Clase nº25

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

27 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular longitud de una curva en coordenadas paramétricas.

Ecuaciones paramétricas

Definición

Llamaremos **curva en el plano** a una función γ de $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t)),$$

donde f y g son funciones continuas.

Ecuaciones paramétricas

Ecuación paramétrica

Llamaremos ecuación paramétrica de la curva, cuando esta esté expresada por

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

donde f y g son continuas en un intervalo I de valores de t, El conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una curva paramétrica.

Ecuaciones paramétricas

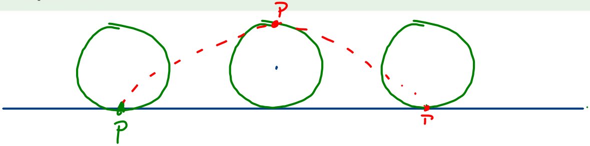
Observación

- La variable t es un parámetro de la curva y su dominio I es un intervalo del parámetro.
- Si I es un intervalo cerrado, $a \leq t \leq b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el punto inicial de la curva, y $(f(b), g(b))$ es el punto final.
- Cuando tenemos ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro de la curva, se dice que hemos parametrizado la curva.

Ecuaciones paramétricas

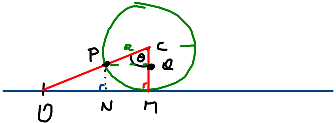
Ejemplo 79

Supongamos que una rueda de radio a gira por un camino recto. En esta rueda hemos marcado un punto P. Describir la trayectoria del punto P.



Para obtener las ecuaciones de la trayectoria de P, consideremos:

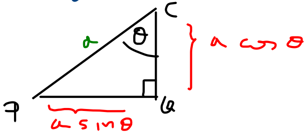
- fijemos por un instante la rueda



- C es el centro de la rueda
- M es el punto de la rueda que está en contacto con el camino
- N es la proyección de P sobre el camino.
- θ es el ángulo PCM
- O es el origen del movimiento.
- $|\overline{PC}| = a$.

Podemos notar que:

- $|\overline{OM}|$ es la longitud del arco PM.
- En el triángulo CPQ



$\Rightarrow |\overline{NM}| = a\sin\theta$.

- Si (x, y) son las coordenadas de P entonces

$$x = |\overline{ON}| = |\overline{OM}| - |\overline{NM}| = a\cdot\theta - a\cdot\sin\theta = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = |\overline{NP}| = |\overline{MC}| - |\overline{QC}| = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta).$$

Luego, las ecuaciones de (x,y) en función del ángulo θ son:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad (1)$$

Así, a medida que P varía, el ángulo θ varía entre 0 y 2π.

De esta forma las ecuaciones del Punto $P(x,y)$ tiene representación paramétrica dada por (1) en función de θ.

Ecuaciones paramétricas

Ejemplo 80

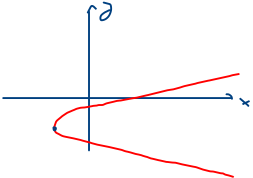
Identifique geométricamente la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2, \quad y = t - 3, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

En este caso,

$$\left.\begin{array}{l} t^2 = x + 2 \\ t^2 = (y+3)^2 \end{array}\right| \Rightarrow \quad x + 2 = (y+3)^2$$

$\therefore$, geométricamente es una parábola horizontal que se abre hacia la derecha, de vértice $(-2, -3)$.



Ecuaciones paramétricas

Longitud de la curva

Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, con $t \in [a, b]$, donde f', g' son continuas y no simultaneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C recorre sólo una vez conforme t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Ejemplo 81

Determine la longitud de la circunferencia de radio $r = 3$ definida en forma paramétrica por

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

En este caso $f(t) = 3\cos t$, $g(t) = 3\cdot\sin t$. Luego $f'(t) = -3\cdot\sin t$ y $g'(t) = 3\cdot\cos t$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cdot\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9}\, dt = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 3t\Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Ecuaciones paramétricas

Ejemplo 82

Determine la longitud de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

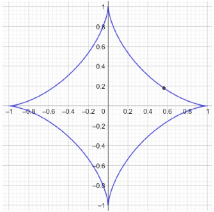


Figura: Astroide

Tenemos que

$f(t) = \cos^3 t \Rightarrow f'(t) = -3\cos^2 t \cdot \sin t$

$g(t) = \sin^3 t \Rightarrow g'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t.$

Así,

$$[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 = [-3\cos^2 t \sin t]^2 + [3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t]^2$$

$$= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cdot \cos^2 t$$

$$= 9 \sin^2 t \cos^2 t \left[\cos^2 t + \sin^2 t\right]$$

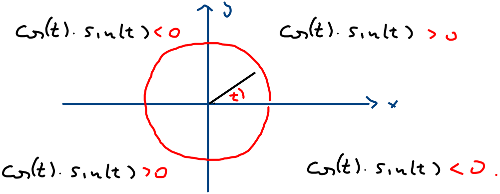
$$= 9 \sin^2 t \cos^2 t.$$

Luego,

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t}$$

$$= 3 \left| \cos t \sin t \right|$$

Tenemos que analizar cada caso



De lo anterior observamos que

- si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entonces $|\cos t \cdot \sin t| = \cos t \cdot \sin t$
- si $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ entonces $|\cos t \cdot \sin t| = -\cos t \sin t$
- si $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ entonces $|\cos t \sin t| = \cos t \sin t$
- si $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ entonces $|\cos t \cdot \sin t = -\cos t \cdot \sin t$.

Una forma de calcular la longitud de esta curva es

$$L = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t|\, dt$$

$$= 3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin t\, dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos t \sin t\, dt\right]$$

$$= \cdots$$

$$= 6.$$

Otra forma es probar que la curva es simétrica con respecto al eje x y al eje y. Luego

$$L = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos t \cdot \sin t|\, dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt$$

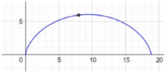
$$= \cdots$$

$$= 6.$$

Ejercicios propuestos

1. Determine la longitud del arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = 3(\theta - \sin\theta) \\ y = 3(1-\cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

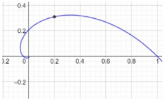


2. Calcular la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 2t^{\frac{9}{2}} - 4, \quad t \in [1, 3]. \end{cases}$$

3. Calcular la longitud de la curva dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$



Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.