Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2024

Tarea 8

---

1. Supongamos que $\psi(x)$ es diferenciable una vez. Por consideración del producto interno con una función de prueba, justificar la fórmula

$$\psi(x)\delta'(x) = \psi(0)\delta'(x) - \psi'(0)\delta(x) \tag{1}$$

Encontrar una fórmula similar para $\psi(x)\delta^{(n)}(x)$ en el caso de que ψ es diferenciable n veces.

Solución: Aplicando el producto interno al lado izquierdo, con una función de prueba $\phi(x)$, tenemos (después de aplicar integración por partes):

$$\begin{aligned}(\psi(x)\delta'(x), \phi(x)) &= \int_\Omega \psi(x)\delta'(x)\phi(x)dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dx}\left[\psi(x)\delta(x)\phi(x)\right]dx - \int_\Omega \psi'(x)\delta(x)\phi(x)dx - \int_\Omega \psi(x)\delta(x)\phi'(x)dx\end{aligned}$$

La primera integral en al lado derecho es cero por el comportamiento de la función de prueba $\phi(x)$ en el contorno del dominio Ω. Podemos usar la propiedad fundamental del delta de Dirac para evaluar las integrales y obtenemos

$$(\psi(x)\delta'(x), \phi(x)) = -\psi'(0)\phi(0) - \psi(0)\phi'(0)$$

Usando el lado derecho de la ecuación de la pregunta como una distribución, tenemos

$$(\psi(0)\delta')[\phi(x)] - (\psi'(0)\delta)[\phi(x)] = -\psi(0)\phi'(0) - \psi'(0)\phi(0)$$

Obtenemos el mismo resultado, así que, como distribuciónes, los lados izquierdo y derecho de la ecuación en la pregunta son las mismas.

2. Supongamos que $x \in [-\pi, \pi]$. ¿Las series de Fourier de $\delta(x)$ y $|p|\delta(px)$ concuerdan? ¿Por qué?

Solución: La serie de Fourier para $\delta(x)$ (cuando $L = \pi$) es

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

Calculamos los coeficientes de la serie de Fourier para $|p|\delta(px)$:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}|p|\delta(px)dx = \frac{|p|}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y/|p|)}\delta(y)\frac{dy}{|p|} = \frac{1}{2\pi}$$

Los coeficientes de la expansión son iguales a los de la expansión para $\delta(x)$, así que las series de Fourier concuerdan. Esperamos este resultado por la identidad:

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$$