Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesores: Graeme Candlish, J. R. Villanueva Semestre I 2023

*Nombre:*________________________________ *RUT:*________________

Prueba 2: P1:______ P2:______ P3:______ P4:______ NF:________

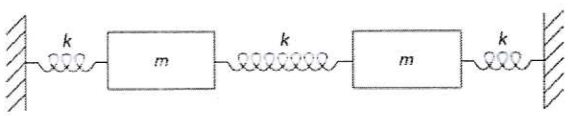
---

1. Dos masas iguales están conectadas una con otra, y a los muros, por resortes como es mostrado en la figura adjunta. Las masas están confinadas a moverse sólo de manera horizontal.

   (a) Establezca la ecuación de la aceleración Newtoniana para cada masa.

   (b) Resuelva la ecuación secular para los autovalores.

   (c) Determine los autovectores y así, los modos normales de movimiento.



2. Usando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt, construya los tres primeros polinomios de Hermite:

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad -\infty < x < \infty, \quad w(x) = e^{-x^2}.$$

   La normalización usual para este conjunto de polinomios es

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn} 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

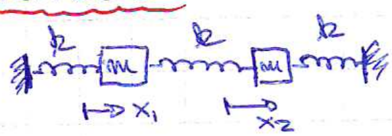
3. Encuentre la solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$(tx^2 - x)dt + tdx = 0$$

4. Encuentre la solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^3 \sin x$$

Problema 1:



$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \; ; \; V = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \; ; \; \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \; \ddot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{\vec{X}} = -V\vec{X} \Rightarrow M\ddot{\vec{X}} + V\vec{X} = \vec{0}$$

$$x_j = A_j \cos\omega t \rightarrow \ddot{x}_j = -\omega^2 x_j$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 M + V)\vec{X} = \vec{0} \Rightarrow \det(V - \omega^2 M) = 0 \quad \text{Ec. secular.}$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0 = 4k^2 - 4km\omega^2 + \omega^4 m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \quad / m^2 \quad \Omega^2 = k/m$$

$$\omega^4 - 4\Omega^2\omega^2 + 3\Omega^4 = 0 \qquad (\omega^2 - 3\Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2) = 0$$

$$\omega_1^2 = 3\Omega^2 = 3k/m \quad \wedge \quad \omega_2^2 = \Omega^2 = k/m \qquad \underline{\text{Valores prop}}$$

$\underline{\omega_1}$:
$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (x_1^{(1)} + x_2^{(1)})k = 0 \Rightarrow x_1^{(1)} = -x_2^{(1)}$$
$$\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mapsto \quad \leftarrowtail \quad \wedge \quad \leftarrow \quad \rightarrow$

$\underline{\omega_2}$:
$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (x_1^{(2)} - x_2^{(2)})k = 0 \Rightarrow x_1^{(2)} = x_2^{(2)}$$

$\mapsto \quad \mapsto \quad \wedge \quad \leftarrow \quad \leftarrow$

$$\vec{x}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2: $u_n = x^n \ (n=0,1,2,\dots)$; $-\infty < x < \infty$; $W(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, W(x)\, dx = \frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x)\, W(x)\, dx = \delta_{nm}$$

$\Rightarrow H_n(x) = A_n \varphi_n(x)$; A_n por determinar.

- $u_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \dfrac{u_0}{\sqrt{\langle u_0 | u_0 \rangle}} = \dfrac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$;

Ya que $\int_{-\infty}^{\infty} H_0^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \Rightarrow \boxed{H_0 = 1}$

- $u_1 = x \rightarrow \varphi_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{\langle u_1 | u_1 \rangle}} = \dfrac{x}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx\right]^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} x \Rightarrow H_1(x) = A_1 \varphi_1(x)$

$\langle H_1 | H_1 \rangle = A_1^2 \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 2\sqrt{\pi} = A_1^2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow A_1^2 = 2\sqrt{\pi} \Rightarrow A_1 = \sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}$

$\Rightarrow H_1(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{\pi} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} x \longrightarrow \boxed{H_1(x) = 2x}$

- $u_2 = x^2 \rightarrow \varphi_2 = u_2 - \langle \varphi_0 | u_2 \rangle \varphi_0 - \cancel{\langle \varphi_1 | u_2 \rangle}^{0} \varphi_1 = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = x^2 - \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow H_2(x) = A_2 \varphi_2(x)$

$\therefore \langle H_2 | H_2 \rangle = A_2^2 \cdot \dfrac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (2x^2-1)^2 e^{-x^2} dx = \left(\dfrac{A_2}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (4x^4 - 4x^2 + 1) e^{-x^2} dx = 4 \cdot 2\sqrt{\pi}$

$\Rightarrow \boxed{A_2 = 4}$

$\Rightarrow \boxed{H_2(x) = 4x^2 - 2 = 2(2x^2-1)}$

Pregunta 3

$(tx^2 - x)\,dt + t\,dx = 0$

Usamos la sustitución $v = xt$: $dv = x\,dt + t\,dx$

$$dv - t\,dx = x\,dt \Rightarrow \frac{dv}{x} - \frac{v}{x^2}dx = dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{x}x^2 - x\right)\left[\frac{1}{x}dv - \frac{v}{x^2}dx\right] + \frac{v}{x}dx = 0$$

$$(vx - x)\left[\frac{dv}{x} - \frac{v\,dx}{x^2}\right] + \frac{v\,dx}{x} = 0$$

$$(v-1)\left[dv - \frac{v}{x}dx\right] + \frac{v\,dx}{x} = 0$$

$$(v-1)\,dv - \frac{v^2}{x}dx + \frac{2v\,dx}{x} = 0$$

$$(v-1)\,dv = \frac{v^2 - 2v}{x}dx$$

$$\frac{(v-1)}{v^2 - 2v}dv = \frac{dx}{x} \qquad f = v^2 - 2v \qquad \frac{1}{2}\frac{df}{dv} = v - 1$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{f}\frac{df}{dv}dv = \frac{1}{2}\frac{1}{f}df = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln f = \ln x + C$$

$$\exp(\ln f^{1/2}) = \exp(\ln x + C)$$

$$\Rightarrow f^{1/2} = C\cdot x \Rightarrow f = C\cdot x^2$$

$$v^2 - 2v = C\cdot x^2 \Rightarrow x^2t^2 - 2xt = C\cdot x^2$$

Se puede simplificar

Pregunta 4

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = x^3 \sin x$$

Factor integrante: $\exp\left(-2\int^{x} \frac{1}{x'} dx'\right) = \exp(-2 \ln x)$

$$\Rightarrow \exp(\ln x^{-2}) = x^{-2}$$

$$x^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3} y = x \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^{-2} y\right] = x \sin x$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}\left[x^{-2} y\right] dx = \int x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow x^{-2} y = -x \cos x + \int \cos x \, dx + C$$ (Integración por partes)

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$$\Rightarrow y = -x^3 \cos x + x^2 \sin x + Cx^2$$

Verificar:

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 \cos x + x^3 \sin x + 2x \sin x + x^2 \cos x + 2Cx$$

$$= -2x^2 \cos x + 2x \sin x + x^3 \sin x + 2Cx$$

$$-\frac{2}{x} \cdot y = 2x^2 \cos x - 2x \sin x - 2Cx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = x^3 \sin x \checkmark$$