CURSO DE MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA
Clase 1 - Números y Funciones Complejas

Daniel E. Salinas-Arizmendi

Universidad Técnica Federico Santa María

Septiembre, 2022

Contens

Introducción

- El estudio de las funciones de variables complejas tiene una gran aplicación en distintas áreas de la física

  - Pares de funciones complejas que satisfacen las Eq. de Laplace

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

  para describir potenciales electrostáticos bidimensionales.

  - Fluidos Ideales en la Hidrodinámica.
  - Aplicaciones en le Física de Partícula, como en las partículas inestables, la razón de decaimiento es equivalente a la parte Imaginaria de la auto energía de la partícula que decae.
  - Construir extensiones análiticas de soluciones de ED aplicadas a la física, para distintas regiones del espacio.

- El polinomio $x^2 + 3x + 2 = 0$, tiene soluciones en los Reales ($x = -1,\ x = -2$).

Si $x,\ a,\ b \in \mathbb{R}$, un polinomio general $(x-a)(x-b) = 0$ o $x^2-(a+b)x+ab = 0$ Definiendo

$$\alpha = -(a+b),\ \beta = ab,\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

es un polinomio con coef reales

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

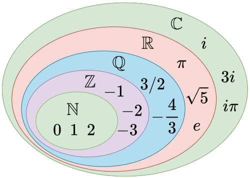
en el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$

$$x^2 + 1 = 0$$

no tiene sentido en los Reales. Debemos introducir un nuevos números. El conjunto de los Números Complejos $\mathbb{C}$

Números Complejos

- Conjunto de los complejos $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$



- Un número complejo se define:

$$z = x + iy, \quad z \in \mathbb{C}$$

donde $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Unidad Imaginaria

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

- Partes Reales e Imaginarias de z

$$\text{Re } z = x, \quad \text{Im } z = y$$

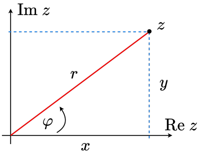
- 2 números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son igual si solo si $x_1 = x_2 \quad \wedge y_1 = y_2$

Complejo conjugado de z

$$z^* = \bar{z} = x - iy$$

- Un numero complejo $z = x + iy$ se puede representar en un plano donde la base es $\{1, i\}$

▷ Módulo
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
▷ Argumento
$\text{Arg } z = \varphi$



φ no está determinado univocamente

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

donde el argumento $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Operaciones Fundamentales y Propiedades

- **Adición**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

- **Producto**

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

en donde

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= +1 \\ i^5 &= +i \end{aligned}$$

por lo tanto

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- **División**, tenemos, **Obs1.**
$zz^* = |z|^2 \in \mathbb{R}^+$ (positivo)

Obs2.

$$\frac{z}{z} = 1, \quad \frac{z^*}{z^*} = 1$$

La división la podemos definir como

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{\underbrace{x_2^2 + y_2^2}_{\mathbb{R}}}$$

- Re $z = \dfrac{z^* + z}{2}$, Im $z = \dfrac{i}{2}(z^* - z)$

Problema 1.1 Determine los valores de x e y para la ecuación

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

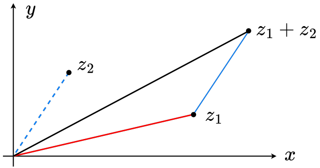
Operaciones Fundamentales y Propiedades

- Algunas Propiedades
  - $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ o $|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$
  - $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
  - $|z^n| = |z|^n$
  - $|z| = |z^*|$
  - $z_1 z_2^* = z_1^* z_2$
  - $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

Desigualdad del Triangulo

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

- Sean z_1 y z_2 un par de números complejos, entonces el origen y los puntos z_1 y $z_1 + z_2$ son los vértices del triángulo cuyos lados son $|z_1|$, $|z_2|$ y $|z_1 + z_2|$. De esta manera se obtiene la importante desigualdad del triangulo



Ejemplo 1.1

Mostrar que $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^* &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\
&= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
&= z_1^* + z_2^*
\end{aligned}
$$

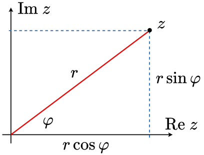
Problema 1.2 Mostrar que:

(a). $(z_1^* + z_2^*)^* = z_1 + z_2$

(b). $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(c). $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

▶ Un número complejo, tiene un representación polar (trigonométrica)



Forma Polar

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

▶ Módulo $|z| = r$ y $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$, $\in (-\pi, \pi]$. Los ángulos sobre(bajo) la recta $\mathrm{Re}(z)$ son positivos(negativos)

Fórmula de Moivre

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)$$

Forma Trigonométrica

▶ Producto en la forma Polar

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$$

▶División en la forma Polar

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

Ejemplo 1.2

Hallar $z_1^n = z$. Se cumple

$$r_1^n\left(\cos\left(n\varphi_1\right) + i\sin\left(n\varphi_1\right)\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

Para que un número sea igual se tiene
$\left|z_1^n\right| = |z|$ y $\mathrm{Arg}\left(z_1^n\right) = \mathrm{Arg}\left(z\right)$
Entonces $r_1^n = r$ y $n\varphi_1 = \varphi + 2\pi k$
Tal que

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right]$$

con $k \in \mathbb{Z}$

Problema 1.3 Econtrar el valor de z, que satiface $i = z^2$.

Funciones Complejas

▶ Una función $w = f(z)$, donde z es la variable independiente, w variable dependiente, e.g. $w = z^2$,

$$w = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

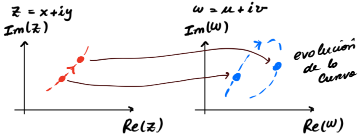
por otro lado la función

$$w(z) = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$$

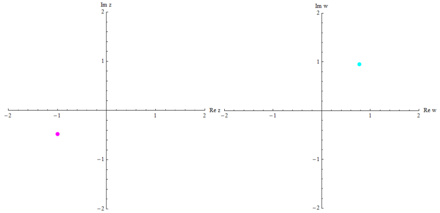
se tiene que $\mathrm{Re}(w) = u$ y $\mathrm{Im}(w) = v$.

▶ Si a cada valor de z, $f(z)$ es unívoca (e.g $w = z^2$), de lo contrario es multívoca (e.g. $w = \sqrt{z}$)

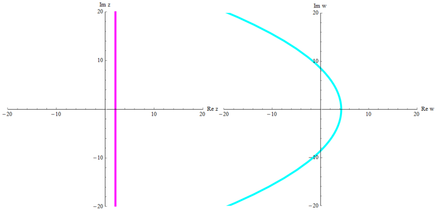
▶ Mapeo de funciones



▶ Mapeo de puntos de la función $w = z^2$



▶ Mapeo de curvas de $w = z^2$



Forma Exponencial

▶ En lo $\mathbb{R}$ se cumple $\exp(x) = e^x$. La función exponencial se puede definir en su forma

$$\exp(x) = \begin{cases} \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \\ y' = y, \ y(0) = 1 \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{cases}$$

Serie de potencia, E.D. y Límite de Bernnoulli respectivamente.

▶ Podemos pasar de $\mathbb{R}$ a los $\mathbb{C}$ mediante una extensión analítica $(x \to z)$, sin perturbar las propiedades

▶ La función $\exp(z)$, mantiene las siguientes propiedades

$$\begin{cases} \exp(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!} \\ \exp(z)\exp(w) = \exp(z+w) \end{cases}$$

▷ La función exponencial de z

$$\exp(x+iy) = \underbrace{\exp(x)}_{\mathbb{R}}\underbrace{\exp(iy)}_{\mathbb{C}}$$

si aplicamos la defini ción en serie,

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= (\text{pot. pares}) + i\,(\text{pot. impares}) \end{aligned}$$

A continuación encontraremos a que corresponde la parte par e impar

Serie de Taylor y Maclaurin

El desarrollo de Taylor, se expande en torno a un punto x_0

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

En la serie de Maclaurin expandimos en torno cero.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=0} x^n$$

▶ Expandamos la función $\sin(y)$

$$\sin(y) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}\left(x^7\right)$$

Forma Exponencial

o equivalentemente

$$\sin(y) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ahora la función $\cos y$

$$\begin{aligned}\cos(y) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}\left(x^6\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

con esto podemos definir la forma de la $\exp(iy)$

Fórmula de Euler

$$\exp(iy) = e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

- Usando la fórmula de Euler, se puede encontrar la siguiente relación

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Forma Exponencial

$$z = re^{i\varphi}$$

- Con está representación de un número complejo es mas fácil, determinar el producto

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

la división

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

y la potencia de un número complejo

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

con $n \in \mathbb{C}$

Problema 1.3 Hallar todos los números complejos ($z \neq 0$) que satisfagan la condición $z^{n-1} = z^*$