



Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesores: Graeme Candlish, J. R. Villanueva Semestre I 2023

Nombre: _____ RUT: _____

Prueba 1: P1: _____ P2: _____ P3: _____ P4: _____ NF: _____

1. (a) La teoría de Planck para osciladores cuantizados lleva a una energía media

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \epsilon_0 \exp(-n \epsilon_0 / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \epsilon_0 / kT)}$$

donde ϵ_0 es una energía fija. Identifique el numerador y el denominador como una expansión binomial y muestre que la razón es

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon_0}{\exp(\epsilon_0 / kT) - 1}.$$

- (b) Muestre que la energía media $\langle \epsilon \rangle$ se reduce a kT , el resultado clásico, para $kT \gg \epsilon_0$.
2. Una descripción de las partículas de spin 1 usa las matrices

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Muestre que

- (a) $[M_x, M_y] = iM_z$, etcétera (permutación cíclica de índices). Usando el símbolo de Levi-Cevita, podemos escribir

$$[M_i, M_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} M_k.$$

- (b) $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2 \mathbf{1}_3$, donde $\mathbf{1}_3$ es la matriz unidad 3×3 .
- (c) $[M^2, M_i] = 0$,
 $[M_z, L^+] = L^+$,
 $[L^+, L^-] = 2M_z$,
donde $L^+ \equiv M_x + iM_y$, y $L^- \equiv M_x - iM_y$.
3. El campo eléctrico \vec{E} satisface $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Se puede suponer que el potencial escalar φ tiende a cero para r grande al menos tan rápido como r^{-1} . Muestre que, para una integración sobre todo el espacio:

$$\int \rho \varphi d\tau = \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

4. Para la transformación $u = x + y$, $v = x/y$, con $x \geq 0$, $y > 0$, encuentre el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$
- (a) Por computación directa.
 - (b) Primero calculando J^{-1} .