Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA LINEAL
2do. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. **3**

Método de la escalera (Gauss) y método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones

Hemos visto cómo resolver sistemas 2×2 y sistemas 3×3. ¿Cómo podemos resolver un sistema de más ecuaciones y más incógnitas, incluido el caso cuando el número de ecuaciones es distinto al de incógnitas? **El método de la escalera o de Gauss** es una generalización del método de reducción.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ -2x - y + 3z = -6 \end{cases}$$

En primer lugar, debemos colocar la ecuación de coeficientes más simples en primer lugar. En este caso, dejémoslo así.

Tomemos esa ecuación como de referencia y trabajando con ella y todas la otras eliminemos la incógnita "x".

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x + y + z = 4 & (+1) & (+2) \\ -x + 2y + z = 2 & (+1) & . \\ -2x - y + 3z = -6 & . & (+1) \end{array} \right.$$

Dejemos la primera ecuación como está.
La ecuación obtenida de combinar las ecuaciones 1 y 2, la colocamos en lugar de la 2.
La ecuación obtenida de combinar las ecuaciones 1 y 3 la colocamos en lugar de la 3.

Esa transformación realizada la indicamos así ...

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= E_1 + E_2 \\ E'_3 &= 2E_1 \qquad + E_3 \end{aligned}$$

Observen que llamamos E_n a la vieja ecuación n y llamamos E'_n a la nueva ecuación que ocupa esa posición. Nos queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \quad 3y + 2z = 6 \\ \quad\; y + 5z = 2 \end{cases}$$

Se generó un primer escalón. Ahora falta transformar la ecuación 3, usando como referencia la ecuación 2. Realizamos …

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= \quad E_2 \\ E'_3 &= \quad E_2 - 3E_3 \end{aligned}$$

Nos queda:

$$\begin{cases} x + \;\; y + \;\; z = 4 \\ \quad\; 3y + \; 2z = 6 \\ \qquad\quad -13z = 0 \end{cases}$$

Esto es lo que se llama un sistema escalerizado. Finalmente, como buenos arquitectos, subimos la escalera que acabamos de construir.

En la E_3, despejamos z: $z = 0$

Reemplazamos ese valor en la E_2 y hallamos y: $y = 2$

Reemplazamos esos valores en la E_1 y hallamos x: $x = 2$

Es un **sistema determinado** con solución:

$$S = \{(2,2,0)\}$$

¿Podríamos haber predicho que era un sistema determinado sin encontrar la solución?

Sí, como es un sistema cuadrado, sabemos por Cramer, que es determinado si el determinante de la matriz característica es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

El mismo procedimiento pero ahora con matrices …

Armamos dos matrices**:**

La matriz A del sistema: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

La **matriz ampliada del sistema**: $\boldsymbol{A'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -6 \end{array}\right)$

Operando en las ecuaciones (que ahora son filas) igual que antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -6 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} F'_1 &= F_1 \\ F'_2 &= F_1 + F_2 \\ F'_3 &= 2F_1 \quad + F_3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \qquad \overrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 \\ F'_3 = F_2 - 3F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, armamos de nuevo el sistema y terminamos de resolverlo subiendo la escalera.

Una matriz como la obtenida,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

se llama **matriz triangular superior** y será importante luego. Todos sus elementos debajo de la diagonal principal son ceros.

Los primeros números distintos de cero de cada fila se llaman **pivotes**. Cuando todas las incógnitas (x, y, z, …) tienen pivotes el sistema es **determinado**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x - 2y + z = 2 \\ -2x - 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Después de operar como en el ejemplo anterior la matriz ampliada del sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que hay toda una fila de ceros y la columna z no tiene pivote, por tanto el sistema **es indeterminado con un grado de libertad**. El valor de "z" se puede elegir. Tomemos …

$$z = \alpha$$

Reemplazando:

$$y = 2\alpha - 5$$

$$x = -3\alpha + 8$$

La solución general es:

$$S = \{(-3\alpha + 8, 2\alpha - 5, \alpha)\}$$

Tomando $\alpha = 1$, por ejemplo, se obtiene una solución particular: $(5, -3, 1)$

Tomando $\alpha = 0$, otra, $(8, -5, 0)$

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x - 2y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Trabajando en forma similar, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora hoy un pivote en la columna de términos independientes, la última ecuación,

$$0z = 1$$

Es una ecuación imposible. El sistema **es incompatible. No tiene solución.**

Método mejorado de Gauss-Jordan

Retomemos el ejemplo 1 desde donde lo dejamos. Y trabajando desde abajo hacia arriba tratemos de convertir en ceros los elementos que están por encima de la diagonal principal,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = 13F_1 \qquad + F_3 \\ F'_2 = \qquad 13F_2 + 2F_3 \\ F'_3 = \qquad\qquad F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 13 & 0 & 52 \\ 0 & 39 & 0 & 78 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = 3F_1 - F_2 \\ F'_2 = \qquad F_2 \\ F'_3 = \qquad\qquad F_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 39 & 0 & 0 & 78 \\ 0 & 39 & 0 & 78 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F'_1 = \frac{F_1}{39} \\ F'_2 = \qquad \frac{F_2}{39} \\ F'_3 = \qquad\qquad -\frac{F_3}{13} \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Analizando esta matriz se ve que la solución es $x = 2, y = 2, z = 0$, ya hallada antes.

Matriz identidad

La matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene una importancia fundamental en álgebra. Se llama matriz identidad. Veremos sus propiedades más adelante.

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas:

1. $$\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$$

Sol: x = -2, y = 0, z = 1, t = -1

2. $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Resp: Es incompatible. No tiene solución.

3. $$\begin{cases} 2a + 7b + 3c + d = 5 \\ a + 3b + 5c - 2d = 3 \\ a + 5b - 9c + 8d = 1 \\ 5a + 18b + 4c + 5d = 12 \end{cases}$$

Resp: Es indeterminado. Admite infinitas soluciones. Tiene dos grados de libertad. Una posible forma de expresar la solución general (tomando como variables libres c y d) es:

$$\boldsymbol{a = -26c + 17d + 6}$$
$$\boldsymbol{b = 7c - 5d - 1}$$

4. Observa el siguiente sistema. Es un sistema **homogéneo**: todos sus términos independientes son cero.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Podrías hallar una solución **trivial**?

(b) Decide, mediante el valor del discriminante del sistema si esa solución hallada es la única.

(c) Halla la solución general.

5. ¿Podría el siguiente sistema tener solución única? Justifica brevemente tu respuesta. Encuentra luego la solución general:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2s - 4t = 0 \\ 2x + 4y - 5z + s - 6t = 0 \\ 5x + 10y - 13z + 4s - 16t = 0 \end{cases}$$

6. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

(a) Halla k para que el sistema no sea determinado.

(b) Discutir estableciendo una solución general para el caso que corresponda.

(c) Halla las soluciones para $k = 3$ (por el método de Gauss) y $k = 0$ (por Gauss-Jordan).