Métodos Matemáticos para la Física II (LFIS 311)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre I 2025

Tarea 2

---

1. Escribir el conjunto de todos los enteros positivos entre 5 y 25 en notación de generación de conjuntos.

2. Considerar los siguientes conjuntos: $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. ¿Cuál de los siguientes mapeos no es una función $f : X \to Y$?

   (a) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$
   (b) $\{a, b, c, d\} \to \{\clubsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \diamondsuit\}$
   (c) $\{a, b, c, d\} \to \emptyset$
   (d) $\{a, b, d\} \to \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

3. Explicar por qué los enteros $\mathbb{Z}$ no constituyen un campo.

4. ¿Los enteros consituyen un anillo? Explicar su respuesta.

5. Explicar por qué las matrices ortogonales en $2D$ constituyen un grupo (llamado $O(2)$).

6. ¿Los numeros reales $\mathbb{R}$ con la operación de multiplicación corresponde a un grupo? Explicar su respuesta.

7. ¿Los numeros reales $\mathbb{R}$ con la operación de adición corresponde a un grupo? Explicar su respuesta.

8. Demostrar que el conjunto de todas las funciones analíticas (suaves) definidas en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ constituye un espacio vectorial.

9. Considerar el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de subconjuntos de X NO corresponde a una topología?

   (a) $\tau = \{X, \emptyset\}$
   (b) $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$
   (c) $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$
   (d) $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$
   (e) $\tau = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}\}$
   (f) $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

10. Considerar las siguientes normas ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$):
    (a) Norma L^1: $||\mathbf{x}||_1 \equiv \sum_i |x_i|$.
    (b) Norma L^2: $||\mathbf{x}||_2 \equiv \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$
    (c) Norma L^∞: $||\mathbf{x}||_\infty \equiv \max_i |x_i|$.

    Considerando dos dimensiones (el plano $2D$), dibujar el conjunto de puntos que cumple con la condición $||\mathbf{x}|| = 1$ para cada una de estas normas.

11. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de numeros racionales. Definimos la siguiente métrica en este conjunto (para definir un espacio métrico):

$$d(x,y) = |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

    Considerar la sucesión $\{x_n\}$ de numeros racionales tal que

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = 2\frac{1 + x_n}{2 + x_n} \quad n \geq 1$$

    Por uso de esa sucesión, determinar si el espacio $(\mathbb{Q}, d)$ es completo o no.

12. Considerar el espacio de funciones analíticas definidas en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Verificar que la siguiente integral define un producto escalar (producto interno) en el espacio:

$$(f, g) \equiv \int_{[0,1]} f(x)g(x)dx$$

13. Considerar el producto interno definido en la pregunta anterior. Definir la norma inducida por este producto interno. Definir la métrica inducida por la norma.

14. Utilizar la norma definida en la pregunta anterior para calcular la norma de las funciones $f_n(x) = \cos(nx)$.

15. Utilizar la métrica definida en la pregunta (13) para determinar la "distancia" entre las funciones $f_1(x) = \cos(x)$ y $f_2(x) = \cos(2x)$.

16. Considerar $X = C[-1, 1]$, el conjunto de funciones continuas $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Para $f, g \in X$ definimos

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

    Demostrar que esta definición NO corresponde a un producto interno en el espacio.

17. Sea $\mathcal{H}$ un espacio Hilbert con producto escalar $(,)$. Consideremos $u, v \in \mathcal{H}$. $|| \cdot ||$ es la norma inducida por el producto escalar. Demostrar la siguiente desigualdad (desigualdad de Cauchy-Schwarz):

$$|(u, v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$$