Rotacional y Divergencia

Veremos a continuación dos operadores sobre campos vectoriales de frecuente uso en aplicaciones físicas. Una de ellas produce un campo escalar llamado divergencia y la otra produce un campo vectorial llamado rotor

Divergencia de un campo vectorial

Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$$

Con M, N y P campos escalares con derivadas parciales definidas en un región de $\mathbb{R}^3$ y por consiguiente existen

$$\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial P}{\partial z}$$

Se llama divergencia de F el cual se anota $div\ F$, al campo escalar:

$$div\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (campo\ escalar)$$

Observación

Si el campo vectorial F está definido en $\mathbb{R}^2$ como:

$$F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$$

entonces

$$div\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad (campo\ escalar)$$

Una forma sencilla para obtener la divergencia, es expresarla como un producto punto (escalar o interno) de vectores, para ello hay que tener en cuenta un operador nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)$$

Así

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (Mi + Nj + Pk)$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= M_x + N_y + P_z = div\ F$$

Ejemplo

Calcule la divergencia del campo vectorial

$$F(x, y, z) = 2e^x z\ sen\ y\ i + e^x z \cos y\ j + 3x^3y^3z^3 k$$

Solución

Se tiene que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la divergencia del campo F es la siguiente función escalar de 3 variables

$$div\ F = \nabla \cdot F$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2e^x zsen\ y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x z \cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(3x^3y^3z^3)$$

$$= 2e^x z\ sen\ y - e^x z\ sen\ y + 6\ x^3y^3z^2$$

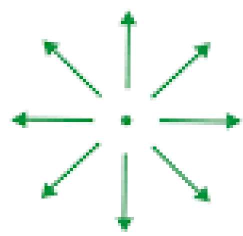
Interpretación física de la divergencia

La divergencia es un operador que actúa sobre una función vectorial que define un campo vectorial y que determina como valor de salida una función escalar el cual indica la variación de densidad del fluido en cada punto.

Así entonces , si F es el campo de velocidades de un fluido, entonces $div\ F$ mide la tasa de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto P (número de gotas de un fluido que viajan hacia P)

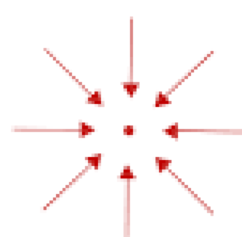
Si $divF > 0$ la tendencia del fluido es alejarse de P. Se dice que el fluido se expande o emana hacia el exterior de dicho punto y, por tanto, es una fuente o manantial.

Las gotas salen hacia el exterior por tanto la densidad del fluido en el punto disminuye



$$div\ F > 0$$

Si $divF < 0$ la tendencia del fluido es acumularse en P. Se dice que el fluido se está comprimiendo o que tiene sumideros (el ejemplo más característico lo dan las cargas eléctricas, que dan la **divergencia** del campo eléctrico, siendo las cargas positivas fuentes y las **negativas** sumideros del campo eléctrico)



Las gotas se concentran hacia el punto aumentando su densidad y en ese punto hay un sumidero de campo

$$divF < 0$$

Si $div\ F = 0$ decimos que el campo es incomprensible (en electromagnetismo se le llama solenoidal a un campo de divergencia nula) o bien se dice que F es de divergencia nula.

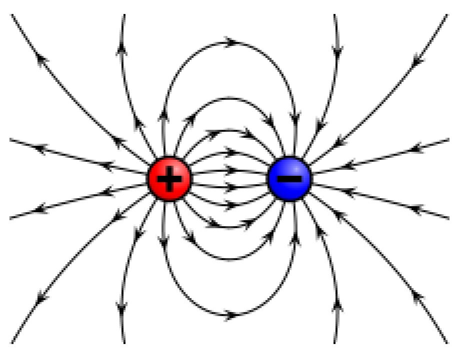
$$div\ F = 0$$

El fluido sigue trayectorias paralelas sin aumentar ni disminuir la densidad del fluido

Observe que los vectores son paralelos cuando $div\ F = 0$

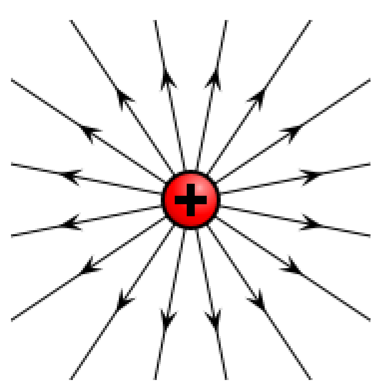
Ejemplo

Sabemos que en Física los átomos están compuestos por partículas extremadamente diminutas denominadas protones, neutrones y electrones. Los protones tienen una carga positiva. Los electrones tienen una carga negativa. La carga del protón y del electrón son exactamente del mismo tamaño, pero opuestas.



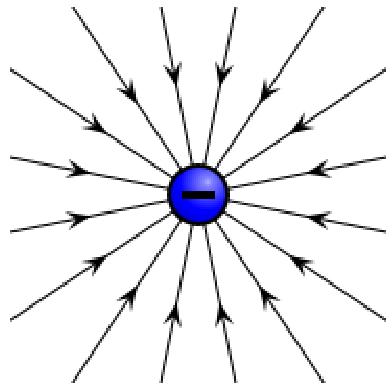
Campo eléctrico con un protón y un electrón

Tenemos un punto manantial en el protón por tener carga positiva



Carga saliente

Tenemos un punto sumidero en el electrón por tener carga negativa



Carga entrante

Resumiendo:

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en un punto de una superficie. Si en torno al punto elegido solamente contiene fuentes o sumideros de un campo, entonces su divergencia es siempre distinta de cero.

Algunas propiedades de la divergencia

Sean F, G campos vectoriales y Φ , λ campos escalares, entonces:

1) $div(F + G) = div\ F + div\ G$

2) $div\ (\Phi \cdot F) = \Phi\ div\ F + F \cdot \nabla\Phi$

3) $div(\nabla\Phi \text{ x } \nabla\lambda) = 0$

La Divergencia de un campo vectorial expresa el aumento de la concentración de vectores de un campo hacia una zona.

Demostración de 2)

Si escribimos $F = Mi + Nj + Pk$ donde M, N y P son funciones en las variables x, y, z entonces

$$\Phi F = \Phi Mi + \Phi Nj + \Phi Pk \Rightarrow$$

$$div(\Phi F) = \nabla \cdot \Phi F$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\Phi M) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi N) + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi P)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\Phi)M + \Phi\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi)N + \Phi\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi)P + \Phi\frac{\partial P}{\partial z}$$

Reordenado los términos, obtenemos

$$div(\Phi F) = \nabla \cdot \Phi F$$

$$= \Phi\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right] + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Phi)M + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi)N + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi)P\right)$$

$$= \Phi\, div\, F + F \cdot \nabla\Phi$$

Rotacional de un campo vectorial

Sea F una función vectorial en tres variables dados por

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

donde M, N y P tiene derivadas parciales en una región:

Se define el operador rotacional de F $(rot\ F)$ como:

$$rot\ F = \nabla \times F$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)k$$

Observación

Se usa el símbolo $rot\ F\ o\ \nabla \times F$ para denotar el vector

$$rot\ F(x, y, z)\ o\ \nabla \times F(x, y, z)$$

Ejemplo

Calcule el rotor del campo vectorial

$$F(x,y,z) = 2e^{x}z\,sen\,y\,i + e^{x}z\cos y\,j + 3x^{3}y^{3}z^{3}k$$

Solución

De acuerdo con la definición tenemos que

$$rot\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{x}z\,sen\,y & e^{x}z\cos y & 3x^{3}y^{3}z^{3} \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{x}z\,cos\,y & 3x^{3}y^{3}z^{3} \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{x}z\,sen\,y & 3x^{3}y^{3}z^{3} \end{vmatrix}$$

$$+k\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ e^{x}z\,sen\,y & e^{x}z\cos y \end{vmatrix}$$

$$= (9x^{3}y^{2}z^{3} - e^{x}\cos y)i - (9x^{2}y^{3}z^{3} - 2e^{x}sen\,y)j$$

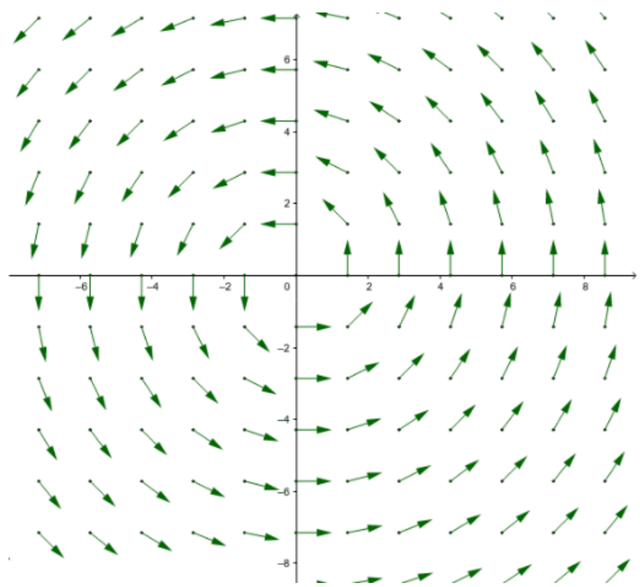
$$+(e^{x}z\cos y - 2\,e^{x}z\cos y)k$$

Interpretación física del rotor

Se entiende por rotacional al operador vectorial que muestra la tendencia de un campo al inducir una rotación o giro alrededor de un punto.

Si un campo vectorial F representa el flujo de un fluido entonces $rot\,F = 0$, significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones, o es irrotacional , esto es , no genera remolinos . Podemos decir de manera informal que si un el campo es irrotacional entonces una pequeña rueda con aspas colocada en el fluido se moverá con éste, pero no girará alrededor de su propio eje.

Que un campo vectorial F tenga rotacional $rot\ F \neq 0$, quiere decir que los vectores del campo tienen una configuración de giro en torno a un punto como muestra la figura siguiente



Campo vectorial conservativo

Un campo vectorial F se llama campo vectorial conservativo si es el gradiente de alguna función escalar , es decir, si existe una función f talque $F = \nabla f$. En este caso, f recibe el nombre de función potencial de F.

Ejemplo

Se puede demostrar que el campo gravitacional es un campo conservativo

Condición de campo conservativo:

Sea $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, M y N funciones con derivadas parciales continuas en un disco abierto R, el campo F es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Demostración

Por demostrar que

$$F \text{ conservativo } \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

En efecto, si $F = Mi + Nj$ es conservativo esto quiere decir que

$$F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

Por tanto

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \;\; y \; N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si derivamos M respecto de y :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Si derivamos N respecto de x :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Como la condición establece la continuidad de las derivadas, y teniendo en cuanto el teorema de las derivadas mixtas, las segundas derivadas son iguales, por consiguiente

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

La condición suficiente

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow F \text{ conservativo}, se\ verá\ con\ el\ T. Green$$

en el plano.

Sea $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, M, N y P funciones con derivadas parciales continuas en una región abierta R, el campo F es conservativo si y sólo si se cumplen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} ; \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Para $\mathbb{R}^3$, si tenemos en cuenta la condición de campo conservativo, la igualdad de las derivadas equivale a decir que el rotor de F es vector nulo.

Si F es conservativo entonces $rot\ F\ = 0$

En efecto partimos de

$$rot\ F = \nabla \text{ x } F\ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

Si F es conservativo; exite una función f tal que $F = \nabla f$

$$Mi + Nj + Pk = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Si reemplazamos M, N y P en la expresión del rotor nos queda:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) k$$

Nuevamente por la igualdad de las derivadas mixtas tenemos $rot\ F = 0$ decimos entonces que los campos conservativos son irrotacionales. La condición suficiente se deriva del teorema de Stokes (lo veremos más adelante).

Obtención de una función potencial.

Ejemplo

Dado un campo $F(x, y)$, queremos determinar si es conservativo, si se cumple la condición vamos a calcular la función potencial.

$$F(x, y) = (4x^3 + 9x^2y^2)i + (6x^3y + 6y^5)j$$

Para esta función

$$M(x, y) = 4x^3 + 9x^2y^2;$$

$$N(x, y) = 6x^3y + 6y^5$$

Veamos si se cumple la condición necesaria

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18x^2y \ ; \ \frac{\partial N}{\partial x} = 18x^2y$$

Si el campo es conservativo

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ y } \ N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y^2$$

Para despejar $f(x,y)$, integramos respecto x . Entonces

$$f(x,y) = \int (4x^3 + 9x^2y^2)dx$$

$$= x^4 + 3x^3y^2 + H(y) \cdots (1)$$

donde $H(y)$ es una función arbitraria de integración (cte).

Se debe cumplir también:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 6y^5$$

Para despejar $f(x,y)$; integramos respecto de y.

$$f(x,y) = \int (6x^3y + 6y^5)dy$$

$$= 3x^3y^2 + y^6 + G(x) \ \cdots (2)$$

Si comparamos (1) con (2) tenemos que

$$3x^3y^2 + y^6 + G(x) = x^4 + 3x^2y^2 + H(y)$$

Para que se cumpla la igualdad deberá ser

$$G(x) = x^4 \ \text{ y } \ H(y) = y^6$$

Por tanto, la función potencial es :

$$f(x,y) = 3x^3y^2 + y^6 + x^4 + c \,; c = cte \ de \ integración$$