Guía Nº 1

Cálculo III - Facultad de Ciencias
Universidad de Valparaíso

1.- Graficar en IR^2 el conjunto $A = \{(x,y) \,/\, 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2 \;\vee (x,y) = (4.0)\}$.
¿ Es A acotado ? . Hallar su diámetro .

2.- Para cada uno de los siguientes conjuntos, dar una vecindad con centro en el origen, que lo incluya. Indicar en cada caso, si existe alguno de ellos con radio mínimo.

a) $A = \{(x,y) \,/\, (x-2)^2 + (y-4)^2 < 1\}$

b) $B = \{(x,y) \,/\, x = \dfrac{n+1}{n} \wedge y = \dfrac{1}{m^2} \wedge n, m \in \mathrm{IN}\}$

3.- Probar que la unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Idem para la intersección.

4.- Para cada uno de los conjuntos siguientes, hallar si es posible , el conjunto derivado (conjunto formado por todos los puntos de acumulación) y verificar si el conjunto inicial es cerrado o no lo es. Previamente grafíque los conjuntos .

$A = \{ (x,y) \,/\, 9x^2 + 4y^2 \leq 16 \}$
$B = \{ (x,y) \,/\, |x-y| \leq 2\}$

$C = \{ (x,y,z) \,/\, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

$D = \{ (x,y) \,/\, x > 0 \wedge y \leq 2\}$

$E = \{ (x;y) \,/\, (|x| > 2 \;\wedge\; |y| \leq 3) \;\vee\; (x,y) = (0,0) \}$

5.- Dados los siguientes conjuntos en IR^2 ; a) graficarlos ; b) hallar el conjunto derivado y el de sus puntos interiores ; c) clasificar los conjuntos en abiertos o cerrados; d) hallar su frontera :

$A = \{ (x,y) \,/\, |x-y| \leq 4 \;\wedge\; |y-4| < 2 \}$
$B = \{ (x,y) \,/\, x^2 + y^2 > 8y - 15 \wedge y^2 - 8y \leq -12 - x^2 \}$
$C = \{ (x,y) \,/\, y^2 < 2x + 4 \;\wedge\; 2x + y^2 < 4 \}$

6.-Graficar los siguientes conjuntos en IR . Hallar puntos de acumulación , interiores, exteriores y fronterara. Indicar si los conjuntos iniciales son cerrados, abiertos, compactos , perfectos .

$A = \{ (x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$
$B = \{ (x,y) \,/\, x^2 + y^2 > 1 \}$
$C = \{ (x,y) \,/\, (x^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 - 9) > 0 \}$
$E = \{ (x,y) \,/\, |x| + |y| \leq 1 \}$
$F = \{ (x,y) \,/\, \big(|x| < 2 \wedge x > y\big) \;\vee\; (x,y) = (3,1) \}$

Algunas respuestas :

1.- A es acotado, por ejemplo la vecindad $B((0,0),5)$. Su diámetro es 6

2.- $A \sqsubseteq B((0,0),10)$, la vecindad en el origen y radio $r = 1+2\sqrt{5}$ es el radio mínimo que incluye a A. Ahora $B \sqsubseteq B((0,0),5)$

4.- $A' = A$, A es cerrado , $B' = B$, B es cerrado, $C' = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$, C no es cerrado , $D' = \{(x,y)/x \geq 0 \wedge y \leq 2\}$, D no es cerrado. E no es cerrado $E' = \{(x,y)/|x| \geq 2 \wedge |y| \leq 3\}$.

5.- $A' = \{(x,y)/|x-y| \leq 4 \wedge |y-4| \leq 2\}$, A no es cerrado

Int $A = \{x,y)/|x-y| < 4 \wedge |y-4| < 2\}$, A no es abierto

Fron $A = \{(x,y)/(y = 2 \wedge -2 \leq x \leq 6\} \vee (y = 6 \wedge 2 \leq x \leq 10) \vee (y = x-4 \wedge 2 \leq y \leq 6) \vee (y = x+4 \wedge 2 \leq y \leq 6)\}$

$B' = \{(x,y)/x^2+(y-4)^2 \geq 1 \wedge x^2+(y-4)^2 \leq 4\}$, B no es cerrado

Int $B = \{(x,y)/x^2+(y-4)^2 > 1 \wedge x^2+(y-4)^2 < 4\}$, B no es abierto

Fron $B = \{(x,y)/x^2+(y-4)^2 = 1 \vee x^2+(y-4)^2 = 4\}$

$C' = \{(x,y)/\frac{1}{2}y^2-2 \leq x \leq 2-\frac{1}{2}y^2\}$, D no es cerrado

Int $C = C$, C es abierto

Fron $C = (x,y)/x = \frac{1}{2}y^2-2 \wedge -2 \leq y \leq 2) \vee (x = 2-\frac{1}{2}y^2 \wedge -2 \leq y \leq 2)\}$

6.- $A' = A$, A es cerrado, no es abierto, compacto y perfecto.

B no es cerrado , Int $B = B$ luego B es abierto. B no es compacto ni perfecto, B no es denso.

C no es cerrado , Int $C = C$ luego C es abierto ,

Fron $C = \{(x,y)/(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) = 0\}$

C no es compacto. Es denso pero no es perfecto .

Ext $C = \{(x,y)/(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) < 0\}$

$D' = D$, D es cerrado, no abierto, compacto y perfecto.

F no es cerrado, Int $F = F - \{(3,1)\}$, .

Ext $F = \{(x,y)/((y > x) \vee (|x| > 2)) \wedge (x,y) \neq (3,1)\}$

Fron $F = \{(x,y)/(|x| = 2 \wedge x \geq y) \vee (|x| < 2 \wedge x = y)\} \cup \{(3,1)\}$

F no es abierto, no es compacto,ni es perfecto.