Clase nº16

Cálculo II

Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

4 de Octubre 2021

Objetivo de la clase

- Calcular áreas en coordenadas rectangulares.

De la clase pasada

El área encerrada por los gráficos de dos funciones f y g en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Observación

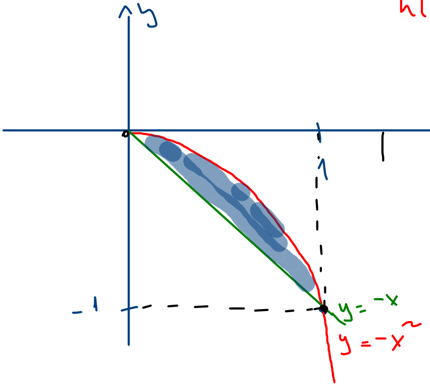
- Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$ la llamaremos una **primitiva** de f.
- En general una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ puede o no tener una primitiva. Pero, si f es continua entonces tiene primitiva dada por

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds.$$

Ejemplo 54

Calcular el área entre las gráficas de la función h y g en el intervalo $[0, 1]$. Considerar $h(x) = -x^2$ y $f(x) = -x$.

$h(x)$ $f(x)$



¿ $f(x) = h(x)$?

$$-x = -x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 1.$$

Obs: $-x^2+x \geq 0$, $x \in [0,1]$. $\left(h(x)-f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \right)$

El área buscada es

$$\int_0^1 |f(x)-h(x)|\,dx = \int_0^1 h(x)-f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2-(-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2+x\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right)$$

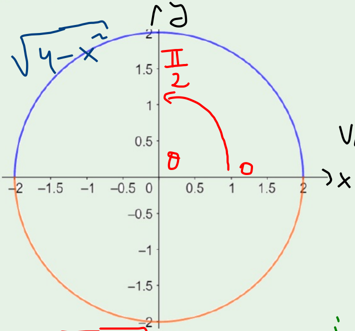
$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 55

Calcular el área encerrada en la circunferencia centrada en el origen y de radio 2.

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$



$g(x)=-\sqrt{4-x^2}$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=4\}$

Vamos a considerar

- $f(x)=\sqrt{4-x^2}$
- $g(x)=-\sqrt{4-x^2}$

¿$f(x)=g(x)$?

Luego,

$$A = \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\, dx$$

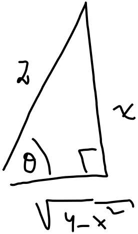
$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} - \left(-\sqrt{4-x^2}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\, dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\left(\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx + \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx\right)$$

$$= 2 \cdot 2 \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

$$= 4 \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$



$x = 2\sin\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$

Realizaremos el cambio de variable $x = 2\cdot\sin\theta$, en este caso hay que tener cuidado con los límites de integración.

Obs: · Cuando $x = 0$ entonces $0 = 2\cdot\sin\theta$.

Así, $\theta = 0$.

· Cuando $x = 2$ entonces $2 = 2\cdot\sin\theta$.

Así, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Con lo cual

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cdot\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cdot(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{\cos^2\theta}\cdot 2\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\,d\theta\right)$$

$$= 8 \cdot \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

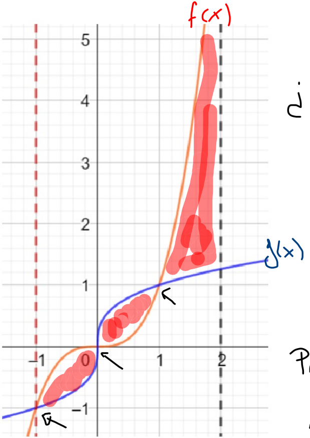
$$= 8 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \left(0 + \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} \right) \right)$$

$$= 4\pi + 4 \sin(\pi) - 4 \sin(0)$$

$$= 4\pi \quad [u^2].$$

Ejemplo 56

Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.



Sean $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

¿ $f(x) = g(x)$?

$$x^3 = \sqrt[3]{x} \iff x^9 = x$$

$$\iff x^9 - x = 0$$

$$\iff x(x^8 - 1) = 0$$

$$\iff (x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1)$$

Para calcular el área

$$A = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| \, dx.$$

$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - \sqrt[3]{x} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt[3]{x} - x^3 \right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^3 - \sqrt[3]{x} \right) dx$$

Obs: La primitiva de $h(x) = x^3 - \sqrt[3]{x}$ es $i(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} x^{4/3}$

Luego,

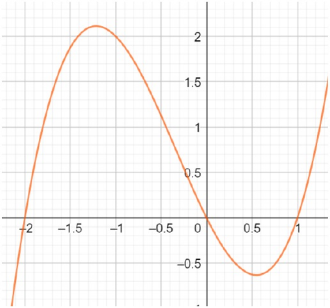
$$A = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} x^{4/3} \right) \Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^{4/3}}{4} \right) \Big|_{0}^{1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} x^{4/3} \right) \Big|_{1}^{2}$$

$$= \ldots$$

$$= \left(\frac{11}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \right) [u^2].$$

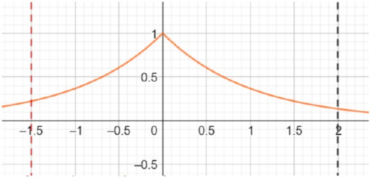
Ejemplo 57

Calcular el área comprendida entre las curvas $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ y $g(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$.



Ejemplo 58

Calcular el área comprendida entre las curvas $y = e^{-|x|}$, el eje X y las rectas $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 2$.



Ejercicios propuestos

1. Calcular el área encerrada por las curvas $y = e^x, y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

2. Calcular el área acotada por la curva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

3. Calcular el área encerrada por la curva $y = |\sin x|$ y el eje X cuando $x \in [0, 4\pi]$.

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.