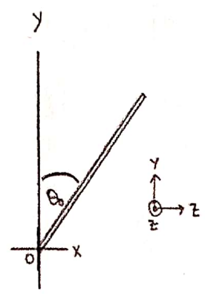
Prueba Módulo IV - Forma A

Mecánica Intermedia

Licenciatura en Física - 2021[1]

Problema I

Se tiene una barra de masa M y longitud L "pegada" a un eje vertical, formando un ángulo θ_0 respecto a dicho eje, tal como se indica en la figura:



Para el sistema coordenado indicado, determine:

1. (35%) La densidad volumétrica de masa para el sistema coordenado (x, y, z). Sugerencia: calcule la densidad para un sistema coordenado (x', y', z') cuyo origen coincida con el del sistema (x, y, z) y tal que la barra coincide con x', posteriormente haga el cambio de variables $(x', y', z') \to (x, y, z)$. Recuerde que $M = \int \underset{\text{All universe}}{\int} \int \rho(\vec{r})\, dV$
2. (35%) El tensor inercia respecto al sistema de referencia indicado en la figura.
3. (30%) Si la barra gira con rapidez angular ω_0 respecto al eje y, detemine la energía mecánica de la barra.

[1]**Hora de inicio:** 17:00 hrs.
Hora de término: 20:30 hrs.
Envíe el documento en formato pdf

— FORMA A —

Problema II

Un sistema consiste en 3 partículas de masas m_1, m_2 y m_3 y coordenadas (x_1, x_2, x_3) tal que:

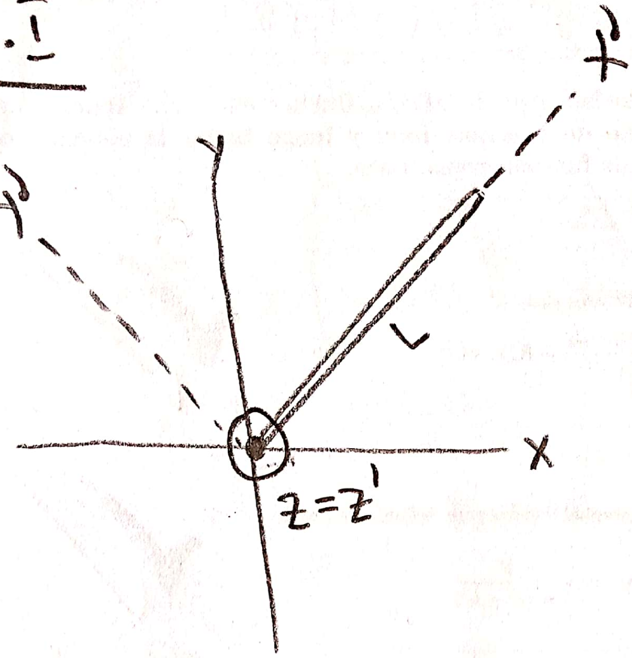
$$\begin{aligned} m_1 &= 4m \text{ situada en } (0, b, b) \\ m_2 &= 3m \text{ situada en } (b, b, b) \\ m_3 &= 2m \text{ situada en } (0, -b, b) \end{aligned}$$

Determine:

1. (20%) La densidad volumétrica de masa.
2. (30%) El tensor inercia.
3. (15%) Los momentos de inercia principales, esto es, las componentes no nulas del tensor de inercia diagonalizado.
4. (35%) Las direcciones de los ejes (ejes principales) del sistema, respecto al cual el tensor inercia resulta ser diagonal.

PROBL. I

1)



$$\rho(\vec{r}\,') = \alpha\, \delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]$$

hallando la cte. α.

$$M = \int \rho(\vec{r}\,')\, dV' = \alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]\,dV'$$

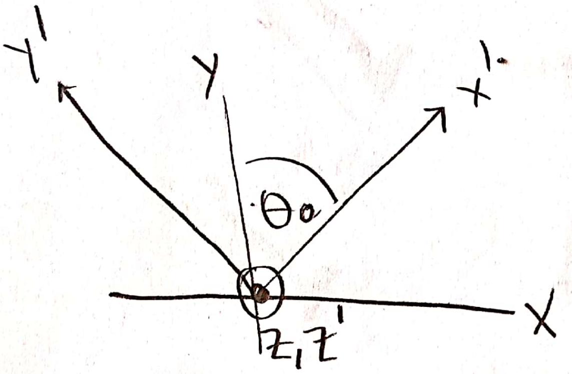
$$= \alpha \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y')\,dy'}^{\,1} \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z')\,dz'}^{\,1} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x') - H(x'-L)]\,dx$$

$$= \alpha \int_0^L dx' = \alpha L \implies \alpha = \frac{M}{L}.$$

Finalmente $\quad \rho(\vec{r}\,') = \dfrac{M}{L}\,\delta(y')\,\delta(z')\,[H(x') - H(x'-L)]$ ///

Ahora bien en el sistema de referencia (X, Y, Z) usando la transformación:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ -\cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



$\therefore$
$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{L}\,\delta(-X\cos\theta_0 + Y\operatorname{sen}\theta_0)\,\delta(Z)$$
$$\times \left[H(X\operatorname{sen}\theta_0 + Y\cos\theta_0) - H(X\operatorname{sen}\theta_0 + Y\cos\theta_0 - L)\right]$$

etc.

— FORMA A —

II)

1) $\rho(\vec{r}) = \left[m_1 \delta(x)\delta(y-b)\delta(z-b) + m_2 \delta(x-b)\delta(y-b)\delta(z-b) + m_3 \delta(x)\delta(y+b)\delta(z-b)\right]$

Obs. $x_1 = x$
$x_2 = y$
$x_3 = z$

2) $I_{ij} = \int \rho(\vec{r}) \left[\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right] dV$; $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = dx\, dy\, dz$

$$I_{11} = \int \rho(\vec{r}) \left[y^2 + z^2\right] dV$$

$$= m_1 (b^2 + b^2) + m_2 (b^2 + b^2) + m_3 (b^2 + b^2)$$

$$= 2b^2 (m_1 + m_2 + m_3) = 18 m b^2 //$$

$$I_{22} = \int \rho(\vec{r}) \left[x^2 + z^2\right] dV$$

$$= m_1 (0 + b^2) + m_2 (b^2 + b^2) + m_3 (0 + b^2)$$

$$= 4mb^2 + 6mb^2 + 2mb^2 = 12 mb^2 //$$

$\overline{\underline{II.2}}$

$$I_{33} = \int \rho(\vec{r})\,[x^2 + y^2]\,dV$$

$$= m_1(b^2) + m_2(b^2+b^2) + m_3(b^2)$$

$$= 4mb^2 + 6mb^2 + 2mb^2 = 12\,mb^2 \;//$$

$$I_{21} = I_{12} = -\int \rho(\vec{r})\,XY\,dV$$

$$= -(m_1 \cdot 0 + m_2\, b.b + m_3 . 0) = -3mb^2 \;//$$

$$I_{31} = I_{13} = -\int \rho(\vec{r})\,XZ\,dV$$

$$= -(m_1 \cdot 0 + m_2 b.b + m_3 \cdot 0) = -3mb^2 \;//$$

$$I_{23} = I_{32} = -\int \rho(\vec{r})\,YZ\,dV$$

$$= -(m_1 b^2 + m_2 b^2 + m_3 (-b) b)$$

$$= -(4mb^2 + 3mb^2 - 2mb^2) = -5mb^2$$

II.3

$$\therefore \quad \hat{I} = mb^2 \begin{pmatrix} 18 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -5 \\ -3 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Valores propios

$$\Downarrow$$

3)

$$\left.\begin{aligned} I'_1 &= 17\, mb^2 \\ I'_2 &= \frac{1}{2}\left(25+\sqrt{193}\right) mb^2 \\ I'_3 &= \frac{1}{2}\left(25-\sqrt{193}\right) mb^2 \end{aligned}\right\} \text{Momentos de inercia principales}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{I}' = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(25+\sqrt{193}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(25-\sqrt{193}\right) \end{pmatrix}$$

4) Los autovectores no normalizados son los siguientes:

$$\Downarrow$$

5) $\Longrightarrow$ VER CÁLCULOS POR SOFTWARE

II.4

$$I = mb^2 \begin{pmatrix} 18 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -5 \\ -3 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

eigenvectors:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 17,$$
$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{193}+\frac{25}{2},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{25}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{193}.$$

Autovectores y respectivos autovalores

Autovectores normalizados

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 17,$$
$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{193}+\frac{25}{2},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{25}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{193}.$$

Autovectores normalizados

Matriz de transformación:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \end{pmatrix}$$

Construcción de $\hat{U}$

Testeo de unitariedad de U:

$$\begin{aligned} UU^T &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{-\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \\ \frac{\frac{1}{6}\sqrt{193}-\frac{11}{6}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalizando el tensor de inercia (Test):

$$
\begin{aligned}
I' &= mb^2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \\ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -5 \\ -3 & -5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{193}{18}-\frac{11}{18}\sqrt{193}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{193}+\frac{25}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{193} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(Se comprueba que $\hat{U}$ diagonaliza a $\hat{I}$)

5).- Hallando sistema coordenado (primado) tal que I' es diagonal:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} &= U^T \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \\ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} & \frac{1}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{k} \\ \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} + \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}}\mathbf{i} \\ \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} + \mathbf{i}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{193}-\frac{11}{2}}{\sqrt{-\frac{11}{18}\sqrt{193}+\frac{193}{18}}} \end{pmatrix} //
\end{aligned}
$$

:

Vectores unitarios del sisteme coordenado que diagonaliza $\hat{I}'$.