Prueba III - Métodos Matemáticos de la Física I

Licenciatura en Física - 2 - 2022

Daniel Salinas-Arizmendi

Intrucciones:

- Tiene 120 minutos para desarrollar la evaluación.
- La exigencia de la prueba es de un 50 %.
- Justifique todas su respuestas.

Formulario:

$$(1+\xi)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\xi^k, \quad \text{donde } n \in \mathbb{R} \quad \text{(serie binomial)}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{d^k f(z)}{dz^k}\right|_{z=a} (z-a)^k \quad \text{(serie de Taylor en torno al punto } a\text{)}$$

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \quad \text{(serie de Laurent)}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res} f(z_k) \quad \text{(Teorema del Residuo)}$$

1. **(10 Ptos.)** Encuentre la serie de Laurent de la función:

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}.$$

Ans. La expansión en Taylor del $cos\chi = 1 - \frac{1}{2!}\chi^2 + \frac{1}{4!}\chi^4 + \cdots$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots\right) \\ &= \cdots + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + z^2 \end{aligned} \tag{1}$$

2. **(10 Ptos.)** Hallar los residuos de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3},$$

en todos sus puntos singulares.
Ans. La función tiene dos polos, un en $z = 2$ de orden 1 y otro en $z = -1$ de orden 3.
Para el polo de orden simple

$$\begin{aligned}\text{Res} f(2) &= \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^3} \\ &= \frac{e^2}{3^3} = \boxed{\frac{e^2}{27}}\end{aligned} \tag{2}$$

para el polo de orden 3

$$\begin{aligned}\text{Res} f(-1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z+1)^3 f(z)\right) \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{(z-2)}\right) \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z-2)} - \frac{e^z}{(z-2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z}{(z-2)} - \frac{e^z}{(z-2)^2} - \frac{e^z}{(z-2)^2} + \frac{2e^z}{(z-2)^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-1}}{-3} - \frac{2e^{-1}}{(-3)^2} + \frac{2e^{-1}}{(-3)^3}\right) = \boxed{-\frac{17}{54e}}\end{aligned} \tag{3}$$

3. (10 **Ptos.**) Desmuestre por teorema del residuo que:

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}dz = 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\right\}.$$

Ans. Estudiemos el residuo de la función subintegrando,

$$\frac{e^{zt}}{z^2(z-a)(z-b)}$$

donde $a = -1-i$ y $b = -1+i$. La función tiene dos polos simple en a y b; y un polo de orden 2 en 0. Como los tres polos estan contenidos en C calculamos los tres residuos:

$$\text{Res} f(a) = \lim_{z\to -1-i}\frac{e^{zt}}{z^2(z+1-i)} = -\frac{e^{t(-1-i)}}{2i(-1-i)^2} = \frac{1}{4}e^{t(-1-i)}$$

$$\text{Res} f(b) = \lim_{z\to -1+i}\frac{e^{zt}}{z^2(z+1+i)} = \frac{e^{t(-1+i)}}{2i(-1+i)^2} = \frac{1}{4}e^{t(-1+i)}$$

$$\text{Res} f(2) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2} = \lim_{z\to 0}\frac{te^{tz}(z^2+2z+2) - e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{t-1}{2}$$

Usando el teorema del residuo

$$I = 2\pi i\left[\text{Res} f(0) + \text{Res} f(a) + \text{Res} f(b)\right] = 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2} + \frac{1}{4}e^{-t}\left(e^{-it}+e^{it}\right)\right\} = 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos\ t\right\}$$

Queda demostrado.

4. **(10 Ptos.)** Evalue la siguiente integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin^3 z}.$$

Ans. Como el polo $z=0$ de la función está contenido en C, se usara el teorema del residuo para resolver la integral. El subintegrando se puede expresar

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^3 z} &= \frac{1}{\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right)^3} = \frac{1}{z^3\left(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)^3} \\ &= \frac{1}{z^3\left(1-\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)\right)^3} = \frac{1}{z^3}\left(1-\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)\right)^{-3}\end{aligned} \tag{4}$$

Usando la expansión binomial $(1+\xi)^n = 1+n\xi+\dfrac{n(n-1)}{2!}\chi^2+\cdots$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^3 z} &= \frac{1}{z^3}\left(1-\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)\right)^{-3} \\ &= \frac{1}{z^3}\left(1+3\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4\right)+6\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4\right)^2+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3}\left\{1+\frac{z^2}{2}+\left(-\frac{3}{5!}+\frac{6}{(3!)^2}\right)z^4+\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z}+(\#)\,z+\cdots\end{aligned} \tag{5}$$

Entonces el $\mathrm{Res}f(0) = c_{-1} = 1/2$. Entonces

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin^3 z} = 2\pi i\ \mathrm{Res}f(0) = \pi i$$