Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre II 2023

*Nombre:*______________________________________ *RUT:*_______________

Prueba 1: P1:_____ P2:_____ P3:_____ P4:_____ P5:_____ NF:______

1. En cada caso, encuentre todas las raices en coordenadas rectangulares:

   (a) $(-1)^{1/4}$

   Solución: Las raices de números complejos están dadas por

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \tag{1}$$

   En este caso tenemos $r_0 = 1$, $\theta_0 = \pi$. Por lo tanto

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right] \tag{2}$$

   Los valores únicos de k son $k = 0, 1, 2, 3$. Así que las cuatro raices son

$$c_0 = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right], \quad c_1 = \exp\left[i\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right], \quad c_2 = \exp\left[i\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right], \quad c_3 = \exp\left[i\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] \tag{3}$$

   El gráfico de las raices corresponde a un cuadro con vertices en los puntos $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$

   (b) $1^{1/5}$

   Solución: En este caso tenemos $r_0 = 1$, $\theta_0 = 0$. Por lo tanto

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right] \tag{4}$$

   Los valores únicos de k son $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Así que las cuatro raices son

$$c_0 = 1,\ c_1 = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right],\ c_2 = \exp\left[i\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right],\ c_3 = \exp\left[i\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right],\ c_4 = \exp\left[i\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right] \tag{5}$$

   El gráfico de las raices corresponde a un pentágono, con un vertice en $z = 1$, cada vertice en un círculo unitario, con ángulos espaciados por 36 grados.

2. Muestre que $f'(z)$ no existe para $|z| > 0$ si

   (a) $f(z) = z\bar{z}$

   Solución: La derivada $f'(z)$ existe si las derivadas parciales de las funciones componentes existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de CR. En este caso:

   $$f(z) = z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) + i0 \tag{6}$$

   Así que $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$. Las derivadas son $\partial_x u = 2x$, $\partial_y u = 2y$, $\partial_x v = 0$, $\partial_y v = 0$. Las ecuaciones de CR son

   $$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x \tag{7}$$

   Para cualquier punto no igual al origen estas ecuaciones no se cumplen.

   (b) $f(z) = 2x^3 + ixy^2$

   Solución:

   $$f(z) = 2x^3 + ixy^2 \tag{8}$$

   Así que $u(x,y) = 2x^3$, $v(x,y) = xy^2$. Las derivadas son $\partial_x u = 6x^2$, $\partial_y u = 0$, $\partial_x v = y^2$, $\partial_y v = 2xy$. Las ecuaciones de CR son

   $$y = 3x \qquad 0 = -y^2 \tag{9}$$

   Es imposible satisfacer estas ecuaciones en cualquier punto $|z| > 0$.

3. Demuestre que si un conjunto S contiene todos sus puntos de acumulación, tiene que ser un conjunto cerrado.

   Solución: Consideremos un punto de acumulación z_0. Por definición de ser un punto de acumulación, cualquier entorno perforado de z_0 tiene que incluir al menos un punto del conjunto S. Si no existe ningún punto fuera de S en los entornos perforados de z_0, no es un punto frontera. Al contrario, si existe algún punto fuera del conjunto S para cualquier entorno perforado (aparte de posiblemente z_0) z_0 tiene que ser un punto frontera. Por lo tanto un conjunto S que contiene todos sus puntos de acumulación debe contener todos sus puntos frontera, y por lo tanto es un conjunto cerrado.

4. Muestre que

   (a) la función $f(z) = \mathrm{Log}(z-i)$ es analítica en todos puntos excepto en la porción $x \le 0$ de la línea $y = 1$.

   Solución: En clase vimos como definir el logaritmo complejo (principal) usando

   $$\mathrm{Log} z = \ln r + i\Theta \tag{10}$$

   En este caso tenemos $\tilde{z} = z - i$. La función $f(z) = \mathrm{Log}\tilde{z}$ es analítica en todos puntos excepto en el eje real negativo, incluyendo el origen (corte y punto de rama del logaritmo principal). Es decir, no es analítica en los puntos $\tilde{x} \le 0$ con $\tilde{y} = 0$. Transformando a las coordenadas originales:

   $$\tilde{x} + i\tilde{y} = x + iy - i \tag{11}$$

   por lo tanto $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y - 1$. Así que $\tilde{x} \le 0$ es igual a $x \le 0$, y $\tilde{y} = 0$ es equivalente a $y = 1$.

(b) la función

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z+4)}{z^2+i} \tag{12}$$

es analítica en todos puntos excepto en los puntos $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ y en la porción $x \leq -4$ del eje real.

Solución: Hay singularidades donde el denominador es igual a cero. Eso ocurre cuando $z^2 + i = 0$. Entonces tenemos

$$z = (-i)^{1/2} = 1 \exp\left(i\left[-\frac{\theta}{2} + \pi k\right]\right) \tag{13}$$

con $k = 0, 1$. Las dos raices son

$$c_0 = 1 \exp\left(i\left[-\frac{\pi}{4}\right]\right), \quad c_1 = 1 \exp\left(i\left[\frac{3\pi}{4}\right]\right) \tag{14}$$

En notación rectangular $c_0 = (1-i)/\sqrt{2}$, $c_1 = (-1+i)/\sqrt{2}$. Podemos escribir estas dos raices como $\pm(1-i)/\sqrt{2}$. El corte del logaritmo principal es el eje real negativo, con punto de rama en el origen. En el caso de $\mathrm{Log}(z+4)$, el punto de rama está trasladado el punto $x = -4$, así que el corte es $x \leq -4$.

5. Muestre que las raices de la ecuación $\cos z = 2$ son

$$z = 2n\pi + i\cosh^{-1} 2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{15}$$

y las escribe en la forma

$$z = 2n\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{16}$$

Solución: Ya que igualdad entre dos números complejos implica igualdad entre las partes real e imaginaria, tenemos

$$\cos x \cosh y = 2 \qquad \sin x \sinh y = 0 \tag{17}$$

Ya que $y \in \mathbb{R}$, la única raiz de $\sinh y = 0$ es $y = 0$. En este punto $\cosh y = 1$, y $|\cos x| \leq 1$ así que es imposible satisfacer la primera ecuación en este punto, y podemos descartar la posibilidad de tener $y = 0$. Así que la única forma de satisfacer la segunda ecuación es con $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Usando esto en la primera ecuación tenemos $\cos n\pi = 1$ para $n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ y $\cos n\pi = -1$ para $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$. Ya que $\cosh y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ tenemos que elegir $n = 0, \pm 2, \pm 4$ para tener un valor positivo de $\cos x$. Por lo tanto tenemos $x = 2n\pi$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En estos valores $\cos x = 1$, así que la primera ecuación queda

$$\cosh y = 2 \quad (x = 2n\pi), \tag{18}$$

por lo tanto $y = \cosh^{-1} 2$, y tenemos

$$z = 2n\pi + i\cosh^{-1} 2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{19}$$

La definición de $\cosh^{-1} w$ es

$$\cosh^{-1} w = \log\left[w + (w^2-1)^{1/2}\right] \tag{20}$$

En nuestro caso $w = 2$, por lo tanto

$$\cosh^{-1} 2 = \log\left[2 + (2^2-1)^{1/2}\right] = \log(2 \pm \sqrt{3}) \tag{21}$$

Por la definición del logaritmo complejo tenemos

$$\log(2+\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{22}$$

$$\log(2-\sqrt{3}) = \ln(2-\sqrt{3}) + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{23}$$

Notar que en ambos casos el argumento es un multiple de 2π ya que $2 \pm \sqrt{3} > 0$. Para simplificar la expresión escribimos

$$\ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left((2-\sqrt{3}) \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = -\ln(2+\sqrt{3}) \tag{24}$$

Por lo tanto

$$\ln(2 \pm \sqrt{3}) = \pm \ln(2+\sqrt{3}) \tag{25}$$

Volviendo a la expresión para z tenemos

$$z = 2n\pi + i\left(\pm \ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i\right) = 2(n-k)\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3}) \tag{26}$$

Ya que n y k son ambos enteros (independientes) podemos combinar sus valores en un solo parámetro entero para llegar al resultado final.