Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 14

Sumatorias

Exploremos el problema de como escribir sumas largas de una forma más compacta. Lo haremos a través del signo de sumatoria

$$\sum$$

El signo es la letra griega "Sigma", equivalente de nuestra letra S (de "suma").

Situación 1:

Comencemos analizando el último ejercicio de la prueba. Se pedía encontrar los primeros cuatro términos de la p. a. de la figura.

En el primer piso son:	2 cartas
En el segundo piso son:	5 cartas
En el tercer piso son:	8 cartas
En el cuarto piso son:	11 cartas

La p.a. es:

$$\mathbf{2, 5, 8, 11, \ldots}$$

Y en una de las versiones de la prueba se pedía hallar el número de términos que hay que sumar para que el número total de cartas sea 8030.

La solución es que hay que sumar 73 términos. El término general de la progresión es:

$$\boldsymbol{a_n = 2 + (n-1)\cdot 3}$$

$$\boldsymbol{a_n = 3n - 1}$$

Por tanto, la suma de esos 73 términos podría ser desarrollada de la siguiente manera:

$$S = (3\cdot 1 - 1) + (3\cdot 2 - 1) + (3\cdot 3 - 1) + \cdots + (3\cdot 72 - 1) + (3\cdot 73 - 1)$$

Observen que todos los términos tienen la misma forma:

$$\boldsymbol{3\cdot i - 1}$$

donde "i" va tomando todos los valores naturales entre 1 y n ($1 \leq i \leq n$). A esa "i" la llamaremos **índice de la sumatoria**.

En el ejemplo anterior, “i” toma valores desde 1 (primer término) hasta 73 (último término). Finalmente escribimos:

$$\sum_{i=1}^{i=73}(3i-1)=8030$$

Esa es la **Notación de sumatoria.** Puede ser algo incómoda al principio, pero tiene sus ventajas. Por ejemplo, si quisieras escribir la suma de 10000 términos de esa progresión,

$$\sum_{i=1}^{i=10000}(3i-1)$$

Ahorramos bastante tinta escribiéndola así. Piensen si hubiera que desarrollarla.

Situación 2

Supongamos ahora que queremos escribir la suma desde el quinto al octavo término de la sucesión

$$\boldsymbol{a_n=n^2-3n+2}$$

Escribimos:

$$\sum_{i=5}^{i=8}(i^2-3i+2)$$

Desarrollando,

$$\sum_{i=5}^{i=8}(i^2-3i+2)=$$

$$=(5^2-3\cdot5+2)+(6^2-3\cdot6+2)+(7^2-3\cdot7+2)+(8^2-3\cdot8+2)$$

$$=12+20+30+42$$

$$=104$$

Situación 3

Supongamos ahora que queremos expresar esa suma como dos sumas, los dos primeros términos por un lado y los dos últimos por otro. Quedaría …

$$\sum_{i=5}^{i=8}(i^2-3i+2)=\sum_{i=5}^{i=6}(i^2-3i+2)+\sum_{i=7}^{i=8}(i^2-3i+2)$$

Concluimos que se cumple la propiedad:

$$\sum_{i=m}^{i=n} f(i) = \sum_{i=m}^{i=k} f(i) + \sum_{i=k+1}^{i=n} f(i)$$

$$\text{con } m < k < n$$

Situación 4

Supongamos ahora que queremos escribir los primeros "n" términos de esa sucesión.

$$\sum_{i=1}^{i=n} (i^2 - 3i + 2)$$

Esa suma desarrollada quedará,

$$(1^2 - 3 \cdot 1 + 2) + (2^2 - 3 \cdot 2 + 2) + \cdots + (n^2 - 3 \cdot n + 2)$$

Nota: Observen la diferencia entre los dos Índices:
"n" correspondería en este ejemplo al último término.
"i" es un índice que varía desde 1 hasta n.

Situación 5

Intentemos ahora separar el último término de la suma. Nos quedará …

$$\sum_{i=1}^{i=n} (i^2 - 3i + 2) = \sum_{i=1}^{i=n-1} (i^2 - 3i + 2) + n^2 - 3n + 2$$

Situación 6

Intentemos ahora desarrollar esa suma como la suma de los términos de cada grado:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (4i^2 - 3i + 2) = 4\sum_{i=1}^{i=n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{i=n} i + \sum_{i=1}^{i=n} 2$$

Observen como sacamos al (+4) y al (-3) fuera de la sumatoria. No es otra cosa que aplicar la propiedad distributiva. Si supiéramos a que son iguales esas tres sumas, podríamos calcular la suma total sin mayor esfuerzo. Obviamente, será una función del valor "n", $f(n)$.

Sumas telescópicas

Ahora intentemos calcular la suma,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$$

Observamos que:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1}$$

Desarrollemos esas sumas y restemos:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Excepto el primero y el último, todos los términos aparecen una vez sumando y otra vez restando. Se simplifican. Finalmente …

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Algunas fórmulas útiles

$$\sum_{i=1}^{i=n} B = Bn$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Demostración 1:

$$\sum_{i=1}^{i=n} B = B + B + B + \cdots + B$$

(n veces)

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{i=n} B = Bn$$

Demostración 2:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Es una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 1$. Sus suma va a ser igual a …

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 1$$

$$\boldsymbol{a_n = n}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(1+n)}{2}}$$

Hemos demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración 3:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = [2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$

Simplificando términos que aparecen sumando y restando,

$$\sum_{i=1}^{i=n}(i+1)^3-\sum_{i=1}^{i=n}i^3=(n+1)^3-1$$

Por tanto, recordando que:

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1 \qquad \forall x$$

se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{i=n}i^3+\sum_{i=1}^{i=n}3i^2+\sum_{i=1}^{i=n}3i+\sum_{i=1}^{i=n}1-\sum_{i=1}^{i=n}i^3=(n+1)^3-1$$

Simplificando, y ocupando las igualdades anteriores,

$$\sum_{i=1}^{i=n}3i^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n=n^3+3n^2+3n$$

Dividiendo ambos miembros entre 3:

$$\sum_{i=1}^{i=n}i^2+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+3n}{3}$$

Finalmente, haciendo denominador común:

$$\sum_{i=1}^{i=n}i^2+\frac{3n(n+1)}{6}+\frac{2n}{6}=\frac{2n^3+6n^2+6n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo de utilización:

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}}(2i+3)^2=\sum_{i=1}^{i=n}(4i^2+12i+9)$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}}(2i+3)^2=4\sum_{i=1}^{i=n}i^2+12\sum_{i=1}^{i=n}i+9\sum_{i=1}^{i=n}1$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}}(2i+3)^2=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+12\cdot\frac{n(n+1)}{2}+9n$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i+3)^2 = \frac{2(2n^3+3n^2+n)+18(n^2+n)+27n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i+3)^2 = \frac{4n^3+24n^2+47n}{3}$$

Ejercicios

1. Desarrollar: (a) $\sum_{i=2}^{i=6}(3i^2-1)$ (b) $\sum_{i=0}^{i=4}(2i+3)$

(c) $\sum_{i=3}^{i=n}(4i-5)$ (d) $\sum_{i=4}^{i=7}2^i$

2. Calcule las sumas del ejercicio anterior, observando que (a), (b) y (c) son progresiones aritméticas y (d) es una progresión geométrica.

3. Expresar como sumatorias:

(a) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

(b) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1)$

(c) ¿Podría calcular la suma de los primeros 10 términos de la suma (b) sin tener que realizar la suma? ¿y de los primeros n términos?

Pista: Es una p.a.

4. Separar el último término de cada expresión:

(a) $\sum_{i=3}^{i=8}(2i-1)$ (b) $\sum_{i=2}^{i=n}(i^2-4)$

(c) $\sum_{i=2}^{i=n+1}i^2$ (d) $\sum_{i=7}^{i=n+3}4i^2$