bases:
$\mathcal{B}_1 = \{\vec{i}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{2\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{j}, 5\vec{k} - \vec{i}\}$, en $\mathbb{R}^3$, halle la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. Adicionalmente, halle una base ortogonal $\mathcal{B}_3$ para $\mathbb{R}^3$ obtenida a partir de $\mathcal{B}_2$(Gram -Schmidt).

6. Dados los espacios vectoriales

$W_1 = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ $\qquad$ $W_2 = \{(x, y, z) | 3x + y - 2z = 0\}$

(a) Encuentre una base de cada uno de ellos.

(b) Hallar los subespacios vectoriales $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$ por determinación de sus bases. Compruebe que realmente el conjunto $W_1 \cap W_2$ tiene la base hallada.

(c) ¿Es suma directa la suma anterior? Si la respuesta es NO, encuentre otro subespacio W_3 de $\boldsymbol{R^3}$ de forma que la suma $W_1 + W_2$ sea directa.

(d) Ortonormalizar las bases de los subespacios W_1 y W_2 de forma que tengan un vector común.