Matrices elementales

Comencemos con otro ejemplo de inversión de matrices por el método visto la clase pasada. En este caso, por sencillez lo haremos con una matriz 2×2. Mediante ese ejemplo veremos porqué el método funciona.

Ejemplo:

Intentemos encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo primero que se debe comprobar es que, por la regla de Sarrus,

$$\det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

La matriz no es **singular**, por tanto **es invertible.** Tiene **inversa.** Es posible hallar A^{-1}.

Método 1: (sólo válido para matrices 2×2):

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Método 2: La matriz no es **singular**, por tanto **es invertible.** Tiene **inversa.** Es posible hallar A^{-1}. Comencemos armando la matriz $(A|I)$ para transformarla luego.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = -3F_1 + F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'_1 = F_1 + F_2 \\ F'_2 = \quad F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = \quad -F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Mismo resultado.

Justificación del método

Observen que para transformar las matrices $(A|I)$ en las matrices $(I|A^{-1})$ hubo que realizar tres transformaciones por filas. Examinemos la primera,

$$F'_1 = F_1$$
$$F'_2 = -3F_1 + F_2$$

Podemos caracterizarla con una matriz. Esa matriz es una **matriz elemental.**

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué ocurre si multiplicamos esa matriz por izquierda por A?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es justamente la matriz transformada. Si seguimos así encontramos dos matrices elementales más:

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1 + F_2 \\ F'_2 &= \quad\;\; F_2 \end{aligned} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1 \\ F'_2 &= \quad -F_2 \end{aligned} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, analizando el lado izquierdo de nuestros cálculos, observamos que:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

y recordando que:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

concluimos que

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$

Ahora vamos al lado derecho, aplicándole esa misma transformación ($E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$) a la matriz I, queda

$$(E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot I = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$$

Recuerden aquí que cualquier matriz multiplicada por la identidad nos da esa misma matriz (I es el **neutro de la multiplicación**).

Queda demostrado entonces que las mismas transformaciones que convierten a la matriz A en la identidad I, al ser aplicadas a la matriz I la transformarán en la inversa A^{-1}.

Observen algo muy importante:

1) la matriz de la primera transformación por filas es la que va más a la derecha.

2) las multiplicaciones por las matrices elementales siempre se realizan por izquierda.

Propiedades de la matriz inversa:

Prop. 1: La inversa de la inversa es la propia matriz A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Prop. 2: La inversa de un producto de matrices es el producto de las matrices inversas de cada una de llas pero en orden invertido.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Nota (mucho cuidado con la "propiedad hankeliana" que NO se cumple con matrices):

Una propiedad que es muy conocida de los números reales, y estamos demasiados habituados a utilizarla al factorizr polinomios, no se cumple en el álgebra de matrices.

Por ejemplo, si

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Factorizando nos queda …

$$(x-2)(x-3) = 0$$

Luego decimos …

$$\text{Si } (x-2)(x-3) = 0 \text{ entonces } \quad x-2=0 \quad \text{o} \quad x-3=0$$

Por tanto,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Que el producto de dos matrices sea igual a la matriz nula, no implica que una de ellas sea la matriz nula, o sea …

$$\boldsymbol{A \cdot B = O} \qquad \text{no implica} \qquad \boldsymbol{A = O} \quad \boldsymbol{o} \quad \boldsymbol{B = O}$$

Probar que cierta propiedad no se cumple en matemáticas puede resultar más fácil que probar que se cumple. Basta con encontrar un contraejemplo.

Prueben multiplicar A y B …

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. (a) Halle las matrices M_{23} y M_{12} (elementales 3 x 3) correspondientes respectivamente a las siguientes operaciones por filas de la matriz I_3 (matriz identidad 3 x 3):

Operación 1) Intercambiar filas $F_2 y\ F_3$.
Operación 2) Intercambiar filas $F_1 y\ F_2$.

(b) Halle la matriz producto: $M = M_{12} \times M_{23}$

(c) Pruebe que, siendo M^3 el cubo de la matriz M, se cumple:

$$M^3 = I_3$$

Nota: I_3 es la identidad de orden 3.

2. (a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

encuentra su matriz inversa A^{-1} llevando la matriz ampliada $(A \mid I)$ a la forma

$(I \mid A^{-1})$ mediante las habituales operaciones elementales con filas ya utilizadas al resolver sistemas.

(b) Para cada una de esas operaciones, encuentra la **matriz elemental** E_i, siendo i la i-ésima operación elemental aplicada.

(c) Comprueba que $A^{-1} = E_n. \dots . E_2. E_1$. ¿Por qué?

3. Consideremos la evolución del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -x + 3y + 4z = 14 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ \quad y + 7z = 16 \\ \quad 5y - 8z = -6 \end{cases}$$

(a) Escribe la transformación de ecuaciones realizada.

(b) Expresa dicha transformación como una matriz de transformación por filas.

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

(c) Continúa el procedimiento hasta resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan.

(d) Multiplica las matrices obtenidas y comprueba que aplicándola a la matriz ampliada $(A|B)$ se obtiene el resultado.

4. (a) En el conjunto de matrices 4 x 4, encuentre la matriz elemental M que describe la operación *"intercambie las filas 1 y 3 y las filas 2 y 4 de la matriz identidad I".*

(b) Pruebe que la matriz obtenida M cumple: $M^2 = I$

5. Consideremos la llamada **Matriz de orden 4 de Pascal** y su pasaje a la **matriz de orden 3 de Pascal**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Escribe la matriz E_{43}de la transformación lineal que permite el cambio.
(b) Escribe las matrices E_{32} y E_{21} de las transformaciones subsiguientes que llevan de la matriz P_3 a la matriz identidad I.
(c) Halla una nueva matriz $E = E_{43}. E_{32}. E_{21}$
(d) Aplica la transformación dada por E a la matriz original para ver que se obtiene el mismo resultado.