Guía de Ejercicios Nº 3

Cálculo III - Facultad de Ciencias - UV

1.- Utilizar la definición para hallar f_{xx} ; f_{yy} y f_{xy} en los puntos indicados :

a) $f(x,y) = 3x^3y + 5y^2x$ en $(2,4)$

b) $f(x,y) = y^2\ln(x) - x^2 + 1$ en $(1,1)$

c) $f(x,y) = sen\left(\frac{xy}{2}\right)$ en $(\pi,0)$

2.- Emplear las reglas de diferenciación para hallar f_{xx} ; f_{xy} ; f_{yy} ; f_{yx}

a) $f(x,y) = 10x^4y^4 + y^3 - x^3 + 4$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + ln(x^2y^2)$

c) $f(x,y) = cos(x^3 - y^3)$

d) $f(x,y) = y\,e^{x-1} - xe^{y+1} + sen(e^x + e^y)$

e) $f(x,y) = tg(x^2+y^2) + \frac{e^{xy} - e^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$

f) $f(x,y) = tg^{-1}(5y - 2x)$

3.- Verificar la igualdad de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}

a) $f(x,y) = x^3y^4 + xy^5 - x^2y^3$

b) $f(x,y) = x^2lny - y^2lnx$

4.- Verificar la igualdad de las derivadas parciales f_{xxy}; f_{xyx}; f_{yxx} ; f_{yyx} f_{yxy} y f_{xyy} de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = e^{xy}$ b) $f(xy) = \cos(x^3 + y^3)$

5.- Hallar la diferencial total de las funciones que se indican

a) $z = (y^3 + x^2y)^4$

b) $z = x^2\ln y + \frac{senx}{x-y}$

c) $z = \sqrt{x - 5y + 3}$

d) $f(\rho,\alpha) = \rho^3\cos(2\alpha)sen(3\alpha)$

e) $f(x,y,u,v) = sen(xy - uv) + \frac{xe^x}{y^2}$

6.- Analizar si las siguientes funciones son diferenciables en $(0,0)$

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2x}{y^4+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7.- Dadas las siguientes funciones, hallar las derivadas parciales que se indican

a) $z = 3u^3 + 4v^5$; $u = \sqrt{x} + y$; $v = e^{2x} - e^{4y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$

b) $z = \cos(u^3 + v^3)$; $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $z = u^2 \ln v$; $u = (x+y)^2$; $v = \frac{x}{y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$

d) $z = \frac{r+s}{r-s}$; $r = \frac{t^2}{k}$; $s = \frac{k^2}{2t}$; $\frac{\partial z}{\partial k}$; $\frac{\partial z}{\partial t}$

e) $w = xe^y + ye^z - ze^x$; $x = \frac{4}{t}$; $y = tg\, r$; $z = \ln(rt)$; $\frac{\partial w}{\partial r}$; $\frac{\partial w}{\partial t}$

8.- Evaluar $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ según los valores de x e y dados

a) $z = \ln(ue^v)$; $u = x + 1$; $v = y^2 - x$; $(x,y) = (1,0)$

b) $z = uv + uw + vw$; $u = cos\, x$; $v = sen\, y$; $w = xy$; $(x,y) = (\frac{\pi}{2};\pi)$

9.- Evaluar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en los puntos que se indican :

a) $x^2 - 3xy + 2x - 8 = 0$; $(-1,3)$

b) $2y - sen^2 y + \cos x + 2 - \pi = 0$; $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$

10.- Evaluar $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los puntos que se indican :

a) $yz - xy + z^2 - x^2 = 0$; $(1,1,1)$

b) $z + senz + cosx - seny = -1 - \frac{\pi}{2}$; $\left(0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

11.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ si el sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ define implicitamente las funciones $y = y(x)$ y $z = (x)$. Evaluar dichas derivadas en $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

a) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 4x + y - 6z + 5 = 0 \end{cases}$; $p_0 = (0,1,1)$

b) $\begin{cases} x^2 - z^2 - y = 0 \\ x^3 + z^3 + y^3 = 0 \end{cases}$; $p_0 = (-2,0,2)$

12.- Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ si el sistema $\begin{cases} f(x,y,u,v) = 0 \\ g(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ define implicitamente las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$

$$\begin{cases} sen\, x - \cos y + u^2 + v^2 = 0 \\ 2\cos x + seny - 3u + 5v = 0 \end{cases}$$

13.- Si el sistema $\begin{cases} f(x,y,u,v) = 0 \\ g(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ define implicitamente las funciones a) $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$; b) $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$ hallar las derivadas que se indican

$$\begin{cases} 2uv - xy = 0 \\ u^2 + v^5 + y^3 - 3x = 0 \end{cases}$$ en a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y b) $\dfrac{\partial x}{\partial v}$; $\dfrac{\partial y}{\partial v}$

14.- Sea el sistema

$$\begin{cases} u - x + 2y = 0 \\ v + 2x = 3yw \\ e^w = -x \end{cases}$$ que define implicitamente las funciones $u = u(x,y)$;

$v = v(x,y)$ y $w = w(x,y)$ evaluar $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ en $p_0 = (-1,0,-1,2,0)$

15.- Analizar si el sistema $\begin{cases} -x - 2y + \dfrac{v^2}{2} = 0 \\ (3x+y)u + 4u^3v - 5 = 0 \end{cases}$ define implicitamente

las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en la vecindad de $p_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,-1,1,0)$

16.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones, empleando el vector gradiente, según los ángulos y puntos indicados.

a) $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 - y + 2$, $\alpha = \dfrac{11\pi}{6}$ en $(1,0)$

b) $f(x,y) = e^{xy}\cos x$, $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$ en $(\pi,1)$

17.- Evaluar a derivada direccional de las siguientes funciones según las direcciones y puntos indicados

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y} - 2x + 3y + 4$, $\vec{w} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ en $(0,-4)$

b) $f(x,y) = x^2e^y - y^2e^x$, $\vec{w} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}$ en $(0,5)$

c) $f(x,y,z) = 1 + \ln(z^2 + y^2 + x^2)$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ en $(-1,-1,-2)$

d) $f(x,y,z) = zy^2(1+6x)^2$; $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ en $(\frac{\pi}{6},-1,-1)$

18.- Hallar la máxima y mínima derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = x^3 - xy - y^3 + 5$ en $(-1,-2)$

b) $f(x,y) = x\cos(\ln y)$ en $(2,1)$

19.- Hallar un vector unitario tal que la derivada direccional de $f(x,y) = x^2y - 6x + 4y - 1$ sea $f_u = -\dfrac{52}{\sqrt{20}}$ en el punto $(2,-1)$

¿Es único?.

20.- Hallar las ecuaciones a) paramétricas y simétricas de la recta tangente ; y b) del plano normal a las siguientes curvas definidas por

1) $x = 2\cos t$; $y = \dfrac{6t^2}{\pi}$; $z = sen\, t$; en $t = \dfrac{\pi}{6}$

2) $x = te^t$; $y = t + \cos(3t)$; $z = 3^{\,t}$; en $t = 0$

21.- Hallar las ecuaciones a) de la recta tangente y b) del plano normal a la curva determinada por la intersección de las superficies dadas en el punto indicado

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z - 6 = 0 \\ (x-2)^2 - (y+3)^2 + 3z - 3 = 0 \end{cases}$; en $p_1 = (1,-1,2)$

b) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + z = 11 \\ x^2 + 2y - z^2 = 2 \end{cases}$; $p_1 = (2,1,-2)$

c) $\begin{cases} cos(\pi x) - z^3 - y = 0 \\ sen(\pi y) + z^4 - x = 0 \end{cases}$; $p_1 = (1,-2,1)$

22.- Determinar si la siguientes superficies son tangentes en el punto indicado

$\begin{cases} x^2 - y^2 + z = 6 \\ 12x + y^2 + 8y + \frac{1}{2}z^2 = \dfrac{43}{2} \end{cases}$; $p_1 = (2,-1,3)$

23.- Hallar a) una ecuación del plano tangente y b) las ecuaciones de la recta normal a las superficies dadas en los puntos indicados

1) $x^2 + y^2 + 4z = 6$ en $(1,-1,1)$

2) $x^2z - y^3 = 5$ en $(-2,-1,1)$

3) $z = \cos(4y)$ en $(-1, \frac{\pi}{2}, 1)$

4) $z = ln(y^2 + x^2)$ en $(1,0,0)$

5) $2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4x - 5y - 3z + 2 = 0$ en $(0,-1,2)$

24.- Determinr en que punto, el plano $3x - y + 2z = 14$, es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

25.- Determinr si existen puntos de la superficie $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16,$ tal que el plano tangente a la misma, sea paralelo al plano yz.

26.- Determinar si existen puntos de la superficie $x^2 + y^2 - 6y + z^2 - 4z = 12$ que admiten plano tangente horizontal.

27.- Sean las superficies

$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + (z+2)^2 = 8 \\ 2x^2 - 6y^2 + z = 1 \end{cases}$

hallar el ángulo entre las mismas en el punto $p_1 = (2,-1,-1)$

28.- Determine un vector perpendicular a la curva $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ en el punto $(3,2)$.

R : $(-54,16)$ es el vector.

29.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = 8$ en $P = (1,2,4)$ Cálcule el volumen del tetraedro limitado por este plano y los tres planos coordenados.

R : El volumen del tetraedro es 36.

30.- Hallar los extremos relativos y puntos sillas si existen de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 2$
b) $f(x,y) = x3 + y^3 - x^2 + 6y^2 - x$
c) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 6xy - 5$
d) $f(x,y) = \sqrt{1 + (x-1)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4}}$
e) $f(x,y) = 1 + xy + \dfrac{12}{x} + \dfrac{18}{y}$
f) $f(x,y) = 2x^3 + 6y^2x - 6y^2 - 6x^2 + 5$
g) $f(x,y) = 3x^3 - 9x + y^2 + 4y + 5$
h) $f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

31.- Hallar el punto más próximo del plano $2x - y + z = 1$ al origen del sistema de coordenadas xyz. $R:\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

32.- Determinar las dimensiones de una caja rectangular sin tapa de volumen igual a 256cm^3 tal que su área total sea mínima. R : 8,8,4

33.- Determine los valores extremos de las funciones dadas por :

i) $f(x,y) = y^2 - x^2$ sujeta a la restricción $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$
ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x\,y - 3 = 0$
iii) $f(x,y) = x\,y$ sujeta a la restricción $4x^2 + 9y^2 = 36$
iv) $f(x,y) = 4y^3x$ sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.

34.- Una placa circular delgada está definida por $x^2 + y^2 \leq 1$. Si se calienta de modo que la temperatura en cada punto (x,y) de la placa está dada por $f(x,y) = (x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 - \frac{1}{4}$, localice los puntos más calientes, los puntos más frios y la temperatura en dichos puntos en la placa.

R : Los puntos más calientes son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ por tanto la temperatura máxima es $\frac{9}{4}$. El punto más frío es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ por lo tanto la temperatura mínima es $-\frac{1}{4}$

35.- Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse a un semicirculo de radio 4. Utilice el método de Lagrange.

R : las dimensiones del rectángulo de área máxima son : largo igual a $4\sqrt{2}$, ancho igual a $2\sqrt{2}$.

36.- Determine el costo mínimo de una caja de base cuadrada con volumen de 64 pies cúbicos, si el costo del frente y la parte superior es \$1 el pie cuadrado, la tapa y el fondo cuestan \$2 el pie cuadrado y los dos extremos cuestan \$3 el pie cuadrado. Utilice el método de Lagrange.

R : El costo mínimo de la caja es 256 pesos.