Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias
Programa FOGEC
ÁLGEBRA I
1er. semestre 2021
Prof. Mario Marotti

CLASE No. 15

Ejercitación en sumatorias

1) Considere la siguiente identidad válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n \;=\; 2^{n+1} - 2$$

A) Demostrarla de izquierda a derecha usando la fórmula de suma de términos de una PG.

B) Demostrarla de izquierda a derecha usando la propiedad telescópica de las sumatorias.

Solución

1A) Al observar la suma de izquierda a derecha, observamos términos en PG con primer término $a_1 = 2$, razón $r = 2$ y n términos. Aplicando la fórmula de suma para este tipo de progresiones:

$$\mathbf{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n} \;=\; a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \;=\; 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \;=\; 2 \cdot (2^n - 1) \;=\; 2 \cdot 2^n - 2 \;=\; \mathbf{2^{n+1} - 2}$$

Q.E.D.

1B) Expresamos la suma con la notación de sumatoria:

$$\mathbf{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} 2^k$$

Ahora manipulamos para construir una telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} (2-1) \cdot 2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot 2^k - 2^k) = \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} - 2^k) \;=\; 2^{n+1} - 2^1 \;=\; \mathbf{2^{n+1} - 2}$$

Q.E.D.

2) Con la ayuda de la propiedad telescópica de las sumatorias, calcular el valor exacto de:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{100\cdot 101}$$

Resolución:

Hemos demostrado en clase que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Y vemos que la suma requerida es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{i=100} \frac{1}{i(i+1)}$$

Por tanto, si $n = 100$:

$$\sum_{i=1}^{i=100} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{100+1}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{i=100} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{100}{101}}$$

3) En la figura se muestra una pila de balas de cañón de 6 niveles. En el nivel superior hay 4 balas, en el inmediatamente inferior 10 balas y así sucesivamente hasta llegar al nivel base.

A) Bajo el mismo patrón de apilamiento con 4 balas en el nivel superior, calcular el total de balas S_n para una pila con n niveles. **(1,9 puntos)**

B) Calcular el total de balas de la pila de la figura evaluando el resultado anterior en $n = 6$. **(0,1 puntos)**

Resolución:

Parte A:

El primer nivel tiene: $1 \cdot 4$ balas
El segundo nivel tiene: $2 \cdot 5$ balas
El tercer nivel tiene: $3 \cdot 6$ balas

Por tanto, el nivel n tendrá:

$$n \cdot (n+3) \text{ balas}$$

Es decir, se nos pide calcular la suma …

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+3)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+3) = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} i$$

Recordando de la clase que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Y reemplazando …

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+3) = \frac{2n^3 + 12n^2 + 10n}{6}$$

Parte B:

Reemplazando $n = 6$:

$$\sum_{i=1}^{i=6} i(i+3) = \frac{432 + 432 + 60}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} i(i+3) = 154$$

Respuesta: en los seis primeros niveles hay **154 balas**.