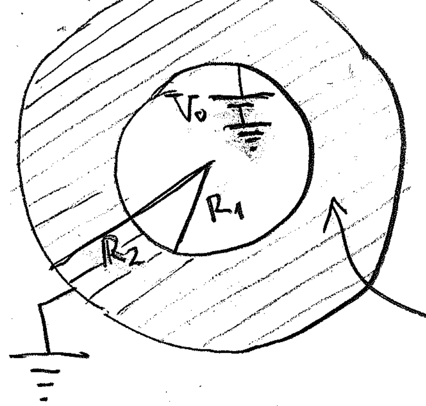
# Ecuación de Laplace - Poisson

$B_1$

**Ej.)** Un problema de simetría radial

Se tienen 2 cascarones esféricos de radio $R_1$ y $R_2$. Entre los cascarones existe una distribución de carga volumétrica $\rho(\vec{r}) = \alpha r$. Las condiciones de contorno del problema son $\phi(R_1,\theta,\varphi) = V_0$ y $\phi(R_2,\theta,\varphi) = 0$.




a) Halle $\phi(\vec{r})$ entre los cascarones.

b) $\phi(\vec{r})$ fuera de los cascarones.

c) $\phi(\vec{r})$ al interior de la esfera de radio $R_1$.

$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \alpha r$ ($r$ = coord. radial)

↳ Para este caso $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$ con $\phi(R_1) = V_0$, $\phi(R_2) = 0$

a) $\therefore$ $$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\phi(r)\right)$$

$$\Downarrow$$

Luego se resuelve

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -\frac{\alpha r}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -\alpha \frac{r^3}{\varepsilon_0} \rightarrow d\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = -\alpha \frac{r^3}{\varepsilon_0} dr$$

$\Downarrow$

$$r^2\frac{d\phi}{dr} = A - \frac{\alpha r^4}{4\varepsilon_0}$$ (A = 1ª constante de integración)

$\Downarrow$

$$d\phi = \left(\frac{A}{r^2} - \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0}\right) dr$$

$$\phi(r) = -\frac{\alpha r^3}{12\varepsilon_0} - \frac{A}{r} + B$$ (B = 2ª constante de integración)

A y B se evalúan con las condiciciones $\phi(R_2)=0$ y $\phi(R_1)=V_0$

b) Fuera de las esferas las c.c. son

$\phi(\infty)=0 \quad \phi(R_2)=0$ (Resuelva $\nabla^2\phi=0$)

$\Downarrow$

$\therefore \ \phi(\vec{r})=0$ fuera de la esfera

c) $\phi(\vec{r})$ al interior desde $r=0 \rightarrow r=R_1$ es $\phi(\vec{r})=V_0$