# Clase nº31

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

17 de Noviembre 2021

## Objetivo de la clase

- Determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias de primera clase.
- Determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias de segunda clase.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 95

Si $a > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia de primera clase

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

# Integrales impropias de primera clase

## Criterio de comparación al límite

Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas, positivas. Entonces, para $x \geq a$ y $K = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tenemos que:

a) Si $K \neq 0$, entonces ambas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

convergen o ambas divergen.

b) Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

# Integrales impropias de primera clase

## Criterio de comparación al límite

c) Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implica la divergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 96

Utilizando comparación al límite, mostrar que $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^4 \, dx$ converge.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 97

Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx,$$

utilizando comparación al límite con la función $\frac{1}{x^2}$.

# Integrales impropias de primera clase

## Ejemplo 98

Estudiar la convergencia de la integral

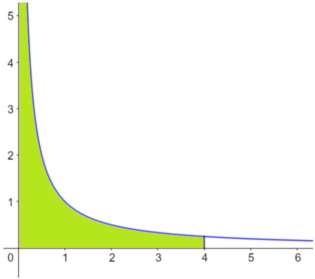
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx,$$

utilizando comparación al límite con la función $g(x) = \frac{1}{x}$.

# Integrales impropias de segunda clase

## Problemática 1

¿Se puede determinar el área pintada?



# Integrales impropias de segunda clase

## Problemática 2

¿Se puede determinar el área bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2},\ x \in ]0, 3]$?

# Integrales impropias de segunda clase

## Problemática 3

¿Se puede determinar el área bajo la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x \in ]0, 3]$?

# Integrales impropias de segunda clase

Llamaremos integrales impropias de segunda clase a las integrales de funciones que no están acotadas en el intervalo de integración.

## Definición

1. Si $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in ]a, b[$, $f$ es integrable en $[c, b]$, entonces se define

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} f(x)\, dx.$$

2. Si $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in ]a, b[$, $f$ es integrable en $[a, c[$, entonces se define

$$\int_{a}^{b^-} f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_{a}^{c} f(x)\, dx.$$

# Integrales impropias de segunda clase

### Observación

En las definiciones anteriores si el límite existe diremos que la integral converge; si no, es divergente y puede hacerlo a $+\infty, -\infty$ o diverge de forma oscilante.

# Integrales impropias de segunda clase

## Ejemplo 99

Si $b > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, la integral impropia de segunda clase

$$\int_{0^+}^{b} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{1-p}}{1-p} & \text{si } p < 1, \\ +\infty & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

# Integrales impropias de segunda clase

### Definición

Si $f$ es discontinua en $c$, donde $a < c < b$, y es continua en $[a, c[ \cup ]c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

siempre que las dos integrales de la derecha sean convergentes.

# Integrales impropias de segunda clase

## Ejemplo 100

Sea $f$ definida por $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Determinar si existe la integral impropia

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

# Integrales impropias de segunda clase

## Observación

También se pueden aplicar estas definiciones cuando hay varios puntos conflictivos $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

donde cada integral de la derecha se ha obtenido como un límite.

## Ejercicio Propuesto

1. Estudiar la convergencia de la integral

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{x^p}{1 + x^q}\, dx.$$

2. Determinar que

   a) $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2}}.$

   b) $\displaystyle\int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = 2\sqrt{2}.$

   c) $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ es divergente.

# Integrales impropias de segunda clase

## Ejercicio propuesto

3. Encuentre el error en el siguiente calculo

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{x-1}\,dx &= \left(\ln|x-1|\right)_0^4 \\ &= \ln(3) - \ln|-1| \\ &= \ln 3.\end{aligned}$$

4. Considere la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{si } x < 2, \\ \frac{1}{x-2} & ,\text{si } x > 2. \end{cases}$

   Determine si $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ converge.

## Bibliografía

| | Autor | Título | Editorial | Año |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Stewart, James | Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas | México: Cengage Learning | 2021 |
| 2 | Burgos Román, Juan de | Cálculo infinitesimal de una variable | Madrid: McGraw-Hill | 1994 |
| 3 | Zill Dennis G. | Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones | Thomson | 2007 |
| 4 | Thomas, George B. | Cálculo una variable | México: Pearson | 2015 |

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.