Clase nº26

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

29 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular longitud de una curva en coordenadas paramétricas.
- Calcular el área de un sólido de revolución.

Clase pasada

Longitud de la curva

Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, con $t \in [a, b]$, donde f', g' son continuas y no simultaneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C recorre sólo una vez conforme t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Ecuaciones paramétricas

Observaciones

- Pedir que $f'(t)$ y $g'(t)$ no sean simultáneamente iguales evita que la curva C tenga esquinas o picos. Una curva como ésta se denomina curva suave.

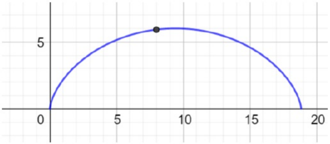
- En un punto donde una curva regresa sobre sí misma, la curva no es derivable, o ambas derivadas deben ser simultáneamente iguales a cero.

Ecuaciones paramétricas

Ejemplo 83

Determine la longitud del arco de la cicloide

$$\begin{cases} x &= 3(\theta - \sin\theta) \\ y &= 3(1 - \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



Sol: tenemos que

$$\frac{dx}{d\theta} = 3(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin\theta.$$

Luego,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[3(1-\cos\theta)\right]^2 + (3\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9(1-2\cos\theta+\cos^2\theta) + 9\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta.$$

Recordar que

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

Consideremos $\alpha = \beta = \frac{\theta}{2}$. Luego

$$\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad /\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \cdot \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{1-\cos\theta} .$$

Ans.

$$L = 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta$$, note, $\theta \in [0,2\pi] \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in [0,\pi]$

$$= 6\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 6\cdot 2\cdot -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -12\left(\cos\pi - \cos(0)\right)$$

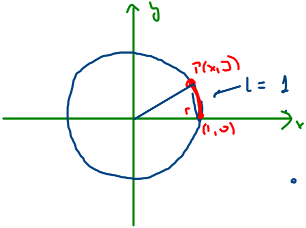
$$= -12(-1-1)$$

$$= 24.$$

Ecuaciones paramétricas

Ejemplo 84

Determine el punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que se encuentra a 1 unidad del punto $(1, 0)$, medida a lo largo de la curva, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.



- Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- $$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

- Punto buscado: $P(\cos b, \sin b)$.

- Encontremos b

$$\int_0^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 1$$

Notar que

$$\int_0^b \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^b 1\, dt$$

$$= t \Big|_0^b$$

$$= b$$

$\therefore$, $b = 1$ y el punto buscado es $(\cos(1), \sin(1))$.

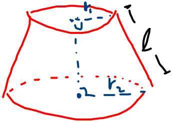
Teorema 34

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no negativa y con primera derivada continua. Entonces el área de la superficie, S_f, que se obtiene al girar f en torno al eje X es

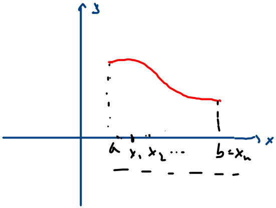
$$A(S_f) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

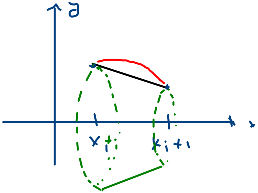
• El área lateral del tronco del cono es

$$A_{LT} = \pi \, \ell \, (r_1 + r_2)$$



Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$.





$$A_{LT}(i) = \pi \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}\,\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)$$

Una aproximación de $A(S_f)$ es

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}\,\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right).$$

Por T.V.M, $\exists\ c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad \text{con} \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Luego,

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 \cdot [f'(c_i)]^2 + (x_{i+1}-x_i)^2}\,\big(f(x_{i+1}) + f(x_i)\big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \pi \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\big(f(x_{i+1}) + f(x_i)\big)(x_{i+1}-x_i)$$

Podemos aproximar $f(c_i)$ con $\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$.

Es decir,

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Si $g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ se tiene que

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} g(c_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Siempre que la norma de la partición tienda a cero cuando $n \to \infty$. se tiene que

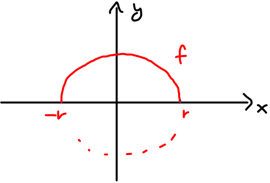
$$A(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \quad \blacksquare$$

Ejemplo 85

Calcular el área de una esfera de radio r.

Sea $\quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-r, r]$

luego $\quad f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$



Así,

$$A(S_f) = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\, dx$$

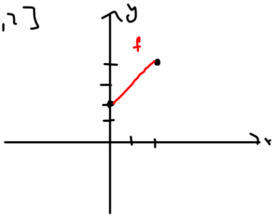
$$= 2\pi r\, x \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r\,(r - (-r))$$

$$= 4\pi r^2.$$

Ejemplo 86

Calcular el área de la superficie que se genera al girar $y = x + 2$, considerando el intervalo $[0, 2]$, en torno al eje X.

Sol: Sea $f(x) = x + 2$, $x \in [0,2]$



$$A(S_f) = 2\pi \int_0^2 (x+2)\sqrt{1+1^2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 x+2 \, dx$$

$$= 12\sqrt{2}\,\pi.$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular el área de la superficie que se genera al girar $y = x^2$, considerando el intervalo $[0, 2]$, en torno al eje X.
2. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \in [0, 3[, \\ (x-6)^2 & \text{Si } x \in [3, 6]. \end{cases}$$
Calcular el área de la superficie que se genera al girar la curva $y = f(x)$ en torno al eje X.
3. Calcular el área de la superficie que se genera al girar $y = x^3$, considerando el intervalo $[-3, -1]$. ¿Qué debería cambiar con respecto a lo que hicimos en clases?
4. Se quiere rotar alrededor del eje X la curva $x = (y-4)^2$, considerando que $x \in [0, 4]$. ¿Cómo utilizarías lo visto en clases para encontrar el área de la superficie generada?

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.