Calculo Vectorial

Integral de Línea

Curvas Paramétricas (Previos)

Definición

Una curva paramétrica es una función de la forma

$$\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

donde $t \in I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones continuas y derivables, y son llamadas ecuaciones paramétricas de la curva.

Ejemplos

1.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t - 2, t^2)$ definida en el intervalo $[-1,1]$

Observe que sus ecuaciones paramétricas son

$$x = t - 2 \text{ y } y = t^2$$

Veamos la relación entre x e y . De lo anterior tenemos que

$$t = x + 2$$

Y reemplazando en la definición de y obtenemos:

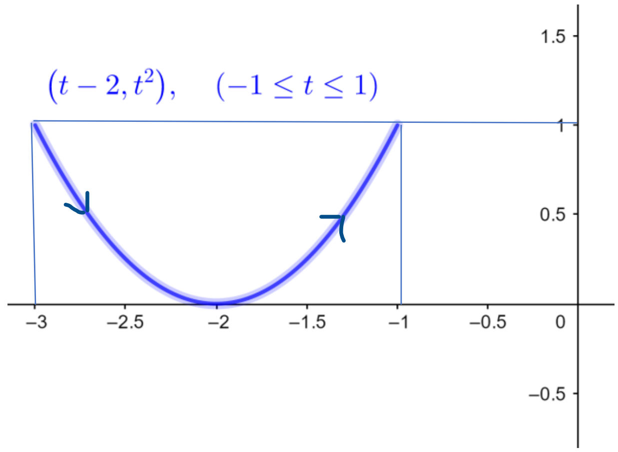
$$y = (x + 2)^2$$

Esto significa que los puntos del plano de la forma $(t - 2, t^2)$ satisfacen la ecuación $y = (x + 2)^2$ y por tanto la gráfica de estos puntos corresponde a una parte de la gráfica de esta ecuación.

Además, para $t \in [-1,1]$ si $t = -1 \Rightarrow x = -3$ e $y = 1$

Asimismo, si $t = 1 \Rightarrow x = -1$ e $y = 1$

Así, la imagen o gráfico (o trayectoria) de esta curva es:



En la curva, t recorre el intervalo $[-1{,}1]$ de izquierda a derecha.

La curva también se dibuja de izquierda a derecha, donde:

$\lambda(-1)$ es el punto inicial y $\lambda(1)$ es el punto final.

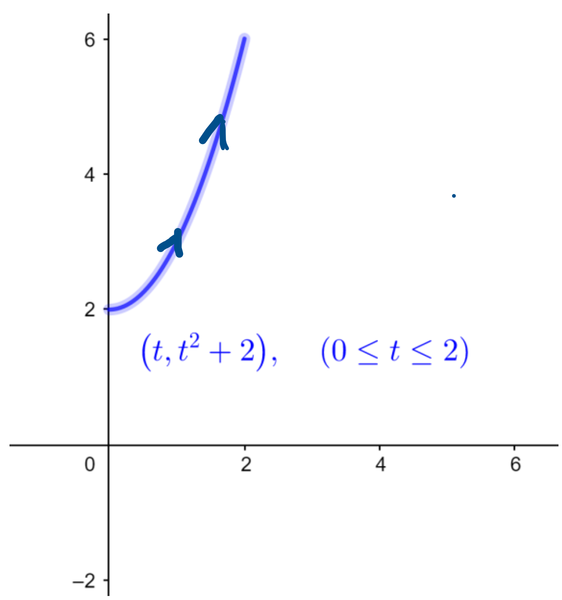
2.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, t^2 + 2)$, $t \in [0{,}2]$

Punto inicial $\lambda(0) = (0{,}2)$

Punto final $\lambda(2) = (2{,}6)$

Relación entre x e y : $y = x^2 + 2$

Gráfico:



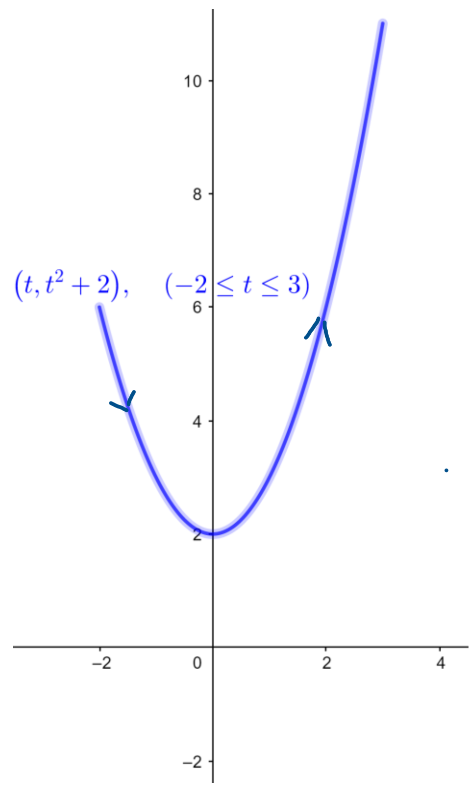
3.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, t^2 + 2)\ , t \in [-2{,}3]$

Punto inicial $\lambda(-2) = (-2{,}6)$

Punto final $\lambda(3) = (3{,}11)$

Relación entre $x\ e\ y : y = x^2 + 2$

Gráfico:



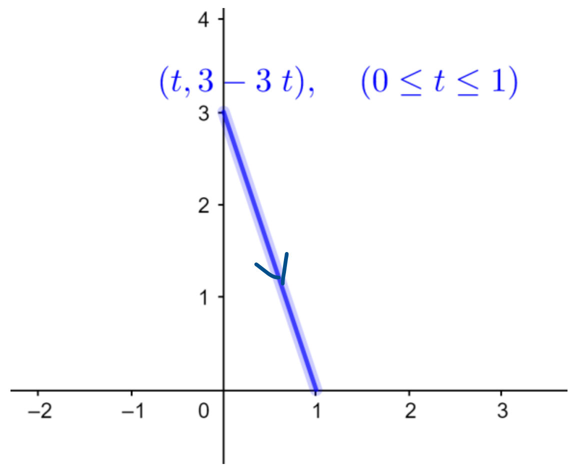
4.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, 3 - 3t)\ , t \in [0{,}1]$

Punto inicial $\lambda(0) = (0{,}3)$

Punto final $\lambda(1) = (1{,}0)$

Relación entre $x\ e\ y : y = 3 - 3x$

Gráfico:



Definición

En general, el gráfico de toda función continua definida sobre un intervalo es una curva paramétrica.

Si $y = f(x)$, la curva correspondiente está dada por:

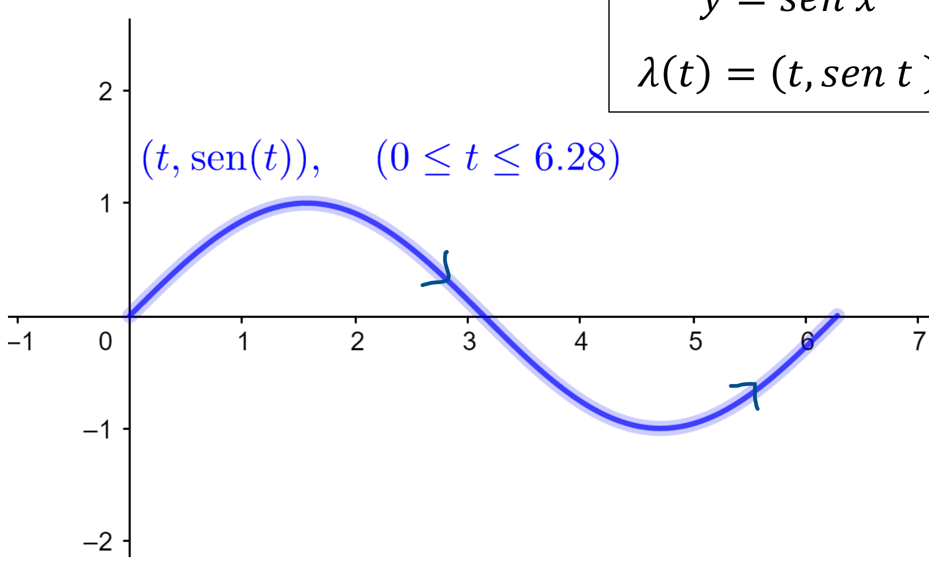
$$\lambda(t) = \big(t, f(t)\big)\,, t \in I$$

Ejemplos

5.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, sen\ t\ )\,, t \in [0,2\pi]$

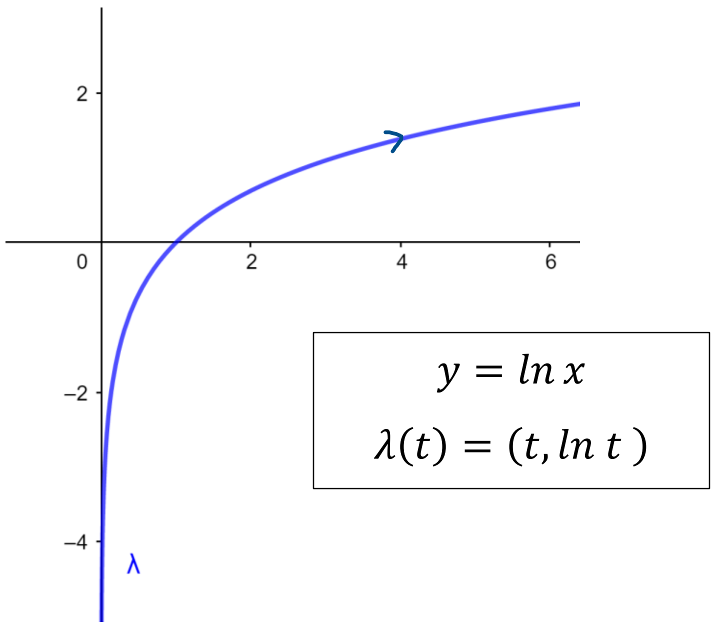
Gráfico:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = sen\ x \\ \lambda(t) = (t, sen\ t\ ) \end{array}}$$



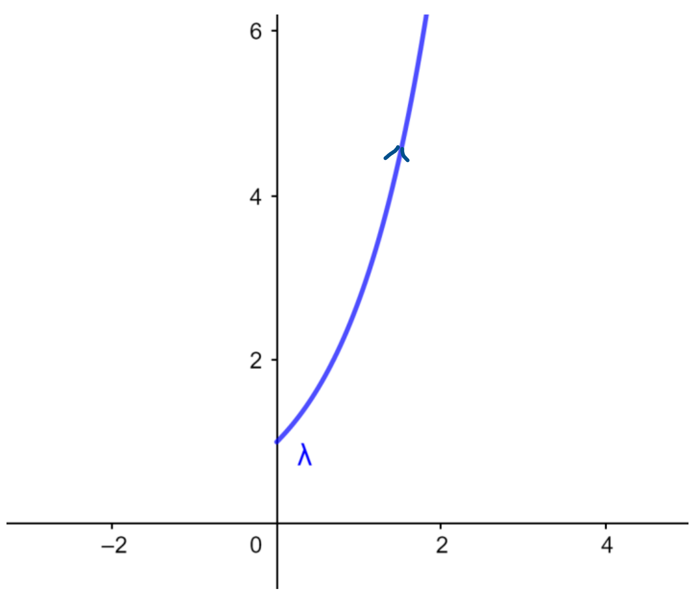
6.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, ln\ t\ ), t \in \,]0, \infty[$

Gráfico:



7.- $\lambda(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, e^{t}\ ), t \in \,]0, \infty[$

Gráfico:



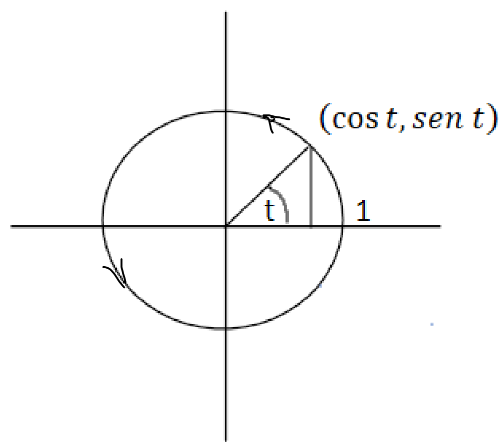
Algunas curvas clásicas vistas como curvas paramétricas

1.- Circunferencia

En el circulo unitario (radio 1 centrado en $(0,0)$) tenemos que la curva

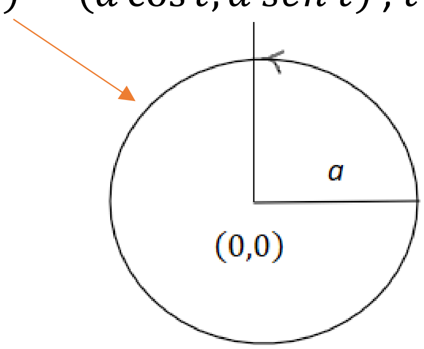
$$\lambda(t) = (\cos t, sen\ t)\ ,\ t \in [0,2\pi]$$

tiene como imagen o trayectoria de la circunferencia unitaria.



En la circunferencia centrado en el origen de radio a correspondiente a la curva siguiente:

$$\lambda(t) = (a\cos t, a\ sen\ t)\ ,\ t \in [0,2\pi]$$



En general la circunferencia de radio a centrado en el punto (h,k) esta representado por:

$$\lambda(t) = (a\cos t + h, a\ sen\ t + k)\ ,t \in [0,2\pi]$$

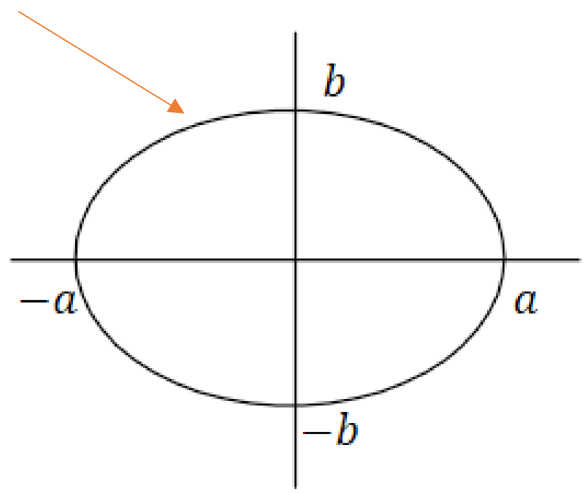
2.- Elipse

La elipse con ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

se puede representar paramétricamente por:

$$\lambda(t)=(a\cos t\,,b\ sen\ t)\,,t\in[0,2\pi]$$



En general la elipse centrado en el punto (h,k) esta representado por:

$$\lambda(t)=(h+a\cos t,k+b\ sen\ t)\,,t\in[0,2\pi]$$

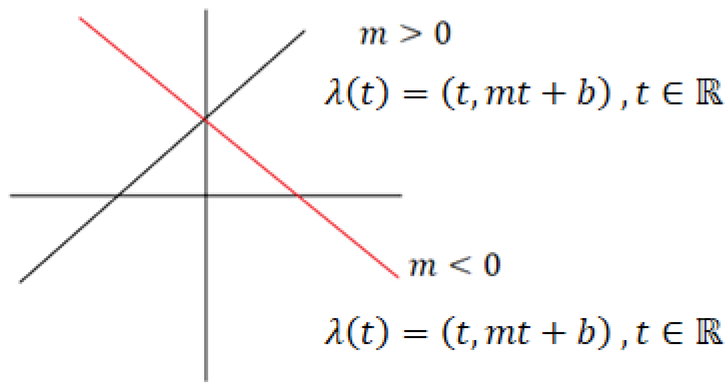
3.- Parametrización de una recta y de un segmento

En una recta no vertical, $y=mx+n$ su parametrización es dado por la trayectoria:

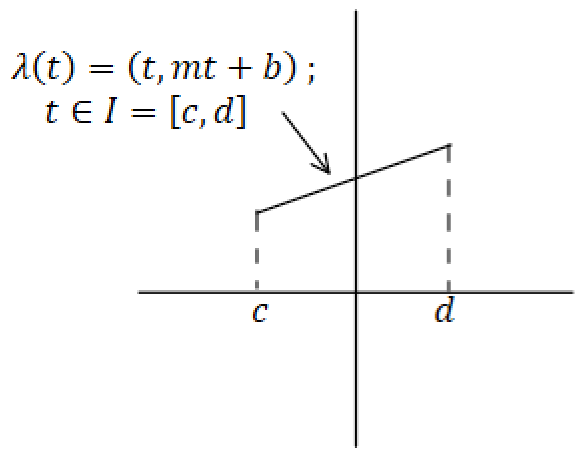
$$\lambda(t)=(t,mt+b)\,,t\in\mathbb{R}$$

Si se quiere parametrizar un segmento de esta recta basta con tomar t en un subintervalo apropiado

Para una recta

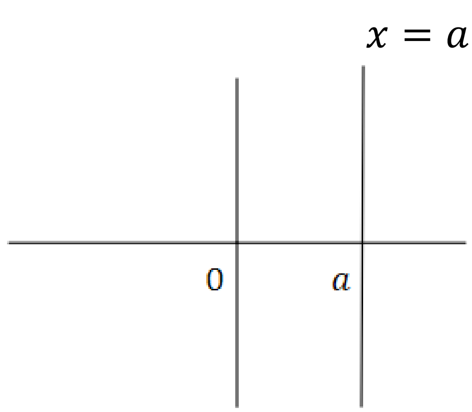


Para un segmento acotamos t en un intervalo $I = [c, d]$



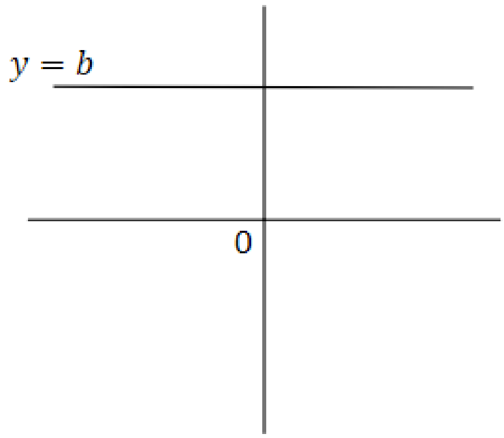
En el caso de que la recta sea vertical, estas tienen como ecuación

$$\lambda(t) = (a, t)\,, t \in \mathbb{R}$$



En el caso de que la recta sea horizontal, estas tienen como ecuación

$$\lambda(t) = (t, b)\ , t \in \mathbb{R}$$



Lo mismo si queremos un segmento horizontal o vertical acotamos t en un intervalo I

Observaciones

1.- Las curvas tienen infinitas parametrizaciones

2.- Otra manera de parametrizar un segmento (y también una recta) es la siguiente:

Sean A y B dos puntos en el plano, la curva

$$\lambda(t) = (1-t)A + tB = A + t(B - A)\ ,\ \ t \in [0,1]$$

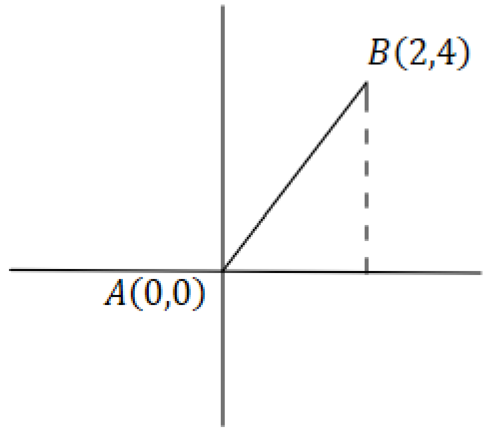
$$\lambda(0) = A$$

$$\lambda(1) = B$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A+B}{2} \text{ punto medio del segmento } \overline{AB}$$

En general podemos decir que el gráfico o trayectoria de $\lambda(t)$ es el segmento entre A y B.

Ejemplo 8



Parametrizar este segmento de dos formas distintas.

Solución

La ecuación para la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$ es:

$$y = 2x$$

Por tanto, la parametrización del segmento es:

$$\lambda(t) = (t, 2t)\ , t \in [0,2]$$

Otra forma es usando el método de parametrización de cualquier segmento.

Con este método para cualquier segmento con $t \in [0,1]$

$$\lambda(t) = (1-t)A + tB\ ,\ \ t \in [0,1]$$

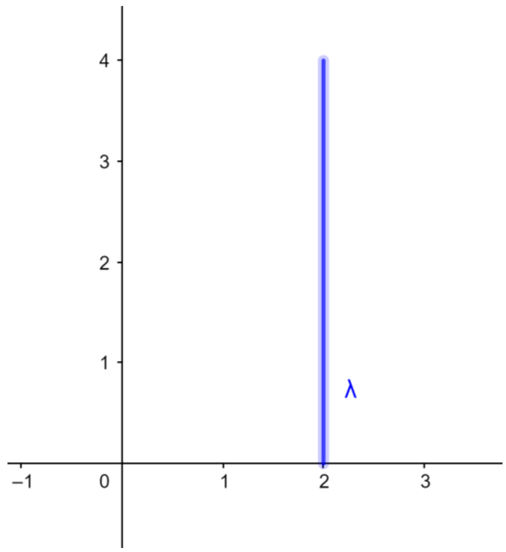
$$\lambda(t) = (1-t)(0,0) + t(2,4)$$

$$\lambda(t) = (0,0) + (2t, 4t)$$

$$\lambda(t) = (2t, 4t)\ , t \in [0,1]$$

Ejemplo 9

Si queremos conocer la parametrización del segmento $(2,0)$ al $(2,4)$.



$$\lambda(t) = (1-t)(2{,}0) + t(2{,}4)$$

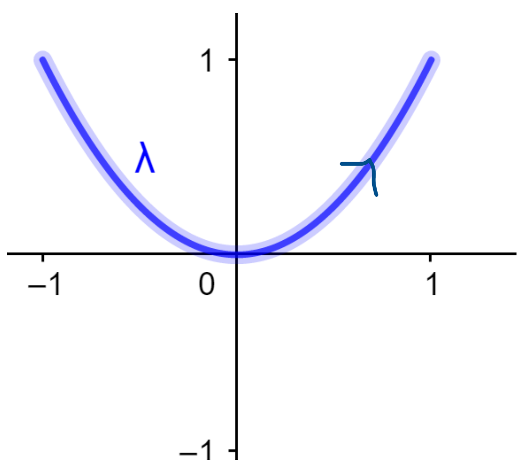
$$\lambda(t) = (2-2t, 0) + (2t, 4t)$$

$$\lambda(t) = (2{,}4t)\,, t \in [0{,}1]$$

Ejemplo 10

Consideremos el trozo de la parábola

$$y = x^2\,, -1 \leq x \leq 1$$



Su parametrización natural es:

$$\lambda(t) = (t, t^2)\,, t \in [-1{,}1]$$

Para λ tenemos que

Punto inicial de λ : $\lambda(-1) = (-1,1)$

Punto final de λ: $\lambda(1) = (1,1)$

Consideremos ahora las siguientes curvas paramétricas.

$$\beta(t) = (1 - t, (1 - t)^2) \; ; t \in [-1,1] \cdots (1)$$

$$\gamma(t) = (t^3, t^6) \; ; \; t \in [-1,1] \cdots (2)$$

De (1),

$$x = 1 - t \text{ e } y = (1 - t)^2$$

Luego, $y = (1 - t)^2 = x^2$.

De (2),

$$x = t^3 \text{ e } y = t^6$$

Luego, $y = t^6 = (t^3)^2 = x^2$.

Observe que tanto β como γ cumplen con la condición de que la segunda componente es el cuadrado de la primera, por lo tanto, el gráfico de ambas curvas está sobre la parábola (esto es , coincide con la parábola $y = x^2$)

Observe que:

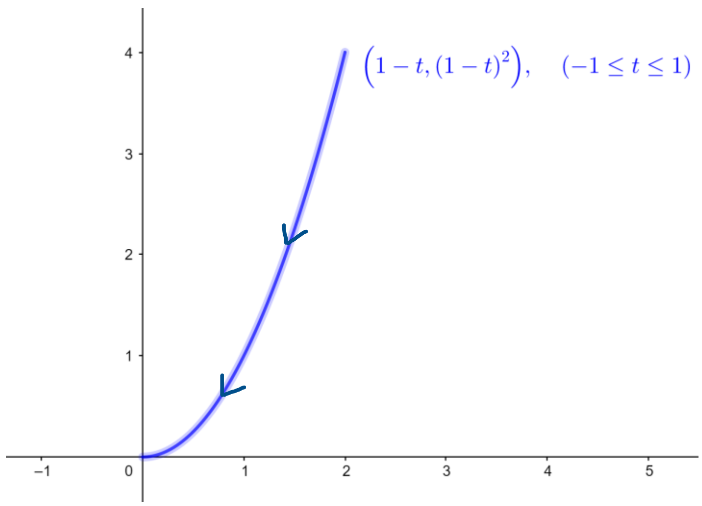
Punto inicial de β: $\beta(-1) = (2,4)$

Punto final de β: $\beta(1) = (0,0)$

Por tanto, si consideramos

$$\beta(t) = (1 - t, (1 - t)^2) \; ; t \in [-1,1]$$

su gráfica será



Luego β es una parte de la curva λ, con trayectoria de izquierda a derecha.

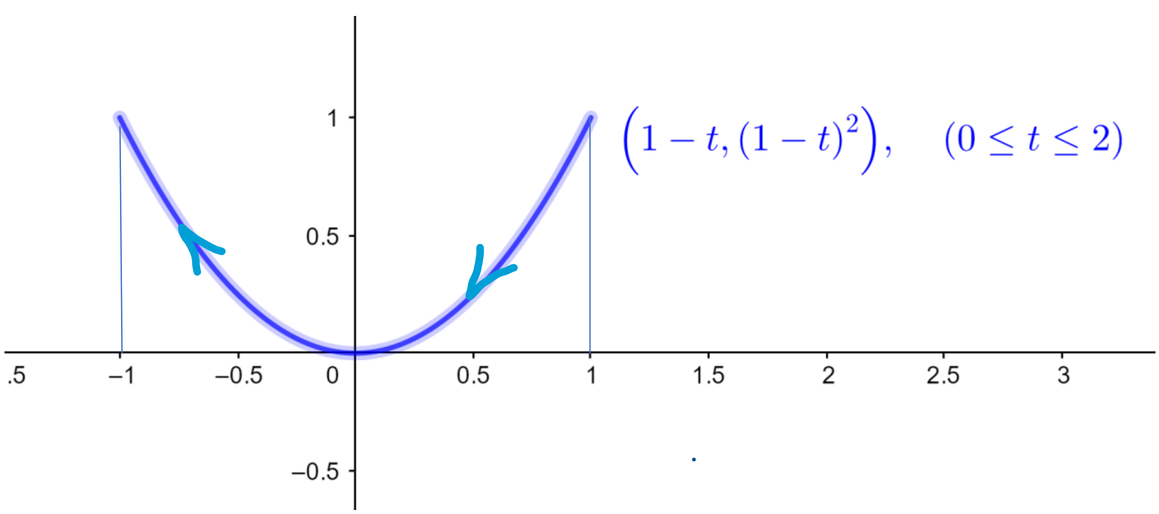
Ahora si consideramos

$$\beta(t) = (1-t, (1-t)^2)\,; t \in [0,2]$$

Punto inicial de β: $\beta(0) = (1,1)$

Punto final de β: $\beta(1) = (-1,1)$

Su gráfica será la misma que λ pero con trayectoria opuesta (de derecha a izquierda) a la de λ.

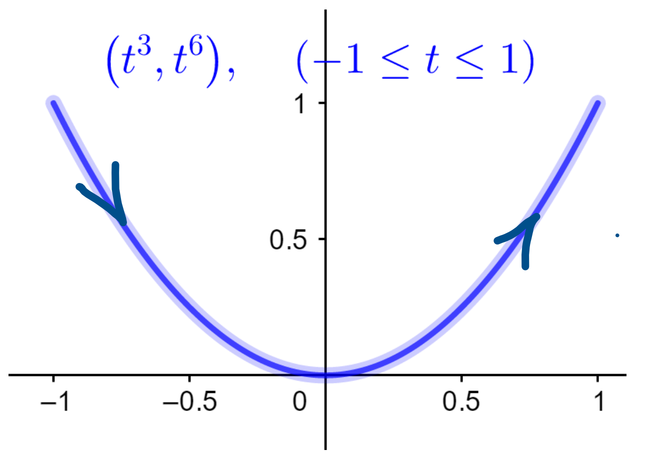


En el caso de γ

Punto inicial de γ: $\gamma(-1) = (-1,1)$

Punto final de γ: $\gamma(1) = (1,1)$

Su gráfica es la misma que la de λ, esta es otra parametrización de λ y con igual trayectoria de izquierda a derecha.



Resumiendo

Métodos básicos de parametrización de curvas en el plano

Una curva en el plano viene expresada habitualmente en una de las formas siguientes:

$$\text{Explicita} \quad y = f(x)$$

$$\text{Implícita} \quad f(x, y) = 0$$

$$\text{Paramétrica, para } t \in I : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

1.- Para parametrizar una curva en forma explícita basta hacer

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

2.- La parametrización de curvas expresadas en forma implícita requiere de métodos particulares según cada tipo . Los más frecuentes son:

Segmentos de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$

$$(x, y) = (1 - t)(a_1, a_2) + t(b_1, b_2)\ ; t \in [0,1]$$

Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r

$$\text{Implícita:}\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\text{Paramétrica:} \begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\, sen\, t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a, b

$$\text{Implícita:}\ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Paramétrica:} \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\, sen\, t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Métodos básicos de parametrización de curvas en el espacio

En el caso frecuente en que la curva venga dada como intersección de dos superficies en forma implícita:

$$c\colon \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Los pasos por seguir para su parametrización pueden resumirse así:

- Se despeja, si es posible una variable de una ecuación y se sustituye en la otra (por ejemplo, $z = f(x, y)$)
- Se parametriza la variable despejada.

En el supuesto que pueda despejar z , la parametrización de c resultaría:

$$c: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

Ejemplo

Sea en $\mathbb{R}^3$

$$c: \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

donde $f(x,y,z) = 3x - y - z - 1$ y $g(x,y,z) = x + y - 2$

c es una recta en $\mathbb{R}^3$, que resulta de la intersección de los planos

$$\pi_1: 3x - y - z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: x + y - 2 = 0$$

En efecto, despejamos y de la ecuación π_2 $\;y = 2 - x$ y lo sustituimos en la ecuación π_1, luego

$$3x - (2 - x) - z = 1$$

$$3x - 2 + x - z = 1$$

$$4x - z = 3$$

De aquí obtenemos que

$$z = 4x - 3$$

Luego, los puntos de c son los (x,y,z) tales que

$$y = 2 - x$$

$$z = 4x - 3$$

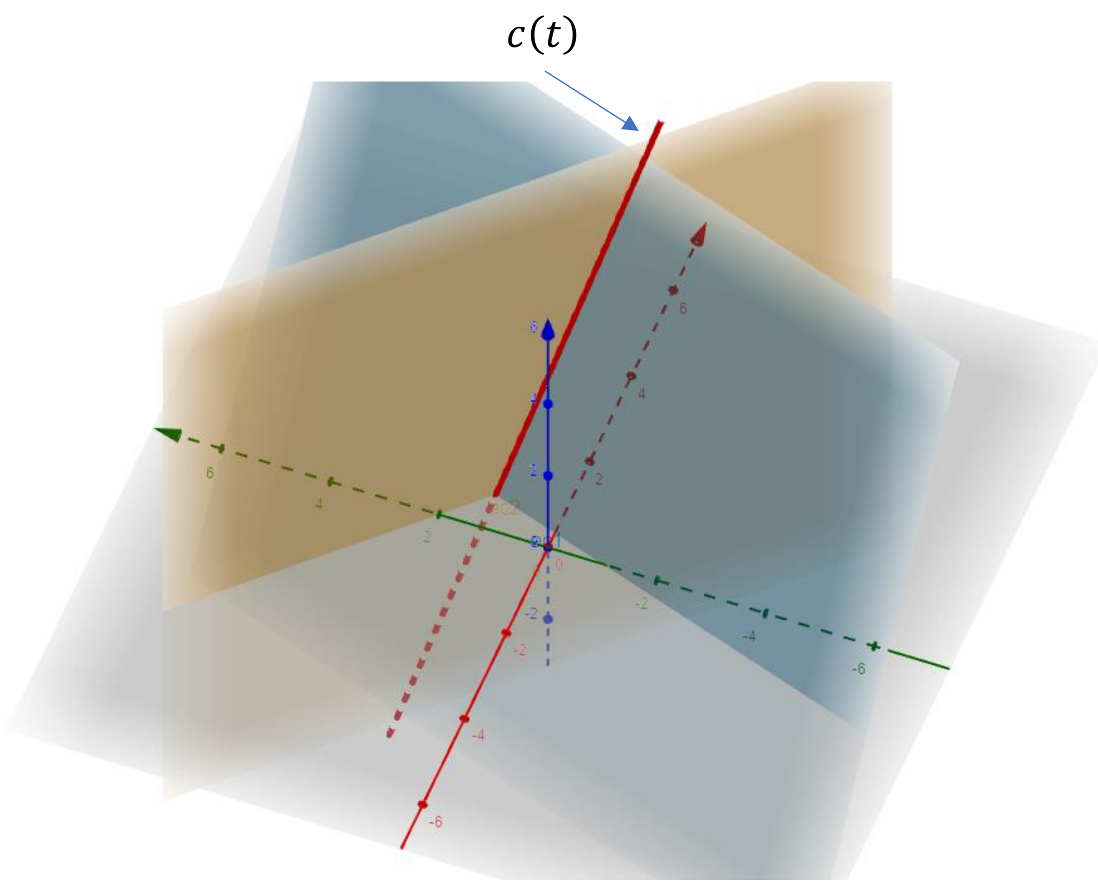
Con lo cual

$$(x,y,z)=(x,2-x,4x-3)$$
$$=(0,2,-3)+(x,-x,4x)$$
$$=(0,2,-3)+x(1,-1,4)$$

Es decir c es la recta dirigida por el vector $(1,-1,4)$ que pasa por el punto $(0,2,-3)$.

Una parametrización de c es entonces

$$\begin{aligned} c\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow c(t)=(t,2-t,4t-3) \end{aligned}$$

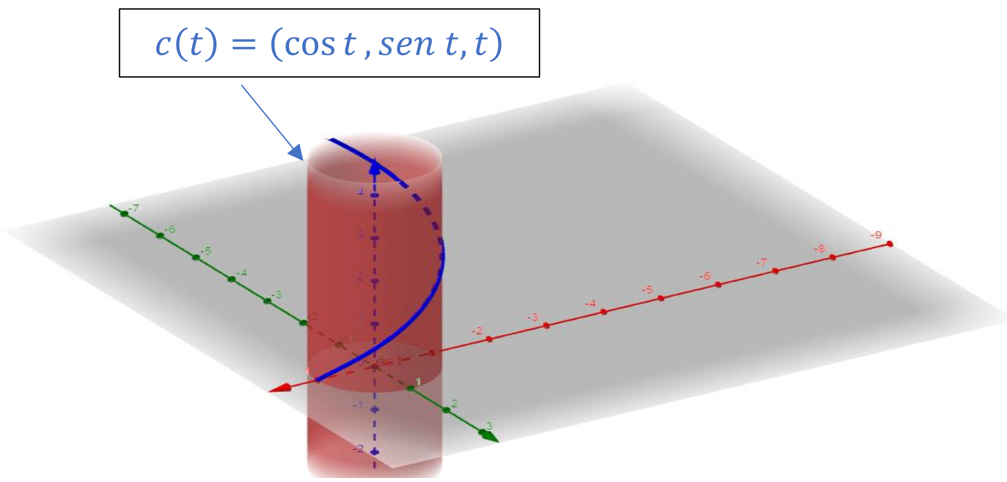


Curva intersección entre dos planos

La hélice circular viene dada por la parametrización

$$c(t) = (\cos t\,, sen\ t, t)\ ; t \in \mathbb{R}$$

La curva crece cuando la componente $z = t$ crece cada vez que el parámetro t recorre un intervalo de amplitud 2π, la curva completa da una vuelta sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, observe que la distancia vertical entre la espiral es 2π. Esta cantidad se llama paso de la hélice.



Ejemplo

Parametrizar la curva intersección entre :

$$x^2 + y^2 = 9 \;\; \text{Cilindro recto}$$

$$x - y + z = 4 \;\; \text{Plano}$$

La 1^{era} ecuación es una curva en dos variables, su parametrización es:

Si $x^2 + y^2 = 9$, tenemos para $\theta \in [0,2\pi]$

$$x = 3\cos\theta$$

$$y = 3\ sen\ \theta$$

$$z = 4 + y - x = 4 + 3\,sen\,\theta - 3\cos\theta$$

Luego

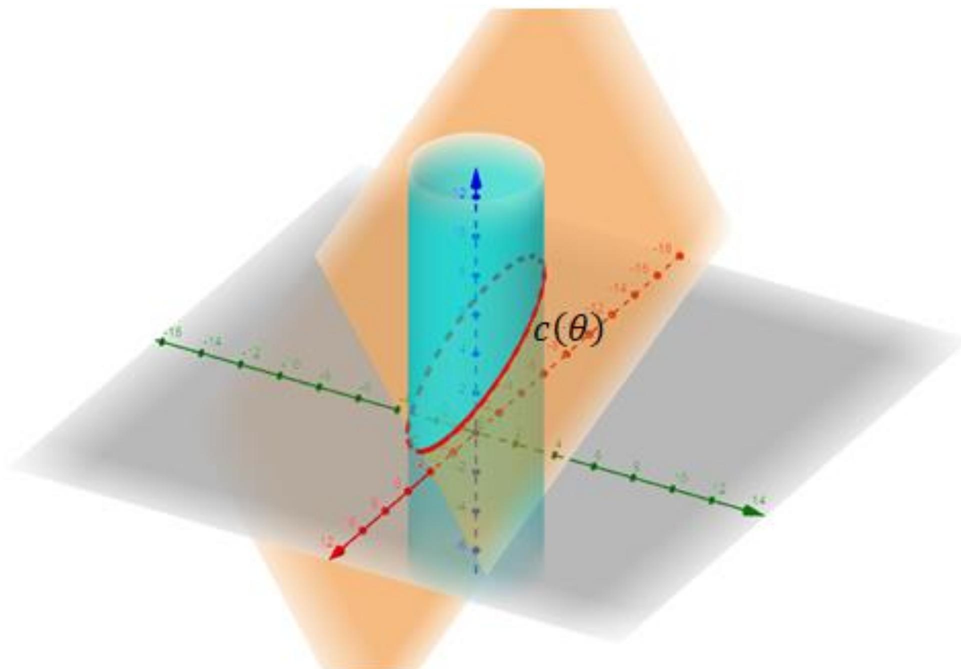
$$x = 3\cos\theta$$

$$y = 3\,sen\,\theta$$

$$z = 4 + 3\,sen\,\theta - 3\cos\theta \;\;,\;\; \theta \in [0,2\pi]$$

Así que la curva intersección es:

$$c(\theta) = (x, y, z) = (3\cos\theta\,, 3\,sen\,\theta, 4 + 3\,sen\,\theta - 3\cos\theta)$$



Ejemplo 11

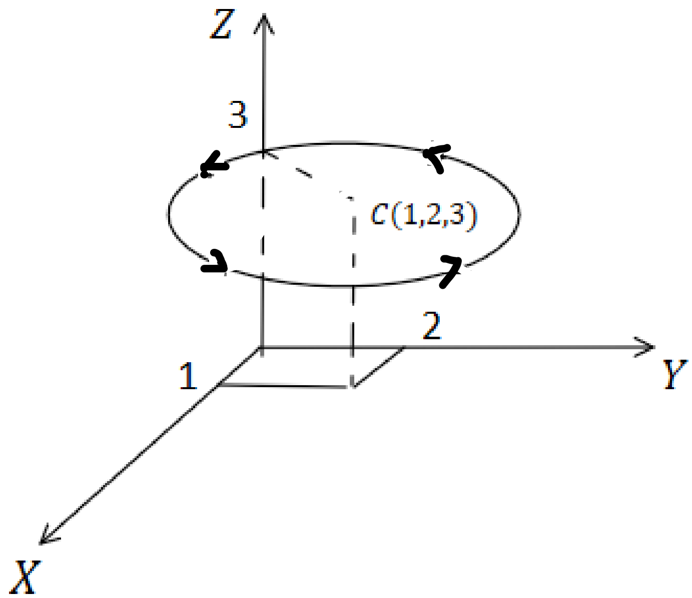
Sea r la circunferencia en el espacio:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16\,, z = 3$$

Una parametrización (ver página 15) es:

$$r(t) = (1 + 4\,cos\,t, 2 + 4sen\,t, 3)\;;t \in [0,2\pi]$$

Gráficamente



Parametrización de Superficies.

Una parametrización de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación

$$\Phi: [a, b] \text{ x } [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

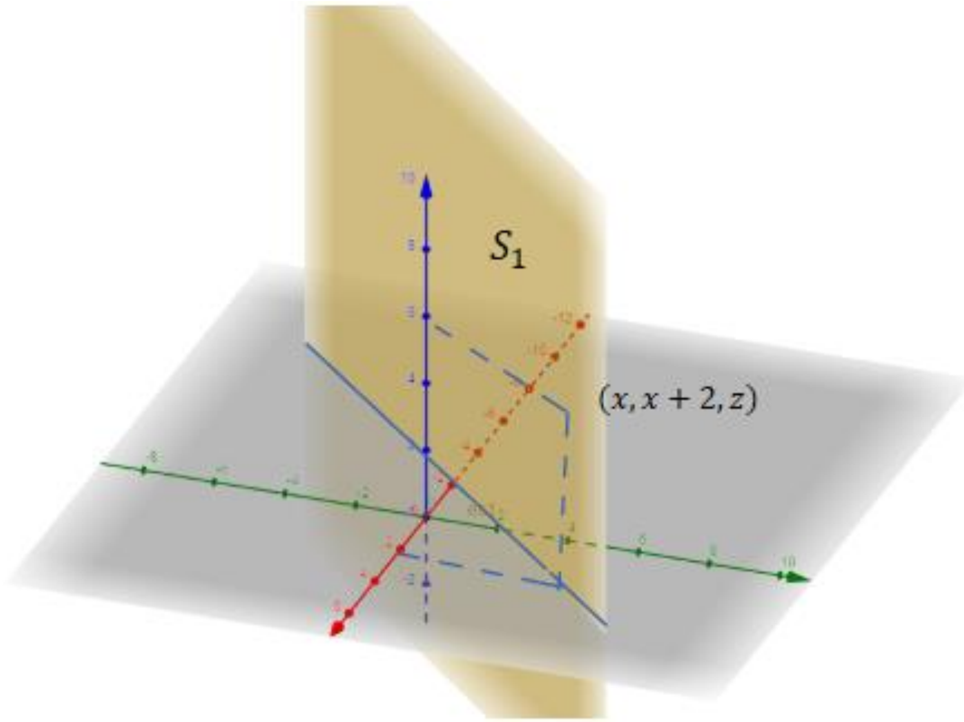
tal que al variar los parámetros $s \in [a, b]$ y $t \in [c, d]$ su imagen $\Phi(s, t)$ va describiendo los puntos de la superficie S.

Presentaremos como ejemplos parametrizaciones de algunas cuádricas.

Ejemplos

1.- En $\mathbb{R}^3$, $S_1 : y - x = 2$ corresponde a un plano vertical. En efecto, los puntos de S_1 se caracterizan por tener vinculadas sus dos primeras coordenadas por la relación $y = x + 2$. Mientras que la última coordenada le corresponde cualquier valor real.

Su gráfica



Luego la aplicación:

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por

$$\Phi(x, z) = (x, x + 2, z)$$

es una parametrización del plano S_1

2.- Para una esfera de radio r,

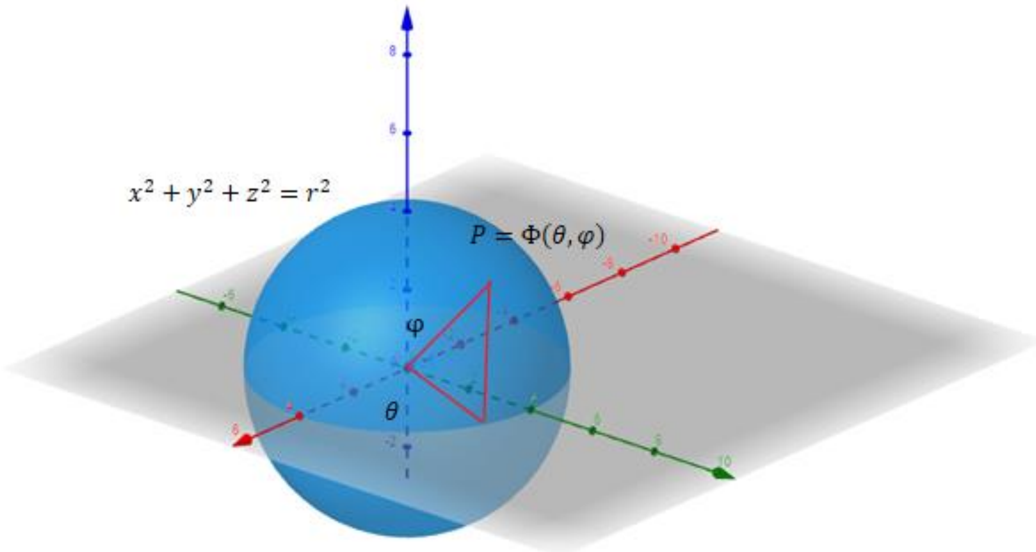
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Recordando la definición de las coordenadas esféricas, un punto

$$(x, y, z) \in S \iff (x, y, z) = (r \cos\theta\ sen\varphi, r\ sen\ \theta\ sen\ \varphi, \cos\varphi)$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$

Esfera de radio r



Luego la aplicación

$$\Phi{:}[0{,}2\pi] \text{ x } [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por}$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \cos\theta \; sen\; \varphi, r \; sen\; \theta \; sen\; \varphi, \cos\varphi)$$

Es una parametrización de la esfera de radio r.

3.- Para parametrizar una elipsoide

$$S{:}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Podemos seguir un procedimiento similar al ejemplo anterior utilizaremos, en efecto, para encontrar una parametrización de la elipsoide a partir de la esfera, escribimos la ecuación de S en la forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

De modo que

$$(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \in esfera\ de\ radio\ 1$$

por lo cual

$$\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = (a \cos\theta\ sen\ \varphi, b\ sen\ \theta\ sen\ \varphi, c \cos\varphi)$$

Podemos afirmar entonces que la función

$$\Phi : [0{,}2\pi] \text{ x } [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\Phi(\theta, \varphi) = (a \cos\theta\ sen\ \varphi, b\ sen\ \theta\ sen\ \varphi, \mathrm{c} \cos\varphi)$$

es una parametrización de la elipsoide de semiejes a, b y c .

4.- S: $x^2 + y^2 = r^2$ $(cilindro\ circular)$

Los puntos de S tienen la particularidad que sus dos primeras coordenadas están vinculadas por la ecuación que define a S mientras que la última puede tomar cualquier valor totalmente independiente de las primeras. Además, según lo visto en una clase pasada el par (x, y) pertenece a la circunferencia centrada en $(0{,}0)$ y de radio r, por lo cual sabemos que existe $t \in [0{,}2\pi]$tal que

$$(x, y) = (r \cos t\ , r\ sen\ t\ )$$

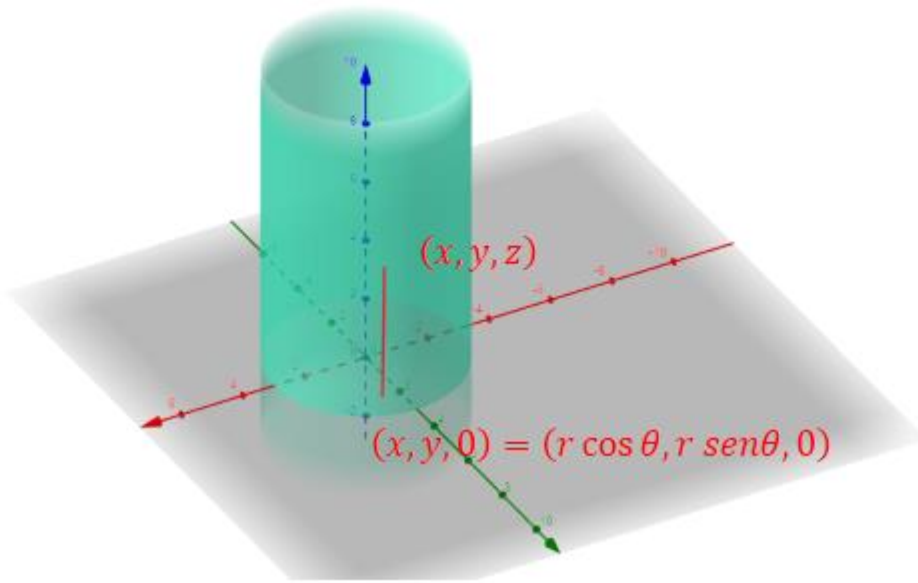
Concluimos entonces que la aplicación

$$\Phi : [0{,}2\pi] \text{ x } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por}$$

$$\Phi(t, z) = (r \cos t\ , r\ sen\ t\ , z)$$

es una parametrización del cilindro circular

$$S : x^2 + y^2 = r^2$$



Curva cerrada y simple

Definición

Consideremos la función vectorial continua**,**

$$r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

con $r(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\big)$. La imagen generada por r se dice que es una curva parametrizada determinada por r y que une los puntos $A = r(a)$ y $B = r(b)$.

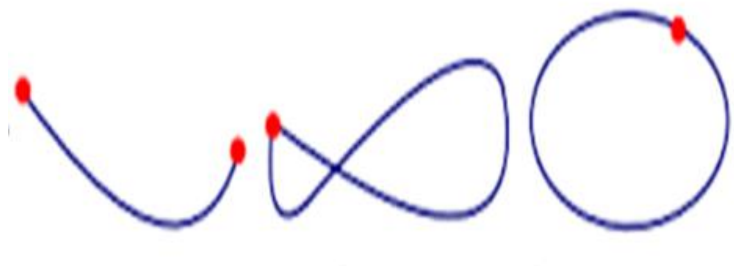
Una curva parametrizada se llama cerrada si el punto inicial coincide con el punto final, esto es $r(a) = r(b)$

Una curva parametrizada se llama simple si no tiene auto intersecciones, es decir

$$r(x_1) \neq r(x_2) \text{ si } x_1 \neq x_2 \text{ y con } x_1, x_2 \in \,]a, b[$$

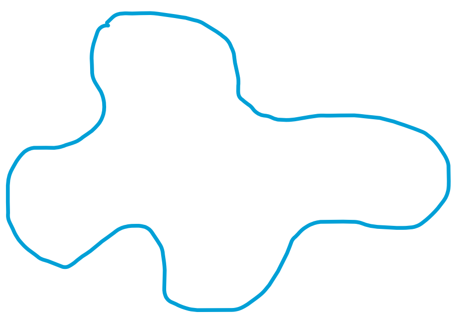
O bien r es inyectiva $(1{:}\,1)$ en el intervalo $]a, b[$.

Ejemplos

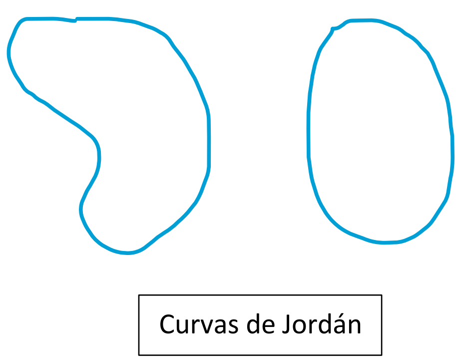


Curva Simple ***curva cerrada*** ***curva cerrada simple***

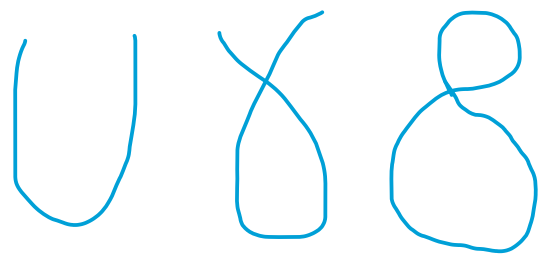
Una curva parametrizada se llama curva de Jordán si se puede deformar (sin romper) hasta convertirla en una circunferencia (es decir, si es cerrado y simple).



Curva de Jordán



Curvas de Jordán



Curvas que no son de Jordán

Ejemplo

Estudiar la curva parametrizada: $\lambda(t) = (sen\ t, sen^2 t)$, $t \in [0, \pi]$

Solución

$$\lambda(0) = (0, 0)$$

$$\lambda(\pi/6) = (1/2, 1/4)$$

$$\lambda(\pi/4) = (0.7, 0.49)$$

$$\lambda(\pi/3) = (0.86, 0.75)$$

$$\lambda(\pi/2) = (1, 1)$$

$$\lambda(2\pi/3) = (0.86, 0.75)$$

$$\lambda(3\pi/4) = (0.7, 0.49)$$

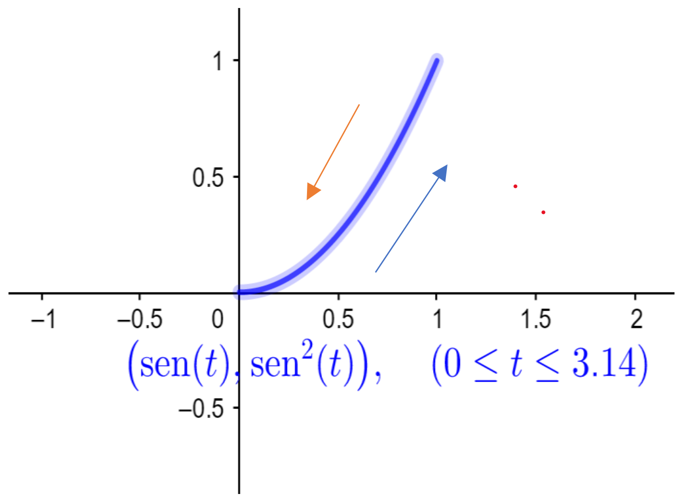
$$\lambda(5\pi/6) = (1/2, 1/4)$$

$$\lambda(\pi) = (0, 0)$$

De los valores obtenidos podemos concluir que

$$\lambda(t) = (sen\ t, sen^2 t)$$

es una curva cerrada, no es simple (y que no es una función inyectiva y por tanto no es un curva de Jordan) . Su gráfico es:



Ejemplo

Estudiar la curva parametrizada:

$$\lambda(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)\,, t \in [-2,2]$$

Solución

$$\lambda(-2) = (0,0)$$

$$\lambda(2) = (0,0)\,;\, (\boldsymbol{tenemos\ curva\ cerrada})$$

$$\lambda(a) = (a^3 - 4a, a^2 - 4)\,;\, con\ a \in]-2,2[$$

$$\lambda(b) = (b^3 - 4b, b^2 - 4);\ con\ b \in]-2,2[$$

Entonces $\lambda(a) = \lambda(b) \Leftrightarrow$

$$a^3 - 4a = b^3 - 4b\ \cdots (1)$$

$$a^2 - 4 = b^2 - 4\ \cdots (2)$$

entonces de (2) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \vee a = -b$

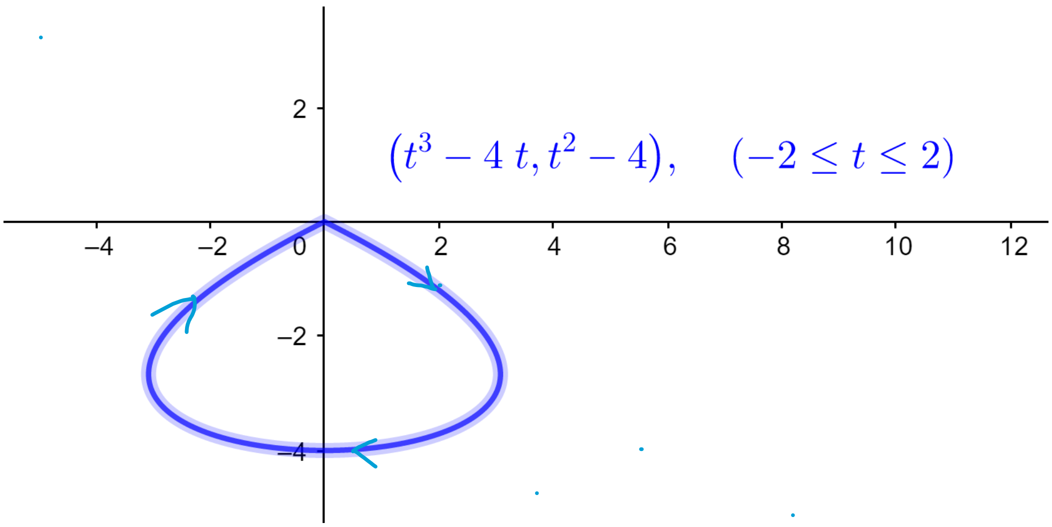
Si $a = -b$ y lo reemplazamos en (1), tenemos

$$-b^3 + 4b = b^3 - 4b$$

$$4b = b^3\ \text{ si } b \neq 0$$

$$4 = b^2 \Rightarrow b = \pm 2$$

Lo que no puede ser, luego se cumple $a = b$. Entonces la curva es inyectiva en $]-2{,}2[$ y, por lo tanto, es simple.



Ejemplo

Estudiar la curva parametrizada:

$$\lambda(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)\,, t \in [-10{,}10]$$

Solución