Electromagnetismo (LFIS 211)

Licenciatura en Física

Profesor: J. R. Villanueva Semestre I 2022

*Nombre:*______________________________ *RUT:*______________

Prueba 3: P1:_____ P2:_____ P3:_____ P4:_____ NF:_______

---

1. Considere el sistema compuesto por un conductor cilíndrico de largo infinito y radio R por el cual fluye una corriente de densidad

$$\vec{J}(s) = \frac{3I_0}{4\pi R^2}\left(2 - \frac{s}{R}\right)\hat{k}, \tag{1}$$

y otro cascarón conductor cilíndrico de radio $2R$ concéntrico con el primero, y por el cual fluye una corriente I_0 en dirección opuesta distribuida homogéneamente por toda su superficie.

   (a) Encuentre el campo inducción magnética en todos los puntos del espacio.

   (b) Determine la energía magnética por unidad de largo del sistema.

   (c) Determine la autoinducción por unidad del largo del sistema.

2. Se dispone de un conductor recto y largo por el que fluye la corriente I. A las distancias a y b de éste se hallan dos cables paralelos al mismo, conectados en uno de sus extremos a la resistencia R (FIG.1). Una barra, puente de unión, se desplaza sin rozamiento a una velocidad constante v por los cables. Despreciando las resistencias de los mismos, de la barra y de los contactos deslizantes, así como de la inducción del circuito, hallar

   (a) el valor y la dirección de la corriente de inducción en la barra;

   (b) la fuerza necesaria para mantener constante la velocidad de la barra.

   (c) La potencia disipada en la resistencia.

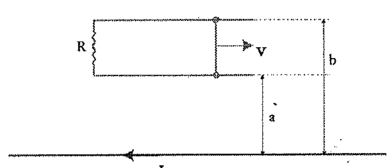


Figure 1: Esquema del problema 2.

3. Una cáscara esférica, de radio interno R_1 y radio externo R_2, se magnetiza uniformemente en la dirección del eje z. La magnetización dentro de la cáscara es $\vec{M}_0 = M_0\,\widehat{k}$. Encuentre el potencial escalar φ_m en puntos que estén sobre el eje z, tanto dentro como fuera de la cáscara.

4. Un condensador real C tiene una resistencia de fuga R en paralelo, está conectado en serie a una inductancia ideal L.

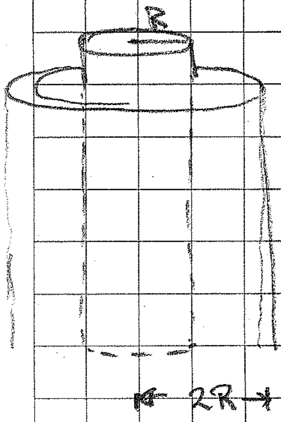
   (a) Calcule $|Z|$.

   (b) Calcule sus valores aproximados para frecuencias altas y bajas, y en resonancia.

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM FECHA:

Entre $0 \leq s \leq R$

Probl. $\vec{J}(s) = \frac{3I_0}{4\pi R^2}\left(2 - \frac{s}{R}\right)\hat{z}$ $0 < s < R$.



Mientras que en $s = 2R$ la corriente I_0 baja por toda su superficie.

a) Determinar la energía magnética del sistema.

b) Determinar la autoinductancia.

a) Teorema de Ampere: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{a}$

$B\,2\pi s = \mu_0 I_{enc}$

RI: $0 \leq s \leq R$ $I_{enc} = \int_0^s \vec{J}\cdot da$

$$I_{enc} = \int_0^s \left[\frac{3I_0}{4\pi R^2}\left(2 - \frac{s}{R}\right)\right] \cdot 2\pi s\, ds$$

$$I_{enc} = \frac{3I_0}{2R^2}\int_0^s \left(2s - \frac{s^2}{R}\right) ds = \frac{3I_0}{2R^2}\left[s^2 - \frac{s^3}{3R}\right]$$

$$I_{enc} = \frac{I_0}{2}\left[3\left(\frac{s}{R}\right)^2 - \left(\frac{s}{R}\right)^3\right]$$

$$B \cdot 2\pi s = \mu_0 \frac{I_0}{2}\left[3\left(\frac{s}{R}\right)^2 - \left(\frac{s}{R}\right)^3\right]$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R}\left(3\left(\frac{s}{R}\right) - \left(\frac{s}{R}\right)^2\right)}$$

RII $\boxed{B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s}}$ $R \leq s \leq 2R$

RIII: $B = 0$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:

$$U_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,l\cdot 2\pi s\,ds$$

$$\boxed{U_m' = \frac{U_m}{l} = \frac{\pi}{\mu_0}\int B^2\,s\,ds}$$

$$U_m' = \frac{\pi}{\mu_0}\left\{\frac{\mu_0^2 I_0^2}{16\pi^2 R^2}\int_0^R\left(3\frac{s}{R}-\frac{s^2}{R^2}\right)^2 s\,ds + \frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2}\int_R^{2R}\frac{s\,ds}{s^2}\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\int_0^R\left(\frac{3s}{R}-\frac{s^2}{R^2}\right)^2\left(\frac{s}{R}\right)d\left(\frac{s}{R}\right) + \int_R^{2R}\frac{ds}{s}\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\int_0^1\left(3u-u^2\right)^2 u\,du + \int_R^{2R}\frac{ds}{s}\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\int_0^1\left(9u^2+u^4-6u^3\right)u\,du + \ln\left(\frac{2R}{R}\right)\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\int_0^1\left(9u^3+u^5-6u^4\right)du + \ln 2\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{9u^4}{4}+\frac{u^6}{6}-\frac{6u^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \ln 2\right\}$$

$$U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{6}-\frac{6}{5}\right) + \ln 2\right\}$$

$$\frac{9}{4}+\frac{1}{6} = \frac{54+4}{24} = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$$

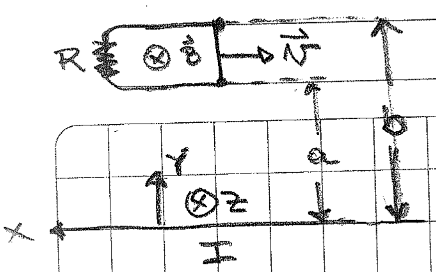
$$\frac{29}{12}-\frac{6}{5} = \frac{145-72}{60} = \frac{73}{60}$$

$$\boxed{U_m' = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{73}{240}+\ln 2\right\}}$$

$$U_m' = \frac{1}{2}L' I^2 \rightarrow \boxed{L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{73}{240}+\ln 2\right\}}$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{k} \quad ; \quad \vec{v} = v_0(-\hat{\imath})$$

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dy}{y}\int_{x_0}^{x_0 - v_0 t} dx$$

$$\Phi_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) v_0 t$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 I v_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I v_0}{2\pi R}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(b) $d\vec{F} = I_{ind}\, d\vec{l} \times \vec{B} \quad ; \quad d\vec{l} = dy\,\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{F} = I_{ind}\int_a^b (dy\,\hat{\jmath}) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{k}\right)$$

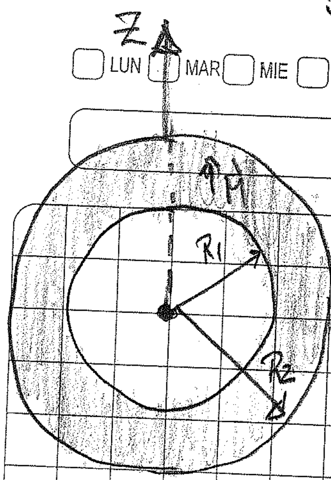
$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I v_0}{2\pi R}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\hat{\jmath}\times\hat{k})\int_a^b \frac{dy}{y}$$

$$\vec{F} = \frac{v_0}{R}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 \hat{\imath} \Rightarrow \vec{F}_{*} = -\vec{F} \,//$$

c) $$P = R I_{ind}^2 = R\left[\frac{\mu_0 I v_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:



$\vec{M} = M_0\hat{k}$ $\quad \rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M} = 0$

$\sigma_M = \hat{n}\cdot\vec{M}$

$\sigma_{M_1} = (-\hat{r})\cdot\vec{M} = -M_0\cos\theta$

$\sigma_{M_2} = (\hat{r})\cdot\vec{M} = M_0\cos\theta$

$$\therefore\ \varphi^* = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\frac{\sigma_{M_1}\, da_1'}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\frac{\sigma_{M_2}\, da_2'}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|}$$

$$\varphi^* = \frac{M_0}{4\pi}\cdot 2\pi\left\{-R_1^2\int\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|} + R_2^2\int\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = z\hat{k}\\ \vec{r}_i' = R_i\hat{r}'\end{array}\right\}\ |\vec{r}-\vec{r}_i'| = \sqrt{z^2+R_i^2-2zR_i\cos\theta'}$$

$$\varphi^* = \frac{M_0}{2}\left\{R_2^2\int_0^\pi\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'}{(z^2+R_2^2-2zR_2\cos\theta')^{1/2}} - R_1^2\int_0^\pi\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'}{(z^2+R_1^2-2zR_1\cos\theta')^{1/2}}\right.$$

$$\varphi^* = \frac{M_0}{2}\left\{R_2^2\, I(z,R_2) - R_1^2\, I(z,R_1)\right\}$$

$$I(z,R) = \int_0^\pi\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta')^{1/2}}\ ; \quad u = z^2+R^2-2zR\cos\theta'$$

$u(0) = u_0 = (z-R)^2$

$u(\pi) = u_\pi = (z+R)^2$

$\frac{du}{2zR} = \sin\theta'\,d\theta'$

$$I(z,R) = \frac{1}{4z^2R^2}\int_{u_0}^{u_\pi}\frac{(z^2+R^2-u)}{\sqrt{u}}\,du$$

$$I(z,R) = \frac{1}{4z^2R^2}\left\{(z^2+R^2)\int_{u_0}^{u_\pi}u^{-1/2}\,du - \int_{u_0}^{u_\pi}u^{1/2}\,du\right\}$$

$$I(z,R) = \frac{1}{4z^2R^2}\left\{(z^2+R^2)\frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2}\right\}_{u_0}^{u_\pi}$$

$$I(z,R) = \frac{1}{6z^2R^2}\left\{3(z^2+R^2)\left(\sqrt{u_\pi}-\sqrt{u_0}\right) - u_\pi^{3/2} + u_0^{3/2}\right\}$$

$$I(z,R) = \frac{1}{6z^2R^2}\left\{3(z^2+R^2)\left(z+R-|z-R|\right) - (z+R)^3 + |z-R|^3\right\}$$

$$\underset{(z>R)}{I_>(z,R)} = \frac{1}{6z^2R^2}\left\{3(z^2+R^2)(2R) - \cancel{z^3} - 3z^2R - \cancel{3zR^2} - R^3 + \cancel{z^3} - 3z^2R + \cancel{3zR^2} - R^3\right\}$$

$$= \frac{1}{6z^2R^2}\left\{\cancel{6z^2R} + 6R^3 - \cancel{6z^2R} - 2R^3\right\} = \frac{4R^3}{6z^2R^2} = \frac{2R}{3z^2}$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:

$$I_<(z,R) = \frac{2z}{3R^2}$$

i) $z < R_1 < R_2$: $\varphi_1^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 I_<(z,R_2) - R_1^2 I_<(z,R_1)\right\}$

$$\varphi_1^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 \cdot \frac{2z}{3R_2^2} - R_1^2 \cdot \frac{2z}{3R_1^2}\right\} = \frac{\eta_0}{2}\left(\frac{2z}{3} - \frac{2z}{3}\right) = 0$$

ii) $R_1 < z < R_2$: $\varphi_2^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 I_<(z,R_2) - R_1^2 I_>(z,R_1)\right\}$

$$\varphi_2^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 \cdot \frac{2z}{3R_2^2} - R_1^2 \cdot \frac{2R_1}{3z^2}\right\} = \frac{\eta_0}{3} z\left(1 - \frac{R_1^3}{z^3}\right) = \frac{\eta_0}{3}\left(\frac{z^3 - R_1^3}{z^2}\right)$$

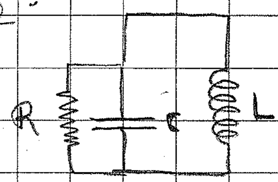
iii) $R_1 < R_2 < z$: $\varphi_3^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 I_>(z,R_2) - R_1^2 I_>(z,R_1)\right\}$

$$\varphi_3^* = \frac{\eta_0}{2}\left\{R_2^2 \cdot \frac{2R_2}{3z^2} - R_1^2 \cdot \frac{2R_1}{3z^2}\right\} = \frac{\eta_0}{3}\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{z^2}\right)$$

$$\varphi^* = \frac{\eta_0}{3}\begin{cases} 0 & 0 < |z| \leq R_1 < R_2 \\ \frac{z^3 - R_1^3}{z^2} & R_1 \leq |z| \leq R_2 \\ \frac{R_2^3 - R_1^3}{z^2} & R_1 < R_2 \leq |z| \end{cases}$$

$\Rightarrow I(t) = I_0\, e^{-\alpha t}\, e^{i\beta t}$ ← subamortiguada

13.5 :



a) $Z_R = R \quad ; \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad ; \quad Z_L = i\omega L$

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/i\omega C} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1 + i\omega RC}{R} \Rightarrow Z_a = \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

$$Z_a = \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + \omega^2R^2C^2} = \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} - i\frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$\Rightarrow Z = Z_a + Z_L = \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} + i\omega\left(L - \frac{R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}\right)$$

$$= \frac{R}{1+(\omega RC)^2} + i\omega\left(\frac{L + L(\omega RC)^2 - R^2C}{1+(\omega RC)^2}\right)$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

FECHA:

$X = \omega RC$

$$|Z|^2 = \frac{1}{(1+(\omega RC)^2)^2}\left\{ R^2 + \omega^2\left[L + L(\omega RC)^2 - R^2C\right]^2 \right\}$$

$$|Z|^2 = \frac{R^2 + \omega^2L^2 + \omega^2L^2x^4 + \omega^2R^4C^2 + 2L^2x^2\omega^2 - 2\omega^2LR^2Cx^2 - 2\omega^2LR^2C}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{R^2(1+x^2) + \omega^2L^2(1+2x^2+x^4) - 2\omega^2LR^2C(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{R^2 + \omega^2L^2(1+x^2) - 2\omega^2LR^2C}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{R^2(1-2\omega^2LC+\omega^4L^2C^2) - \omega^4R^2L^2C^2 + \omega^2L^2 - \omega^4R^2L^2C^2}{(1+x^2)}$$

$$|Z|^2 = \frac{R^2(1-\omega^2LC)^2 - (\omega L)^2}{(1+\omega^2R^2C^2)}$$

$$\Rightarrow \quad |Z| = \sqrt{\frac{R^2(1-\omega^2LC)^2 - (\omega L)^2}{(1+\omega^2R^2C^2)}}$$

$$\omega \to 0 \Rightarrow |Z| \simeq R + \frac{(L - R^2C)^2}{2R}\omega^2 + O(\omega^3)$$