Prueba I - Métodos Matemáticos de la Física I

Licenciatura en Física - 2 - 2022

Daniel Salinas-Arizmendi

Intrucciones:

- Tiene 120 minutos para desarrollar la evaluación.
- Todas las preguntas tiene el mismo puntaje. La exigencia de la prueba es de un 60 %.
- Justifique todas su respuestas.

---

1. Expresar $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ en su forma cartesiana $x+iy$ en donde $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Determinar los números complejos z que satifacen las siguientes dos condiciones:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}, \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

3. Demuetre que:

   a) $\tan(-z) = -\tan z$

   b) $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$. Para la rama principal $k=0$.

4. Encuentre la función analítica $f(z)$ (expresada en números complejos z), si se conoce su parte imaginaria $v(x,y) = 3x + 2xy$, para la condición $f(-i) = 2$. ¿la parte $\text{Re}[f(z)]$ es armónica?

5. Determine la región de analiticidad de la función:

$$f(z) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Problema 1

1. Expresar $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ en su forma cartesiana $x+iy$ en donde $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4 = \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}\right]^4 = \left[\frac{\cos \pi/3 + i \,\text{sen}\, \pi/3}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}\right]^4$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \, \frac{\cos \pi/3 + i \,\text{sen}\, \pi/3.}{\cos(-\pi/4) + i \,\text{sen}(-\pi/4)}\right]^4$$

$$= \left(\sqrt{2} \; \frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}} \right)^4$$

$$= 2^2 \; \frac{e^{i\pi 4/3}}{\underbrace{e^{-i\pi 4/4}}_{-1}}$$

$$= -2^2 \, e^{i 4\pi/3}$$

$$= -2^2 \left(\cos \tfrac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{4}{3}\pi \right)$$

$$= -2^2 \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 + i 2\sqrt{3}$$

⟨Otra forma⟩

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^4 = \left(\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right)^4$$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{2^4} \left[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \right]^2 \left[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2^4} \left[(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 + 2i \underbrace{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}_{1-3.} \right]$$

$$\times\left[(1-\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})^2+2i\,(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\right]$$

$$=\frac{1}{2^4}\left[\cancel{1}+\cancel{3}-2\sqrt{3}-\cancel{1}-\cancel{3}-2\sqrt{3}+2i\,(-2)\right]$$

$$\times\left[-4\sqrt{3}-4i\right]$$

$$=\frac{1}{\cancel{2^4}}\,\cancel{4^2}\left(-\sqrt{3}-i\right)^2$$

$$=3+i^2+2\sqrt{3}\,i$$

$$=2+2\sqrt{3}\,i$$

Problema 2

2. Determinar los números complejos z que satifacen las siguientes dos condiciones:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3},\quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

(1) $$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2}=\frac{25}{9}$$

(2) $$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|^2=1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2+y^2}{(x-8)^2+y^2}=1$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+\cancel{y^2}=(x-8)^2+\cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+16-8x=\cancel{x^2}+64-16x$$

$$\Rightarrow 8x=64-16.$$

$$x = \frac{48}{8} = 6$$

$x = 6$ en (1) $\Rightarrow$ $$\frac{(6-12)^2 + y^2}{6^2 + (y-8)^2} = \frac{25}{9}$$

$$(6^2 + y^2)9 = 25(6^2 + y^2 + 8^2 - 16y)$$

$$\Rightarrow \quad 6^2 \cdot 9 - 16y^2 = 25(6^2 + 8^2 - 16y)$$

$$16y^2 - 25 \cdot 16y + 25 \cdot 6^2 - 9 \cdot 6^2 + 8^2 \cdot 25 = 0$$

$$\cancel{16}y^2 - 25 \cdot \cancel{16}y + 6^2(\cancel{16}) + \cancel{16} \cdot 4 \cdot 25 = 0$$

$$y^2 + 25y + 136 = 0$$

$$(y-8)(y-17) = 0$$

$\therefore$

$$z_1 = 6 + 8i$$
$$z_2 = 6 + 17i$$

Problema 3. Demuetre que:

a) $\tan(-z) = -\tan z$

b) $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$. Para la rama principal $k = 0$.

a)

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg}(-z) = \frac{\operatorname{sen}(-z)}{\cos(-z)} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{i\left(e^{-iz} + e^{iz}\right)}$$

$$= -\underbrace{\frac{\left(e^{+iz} - e^{-iz}\right)}{i}}_{2 \operatorname{sen} z} \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{iz} + e^{-iz}}_{2\cos z}}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

$$= -\operatorname{tg} z$$

b) $w = \operatorname{sen}^{-1} z \Rightarrow \operatorname{sen} z = w$

$$w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

Rama principal $k=0 \Rightarrow \operatorname{sen}^{-1} 0 = 0.$

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

$$e^{2iw} - 2iz\,e^{iw} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

$$= iz + \sqrt{1 - z^2}$$

Como $e^{iw} = e^{i(w - 2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

$$\Rightarrow \quad e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \quad w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2} \right)$$

Para la Rama principal en $z=0 \Rightarrow w=0$ con $k=0$

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2} \right)$$

Problema 4.

4. Encuentre la función analítica $f(z)$ (expresada en números complejos z), si se conoce su parte imaginaria $v(x,y) = 3x + 2xy$, para la condición $f(-i) = 2$. ¿la parte $\mathrm{Re}[f(z)]$ es armónica?

si $f(z)$ analítica cumple con C-R

$$\text{I}\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Bigg\{ \quad \text{II}\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{I} \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \int dx \cdot 2x + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u = x^2 + \varphi(y)$$

$$\text{II} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3 - 2y$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -\int dy\,(3 + 2y) + c$$

$$\varphi(y) = -3y - y^2 + c$$

luego $f(z) = u + iv$

$$= (x^2 - 3y - y^2 + c) + i(3x + 2xy)$$

Como $f(z=-i) = 2 \Rightarrow f(x=0, y=-1) = 2$

$\hookrightarrow i = 0 \cdot + i(-1)$

$$f(-i) = (0 + 3 - 1^2 + c) + i(0) = 2$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$f(z) = x^2 - 3y - y^2 + i(3x + 2xy)$$

$$= (x^2 - y^2 + i\,2xy) + 3i(x + iy)$$

$$= z^2 + 3iz$$

$$\mathrm{Re}[f(z)] = u = x^2 - 3y - y^2$$

u es Armónico si satisface $\nabla^2 u = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -3 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$\therefore$ $u(x,y)$ es Armónica

Problema 5:

5. Determine la región de analiticidad de la función:

$$f(z) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

la Región de analiticidad cumple con los condi. C-R. $\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}}_{u} + i\underbrace{\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}}_{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x-1)^2+y^2 - 2(x-1)(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$ ✓

luego

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{+2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$ ✓

Los condiciones C-R se cumplen. para todo valor $z = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}$

Entonces no existe derivada en $z=1$ $\therefore$ $f(z)$ no es analítica.