Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 7

Mauro Jélvez Jélvez

21/06/2024

1)

Tenemos solución de la forma:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]$$

Por la condición de iniciales $y(x,0) = 0 \to A_n \equiv 0$, por lo que tendremos:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Si tenemos las siguientes condiciones inciales:

$$y(x,0) = 0 = f(x)$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = \frac{4V}{L^2}x(L-x) = g(x)$$

Para calcular el coeficiente tenemos la siguiente relación:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x)dx$$

Reemplazando tenemos:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{4V}{L^2}x(L-x)\right)dx = \frac{8V}{n\pi cL^2}\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Reordenando:

$$B_n = \frac{8V}{n\pi cL^2}\left[L\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx - \int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

Resolviendo las integrales tendremos:

$$I_1 = \int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Usando $k = \frac{n\pi}{L}$

$$I_1 = \int_0^L x\sin(kx)\,dx$$

Usando integración por partes definiendo $u = x \to du = dx$ y $dv = \sin(kx)dx \to v = -\frac{\cos(kx)}{k}$ Tendremos:

$$I_1 = \int_0^L x\sin(kx)\,dx = \left[-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k}\int_0^L \cos(kx)dx\right]_0^L = \left[-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^L$$

$$I_1 = -\frac{L\cos(kL)}{k} + \frac{\sin(kL)}{k^2} = -\frac{kL\cos(kL)}{k^2} + \frac{\sin(kL)}{k^2}$$

Por lo que tendremos para I_1:

$$I_1 = \frac{\sin(kL) - kL\cos(kL)}{k^2}$$

Ahora la siguiente integral:

$$I_2 = \int_0^L x^2 \sin(kx)\, dx$$

Usando integración por partes usando $u = x^2 \to du = 2xdx$ y $dv = \sin(kx)dx \to v = -\frac{\cos(kx)}{k}$

$$I_2 = \int_0^L x^2 \sin(kx)\, dx = \left[-\frac{x^2\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k}\int_0^L 2x\cos(kx)dx\right]_0^L = \left[-\frac{x^2\cos(kx)}{k} + \frac{2}{k}\left(\frac{x\sin(kx)}{k} - \frac{1}{k}\int_0^L \sin(kx)dx\right)\right]_0^L$$

$$I_2 = \left[-\frac{x^2\cos(kx)}{k} + \frac{2x\sin(kx)}{k^2} + \frac{2\cos(kx)}{k^3}\right]_0^L = -\frac{L^2\cos(kL)}{k} + \frac{2L\sin(kL)}{k^2} + \frac{2\cos(kL)}{k^3} - \frac{2}{k^3}$$

Reordenando obtenemos:

$$I_2 = \frac{-2 + \cos(kL)(2 - k^2L^2) + 2kL\sin(kL)}{k^3}$$

Ahora calculando el término que está en el coeficiente:

$$[LI_1 - I_2] = \frac{L\sin(kL) - kL^2\cos(kL)}{k^2} + \frac{2 - \cos(kL)(2 - k^2L^2) - 2kL\sin(kL)}{k^3}$$

$$= \frac{kL\sin(kL) - k^2L^2\cos(kL) + 2 - 2\cos(kL) + k^2L^2 cos(kL) - 2kL\sin(kL)}{k^3}$$

Lo que se termina reduciendo a:

$$[LI_1 - I_2] = \frac{2 - 2\cos(kL) - kL\sin(kL)}{k^3}$$

Reemplazando $k = \frac{n\pi}{L}$

$$I = (2 - 2\cos n\pi - kL\sin n\pi)\frac{L^3}{n^3\pi^3}$$

Tendremos que todos los términos de seno serán cero, ya que para todo $n \in \mathbb{Z}$ en los enteros positivos.

$$I = (1 - \cos n\pi)\frac{2L^3}{n^3\pi^3} = (1 - (-1)^n)\frac{2L^3}{n^3\pi^3}$$

Tendremos que para los n par se hará cero, entonces la solución para n imapres será:

$$I = \frac{4L^3}{n^3\pi^3}$$

Reemplazando en el coeficiente:

$$B_n = \frac{8V}{n\pi cL^2}\left(\frac{4L^3}{n^3\pi^3}\right) = \frac{32VL}{n^4\pi^4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$$

Ahora reemplazando en la solución general:

$$y(x,t) = \sum_{n=1,3,5,..}^{\infty} \frac{32VL}{n^4\pi^4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right) = \frac{32VL}{\pi^4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sum_{n=1,3,5,..}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

Para escribirlo en términos de impares tendremos:

$$y(x,t) = \frac{32VL}{\pi^4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

Ahora para sacar la energía cinética tendremos:

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Tendremos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{32VL}{\pi^4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{32V}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

Reemplazando en la integral:

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \mu\left(\frac{32V}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)\right)^2 dx$$

$$K(t) = \frac{512V^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)}{(2n-1)^6}\int_0^L \sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)dx$$

$$K(t) = \frac{512V^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)}{(2n-1)^6}\frac{L}{2}$$

Finalmente tendremos la energía cinética:

$$K(t) = \frac{256LV^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

Ahora para la energía potencial tenemos:

$$V(t) = \frac{T}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Tomando la derivada con respecto a x de nuestra solución:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{32V}{\pi^3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

Reemplazando en la integral:

$$V(t) = \frac{T}{2}\int_0^L \left(\frac{32V}{\pi^3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)\right)^2 dx$$

$$V(t) = \frac{512V^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)}{(2n-1)^6}\int_0^L \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)dx$$

$$V(t) = \frac{512V^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)}{(2n-1)^6}\frac{L}{2}$$

Reordenando, tendremos que la energía potencial:

$$V(t) = \frac{256LV^2\mu}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi t}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$$

2)

a)

Tenemos que para pequeñas oscilaciones podemos aproximar la tensión como la diferencia en un área infinitesimalmente pequeña:

$$T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x}\right) \approx T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Por segunda ley de Newton:

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\mu\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\frac{\partial y}{\partial t}$$

Si sabemos que $T = \mu c^2$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\frac{\partial y}{\partial t}$$

Reordenando obtenemos:

$$c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ahora, si tenemos las siguientes condiciones inciales:

$$y(x,0) = A\sin(\pi x/L)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

Proponemos una solución de la forma:

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

Reemplazando en la ecuación encontrada:

$$c^2 T X'' = X T'' + 2kXT'$$

Multiplicando por $1/XT$

$$c^2\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} + 2k\frac{T'}{T}$$

De donde podemos concluir que:

$$\begin{cases} c^2\frac{X''}{X} = -\lambda \\ \frac{T''}{T} + 2k\frac{T'}{T} = -\lambda \end{cases}$$

Con:

$$\lambda = \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2$$

Para la ecuación espacial:

$$X'' + \frac{\lambda}{c^2}X = 0$$

La cual tiene solución homogénea de la forma:

$$X(x) = A\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{c^2}}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{c^2}}x\right)$$

Si tenemos: $X(0) = 0 \to B \equiv 0$ Finalmente tendremos:

$$X(x) = A\sin\left(\pi x/L\right)$$

Ahora para la ecuación temporal:

$$T'' + 2kT' + k^2 T = 0$$

La cual tiene solución de la forma:
$$T(t) = e^{-kt}(At + b)$$
Tomando su derivada
$$\frac{dT}{dt} = A(e^{-kt} - kte^{-kt}) - kBe^{-kt}$$
Evaluando en $t = 0$
$$A - kB = 0 \rightarrow A = kB$$
Reemplazando
$$T(t) = Be^{-kt}(kt + 1)$$
Ahora combinando todo en la soluciíon general, tendremos:
$$y_h(x,t) = A\sin(\pi x/L)\, e^{-kt}(kt + 1)$$

b)

Reescribiendo la ecuación de movimiento ahora con una fuerza externa:
$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\mu\frac{\partial y}{\partial t} + F_0\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{F_0}{\mu}\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)$$
$$\ddot{y} + 2k\dot{y} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{F_0}{\mu}\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)$$
Para este tipo de ecuación diferencial, proponemos solución de la forma:
$$y_p(x,t) = B\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L) = B\sin(kx/c)\cos(kt)$$
Calculando sus derivadas:
$$\dot{y_p} = -Bk\sin(kx/c)\sin(kt)$$
$$\ddot{y_p} = -Bk^2\sin(kx/c)\cos(kt)$$
$$\frac{\partial y_p}{\partial x} = -\frac{Bk}{c}\cos(kx/c)\cos(kt) \rightarrow \frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2} = -\frac{Bk^2}{c^2}\sin(kx/c)\cos(kt)$$
Reemplazando en la ecuación diferencial:
$$-Bk^2\sin(kx/c)\cos(kt) - 2Bk^2\sin(kx/c)\sin(kt) + Bk^2\sin(kx/c)\cos(kt) = \frac{F_0}{\mu}\sin(kx/c)\cos(kt)$$
$$-2Bk^2\sin(kt) = \frac{F_0}{\mu}\cos(kt)$$
Para que esta igualdad se cumpla:
$$-2Bk^2 = \frac{F_0}{\mu} \rightarrow B = -\frac{F_0}{2\mu k^2}$$
Reemplazando k:
$$B = -\frac{F_0 L^2}{2\pi^2 c^2\mu}$$
Por lo tanto tendremos que, la solución particular:
$$y_p(x,t) = -\frac{F_0 L^2}{2\pi^2 c^2\mu}\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)$$
Ahora combinando todo en la solución general:
$$y(x,t) = \sin(\pi x/L)\left[Ae^{-\frac{\pi ct}{L}}\left(\frac{\pi ct}{L} + 1\right) - \frac{F_0 L^2}{2\pi^2 c^2\mu}\cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right)\right]$$

3)

a)

Si tenemos una masa M ubicada en $x=0$, haciendo segunda Ley de Newton:

$$F_N = M\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0}$$

En la fuerza neta actúa una tnesión que podemos expresarla como la diferencia de sus componentes verticales en ambos lados de la masa.

$$F_N = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} - T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-}\right]$$

Reemplazando obtenemos:

$$T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-}\right] = M\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0}$$

Reordenando obtenemos:

$$\frac{M}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-}$$

b)

Si tenemos:

$$\phi_I = A_I exp[i\omega(t - x/c)]$$
$$\phi_R = A_R exp[i\omega(t + x/c)]$$
$$\phi_T = A_T exp[i\omega(t - x/c)]$$

Tendremos que la condición de continuidad:

$$\phi_I(0,t) + \phi_R(0,t) = \phi_T(0,t)$$

Evaluando en 0 las expresiones y reemplazando en la condición tendremos:

$$A_I e^{i\omega t} + A_R e^{i\omega t} = A_T e^{i\omega t}$$

Por lo que tendremos:

$$A_I + A_R = A_T$$

Utilizando la ecuación:

$$\frac{M}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-}$$

Tendremos:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} = \frac{i\omega}{c} A_T e^{i\omega t}$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-} = \frac{i\omega}{c}(A_I e^{i\omega t} - A_R e^{i\omega t})$$
$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = -A_I\omega^2 e^{i\omega t} - A_R\omega^2 e^{i\omega t}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$\frac{M}{T}\left(-A_I\omega^2 e^{i\omega t} - A_R\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \frac{i\omega}{c} A_T e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{c}(A_I e^{i\omega t} - A_R e^{i\omega t})$$

$$-\frac{M}{T}(A_I\omega + A_R\omega) = \frac{iA_T}{c} - \frac{i}{c}(A_I - A_R)$$
$$\lambda(A_I + A_R) = i(A_I - A_R - A_T)$$

Utilizando la relación: $A_I + A_R = A_T$

$$\lambda(A_I + A_R) = -2iA_R$$

Despejando para A_R tendremos:

$$A_R = -\frac{\lambda}{(\lambda + 2i)}A_I$$

Reemplazando en la relación usada anteriormente tendremos que A_T:

$$A_T = \frac{2i}{\lambda + 2i}A_I$$

$\lambda >> 1$

$$A_R = -\frac{1}{(1+\frac{2i}{\lambda})}A_I \approx -A_I(1 - \frac{2i}{\lambda} + ...) \to A_R \approx -A_I$$
$$A_T = \frac{2i}{\lambda(1+\frac{2i}{\lambda})}A_I \approx \frac{2i}{\lambda}A_I\left(1 - \frac{2i}{\lambda} + ...\right) \to A_T \approx 0$$

$\lambda << 1$

$$A_R = -\frac{\lambda}{2i(1+\frac{\lambda}{2i})}A_I \approx -\frac{\lambda}{2i}\left(1 - \frac{\lambda}{2i} + ...\right) \to A_R \approx 0$$
$$A_T = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{2i}}A_I \approx A_I\left(1 - \frac{\lambda}{2i} + ...\right) \to A_R \approx A_I$$

4)

Tenemos solución de la forma:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]$$

Usando $y(x,0) = 0$ llegamos a que $A_n \equiv 0$, quedándonos:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Para calcular el coeficiente B_n usaremos:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)g(x)dx$$

Para nuestro caso:

$$g(x) = \lambda\delta(x - L/2)$$

Reemplazando:

$$B_n = \frac{2\lambda}{n\pi c}\int_0^L \delta(x - L/2)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$B_n = \frac{2\lambda}{n\pi c}\sin(n\pi/2)$$

En donde tendremos:

$$\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n = 1, 3, 5, ... \\ 0 & \text{si } n = 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

Esto es debido a que el signo va alternando entre $1, 0$ y -1 ciclícamente. Por lo que definiremos la nueva variable.

$$n = 2k + 1$$

$$k = (n-1)/2$$

Donde $k = 0, 1, 2, 3, ...$ Finalmente quedándonos el coeficiente de la forma:

$$B_{2k+1} = \frac{2\lambda}{(2k+1)\pi c}(-1)^k$$

Reemplazando en la solución:

$$y(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\lambda}{(2k+1)\pi c}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi x}{L}(2k+1)\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{L}(2k+1)\right)$$