

# Dinámica Galáctica

Mauro Jélvez

## Fundamentos de Curvas de Rotación e Inclinación

### Conceptos Básicos

- Las **curvas de rotación** describen la velocidad orbital  $V(r)$  de estrellas o gas en función del radio  $r$  desde el centro galáctico. Para un disco en equilibrio:

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

donde  $M(r)$  es la masa encerrada dentro de  $r$ .

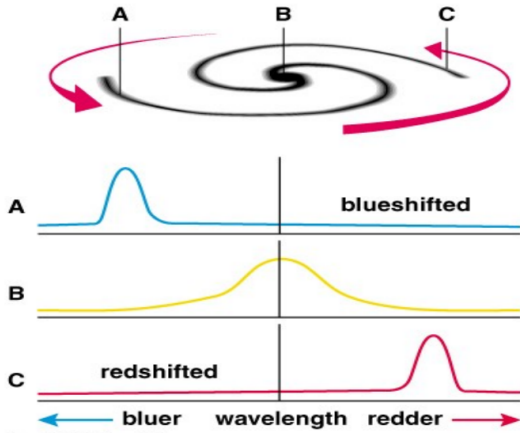


Fig. 1.

- La **inclinación galáctica** ( $i$ ) es el ángulo entre el plano del disco y la línea de visión:
  - Face-on* ( $i = 0^\circ$ ): El disco se observa perpendicularmente (ejemplo: galaxia M51).
  - Edge-on* ( $i = 90^\circ$ ): El disco se ve de canto (ejemplo: galaxia NGC 891).

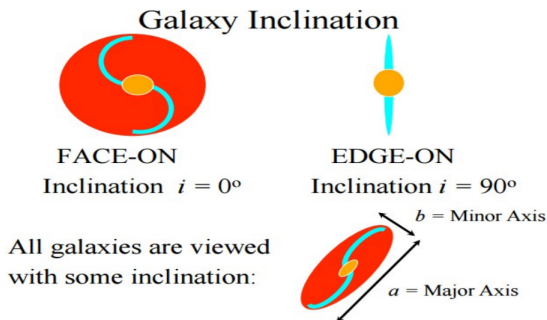


Fig. 2.

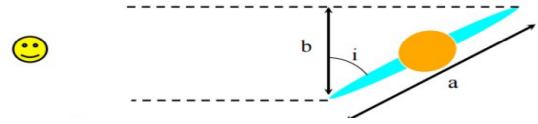


Fig. 3.

### Geometría y Corrección por Inclinación

- Para una galaxia con ejes mayor ( $a$ ) y menor ( $b$ ), la inclinación se calcula como:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

- La velocidad observada ( $V_{\text{obs}}$ ) se relaciona con la velocidad real de rotación ( $V_{\text{rot}}$ ) mediante:

$$V_{\text{obs}} = V_{\text{rot}} \sin i$$

- Ejemplo: Para  $i = 30^\circ$ ,  $V_{\text{obs}} = 0.5V_{\text{rot}}$ . Sin corrección, se subestimaría  $V_{\text{rot}}$  en un 50%.

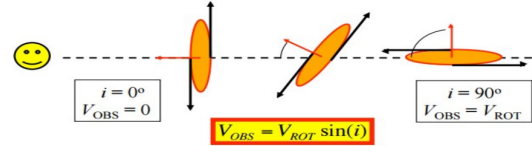


Fig. 4.

### Efecto Doppler

- El corrimiento espectral  $\Delta\lambda$  permite medir  $V_{\text{obs}}$ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V_{\text{obs}}}{c} = \frac{V_{\text{rot}} \sin i}{c}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en reposo (ejemplo: línea HI a 21 cm).

### Observaciones de HI y Evidencia de Materia Oscura

Es posible conocer la velocidad en la línea de visión como función de la distancia al centro de la galaxia

Las curvas de rotación describen la velocidad orbital  $V(r)$  de las estrellas y el gas en función de la distancia radial  $r$  desde el centro de una galaxia. Estas curvas son herramientas fundamentales para estudiar la distribución de masa en las galaxias, incluyendo tanto la materia luminosa como la materia oscura.

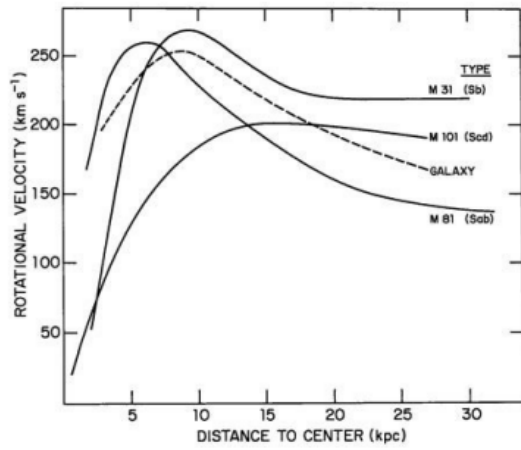


Fig. 5.

### Variaciones según el Tipo de Hubble

La figura 6 muestra curvas de rotación típicas para galaxias espirales de diferentes tipos según la clasificación de Hubble:

- **Galaxias Sa:** Sistemas tempranos con bulbo prominente y disco estrecho
- **Galaxias Sb:** Intermedias entre Sa y Sc
- **Galaxias Sc:** Sistemas tardíos con bulbo pequeño y disco extendido

### Características Comunes

A pesar de las diferencias morfológicas entre estos tipos, las curvas de rotación presentan características similares:

$$V(r) \approx \text{constante} \quad \text{para} \quad r > R_{\text{disco}} \quad (1)$$

Este comportamiento plano en las regiones externas es particularmente notable porque:

- Contradice la expectativa newtoniana para un disco de materia luminosa ( $V(r) \propto r^{-1/2}$ )
- Sugiere la presencia de halos extendidos de **materia oscura**
- Indica que el potencial gravitacional total no sigue la distribución de materia luminosa

### Interpretación Física

La masa total  $M(< r)$  dentro de un radio  $r$  puede determinarse mediante:

$$M(< r) = \frac{V^2(r)r}{G} \quad (2)$$

Para explicar las curvas observadas, necesitamos considerar contribuciones de:

- **Materia bariónica** (estrellas + gas): Dominante en regiones internas ( $r < R_{\text{disco}}$ )
- **Materia oscura:** Domina en regiones externas ( $r > R_{\text{disco}}$ )

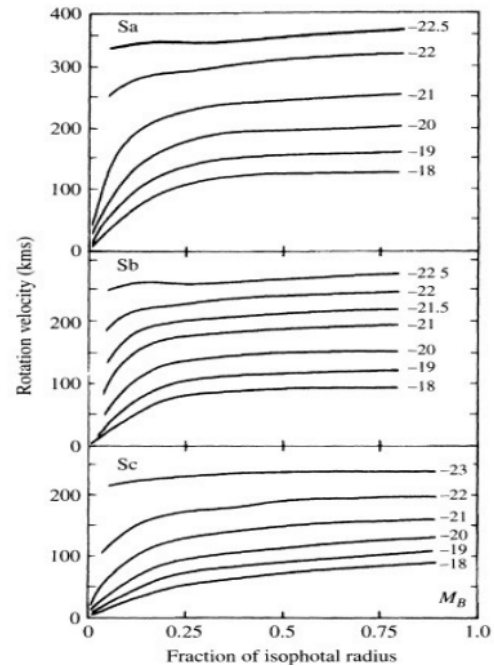


Fig. 6.

### Implicaciones Cosmológicas

La universalidad relativa de estas curvas sugiere que:

- Los halos de materia oscura tienen perfiles de densidad similares independientemente del tipo morfológico
- Existe una conexión fundamental entre la materia bariónica y la oscura (relación Tully-Fisher)
- Los procesos de formación galáctica deben explicar esta co-evolución

### Técnicas Observacionales

- **Espectroscopía HI:**
  - *Baja resolución:* Mide dinámica integrada (perfil de velocidad global).
  - *Alta resolución:* Permite mapear  $V(r)$  con resolución espacial (ejemplo: estudios con VLA).
- **Resultados clave:**
  - Curvas de rotación planas en regiones externas ( $V(r) \approx \text{constante}$  para  $r > R_{\text{disco}}$ ).
  - Esto implica  $M(r) \propto r$  (mientras que la materia luminosa decae exponencialmente).

### Curvas de Rotación en Galaxias de Disco

Las curvas de rotación de galaxias tipo disco proporcionan una de las evidencias más contundentes para la existencia de materia oscura. Este análisis se centra en la discrepancia entre las predicciones basadas en materia visible y las observaciones reales.

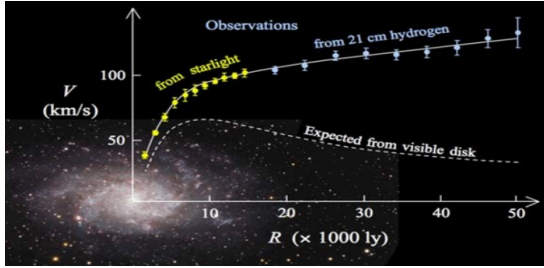
### Distribución de Materia Bariónica vs. Dinámica Observada

El perfil de luminosidad de una galaxia, que traza la distribución de materia bariónica (estrellas + gas), sigue típicamente una ley exponencial:

$$I(r) = I_0 e^{-r/h} \quad (3)$$

donde  $h$  es la longitud de escala del disco. Sin embargo, la curva de rotación observada muestra:

$$V_{\text{obs}}(r) \approx \text{constante} \quad \text{para} \quad r > 2h \quad (4)$$



**Fig. 7.** Comparación entre la curva de rotación esperada por la materia visible (azul) y la observada (rojo). Las unidades en el eje horizontal son kiloaños-luz. La discrepancia en regiones externas ( $R > 15$ ) revela la presencia de materia oscura.

#### Comparación entre lo Observado y lo Esperado

La figura contrasta claramente:

- **Predicción teórica** (línea punteada): Basada solo en materia luminosa, donde  $V(r) \propto r^{-1/2}$  más allá del radio del disco
- **Observaciones** (línea continua): Datos de:
  - Línea de 21 cm del hidrógeno neutro (HI)
  - Dinámica estelar (líneas de absorción)
  - Gas externo

#### Interpretación con Materia Oscura

La masa total requerida para explicar  $V_{\text{obs}}(r)$  sigue:

$$M_{\text{total}}(< r) = \frac{V^2(r)r}{G} \quad (5)$$

La fracción de materia oscura aumenta con el radio:

$$f_{\text{DM}}(r) = 1 - \frac{M_{\text{lum}}(< r)}{M_{\text{total}}(< r)} \quad (6)$$

En galaxias típicas:

- $f_{\text{DM}} \approx 0.3 - 0.5$  en  $r = 2h$
- $f_{\text{DM}} \approx 0.9$  en  $r = 5h$

#### Implicaciones para los Modelos de Halos

Los datos apoyan perfiles de densidad de materia oscura como:

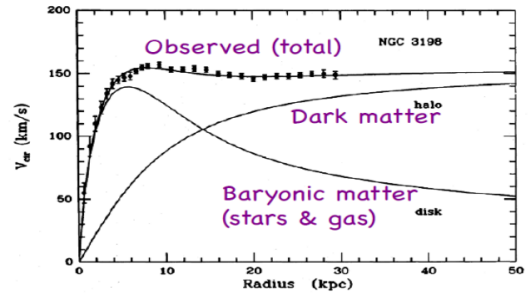
- **NFW** (Navarro-Frenk-White):

$$\rho_{\text{DM}}(r) \propto \frac{1}{r(r + r_s)^2} \quad (7)$$

- **Isotérmico:**

$$\rho_{\text{DM}}(r) \propto \frac{1}{r^2 + r_c^2} \quad (8)$$

donde  $r_s$  y  $r_c$  son radios característicos. Estas distribuciones reproducen el comportamiento plano de  $V(r)$  en grandes radios.



**Fig. 8.** Descomposición de la curva de rotación de NGC 3198. Las contribuciones se muestran por separado: materia estelar (azul), gas (verde), materia oscura (rojo) y total observada (negro). El perfil NFW reproduce el comportamiento en las regiones externas ( $r > 15 \text{ kpc}$ ).

#### Descomposición de Curvas de Rotación en NGC 3198

La galaxia espiral NGC 3198 representa un caso paradigmático para el estudio de la distribución de masa en galaxias de disco. Su curva de rotación puede descomponerse en contribuciones diferenciadas:

- **Total observada:** Medida mediante espectroscopía de HI (21 cm) y líneas estelares
- **Materia bariónica:** Estrellas (disco + bulbo) y gas interestelar
- **Materia oscura:** Inferida a través de la discrepancia dinámica

#### Modelado Matemático de los Componentes

##### Materia Bariónica

Para el disco estelar y gaseoso, adoptamos un perfil exponencial:

$$\rho_{\text{bar}}(r) = \rho_0 e^{-r/h} \quad (9)$$

donde  $h \approx 2.5 \text{ kpc}$  es la longitud de escala típica para NGC 3198.

##### Materia Oscura

El perfil NFW (Navarro-Frenk-White) describe la distribución de materia oscura:

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2} \quad (10)$$

con parámetros característicos:

- $\rho_0$ : Densidad central
- $R_s \approx 10 \text{ kpc}$ : Radio de escala

#### Masa Total Integrada

La masa contenida dentro de un radio  $R_{\text{max}}$  se calcula como:

$$M(< R_{\text{max}}) = \int_0^{R_{\text{max}}} 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (11)$$

Para el perfil NFW, esto resulta en:

$$M_{DM}(< r) = 4\pi\rho_0 R_s^3 \left[ \ln\left(1 + \frac{r}{R_s}\right) - \frac{r}{R_s + r} \right] \quad (12)$$

### Implicaciones Físicas

#### Concentración Relativa de Componentes

- **Materia bariónica:**
  - Altamente concentrada ( $\sim 90\%$  dentro de  $3h$ )
  - Dominante en  $r < 8$  kpc
- **Materia oscura:**
  - Distribución extendida ( $\sim 50\%$  más allá de 20 kpc)
  - Dominante en  $r > 12$  kpc

#### Relación con Parámetros Cosmológicos

Los parámetros del halo NFW correlacionan con:

$$c = \frac{R_{200}}{R_s} \quad (\text{concentración}) \quad (13)$$

donde  $R_{200}$  es el radio donde la densidad media es 200 veces la crítica. Para NGC 3198:

$$c \approx 10 \quad (\text{típico de galaxias con } V_{\max} \approx 150 \text{ km s}^{-1}) \quad (14)$$

#### Materia Oscura

- La discrepancia entre masa observada (estrellas + gas) y masa dinámica ( $M_{\text{dyn}} = V^2 r / G$ ) sugiere halos de materia oscura (DM).
- Perfil de densidad de DM (modelo NFW):

$$\rho_{DM}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

donde  $R_s$  es el radio de escala.

### Fundamentos de la Relación Tully-Fisher

La relación de Tully-Fisher (TF) establece una correlación empírica entre:

- **Luminosidad intrínseca** ( $L$  o  $M_{\text{abs}}$ )
- **Velocidad máxima de rotación** ( $V_{\max}$ )

Para galaxias espirales, se expresa como:

$$L \propto V_{\max}^\alpha \quad (15)$$

donde el índice  $\alpha$  depende de la banda fotométrica utilizada.

#### Formulación Matemática

En términos de magnitudes absolutas ( $M$ ):

$$M_B = -a \log_{10} V_{\max} + b \quad (16)$$

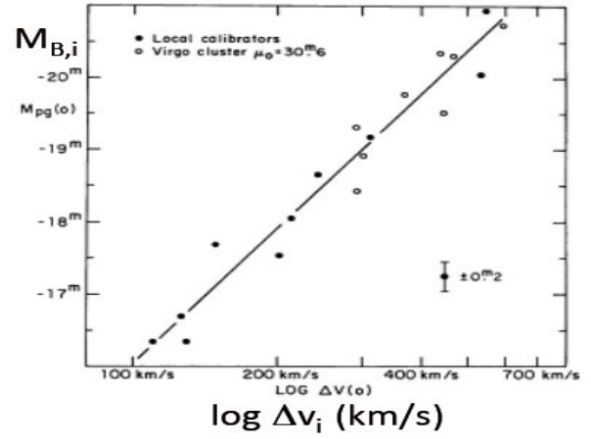
con coeficientes típicos:

- Banda  $B$  ( $\lambda \approx 445$  nm):

$$M_B = -9.95 \log_{10} V_{\max} + 3.15 \quad (\text{para tipo Sa}) \quad (17)$$

- Banda  $I$  ( $\lambda \approx 806$  nm):

$$M_I = -10.2 \log_{10} V_{\max} + 2.71 \quad (\text{para tipo Sb}) \quad (18)$$



**Fig. 9.** Diagrama Tully-Fisher en banda  $B$  e  $I$ . Los puntos azules representan galaxias del cúmulo de Virgo ( $\mu_0 = 30.0 \pm 0.7$  mag), usadas como calibradores. La relación lineal en escala logarítmica confirma  $L \propto V_{\max}^4$  teórico.

### Implicaciones Físicas

#### Derivación Teórica

Asumiendo:

1. Equilibrio dinámico:  $M_{\text{tot}} = \frac{V_{\max}^2 R}{G}$
2. Razón masa-luz constante:  $\Upsilon \equiv M/L$
3. Brillo superficial constante:  $I_e = \frac{L}{\pi R^2}$

Se obtiene:

$$L = \frac{\Upsilon}{G} \left( \frac{I_e}{\pi} \right)^{-1/2} V_{\max}^4 \propto V_{\max}^4 \quad (19)$$

#### Uso como Indicador de Distancia

La relación TF permite estimar distancias con:

$$\mu_0 = m_{\text{ap}} - M_{\text{TF}} + 5 \log_{10} d - 25 + A_\lambda \quad (20)$$

donde:

- $A_\lambda$ : Extinción galáctica
- Precisión típica:  $\sim 15\%$  en banda  $I$

### Tabla de Calibración

**Table 1.** Parámetros de Tully-Fisher para diferentes tipos

Tipo	Pendiente ( $a$ )	Ordenada ( $b$ )	Dispersión ( $\sigma$ )
Sa (Banda $B$ )	-9.95	3.15	0.6 mag
Sb (Banda $I$ )	-10.2	2.71	0.3 mag
Sc (Banda $I$ )	-11.0	3.31	0.4 mag

#### Correcciones Clave

- **Inclinación:**  $V_{\max} = V_{\text{obs}} / \sin i$
- **Extinción:** Correcciones en  $A_B \approx 0.2$  mag para Virgo
- **Selección de muestra:** Evitar galaxias con interacciones fuertes

## Aplicación Cosmológica

La calibración con el cúmulo de Virgo ( $\mu_0 = 30.0 \pm 0.7$ ) permite estimar:

$$H_0 = \frac{v_{\text{recesión}}}{d_{\text{TF}}} \approx 75 \pm 5 \text{ km/s/Mpc} \quad (21)$$

## Exactitud de la Relación Tully-Fisher en Diferentes Bandas

La relación Tully-Fisher (TF) muestra variaciones en su precisión según la banda fotométrica utilizada:

### Dispersión en la banda B

- Dispersión típica:  $1\sigma \sim 0.6$  magnitudes
- Error correspondiente en distancia:  $\sim 30\%$
- Limitaciones:
  - Mayor sensibilidad a formación estelar reciente
  - Efectos de extinción más pronunciados

### Dispersión en la banda I

- Dispersión reducida:  $1\sigma \sim 0.3$  magnitudes
- Error en distancia:  $\sim 15\%$
- Ventajas:
  - Menos afectada por poblaciones estelares jóvenes
  - Más estable frente a variaciones en formación estelar
  - Menor impacto de la extinción interestelar

## Aplicaciones Prácticas

### Distancias Relativas en Grupos Galácticos

La precisión del 15% en banda I permite:

- Mapear la estructura tridimensional de grupos locales
- Estimar masas dinámicas de sistemas ligados
- Estudiar flujos peculiares a escalas de  $\sim 10$  Mpc

### Calibración con el Cúmulo de Virgo

El cúmulo de Virgo ( $\mu_0 = 30.0$ ) sirve como calibrador fundamental:

- Muestra de referencia con  $\sim 200$  galaxias espirales
- Distancia bien determinada por múltiples métodos
- Permite reducir errores sistemáticos

## Limitaciones y Consideraciones

- **Selección de muestras:**
  - Excluir galaxias con interacciones fuertes
  - Evitar sistemas con inclinación  $i < 30^\circ$  o  $i > 80^\circ$
- **Correcciones necesarias:**
  - Extinción galáctica ( $A_B \approx 0.2$  mag)
  - Efectos de proyección
  - Contaminación de luz de fondo
- **Rango óptimo:**
  - Velocidades entre 100 km/s y 700 km/s
  - Magnitudes absolutas entre  $-17$  y  $-22$  en banda I

## Relaciones Tully-Fisher para Diferentes Tipos de Galaxias

La relación Tully-Fisher muestra variaciones sistemáticas según el tipo morfológico de las galaxias espirales (Sa, Sb, Sc), reflejando diferencias en sus propiedades físicas.

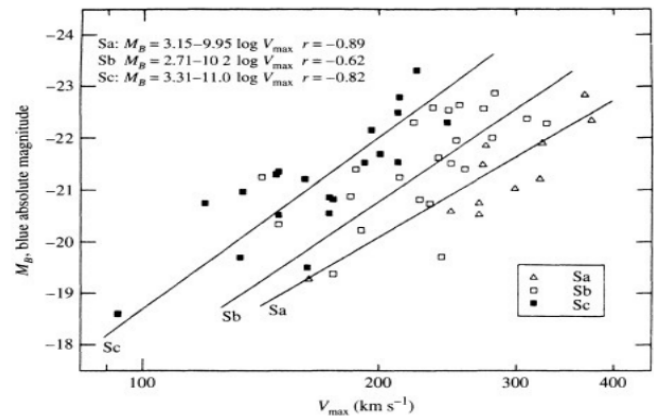


Fig. 10.

### Ecuaciones por Tipo de Galaxia

- **Galaxias Sa** (tempranas):

$$M_B = 3.15 - 9.95 \log V_{\text{max}} \\ r = -0.89 \quad (\text{coeficiente de correlación})$$

- **Galaxias Sb** (intermedias):

$$M_B = 2.71 - 10.2 \log V_{\text{max}} \\ r = -0.62$$

- **Galaxias Sc** (tardías):

$$M_B = 3.31 - 11.0 \log V_{\text{max}} \\ r = -0.82$$

## Interpretación Física

### Diferencias en Pendientes

Las variaciones en las pendientes reflejan:

- **Relación masa-luz ( $M/L$ ):** Aumenta progresivamente desde Sc (baja) hasta Sa (alta)
- **Contenido de gas:** Mayor en Sc (15-20% masa) que en Sa ( $<5\%$ )
- **Formación estelar:** Más activa en galaxias tardías

### Correlaciones Observadas

Los coeficientes de correlación ( $r$ ) muestran:

- Mayor correlación para Sa ( $|r| = 0.89$ ) y Sc ( $|r| = 0.82$ )
- Menor correlación para Sb ( $|r| = 0.62$ ), posiblemente por:
  - Mayor dispersión en propiedades
  - Mezcla heterogénea de poblaciones

## Implicaciones para Estudios de Distancias

- **Precisión variable:** Las  $S_c$  muestran mayor dispersión en  $V_{\max}$  a igual luminosidad
- **Calibración necesaria:** Usar relaciones específicas por tipo morfológico
- **Evolución secular:** Las diferencias sugieren distintos caminos evolutivos

**Table 2.** Comparación de parámetros TF por tipo

Tipo	Pendiente	Ordenada	Correlación ( $ r $ )
Sa	-9.95	3.15	0.89
Sb	-10.2	2.71	0.62
Sc	-11.0	3.31	0.82

## Fundamentos Dinámicos de la Relación Tully-Fisher

La relación  $L \propto v_{\max}^4$  puede derivarse desde primeros principios dinámicos bajo ciertas suposiciones físicas razonables.

### Paso 1: Masa Dinámica

Para un objeto en órbita circular en un disco galáctico, la masa contenida dentro del radio  $R$  viene dada por:

$$M(R) = \frac{v_{\max}^2 R}{G} \quad (22)$$

donde:

- $v_{\max}$  = velocidad máxima de rotación (km/s)
- $R$  = radio galáctico (kpc)
- $G$  = constante gravitacional

### Paso 2: Razón Masa-Luz Constante

Introducimos el concepto de "mass-to-light ratio" ( $\Upsilon$ ):

$$\Upsilon \equiv \frac{M}{L} = \frac{1}{C_{ML}} \quad (\text{constante para todas las galaxias}) \quad (23)$$

Por tanto, la luminosidad se expresa como:

$$L = \frac{M}{\Upsilon} = C_{ML} \frac{v_{\max}^2 R}{G} \quad (24)$$

### Paso 3: Brillo Superficial Constante

Definimos el brillo superficial promedio  $\Sigma$  como:

$$\Sigma \equiv \frac{L}{R^2} = C_{SB} \quad (\text{constante}) \quad (25)$$

Despejando el radio:

$$R^2 = \frac{L}{C_{SB}} \quad (26)$$

### Paso 4: Combinación de Relaciones

Sustituyendo  $R$  de la ecuación (5) en (3):

$$L = C_{ML} \frac{v_{\max}^2 \sqrt{L/C_{SB}}}{G} \quad (27)$$

Resolviendo para  $L$ :

$$L^{1/2} = C_{ML} \frac{v_{\max}^2}{G \sqrt{C_{SB}}} \quad (28)$$

$$L = \frac{C_{ML}^2 v_{\max}^4}{G^2 C_{SB}} \quad (29)$$

### Resultado Final

Obtenemos la relación fundamental:

$$L = \text{Constante} \times v_{\max}^4 \quad (30)$$

donde la constante agrupa todos los factores:

$$\text{Constante} = \frac{C_{ML}^2}{G^2 C_{SB}} \quad (31)$$

### Implicaciones Físicas

- La dependencia  $v^4$  es robusta bajo las suposiciones planteadas
- Las variaciones observadas entre tipos galácticos se deben principalmente a:
  - Diferencias en  $C_{ML}$  (relación masa-luz)
  - Variaciones en  $C_{SB}$  (brillo superficial)
- La constancia de  $\Upsilon$  y  $\Sigma$  es aproximada pero útil

### Diferencia Fundamental entre $V_{\text{circ}}$ y $V_{\text{rot}}$

La velocidad circular teórica ( $V_{\text{circ}}$ ) y la velocidad rotacional observada ( $V_{\text{rot}}$ ) difieren debido a los movimientos no circulares en las galaxias. La relación fundamental es:

$$V_{\text{circ}}(R) = V_{\text{rot}}(R) + V_{\text{cor}}(R) \quad (32)$$

donde:

- $V_{\text{circ}}(R)$  = Velocidad circular de equilibrio dinámico
- $V_{\text{rot}}(R)$  = Componente rotacional observada
- $V_{\text{cor}}(R)$  = Corrección por movimientos no circulares

### Origen de la Corrección $V_{\text{cor}}$

La corrección surge debido a:

#### 1. Dispersión de Velocidades

Las órbitas no son perfectamente circulares, presentando:

- Excentricidad orbital
- Movimientos radiales y verticales
- Dispersión de velocidades ( $\sigma_R$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_z$ )

## 2. Deriva Asimétrica

Fenómeno donde:

- Estrellas más viejas muestran mayor dispersión
- Órbitas se vuelven más excéntricas con el tiempo
- Resulta en  $V_{\text{rot}} < V_{\text{circ}}$  para componentes estelares

## Magnitud de la Corrección por Tipo de Componente

**Table 3.** Correcciones típicas de velocidad

Componente Galáctico	$V_{\text{cor}}$ relativo a $V_{\text{rot}}$
Gas HI (regiones externas)	< 5%
Disco estelar ( $R = 2-3$ h)	10-20%
Bulbo	30-50%
Galaxias elípticas	50-70%

## Implicaciones para la Relación Tully-Fisher

- Para gas:  $V_{\text{rot}} \approx V_{\text{circ}}$  (ideal para TF)
- Para discos: Requiere correcciones del 10-15%
- Para sistemas sin gas: TF menos precisa

## Ejemplo Numérico

Para una galaxia espiral típica a  $R = 10$  kpc:

$V_{\text{circ}} = 220$  km/s

$V_{\text{rot}} = 200$  km/s (observado)

$V_{\text{cor}} = 20$  km/s (10% de corrección)

## Advertencias Importantes

- Notación no estandarizada en la literatura
- Algunos autores usan  $V_{\text{rot}}$  para denotar  $V_{\text{circ}}$
- Es crucial verificar definiciones en cada estudio

## Relación entre radio y luminosidad en galaxias espirales

Existe una relación empírica bien establecida entre el tamaño aparente de una galaxia espiral y su luminosidad, medida a través de la magnitud absoluta en banda B ( $M_B$ ). Esta relación se observa de manera consistente para galaxias de tipo Sa a Sc, independientemente de su morfología precisa, y sugiere que galaxias más luminosas tienden a tener discos más extensos.

$$\log_{10} R_{25} = -0.249 M_B - 4.00 \quad (33)$$

donde:

- $R_{25}$  es el radio en kiloparsecs correspondiente al nivel de brillo superficial de 25 B-mag/arcsec<sup>2</sup>. Este valor delimita aproximadamente el borde óptico del disco galáctico.
- $M_B$  es la magnitud absoluta en la banda B, un proxy de la luminosidad total de la galaxia.

La pendiente negativa indica que al disminuir  $M_B$  (es decir, al aumentar la luminosidad), el radio  $R_{25}$  aumenta. Esto es coherente con la idea de que las galaxias espirales más brillantes también tienden a tener discos más extensos, ya sea por una mayor masa estelar o por un contenido de gas más distribuido.

Esta relación puede utilizarse en distintos contextos astrofísicos:

- Para estimar tamaños físicos de galaxias cuando sólo se dispone de fotometría.
- Como insumo en cálculos de masa dinámica en combinación con velocidades de rotación.
- Para establecer escalas características al comparar poblaciones galácticas a diferentes redshifts.

Cabe destacar que esta correlación forma parte del conjunto de relaciones de escala fundamentales de las galaxias espirales, como la ley de Tully-Fisher y la relación masa-luminosidad, reflejando la conexión entre el contenido de masa (visible y oscura), la dinámica interna y las propiedades luminosas.

## Relación Faber-Jackson y el Plano Fundamental

### Base Teórica

### Dispersión de Velocidades en Sistemas Autogravitantes

Para un sistema colisionless en equilibrio dinámico, el tensor de velocidades  $\sigma_{ij}^2$  se relaciona con el potencial gravitacional  $\Phi$  mediante el *Teorema del Virial* generalizado:

$$\sigma^2 \equiv \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = -\frac{1}{3} \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi d^3 x, \quad (34)$$

donde  $\rho(\mathbf{x})$  es la densidad estelar. Para una elipsoide de masa  $M$  y radio efectivo  $R_e$ :

$$\sigma^2 \sim \frac{GM}{R_e} \Rightarrow \sigma \propto M^{1/2} R_e^{-1/2}. \quad (35)$$

### Dispersión de velocidades en galaxias elípticas

En las galaxias elípticas, las estrellas no siguen trayectorias ordenadas como en las galaxias espirales, sino que se mueven en múltiples direcciones. Esta característica se cuantifica mediante la **dispersión de velocidades** ( $\sigma$ ), que representa la desviación estándar de las velocidades estelares respecto a la media.

- Una **baja dispersión de velocidades** implica que la mayoría de las estrellas tienen velocidades similares, lo cual se refleja en un perfil de distribución de velocidades con un pico angosto.
- Una **alta dispersión de velocidades** indica una mayor variedad en las velocidades de las estrellas, y por lo tanto, una distribución más ancha.

Matemáticamente, si  $v_i$  es la velocidad de la  $i$ -ésima estrella y  $\bar{v}$  es la velocidad media del sistema, entonces:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}$$

donde  $N$  es el número total de estrellas consideradas.

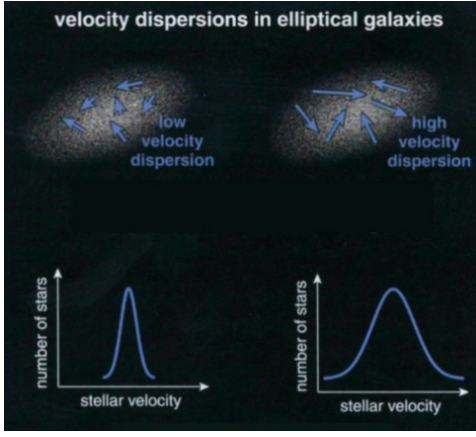


Fig. 11.

## Relación Faber-Jackson (FJ)

Empíricamente, la correlación entre luminosidad  $L$  y dispersión de velocidades  $\sigma$  en galaxias elípticas sigue:

$$L \propto \sigma^\gamma \quad (\text{con } \gamma \in [3.5, 4.5]). \quad (36)$$

Asumiendo una razón masa-luz  $\Upsilon \equiv M/L$  constante, se deriva:

$$M \propto \sigma^\gamma \Rightarrow \sigma \propto M^{1/\gamma}. \quad (37)$$

Combinando con (2) y eliminando  $M$ :

$$R_e \propto \sigma^{2-4/\gamma} \approx \sigma^{0.9} \quad (\text{para } \gamma = 4). \quad (38)$$

## Plano Fundamental (FP)

### Formulación Matemática

El FP es una relación hiperplana en el espacio  $\{\log R_e, \log \sigma, \log \langle I \rangle_e\}$ :

$$\log R_e = \alpha \log \sigma + \beta \log \langle I \rangle_e + C, \quad (39)$$

donde  $\langle I \rangle_e = L/(2\pi R_e^2)$ . Valores observados:

$$\alpha \approx 1.24 \pm 0.07, \quad (40)$$

$$\beta \approx -0.82 \pm 0.02. \quad (41)$$

### Origen Dinámico

Partiendo de la ecuación de equilibrio hidrostático para el componente estelar:

$$\frac{d(\rho_\star \sigma_r^2)}{dr} + \frac{\rho_\star}{r} (2\sigma_r^2 - \sigma_\phi^2 - \sigma_\theta^2) = -\rho_\star \frac{d\Phi}{dr}, \quad (42)$$

y asumiendo:

- Isotermalidad ( $\sigma_r \approx \sigma_\phi \approx \sigma_\theta$ ),
- Perfil de densidad  $\rho_\star \propto r^{-2}$  en regiones externas,

se obtiene la relación escalar  $M \propto R_e \sigma^2$ . Combinando con  $L = 2\pi R_e^2 \langle I \rangle_e$  y  $\Upsilon \equiv M/L$ :

$$R_e \propto \sigma^{1.4} \langle I \rangle_e^{-0.7} \Upsilon^{-0.7}, \quad (43)$$

explicando los exponentes observados si  $\Upsilon \propto M^{0.2}$ .

## Implicaciones Físicas

### Tensión con Virial Simple

El FP no coincide con la predicción virial ( $R_e \propto \sigma^2 \langle I \rangle_e^{-1}$ ), lo que implica:

- $\Upsilon$  no es constante:  $\Upsilon \propto M^{0.2 \pm 0.1}$  (*tilt* del FP).
- Correlación entre  $\Upsilon$  y estructura galáctica.

### Materia Oscura y Evolución

El FP restringe los perfiles de materia oscura (DM). Para un halo NFW:

$$\rho_{\text{DM}}(r) \propto \frac{1}{r(r + r_s)^2}, \quad (44)$$

la contribución a  $\sigma(r)$  predice una desviación sistemática del FP a alto  $z$ , útil para tests cosmológicos.

### Aplicaciones Observacionales

#### Distancias Geométricas

El FP permite estimar distancias independientes del redshift:

$$d = \frac{\sigma_{\text{obs}}}{\sigma_{\text{FP}}(R_e, \langle I \rangle_e)}, \quad (45)$$

con precisión  $\sim 15\%$  en muestras locales.

### Evolución Secular

La desviación del FP a  $z > 1$  (*FP tilt evolution*) cuantifica cambios en  $\Upsilon$  y la fracción de DM dentro de  $R_e$ .

**Table 4.** Parámetros del FP en diferentes muestras

Muestra	$\alpha$	$\beta$	$\sigma_{\text{int}}$
Coma (SDSS)	1.24	-0.82	0.05
Field (ATLAS <sup>3D</sup> )	1.27	-0.80	0.07
$z \sim 1$ (LEGA-C)	1.30	-0.78	0.09

La **Relación de Faber-Jackson** constituye un vínculo empírico fundamental en la astrofísica extragaláctica, estableciendo una correlación entre la luminosidad total de una galaxia elíptica y la dispersión de velocidades estelares de su componente esférico.

### Contexto físico

#### Dispersión de velocidades

En galaxias elípticas, la dispersión de velocidades  $\sigma$  es el análogo al perfil rotacional en galaxias espirales. Esta representa el movimiento aleatorio de las estrellas en el potencial gravitatorio de la galaxia.

#### Luminosidad

La luminosidad bolométrica total  $L$  está relacionada con la masa total de la galaxia suponiendo una razón masa-luminosidad aproximadamente constante.



## La relación de Faber-Jackson

Empíricamente, se observa que:

$$L \propto \sigma^4$$

lo que implica una ley de potencias entre la luminosidad y la dispersión de velocidades. Esto fue reportado por Faber & Jackson en 1976 tras analizar un conjunto de galaxias elípticas.

### Forma logarítmica

Si expresamos la relación en forma logarítmica:

$$\log L = k \log \sigma + C$$

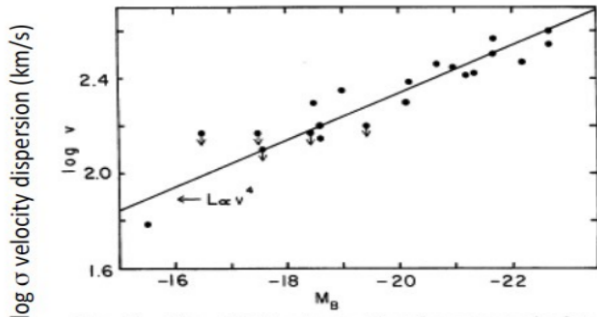
donde  $k \approx 4$  y  $C$  es una constante de calibración que depende del sistema de unidades y del filtro fotométrico utilizado.

### Analogía con la relación Tully-Fisher

De forma análoga a la relación Tully-Fisher para galaxias espirales ( $L \propto V_{\text{rot}}^4$ ), la relación de Faber-Jackson sugiere que la cinemática interna puede utilizarse como trazador de la masa y por lo tanto de la luminosidad de la galaxia.

### Implicancias astrofísicas

- Permite estimar distancias extragalácticas sin necesidad de conocer redshift cosmológico.
- Contribuye a la comprensión del *Plano Fundamental*, una relación tridimensional entre radio efectivo, dispersión de velocidades y brillo superficial.
- Apoya la idea de que las galaxias elípticas siguen una secuencia estructural y dinámica bien definida.



**Fig. 12.** Representación gráfica de la relación entre la magnitud absoluta  $M_B$  y la dispersión de velocidades  $\sigma$ , mostrando la pendiente de la relación  $L \propto \sigma^4$ . Tomado de Faber & Jackson (1976).

## El Plano Fundamental

Aunque la relación de Faber-Jackson permite estimar distancias a galaxias elípticas, presenta una dispersión significativa en comparación con su análogo en galaxias espirales, la relación de Tully-Fisher. En particular:

- La dispersión típica en la relación Faber-Jackson es de aproximadamente un 35%, mientras que en la Tully-Fisher es cercana al 15%.
- Esta dispersión puede reducirse incorporando un tercer parámetro: el **radio efectivo**  $r_e$ , dando origen al *Plano Fundamental*.

## Forma empírica del Plano Fundamental

El Plano Fundamental representa una relación tridimensional entre tres parámetros estructurales de las galaxias elípticas:

$$L \propto \sigma_0^{2.65} r_e^{0.65}$$

donde:

- $\sigma_0$ : dispersión central de velocidades estelares.
- $r_e$ : radio efectivo que contiene la mitad de la luz de la galaxia.

Alternativamente, se puede expresar el plano en función del brillo superficial efectivo  $I_e$  en el radio  $r_e$ :

$$r_e \propto \sigma_0^{1.24} I_e^{-0.82}$$

Estas relaciones indican que las galaxias elípticas no ocupan un espacio aleatorio en los parámetros observables, sino que están confinadas a una superficie bien definida, reflejo de su equilibrio dinámico y evolución común.

### Aplicaciones astrofísicas

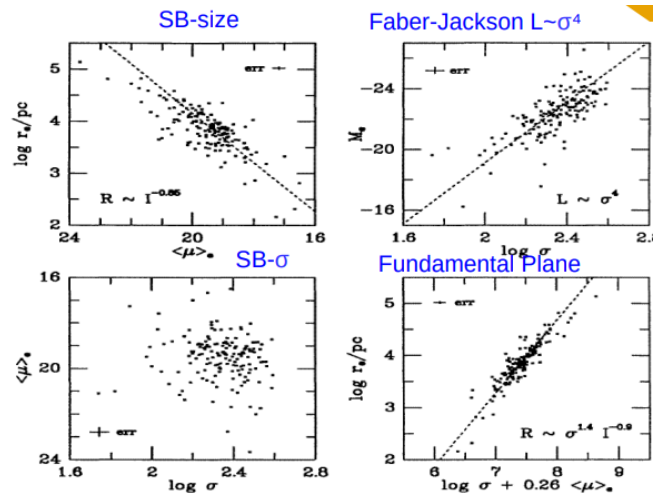
- Mejora en la estimación de distancias extragalácticas.
- Pruebas de teorías de formación y evolución galáctica.
- Indicador de desviaciones sistemáticas asociadas a poblaciones estelares o morfología.

## Proyecciones del Plano Fundamental

El Plano Fundamental de las galaxias elípticas puede visualizarse como un plano tridimensional embebido en el espacio definido por:

- El **radio efectivo**  $r_e$ ,
- El **brillo superficial medio** dentro de  $r_e$ , denotado por  $\langle \mu \rangle$ ,
- La **dispersión de velocidad central**  $\sigma_0$ .

En la figura de Kormendy & Djorgovski (1989) se presentan las distintas proyecciones bidimensionales de este espacio tridimensional:



**Fig. 13.** Proyecciones del plano de parámetros fundamentales en galaxias elípticas. Tomado de Kormendy & Djorgovski (1989).

## Análisis de las proyecciones

- **Arriba izquierda (SB-size):** Se muestra la relación entre  $\log r_e$  y  $\langle \mu \rangle$ . Existe una correlación negativa, indicativa de que galaxias más extendidas tienden a tener un brillo superficial menor, coherente con la dilución de la luz.
- **Arriba derecha (Relación de Faber-Jackson):** Se representa  $M_B$  (magnitud absoluta) frente a  $\log \sigma$ . La relación  $L \propto \sigma^4$  se manifiesta aquí en forma de correlación lineal, validando la ley empírica clásica.
- **Abajo izquierda (SB- $\sigma$ ):** Representa  $\langle \mu \rangle$  vs  $\log \sigma$ . Aunque la correlación es más débil, permite explorar la conexión entre la cinemática y la concentración de luz estelar.
- **Abajo derecha (Plano Fundamental):** Proyección combinada  $\log r_e$  vs  $\log \sigma + 0.26 \langle \mu \rangle$ . Esta combinación muestra una dispersión mínima, revelando una superficie bien definida donde residen las galaxias elípticas, lo cual justifica el nombre de “Plano Fundamental”.

## Importancia del Plano Fundamental

Estas proyecciones son esenciales para:

- Verificar empíricamente la validez del plano en distintas muestras observacionales.
- Determinar si existe una evolución en la estructura galáctica con el tiempo cosmológico.
- Comparar con predicciones teóricas de modelos de colapso disipativo o fusiones jerárquicas.

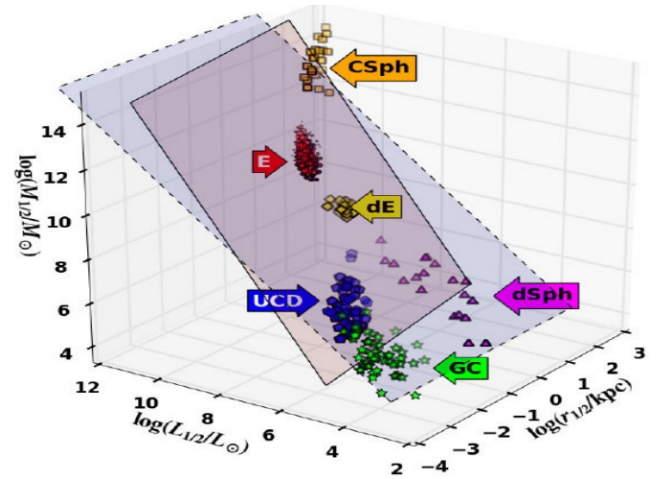
La relación Faber-Jackson, originalmente formulada para galaxias elípticas, describe una correlación empírica entre la luminosidad  $L$  y la dispersión de velocidades estelar  $\sigma$ ,  $L \propto \sigma^4$ . Esta relación se amplía en el llamado **Plano Fundamental**, una superficie en el espacio tridimensional definido por parámetros estructurales: la luminosidad efectiva  $L_e$ , el radio efectivo  $r_e$ , y la dispersión de velocidad  $\sigma$ . Este plano representa una extensión más precisa de la relación virial,  $M \propto \sigma^2 r / G$ , incorporando dependencias no triviales de la masa-luz y las propiedades de formación estelar.

## Versión Moderna del Plano Fundamental

El diagrama mostrado es una versión moderna del plano fundamental que incorpora no solo galaxias de tipo temprano (E, dE), sino también cúmulos globulares (GC), cúmulos de galaxias (CSph), galaxias enanas esferoidales (dSph), y sistemas intermedios como las enanas ultra-compactas (UCD). Se visualiza en un espacio tridimensional con los siguientes ejes logarítmicos:

- $\log(r_e/\text{kpc})$ : radio efectivo.
- $\log(L/L_\odot)$ : luminosidad total.
- $\log(\sigma^2/L)$ : proxy de masa sobre luminosidad ( $M/L$ ).

Dos planos están representados en el gráfico: el **plano fundamental** (rojo) y el **plano virial** (azul), este último asumiendo una relación constante de  $M/L$ . Se observa que las galaxias elípticas (E) y cúmulos de galaxias (CSph) siguen bien el plano fundamental, mientras que los cúmulos globulares (GC) y UCDs se desvían siguiendo otra rama estructural.



**Fig. 14.** Diagrama tridimensional que muestra una versión extendida del Plano Fundamental para sistemas autogravitantes. Este plano tradicionalmente describe galaxias elípticas, pero aquí se expande para incluir otros sistemas como

## Implicaciones Físicas

La continuidad observada en la distribución de objetos sugiere una conexión evolutiva entre los distintos sistemas autogravitantes. Sin embargo, aún no se comprende completamente qué mecanismos físicos generan la bifurcación de los fragmentos de sistemas masivos en dos secuencias bien diferenciadas:

1. La secuencia de UCDs y GC, con alta densidad superficial y menor tamaño.
2. La secuencia de galaxias dSph, de baja densidad y distribución difusa.

Ambas poblaciones parecen seguir trayectorias distintas en el espacio de parámetros, lo que podría indicar diferencias en los procesos de formación y evolución, como el stripping tidal o la evolución pasiva desde progenitores más masivos.

El análisis conjunto de estos sistemas bajo el marco del plano fundamental permite extender el paradigma virial a escalas muy distintas, desde cúmulos globulares hasta cúmulos de galaxias. Esta generalización sugiere una universalidad en la física de sistemas autogravitantes, pero también plantea nuevas preguntas sobre los procesos de formación, especialmente en los extremos de masa y densidad.

## Radios Galácticos y Distribución de Luz

### Isofotas y Definición de Radios

Las **isofotas** (contornos de brillo superficial constante) permiten mapear la estructura radial de galaxias. Estas son esenciales para definir radios característicos, como el **radio efectivo** ( $r_e$ ), que corresponde al radio proyectado que encierra el 50% de la luminosidad total de la galaxia. Matemáticamente:

$$L(< r_e) = \frac{1}{2} L_{\text{total}}$$

### Brillo Superficial y Perfiles de Luminosidad

El brillo superficial ( $\mu_e$ ) en  $r_e$  depende de la distribución radial de luz. Para galaxias elípticas y bulbos, el perfil sigue la **Ley de Sérsic**:

$$I(r) = I_e \exp \left\{ -b_n \left[ \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}$$

donde:

- $I_e$ : Brillo superficial en  $r_e$ .
- $n$ : Índice de Sérsic (e.g.,  $n = 4$  para el perfil de de Vaucouleurs).
- $b_n$ : Constante que depende de  $n$ .

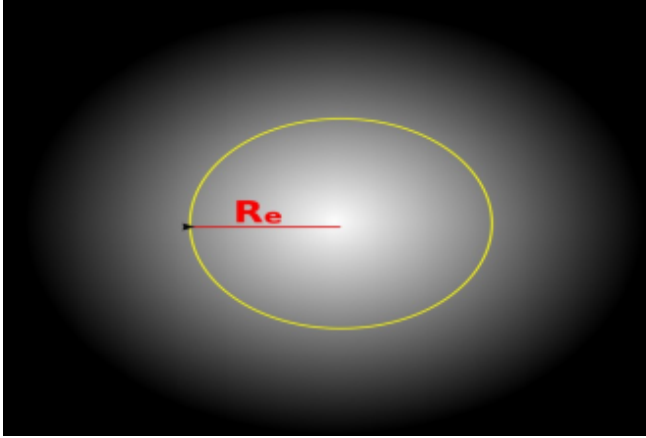


Fig. 15.

#### Aplicaciones en Estudios Extragalácticos

- **Mapeo de Estructura:** Las isofotas revelan asimetrías, barras o perturbaciones tidal.
- **Masa Dinámica:** Combinado con dispersión de velocidades ( $\sigma$ ),  $r_e$  permite estimar masas mediante el *Teorema del Virial*.
- **Plano Fundamental:** En galaxias elípticas,  $r_e$  es una variable clave junto a  $\sigma$  y  $\mu_e$ .

**Ejemplo:** Para una galaxia con  $r_e = 2 \text{ kpc}$  y  $\mu_e = 21 \text{ mag/arcsec}^2$ , el brillo superficial central ( $r = 0$ ) sería  $\sim 19 \text{ mag/arcsec}^2$  si  $n = 4$ .

#### Isofotas y Estructura Galáctica

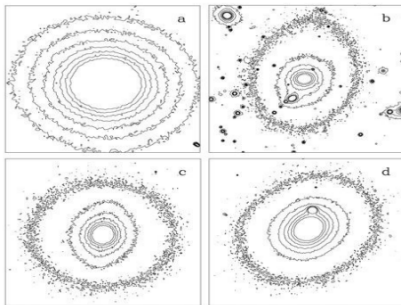


Fig. 16.

#### ¿Qué son las isofotas?

Las **isofotas** son curvas de nivel que conectan puntos con el mismo brillo superficial ( $\mu$ ) en una galaxia. Matemáticamente, se definen como:

$$\mu(r) = -2.5 \log_{10} I(r) + \text{cte.}$$

donde  $I(r)$  es la intensidad luminosa a una distancia  $r$  del centro.

#### Aplicaciones clave

- **Delimitación de radios:** Se usan para definir el *radio efectivo* ( $r_e$ ), el radio de media luz ( $R_{50}$ ), o el radio a un brillo específico (ej:  $\mu = 25 \text{ mag/arcsec}^2$ ).
- **Morfología:** Revelan estructuras como barras, brazos espirales o distorsiones tidal en mergers.
- **Perfiles de luz:** Permiten ajustar modelos como la ley de Sérsic ( $I(r) = I_e e^{-b_n[(r/r_e)^{1/n} - 1]}$ ).

#### Ejemplo práctico

Para una galaxia con  $\mu(r) = 21 \text{ mag/arcsec}^2$  en  $r_e = 3 \text{ kpc}$ :

$$L(< r_e) = 2\pi \int_0^{r_e} I(r)r dr \approx \frac{1}{2} L_{\text{total}}$$

#### Brillo Superficial Galáctico

El brillo superficial (BS) es una medida fundamental en astronomía extragaláctica, definido como el flujo luminoso por unidad de ángulo sólido. Matemáticamente:

$$\text{BS} = \frac{F}{\Delta\Omega} \quad [\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1}] \quad (46)$$

#### Propiedades Clave

- **Independencia de distancia:** En el Universo local, tanto el flujo ( $F \propto 1/r^2$ ) como el ángulo sólido ( $\Delta\Omega \propto 1/r^2$ ) se cancelan, haciendo que BS sea invariante.
- **Unidades típicas:** Magnitudes por arco segundo cuadrado ( $\mu$ ,  $\text{mag/arcsec}^2$ ), donde:

$$\mu = -2.5 \log_{10}(\text{BS}) + \text{cte.} \quad (47)$$

- **Límite observacional:** Las isofotas de  $\mu \approx 26 \text{ mag/arcsec}^2$  marcan el borde detectable de galaxias.

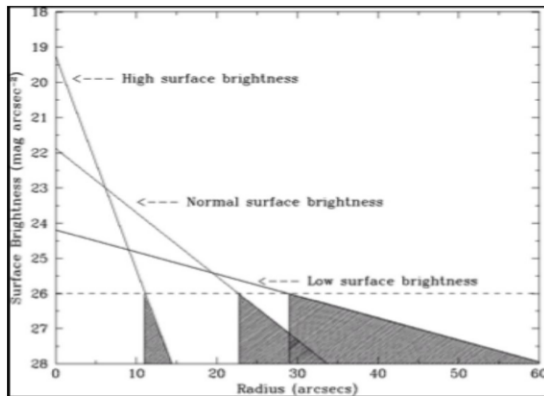
#### Representación Gráfica

##### Perfil Radial de Brillo Superficial

Los diagramas muestran cómo decae el brillo superficial con el radio galáctico. Un ejemplo típico incluye:

##### Ejes del gráfico:

- **X:** Radio ( $R$ ) en arcsec o kpc.
- **Y:** Brillo superficial ( $\mu$ ) en  $\text{mag/arcsec}^2$ .
- **Z** (en mapas 3D): Intensidad normalizada.



**Fig. 17.** Perfil radial de brillo superficial para una galaxia espiral. Se observa un decaimiento exponencial (línea roja) típico de discos galácticos, con desviaciones en el bulbo central (azul).

### Modelos Teóricos

El perfil de brillo sigue distribuciones como:

- **Ley de Sérsic:**

$$I(R) = I_e \exp \left\{ -b_n \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\} \quad (48)$$

donde  $n$  es el índice de forma (ej.  $n = 1$  para exponencial,  $n = 4$  para de Vaucouleurs).

- **Ajuste a datos:** La Figura 17 muestra cómo el modelo (línea roja) subestima el BS en regiones externas, sugiriendo la presencia de halos de materia oscura.

### Técnicas de Medición

- **Fotometría de isofotas:** Integración del flujo dentro de contornos de BS constante.
- **Correcciones necesarias:**
  - Extinción galáctica.
  - Contaminación de luz de fondo.
  - Efectos de PSF (Función de Dispersión de Punto).

### El Perfil de Sérsic

El perfil de Sérsic describe matemáticamente la distribución del brillo superficial ( $\mu$ ) en galaxias. Su forma general es:

$$\mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left( \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right) \quad (49)$$

donde:

- $\mu_e$ : Brillo superficial en el radio efectivo  $r_e$  (contiene 50% de la luz total)
- $r_e$ : Radio efectivo
- $n$ : Índice de Sérsic (determina la forma del perfil)

### Casos Específicos

Perfil de de Vaucouleurs ( $n = 4$ )

Típico de galaxias elípticas y bulbos:

$$\mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left( \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right) \quad (50)$$

- Brillo superficial cae rápidamente en el centro
- Cola extendida en regiones externas
- Ejemplo: Bulbo de la Vía Láctea

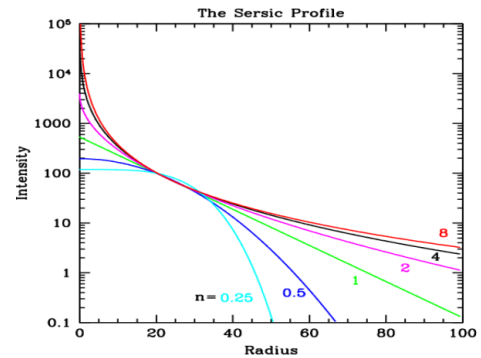
### Disco Exponencial ( $n = 1$ )

Característico de discos galácticos:

$$\mu(r) = \mu_0 + 1.09 \left( \frac{r}{h} \right) \quad (51)$$

- $\mu_0$ : Brillo superficial central
- $h$ : Longitud de escala (radio donde  $\mu$  decae por un factor  $e$ )
- Ejemplo: Disco de galaxias espirales como M31

### Interpretación Física



**Fig. 18.** Comparación de perfiles de Sérsic para diferentes índices  $n$ . Se muestran los casos  $n = 0.5$  (Gaussiano),  $n = 1$  (exponencial), y  $n = 4$  (de Vaucouleurs).

### Aplicaciones Observacionales

#### Medición de Parámetros Estructurales

- **Galaxias elípticas:**
  - Ajustar con  $n = 4$  para obtener  $r_e$  y  $\mu_e$
  - Relacionar con el Plano Fundamental
- **Galaxias espirales:**
  - Descomponer en componentes: bulbo ( $n = 4$ ) + disco ( $n = 1$ )
  - Ejemplo: NGC 3198 muestra  $h \approx 2.5$  kpc para su disco

#### Ejemplo Numérico

Para una galaxia con:

- $\mu_0 = 21$  mag/arcsec<sup>2</sup>
- $h = 3$  kpc

El brillo superficial a  $r = 6$  kpc sería:

$$\mu(6) = 21 + 1.09 \left( \frac{6}{3} \right) = 23.18 \text{ mag/arcsec}^2$$

### Relación con Otras Propiedades Galácticas

- **Masa estelar:** Integración del perfil de luz + relación masa-luz
- **Materia oscura:** Discrepancia entre perfil luminoso y curva de rotación
- **Evolución galáctica:** Índices  $n$  altos sugieren historias de fusiones

## Perfil de Sérsic para Galaxias Elípticas ( $n = 4$ )

Las galaxias elípticas y los bulbos de galaxias espirales siguen un perfil de Sérsic con índice  $n = 4$  (ley de de Vaucouleurs). Su distribución de luz se caracteriza por:

$$\mu(R) = \mu_e + 8.3268 \left( \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right) \quad (52)$$

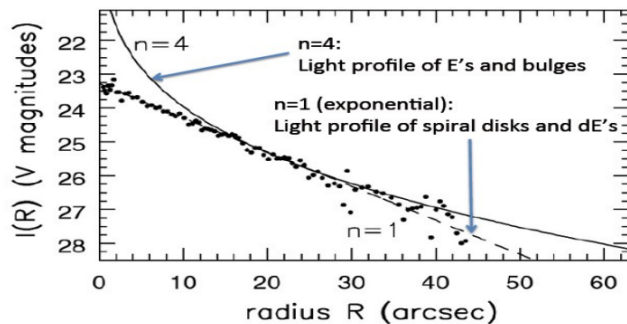
### Propiedades Clave

- **Alta concentración central:** Gran cantidad de estrellas en regiones pequeñas ( $R < 0.1R_e$ ).
- **Cola extendida:** Presencia significativa de luz en grandes radios ( $R > R_e$ ).
- **Radio efectivo ( $R_e$ ):** Contiene el 50% de la luminosidad total.

## Comparación con Discos Exponenciales ( $n = 1$ )

Los discos de galaxias espirales y galaxias enanas elípticas (dE) siguen un perfil exponencial ( $n = 1$ ):

$$\mu(R) = \mu_0 + 1.09 \left( \frac{R}{h} \right) \quad (53)$$



**Fig. 19.** Comparación de perfiles de brillo superficial. Las elípticas ( $n = 4$ ) concentran más luz en centros y regiones externas que los discos ( $n = 1$ ).

### Diferencias Críticas

- **En pequeños radios ( $R < 10$  arcsec):**
  - $n = 4$ : Brillo superficial  $\mu$  crece rápidamente (pendiente pronunciada).
  - $n = 1$ : Cambio gradual en  $\mu$ .
- **En radios intermedios ( $10 < R < 30$  arcsec):**
  - $n = 4$ : Menor densidad de estrellas (valle en la distribución).
  - $n = 1$ : Máxima contribución de luz.
- **En grandes radios ( $R > 30$  arcsec):**
  - $n = 4$ : Cola luminosa extendida (materia oscura influyente).
  - $n = 1$ : Decaimiento rápido (luz dominada por disco).

### Ejemplo Numérico

Para una galaxia elíptica típica con:

- $\mu_e = 22$  mag/arcsec<sup>2</sup>
- $R_e = 20$  arcsec

El brillo superficial a  $R = 10$  arcsec ( $0.5R_e$ ) sería:

$$\mu(10) = 22 + 8.3268 (0.5^{1/4} - 1) \approx 20.1 \text{ mag/arcsec}^2$$

### Implicaciones Astrofísicas

- **Formación galáctica:** Perfiles  $n = 4$  sugieren historias violentas (fusiones), mientras que  $n = 1$  indica formación más tranquila (acreción de gas).
- **Materia oscura:** La cola extendida en  $n = 4$  requiere halos masivos para explicar dinámica.
- **Clasificación morfológica:** El índice  $n$  discrimina entre tipos galácticos (Hubble 1926).

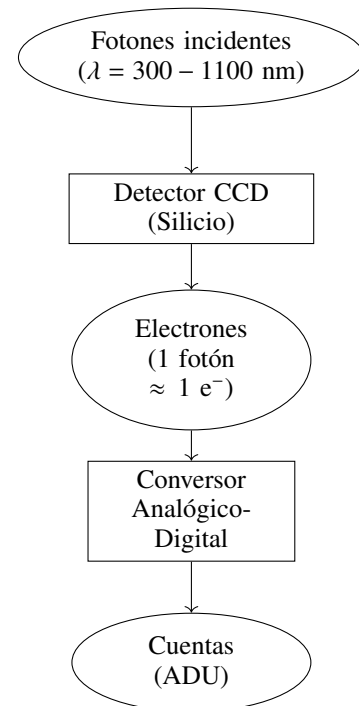
## Proceso de Medición del Flujo

Cuando un fotón llega a un detector CCD (Dispositivo de Carga Acoplada), se convierte en una señal eléctrica medible. Este proceso sigue tres etapas críticas:

$$\text{Flujo}_{\text{real}} = \frac{\text{Cuentas}_{\text{obs}} - \text{Cielo}}{\text{Tiempo} \times \text{Ganancia}} \times \text{Factores de Corrección} \quad (54)$$

### Paso 1: Detección de Fotones

- **Conversión fotón-electrón:** Cada fotón incidente libera 1 electrón (en el rango óptico).
- **Linealidad:** La corriente generada es proporcional al número de fotones (para flujos típicos).
- **Límites:** Saturación ocurre cuando los píxeles exceden su capacidad ( $\sim 10^5 e^-$  en CCDs profesionales).



**Fig. 20.** Cadena de detección: desde fotones hasta cuentas digitales (ADU). La ganancia típica es  $1 - 10 e^-/\text{ADU}$ .



## Correcciones Clave

### Flat Fielding

Los pixeles CCD no responden uniformemente debido a:

- Variaciones en sensibilidad ( $\pm 5\%$ )
- Sombras de motas de polvo
- Viñeteo óptico

**Solución:** Exponer el telescopio a una fuente uniforme (pantalla plana o cielo crepuscular) para crear un mapa de corrección:

$$\text{Imagen corregida} = \frac{\text{Imagen cruda} - \text{Bias}}{\text{Flat}} \quad (55)$$

### Calibración Fotométrica

Se usan estrellas estándar (ej: Catálogo Landolt) para convertir cuentas a magnitudes:

$$m = -2.5 \log_{10} \left( \frac{\text{Flujo}}{\text{Flujo}_0} \right) \quad (56)$$

- **Ejemplo:** Si una estrella con  $m_V = 15.0$  produce 10,000 cuentas/s, entonces:

$$1 \text{ cuenta/s} \approx 20.0 \text{ mag} \quad (57)$$

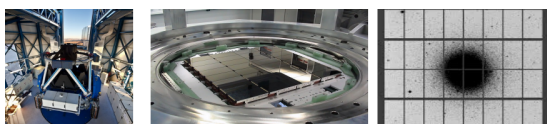
### Sustracción del Cielo

El cielo nocturno contribuye con:

- Emisión atmosférica ( $\lambda = 5577 \text{ \AA}$  [OI])
- Luz zodiacal
- Contaminación lumínica

#### Técnica:

1. Medir el cielo en regiones sin objetos (ej: anillo alrededor de la galaxia).
2. Ajustar un modelo polinómico (2D) o usar mediana en mosaicos.
3. Restar del campo científico.



**Fig. 21.** Ejemplo de sustracción de cielo: (Izq.) Imagen cruda con gradiente de cielo, (Der.) Imagen corregida. Las galaxias débiles (círculos) solo son visibles tras la corrección.

### Ejemplo Práctico

Para una galaxia que produce:

- 50,000 cuentas en 300s (con  $2 \text{ e}^-/\text{ADU}$ )
- Cielo: 100 ADU/píxel (medido en región vacía)
- Flat: Corrección del 10% en su posición

El flujo calibrado sería:

$$\text{Flujo} = \frac{(50,000/300 - 100) \times 2}{1.1} \approx 200 \text{ e}^-/\text{s}$$

Si una estrella estándar da  $1,000 \text{ e}^-/\text{s} = 18.5 \text{ mag}$ :

$$m_{\text{gal}} = 18.5 - 2.5 \log_{10}(200/1,000) \approx 20.0 \text{ mag}$$

## Extinción Astronómica

La extinción es el fenómeno que reduce el flujo observado de objetos celestes debido a la absorción y dispersión de la luz por el polvo interestelar. Afecta todas las observaciones y debe corregirse para obtener flujos intrínsecos.

### Origen Físico

- **Polvo en la Vía Láctea:** Principalmente en el plano galáctico ( $|b| < 10^\circ$ )
- **Polvo en la galaxia objetivo:** Especialmente relevante en galaxias con alto contenido de gas (ej: espirales)
- **Medio intergaláctico:** Contribución menor excepto en líneas de visión cercanas a cúmulos

## Formulación Matemática

### Ley de Extinción

El flujo observado ( $F_{\text{obs}}$ ) se relaciona con el flujo intrínseco ( $F_{\text{int}}$ ) mediante:

$$F_{\text{obs}} = F_{\text{int}} \times 10^{-0.4A_\lambda} \quad (58)$$

donde:

- $A_\lambda$ : Extinción en magnitudes a longitud de onda  $\lambda$
- El factor 0.4 surge de la definición de magnitudes ( $\Delta m = -2.5 \log_{10}(F_1/F_2)$ )

### Dependencia con la Longitud de Onda

La extinción es más fuerte en azul/UV que en rojo/IR. Se parametriza con  $R_V$ :

$$\frac{A_\lambda}{A_V} = a(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{R_V} \quad (59)$$

- $R_V = 3.1$  (valor típico para la Vía Láctea)
- $A_V$ : Extinción en banda V (550 nm)
- Funciones  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ : Empíricas (ej: ley de Cardelli 1989)

## Técnicas de Corrección

### Método 1: Mapas de Extinción Galáctica

- Usar bases de datos como *Schlegel 1998* o *Planck 2013*
- Ejemplo: Para coordenadas  $(l, b) = (120^\circ, 5^\circ)$ ,  $E(B - V) \approx 0.12 \text{ mag}$
- Convertir a  $A_\lambda$  con coeficientes estándar:

$$A_B \approx 4.1E(B - V)$$

$$A_V \approx 3.1E(B - V)$$

$$A_R \approx 2.3E(B - V)$$

### Método 2: Comparación de Líneas Espectrales

En galaxias, se usan razones de líneas de Balmer (ej:  $H\alpha/H\beta$ ) para estimar extinción interna:

$$A_V = k \times \ln \left( \frac{(H\alpha/H\beta)_{\text{obs}}}{2.86} \right) \quad (60)$$

donde  $k \approx 6.2$  para condiciones típicas del ISM.

## Ejemplo Práctico

### Corrección para una Galaxia Espiral

Datos observados:

- $F_B = 1.2 \times 10^{-14} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$  (corregido por cielo y flat)
- $E(B - V) = 0.05$  (mapa de Schlegel)
- $A_B = 4.1 \times 0.05 = 0.205 \text{ mag}$

Flujo intrínseco:

$$F_{\text{int}} = F_{\text{obs}} \times 10^{0.4A_B} = 1.2 \times 10^{-14} \times 10^{0.082} \approx 1.3 \times 10^{-14} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \quad (61)$$

## Limitaciones

- Incertidumbre en  $R_V$  para otras galaxias (puede diferir de 3.1)
- Variaciones espaciales en la extinción interna de galaxias
- Contribución no modelada del medio intergaláctico

## Introducción a la Corrección-K

Cuando observamos galaxias distantes, el *redshift* cosmológico ( $z$ ) desplaza espectros completos hacia longitudes de onda más largas. Esto afecta la medición de magnitudes absolutas, requiriendo la **corrección-K**.

## Fundamentos Físicos

### Efecto del Redshift

El redshift estira las longitudes de onda según:

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} = 1 + z \quad (62)$$

- Una galaxia con  $z = 0.1$  observada en banda B ( $\lambda_{\text{eff}} \approx 440 \text{ nm}$ ) realmente emite en  $\approx 400 \text{ nm}$  (cercano al UV)
- Esto subestima su brillo intrínseco si no se corrige

## Formulación Matemática

### Magnitud Absoluta Corregida

La magnitud absoluta ( $M$ ) se calcula como:

$$M = m - 5(\log_{10} D_L - 1) - K_{\text{corr}} \quad (63)$$

donde:

- $m$ : Magnitud aparente observada
- $D_L$ : Distancia de luminosidad [Mpc]
- $K_{\text{corr}}$ : Corrección-K específica para cada banda y redshift

### Cálculo de $K_{\text{corr}}$

Para una banda fotométrica  $X$ :

$$K_X(z) = -2.5 \log_{10} \left( \frac{(1+z) \int F_\lambda S_X(\lambda) d\lambda}{\int F_{\lambda/(1+z)} S_X(\lambda) d\lambda} \right) \quad (64)$$

- $F_\lambda$ : Flujo espectral intrínseco de la galaxia
- $S_X(\lambda)$ : Respuesta de la banda  $X$
- El factor  $(1+z)$  en el numerador compensa el alargamiento espectral

## Ejemplo Práctico

### Galaxia Espiral a $z = 0.2$

- Banda observada: R ( $\lambda_{\text{eff}} = 640 \text{ nm}$ )
- $m_R = 18.5$
- $D_L = 990 \text{ Mpc}$  (para  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ )
- $K_{\text{corr}} = 0.32$  (valor típico para espirales en R)

Cálculo de  $M_R$ :

$$\begin{aligned} M_R &= 18.5 - 5(\log_{10} 990 - 1) - 0.32 \\ &= 18.5 - 5(2.996 - 1) - 0.32 \\ &= 18.5 - 9.98 - 0.32 \\ &= 8.2 \end{aligned}$$

## Importancia en Estudios Extragalácticos

- **Relaciones de escala**: Permite comparar galaxias a distintos  $z$  (ej: Tully-Fisher, Faber-Jackson)
- **Evolución galáctica**: Sin corrección-K, galaxias distantes parecerían más rojas y menos luminosas
- **Selección de muestras**: Crítica para estudios de formación estelar a alto  $z$

## Limitaciones y Consideraciones

- Dependencia del tipo espectral: Galaxias tempranas (E/S0) requieren  $K_{\text{corr}}$  diferentes a espirales
- Incertidumbre en  $F_\lambda$  intrínseco: Modelos de población estelar son necesarios
- Efecto de líneas de emisión: Contribución significativa en galaxias con formación estelar

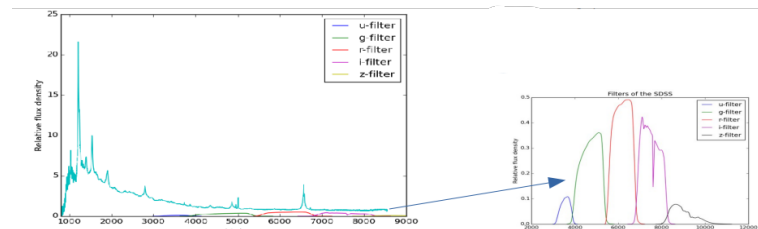


Fig. 22.