Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 27

Formas cuadráticas

Definición:

En álgebra se llama forma cuadrática a toda expresión producto de tres matrices

$$\boldsymbol{X^t \cdot A \cdot X}$$

donde **A** es una matriz cuadrada y la matriz X es una matriz columna, por tanto su traspuesta $\mathbf{X^t}$ es una matriz fila.

Por ejemplo, una forma cuadrática en $\mathbf{R}^3$ sería

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Observen que lo que queda es una matriz 1×1, por tanto, un escalar o un polinomio.

En $\mathbf{R}^2$ sería

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)xy + dy^2$$

Si la matriz es simétrica, esto es $b = c$, queda:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2$$

Reconocimiento de cónicas mediante formas cuadráticas:

Recordemos del curso anterior de álgebra que toda cónica (esto es, circunferencia, parábola, elipse o hipérbola tiene una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Lo cual podemos escribir así:

$$(x \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \;\; E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

En general:

$$\boldsymbol{X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + f = 0}$$

Por ejemplo, la cónica:

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 28x + 4y - 20 = 0$$

Puede ser escrita como:

$$(x \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-28 \;\; 4) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 20 = 0$$

Teorema:

Si una matriz es **simétrica**, esto es $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}\ \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ puede ser diagonalizada a través de una matriz de pasaje que es ortogonal, por tanto

$$\boldsymbol{P^t \cdot P = I}$$

Diagonalicemos la matriz A con la técnica utilizada en la clase anterior …

$$\boldsymbol{A = P^t \cdot D \cdot P}$$

y multipliquemos la matriz $\boldsymbol{B}$ por $\boldsymbol{P^t \cdot P}$ ya que:

$$\boldsymbol{B \cdot (P^t \cdot P) = B \cdot I = B}$$

Efectuamos lo dicho:

$$\boldsymbol{X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + f = 0}$$

$$\boldsymbol{X^t \cdot (P^t \cdot D \cdot P) \cdot X + B^t \cdot (P^t \cdot P) \cdot X + f = 0}$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa, quedará:

$$\boldsymbol{(X^t \cdot P^t) \cdot D \cdot (P \cdot X) + (B^t \cdot P^t) \cdot (P \cdot X) + f = 0}$$

Recordando, por las propiedades de las matrices que:

$$\boldsymbol{X^t \cdot P^t = (P \cdot X)^t}$$

queda:

$$\boldsymbol{(P \cdot X)^t \cdot D \cdot (P \cdot X) + (B^t \cdot P^t) \cdot (P \cdot X) + f = 0}$$

Si llamamos **U** al nuevo vector:

$$\boldsymbol{U = P \cdot X}$$

nos queda:

$$\boldsymbol{U^t \cdot D \cdot U + (B^t \cdot P^t) \cdot U + f = 0}$$

que debido a que la matriz **D** es diagonal ya no tendrá los molestos términos cruzados "xy", situación que en Álgebra I dejamos sin estudiar.

Volvamos al ejemplo:

$$(x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -28 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 20 = 0$$

Y diagonalicemos la matriz **A** hallando sus valores propios.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

O sea,

$$\lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$$

$$\lambda = 6 \quad \text{o} \quad \lambda = 8$$

Sus respectivos vector propios son:

$$\langle 1,1 \rangle \ \langle -1,1 \rangle$$

La matriz normalizada de pasaje será:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ahora planteamos:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$+(-28 \quad 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 20 = 0$$

Llamando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nos queda:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-28 \quad 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 20 = 0$$

Nos queda:

$$6x'^2 + 8y'^2 - \frac{24}{\sqrt{2}}x' + \frac{32}{\sqrt{2}}y' - 20 = 0$$

que podemos reconocerla fácilmente con la técnica de completación de cuadrados del semestre pasado.

$$\frac{\left(x' - \sqrt{2}\right)^2}{8} + \frac{\left(y' + \sqrt{2}\right)^2}{6} = 1$$

Que claramente es una elipse.

Finalmente observen que la matriz de pasaje es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\operatorname{sen} 45° \\ \operatorname{sen} 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$

Es decir, al diagonalizar la matriz lo que hicimos fue girar los ejes para que quedaran paralelos a los ejes de la elipse.