# Espacios vectoriales

## Revisión de las operaciones con vectores y sus propiedades

En las clases anteriores, hemos presentado (entre otras, dos operaciones con vectores), la **adición** y la **multiplicación por un escalar** (o ponderación). Llegó el momento de revisarlas y explorar sus propiedades.

## A) Adición

**Definición:** Si tenemos dos vectores $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{b}} = \langle b_x, b_y \rangle$, podemos definir un nuevo vector

$$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \langle a_x + b_x, a_y + b_y \rangle$$

**Propiedades:** Cualesquiera sean los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ se cumplen las siguientes propiedades:

P1) La adición de vectores es **conmutativa:** $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}}$

P2) La adición de vectores es **asociativa:** $(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) + \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}})$

P3) El vector nulo $\vec{\boldsymbol{o}} = \langle 0{,}0 \rangle$ es el neutro, es decir: $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{o}} = \vec{\boldsymbol{a}}$

P4) Para cualquier vector $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y \rangle$, es posible encontrar otro vector $-\vec{\boldsymbol{a}} = \langle -a_x, -a_y \rangle$ (llamado el **opuesto de** $\vec{\boldsymbol{a}}$) tal que si sumamos ambos vectores el resultado es el vector nulo: $\vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\boldsymbol{o}}$

## P) Ponderación o multiplicación por un escalar

**Definición:** Dado un escalar $\alpha$ y un vector $\vec{\boldsymbol{a}} = \langle a_x, a_y \rangle$, definimos

$$\alpha\vec{\boldsymbol{a}} = \langle \alpha a_x,\ \alpha a_y \rangle$$

**Propiedades:** Cualesquiera sean los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ (y $\alpha, \beta$ reales) se cumplen las siguientes propiedades:

P5) Es **asociativa:** $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

P6) Es **distributiva** con respecto a la adición de vectores:

$$\boldsymbol{\alpha}(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{b}}$$

P7) Es **distributiva** con respecto a la adición de escalares:

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta}\vec{\boldsymbol{a}}$$

P8) El número 1 es neutro de esta operación: $\mathbf{1} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}$

**Espacios vectoriales**

Consideremos ahora un conjunto V (podríamos decir "de vectores" pero extenderemos luego el concepto a otras ideas de las matemáticas), el conjunto de los números reales **R** (o alternativamente, el conjunto de los complejos **C**) y las dos operaciones antes mencionadas.

**Definición:**

Un conjunto V (con el conjunto R) y las dos operaciones adición y multiplicación por un escalar es un **espacio vectorial** si se cumplen las ocho propiedades (P1 a P8) mencionadas antes.

**Ejemplos:**

Es bastante fácil de convencerse que el conjunto de vectores del plano $\mathbf{R^2}$, del espacio $\mathbf{R^3}$, e incluso de dimensión superior $\mathbf{R^n}$ son espacios vectoriales.

Pero hay otros ejemplos, no tan directos, que son muy interesantes:

El conjunto de los polinomios $P^2(x)$ de grado $\leq 2$ (o de grado $\leq n$), de coeficientes reales, más el polinomio nulo, es un espacio vectorial.

Vamos a convencernos de esto, verificando rápidamente que se cumplen algunas de las propiedades. Elijamos dos polinomios de grado menor o igual a dos (cuidado,para demostrarlas habría que trabajar con vectores genéricos, no con un ejemplo):

$$p(x) = x^2 + 3x - 5$$

$$q(x) = 3x^2 - x + 8$$

**P1) Conmutativa:**

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

$$(x^2 + 3x - 5) + (3x^2 - x + 8) = (3x^2 - x + 8) + (x^2 + 3x - 5)$$

**P3) Neutro:**

$$(x^2 + 3x - 5) + (0x^2 + 0x + 0)$$

**P4) Opuesto:**

$$(x^2 + 3x - 5) + (-x^2 - 3x + 5) = 0x^2 + 0x + 0$$

**P5) Asociativa:**

$$3 \cdot (2p(x)) = 6p(x)$$

$$3(2x^2 + 6x - 10) = 6(x^2 + 3x - 5)$$

**P6) Distributiva 1:**

$$3[p(x) + q(x)] = 3p(x) + 3q(x)$$

**P7) Distributiva 2:**

$$(3 + 2) \cdot p(x) = 5p(x)$$

**P8) Neutro multiplicativo:**

$$1 \cdot (x^2 + 3x - 5) = x^2 + 3x - 5$$

## Generadores y bases

**Definición:** Si todos los vectores del conjunto V de un espacio vectorial $\mathscr{E}$ pueden ser expresados como combinaciones lineales de un conjunto de vectores

$$\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \dots\}$$

diremos que el conjunto $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \dots\}$ es un **generador** del espacio vectorial $\mathscr{E}$ y escribiremos

$$\text{gen } \mathscr{E} = \{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \dots\}$$

y si el conjunto de generadores $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \dots\}$ es además **linealmente independiente** diremos que es una **base** de $\mathscr{E}$ **.**

El número de vectores en la base se llama **dimensión** del espacio vectorial**.** La dimensión de un espacio vectorial no depende de la base elegida.

**Ejemplo 1:**

Es bastante fácil de ver que el conjunto de vectores unitarios:

$$\vec{\boldsymbol{\imath}} = \langle 1,0,0 \rangle \qquad \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \langle 0,1,0 \rangle \qquad \vec{\boldsymbol{k}} = \langle 0,0,1 \rangle$$

es un generador de $\mathbf{R}^3$ ya que cualquier otro vector de $\mathbf{R}^3$**,** por ejemplo,

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \langle 5, -3, 2 \rangle$$

puede ser escrito como combinación lineal de ellos,

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{k}}$$

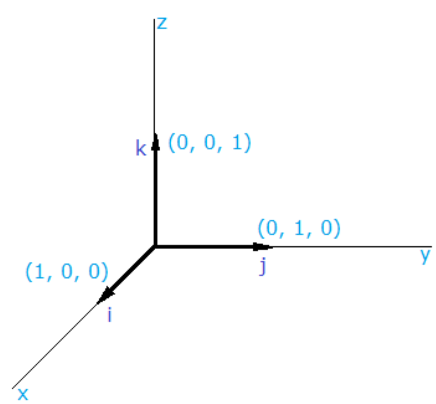
Pero además $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ es un conjunto linealmente independiente ya que es imposible escribir uno de sus vectores como combinación lineal de los otros.

Dicho de otra manera, ninguno de ellos está en el plano de los otros dos.

$$\vec{\boldsymbol{k}} \neq \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}$$

Es decir, no existen números $\alpha$ y $\beta$ tales que:

$$(0,0,1) = \alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,0)$$




Por esa última razón, es que el conjunto de vectores unitarios es **una base** de $\mathbf{R}^3$**.**

Por ser la base más sencilla de $\mathbf{R}^3$, la llamaremos **base canónica**.

La base canónica de $\mathbf{R}^4$ es el conjunto formado por los vectores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} = \langle 1,0,0,0\rangle \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} = \langle 0,1,0,0\rangle \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u_3}} = \langle 0,0,1,0\rangle \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u_4}} = \langle 0,0,0,1\rangle$$

**Ejemplo 2:**

La base canónica de $\mathbf{R}^2$ es el conjunto $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}\}$ formado por los vectores:

$$\vec{\boldsymbol{\imath}} = \langle 1,0\rangle \qquad \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \langle 0,1\rangle$$

Más brevemente:

$$B_c = \{\langle 1,0\rangle\langle 0,1\rangle\}$$

Es fácil de probar que cualquier vector,

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle m, n\rangle \qquad (m \text{ y } n \text{ números reales cualesquiera})$$

puede escribirse como combinación lineal de $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ ***y*** $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$**,** ya que:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle m, n\rangle = m \cdot \langle 1,0\rangle + n \cdot \langle 0,1\rangle$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}.\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{n}.\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Pruebe ahora que el vector

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle m, n\rangle$$

puede también ser escrito como combinación lineal de los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$, siendo:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \langle 2, -1\rangle \qquad \vec{\boldsymbol{b}} = \langle 3,2\rangle$$

Para ello, deberán existir coeficientes reales $\alpha$ y $\beta$ que cumplan:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta}.\vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\langle m, n\rangle = \alpha\langle 2, -1\rangle + \beta\langle 3,2\rangle$$

lo cual es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = m \\ -\alpha + 2\beta = n \end{cases}$$

La solución es

$$\alpha = \frac{2m - 3n}{7}$$

$$\beta = \frac{m + 2n}{7}$$

$$\langle m, n\rangle = \left(\frac{2m - 3n}{7}\right)\langle 2, -1\rangle + \left(\frac{m + 2n}{7}\right)\langle 3,2\rangle$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{2m-3n}{7}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{a}} + \left(\frac{m+2n}{7}\right).\vec{\boldsymbol{b}}$$

Por tanto, el conjunto $\{\langle 2,-1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ es también base de $\mathbf{R}^2$.

**Ejercicios:**

**1.** (a) Sean

$\vec{\boldsymbol{v}} = (0,1,0)$ $\quad$ $\vec{w} = (1,2,4)$ $\quad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} = (1,0,0)$ $\quad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} = (1,2,0)$

vectores de $R^3$.

Compruebe que que $\vec{\boldsymbol{v}}$ se puede escribir como combinación lineal de $\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}$ (esto es $\vec{\boldsymbol{v}} = \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \beta\overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}$ con α y β reales) pero $\vec{\boldsymbol{w}}$ no es combinación lineal de ellos.

(b) ¿Son los conjuntos $\{\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}, \vec{\boldsymbol{v}}\}$ $y$ $\{\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}, \vec{\boldsymbol{w}}\}$ linealmente independientes?

**2.** Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

**3.** ¿Puede ser el conjunto de vectores

$\vec{\boldsymbol{a}} = (1,1,0)$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{b}} = (2,2,4)$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{c}} = (1,1,4)$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{d}} = (2,2,2)$

linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$? En caso contrario, encuentre subconjuntos que sí lo sean.

**4.** Más arriba hemos dicho que el conjunto de todos los polinomios de 2º grado o menor con coeficientes reales más el polinomio nulo es un **espacio vectorial** con las operaciones habituales de suma de polinomios y multiplicación por un número real.

¿Cuál sería la base canónica de dicho espacio? ¿Es posible expresarla como vector?