Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesores: Graeme Candlish, J. R. Villanueva Semestre I 2023

*Nombre:*____ *RUT:*________________

Prueba 1: P1:_____ P2:_____ P3:_____ P4:_____ NF:______

---

1. (a) La teoría de Planck para osciladores cuantizados lleva a una energía media

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\epsilon_0 \exp(-n\epsilon_0/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon_0/kT)}$$

donde ϵ_0 es una energía fija. Identifique el numerador y el denominador como una expansión binomial y muestre que la razón es

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{\epsilon_0}{\exp(\epsilon_0/kT) - 1}.$$

(b) Muestre que la energía media $\langle\epsilon\rangle$ se reduce a kT, el resultado clásico, para $kT \gg \epsilon_0$.

2. Una descripción de las partículas de spin 1 usa las matrices

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Muestre que

(a) $[M_x, M_y] = iM_z$, etcétera (permutación cíclica de índices). Usando el símbolo de Levi-Cevita, podemos escribir

$$[M_i, M_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} M_k.$$

(b) $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2\,\mathbf{1}_3$, donde $\mathbf{1}_3$ es la matriz unidad 3×3.

(c) $[M^2, M_i] = 0$,
$[M_z, L^+] = L^+$,
$[L^+, L^-] = 2M_z$,
donde $L^+ \equiv M_x + iM_y$, y $L^- \equiv M_x - iM_y$.

3. El campo eléctrico $\vec{E}$ satisface $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ y $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Se puede suponer que el potencial escalar φ tiende a cero para r grande al menos tán rápido como r^{-1}. Muestre que, para una integración sobre todo el espacio:

$$\int \rho\varphi d\tau = \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

.

4. Para la transformación $u = x + y$, $v = x/y$, con $x \geq 0$, $y > 0$, encuentre el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$

   (a) Por computación directa.

   (b) Primero calculando J^{-1}.