Extremos de funciones

Definición

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; U abierto y $x_0 \in U$.

i) Un punto $f(x_0)$ se llama máximo local o relativo de f si y sólo si $f(x_0) \geq f(x)$; $\forall x \in B(x_0, \delta) \subseteq U$

ii) Un punto $f(x_0)$ se llama mínimo local o relativo de f si y sólo si $f(x_0) \leq f(x)$; $\forall x \in B(x_0, \delta) \subseteq U$

iii) Un punto $f(x_0)$ se llama máximo absoluto o global de f si y sólo si $f(x_0) \geq f(x)$; $\forall x \in U$

iv) Un punto $f(x_0)$ se llama mínimo absoluto o global de f si y sólo si $f(x_0) \leq f(x)$; $\forall x \in U$

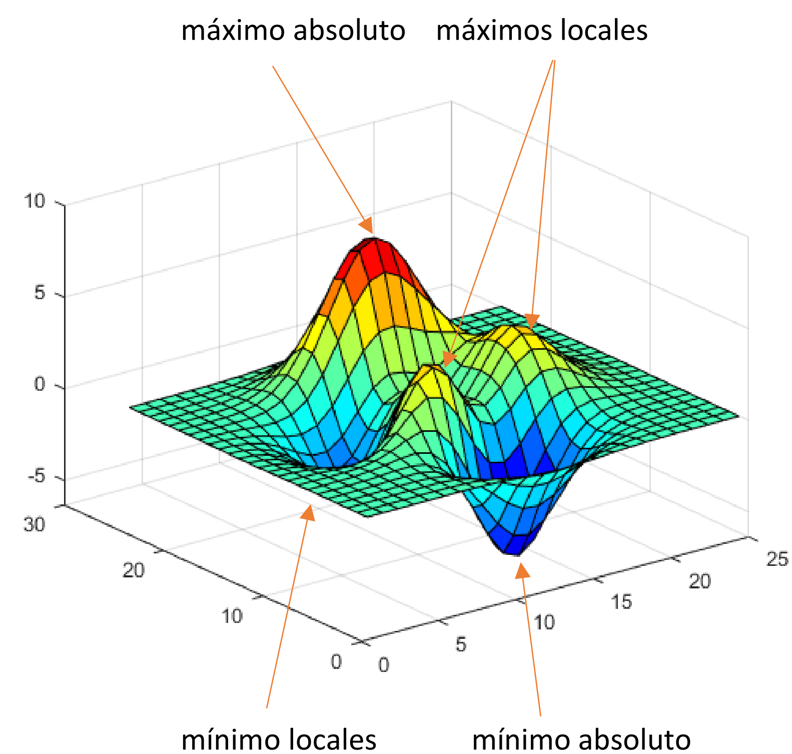


Figura 1

Observación

Sea f una función continua de dos variables x e y, definida en una región acotada y cerrada U del plan XY, entonces existe al menos un punto en U donde f toma su máximo valor y existe un punto donde f toma su mínimo valor.

Proposición

Si una función $z = f(x, y)$ es continua y definida en una región cerrada y acotada, que tiene extremo local en (x_0, y_0) y es diferenciable en dicho puntos entonces

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

Demostración

Supongamos que f posee un extremo en el punto (x_0, y_0) y es diferenciable en (x_0, y_0) . Sea el plano $y = y_0$ que corta a la superficie $f(x, y)$, entonces la función de una variable (curva) $h(x) = f(x, y_0)$ determinada por el plano y la superficie posee un extremo local en el punto $x = x_0$; por tanto $h'(x_0) = 0$. Teniendo en cuenta que $f_x(x_0, y_0) = h'(x_0)$ entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$. Análogamente si se considera el plano $x = x_0$ que determina la función de una variable (curva) $h(y) = f(x_0, y)$. La misma posee extremo en $y = y_0$; y, por tanto, la derivada $f_y(x_0, y_0)$ es nula.

Observaciones

1.- Nótese que si las derivadas parciales son nulas en (x_0, y_0), la superficie admite plano tangente en (x_0, y_0) (ver figura 2).

En efecto , sea $z = f(x, y)$ entonces sea

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 \text{ una superficie.}$$

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Puesto que $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ entonces $F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$, luego

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Ahora

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y) - 0 = f_x(x, y)$$

$$\Rightarrow F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0) = 0 \ (Por\ hipótesis)$$

$$F_y(x, y, z) = f_y(x, y) - 0 = f_y(x, y)$$

$$\Rightarrow F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \ (Por\ hipótesis)$$

Luego se deduce que $0 + 0 - (z - z_0) = 0$

$$z = z_0 \ (\text{plano tangente a la superficie})$$

En la figura 2 se muestra que el plano tangente de una función de dos variables en una extremo local de f es horizontal

Plano tangente

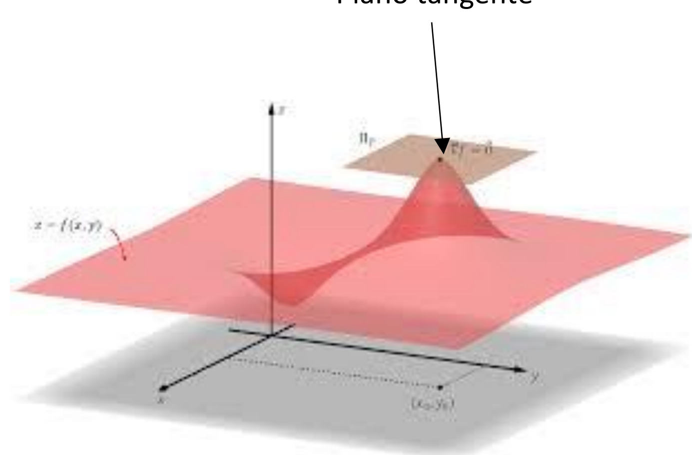


Figura 2

En general, el plano tangente a la gráfica de una función diferenciable $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene como ecuación a **:** $\boldsymbol{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$

2.- También puede haber extremos locales en los puntos donde no existen las derivadas parciales, alguna de ellas o ambas, o también en los puntos frontera de la región del dominio de la función.

Definición de puntos críticos

Sea $z = f(x,y)$ función. El punto $c = (x_0, y_0)$ es un punto crítico de f si $c \in Domf$ y si $f_x(c) = f_y(c) = 0$ o bien uno de ellos o ambos no existen.

Ejemplo 1

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. Determine valores extremos.

Solución

$$f_x = 2x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0,0)$ es el único punto crítico de f. Pero $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

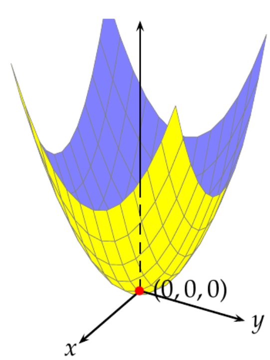


Figura 3

Entonces

$$f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$$

Por tanto, $f(0,0) = 0$ es mínimo local de f y como es el único este es además absoluto o global (ver figura 3)

Ejemplo 2

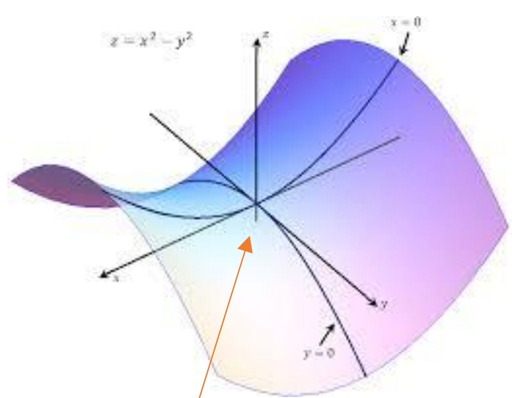
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = x^2 - y^2$. Determine valores extremos (ver figura 4).

Solución

$$f_x = 2x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0,0)$ es el único punto crítico de la función f.



No es ni máximo ni mínimo

Figura 4

Tomemos un punto cercano al origen sobre el eje X,

$$x = (h,0) \;\Rightarrow f(h,0) = h^2 - 0^2 = h^2 > 0$$

Tomemos un punto cercano al origen sobre el eje Y,

$$y = (0,k) \Rightarrow f(0,k) = 0^2 - k^2 = -k^2 < 0$$

Por tanto

$$-k^2 = f(0,k) < f(0,0) = 0 < f(h,0) = h^2$$

Por tanto

$$f(0,0) = 0 \text{ no es máximo ni mínimo}$$

Ejemplo 3

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Determine valores extremos (ver figura 5).

Solución

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \ \leq 4\}$$

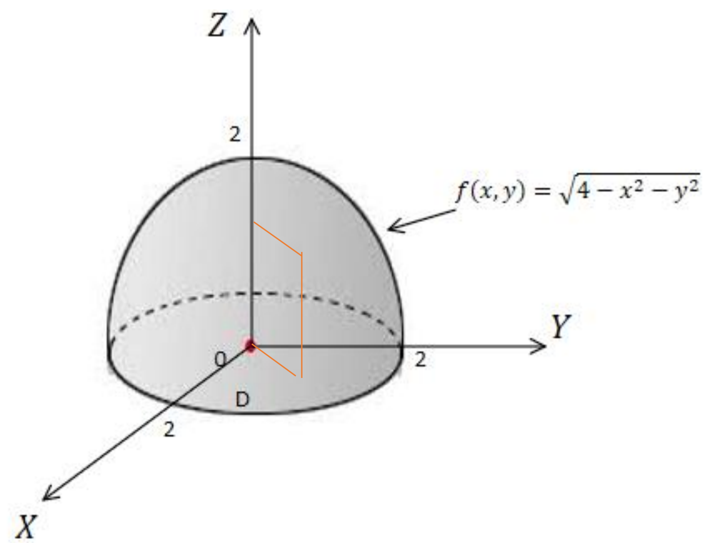


Figura 5

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f_y = \frac{-2y}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Por tanto $(0,0)$ es punto crítico de f, $f(0,0) = \sqrt{4} = 2$. Ahora bien, para

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Luego en la frontera del dominio,

$z = f(x_0, y_0) = \sqrt{4 - 4} = 0$ es mínimo pues ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 4$

Por tanto $f(0,0) = 2$ es máximo absoluto de f ; $\forall (x_0, y_0) \in D$.

Definición de punto silla

La función $z = f(x, y)$ posee un punto silla P en la superficie que representa, si en cualquier vecindad de centro (x_0, y_0) y radio δ, si existen puntos del dominio que cumplen

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{ y } f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

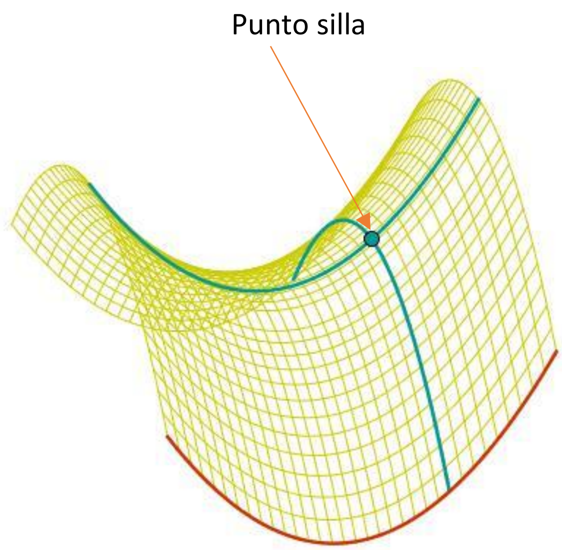


Figura 6

Ejemplo 4

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine valores extremos (ver figura 7).

Solución

$$f_x = -2x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0{,}0)$ es el único punto crítico de la función f.

La siguiente figura muestra la superficie dada por la función $f(x, y) = y^2 - x^2$, se observa que en $(0{,}0)$ no hay extremo si no un punto silla (ver ejemplo 2).

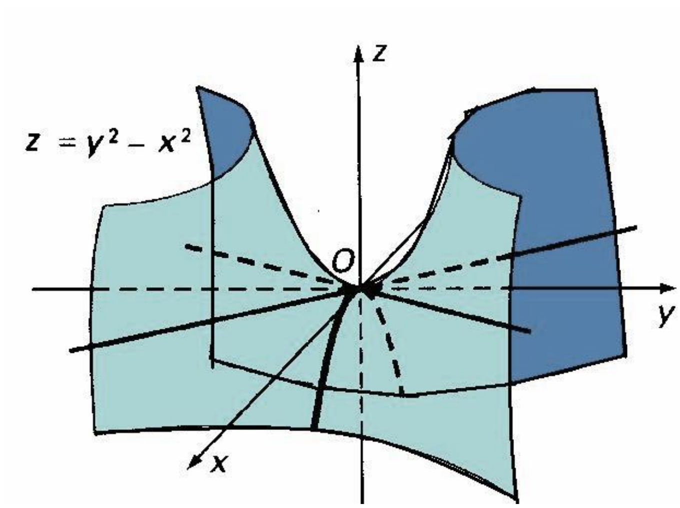


Figura 7

Condiciones suficiente para la existencia de extremos locales

La prueba de la derivada de segundo orden proporciona una condición suficiente para determinar dichos extremos; pero antes de enunciarla, es necesario definir una determinante, llamado HESSIANO.

Definición

Sea $z = f(x, y)$ una función que admite derivadas de segundo orden continuas; llamamos hessiano de la función en el punto (x_0, y_0) simbolizado por $H(x_0, y_0)$, al determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Observe que $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ por la continuidad de las derivadas de segundo orden.

Criterio que entrega las condiciones suficiente para la existencia de extremos locales

Sea $z = f(x, y)$ una función que admite derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en una vecindad $B\big((x_0, y_0), \delta\big)$ y donde $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$. Si:

- i) $H(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ $\big(\therefore f_{yy}(x_0, y_0) < 0\big)$ entonces f presenta un máximo local en $f(x_0, y_0)$.
- ii) $H(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ $\big(\therefore f_{yy}(x_0, y_0) < 0\big)$ entonces f presenta un mínimo local en $f(x_0, y_0)$.
- iii) $H(x_0, y_0) < 0$ entonces f presenta un punto silla en $f(x_0, y_0)$.
- iv) $H(x_0, y_0) = 0$ nada puede afirmarse sobre la existencia de extremos o puntos sillas (puede ser punto máximo, mínimo o punto silla)

Ejemplo 4

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Determine valores extremos (ver figura 8).

Solución

$$f_x = 4x = 0 \;\Rightarrow f_{xx} = 4$$

$$f_y = 2y = 0 \Rightarrow f_{yy} = 2$$

entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0,0)$ es el único punto crítico de la función f.

Calculemos ahora el Hessiano de la función f:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Y como $f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow$ la función f presenta un mínimo local (absoluto) en $f(0,0) = 0$.

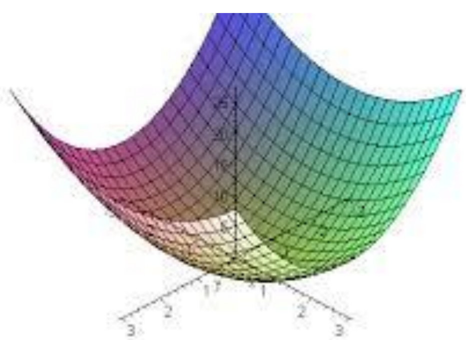


Figura 8

Ejemplo 5

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = -2x^2 - y^2$. Determine valores extremos (ver figura 9).

Solución

$$f_x = -4x = 0$$

$$f_y = -2y = 0$$

entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0,0)$ es el único punto crítico de la función f.

Calculemos ahora el Hessiano de la función f:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Y como $f_{xx}(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la función f presenta un máximo local (absoluto) en $f(0,0) = 0$.

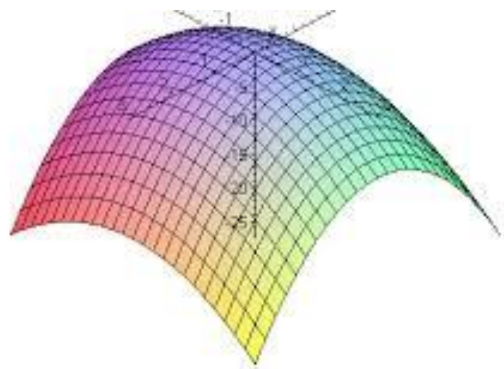


Figura 9

Ejemplo 6

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = y^2 - x^2$. Determine valores extremos y puntos sillas si existen.

Solución

$$f_x = -2x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

Entonces $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(0,0)$ es el único punto crítico de la función f.

Calculemos ahora el Hessiano de la función f:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y)=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow H(0,0)=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4<0$$

la función f presenta un punto silla en $f(0,0)=0$, no existen puntos extremos (ver figura 7).

Ejemplo 7

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-9x-12y$. Determine valores extremos y puntos sillas si existen.

Solución

Dado que $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-9x-12y$, entonces

$$f_x=3x^2+6x-9=0 \cdots (1)$$

$$f_y=3y^2-12=0 \cdots (2)$$

Entonces en(1) $3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$ lo que implica que $x_1=1$ y $x_2=-3$.

En $(2) \Leftrightarrow 3y^2-12=0 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y_1=-2$ y $y_2=2$

Luego existen los siguientes puntos críticos

$$(1,-2),(-3,-2),(1,2) \text{ y } (-3,2)$$

Además

$$f_{xx}=6x+6$$

$$f_{yy}=6y$$

$$f_{xy}=0$$

Entonces el Hessiano de la función f es

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y)=\begin{vmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}=36y(x+1)$$

y considerando los puntos críticos, resulta

$$H(1,-2)=36(-2)(1+1)=36(-4)=-144<0$$

luego la función f presenta un punto silla en $f(1,-2)$

$$H(-3,-2)=36(-2)(-3+1)=36(4)=144>0$$

Y como

$$f_{xx}(-3,-2)=6(-3)+6=-12<0$$

entonces la función f presenta un máximo local en $f(-3,-2)$.

Para $(1,2)$

$$H(1,2)=36(2)(1+1)=36(4)=144>0$$

y como

$$f_{xx}(1,2)=6(1)+6=12>0$$

entonces la función f presenta un mínimo local en $f(1,2)$

Para $(-3,2)$

$$H(-3,2)=36(2)(-3+1)=36(-4)=-144<0$$

luego la función f presenta un punto silla en $f(-3,2)$.

Ejemplo 8

Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=2x^3+6y^2x-6y^2-6x^2+5$$

Solución

Sea $f(x,y)=2x^3+6y^2x-6y^2-6x^2+5 \ \Rightarrow$

$$f_x = 6x^2 + 6y^2 - 12x = 0$$

$$f_y = 12yx - 12y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$y(x - 1) = 0$$

Por tanto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

entonces

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Puntos críticos $(0,0)$ y $(2,0)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

entonces

$$1 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = -1 \vee y = 1$$

Puntos críticos $(1, -1)$ y $(1,1)$

Ahora

$$\boxed{\begin{gathered} f_x = 6x^2 + 6y^2 - 12x = 0 \\ f_y = 12yx - 12y = 0 \end{gathered}}$$

$$f_{xx} = 12x - 12$$

$$f_{yy} = 12x - 12$$

$$f_{xy} = 12y$$

Entonces

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x - 12 & 12y \\ 12y & 12x - 12 \end{vmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0 \wedge \;\; f_{xx}(0,0) = -12 < 0$$

$$\Rightarrow f(0,0)\; máximo\ local\ (absoluto)$$

$$H(2,0) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0 \wedge \;\; f_{xx}(2,0) = 12 > 0$$

$$\Rightarrow f(2,0)\; mínimo\ local\ (absoluto)$$

$$H(1,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0 \;\Rightarrow f(1,-1)\; punto\ silla$$

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0 \;\Rightarrow f(1,1)\; punto\ silla$$

Generalización del criterio para determinar extremos locales

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función que admite derivadas parciales de orden 2 y además son continuas en un conjunto abierto U, y sea $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$ luego el Hessiano $H(x)$ es definido como:

$$H(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x) \end{vmatrix}$$

$col\ fila$

O bien para $x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$H(x) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) & \cdots & f_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{vmatrix}$$

$$fila\ col$$

Sea x_0 un punto crítico de f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

Si $H(x_0) > 0\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x_0) > 0$, entonces f presenta un mínimo local en $f(x_0)$.

Si $H(x_0) > 0\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo local en $f(x_0)$.

Si $H(x_0) < 0$ *entonces* f presenta un punto silla en $f(x_0)$

Si $H(x_0) = 0$ no hay información.

Ejemplo 9

Determinar los valores extremos para la función

$$f(x, y, z) = x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$$

Solución

El Hessiano a considerar es

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

donde $\boxed{f(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2}$

$$f_x = 2x \;\Rightarrow\; f_x = 0 \text{ si } x = 0$$

$$f_y = 2(y-3) \;\Rightarrow\; f_y = 0 \text{ si } y = 3$$

$$f_z = 2(z+1) \;\Rightarrow\; f_z = 0 \text{ si } z = -1$$

entonces $(0,3,-1)$ es el punto crítico.

Observe que $f(0,3,-1) = 0$ y $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$,

$$f(0,3,-1) = 0 \leq x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = f(x,y,z)$$

Por tanto,

f presenta un punto mínimo absoluto en $f(0,3,-1)$

Otra forma, aplicando el criterio

Dado que: $f_x = 2x$; $f_y = 2(y-3)$; $f_z = 2(z+1) \;\Rightarrow$

$$f_{xx} = 2 \,,\, f_{xy} = 0 \,;\, f_{xz} = 0$$

$$f_{yy} = 2 \,,\, f_{yx} = 0 \,;\, f_{yz} = 0$$

$$f_{zz} = 2 \,,\, f_{zx} = 0 \,;\, f_{zy} = 0$$

$$\text{Luego } H(0,3,-1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ y } f_{xx}(0,3,-1) = 2 > 0$$

Por tanto,

f presenta un punto mínimo absoluto en $f(0,3,-1)$

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas.

Si $z = f(x,y)$ es una función continua en una región cerrada y acotada en el plano XY, entonces la función posee extremos absolutos, esto es un máximo y un mínimo absoluto.

Los extremos pueden ocurrir:

1.-en los puntos críticos de la función, es decir en los puntos donde $f_x = f_y = 0$ o bien en los que no existen f_x o f_y .

2.- en los puntos frontera del dominio.

Ejemplo

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = 9 - x + 12y - x^2 - 3y^2$$

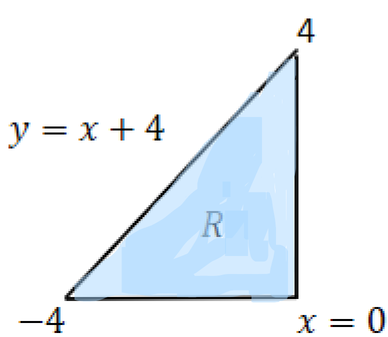
definida en la región del plano XY limitado por las rectas

$$y = 0\,; x = 0\,;\ -\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

Solución

$$-\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow y = x + 4$$

Luego la región R del plano XY limitado por las rectas $y = 0\,; x = 0$ y $y = x + 4$ es un triángulo como se muestra en la siguiente figura,



Analizaremos primero los posible extremos de la función en los puntos críticos de f dentro de la región R, en efecto

$$f_x(x,y) = -1 - 2x = 0 \;\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = 12 - 6y = 0 \;\Rightarrow y = 2$$

Luego el punto crítico es $\boxed{f(x,y) = 9 - x + 12y - x^2 - 3y^2}$

$$\left(-\frac{1}{2}, 2\right) \in R \text{ entonces } f\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{85}{4}$$

Consideremos ahora los puntos frontera del triángulo

i) En la recta $y = 0$

$$f(x,0) = 9 - x - x^2 \,;\, x \in [-4,0]$$

Los valores extremos pueden darse en los extremos del intervalo:

$$x = -4 \,;\, x = 0 \text{ tales que}$$

$$f(-4,0) = 9 + 4 - 16 = -3$$

$$f(0,0) = 9 - 0 - 0^2 = 9$$

Y en los puntos interiores del intervalo $]-4,0[$ entonces

$$f'(x,0) = -1 - 2x = 0 \;\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Luego $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{37}{4}$

ii) En la recta $x = 0$, resulta

$$f(0,y) = 9 + 12y - 3y^2 \,;\, y \in [0,4]$$

Los extremos pueden ocurrir en $y = 0$; en $y = 4$ tales que:

$$f(0,0) = 9 + 12 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 9$$

$$f(0,4) = 9 + 12 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = 9$$

Y en los puntos interiores de $]0,4[$, entonces

$$f'(0,y) = 12 - 6y = 0 \;\Rightarrow y = 2$$

Luego $f(0,2) = 21$

iii) En la recta $y = x + 4$

$$f(x, x+4) = 9 - x + 12(x+4) - x^2 - 3(x+4)^2$$

$$f(x, x+4) = 9 - 13x - 4x^2$$

Como ya se han calculados los posibles extremos en los vértices del triángulo, sólo nos resta averiguar en los puntos interiores del segmento determinado por los puntos $(-4,0)$ y $(0,4)$; en consecuencia

$$f'(x, x+4) = -8x - 13 = 0 \;\; \Rightarrow \; x = -\frac{13}{8}$$

$$\Rightarrow \; f\left(-\frac{13}{8}, \frac{19}{8}\right) = \frac{313}{16}$$

Por lo tanto, los valores extremos obtenidos son:

$$\frac{85}{4}\, , -3\, , 9, \frac{37}{4}\, , 21 \;\text{ y } \; \frac{313}{16}$$

El mayor es $\frac{85}{4}$ y el menor es -3, entonces la función presenta

un máximo absoluto en $f\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{85}{4}$

y un mínimo absoluto en $f(-4,0) = -3$