Tarea 5
Inducción y Complejos 1

Instrucciones

- Esta tarea es individual y de carácter formativo.
- Debe prepararse un único documento pdf con imágenes con los desarrollos escritos a mano.
- El documento debe iniciar con el nombre y apellido del estudiante.
- Enviar el documento pdf al correo algebra@emttec.cl
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV y solo se corregirá el primer correo recibido.
- El plazo de entrega máximo es el miércoles 23 de junio a las 23:59:59.
- Los puntajes se encuentran indicados, hay 1,0 puntos base si se respetan estas instrucciones.

1) En 1958 el gran matemático húngaro Mikál Mariöt remeció a la comunidad científica con su demostración de que "*todos los números naturales son iguales*". La demostración por inducción que publicó fue:

Primer caso:

$$1 = 1 \quad \text{es verdadero}$$

Hipótesis inductiva:

$$\text{número} = \text{sucesor}$$

Tesis inductiva (por demostrar):

$$\text{número} + 1 = \text{sucesor} + 1$$

Demostración: partiendo de la hipótesis inductiva tenemos:

$$\text{número} = \text{sucesor}$$

sumando 1 a ambos lados demostramos la tesis:

$$\text{número} + 1 = \text{sucesor} + 1$$

Q.E.D.

Argumentar suficientemente a favor o en contra de dicha demostración. **(1,0 pts.)**

2) Demostrar por inducción que: **(1,5 pts.)**

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < 2^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3) Demostrar por inducción que: **(1,5 pts.)**

$$(1-i)^{4n} = (1+i)^{4n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4) Resolver en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación: **(2,0 pts.)**

$$\text{Re}(z) \cdot \bar{z}^2 = \frac{2 \cdot \text{Im}(z)}{i}$$

Solución

1) La demostración tiene un problema técnico, pues la verificación del primer caso está incorrecta. **Al verificar el cumplimiento de la hipótesis inductiva para el primer caso tenemos:**

$$\mathbf{1 = 2}$$

que es obviamente es falso.

2) **Primer caso (n=1):**

$$2^1 = 2 < 4 = 2^{1+1}, \quad \text{es verdadero.}$$

Hipótesis inductiva:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}$$

Tesis inductiva (por demostrar):

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} < 2^{n+2}$$

Demostración: partiendo de la hipótesis, sumamos 2^{n+1} a cada lado y luego factorizamos:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}$$

$$\begin{aligned} 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &< 2^{n+1} + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

Q.E.D.

3) **Primer caso (n=1):**

$$(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4 = (+2i)^2 = (1+2i+i^2)^2 = ((1+i)^2)^2 = (1+i)^4$$

es verdadero.

Hipótesis inductiva:

$$(1-i)^{4n} = (1+i)^{4n}$$

Tesis inductiva (por demostrar):

$$(1-i)^{4(n+1)} = (1+i)^{4(n+1)}$$

Demostración: de izquierda a derecha, utilizamos el resultado del primero caso y luego la hipótesis:

$$\begin{aligned}(1-i)^{4(n+1)} &= (1-i)^{4n+4}\\ &= (1-i)^{4n}(1-i)^4\\ &= (1-i)^{4n}(1+i)^4\\ &= (1+i)^{4n}(1+i)^4\\ &= (1+i)^{4n+4}\\ &= (1+i)^{4(n+1)}\end{aligned}$$

Q.E.D.

4) Sea $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, reemplazando:

$$\mathrm{Re}(z) \cdot \overline{z}^2 = \frac{2 \cdot \mathrm{Im}(z)}{i}$$

$$a \cdot (a - bi)^2 = \frac{2b}{i}$$

$$a \cdot (a^2 - 2abi + b^2 i^2) = \frac{2b}{i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$a \cdot (a^2 - 2abi - b^2) = \frac{2bi}{-1}$$

$$a(a^2 - b^2) - 2a^2bi = 0 - 2bi$$

igualando partes reales e imaginarias, planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a(a^2 - b^2) = 0 \\ -2a^2b = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 - b^2) = 0 \\ b(a^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, analizamos $b = 0$, que reemplazada en la primera entrega $a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$, luego, $z_1 = 0 + 0i = 0$ (el número complejo nulo) es solución de la ecuación.

De la segunda ecuación, analizamos ahora $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$, que reemplazada en la primera da $b^2 = a^2$, luego $b = \pm 1$, así tenemos cuatro soluciones adicionales tomando las 4 combinaciones de signos:

$$\textbf{Solución: } \begin{cases} \boldsymbol{z_1 = 0} \\ \boldsymbol{z_2 = 1 + i} \\ \boldsymbol{z_3 = 1 - i} \\ \boldsymbol{z_4 = -1 + i} \\ \boldsymbol{z_5 = -1 - i} \end{cases}$$