Certamen 2

Cálculo II - FOGEC
FC - UV - 15 - 11 - 2021

1.- (15 Puntos) Determine el área que se encuentra entre la curva $y = x^7$ y la curva $y = x^3$, considerando $x \in [-2,2]$.

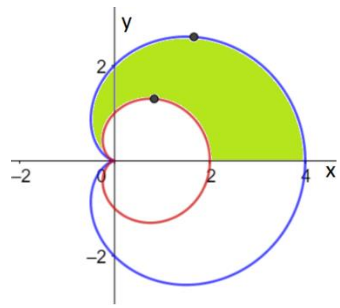
Solución: Sea $f(x) = x^7$ y $g(x) = x^3$, note que:

- f y g son impares.
- Si $x \in [0,1]$ entonces $f(x) \leq g(x)$.
- Si $x \in [\,1,2]$ entonces $g(x) \leq f(x)$.

Luego, tenemos que el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\int_0^1 x^3 - x^7 dx + \int_1^2 x^7 - x^3 dx\right] \\ &= 2\left[\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{8}\right)_0^1 + \left(\frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4}\right)_1^2\right] \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2^8}{8} - \frac{2^4}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{4} + 2^5 - 2^2\right] \\ &= \frac{113}{2}\ [u^2]. \end{aligned}$$

2.- (15 Puntos) Dadas las curvas en coordenadas polares $r = 2 + 2cos\theta$ y $r = 1 + cos\theta$. Calcular el perímetro de la región pintada.



Solución: Notar que

$$2 + 2\cos\theta = 0 \iff 1 + \cos\theta = 0$$
$$\iff \quad cos\theta = -1$$
$$\iff \quad \theta = (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Además,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1,\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\cos\theta + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Calculemos la longitud de arco de $r = 1 + cos\theta, \theta \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}L_1 &= \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\, d\theta\\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\; d\theta\\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\; d\theta\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\ d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta$$

$$= 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= 4.$$

Al calcular la longitud de arco de $r = 2 + 2cos\theta, \theta \in [0, \pi]$, tenemos

$$L_2 = \int_0^{\pi} \sqrt{(2+2\cos\theta)^2 + (-2\sin\theta)^2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{8 + 8\cos\theta}\ d\theta$$

$$= \sqrt{8}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\ d\theta$$

$$= \sqrt{8}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta$$

$$= 8.$$

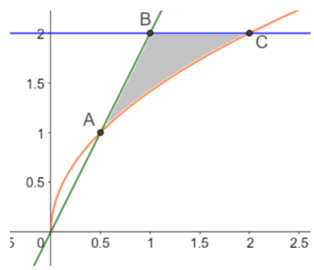
Por lo tanto, el perímetro buscado es 14 unidades.

3.- (15 Puntos) Sea

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq \sqrt{2x} \ \wedge \ \ y \leq 2 \ \wedge \ \ y \leq 2x\}$$

Encontrar el área de la superficie generada al rotar la región R alrededor del eje X.

Solución:



Sea $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = 2$ y $h(x) = 2x$. Tenemos que

- Al considerar $x \geq 0$, $f(x) = h(x)$ si $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} = 2x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = 4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \ \ \vee \ \ x = \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

- $f(x) = g(x)$ cuando $x = 2$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} = 2 \Leftrightarrow \quad &2x = 4 \\ \Leftrightarrow \quad &x = 2. \end{aligned}$$

- $g(x) = h(x)$ cuando $x = 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} A(S_h) &= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x\sqrt{1 + 2^2}\, dx = 2\pi\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{5} \cdot \pi \end{aligned}$$

$$A(S_g) = 2\pi \int_1^2 2\,dx = 2\pi(4-2) = 4\pi.$$

$$A(S_f) = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x}\,\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x}\,\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x+1}\,dx.$$

Utilizando $u = 2x+1$ se tiene que $\frac{1}{2}du = dx$. Así,

$$A(S_f) = 2\pi \int_2^5 u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}du$$

$$= \pi \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Por lo tanto, el área de la superficie buscada es

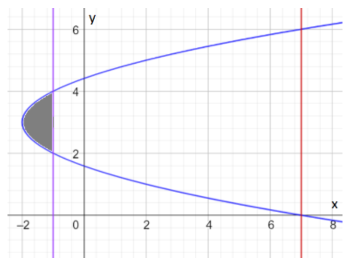
$$A = 4\pi + \frac{3}{2}\sqrt{5}\cdot\pi + \frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)$$

$$= 4\pi + \frac{29\sqrt{5}}{6}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$$

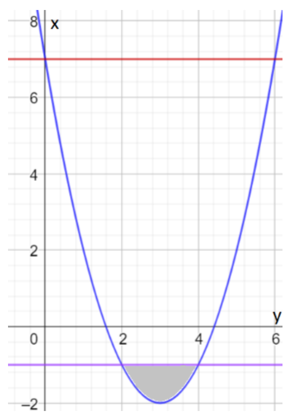
unidades cuadráticas.

4.- (15 Puntos) Sea R la región limitada por la curva $(y-3)^2 = x+2$ y la recta $x=-1$. Encuentre el volumen generado al rotar R alrededor de la recta $x=7$.

Solución: La figura representa la región R,



Consideremos $g(y) = (y-3)^2 - 2$ y la imagen



Como la región está limitada por $g(y)$ y $x=-1$, podemos encontrar los límites de integración de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(y-3)^2 - 2 = -1 \;&\Leftrightarrow\; y^2 - 6y + 7 = -1\\
&\Leftrightarrow\; y^2 - 6y + 8 = 0\\
&\Leftrightarrow\; (y-2)(y-4) = 0\\
&\Leftrightarrow\; (y = 2 \;\; \vee \;\; y = 4).
\end{aligned}$$

Luego, el volumen buscado es $\frac{112\pi}{5}\ u^3$, en efecto

$$V = \pi \int_2^4 [g(y) - 7]^2 \, dy - \pi \int_2^4 [-1 - 7]^2 dy$$

$$= \pi \int_2^4 [y^2 - 6y]^2 \, dy - 128\pi$$

$$= \pi \int_2^4 y^4 - 12y^3 + 36y^2 \, dy - 128\pi$$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 3y^4 + 12y^3 \right)_2^4 - 128\pi$$

$$= \pi \left(\frac{4^5}{5} - 3 \cdot 4^4 + 12 \cdot 4^3 - \frac{2^5}{5} + 3 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^3 \right) - 128\pi$$

$$= \frac{752\pi}{5} - 128\pi.$$

$$= \frac{112\pi}{5}.$$

Observaciones:

- El certamen es individual.
- Debe prepararse en lo posible un único documento en PDF.
- El correo debe ser enviado desde el correo institucional UV
- Disponen de 6 horas, hasta las 22:30 horas.
- Enviar documento de desarrollo al correo: