APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial es una ecuación donde la incógnita es una función, más detalladamente una ecuacion dif. es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Si una ecuación contiene solamente derivadas respecto de una sola variable independiente, entonces se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO).

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 6 \quad ; \quad y'' + y' + 5y = e^x$$

Si una ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto de dos o más variables independientes entonces se dice *ecuación en derivadas parciales* (EDP).

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial x} = z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) se refiere a la derivada de mayor orden que interviene en ella.

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ es una EDO de segundo orden

El grado de una ecuación es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella:

$(y'')^3 + (y')^4 + 5y = e^x$ es una EDO de segundo orden y tercer grado.

Observaciones y notaciones:

1. Para $F : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, una EDO de orden n es de la forma:
   $F(x, y, y', ..., y^n) = 0$, donde $y = y(x)$ es una función solunción de la EDO

Ejemplo : $y = y(x) = \frac{1}{x}$ es una solución de la EDO $y' + y^2 = 0$
debido a que: $\left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$

con mayor formalidad, la función $\begin{aligned} \phi:&\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto \phi(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$ es solución de la EDO

2. $y'' + yy' = 2x$; $y = y(x)$
   $y'' + yy' = 2t$; $y = y(t)$
   $\ddot{x} + x\dot{x} = 2t$; $x = x(t)$ notación habitual en Mecánica

3. Se dice que una EDO de la forma:
   $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$
   es *lineal* cuando f es una función lineal de $y, y', ..., y^{(n-1)}$

Lo que implica que la ecuación se puede escribir de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

así:
$y'' + 3y' + y = 3x$ se dice una ecuación lineal a coeficientes constantes
$y'' + 3y' + y = 0$ se dice una ecuación lineal, homogénea a coeficientes constantes
$xy'' + 3x^2y' + e^x y = \frac{1}{x}$ se dice una ecuación lineal a coeficientes variables
$\frac{1}{x}y'' + 3x^2y' + e^x y = 0$ se dice una ec. lineal, homogénea a coeficientes variables
$y'' + 3(y')^2 + y = 3x$ no es una EDO lineal
$y'' + 3y' + ln(y) = 3x$ no es una EDO lineal

4. Para una edo de primer orden y primer grado:
$$y' = f(x, y)$$

   se puede anotar usando diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

   de donde $dy = f(x, y)dx$ y multiplicando por alguna función $g(x, y)$
$$g(x, y)dy = f(x, y)g(x, y)dx$$

o de forma más general:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad para edo de primer orden)

Sean $f(x,y)$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ funciones continuas en un rectángulo R=$[a,b]\times[c,d]$ y $(x_0,y_0)\in R,$ entonces existe un intervalo I centrado en x_0 y una única función $y=\phi(x)$ que satisface el *problema de valor inicial* (PVI):

$$y' = f(x,y)\,;\; y(x_0) = y_0$$

es decir: $(\forall x \in I)(\phi'(x) = f(x,\phi(x)))$ y $\phi(x_0) = y_0$

Ejemplo

La edo $y' = 2x$ tiene la solución general: $y = x^2 + c\,,\; c \in \mathbb{R}$

El PVI , $y' = 2x\;\;; y(1) = 3$ tiene la solución particular: $y' = x^2 + 3$

Observación

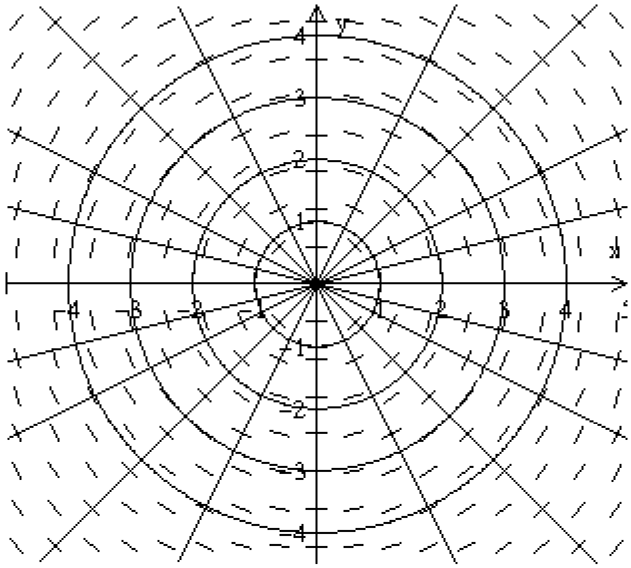
Si $y=\phi(x)$ es la solución de una edo $y' = f(x,y)$ entonces $\phi'(x) = f(x,\phi(x))$ se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=\phi(x)$, de esta forma, $f(x,y)$ permite conocer las pendientes de $y=\phi(x)$ para cada (x,y). Si se traza un segmento de recta de pendiente $m=f(x,y)$ en cada punto (x,y), se obtiene el *campo de dirección* de la edo $y' = f(x,y)$.

Ejemplo

Trazar el campo de dirección de la edo : $y' = -\frac{x}{y}$

Un recurso útil para trazar el campo de dirección es hallar todos los puntos (x,y) donde se tienen la misma pendiente c (*isoclinas*).

$$y' = c$$
$$-\frac{x}{y} = c$$
$$y = -\frac{1}{c}x$$



Se puede conjeturar que las soluciones de la edo son circunferencias concéntricas,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

si derivamos implicitamente respecto de x se tiene:

$$2x + 2yy' = 0$$

es decir: $$y' = -\frac{x}{y}$$

Por tanto la solución general es $x^2 + y^2 = c$, donde las soluciones particulares de la edo son funciones definidas implícitamente por la ecuación algebraica.

VARIABLES SEPARABLES

Si en una EDO de primer orden y primer grado

$$y' = F(x, y)$$

$F(x, y)$ se factoriza como el producto de una función de x por una función de y.

$$F(x, y) = f(x)g(y)$$

se dirá que es de variables separables y se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$, e integrando se obtiene :

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + c$$

Ejemplo

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$ydy = -xdx$$
$$\int ydy = -\int xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

Ejercicio $\quad y' = xe^{2y - x^2}$

Ecuaciones Reducibles a separables

Una ecuación de la forma: $y' = f(ax + by + c)$; $b \neq 0$
es posible de reducirla a variables separables, usando la sustitución

$$u = ax + by + c$$

$$\Rightarrow \quad u' = a + by' \quad \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

reemplazando en la ecuación, se tiene:

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \quad \Rightarrow u' = bf(u) + a$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{du}{bf(u)+a} = \int dx$$

y la solución general es:

$$\int \frac{du}{bf(u)+a} = x + c$$

Ejemplo Resolver $y' = 3 + \sqrt{y - 2x + 3}$

hacemos: $u = y - 2x + 3 \quad \Rightarrow u' = y' - 2 \Rightarrow y' = u' + 2$

entonces, $u' + 2 = 3 + \sqrt{u} \;\Rightarrow u' = 1 + \sqrt{u}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{u'}{1+\sqrt{u}} = 1 \qquad \Rightarrow \int \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \int dx$$

sea $w = 1 + \sqrt{u} \quad \Rightarrow dw = \frac{1}{2\sqrt{u}} du \Rightarrow 2\sqrt{u} dw = du \Rightarrow 2(w-1)dw = du$

$$\int \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \int dx \quad \Leftrightarrow \int \frac{2(w-1)dw}{w} = \int dx$$

$$\Rightarrow 2\int \left(1 - \frac{1}{w}\right) dw = \int dx \;\Rightarrow 2(w - ln(w)) = x + c$$

$$\Rightarrow 2\left(1 + \sqrt{y - 2x + 3} - ln\left(1 + \sqrt{y - 2x + 3}\right)\right) = x + c$$

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una función $F(x, y)$ se dice homogénea de grado n si :
$(\forall k \in \mathbb{R} - \{0\})(F(kx, ky) = k^n F(x, y))$

Proposición

Una función $F(x,y)$ es homogénea de grado 0 si $F(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$
para alguna función de una variable g.

Demostración

Si $F(kx,ky) = F(x,y)$ para todo $k \neq 0$ entonces para $k = \frac{1}{x}$ se tiene que:
$F(x,y) = F\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.
Recíprocamente,
Si $F(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ entonces, $F(kx,ky) = g\left(\frac{ky}{kx}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) = F(x,y)$.

La ecuación $y' = F(x,y)$ se dice homogénea si $F(x,y)$ es homogénea de grado 0

Ejemplo

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Ejemplo

Para $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$, se tiene: $F(kx,ky) = \frac{k^2x^2+k^2y^2}{2k^2x^2} = \frac{x^2+y^2}{2x^2} = F(x,y)$

Reducción de una ecuación homogénea a variables separables.

Si $\quad y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ sea $y = vx$ entonces,

$$y' = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{y} \quad v = \frac{y}{x}$$

luego,

$$v + x\frac{dv}{dx} = y' = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(v)$$

$$\frac{dv}{g(v)-v} = \frac{dx}{x}$$

que es una ecuación de variables separables.

Ejemplo

Resolver: $\quad y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$

entonces, $\quad$ hacemos $y = vx,\ y' = v + x\frac{dv}{dx}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v^2$$
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} - v + \frac{1}{2}v^2$$
$$2xdv = (v^2 - 2v + 1)dx$$
$$\frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{dx}{2x} \,/\int$$
$$\int \frac{dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{2x}$$
$$-\frac{1}{v-1} = \frac{1}{2}ln|x| + c$$
$$\frac{2x}{x-y} = ln|x| + c.$$

Reducible a homogénea.

Una ecuación de la forma $y' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ no es homogénea pero se puede reducir a homogénea mediante un cambio de variables.

Sean x_0, y_0 la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{array}\right|$$

resolviendo para x e y : $x = x_0$; $y = y_0$

entonces definimos: $\overline{x} = x - x_0$; $\overline{y} = y - y_0$

se tiene: $d\overline{x} = dx$, $d\overline{y} = dy$ y la ecuación queda:

$$y' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} = \frac{a(\overline{x}+x_0)+b(\overline{y}+y_0)+c}{d(\overline{x}+x_0)+e(\overline{y}+y_0)+f} = \frac{a\overline{x}+b\overline{y}}{d\overline{x}+e\overline{y}}$$

que es una edo homogénea.

Si el sistema de ecuaciones no tiene única solución, esto es, si $\triangle \equiv ae - bd = 0$ entonces la ecuación es de la forma:

$$y' = \frac{ax+by+c}{k(ax+by)+f}$$

ecuación que se reduce a variables separables haciendo el cambio de variable: $u = ax + by$.

Ejemplo

Resolver: $y' = \frac{2x+3y-5}{5x+4y-23}$ y la solución es : $x = 7 \;\; y = -3$, definimos:

$\overline{x} = x - 7 \;\; ; \;\; \overline{y} = y + 3$ reemplazando : $y' = \frac{2\overline{x}+3\overline{y}}{5\overline{x}+4\overline{y}} = \frac{2+3\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{5+4\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}$

sea $v = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$ entonces $\overline{y} = v\overline{x} \Rightarrow \overline{y}' = v'\overline{x} + v$ y la edo queda:

$$v'\overline{x} + v = \frac{2+3v}{5+4v}$$

$$\frac{v'}{\frac{2+3v}{5+4v} - v} = \frac{1}{\overline{x}}$$

$$-\frac{(5+4v)dv}{4v^2+2v-2} = \frac{d\overline{x}}{\overline{x}} \qquad / \int$$

$$-\int \frac{(5+4v)dv}{4v^2+2v-2} = \int \frac{d\overline{x}}{\overline{x}}$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{1}{v+1}dv - \frac{7}{3}\int \frac{1}{2v-1}dv = ln(\overline{x}) + c$$

$$\frac{1}{6}ln(v+1) - \frac{7}{6}ln(2v-1) = ln(\overline{x}) + c$$

$$ln\left(\frac{v+1}{(2v-1)^7}\right) = 6ln(\overline{x}c)$$

$$\frac{\frac{y+3}{x-7}+1}{\left(2\frac{y+3}{x-7}-1\right)^7} = c(x-7)^6$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Una *forma diferencial* $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se dice exacta si es la diferencial de una función real de dos variables $F(x,y)$, es decir si:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice exacta si la forma diferencial es exacta. En este caso, si $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

entonces: $dF(x,y) = 0$

por tanto, $F(x,y) = c$ es la solución general de la edo.

Teorema (Criterio de exactitud)

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas, entonces:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Ejemplo

Resolver: $3x^2ydx + (x^3 - y^2)dy = 0$

En este caso: $M(x,y) = 3x^2y$ y $N(x,y) = x^3 - y^2$

entonces: $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$ luego la ecuación es exacta:
podemos recuperar la función de la cual la forma es su diferencial del siguiente modo:
como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2y$ integramos respecto de x

y tenemos:$(*)$ $F(x,y) = x^3y + g(y)$, donde $g(y)$ es la constante de integración (respecto de x)

ahora, como: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - y^2$

se tiene: $x^3 + g'(y) = x^3 - y^2$ reduciendo e integrando respecto de y

obtenemos: $g(y) = -\frac{1}{3}y^3$

y reeplazando en $(*)$ se tiene que $F(x,y) = x^3y - \frac{1}{3}y^3$

de donde la solución general de la ecuación es : $x^3y - \frac{1}{3}y^3 = c$

Factores Integrantes

Una funcón $\mu(x,y)$ se dice un factor integrante de la edo: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ si:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es una edo exacta.

Ejemplo $3xydx + x^2dy = 0$ no es exacta, pero multiplicando por: $\mu(x,y) = x$, se obtiene $3x^2ydx + x^3dy = 0$ ecuación que si es exacta, dado que: $d(x^3y) = 3x^2ydx + x^3dy$

otro factor integrante es: $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2y}$ puesto que:

$$\frac{1}{x^2y}\left(3xydx + x^2dy\right) = \frac{3}{x}dx + \frac{1}{y}dy = d(3ln(x) + ln(y)) = ln(x^3y)$$

y la solución general es : $x^3y = c$

Factores Integrantes por Inspección

La presencia de expresiones como $d(xy) = ydx + xdy$ sugiere una función $h(xy)$ como factor integrante.

Ejemplo

$$ydx + (x + x^2y)dy = 0 \qquad / \frac{1}{(xy)^2}$$

$$\frac{ydx+xdy}{(xy)^2} + \frac{1}{y}dy = 0$$

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} + d(ln(y)) = 0$$

$$d\left(\frac{-1}{xy} + ln(y)\right) = 0$$

$$\frac{-1}{xy} + ln(y) = c$$

De la misma forma, los diferenciales:

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$

$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy-ydx}{x^2}$

$d(ln(x^2+y^2)) = 2\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

$d\left(\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

sugieren la tabla siguiente para ensayar factores integrantes:

expresión presente en la edo	tipo de factor integrante
$ydx-xdy$	$\frac{1}{y^2}h\left(\frac{x}{y}\right)$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}h\left(\frac{y}{x}\right)$
$xdx+ydy$	$\frac{2}{x^2+y^2}h(ln(x^2+y^2))$
$ydx-xdy$	$\frac{1}{x^2+y^2}h\left(\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

Ejemplo $\quad (xy^4+y)dx - xdy = 0 \ / \ \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^2$

$$x^3dx + \left(\frac{x}{y}\right)^2\frac{ydx-xdy}{y^2} = 0$$

$$x^3dx + \left(\frac{x}{y}\right)^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad /\int$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^3 = c$$

Si el factor integrante μ sólo depende de x o sólo de y, entonces éste puede ser hallado de manera sistemática.

Proposición

Sea la edo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se tiene que:

A) Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ entonces $\mu = e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante.

B) Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y)$ entonces $\mu = e^{-\int g(y)dy}$ es un factor integrante.

Demostración

Caso A,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &= \mu \frac{M_y - N_x}{N} N + \mu N_x \\ &= \mu M_y - \mu N_x + \mu M_x \\ &= \mu M_y \\ &= \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \end{aligned}$$

entonces, $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es exacta.

Caso B,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= -\mu \frac{M_y - N_x}{M} M + \mu N_y \\ &= -\mu M_y + \mu N_x + \mu M_y \\ &= \mu N_x \\ &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \end{aligned}$$

entonces, $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es exacta.

Ejemplo Resolver: $\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right)dx + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)dy = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} &= 8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1-\left(2xy^4e^y-2xy^2-3\right)\\ &= 8xy^3e^y+8xy^2+4\\ &= 4(2xy^3e^y+2xy^2+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M} &= \frac{4\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}{2xy^4e^y+2xy^3+y}\\ &= \frac{4\left(2xy^3e^y+xy^2+1\right)}{y(2xy^3e^y+2xy^2+1)}\\ &= \frac{4}{y}=g(y)\end{aligned}$$

entonces, $\mu=e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4ln(y)}=\frac{1}{y^4}$

multiplicando la ecuación por μ se obtiene,

$$\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}\right)dy=0$$

$$\left(2xe^ydx+x^2e^ydy\right)+\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{1}{y^3}dx-\frac{3x}{y^4}dy\right)=0$$

$$d(x^2e^y)+d\left(\frac{x^2}{y}\right)+d\left(\frac{x}{y^3}\right)=0 \qquad /\int$$

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=c$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Consideramos la edo lineal de primer orden:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

buscamos un factor integrante $\mu(x)$, tal que:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

el miembro de la izquierda sea la derivada de un produncto,

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$$

para esto, se debe cumplir : $(\mu(x))' = \mu(x)p(x)$
lo cual es una edo de variables separables, resolviendo se tiene

$$\frac{(\mu(x))'}{\mu(x)} = p(x) \qquad /\int$$

$$ln(\mu(x)) = \int p(x)dx$$

luego, $\quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

de esta forma podemos integrar, obteniendo:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$$

Ejemplo

Resolver $xy' + y = 2x\text{sen}(x)$

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\text{sen}(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

multiplicando por el factor de integración, se tiene:

$$xy' + y = 2x\text{sen}(x)$$

$$(xy)' = 2x\text{sen}(x)$$

$$xy = \int 2x\text{sen}(x)dx$$

$$y = \frac{1}{x}\int 2x\text{sen}(x)dx = \frac{1}{x}(-x\cos(x) + \text{sen}(x) + c)$$

$$y = -\cos(x) + \frac{1}{x}\text{sen}(x) + \frac{1}{x}c$$

Ejemplo

Resolver $(1+x^2)y' + y = 3 \qquad ; \ y(0) = 3$

$$y' + \frac{1}{1+x^2}y = \frac{3}{1+x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{\text{arctg}(x)}$$

multiplicando por el factor de integración, se tiene:

$$e^{\text{arctg}(x)}y' + \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}y = 3\frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}$$

$$\left(e^{\text{arctg}(x)}y\right)' = 3\frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}$$

$$e^{\text{arctg}(x)}y = 3\int \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx$$

$$y = \frac{3}{e^{\text{arctg}(x)}}\int \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx = \frac{3}{e^{\text{arctg}(x)}}\left(e^{\text{arctg}(x)} + c\right)$$

$$y = 3 + ce^{-\text{arctg}(x)}$$

como la solución pasa por $(0,2)$, se tiene:

$$2 = 3 + ce^{-\text{arctg}(0)} \Rightarrow c = -1$$

por tanto la solución al PVI, es:

$$y = 3 - e^{-\text{arctg}(x)}$$

Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de la forma:

$$y' + p(x)y = y^n q(x)$$

se conoce como ecuación de Bernoulli.

Mediante un cambio de variables se puede reducir a edo lineal de primer grado,

Sea $v = y^{1-n}$ entonces $v' = (1-n)y^{-n}y'$

multiplicando la ecuación por : $(1-n)y^{-n}$ se tiene:

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}p(x)y = (1-n)q(x)$$

que en términos de v resulta una edo lineal de primer orden:

$$v' + (1-n)vp(x) = (1-n)q(x)$$

Ejemplo $\quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}x^2y^3$

dividiendo por y^3,

$$y^{-3}y' - y^{-2}\frac{1}{x} = -\frac{5}{2}x^2$$

Hacemos: $\quad v = y^{-2} \Rightarrow v' = -2y^{-3}y' \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}v' = y^{-3}y'$

realizando el cambio de variable:

$$-\tfrac{1}{2}v' - v\frac{1}{x} = -\tfrac{5}{2}x^2 \quad \big/(-2)$$

$$v' + 2v\frac{1}{x} = 5x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

$$x^2v' + 2vx = 5x^4$$

$$(x^2v)' = 5x^4$$

$$x^2v = \int 5x^4dx = x^5 + c$$

$$v = x^3 + \tfrac{c}{x^2} = \tfrac{x^5+c}{x^2}$$

$$y^{-2} = \tfrac{x^5+c}{x^2}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{x^2}{x^5+c}}$$

Ejercicios

$a)$ $x\frac{dy}{dx} + y = x^4y; \quad y(1) = 1$

$b)$ $tx^2\frac{dx}{dt} + x^3 = t\cos(t)$

<u>Ecuación de Riccati</u>

La ecuación de Riccati es de la forma:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

con $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son continuas en algun intervalo I y $p(x) \neq 0$.

Si $y_p(x)$ es una solución particular de la ec. de Riccati, entonces la sustitución

$y = y_p + \frac{1}{z}$ reduce la ecuación a una edo lineal de primer orden.

$y = y_p + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_p' - \frac{1}{z^2} z'$ reeplazando en la ecuación:

$$y_p' - \frac{1}{z^2} z' + p(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 + q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + r(x) = 0$$

$$y_p' + p(x)y_p^2 + q(x)y_p + r(x) - \frac{1}{z^2} z' + 2p(x)y_p \frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z^2} + q(x)\frac{1}{z} = 0$$

$$-\frac{1}{z^2} z' + 2p(x)y_p \frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z^2} + q(x)\frac{1}{z} = 0 \qquad / (-z^2)$$

$$z' - 2zp(x)y_p - p(x) - q(x)z = 0$$

y se obtiene la ecuación lineal:

$$z' + (-2p(x)y_p - q(x))z = p(x)$$

Ejemplo

$$y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$$

Consideremos, $y_p = c$ reemplazando:

$$-xc^2 + (2x-1)c = x - 1$$

$$(-c^2 + 2c)x - c = x - 1$$

$$-c^2 + 2c = 1 \; ; \quad -c = -1$$

$$(c-1)^2 = 0 \; ; \; c = 1 \qquad \Rightarrow c = 1$$

y se comprueba que $y_p = 1,$ es una solución particular de la ec.

Ahora, sea $y = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = \frac{-1}{z^2} z'$

$$\frac{-1}{z^2} z' - x\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = x - 1$$

$$\frac{-1}{z^2}\,z' - x\Big(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\Big) + (2x-1)\Big(1+\frac{1}{z}\Big) = x-1$$

$$\frac{-1}{z^2}\,z' - x - x\frac{2}{z} - x\frac{1}{z^2} + 2x - 1 + 2x\frac{1}{z} - \frac{1}{z} = x-1$$

$$\frac{-1}{z^2}\,z' - x\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = 0$$

$$z' + z = x \quad \Big/ e^{\int dx} = e^x$$

$$z'e^x + ze^x = xe^x$$

$$(ze^x)' = xe^x$$

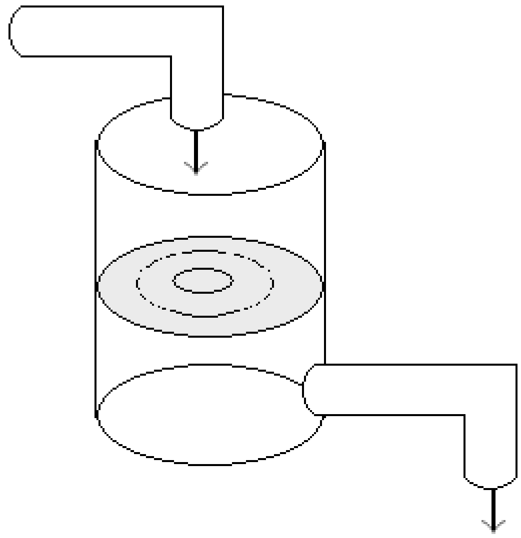
$$ze^x = \int xe^x dx$$

$$ze^x = xe^x - e^x + c$$

$$z = x - 1 + ce^{-x}$$

$$\frac{1}{1-y} = x - 1 + ce^{-x}$$

Ejemplo Un tanque de 120 litros de capacidad contiene 90 gramos de sal disueltas en 90 litros de agua. Hacia el tanque fluye salmuera con una concentración de $2\frac{\text{gramos}}{\text{litro}}$ a razón de $4\frac{\text{litros}}{\text{hora}}$. La mezcla sale a razón de $3\frac{\text{litros}}{\text{hora}}$.
¿Cuánta sal contiene el estanque cuando éste se llena?



Si, r_i es la razón a la cual ingresa flujo al tanque
r_e es la razón a la cual sale flujo del tanque
c_i es la concentración del flujo que ingresa al tanque
c_e es la concentración del flujo que sale del tanque
$x = x(t)$ es la cantidad de soluto en el tanque en el instante t
$x_0 = x(0)$ es la cantidad inicial del soluto
$V = V(t)$ es el volumen de la solución en el tiempo t
$V_0 = V(0)$ es el volumen inicial de la solución.
$\Delta t =$ variación de tiempo.
$\Delta x =$ variación de la cantidad de soluto en el tanque en Δt.

entonces, $V = V_0 + (r_i - r_e)t$
$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$
$c_e = \frac{x(t)}{V(t)}$

luego,

$$\Delta x = (r_i \times c_i)\Delta t - (r_e \times c_e)\Delta t$$

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (r_i \times c_i)\Delta t - \left(r_e \times \frac{x(t)}{V(t)}\right)\Delta t$$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = (r_i \times c_i) - r_e \times \frac{x(t)}{V(t)} \qquad \Big/ \lim_{\Delta t \to 0}$$

$$x'(t) = (r_i \times c_i) - r_e \times \frac{x(t)}{V(t)}$$

usando los datos del ejercicio:

$$x' = 4 \times 2 - 3 \times \frac{x}{90+(3-2)t}$$
$$x' + \frac{3}{90+t}x = 8 \quad /e^{\int \frac{3}{90+t}dt} = e^{3ln(90+t)} = (90+t)^3$$
$$(90+t)^3 x' + \frac{3}{90+t}(90+t)^3 x = 8(90+t)^3$$
$$(90+t)^3 x' + 3(90+t)^2 x = 8(90+t)^3$$
$$\left((90+t)^3 x\right)' = 8(90+t)^3 \qquad /\int dt$$
$$(90+t)^3 x = 8\int (90+t)^3 dt$$
$$(90+t)^3 x = 2(90+t)^4 + c$$
$$x = 2(90+t) + \frac{c}{(90+t)^3}$$

considerando la condición inicial,

$$x_0 = 90 \quad \Rightarrow 90 = 2(90+0) + \frac{c}{(90+0)^3}$$
$$\Rightarrow -90 = \frac{c}{90^3}$$
$$\Rightarrow c = -90^4$$
$$x(t) = 2(90+t) - \frac{90^4}{(90+t)^3}$$

por otro lado el tanque se llenará cuando:

$$V = 120 \Rightarrow 90 + (3-2)t = 120$$
$$\Rightarrow t = 30$$

Por tanto, la cantidad de sal cuando se llena el tanque viene de:

$$x(30) = 2(90+30) - \frac{90^4}{(90+30)^3} = \frac{6465}{32} = 202,03125$$

Respuesta: $202,03125$ gramos de sal.