

Tarea 4 Sumatorias

Instrucciones

- Esta tarea es individual y de carácter formativo.
- Debe prepararse un único documento pdf con imágenes con los desarrollos escritos a mano.
- El documento debe iniciar con el nombre y apellido del estudiante.
- Enviar el documento pdf al correo algebra@emttec.cl
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV y solo se corregirá el primer correo recibido.
- El plazo de entrega máximo es el martes 8 de junio a las 23:59:59.
- Los puntajes se encuentran indicados, hay 1,0 puntos base si se respetan estas instrucciones.

1) Considere la siguiente suma con los ángulos en radianes:

$$S = \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\right) + \cos\left(\frac{7}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2021}{2}\right)$$

A) Expresar S con notación de sumatoria.

(0,5 pts.)

B) Usando la propiedad telescópica, hallar el valor exacto para S y aproximarlos con 2 decimales.

(1,5 pts.)

Ayuda: $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

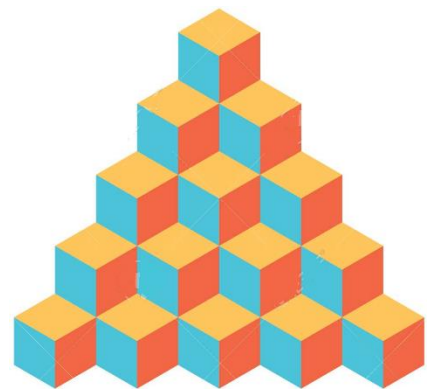
2) En la figura se muestra una pirámide maciza de 5 pisos formada por cubos de lado 1 cm. En su piso superior tiene 1 cubo, en el inmediatamente inferior 3, en el que sigue 6 y así sucesivamente. Para una pirámide con el mismo patrón de construcción, pero de n pisos hallar:

A) Volumen total.

(1,0 puntos)

B) Área total de la superficie, incluyendo su base.

(1,0 puntos)



3) Hallar el término general a_k con tal que:

(2,0 pts.)

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Solución

1A) Expresamos la suma con notación de sumatoria:

$$S = \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\right) + \cos\left(\frac{7}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2021}{2}\right) = \sum_{k=0}^{1010} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

B) Consideramos la identidad y reemplazamos $\alpha = k + 1$ y $\beta = k$:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin(k+1) - \sin(k) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

y despejamos el coseno:

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{\sin(k+1) - \sin(k)}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Reemplazamos el término general en la sumatoria y sacamos el término constante:

$$S = \sum_{k=0}^{1010} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{1010} \frac{\sin(k+1) - \sin(k)}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{1010} [\sin(k+1) - \sin(k)]$$

aplicamos la propiedad telescópica:

$$S = \frac{1}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{1010} [\sin(k+1) - \sin(k)] = \frac{1}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)} [\sin(1010+1) - \sin(0)]$$

así:

$$S = \frac{\sin(1011)}{2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right)} \approx -0,583$$

2A) Tenemos la siguiente cantidad de cubos por piso:

Piso	Número de cubos
1	$1 = 1$
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
\vdots	\vdots
k	$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
\vdots	\vdots
n	$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Así el total de cubos en n pisos es:

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

ahora reunimos términos y factorizamos:

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Con respecto al volumen, como cada cubo es lado 1 cm y por lo tanto de volumen 1 cm^3 , tenemos:

$$V = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ cm}^3$$

2B) Con respecto al área, las 6 vistas de la pirámide muestran el mismo patrón de caras, así el número total de caras expuestas es:

$$S = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 6 \cdot \frac{n}{2}(n+1) = 3n(n+1)$$

como cada cara tiene área 1 cm^2 , tenemos:

$$A = 3n(n+1) \text{ cm}^2$$

3) Podemos escribir el último término como:

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$$

así el término general es:

$$a_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

En el problema anterior surgió de manera natural una sumatoria con dicho término general, también podía aludirse a ello.