Guia Nº 5 (Extremos absolutos e Integrales Múltiples)

Cálculo III
Facultad de Ciencias
UV.

1.-Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones sobre las regiones cerradas indicadas:

i) $f(x,y) = x^3 + y^3$ triángulo limitado por las rectas $y = 1 - x$; $x = 0$; $y = 0$
R: Máximo absoluto $f(1,0) = f(0,1) = 1$ mínimo absoluto $f(0,0) = 0$

ii) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 12y + 3$ triángulo limitado por las rectas $y = x$; $x = 0$; $y = 0$.
R: Máximo absoluto $f(4,4) = 11$ mínimo absoluto $f(1,2) = -10$

2.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = 4y^3x$ sujeta a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.
R : Máximo en $f(\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ y un mínimo en $f(0,4)$ y en $f(4,0)$

3.- Hallar el valor máximo de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeta a $4x - 2y = 6$.
R : Máximo en $f(2,1) = 3$

4.- Calcular las siguientes integrales iteradas :

a) $\int_0^1 \int_1^3 (\sqrt{x} + y - 3x^2y)\, dx\, dy$ (R : $\frac{4}{3}$)

b) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)\, dx\, dy$ (R : $\frac{14}{3}$)

c) $\int_{-3}^5 \int_{-2}^4 (xy - y^2x^2)\, dy\, dx$ (R : -1168)

5.- Calcular $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$ siendo :

a) $f(x,y) = x^2 - 3y + 5$ y $R = \{(x,y) / 1 \le x \le 4 \wedge -3 \le y \le 2\}$

b) $f(x,y) = 4x - y + xy$ y $R = [-2,0] \times [0,3]$

c) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}$ y $R = [-1,1] \times [0,2]$

(R : a) $\frac{405}{2}$ b) -42 c) $\frac{4}{3}\pi$)

6.- Calcular : $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$ siendo :

a) $f(x,y) = x^2 - 8xy - 1$; $R = \{(x,y) / 1 \le y \le 2 \wedge y \le x \le 3\}$
(R : $\frac{181}{4}$)

b) $f(x,y) = xy$, $R = \left\{(x,y) / 0 \le x \le 4 \wedge \frac{3}{4}x \le y \le \sqrt{25 - x^2}\right\}$
(R : 50)

7.- Calcular :

a) $\int_0^1 \int_{-x}^{x} (xy^2)\, dy\, dx$ (R : $\frac{2}{15}$)

b) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} \frac{1}{x}\, dy\, dx$ (R : $\frac{1}{2}\ln^2 2$)

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\cos y} (x^2 sen^2 y)\, dx\, dy$ (R : $\frac{12}{5}$)

8.- Calcular , mediante integral doble, el área de la región R si :

a) $R = \{(x,y)/0 \leq y \leq 4 - \frac{4}{3}x \wedge 0 \leq x \leq 3\}$ (R : 6)

b) $R = \{(x,y)/4 - 4x \leq y^2 \leq 4 - x\}$

9.- Calcular el área la región que se encuentra entre el interior de $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ y exterior a $\rho = 3$, utilizando integrales dobles . (R : $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$)

10.- Calcule la siguiente integral transformandola a cordenadas polares :

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy\, dx \quad \text{(R: } \ln(\sqrt{2} + 1)\text{)}$$

11.- Calcular el volumen del cuerpo ubicado en el primer octante, limitado por las superficies cilíndricas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 9$ (R : 144)

12.- Calcular el volumen de sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y por las gáficas de las ecuaciones $z = x^2 + y^2 + 1$ y $2x + y = 2$.
(R : $\frac{11}{6}$)

13.- Hallar el volumen del sólido limitado por $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano $z = 2$.
(R: $\sqrt{2}\,\pi$)

14.- Calcular, mediante integral triple el volumen de la región Q acotada por las géficas de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ y $z + y = 6$.
(R: $\frac{304}{15}$)

15.- Encontrar el volumen de la región acotada por : $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 12 - \frac{x^2}{3}$.
(R: π)

16.- Encuentre el volumen del cuerpo limitado por las superficies : $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.
(R: π)

17.- Calcule la integral $\iiint_Q x\, y\, z\; dx\; dy\; dz$; mediante coordenadas cartesianas,

siendo Q el conjunto :

$$Q = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \,;\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \,;\, z \geq 0\}$$

(R: $\frac{1}{48}$)

18.- Calcule la integral del ejercicio 17.- mediante :

i) cordenadas cilindricas

ii) coordenadas esféricas .

(R : $\frac{1}{48}$)

19 .- Calcule $\iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\; dx\; dy\; dz$ donde Q es la región del espacio limitado por $x + y + z = 2$, $y = 0$, $z = 0$.

(R: $\frac{8}{5}$)

20.- Calcular el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

(R: $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 4)$)

21.- Use coordenadas esféricas para calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semi esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

(R: $\frac{64}{3}(2 - \sqrt{2})$)

22.- Use coordenadas cilíndricas para calcular el volumen común a los interiores de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

(R: $\frac{5}{12}\pi$)

23.- Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(R: $\frac{5}{6}\pi$)