Métodos Matemáticos de la Física II: Tarea 9

Mauro Jélvez Jélvez

12/07/2024

1)

Para $x \not\equiv \xi$

$$\frac{d^2G}{dx} - \lambda^2 G = 0 \rightarrow G'' = \lambda G$$

Nos lleva ala solución:

$$G(x,\xi) = A(\xi)e^{\lambda x} + B(\xi)e^{-\lambda x}$$

Aplicando la condición: $G(0,\xi) = 0$

$$A(\xi) + B(\xi) = 0 \rightarrow B(\xi) = -A(\xi)$$

Reemplazando;

$$G(x,\xi) = A(\xi)[e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}]$$

Usando el identidad de seno hiperbólico nos queda:

$$G(x,\xi) = 2A(\xi)\sinh(\lambda x)$$

Sabemos que en $x = \xi$ es discontinua:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 2A_1(\xi)\sinh(\lambda x)\ ,\ 0 \leq x < \xi \\ 2A_2(\xi)\sinh(\lambda[1-x])\ ,\ \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

Para encontrar las constantes $A_1(\xi)$ y $A_2(\xi)$ usamos:

$$A_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

$$A_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

Con $p(x) = 1$, $W = y_1y_2' - y_2y_1'$, $y_1 = 2\sinh(\lambda x)$ y $y_2 = 2\sinh(\lambda[1-x])$ .Para el wronksiano, calculamos las derivadas de las funciones:

$$y_1' = 2\cosh \lambda x$$

$$y_2' = -2\lambda\cosh(\lambda[1-x])$$

Reemplazando tenemos:

$$W = (2\sinh(\lambda x))(-2\lambda\cosh(\lambda[1-x])) - (2\sinh(\lambda[1-x]))(2\cosh \lambda x)$$

$$W = -4\lambda[\sinh(\lambda x)\cosh(\lambda[1-x]) + \cosh(\lambda x)\sinh(\lambda[1-x])]$$

Tenemos que:

$$\sinh(\lambda x)\cosh(\lambda[1-x]) + \cosh(\lambda x)\sinh(\lambda[1-x])$$

$$= \sinh(\lambda\xi)\cosh(\lambda\xi)\cosh(\lambda) - \sinh^2(\lambda\xi)\sinh(\lambda) + \sinh(\lambda)\cosh^2(\lambda\xi) - \sinh(\lambda\xi)\cosh(\lambda)\cosh(\lambda\xi)$$

$$= \sinh(\lambda)(\cosh^2(\lambda\xi) - \sinh^2(\lambda\xi)) = \sinh(\lambda)$$

Por lo que el wronksiano:

$$W = -4\lambda\sinh\lambda$$

Reemplazando en los coeficientes:

$$A_1(\xi) = -\frac{2\sinh(\lambda[1-\xi])}{4\lambda\sinh\lambda} \to A_1(\xi) = -\frac{\sinh(\lambda[1-\xi])}{2\lambda\sinh\lambda}$$

$$A_2(\xi) = -\frac{2\sinh(\lambda\xi)}{4\lambda\sinh\lambda} \to A_2(\xi) = -\frac{\sinh(\lambda\xi)}{2\lambda\sinh\lambda}$$

Por lo que la función de Green tendrá la forma:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{\sinh(\lambda x)\sinh(\lambda[1-\xi])}{\lambda\sinh\lambda} & ,\ 0 \leq x < \xi \\ -\frac{\sinh(\lambda\xi)\sinh(\lambda[1-x])}{\lambda\sinh\lambda} & ,\ \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

Quedándonos la solución:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda\sinh\lambda}\left[\sinh\lambda x\int_0^x \sinh(\lambda[1-\xi])f(\xi)d\xi + \sinh(\lambda[1-x])\int_x^1 \sinh(\lambda\xi)f(\xi)d\xi\right]$$

2)

Si tenemos:

$$\mathcal{L}y = -\frac{1}{x^2}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y$$

Para la homogénea tendremos:

$$-\frac{1}{x^2}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y = 0 \to x^2 y = \left(x^2\frac{dy}{dx}\right) \to x^2 y = 2xy' + x^2 y''$$

$$x^2 y'' + 2xy' - x^2 y = 0$$

Usando $y = z/x$, sus derivadas serán:

$$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$$

$$y'' = \frac{z''}{x} - \frac{z'}{x^2} - \frac{z'}{x^2} + \frac{2z}{x^3}$$

Reempazando:

$$x^2\left(\frac{z''}{x} - \frac{z'}{x^2} - \frac{z'}{x^2} + \frac{2z}{x^3}\right) + 2x\left(\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}\right) - x^2\frac{z}{x} = 0$$

$$xz'' - 2z' + \frac{2z}{x} + 2z' - \frac{2z}{x} - xz = 0 \to z'' = z$$

Tenemos solución de la forma:

$$z(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

Y para la función que buscamos:

$$y(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x}$$

$x \to 0$

Las exponenciales tienden a uno:

$$y(x) = \frac{A+B}{x}$$

Y para este caso, la función tiende a 0, pero al ser acotada tendremos:

$$A + B = 0 \to B = -A$$

Reemplazando:

$$y(x) = \frac{A(e^x - e^{-x})}{x} \to y_1(x) = \frac{2A\sinh x}{x}$$

$x \to \infty$

$$y(x) = \frac{Ae^x}{x} + \frac{Be^{-x}}{x}$$

Para este caso, el primer término tiende a infinito y el segundo a 0, pero al ser acotada tendremos:

$$y_2(x) = \frac{Be^{-x}}{x}$$

Obteniendo la ecuación homogénea de la función de Green para este operador tenemos:

$$G(x,a) = \begin{cases} \frac{2A(a)\sinh x}{x} & , x < a \\ \frac{B(a)e^{-x}}{x} & , x > a \end{cases}$$

Si sabemos que $p(x) = x^2$ y para el wronksiano calcularemos las derivadas:

$$y_1 = \frac{2\sinh x}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \to y_1' = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$y_2' = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}$$

Reemplazando en el wronksiano:

$$W = (\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x})(-\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}) - (\frac{e^{-x}}{x})(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}) = -\frac{2}{x^2}$$

Reemplazando para los coeficientes:

$$A(a) = -\frac{e^{-a}a^2}{a2a^2} \to A(a) = -\frac{e^{-a}}{2a}$$

$$B(a) = -\frac{2\sinh(a)a^2}{a2a^2} \to B(a) = -\frac{\sinh a}{a}$$

Reemplazando para la función de Green:

$$G(x,a) = \begin{cases} -\frac{2\sinh x}{x}\frac{e^{-a}}{2a} & , x < a \\ -\frac{e^{-x}}{x}\frac{\sinh a}{a} & , x > a \end{cases}$$

Y finalmente tendremos:

$$G(x,a) = \begin{cases} -\frac{e^{-a}\sinh x}{ax} & , x < a \\ -\frac{e^{-x}\sinh a}{ax} & , x > a \end{cases}$$