Curvas planas y alabeadas. Vector tangente

Una curva c dada en el plano o en el espacio puede definirse mediante un parámetro t y funciones continuas que dependan de dicho parámetro sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$.

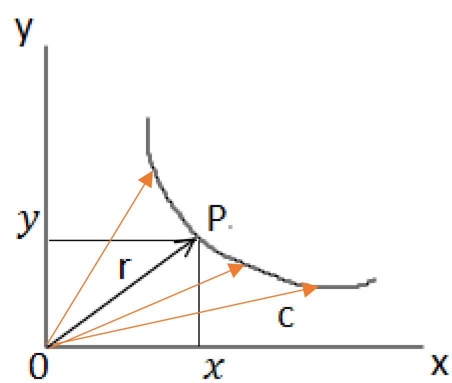
En el caso de una curva plana, se tiene las funciones

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

que representan las ecuaciones paramétricas de la curva.

En la figura se observa que el vector $r = \overrightarrow{OP}$ describe cada punto $P = (x, y)$ de la curva.



En consecuencia, la curva puede definirse mediante una función vectorial $r: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida de la forma

$$r(t) = x(t)i + y(t)j = \big(x(t), y(t)\big)$$

Ejemplo 1

La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ describe una circunferencia. La misma se puede definir mediante las funciones

$$x = \cos t \cdots (1)$$

$$y = sen\ t \cdots (2)$$

Donde $0 \leq t \leq 2\pi$

En efecto, reemplazando (1) y (2) en la ecuación dada se tiene que

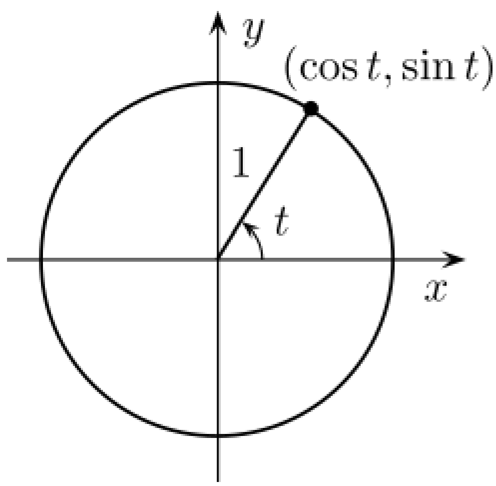
$$cos^2 t + sen^2 t = 1$$

Y por tanto se verifica la igualdad.

Su forma vectorial es

$$r(t) = cos\ t\ i + sen\ t\ j = (\cos t\,, sen\ t)$$

Y la figura que describe la función vectorial



Análogamente para una curva alabeada, esto es para curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones paramétricas están dadas por

$$x = x(t)$$

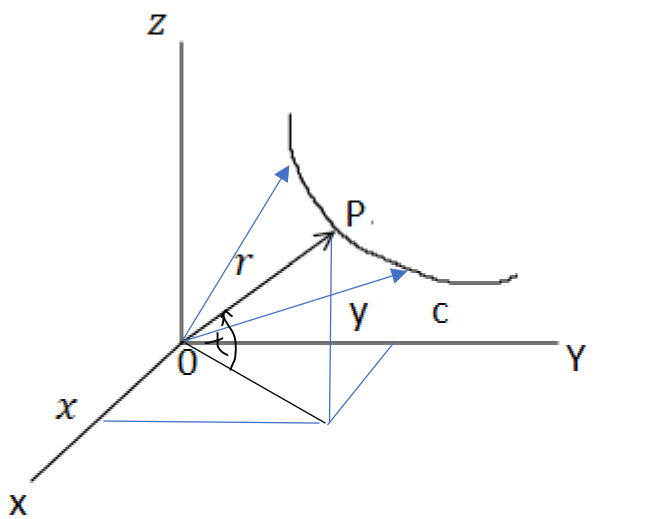
$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Tal como en el caso anterior, el vector $r = \overrightarrow{OP}$ describe cada punto de la curva; y en consecuencia la función vectorial es

$$r: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3\text{, definida de la forma}$$

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = (x(t), y(t), z(t))$$



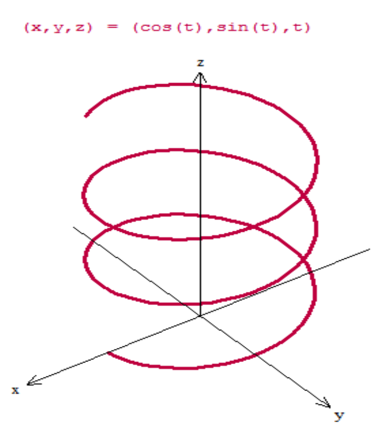
Ejemplo 2

La función $r(t) = \ cos\ t\ i + sen\ t\ j + t\ k$ donde $t \geq 0$ describe una curva llamada hélice circular. En este caso, se tiene

$$x = \cos t$$

$$y = sen\ t$$

$$z = t$$



La función vectorial

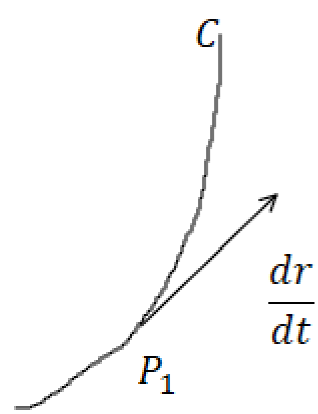
$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = (x(t), y(t), z(t))$$

es diferenciable en $t = t_1$ sí lo son las funciones $x(t)$; $y(t)$ y $z(t)$ en t_1 , y la derivada es el vector

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

el cual es tangente a la curva c que define $r(t)$.

Si consideramos $t = t_1$ dicho vector es tangente a la curva en el punto $P_1 = \left(x(t_1), y(t_1), z(t_3)\right) = (x_1, y_1, z_1)$



La curva se llama suave si las componentes del vector $\frac{dr}{dt}$ son funciones continuas y no son simultáneamente nulas, en consecuencia, cada punto de esta admite un vector tangente.

Gradiente y curvas de nivel

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable donde $f(x, y) = c$ es la curva de nivel correspondiente que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$; si la misma esta definida mediante el parámetro t, según el vector $r(t) = x(t)i + y(t)j$, entonces $f\left(x(t), y(t)\right) = c$.

Diferenciando con respecto a t se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x \arrow[dr] & + & y \arrow[dl] \\ & t & \end{tikzcd}$$

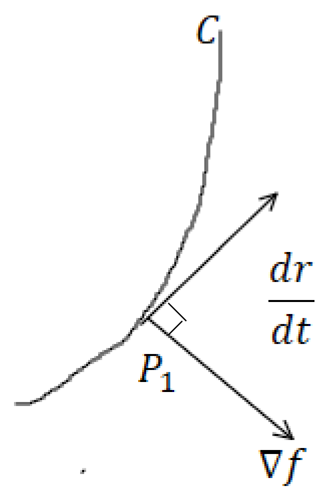
Que puede expresarse como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j\right) = 0$$

O bien

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

La última ecuación indica que el vector gradiente de f es normal al vector tangente $\frac{dr}{dt}$ y en consecuencia es normal a la curva de nivel, en el punto considerado.



Ejemplo 3

Sea la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ una curva de nivel, hallar y representar gráficamente el vector gradiente correspondiente a la función en el punto $P_1 = (2,1)$.

Solución

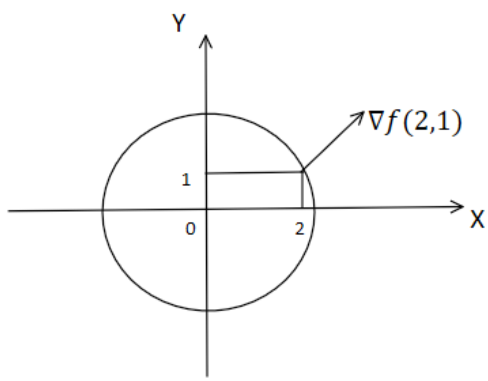
La circunferencia es la curva de nivel de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Luego calculamos el gradiente de f en P_1

$$\nabla f(x,y) = 2xi + 2yj = (2x, 2y)$$

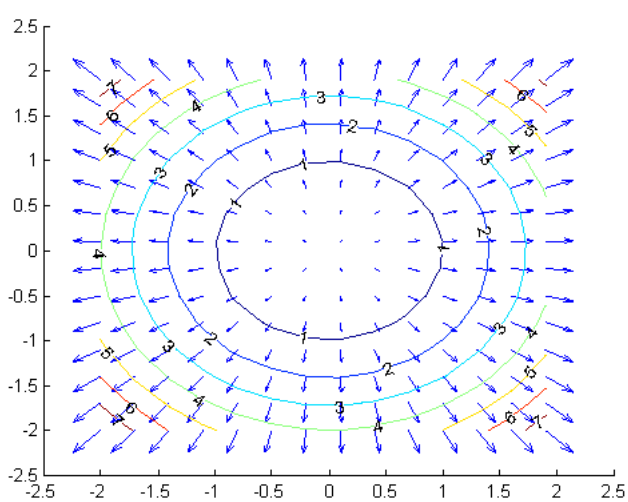
$$\nabla f(2,1) = 4i + 2j = (4,2)$$



En la siguiente figura de muestra las curvas de nivel de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Y sus gradientes en diferentes puntos.



Se observa que el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel en cada punto

Gradiante y superficies de nivel

Sea $w = f(x, y, z)$ una función diferenciable cuya superficie de nivel es $f(x, y, z) = c$ y si el vector

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

describe la curva sobre la superficie que pasa por $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ entonces

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c$$

Diferenciando con respecto a t se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Que

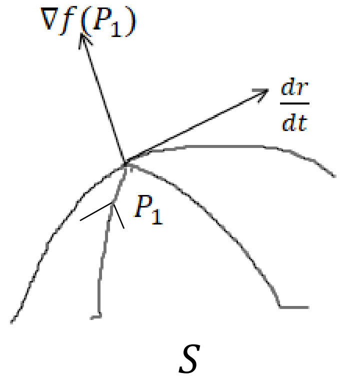
puede expresarse como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right) = 0$$

O bien

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

La ecuación anterior indica que el vector gradiente de f es normal a la curva y también lo es para cualquier curva sobre la superficie de nivel que pasa por P_1. En consecuencia el vector gradiente de una función $w = f(x, y, z)$ es normal a la superficie de nivel correspondiente.



Derivada direccional a lo largo de una curva orientada

La derivada direccional de una función $w = f(x, y, z)$ a lo largo de una curva c definida por la función vectorial $r(t)$ es dada por

$$f_u = u \cdot \nabla f$$

donde en este caso, el vector u, es el vector tangente unitario a la curva en el punto considerado.

Ejemplo 4

Hallar la derivada direccional de la función $w = x^2 + y^2 z^4$ a lo largo de la curva definida por

$$x = 3t - 2\cos t$$

$$y = e^t + 1$$

$$z = 1 + t + sen\ t\ ; en\ t = 0$$

Solución

Si $t = 0$, resulta

$$x = -2\ ; y = 2\ ; z = 1$$

El vector gradiente es

$$\nabla f(x,y,z) = 2xi + 2yz^4 j + 4y^2 z^3 k$$

luego

$$\nabla f(-2,2,1) = -4i + 4j + 16k$$

Siendo $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \Rightarrow$

$$r(t) = (3t - 2\cos t)i + (e^t + 1)j + (1 + t + sen\ t)k$$

El vector tangente a la curva está dado por $\frac{dr}{dt}$, entonces

$$\frac{dr}{dt} = (3 + 2\,\mathrm{sen}\,t)i + e^t j + (1 + cos\ t)k \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt}(0) = 3i + 1j + 2k = (3,1,2)$$

El vector tangente unitario es

$$u = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left\|\frac{dr}{dt}\right\|} \Rightarrow$$

$$u = \frac{3}{\sqrt{14}}i + \frac{1}{\sqrt{14}}j + \frac{2}{\sqrt{14}}k$$

Luego la derivada direccional es

$$f_u = u \cdot \nabla f$$

$$f_u(-2,2,1) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}i + \frac{1}{\sqrt{14}}j + \frac{2}{\sqrt{14}}k\right) \cdot (-4i + 4j + 16k)$$

$$\therefore\ f_u(-2,2,1) = \frac{24}{\sqrt{14}}$$

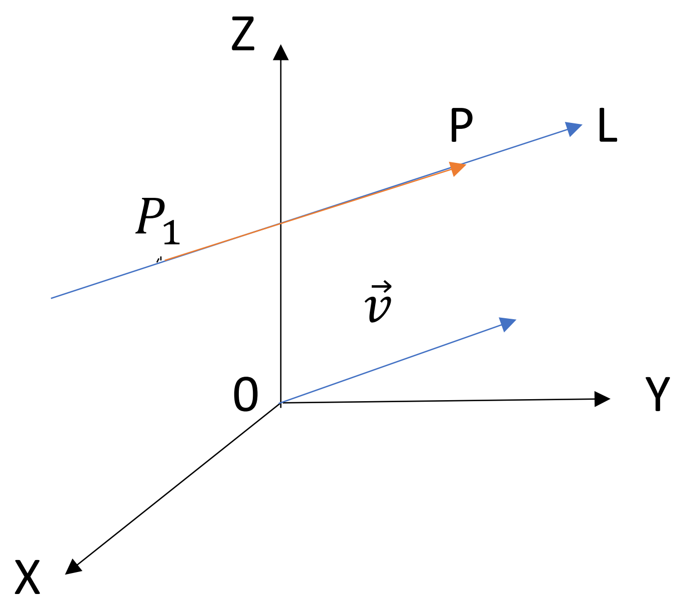
Recta tangente a una curva en el espacio tridimensional

Se presentará primero las diversas versiones de las ecuaciones de la recta en el espacio $\mathbb{R}^3$

Ecuaciones de una recta en $\mathbb{R}^3$

Sean $P = (x, y, z)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (a, b, c)$ y L una recta que pasa por P_1 y con la misma dirección del vector no nulo v.

Para que el punto P de $\mathbb{R}^3$ pertenezca a la recta L, es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ y v sean paralelos



Esto es

$$\overrightarrow{P_1P} = tv(ecuación\ vectorial\ de\ la\ recta\ L)$$

O sea

$$P - P_1 = tv$$

Luego

$$P = P_1 + tv$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(x_1, y_1, z_1\right) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$

Representan las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y que tiene naturalmente como dirección la misma dirección dada por el vector $v = (a, b, c)$.

Ahora bien

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Representan las ecuaciones simétricas de la recta L que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y que tiene la misma dirección dada por el vector $v = (a, b, c)$.

Ejemplo

Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por $P = (1,2,3)$ y es paralela al vector $4i - 2j + 7k$.

Solución

En este caso $v = (4, -2,7)$ y la ecuación vectorial es

$$(x, y, z) = (1,3,2) + t(4, -2,7)$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$$

Las ecuaciones simétricas son

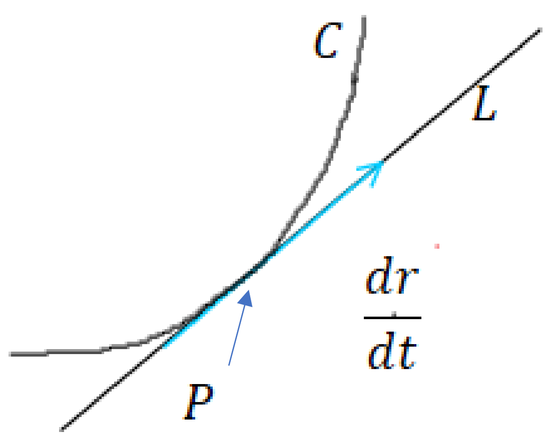
$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{7}$$

A continuación, veremos la ecuación de la recta tangente a una curva en el espacio y la recta tangente a una curva definida por la intersección de dos superficies

Recta tangente a una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$

Como se ha visto una recta en $\mathbb{R}^3$queda definida por un punto P y un vector paralelo a ella. Por lo tanto, las ecuaciones de la recta tangente a una curva en un punto, tendrá como vector dirección las componentes del vector tangente $\frac{dr}{dt}$ a dicha curva.

Se hace notar que las componentes del vector tangente no son simultáneamente nulas



En consecuencia, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = x_1 + tx'(t_1) \\ y = y_1 + ty'(t_1) \\ z = z_1 + tz'(t_1) \end{cases}$$

Y las ecuaciones simétricas son:

$$\frac{x - x_1}{x'(t_1)} = \frac{y - y_1}{y'(t_1)} = \frac{z - z_1}{z'(t_1)}$$

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta tangente a la curva definida por

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 1 - t^2 \\ z = 4t \end{cases}$$

en $t = 2$.

Solución

Si $t = 2$, resulta que

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = -3 \\ z = 8 \end{cases}$$

Y, en consecuencia

$$P = (x_1, y_1, z_1) = (10, -3, 8)$$

Siendo

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 + 1 \\ y'(t) = -2t \\ z'(t) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(2) = 13 \\ y'(2) = -4 \\ z'(2) = 4 \end{cases}$$

Y el vector tangente a la curva en $t = 2$ es

$$\frac{dr}{dt}(2) = 13i - 4j + 4k$$

Luego las ecuaciones paramétricas de la recta son las siguientes

$$\begin{cases} x = 10 + 13t \\ y = -3 - 4t \\ z = 8 + 4t \end{cases}$$

Eliminado el parámetro t, se obtiene las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-10}{13} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-8}{4}$$

Recta tangente a una curva definida por la intersección de dos superficies

Sea la curva definida por la intersección de dos superficies

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Diferenciando ambas funciones tenemos

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \cdots (1)$$

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0 \cdots (2)$$

entonces

$$f_x dx + f_y dy = -f_z dz \cdots (3)$$

$$g_x dx + g_y dy = -g_z dz \cdots (4)$$

De (3) y (4) despejamos dz y luego lo igualamos para obtener

$$\frac{f_x dx + f_y dy}{f_z} = -dz = \frac{g_x dx + g_y dy}{g_z}$$

esto es

$$\frac{f_x dx + f_y dy}{f_z} = \frac{g_x dx + g_y dy}{g_z}$$

De ahí multiplicamos de manera cruzada, por consiguiente

$$g_z f_x dx + g_z f_y dy = f_z g_x dx + f_z g_y dy \Leftrightarrow$$

$$g_z f_x dx - f_z g_x dx = f_z g_y dy - g_z f_y dy$$

$$(f_x g_z - f_z g_x)dx = \left(f_z g_y - f_y g_z\right)dy \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{f_z g_y - f_y g_z} = \frac{dy}{f_x g_z - f_z g_x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\begin{vmatrix} f_z & f_y \\ g_z & g_y \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}} \cdots (5)$$

Despejando ahora dx en (1) y (2) e igualando, se tiene

$$f_y dy + f_z dz = -f_x dx$$

$$g_y dy + g_z dz = -g_x dx$$

$$\Rightarrow \frac{f_y dy + f_z dz}{f_x} = -dx = \frac{g_y dy + g_z dz}{g_x}$$

de ahí

$$\frac{f_y dy + f_z dz}{f_x} = \frac{g_y dy + g_z dz}{g_x}$$

$$g_x f_y dy + g_x f_z dz = f_x g_y dy + f_x g_z dz$$

$$g_x f_y dy - f_x g_y dy = f_x g_z dz - g_x f_z dz$$

$$\left(f_y g_x - f_x g_y\right)dy = (f_x g_z - f_z g_x)dz$$

$$\frac{dy}{f_x g_z - f_z g_x} = \frac{dz}{f_y g_x - f_x g_y}$$

Tal como lo hicimos en (5) el denominador de la expresión anterior se puede escribir en termino de un determinante, en efecto

$$\frac{dy}{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}} \cdots (6)$$

De (5) y (6), por transitividad de la relación igualdad se obtiene

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} f_z & f_y \\ g_z & g_y \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}$$

O bien por propiedades de determinante podemos permutar cada una de las columnas de los determinantes para obtener

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \cdots (7)$$

Siendo la ecuación de la recta tangente en el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_1}{\frac{dz}{dt}} \cdots (8)$$

Multiplicando (7) y (8)

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} \frac{x - x_1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}} \frac{y - y_1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \frac{z - z_1}{\frac{dz}{dt}}$$

Multiplicando ahora la expresión anterior por dt obtenemos

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} \frac{x - x_1}{dx} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}} \frac{y - y_1}{dy} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \frac{z - z_1}{dz}$$

Simplificando las diferenciales obtenemos finalmente la fórmula

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1}} \cdots (9)$$

Resulta que (9) es la ecuación de la recta tangente en P_1 a una curva definida por la intersección de dos superficies donde los determinantes no son nulos.

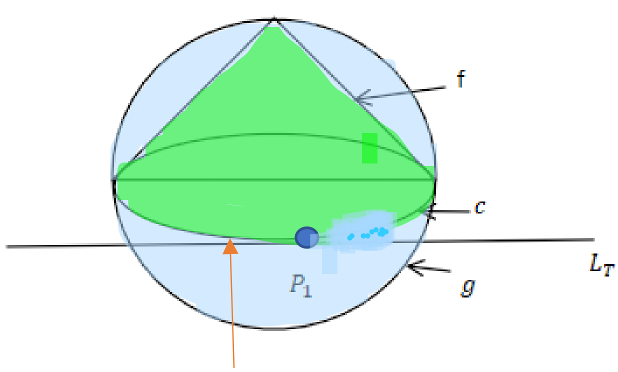
Definición

Si c es una curva que resulta de la intercepción de dos superficies diferenciables f y g , cuyo sistema es

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a una curva definida por la intersección de estas dos superficies donde los determinantes no son nulos es dado por la fórmula

$$L_T: \frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1}}$$



$f \cap g = c$

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las superficies

$$\begin{cases} x^2 - 2y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

en el punto $P_1 = (1, -1, 2)$

Solución

De las superficies dadas sean

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y + z - 5$$

$$g(x, y, z) = 2x + y - z^2 + 3$$

Y aplicando la fórmula

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1}}$$

donde $f_x = 2x$; $f_y = -2$; $f_z = 1$; $g_x = 2$; $g_y = 1$; y $g_z = -2z$

se tiene entonces que

$$\frac{x - 1}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{y + 1}{\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ -2z & 2 \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{z - 2}{\begin{vmatrix} 2x & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{P_1}}$$

Evaluando las derivadas en el punto $P_1 = (1, -1, 2)$, tenemos

$$\frac{x - 1}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{y + 1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z - 2}{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Luego la ecuación simétrica de la recta tangente está dada por

$$L_T: \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{6}$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las superficies

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ z = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

en $x = 2$.

Solución

Siendo $x = 2$, resulta el punto $P_1 = (2,5,1)$, el sistema dado se puede escribir como

$$\begin{cases} y - x^2 - 1 = 0 \\ z - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{3} = 0 \end{cases}$$

Considerando

$$f(x,y,z) = y - x^2 - 1$$

y

$$g(x,y,z) = z - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3},$$

Y la fórmula de la recta tangente

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1}}$$

se tiene entonces que

$$\frac{x-2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y-5}{\begin{vmatrix} 0 & -2x \\ 1 & -x^2 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ -x^2 & 0 \end{vmatrix}}$$

Evaluando las derivadas en $P_1 = (2,5,1)$, se obtienes las ecuaciones simétricas de la recta buscada

$$\frac{x-2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y-5}{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}$$

De donde

$$\frac{x-2}{1-0} = \frac{y-5}{0-(-4)} = \frac{z-1}{0-(-4)}$$

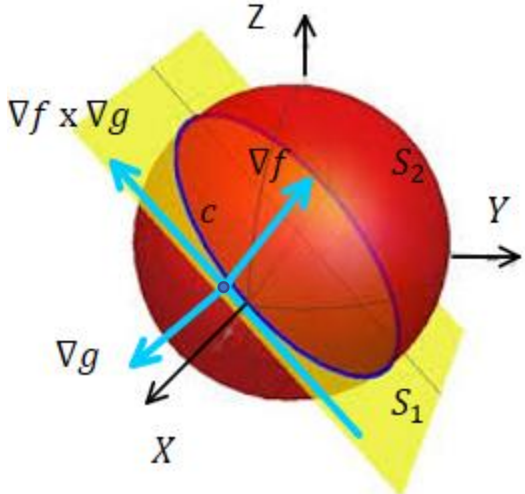
Finalmente obtenemos

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-1}{4}$$

Siendo esta la recta tangente a la curva que resulta de la intersección de las dos superficies en el punto $P_1 = (2,5,1)$.

Observación

Otra alternativa para determinar la ecuación de la recta tangente a una curva definida por dos superficies en un punto es considerar los vectores normales a las mismas; esto es sus correspondientes gradientes y efectuar el producto vectorial entre las mismos. Así se obtiene un vector tangente a la curva y que es perpendicular a los gradientes, cuyas componentes si no son simultáneamente nulas, permiten determinar la ecuación de la recta (ver figura).



Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las superficies

$$\begin{cases} x^2 - 2y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

en el punto $P_1 = (1, -1, 2)$ efectuando el producto vectorial entre los vectores normal a cada una de las superficies en el punto dado.

Solución

Siendo

$$\begin{cases} x^2 - 2y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Y considerando que

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y + z - 5$$

y

$$g(x, y, z) = 2x + y - z^2 + 3$$

se tiene que

$$\nabla f(x, y, z) = 2xi - 2j + k = (2x, -2,1)$$

$$\nabla g(x, y, z) = 2i + j - 2zk = (2,1, -2z)$$

En el punto $P_1 = (1, -1,2)$, resultan

$$\nabla f(1, -1,2) = 2i - 2j + k = (2, -2,1)$$

$$\nabla g(1, -1,2) = 2i + j - 4k = (2,1, -4))$$

Entonces un vector tangente se obtiene efectuando el producto vectorial ∇f x ∇g ; esto es

$$\nabla f \text{ x } \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7i + 10j + 6k = (7,10,6)$$

Luego las ecuaciones si métricas de la recta tangente en P_1 son

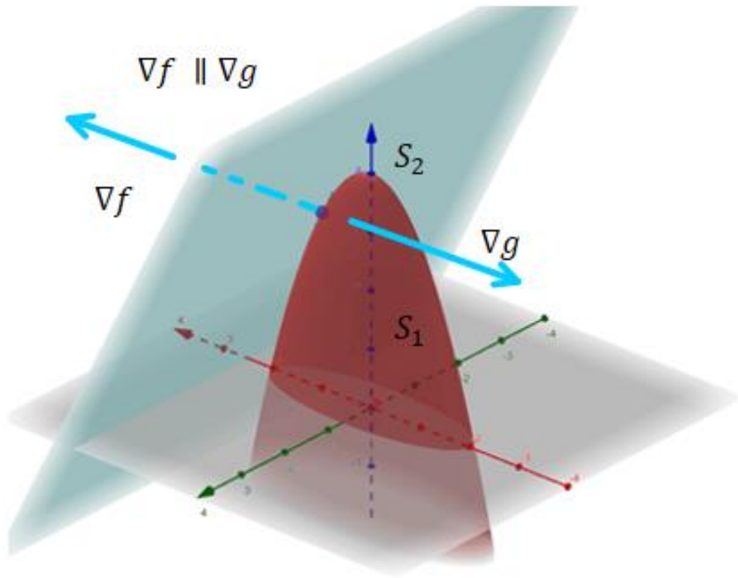
$$\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{6}$$

Resultado que coincidente con el obtenido en el ejemplo 1.

Observación

Si las superficies son tangentes en un punto, los vectores gradientes correspondientes son paralelos y en consecuencia el producto vectorial entre los mismos es el vector nulo.

La figura siguiente ilustra un ejemplo de la situación planteada.



Ejemplo 4

Determinar si las superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ y } (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

son tangentes en el punto $(3,0,0)$.

Solución

Como ya sabemos si las superficies son tangentes en el punto, los vectores gradientes correspondientes son paralelos y en consecuencia el producto vectorial entre los mismos debe ser el vector nulo.

Considerando que

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

$$g(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Entonces

$$\nabla f(x,y,z) = 2xi + 2yj + 2zk$$

$$\nabla g(x, y, z) = 2(x-2)i + 2yj + 2zk$$

En el punto $P_1 = (3,0,0)$, resultan

$$\nabla f(3,0,0) = 6i - 0j + 0k = (6,0,0)$$

$$\nabla g(3,0,0) = 2i + 0j - 0k = (2,0,0)$$

Luego

$$\nabla f \text{ x } \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} == i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0i - 0j + 0k = 0$$

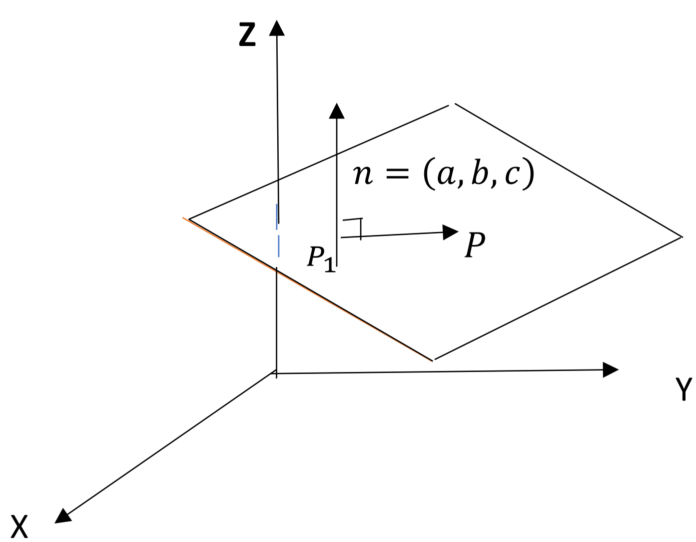
Luego las superficies son tangentes en el punto dado.

Plano normal a una curva en el espacio tridimensional

Primero se presentará las ecuaciones del plano en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ecuación del plano en el espacio $\mathbb{R}^3$

Un plano puede determinarse por un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ que le pertenece y por un vector no nulo $n = (a, b, c)$ normal al mismo.



Se observa de la figura que, siendo el vector n normal al plano, el punto P pertenece al plano si el producto punto entre los vectores n y P_1P es nulo; por lo tanto, la ecuación vectorial es:

$$n \cdot P_1P = 0$$

O bien

$$n \cdot (P - P_1) = 0$$

Considerando las coordenadas del punto

$$P = (x, y, z)$$

se obtiene la ecuación cartesiana

$$(a, b, c) \cdot \big((x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\big) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$\boldsymbol{\pi: a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

O bien desarrollando algebraicamente la ecuación anterior para obtener la ecuación del plano en su versión cartesiana estándar

$$\boldsymbol{\pi: ax + by + cz + d = 0}$$

La particularidad de la ecuación de π es que sus tres coeficientes: *a*, *b*, *c* son las componentes del llamado "vector normal" del plano, tal como se aprecia en la figura.

Un vector normal al plano es un vector "perpendicular" a cualquier recta del plano. Así, un plano viene determinado por un vector normal $n = (a, b, c)$ y un punto P_1.

Por ejemplo: El plano cuyo vector normal es $n = (1, 3, -1)$ y que pasa por el punto $P_1 = (2,0,5)$ es:

$$\pi: x + (3)y + (-1)z + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi: x + 3y - z + d = 0$$

y si ahora sustituimos el punto $P_1 = (2{,}0{,}5) \Rightarrow$

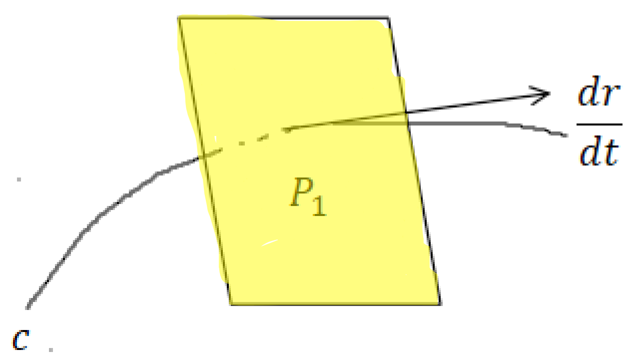
$$2 + 3(0) - 5 + d = 0$$

de donde se deduce que $d = 3$. Por lo tanto, ese plano en coordenadas cartesianas es:

$$\pi: x + 3y - z + 3 = 0$$

Plano normal a una curva en $\mathbb{R}^3$

Un plano es normal a una curva siempre que el vector tangente a dicha curva en el punto P_1 es normal al plano.



En consecuencia, la ecuación del plano tendrá como vector normal las componentes del vector tangente $\frac{dr}{dt}$; entonces para

$P = (x, y, z) \in$ plano y $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in$ curva y al plano

se tiene que

$$\frac{dr}{dt} \cdot (P - P_1) = 0$$

Es equivalente a

$$(x'(t_1), y'(t_1), z'(t_1)) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

Por tanto, el plano normal a la curva c en el punto P_1 es

$$x'(t_1)(x-x_1)+y'(t_1)(y-y_1)+z'(t_1)(z-z_1)=0$$

Si la curva está definida por la intersección de dos superficies se tiene el plano normal a la curva está dada por

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1}(x-x_1)+\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1}(y-y_1)+\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1}(z-z_1)=0$$

Ejemplo 1

Hallar las ecuaciones del plano normal a la curva dada por:

$$\begin{cases} x(t)=t^3+t \\ y(t)=1-t^2 \\ z(t)=4t \end{cases}$$

en $t=2$.

Solución

Para

$$t=2, P_1=(x,y,z)=(10,-3,8)$$

luego

$$\begin{cases} x'(t)=3t^2+1 \\ y'(t)=-2t \\ z'(t)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(2)=13 \\ y'(2)=\ -4 \\ z'(2)=4 \end{cases}$$

Luego la ecuación del plano normal a la curva es

$$13(x-10)-4(y+3)+4(z-8)=0$$

O bien

$$13x-4y+4z=174$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación del plano normal a la curva definida por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2 - 2y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

en el punto $P_1 = (1, -1, 2)$

Solución

De acuerdo con lo visto sean

$$f(x,y,z) = x^2 - 2y + z - 5\,;\, g(x,y,z) = 2x + y - z^2 + 3$$

Luego

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ -2z & 2 \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10$$

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} 2x & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

Luego aplicando la fórmula correspondiente la ecuación del plano normal a la curva es

$$7(x-1) + 10(y+1) + 6(z-2) = 0$$

O bien $7x + 10y + 6z = 9$

Plano tangente y recta normal a una superficie

Se define el plano tangente a una superficie que es dada por la ecuación $f(x,y,z) = c$ en el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al plano que pasa por P_1 y que tiene como vector normal a gradiente $\nabla f(x_1, y_1, z_1)$; donde el $\nabla f(x_1, y_1, z_1) \neq 0$.

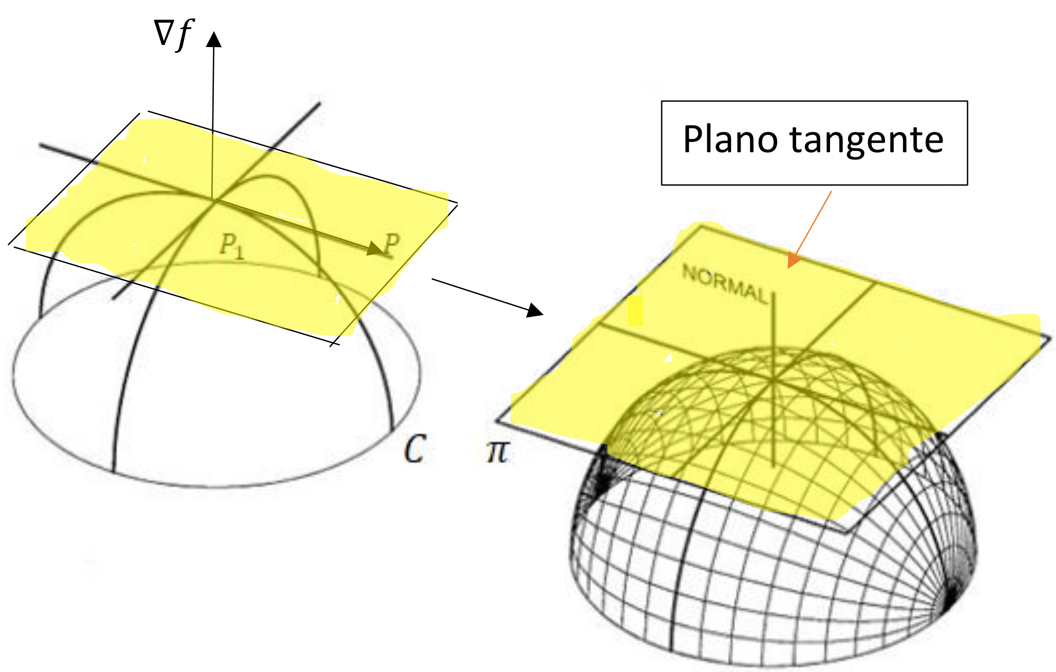
Si P_1P es el vector correspondiente a los puntos $P = (x, y, z)$ y $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ entonces una ecuación vectorial del plano tangente está dada por

$$\nabla f(x_1, y_1, z_1) \cdot (P - P_1) = 0$$

Aplicando la definición del producto escalar, la ecuación vectorial se puede escribir en forma cartesiana como:

$$f_x(x_1, y_1, z_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1, z_1)(y - y_1) + f_z(x_1, y_1, z_1)(z - z_1) = 0$$

Siendo esta la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P_1.



Ejemplo 3

Hallar la ecuación del plano tangente en (5,2,3) a la superficie

$$x^2 + y^2 - z^2 = 20$$

Solución

Se tiene $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 20$

$$\nabla f(x, y, z) = 2xi + 2yj - 2zk = (2x, 2y, -2z)$$

Y, en consecuencia

$$\nabla f(5,2,3) = 10i + 4j - 6k = (10,4, -6)$$

Luego obtenemos la ecuación del plano tangente en el punto $(5,2,3)$ aplicando la fórmula correspondiente

$$10(x - 5) + 4(y - 2) - 6(z - 3) = 0$$

O bien

$$5x + 2y - 3z = 20$$

Ejemplo 4

Hallar una ecuación del plano tangente a la superficie

$$z = 3yx - 4x^2$$

en el punto $(1,1, -1)$.

Solución

En este caso se tiene

$$f(x, y, z) = 3yx - 4x^2 - z = 0$$

Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (3y - 8x)i + 3xj - k = (3y - 8x, 3x, -1)$$

luego

$$\nabla f(1,1, -1) = -5i + 3j - k$$

$$= (-5,3, -1)$$

Por lo tanto. Una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto $(1,1,-1)$ es

$$-5(x-1)+3(y-1)-(z+1)=0$$

O bien

$$-5x+3y-z=-1 \Leftrightarrow 5x-3y+z=1$$

Recta normal a una superficie

Si la superficie dada por la ecuación $f(x,y,z)=c$ posee un plano tangente en el punto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ entonces se define la recta normal a la superficie en P_1 a la recta que tiene dirección que es paralela al vector $\nabla f(x_1,y_1,z_1)$. **Es decir, la recta normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en el punto P_1.**

Siendo las ecuaciones simétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

donde a_1, b_1 y c_1 son números distintos de 0, y como la misma es paralela al ∇f, resulta que la ecuación normal de la recta a la superficie en P_1 es

$$\frac{x-x_1}{f_x(x_1,y_1,z_1)}=\frac{y-y_1}{f_y(x_1,y_1,z_1)}=\frac{z-z_1}{f_z(x_1,y_1,z_1)}$$

Ejemplo 5

Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie

$$2x^3+y^2+4z=2$$

en $P_1=(1,2,-1)$.

Solución

Siendo $f(x, y, z) = 2x^3 + y^2 + 4z - 2$

$$\nabla f(x, y, z) = 6x^2 i + 2yj + 4k$$

Y, en consecuencia

$$\nabla f(1,2,-1) = 6i + 4j + 4k = (6,4,4)$$

Aplicando la fórmula, se tiene

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{4}$$

O bien

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Ejemplo 6

Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

que son paralelas al plano $x + 4y + 6z = 0$.

Solución

Consideremos la función

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$$

Recordemos que un plano tangente a la superficie en un punto es aquel plano que tiene como vector normal al gradiente de la superficie, por consiguiente, la ecuación del plano tangente en el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a determinar es de la forma:

$$f_x(x_1, y_1, z_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1, z_1)(y - y_1) + f_z(x_1, y_1, z_1)(z - z_1) = 0$$

Siendo la superficie

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$$

entonces

$$f_x(x,y,z) = 2x \text{ ; } f_y(x,y,z) = 4y \text{ y } f_z(x,y,z) = 6z$$

Como $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ es punto de tangencia entonces

$$\nabla f(P_1) = \nabla f(x_1, y_1, z_1) = (2x_1, 4y_1, 6z_1)$$

es perpendicular a la superficie en el punto de tangencia y, por tanto, será paralelo al vector normal ,

$$n = (1{,}4{,}6) \text{ del plano } x + 4y + 6z = 0.$$

Luego sus componentes son proporcionales

$$\frac{2x_1}{1} = \frac{4y_1}{4} = \frac{6z_1}{6} = t$$

entonces

$$2x_1 = y_1 = z_1 = t$$

De ahí

$$x_1 = \frac{t}{2} \ ; \ y_1 = t \ ; \ z_1 = t$$

O sea que

$$P_1 = \left(\frac{t}{2}, t, t\right)$$

Como este punto pertenece a la superficie entonces

$$\frac{t^2}{4} + 2t^2 + 3t^2 = 21$$

$$t^2 + 8t^2 + 12t^2 = 84$$

$$21t^2 = 84 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Luego los pontos de tangencia son

Si $t = 2$;

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{t}{2}, t, t\right) = (1,2,2)$$

Si $t = -2$;

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{t}{2}, t, t\right) = (-1, -2, -2)$$

Luego

$\nabla f(1,2,2) = (2,8,12)$ y $\nabla f(-1,-2,-2) = (-2,-8,-12)$

Por tanto, las ecuaciones de los planos tangentes son:

$$2(x-1) + 8(y-2) + 12(z-2) = 0$$

o bien

$$x + 4y + 6z = 21$$

Y

$$-2(x+1) - 8(y+2) - 12(z+2) = 0$$

o bien

$$x + 4y + 6z = -21$$