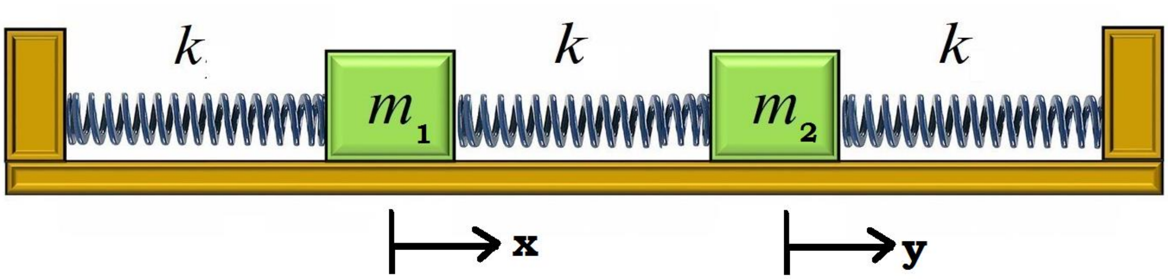
Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 24

Un ejemplo para estudiantes de física

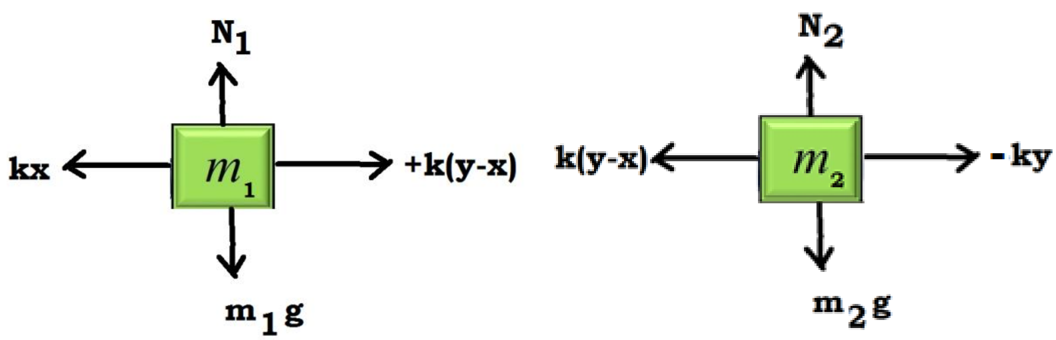
El problema de los dos osciladores



Consideremos dos objetos de masas $\mathbf{m_1}$ y $\mathbf{m_2}$ como muestra la figura vinculados por tres resortes de igual dureza **k**.

x e y miden los desplazamientos de las masas desde sus posiciones de equilibrio.

Queremos hallar las frecuencias de los modos de oscilación normal de las masas. Esto es las frecuencias a las cuales las dos masas oscilan con igual frecuencia.
Planteamos el diagrama de cuerpo libre para cada oscilador.



Las ecuaciones de movimiento serán:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m_1 \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y-x)} \\ \boldsymbol{m_2 \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k(y-x) - ky} \end{cases}$$

Supongamos ahora soluciones sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud para m_1 y m_2.

$$x = A \cdot \cos \omega t$$

$$\dot{x} = -\omega \cdot A \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos \omega t$$

Lo mismo para y.

Reemplazando …

$$\begin{cases} m_1(-\omega^2 x) = -2kx + ky \\ m_2(-\omega^2 y) = kx - 2ky \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 x = \dfrac{-2kx}{m_1} + \dfrac{ky}{m_1} \\ -\omega^2 y = \dfrac{kx}{m_2} - \dfrac{2ky}{m_2} \end{cases}$$

Formemos ahora una ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} \\ \dfrac{k}{m_2} & \dfrac{-2k}{m_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \dfrac{2k}{m_1} & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \dfrac{2k}{m_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

La última ecuación es muy similar a ésta (si consideramos $\lambda = \omega^2$):

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

Finalmente, busquemos los valores propios de la matriz, planteando que:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2k}{m_1} - \omega^2 & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \dfrac{2k}{m_2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Para simplificar, consideremos a las dos masas iguales. Obtenemos los siguientes valores propios:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad y \qquad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Ahora reemplazamos esos valores propios tal como hacíamos antes para obtener los vectores propios:

Si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & \dfrac{-k}{m} \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$$

El vector propio es $\overrightarrow{v_{p1}} = \langle 1,1 \rangle$

Si $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & \dfrac{k}{m} \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$$

El vector propio es $\overrightarrow{v_{p2}} = \langle 1, -1 \rangle$

¿Cómo interpretamos esos vectores?

Observen que en el primer caso $y = x$, las dos masas oscilan con la misma frecuencia en simultáneo a izquierda y derecha. En el segundo caso $y = -x$, por tanto las dos masas se desplazan en simultáneo hacia adentro y hacia afuera.