Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish   Semestre I 2024

Tarea 7

---

1. Una cuerda uniforme de densidad de masa μ y tensión T realiza oscilaciones transversales de amplitud $y(x,t)$. La cuerda está fija en $x=0$ y $x=L$ y satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$y(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{4V}{L^2}x(L-x) \tag{1}$$

Utilizando el hecho de que $y(x,t)$ es una solución a la ecuación de onda, encontrar las amplitudes de los modos normales y deducir las expresiones para la energía potencial y cinética de la cuerda como función del tiempo t.

Solución: De la clase vimos la solución general dadas estas condiciones de contorno:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right]$$

Con las condiciones iniciales $y(x,0) = f(x)$, $\dot{y}(x,0) = g(x)$ podemos fijar las constantes A_n y B_n:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)dx \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} g(x)dx$$

En nuestro caso tenemos $f(x) = 0$ y $g(x) = (4V/L^2)[x(L-x)]$, así que $A_n = 0$ y

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{8V}{n\pi c L^2}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} x(L-x)dx \\ &= \frac{16VL}{n^4\pi^4 c}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Entonces, $B_n = 0$ para n par. La solución final es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32VL}{(2n+1)^4\pi^4 c} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{L} \sin\frac{(2n+1)\pi ct}{L}$$

Las energías cinética y potencial están dadas por (usando las expresiones que vimos en clase):

$$K(t) = \frac{\mu\pi^2c^2}{4L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{32VL}{(2n+1)^3\pi^4 c}\right)^2 \cos^2\left(\frac{[2n+1]\pi ct}{L}\right)$$

$$V(t) = \frac{\mu\pi^2c^2}{4L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{32VL}{(2n+1)^3\pi^4 c}\right)^2 \sin^2\left(\frac{[2n+1]\pi ct}{L}\right)$$

2. Considerar de nuevo una cuerda uniforme de densidad de masa μ y tensión $T = \mu c^2$, fijada en ambos extremos. La cuerda se mueve en un medio resistivo, donde la fuerza resistiva por unidad de longitud es $-2k\mu(\partial y/\partial t)$ y $k = \pi c/L$.

   (a) Mostrar que la ecuación de movimiento de la cuerda es

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2}$$

   y encontrar $y(x,t)$ dado que

$$y(x,0) = A\sin(\pi x/L) \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{3}$$

   Solución: En la clase vimos que obtenemos la ecuación de movimiento por aplicación de la segunda ley de Newton a un elemento infinitesimal de la cuerda. Siguiendo la misma lógica, incluyendo la fuerza resistiva, llegamos a

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\mu\frac{\partial y}{\partial t}$$

   Dividiendo por μ y reorganizando llegamos a la ecuación dada en la pregunta. Para resolver la ecuación usamos separación de variables:

$$y(x,t) = X(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad c^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + 2kX(x)T'(t)$$

   Dividiendo por $X(x)T(t)$ tenemos

$$c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 2k\frac{T'(t)}{T(t)}$$

   Ambos lados dependen de variables distintas, así que hay igualdad solamente si son iguales a una constante:

$$X''(x) = -\lambda X(x) \qquad T''(t) + 2kT'(t) = -\lambda c^2 T(t)$$

   Por las condiciones de contorno $y(0,t) = y(L,t) = 0$ obtenemos las soluciones a la ecuación para $X(x)$:

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

   La ecuación para $T(t)$ es de un oscilador armónico amortiguado. Supongamos una solución exponencial:

$$T(t) = e^{\alpha t}$$

   Llegamos a la ecuación:

$$\alpha^2 + 2k\alpha + \lambda c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -k \pm ic\sqrt{\lambda - \frac{k^2}{c^2}}$$

   Una solución es

$$T(t) = e^{-kt}\left[A_n \sin\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{k^2}{c^2}}ct\right) + B_n\cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{k^2}{c^2}}ct\right)\right]$$

   Estamos suponiendo que $\lambda > k^2/c^2$ (subamortiguado). La solución general es

$$y(x,t) = e^{-kt}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]$$

donde

$$\omega_n = c\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{k^2}{c^2}}$$

Por la condición inicial $\dot{y}(x,0) = 0$ tenemos $B_n = 0$. Los coeficientes A_n están dados por la expresión que ya vimos (porque la base de funciones ortogonales en x es la misma):

$$A_n = A\frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{\pi x}{L}dx = A\delta_{n1}$$

El único término no nulo es $n = 1$. Así que la solución final es

$$y(x,t) = Ae^{-kt}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[\cos(\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{k^2}{c^2}}ct)\right]$$

(b) Si una fuerza transversal extra $F_0\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)$ por unidad de longitud actúa en la cuerda, encontrar la oscilación forzada que resulta. [Pista: podría ser útil adivinar una solución particular para combinar con la solución general homogénea que encontrada en la parte (a).]

Solución: La ecuación de movimiento en este caso es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2k\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{F_0}{\mu}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right)$$

Intentamos con

$$y_P(x,t) = C\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi ct}{L}\right)$$

Sustiuyendo en la ecuación de movimiento tenemos

$$C = \frac{F_0 L}{2k\pi\mu c}$$

La solución general al problema es

$$y(x,t) = Ae^{-kt}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[\cos(\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{k^2}{c^2}}ct)\right] + \frac{F_0 L}{2k\pi\mu c}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi ct}{L}\right)$$

3. Una cuerda de densidad uniforme se extiende a lo largo del eje x con tensión T. Sus oscilaciones transversales satisfacen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4}$$

donde c es una constante.

(a) Mostrar que si una masa M se fija a la cuerda en $x = 0$ entonces la ecuación de movimiento de la masa se puede escribir como

$$\frac{M}{T}\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0_+} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0_-} \tag{5}$$

Solución: Se puede tratar la masa como un elemento de la cuerda donde $\mu = M$ y las fuerzas en ambos lados de la masa están dadas por los gradientes (como vimos en la clase). Así llegamos a la ecuación dada.

(b) Supongamos que una onda $\exp[i\omega(t - x/c)]$ es incidente desde $x = -\infty$. Obtener las amplitudes y fases de las ondas reflejadas y transmitidas y discutir sobre sus valores cuando $\lambda = M\omega c/T$ es grande o pequeña.

Solución: en clase obtuvimos una condición entre las amplitudes I, R y τ (incidente, reflejada y transmitida, usando τ para no confundirnos con la tensión T) por tener la fuerza vertical nula en $x = 0$ ya que no hay inercia en un solo punto. Ahora, por la presencia de la masa, la fuerza no es nula:

$$\frac{M}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(y_I + y_R)\bigg|_{x=0} = \frac{M}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y_\tau\bigg|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}y_\tau\bigg|_{x=0^+} - \frac{\partial}{\partial x}(y_I + y_R)\bigg|_{x=0^-}$$

Evaluamos las derivadas, suponiendo (ya que la densidad de masa de la cuerda es la misma en ambos lados de la masa M) que la velocidad de propagación es c para todas las ondas:

$$-\lambda(I + R) = -\lambda\tau = i(I - R - \tau)$$

Notar que está permitida la presencia del número i, ya que I, R y τ son números complejos! Podemos reorganizar esta ecuación para obtener R y τ en términos de I:

$$R = \left[\frac{\lambda}{2i - \lambda}\right] I$$

Entonces, cuando $\lambda = 0$ tenemos $R = 0$ y no hay una onda reflejada. Físicamente tenemos $\lambda = 0$ cuando la masa $M = 0$, así que no hay nada especial sobre el punto $x = 0$ y la onda se propaga normalmente (sin reflexión). En el caso de tener $\lambda \to \infty$, $R = -I$, es decir, la onda reflejada es igual en amplitud a la onda incidente pero con una fase relativa de π. Físicamente este caso corresponde a tener una partícula con masa infinita, es decir tener la cuerda fijada en el punto $x = 0$. Ahora obtenemos la amplitud transmitida en términos de I:

$$\tau = \frac{2}{2 + i\lambda} I$$

Entonces, con $\lambda = 0$ (es decir, $M = 0$) tenemos $\tau = I$, la onda transmitida es igual a la onda incidente, como esperamos. En el caso $\lambda \to \infty$ tenemos $\tau = 0$ y no hay transmisión, como esperamos de nuevo.

Es interesante considerar los casos entremedio. Primero, consideramos las amplitudes tomando los módulos:

$$|\tau| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda^2/4)}}|I| \qquad |R| = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/\lambda^2)}}|I|$$

Vemos que la dependencia en λ para los módulos es recíproco: mayor M significa mayor $|R|$ y menor $|\tau|$ (como ya vimos). Los argumentos son

$$\arg(R) = \arg(\frac{\lambda}{2i - \lambda}) + \arg(I)$$

Suponiendo una fase $\theta = 0$ para la onda incidente, y considerando solamente el argumento principal, tenemos (reescribiendo la fracción compleja)

$$\operatorname{Arg}(R) = \operatorname{Arg}\left(\frac{-\lambda^2 - 2i}{4 + \lambda^2}\right)$$

Es solamente el numerador que tiene relevancia para el valor del argumento. Este número tiene parte imaginaria constante en $2i$ mientras la parte real comienza en cero y crece hacia $-\infty$. Así que la fase de la onda reflejada varia dentro del rango $(-\pi/2, -\pi)$. Para la onda transmitida tenemos

$$\text{Arg}(\tau) = \text{Arg}\left(\frac{4-2i\lambda}{4+\lambda^2}\right)$$

así que la fase de la onda transmitida varia dentro del rango $[0, -\pi/2)$.

4. El desplazamiento transversal de una cuerda uniforme que se extiende entre $x=0$ y $x=L$ está dado por la ecuación de onda (4), con condiciones de contorno

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \tag{6}$$

Para $t<0$ la cuerda oscila en su modo fundamental y $y(x,0)=0$. Un músico de la banda Cosmic Strings (escuchar sus hits en Spotify!) golpea la cuerda en su punto medio, que corresponde a un impulso en el tiempo $t=0$, tal que el cambio en $\partial y/\partial t$ en $t=0$ es $\lambda\delta(x-L/2)$. Encontrar $y(x,t)$ para $t>0$.

Solución: La solución general para este problema es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right]$$

Si la cuerda oscila en su modo fundamental $n=1$ para $t<0$, tenemos

$$y(x,t<0) = \sin\frac{\pi x}{L}\left[A_1 \cos\frac{\pi ct}{L} + B_1 \sin\frac{\pi ct}{L}\right]$$

Ahora usando $y(x,0)=0$ tenemos $A_1=0$. La velocidad de la cuerda en su modo fundamental es

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = B_1\frac{\pi c}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L}$$

Entonces, en el momento $t=0$ la velocidad es

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t=0) = B_1\frac{\pi c}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$$

Vamos a renombrar la constante $B_1 = C$. Ahora, sumamos el impulso en la velocidad en el momento $t=0$ y tenemos las dos condiciones iniciales que necesitamos:

$$y(x,0) = 0 = f(x) \qquad \dot{y}(x,0) = C\frac{\pi c}{L}\sin\frac{\pi x}{L} + \lambda\delta\left(x-\frac{L}{2}\right) = g(x) \tag{7}$$

Los coeficientes de la solución están dados por

$$A_n = 0 \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} g(x)dx$$

Evaluamos la integral para los B_n:

$$B_n = C\frac{2}{nL}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{\pi x}{L}dx + \frac{2\lambda}{n\pi c}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\delta\left(x-\frac{L}{2}\right)dx$$

De la ortogonalidad de las funciones base, la primera integral es no nula solamente para $n=1$ (tiene sentido, parte de la condición inicial de la cuerda es que oscila en su modo fundamental, así que ese modo también está representado en la solución completa). La segunda integral es fácil evaluar por el uso de la delta de Dirac. Por lo tanto, tenemos

$$B_n = C\delta_{n1} + \frac{2\lambda}{n\pi c} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Entonces, podemos escribir la solución para $t > 0$ como

$$y(x,t) = C \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi c t}{L} + \frac{2\lambda}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^{n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \sin \frac{(2n+1)\pi c t}{L}$$

ya que $\sin(n\pi/2) = 0$ para n par, y oscila entre $+1$ y -1 para los valores impares de n.