Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 23

Polinomios

Breve repaso:

<u>Expresiones algebraicas</u>: Expresiones matemáticas donde aparecen números y letras.

<u>Monomios</u>: (las más sencillas) sólo multiplicación (producto) de números y letras)

Ejemplo:

$$\mathbf{2 \times 3 \times a \times b \times b \times b \times c = 6ab^3c}$$

1) Observen que no ponemos más el signo $\times$
2) 6 es el coeficiente, ab^3c es la parte literal.
3) a, b, c variables
4) Ese es un monomio de grado 5 = 1 + 3 + 1 (suma de los exponentes de las variables)

<u>Multiplicación de monomios</u>:

$$(\mathbf{6ab^3c}) \times (\mathbf{3a^2b^2}) = \mathbf{18a^3b^5c}$$

Siempre puedo multiplicar monomios

<u>Suma de monomios</u>: Sólo se pueden sumar si son semejantes (misma parte literal)

$$\mathbf{6ab^3c + 5ab^3c = 11ab^3c}$$

¿Y si no son semejantes? Me queda un <u>polinomio</u>.

<u>Definición:</u> Polinomio, es la suma o resta de monomios cualesquiera.

Ejemplo: $\mathbf{P(x,y,z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2}$

Los términos semejantes se reducen.

$$\mathbf{P(x,y,z) = 2xy - 3xz^2 + 4xy - 5x + 2xz^2}$$

$$\mathbf{P(x,y,z) = 6xy - xz^2 - 5x}$$

Polinomios en una variable x

Sólo tienen una letra, en este caso “x”.

$$\boldsymbol{p(x) = x^3 + 4x^2 - x^3 + 5x - 8 + 7x - 9 - 2x^2}$$

Reducimos términos semejantes:

$$\boldsymbol{p(x) = 2x^2 + 12x - 17}$$

Una vez reducido puede determinar el…

Grado de un polinomio reducido: es el grado del término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de 0.

$$p(x) \text{ es de grado 2, o de segundo grado}$$

Valor numérico de un polinomio:

Tomemos el polinomio anterior y reemplacemos la x por un 3 …

$$\boldsymbol{p(x) = 2x^2 + 12x - 17}$$

$$\boldsymbol{p(3) = 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 17}$$

$$\boldsymbol{p(3) = 37}$$

Decimos que **37 es el valor numérico que toma el polinomio $\boldsymbol{p(x)}$ cuando $\boldsymbol{x = 3}$** y lo simbolizamos **p(3)**

Definición: Un número α es raíz de un polinomio $p(x)$ sí y solo sí $p(\alpha) = 0$

Ejemplo:

$$x = 5 \qquad \text{es raíz de} \qquad p(x) = x^2 + 5x - 50$$

ya que

$$p(5) = 5^2 + 5 \cdot 5 - 50$$

$$p(5) = 0$$

División de polinomios

Definición: Dividir un polinomio $p(x)$ (el dividendo) entre otro polinomio $d(x)$ (el divisor) es hallar dos nuevos polinomios $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (resto) tales que:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Donde el

$$grado\, r(x) \; < \; grado\, q(x)$$

o de lo contrario

$$r(x) \equiv 0 \text{ (el polinomio nulo)}$$

Si estamos en este último caso, decimos que $\boldsymbol{p(x)}$ ***es divisible entre*** $\boldsymbol{d(x)}$ y escribimos …

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Observen que la definición es muy similar a la definición de división en Z (los números enteros).

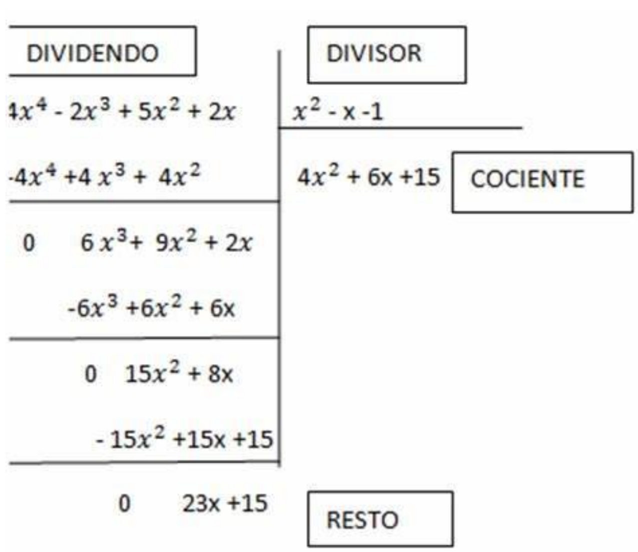
Dividir 33 entre 6 es hallar un cociente (5) y un resto (3) tales que …

$$33 = 6 \cdot 5 + 3$$

Y 30 es divisible entre 5 ya que … $30 = 6 \cdot 5 + 0$

Algoritmo de la división

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
6x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +x & -2 & x^2 & +x & -1 \\ \cline{6-8}
-6x^4 & -6x^3 & +6x^2 & & & 6x^2 & -2x & +10 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +8x^2 & +x & -2 & & & \\
 & +2x^3 & +2x^2 & -2x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 10x^2 & -x & -2 & & & \\
 & & -10x^2 & -10x & +10 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -11x & +8 & & &
\end{array}
$$

Si el resto es $R(x) \equiv 0$ (el polinomio nulo) decimos que $P(x)$ es **divisible** entre el divisor $d(x)$.

División entre $(x - \alpha)$

Cuando el divisor tiene la forma $(x - \alpha)$, esto es …

$$d(x) = x - \alpha$$

nos queda …

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + R$$

Observen que como el divisor es de grado 1, entonces $r(x) = R$ (un polinomio de grado 0, o sea un número real).

Teorema del resto

Enunciado: El resto de dividir un polinomio $p(x)$ entre $(x - \alpha)$ es igual a $p(\alpha)$.

Demostración: Por la definición vista antes, sabemos que …

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + R$$

Reemplazando x por α en la igualdad anterior, obtenemos …

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot q(x) + R$$

$$p(\alpha) = 0 \cdot q(x) + R$$

$$p(\alpha) = 0 + R$$

$$p(\alpha) = R$$

Eso **es lo que queríamos demostrar.**

Teorema del factor

Enunciado:

Un polinomio $p(x)$ tiene raíz $x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad p(x)$es divisible entre $x - \alpha$.

No demostraremos el teorema, pero es importante destacar que es una **Condición necesaria y suficiente**, esto es lo que simboliza la doble flecha. Es decir, se trata en realidad de dos teoremas …

Teorema directo:

$$p(x) \text{ tiene raíz } x = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(x) \text{es divisible entre } x - \alpha$$

Teorema recíproco:

$$p(x) \text{es divisible entre } x - \alpha \quad \Rightarrow \quad p(x) \text{ tiene raíz } \ x = \alpha$$

No todas las condiciones son necesarias y suficientes en álgebra. Basta con considerar el siguiente y sencillo ejemplo.

Llueve $\quad \Rightarrow \quad$ La vereda está mojada

El razonamiento recíproco no se puede realizar.

Esquema de Ruffini de división sintética

Ejemplo 1:

Se tiene $\qquad p(x) = x^4 + mx + n$

Hallar los valores de m y n sabiendo que los restos de dividir $p(x)$ entre $(x - 1)$ y $(x - 2)$ valen respectivamente 9 y 29.

Solución:

Los divisores son $(x - 1)$ y $(x - 2)$, por tanto

$$x - 1 = 0 \ \text{ y } \ x - 2 = 0$$

Encontramos raíces $\qquad x = 1 \ \text{ y } \ x = 2.$

Debemos bajar el polinomio por Ruffini con esos valores:

	1	0	0	m	n
1		1	1	1	m + 1
	1	1	1	m+1	m + n + 1 = 9

	1	0	0	m	n
2		2	4	8	2m + 16
	1	2	4	m+8	2m + n + 16 = 29

Resolvemos el sistema de ecuaciones de los dos restos,

$$\begin{cases} m + n = 8 \\ 2m + n = 13 \end{cases}$$

Encontramos que:

m = 5   y   n = 3

El polinomio buscado es:

$$p(x) = x^4 + 5x + 3$$

Ejemplo 2 de aplicación del esquema de división sintética de Ruffini.

Del polinomio $p(x) = 2x^4 - 22x^3 + 48x^2 + 88x - 224$

se sabe que tiene raíces $x = 2$ y $x = 7$. Hallar las otras raíces del polinomio y factorizarlo.

Solución:

Si tiene raíz 2, el polinomio es divisible entre $x - 2$ (teorema del factor). Por tanto al bajarlo por Ruffini (esquema de división sintética) por 2 deberá dar resto 0.

	2	-22	48	88	-224
2		4	-36	24	224
	2	-18	12	112	0 ←confirmado

Factorizando, $p(x) = (x-2)(2x^3 - 18x^2 + 12x + 112)$

Uno de esos factores deberá tener raíz $x = 7$. Es evidente que el primer factor no es, deberá ser el segundo. Por tanto, el segundo paréntesis es divisible entre $(x-7)$.

	2	-18	12	112
7		14	-28	-112
	2	-4	-16	0 ←confirmado

Por tanto: $p(x) = (x-2)(x-7)(2x^2 - 4x - 16)$

Las otras raíces surgen de resolver la ecuación

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

y son $x = -2$ y $x = 4$. Finalmente, factorizamos el polinomio así (el coeficiente principal de $p(x)$es $A = 2$)

$$p(x) = 2(x-2)(x-7)(x+2)(x-4)$$