

Astronomía estelar

2024

prof Radostin Kurtev

Clase 6

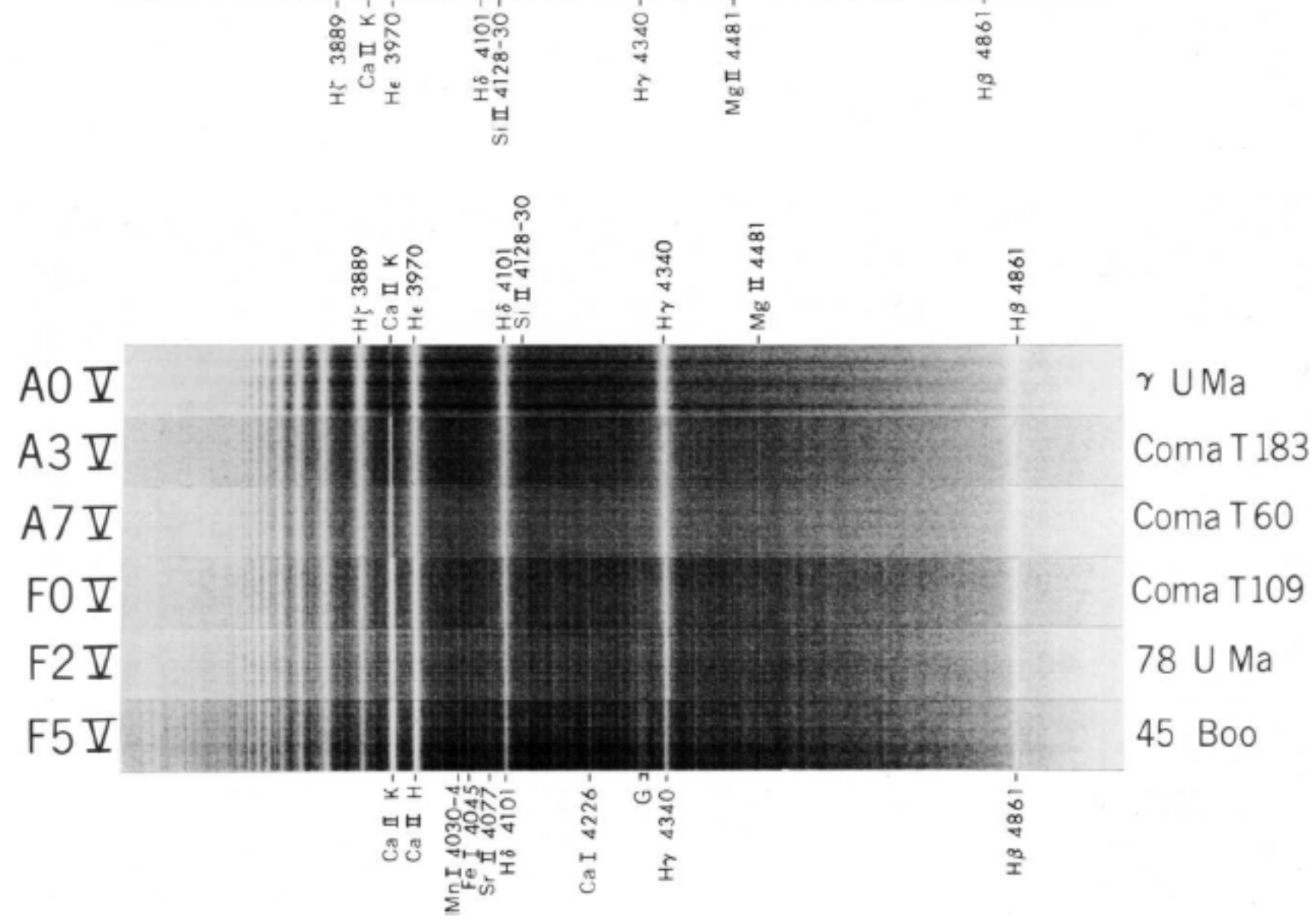
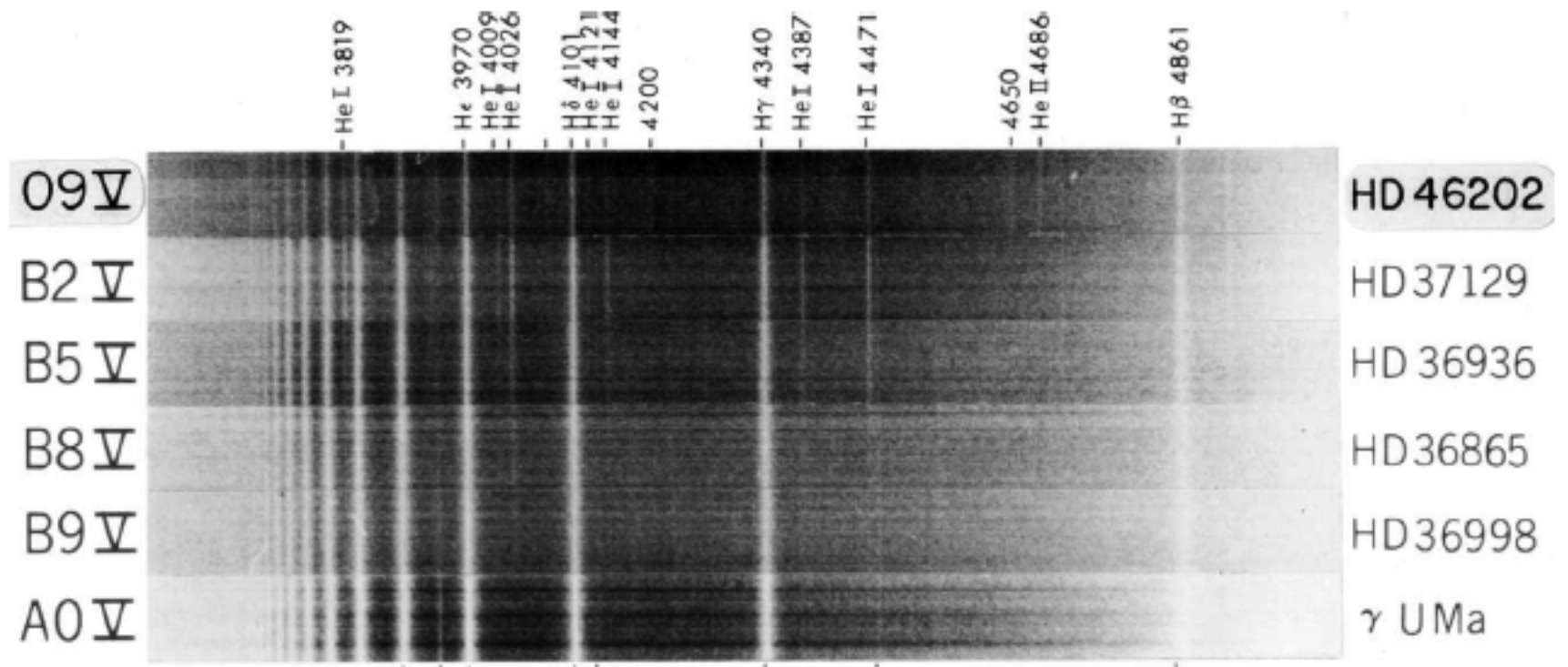
Clasificación espectral.

Un poco de historia

- Una clasificación espectral desarrollada en Harvard por **Edward C. Pickering** (1846-1919) y su asistente **Williamina P. Fleming** (1857-1911) en la década de 1890 etiquetó los espectros con letras mayúsculas de acuerdo con la fuerza de sus líneas de absorción de hidrógeno, comenzando con la letra A.
- Casi al mismo tiempo, **Antonia Maury** (1866-1952), otra de Los asistentes de Pickering y un colega de Fleming, estaban desarrollando un esquema de clasificación algo diferente que ella estaba usando para estudiar el ancho de las líneas espectrales. En su trabajo, Maury reorganizó sus clases de una manera que hubiera sido equivalente a colocar la clase B de Pickering y Fleming antes de las estrellas A.
- Luego, en 1901, **Annie Jump Cannon** (1863-1941), también empleada por Pickering, y utilizando el esquema de Pickering y Fleming siguiendo la sugerencia de Maury, reorganizó la secuencia de espectros colocando O y B antes A, subdivisiones decimales añadidas (como A0-A9), y consolidado muchas de las clases.
- Con estos cambios, el esquema de clasificación de Harvard de "**O B A F G K M**" se convirtió en una secuencia de temperatura, que abarca desde las estrellas azules más calientes hasta las estrellas M más rojas. (early-type, late type)
- Estas etiquetas también distinguen a las estrellas dentro de las subdivisiones espectrales, por lo que los astrónomos pueden hablar de una estrella K0 como una "estrella K temprana" o referirse a una estrella B9 como una "estrella B tardía".
- Cannon clasificó alrededor de 200,000 espectros entre 1911 y 1914, y los resultados se recogieron en el Catálogo de Henry Draper. Hoy, muchas estrellas se refieren a sus números HD; Betelgeuse es HD 39801.

TABLE 1 Harvard Spectral Classification.

Spectral Type	Characteristics
O	Hottest blue-white stars with few lines Strong He II absorption (sometimes emission) lines. He I absorption lines becoming stronger.
B	Hot blue-white He I absorption lines strongest at B2. H I (Balmer) absorption lines becoming stronger.
A	White Balmer absorption lines strongest at A0, becoming weaker later. Ca II absorption lines becoming stronger.
F	Yellow-white Ca II lines continue to strengthen as Balmer lines continue to weaken. Neutral metal absorption lines (Fe I, Cr I).
G	Yellow Solar-type spectra. Ca II lines continue becoming stronger. Fe I, other neutral metal lines becoming stronger.
K	Cool orange Ca II H and K lines strongest at K0, becoming weaker later. Spectra dominated by metal absorption lines.
M	Cool red Spectra dominated by molecular absorption bands, especially titanium oxide (TiO) and vanadium oxide (VO). Neutral metal absorption lines remain strong.
L	Very cool, dark red Stronger in infrared than visible. Strong molecular absorption bands of metal hydrides (CrH, FeH), water (H ₂ O), carbon monoxide (CO), and alkali metals (Na, K, Rb, Cs). TiO and VO are weakening.
T	Coollest, Infrared Strong methane (CH ₄) bands but weakening CO bands.



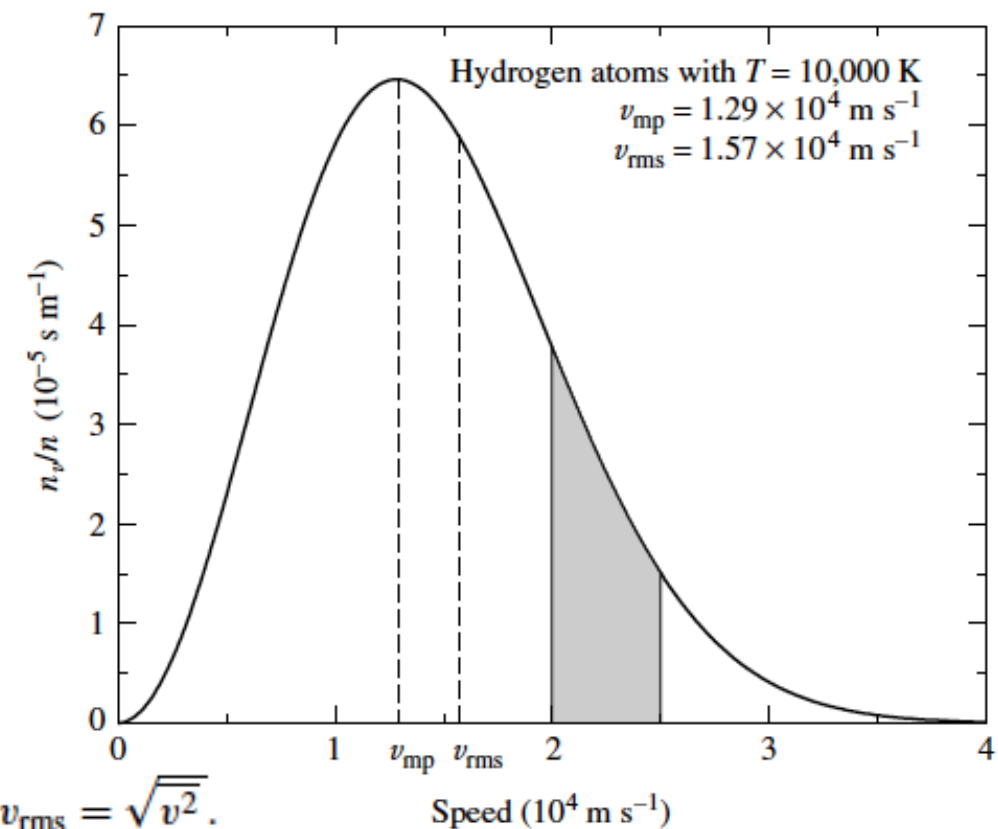
La función de distribución de velocidad de **Maxwell-Boltzmann** describe la fracción de partículas que tienen un rango de velocidades dado. La cantidad de partículas de gas por unidad de volumen que tiene velocidades entre v y $v + dv$ está dada por

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv,$$

donde n es la densidad numérica total (número de partículas por unidad de volumen), $n_v \equiv \partial n / \partial v$, m es la masa de una partícula, k es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura del gas en Kelvin.

most probable speed $v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$

root-mean-square speed $v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$



⁶The root-mean-square speed is the square root of the average (mean) value of v^2 : $v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}}.$

FIGURE 6 Maxwell-Boltzmann distribution function, n_v/n , for hydrogen atoms at a temperature of 10,000 K. The fraction of hydrogen atoms in the gas having velocities between $2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ and $2.5 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ is the shaded area under the curve between those two velocities; see Example 1.1.

Example 1.1. The area under the curve between two speeds is equal to the fraction of gas particles in that range of speeds. In order to determine the fraction of hydrogen atoms in a gas of $T = 10,000$ K having speeds between $v_1 = 2 \times 10^4$ m s⁻¹ and $v_2 = 2.5 \times 10^4$ m s⁻¹, it is necessary to integrate the Maxwell–Boltzmann distribution between these two limits, or

$$\begin{aligned} N/N_{\text{total}} &= \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v dv \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv. \end{aligned} \quad (4)$$

Although Eq. (4) has a closed-form solution when $v_1 = 0$ and $v_2 \rightarrow \infty$, it must be evaluated numerically in other cases. This can be accomplished crudely by evaluating the integrand using an average value of the velocity over the interval, multiplied by the width of the interval, or

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1),$$

where $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$. Substituting, we find

$$\begin{aligned} N/N_{\text{total}} &\simeq \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi \bar{v}^2 (v_2 - v_1) \\ &\simeq 0.125. \end{aligned}$$

Approximately 12.5% of the hydrogen atoms in a gas at 10,000 K have speeds between 2×10^4 m s⁻¹ and 2.5×10^4 m s⁻¹. A more careful numerical integration over the range gives 12.76%.

Ecuación de Boltzmann

Los átomos de un gas ganan y pierden energía al colisionar. Como resultado, la distribución en las velocidades de los átomos que chocan, dada por la eq de Maxwell, produce una distribución definida de los electrones entre los orbitales atómicos. Esta distribución de electrones se rige por un resultado fundamental de la mecánica estadística: **es menos probable que los orbitales de mayor energía estén ocupados por electrones**. Supongamos que \mathbf{s}_a representa el conjunto específico de números cuánticos que identifica un estado de energía E_a para un sistema de partículas. De manera similar, \mathbf{s}_b representa el conjunto de números cuánticos que identifica un estado de energía E_b . Por ejemplo, $E_a = -13.6$ eV para la órbita más baja del átomo de hidrógeno, con $\mathbf{s}_a = \{n = 1, \ell = 0, m_\ell = 0, m_s = -+1/2\}$ identificando un estado específico con esa energía. Luego, la razón de la probabilidad $P(\mathbf{s}_b)$ que el sistema está en el estado \mathbf{s}_b a la probabilidad $P(\mathbf{s}_a)$ en que se encuentra el sistema estado \mathbf{s}_a esta dada por:

$$\frac{P(\mathbf{s}_b)}{P(\mathbf{s}_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-(E_b - E_a)/kT},$$

donde T es la temperatura común de los dos sistemas. El término $e^{-E/kT}$ se llama **factor de Boltzmann**

El factor Boltzmann juega un papel fundamental. Supongamos, por ejemplo, que $E_b > E_a$; la energía del estado \mathbf{s}_b es mayor que la energía del estado \mathbf{s}_a . Observe que a medida que la energía térmica kT disminuye hacia cero (es decir, $T \rightarrow 0$), la cantidad $-(E_b - E_a)/kT \rightarrow -\infty$, y entonces $P(\mathbf{s}_b)/P(\mathbf{s}_a) \rightarrow 0$. Esto es exactamente lo que se debe esperar si no hay energía térmica disponible para elevar la energía de un átomo a un nivel superior. Por otro lado, si hay una gran cantidad de energía térmica disponible (es decir, $T \rightarrow \infty$), entonces $-(E_b - E_a)/kT \rightarrow 0$ y $P(\mathbf{s}_b)/P(\mathbf{s}_a) \rightarrow 1$. De nuevo, esto es lo que se esperaría ya que con un depósito ilimitado de energía térmica, todos los niveles de energía disponibles del átomo deberían ser accesibles con la misma probabilidad. Puede verificar rápidamente que si hubiéramos supuesto que $E_b < E_a$, los resultados esperados se obtendrían nuevamente en los límites de $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$.

A menudo ocurre que los niveles de energía del sistema pueden ser degenerados, con más de un estado cuántico con la misma energía. Es decir, si los estados \mathbf{s}_a y \mathbf{s}_b son degenerados, entonces $\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_b$ pero $\mathbf{s}_a \neq \mathbf{s}_b$. Al tomar promedios, debemos contar cada uno de los estados degenerados por separado. Para tener en cuenta correctamente el número de estados que tienen una energía dada, definimos \mathbf{g}_a como el número de estados con energía \mathbf{E}_a . Del mismo modo, definimos \mathbf{g}_b como el número de estados con energía \mathbf{E}_b . Estos se llaman **pesos estadísticos** de los niveles de energía.

La relación de la probabilidad $\mathbf{P}(\mathbf{E}_b)$ que el sistema se encontrará en cualquiera de los estados \mathbf{g}_b degenerados con energía \mathbf{E}_b a la probabilidad $\mathbf{P}(\mathbf{E}_a)$ de que el sistema se encuentre en cualquiera de los estados \mathbf{g}_a degenerados con energía \mathbf{E}_a viene dada por:

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}.$$

Las atmósferas estelares contienen una gran cantidad de átomos, por lo que la proporción de probabilidades es indistinguible de la relación del número de átomos. Por lo tanto, para los átomos de un elemento dado en un estado específico de ionización, la relación del número de átomos \mathbf{N}_b con la energía \mathbf{E}_b al número de átomos de \mathbf{N}_a con energía \mathbf{E}_a en diferentes estados de excitación viene dada por la ecuación de Boltzmann:

$$\boxed{\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT} .}$$

Example 1.2. The ground state of the hydrogen atom is twofold degenerate. In fact, although “ground state” is the standard terminology, the plural “ground states” would be more precise because these are *two* quantum states that have the same energy of -13.6 eV (for $m_s = \pm 1/2$).⁸ In the same manner, the “first excited state” actually consists of *eight* degenerate quantum states with the same energy of -3.40 eV.

Table 2 shows the set of quantum numbers $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$ that identifies each state; it also shows each state’s energy. Notice that there are $g_1 = 2$ ground states with the energy $E_1 = -13.6$ eV, and $g_2 = 8$ first excited states with the energy $E_2 = -3.40$ eV.

Quantum Numbers and Energies for the Hydrogen Atom.

Ground States s_1				Energy E_1
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
1	0	0	$+1/2$	-13.6
1	0	0	$-1/2$	-13.6
First Excited States s_2				Energy E_2
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
2	0	0	$+1/2$	-3.40
2	0	0	$-1/2$	-3.40
2	1	1	$+1/2$	-3.40
2	1	1	$-1/2$	-3.40
2	1	0	$+1/2$	-3.40
2	1	0	$-1/2$	-3.40
2	1	-1	$+1/2$	-3.40
2	1	-1	$-1/2$	-3.40

Example 1.3. For a gas of neutral hydrogen atoms, at what temperature will equal numbers of atoms have electrons in the ground state ($n = 1$) and in the first excited state ($n = 2$)?⁹ Recall from Example 1.2 that the degeneracy of the n th energy level of the hydrogen atom is $g_n = 2n^2$. Associating state a with the ground state and state b with the first excited state, setting $N_2 = N_1$ on the left-hand side of Eq. (6), and using the equation for the energy levels lead to

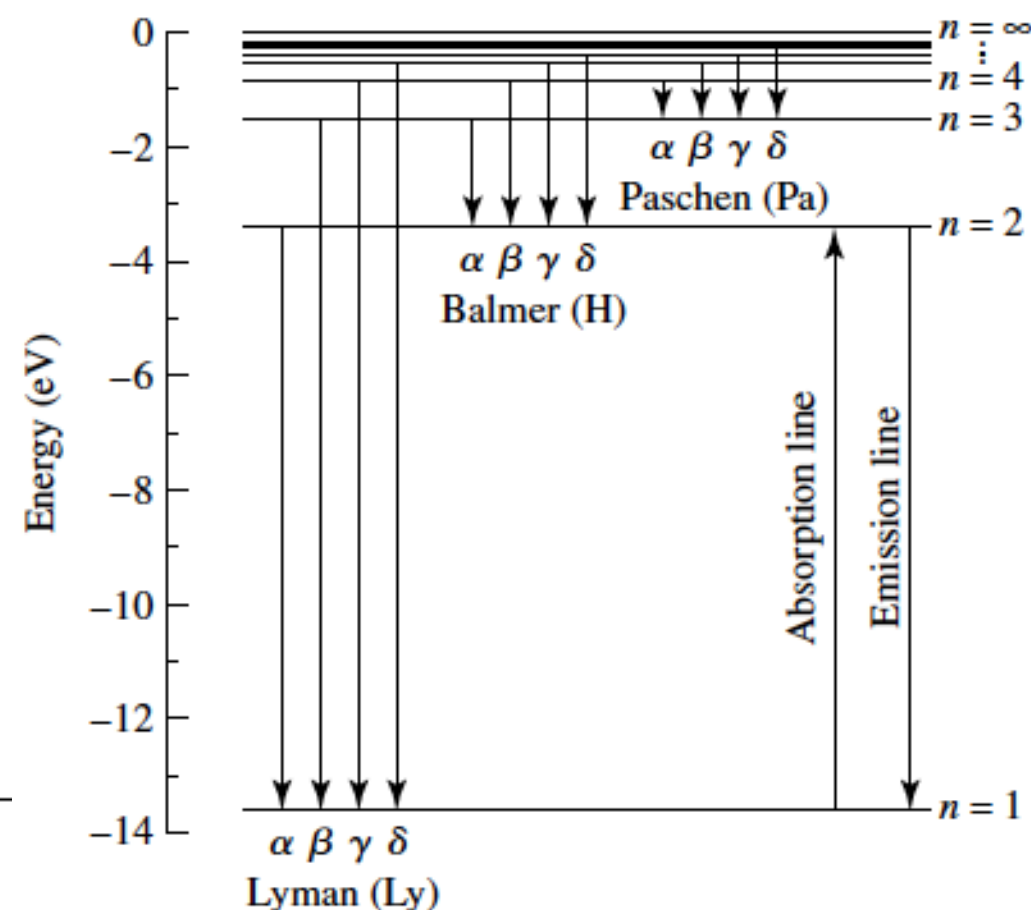
$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6 \text{ eV}/2^2) - (-13.6 \text{ eV}/1^2)]/kT},$$

or

$$\frac{10.2 \text{ eV}}{kT} = \ln(4).$$

Solving for the temperature yields¹⁰

$$T = \frac{10.2 \text{ eV}}{k \ln(4)} = 8.54 \times 10^4 \text{ K}.$$



Se requieren altas temperaturas para que un número significativo de átomos de hidrógeno tenga electrones en el primer estado excitado. La figura muestra la ocupación relativa del nivel base y los primeros estados excitados, $N_2/(N_1 + N_2)$, en función de la temperatura.

Sin embargo, este resultado es un tanto desconcertante. Recuerde que las líneas de absorción de Balmer son producidas por electrones en átomos de hidrógeno que hacen una transición ascendente desde el orbital $n = 2$. Si, como se muestra en el Ejemplo 1.3, se necesitan temperaturas del orden de 85,000 K para “alimentar” con electrones en el primer estado excitado, entonces ¿por qué las líneas de Balmer alcanzan su máxima intensidad a una temperatura mucho más baja de 9520 K? Claramente, de acuerdo con la Eq. de Boltzmann, a temperaturas superiores a 9520 K una proporción aún mayor de los electrones estará en el primer estado excitado en lugar de en el estado fundamental. Si este es el caso, ¿cuál es la causa de la disminución de la fuerza de las líneas de Balmer a temperaturas más altas?

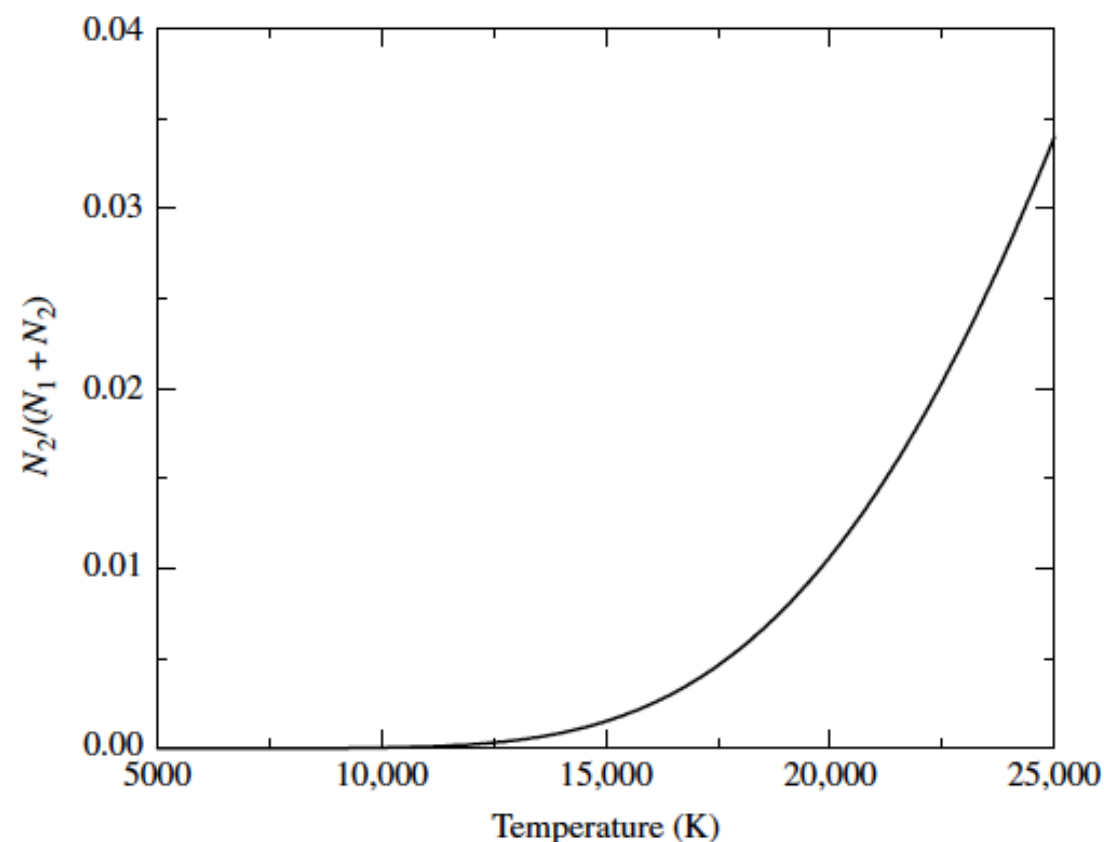
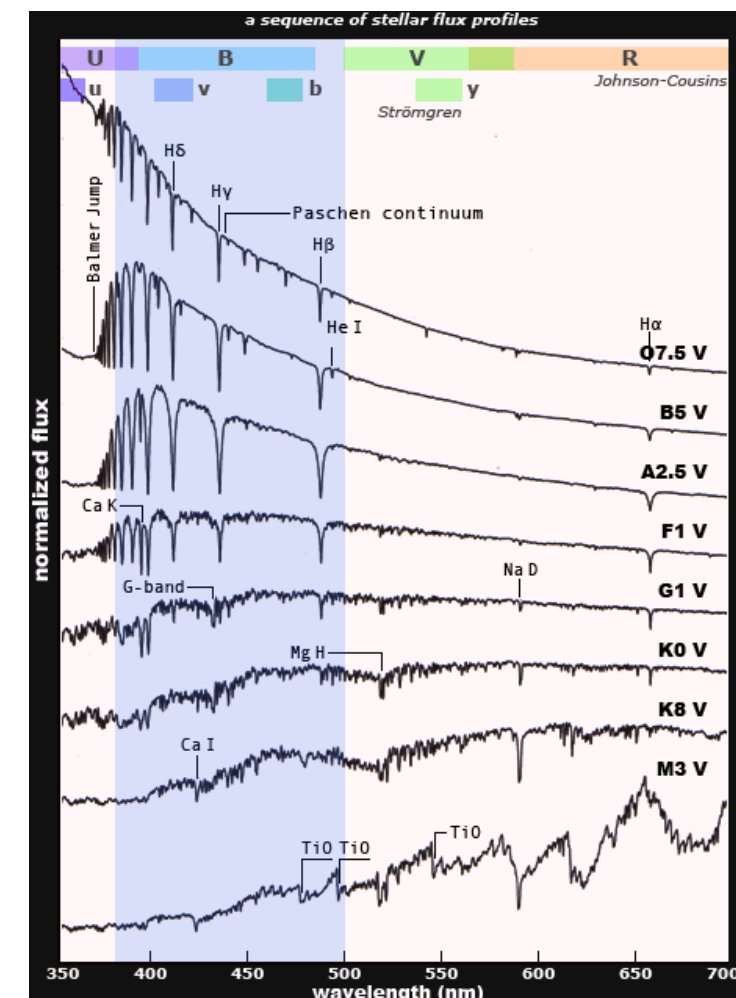


FIGURE 7 $N_2/(N_1 + N_2)$ for the hydrogen atom obtained via the Boltzmann equation.



Ecuación de Saha

La respuesta está en considerar también el número relativo de átomos en diferentes etapas de ionización. Deje χ_i ser la energía de ionización necesaria para eliminar un electrón de un átomo (o ion) en el estado fundamental, llevándolo de la etapa de ionización i a la etapa $(i+1)$. Por ejemplo, la energía de ionización del hidrógeno, la energía necesaria para convertirla de H I a H II, es $\chi_I = 13.6$ eV. Sin embargo, puede ser que los iones iniciales y finales no estén en el estado fundamental. Se debe tomar un promedio sobre las energías orbitales para permitir la posible partición de los electrones del átomo entre sus orbitales. Este procedimiento implica el cálculo de las funciones de partición, Z , para los átomos iniciales y finales. **La función de partición es simplemente la suma ponderada del número de formas en que el átomo puede organizar sus electrones con la misma energía, con configuraciones más energéticas (y por lo tanto menos probables) que reciben menos peso del factor Boltzmann, cuando se toma la suma.** Si E_j es la energía del j -ésimo nivel de energía y g_j es la degeneración de ese nivel, entonces la función de partición Z se define como:

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_1)/kT}.$$

Si utilizamos las funciones de partición Z_i y Z_{i+1} para el átomo en sus etapas inicial y final de ionización, la relación entre el número de átomos en la etapa $(i+1)$ y el número de átomos en la etapa i es:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}.$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de Saha**, después del astrofísico indio **Meghnad Saha (1894-1956)**, quién la obtuvo por primera vez en **1920**. Debido a que se produce un electrón libre en el proceso de ionización, no es sorprendente encontrar la densidad numérica de los electrones libres (número de electrones libres por unidad de volumen), **n_e** , en el lado derecho de la ecuación de Saha. Tenga en cuenta que a medida que aumenta la densidad numérica de electrones libres, disminuye el número de átomos en la etapa superior de ionización, ya que hay más electrones con los que el ion puede recombinar. El factor de 2 en frente de la función de partición **Z_{i+1}** refleja los dos spin posibles del electrón libre, con **$m_s = \pm 1/2$** . El término entre paréntesis también está relacionado con el electrón libre, siendo **m_e** la masa del electrón. A veces se usa la presión de los electrones libres, **P_e** , en lugar de la densidad del número de electrones; los dos están relacionados por la ley de los gases ideales escritos en la forma:

$$P_e = n_e kT.$$

La equation e Saha en este caso toma la forma alternativa:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}.$$

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT Z_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}.$$

La presión de los electrones varía entre 0,1 N m⁻² en las atmósferas de las estrellas más frías y 100 N m⁻² para las estrellas más calientes.

Combinación entre las ecuaciones de Boltzmann y de Saha

Example 1.4. Consider the degree of ionization in a stellar atmosphere that is assumed to be composed of pure hydrogen. Assume for simplicity that the electron pressure is a constant $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$.

The Saha equation (9) will be used to calculate the fraction of atoms that are ionized, $N_{\text{II}}/N_{\text{total}} = N_{\text{II}}/(N_{\text{I}} + N_{\text{II}})$, as the temperature T varies between 5000 K and 25,000 K. However, the partition functions Z_{I} and Z_{II} must be determined first. A hydrogen ion is just a proton and so has no degeneracy; thus $Z_{\text{II}} = 1$. The energy of the first excited state of hydrogen is $E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$ above the ground state energy. Because $10.2 \text{ eV} \gg kT$ for the temperature regime under consideration, the Boltzmann factor $e^{-(E_2-E_1)/kT} \ll 1$. Nearly all of the H I atoms are therefore in the ground state (recall the previous example), so Eq. (7) for the partition function simplifies to $Z_{\text{I}} \simeq g_1 = 2(1)^2 = 2$.

Inserting these values into the Saha equation with $\chi_{\text{I}} = 13.6 \text{ eV}$ gives the ratio of ionized to neutral hydrogen, $N_{\text{II}}/N_{\text{I}}$. This ratio is then used to find the fraction of ionized hydrogen, $N_{\text{II}}/N_{\text{total}}$, by writing

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{total}}} = \frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}} + N_{\text{II}}} = \frac{N_{\text{II}}/N_{\text{I}}}{1 + N_{\text{II}}/N_{\text{I}}};$$

the results are displayed in Fig. 8. This figure shows that when $T = 5000 \text{ K}$, essentially none of the hydrogen atoms are ionized. At about 8300 K, 5% of the atoms have become ionized. Half of the hydrogen is ionized at a temperature of 9600 K, and when T has risen to 11,300 K, all but 5% of the hydrogen is in the form of H II. Thus the ionization of hydrogen takes place within a temperature interval of approximately 3000 K. This range of temperatures is quite limited compared to the temperatures of tens of millions of degrees routinely encountered inside stars. The narrow region inside a star where hydrogen is partially ionized is called a hydrogen **partial ionization zone** and has a characteristic temperature of approximately 10,000 K for a wide range of stellar parameters.

Now we can see why the Balmer lines are observed to attain their maximum intensity at a temperature of 9520 K, instead of at the much higher characteristic temperatures (on the order of 85,000 K) required to excite electrons to the $n = 2$ energy level of hydrogen. The strength of the Balmer lines depends on N_2/N_{total} , the fraction of *all* hydrogen atoms that are in the first excited state. This is found by combining the results of the Boltzmann and Saha equations. Because virtually all of the neutral hydrogen atoms are in either the ground state or the first excited state, we can employ the approximation $N_1 + N_2 \simeq N_{\text{I}}$ and write

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{N_{\text{I}}}{N_{\text{total}}} \right) = \left(\frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \right) \left(\frac{1}{1 + N_{\text{II}}/N_{\text{I}}} \right).$$

$$k_B = 8,617,3324(78) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

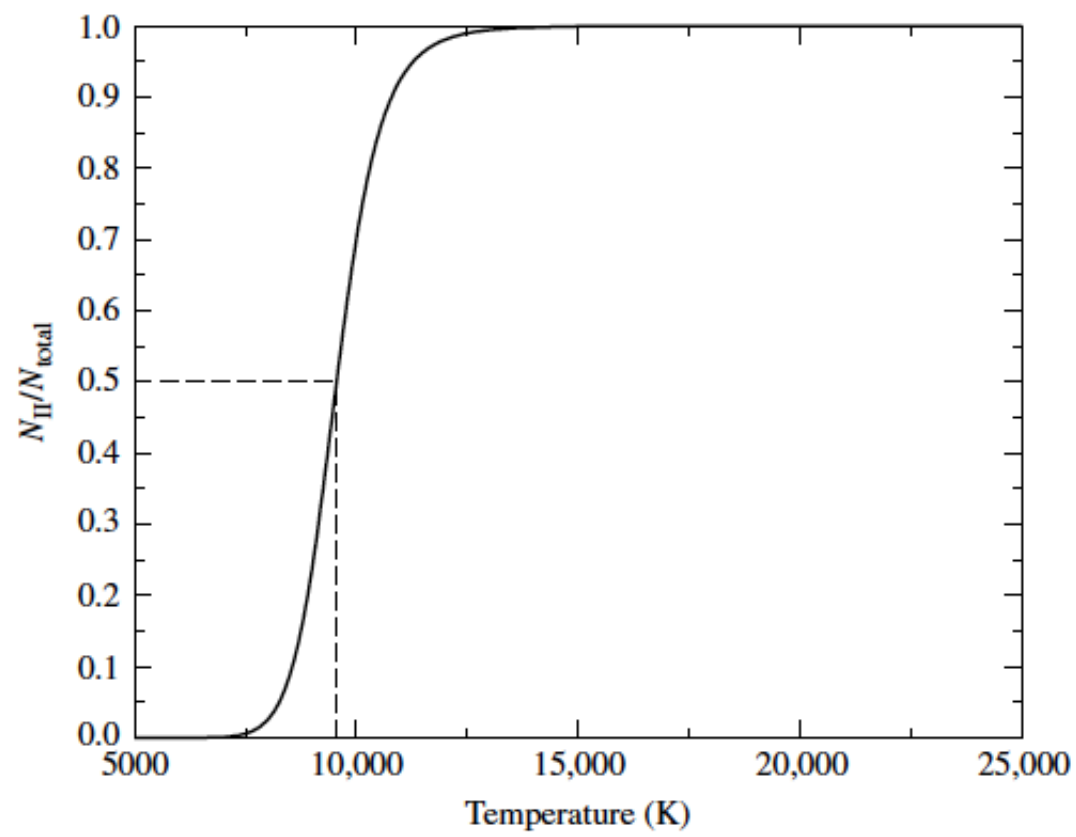


FIGURE 8 $N_{\text{II}}/N_{\text{total}}$ for hydrogen from the Saha equation when $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$. Fifty percent ionization occurs at $T \simeq 9600 \text{ K}$.

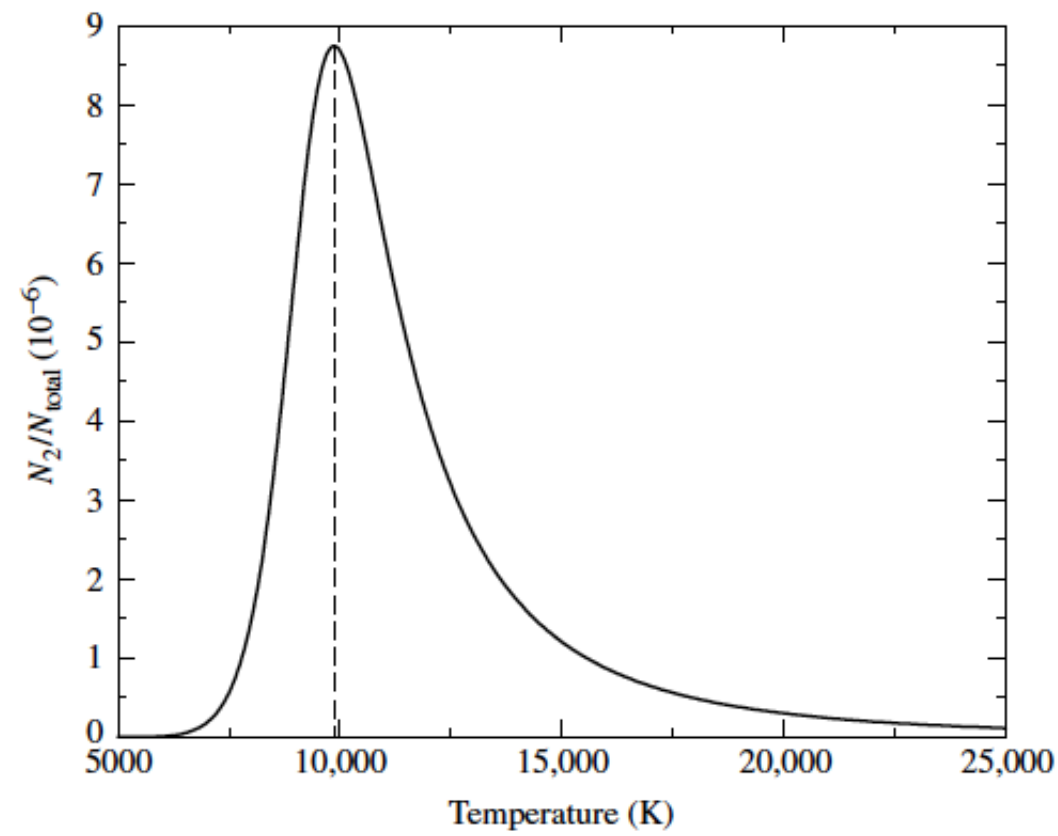


FIGURE 9 N_2/N_{total} for hydrogen from the Boltzmann and Saha equations, assuming $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$. The peak occurs at approximately 9900 K.

La Figura 9 muestra que en este ejemplo, el gas de hidrógeno produciría las líneas de Balmer más intensas a una temperatura de 9900 K, de acuerdo con las observaciones. La disminución de la intensidad de las líneas de Balmer a temperaturas más altas se debe a la ionización rápida de hidrógeno por encima de 10.000 K. La Figura 10 resume esta situación.

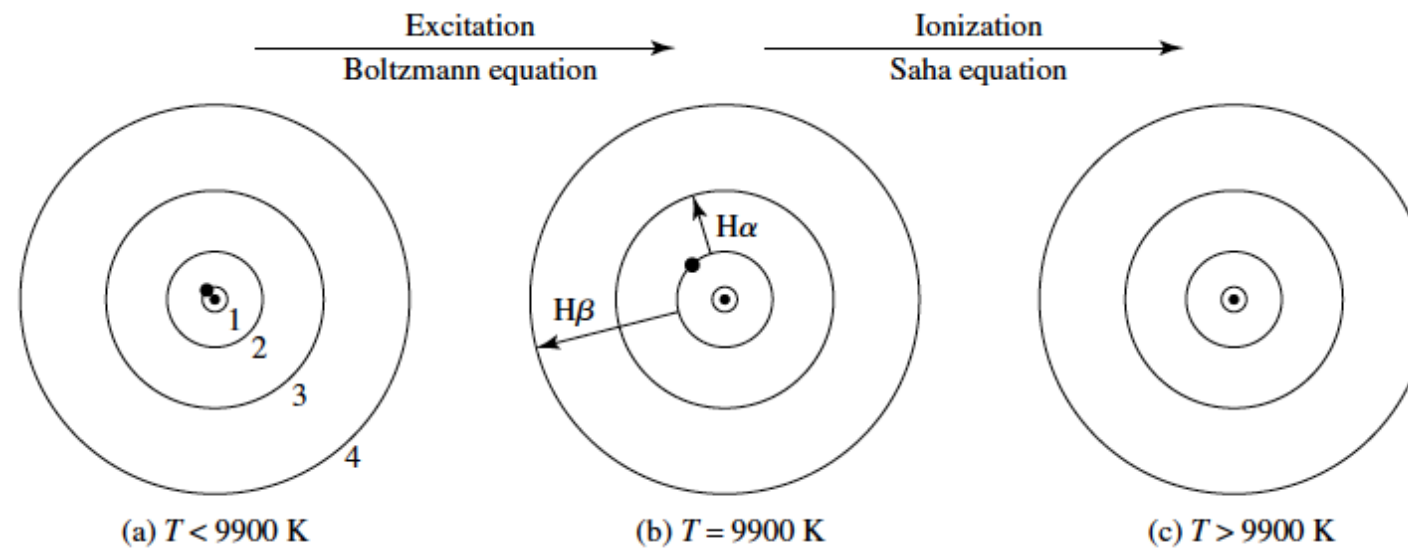


FIGURE 10 The electron's position in the hydrogen atom at different temperatures. In (a), the electron is in the ground state. Balmer absorption lines are produced only when the electron is initially in the first excited state, as shown in (b). In (c), the atom has been ionized.

Por supuesto, las atmósferas estelares no están compuestas de hidrógeno puro, y los resultados obtenidos en el Ejemplo 1.4 dependen de un valor apropiado para la presión de los electrones. En atmósferas estelares, normalmente hay **un átomo de helio por cada diez átomos de hidrógeno**. La presencia de helio ionizado proporciona más electrones con los que los iones de hidrógeno se pueden recombinar. Por lo tanto, cuando se agrega helio, se necesita una temperatura más alta para lograr el mismo grado de ionización de hidrógeno. También se debe enfatizar que la ecuación de Saha se puede aplicar solo a un gas en **equilibrio termodinámico**, de modo que se obedezca la distribución de velocidad de Maxwell-Boltzmann. Además, la densidad del gas no debe ser demasiado grande (menos de aproximadamente 1 kg m^{-3} para el material estelar), o la presencia de iones vecinos distorsionará los orbitales de un átomo y reducirá su energía de ionización.

Example 1.5. The Sun's "surface" is a thin layer of the solar atmosphere called the *photosphere*. The characteristic temperature of the photosphere is $T = T_e = 5777$ K, and it has about 500,000 hydrogen atoms for each calcium atom with an electron pressure of about 1.5 Nm^{-2} .¹³ From this information and knowledge of the appropriate statistical weights and partition functions, the Saha and Boltzmann equations can be used to estimate the relative strengths of the absorption lines due to hydrogen (the Balmer lines) and those due to calcium (the Ca II H and K lines).

We must compare the number of neutral hydrogen atoms with electrons in the first excited state (which produce the Balmer lines) to the number of singly ionized calcium atoms with electrons in the ground state (which produce the Ca II H and K lines). As in Example 1.4, we will use the Saha equation to determine the degree of ionization and will use the Boltzmann equation to reveal the distribution of electrons between the ground and first excited states.

Let's consider hydrogen first. If we substitute the partition functions found in Example 1.4 into the Saha equation (9), the ratio of ionized to neutral hydrogen is

$$\left[\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}}} \right]_{\text{H}} = \frac{2kT Z_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT} = 7.70 \times 10^{-5} \simeq \frac{1}{13,000}.$$

Thus there is only one hydrogen ion (H II) for every 13,000 neutral hydrogen atoms (H I) at the Sun's surface. Almost none of the hydrogen is ionized.

The Boltzmann equation (6) reveals how many of these neutral hydrogen atoms are in the first excited state. Using $g_n = 2n^2$ for hydrogen (implying $g_1 = 2$ and $g_2 = 8$), we have

$$\left[\frac{N_2}{N_1} \right]_{\text{H I}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT} = 5.06 \times 10^{-9} \simeq \frac{1}{198,000,000}.$$

The result is that only one of every 200 million hydrogen atoms is in the first excited state and capable of producing Balmer absorption lines:

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{N_1}{N_{\text{total}}} \right) = 5.06 \times 10^{-9}.$$

We now turn to the calcium atoms. The ionization energy χ_I of Ca I is 6.11 eV, about half of the 13.6 eV ionization energy of hydrogen. We will soon see, however, that this small difference has a great effect on the ionization state of the atoms. Note that the Saha equation is very sensitive to the ionization energy because χ/kT appears as an *exponent* and $kT \approx 0.5 \text{ eV} \ll \chi$. Thus a difference of several electron volts in the ionization energy produces a change of many powers of e in the Saha equation.

Evaluating the partition functions Z_I and Z_{II} for calcium is a bit more complicated than for hydrogen, and the results have been tabulated elsewhere:¹⁴ $Z_I = 1.32$ and $Z_{II} = 2.30$. Thus the ratio of ionized to un-ionized calcium is

$$\left[\frac{N_{II}}{N_I} \right]_{\text{Ca}} = \frac{2kT Z_{II}}{P_e Z_I} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_I/kT} = 918.$$

Practically all of the calcium atoms are in the form of Ca II; only one atom out of 900 remains neutral. Now we can use the Boltzmann equation to estimate how many of these calcium ions are in the ground state, capable of forming the Ca II H and K absorption lines. The next calculation will consider the K ($\lambda = 393.3 \text{ nm}$) line; the results for the H ($\lambda = 396.8 \text{ nm}$) line are similar. The first excited state of Ca II is $E_2 - E_1 = 3.12 \text{ eV}$ above the ground state. The degeneracies for these states are $g_1 = 2$ and $g_2 = 4$. Thus the ratio of the number of Ca II ions in the first excited state to those in the ground state is

$$\left[\frac{N_2}{N_1} \right]_{\text{Ca II}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT} = 3.79 \times 10^{-3} = \frac{1}{264}.$$

Out of every 265 Ca II ions, all but one are in the ground state and are capable of producing the Ca II K line. This implies that nearly *all* of the calcium atoms in the Sun's photosphere

are singly ionized and in the ground state,¹⁵ so that almost all of the calcium atoms are available for forming the H and K lines of calcium:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{N_1}{N_{\text{total}}} \right]_{\text{Ca II}} &\simeq \left[\frac{N_1}{N_1 + N_2} \right]_{\text{Ca II}} \left[\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{total}}} \right]_{\text{Ca}} \\
 &= \left(\frac{1}{1 + [N_2/N_1]_{\text{Ca II}}} \right) \left(\frac{[N_{\text{II}}/N_{\text{I}}]_{\text{Ca}}}{1 + [N_{\text{II}}/N_{\text{I}}]_{\text{Ca}}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1 + 3.79 \times 10^{-3}} \right) \left(\frac{918}{1 + 918} \right) \\
 &= 0.995.
 \end{aligned}$$

Now it becomes clear why the Ca II H and K lines are so much stronger in the Sun's spectrum than are the Balmer lines. There are 500,000 hydrogen atoms for every calcium atom in the solar photosphere, but only an extremely small fraction, 5.06×10^{-9} , of these hydrogen atoms are un-ionized and in the first excited state, capable of producing a Balmer line. Multiplying these two factors,

$$(500,000) \times (5.06 \times 10^{-9}) \approx 0.00253 = \frac{1}{395},$$

reveals that there are approximately 400 times more Ca II ions with electrons in the ground state (to produce the Ca II H and K lines) than there are neutral hydrogen atoms with electrons in the first excited state (to produce the Balmer lines). The strength of the H and K lines is *not* due to a greater abundance of calcium in the Sun. Rather, the strength of these Ca II lines reflects the sensitive temperature dependence of the atomic states of excitation and ionization.

La Figura 11 muestra cómo la fuerza de varias líneas espectrales varía con el tipo espectral y la temperatura. A medida que la temperatura cambia, se produce una variación uniforme de un tipo espectral al siguiente, lo que indica que existen pequeñas diferencias en la composición de las estrellas, como se deduce de sus espectros. La primera persona en determinar la composición de las estrellas y descubrir el papel dominante del hidrógeno en el universo fue **Cecilia Payne (1900-1979)**. Su Ph.D. la tesis, en la cual ella calculó las abundancias relativas de 18 elementos en atmósferas estelares, se encuentra entre las más brillantes jamás hechas en astronomía.

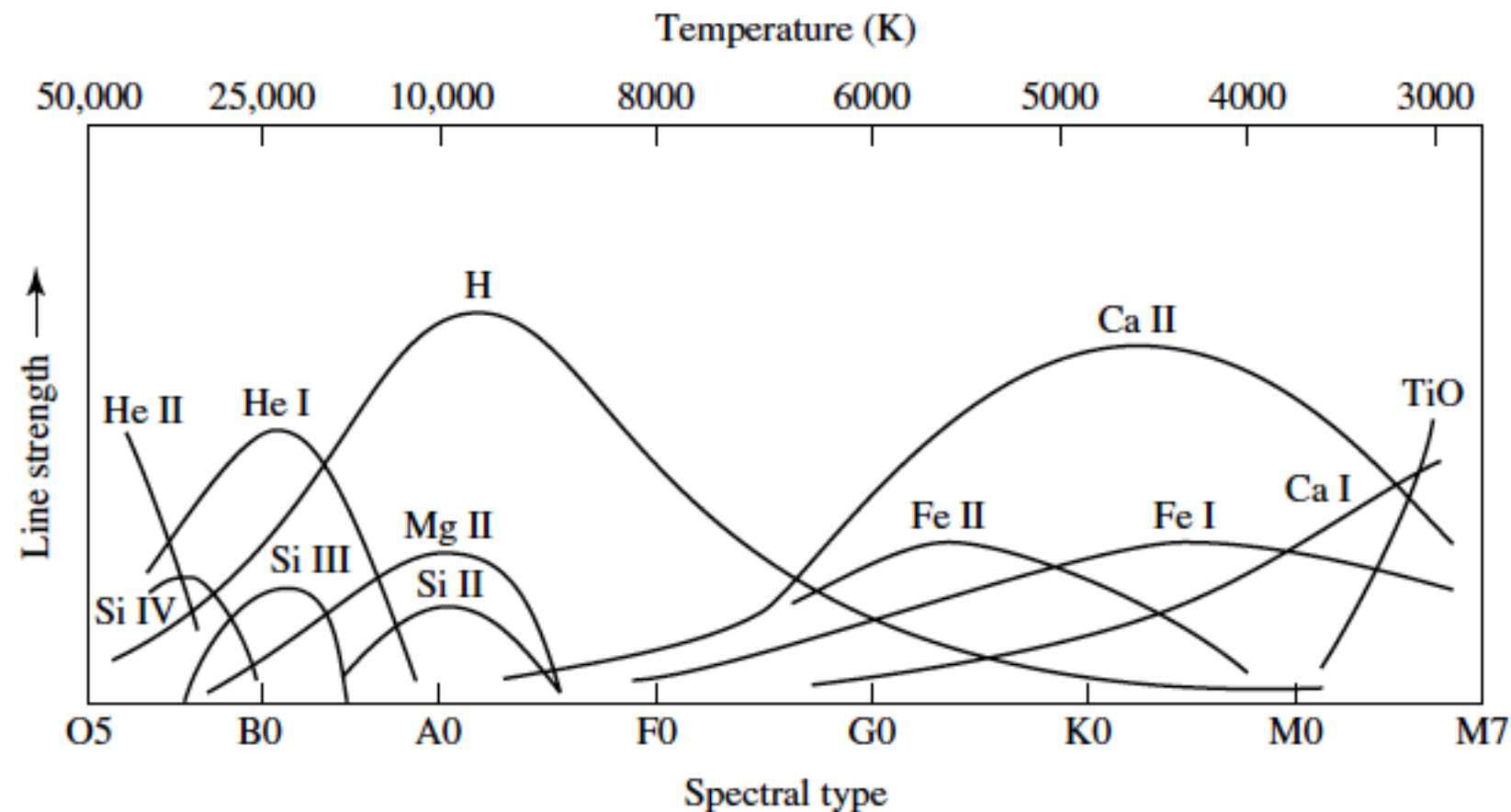


FIGURE 11 The dependence of spectral line strengths on temperature.