Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

2ª. prueba parcial

14 de Octubre de 2021

Instrucciones:

* **La prueba es individual. Se recomienda no comentar el trabajo propio con otros estudiantes.**
* **El plazo de entrega de la prueba es <u>hoy jueves 14 de Octubre a las 21.00 horas</u>.**
* **Se deberá enviar un documento único (pdf o Word con fotos pegadas) conteniendo fotos de la resolución escrita a mano por el estudiante. De ser posible, se sugiere escanear para mayor claridad.**
* **El correo deberá enviarse desde el correo institucional del estudiante al correo mario.marotti@uv.cl**
* **En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible.**

1. Decida para que valor de k el vector $\vec{c}$ es **combinación lineal** de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ k^2+4 \\ 8 \\ k^2-k \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

2. Dadas las siguientes rectas en $\mathbf{R}^2$,

$$r_1: \quad (x,y) = (3,-5) + \alpha \cdot \langle 1,1 \rangle$$
$$r_2: \quad (x,y) = (6,\ 4) + \beta \cdot \langle 0,-1 \rangle$$

encuentre: (a) el punto de intersección. **(0,5 puntos)**

(b) el ángulo que forman las rectas. **(1,0 puntos)**

3. Encuentre la ecuación del plano de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $P(2,3,5)$ y es perpendicular a los planos,

$$2x + 3y + 4z = 1$$
$$x + y + z = 24$$

(1,5 puntos)

4. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,2,1)$ e intersecta a las rectas

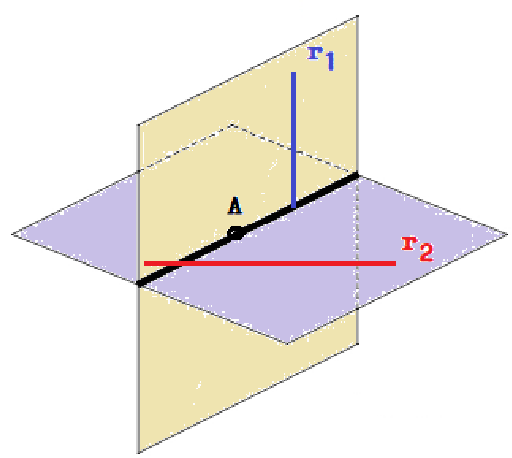
$$r_1: \quad (x,y,z) = (2,0,3) + \alpha \cdot \langle 1,-1,2 \rangle$$
$$r_2: \quad (x,y,z) = (3,5,2) + \beta \cdot \langle 0,2,1 \rangle$$

Sugerencia: Encuentre previamente las ecuaciones de los planos:

Plano 1, que pasa por A y contiene a r_1

Plano 2, que pasa por A y contiene a r_2

(1,5 puntos)



Ejercicio 1 :

Debemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\vec{c} = \alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ k^2+4 \\ 8 \\ k^2-k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

entonces:
$$\begin{cases} 3 = \alpha & (1) \\ k^2+4 = 3\alpha + 2\beta & (2) \\ 8 = 2\alpha + \beta & (3) \\ k^2-k = 4\alpha - 3\beta & (4) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de (1) y (3):

$$\boxed{\alpha = 3} \quad \boxed{\beta = 2}$$

Reemplazando en (2) y (4):

$$k^2 + 4 = 13$$
$$k^2 = 9$$
$$k = +3 \quad o \quad k = -3$$

$$k^2 - k = 6$$
$$k^2 - k - 6 = 0$$
$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2}$$
$$k = \frac{1 \pm 5}{2} \to k = +3, \quad k = -2$$

La solución común a ambas ecuaciones es $\boxed{k = +3}$

Ejercicio 2 :

(a) Recta 1 : $\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -5 + \alpha \end{cases}$

Recta 2: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 - \beta \end{cases}$

Igualando x e y: $\begin{cases} 3 + \alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3 \\ -5 + \alpha = 4 - \beta \Rightarrow \beta = 6 \end{cases}$

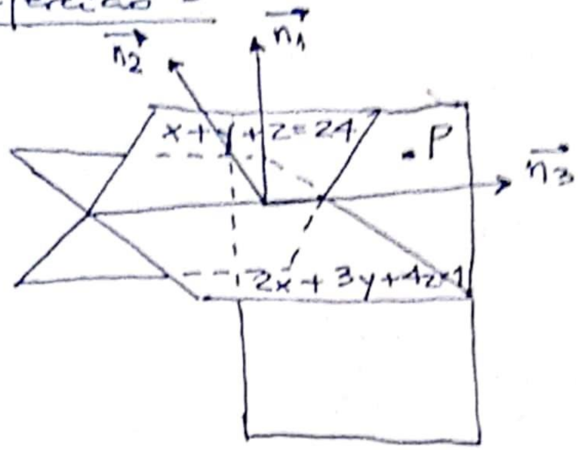
El punto de intersección es: $\boxed{P(6, -2)}$

$$x = 3 + 3 = 6$$
$$y = -5 + 3 = -2$$

(b)
$$\cos \alpha = \frac{\langle 1, 1 \rangle . \langle 0, -1 \rangle}{\sqrt{1^2 + 1^2} . \sqrt{0^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1.0 + 1.-1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135°$$

Ejercicio 3



Llamemos $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ a los vectores normales a los planos 1 y 2 respectivamente:

$$\vec{n_1} = \langle 2, 3, 4 \rangle$$
$$\vec{n_2} = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

El plano buscado es perpendicular a ambos por tanto su vector normal será:

$$\boxed{\vec{n_3} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}}$$

$$\vec{n_3} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\vec{n_3} = \langle -1, 2, -1 \rangle$$

El plano es entonces:

$$-x + 2y - z + D = 0$$

Buscamos D para que pase por el punto (2,3,5)

$$-2 + 2.3 - 5 + D = 0$$

$$\boxed{D = 1}$$

El plano buscado es: $\boxed{-x + 2y - z + 1 = 0}$

Ejercicio 4

(1) Plano que pasa por $A(2,2,1)$ y contiene a r_1:
Un vector contenido en ese plano es $\langle 1,-1,2\rangle$
Otro vector contenido en ese plano es:

$$\langle 2-2, 2-0, 1-3\rangle = \langle 0, 2, -2\rangle$$

La ecuación vectorial del plano es:

$$(x,y,z) = (2,2,1) + \alpha\langle 1,-1,2\rangle + \beta.\langle 0,2,-2\rangle$$

Busquemos su ecuación general:

$$\vec{n_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{n_1} = \langle -2, 2, 2\rangle$$

$$\boxed{\vec{n_1} = \langle -1, 1, 1\rangle}$$

Ecuación general:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{-x} + \underset{\underset{2}{\uparrow}}{y} + \underset{\underset{1}{\uparrow}}{z} + D = 0$$

Como pasa por el punto $A(2,2,1)$, reemplazamos.

$$\boxed{D = -1}$$

$$\boxed{-x + y + z - 1 = 0} \text{ plano 1}$$

(2) Plano que pasa por $A(2,2,1)$ y contiene a r_2:
Dos vectores de ese plano son: $\langle 0,2,1\rangle$ y $\langle 1,3,1\rangle$

Ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (3,5,2) + \alpha.\langle 0,2,1\rangle + \beta\langle 1,3,1\rangle$$

$$\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + \hat{j} - 2k$$

$$\vec{n_2} = \langle -1, 1, -2\rangle$$

Ec. general: $\underset{\underset{2}{\uparrow}}{-x} + \underset{\underset{2}{\uparrow}}{y} - 2\underset{\underset{1}{\uparrow}}{z} + D' = 0$

$$\boxed{D' = 2}$$

$$\boxed{-x+y-2z+2=0}$$ plano 2

Intersectemos plano 1 con plano 2

$$\begin{cases} -x+y+z-1=0 & (-1) \\ -x+y-2z+2=0 & (+1) \end{cases}$$

$$-3z+3=0$$

$$\boxed{z=1}$$

$$\begin{cases} -x+y+z=1 \\ \quad -3z=-3 \end{cases}$$

y no tiene pivote $\Rightarrow$ y es grado de libertad.

$y=\alpha$

$z=1$

$-x+\alpha+\cancel{1}=\cancel{1}$

$x=\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La recta buscada es:

$$\boxed{(x,y,z)=(0,0,1)+\alpha\langle 1,1,0\rangle}$$