Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre II 2023

Tarea 5

---

1. Sea Θ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ el argumento principal de los números

$$z_n = 1 + i\frac{(-1)^n}{n^2} \tag{1}$$

y muestre porque

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_n = 0. \tag{2}$$

Solución: Para $n > 1$ tenemos que

$$|\mathrm{Im}(z)| < 1 \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{3}$$

Así que, para $n > 1$, el argumento de z siempre está en el rango $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$ (que también significa que es el argumento principal) y podemos aplicar el arcotangente para calcular el argumento:

$$\Theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \tag{4}$$

Este corresponde a un ángulo que se va a cero en el límite, oscilando entre un valor infinitesimal positivo y negativo.

2. Muestre que cuando $0 < |z| < 4$

$$f(z) = \frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}. \tag{5}$$

Ojo: esta pregunta NO requiere el uso de las series de Laurent.

Solución: Escribimos la función así:

$$f(z) = \frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z(1 - \frac{1}{4}z)} = \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z} \tag{6}$$

Si tenemos $|z| < 4$ entonces $|(1/4)z| < 1$ y podemos aplicar la serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}z\right)^n \qquad (|z| < 4) \tag{7}$$

Por lo tanto tenemos

$$f(z) = \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z\right)^n = \frac{1}{4z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}z^{n-1} \qquad (0 < |z| < 4) \tag{8}$$

donde tenemos que excluir el punto $z = 0$ por la singularidad allí. Cambiamos índice en la suma: $n \to n+1$ y tenemos

$$f(z) = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}} \qquad (0 < |z| < 4) \tag{9}$$

Aunque hemos llegado a esta serie solamente considerando una serie de Taylor (es decir, potencias positivas o nula) el resultado corresponde a una serie de Laurent, por la singularidad en el origen!

3. Muestre que cuando $1 < |z| < \infty$ existe una representación de la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+(1/z)} \tag{10}$$

en potencias negativas dada por:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}. \tag{11}$$

Ojo: esta pregunta SI es una aplicación de las series de Laurent.

Solución: La manera más rápida de obtener la respuesta es con la serie geométrica de nuevo:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z| < 1) \tag{12}$$

Si reemplazamos $z \to 1/z$ en esta serie, sujeto a la condición $1 < |z| < \infty$, tenemos

$$\frac{1}{1+(1/z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} \qquad (1 < |z| < \infty) \tag{13}$$

Entonces

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+(1/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}} \qquad (1 < |z| < \infty) \tag{14}$$

Cambiamos índice $n \to n-1$ y podemos escribir

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+(1/z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n} \qquad (1 < |z| < \infty) \tag{15}$$

Notar que la potencia de -1 podría ser $n-1$, pero es más convencional escribir $n+1$. Es equivalente ya que cada valor impar/par de n es un valor par/impar de $n \pm 1$.

4. (a) Sea $f(z)$ una función analítica en algún dominio anular en torno del origen que contiene al círculo unitario $z = e^{i\phi}$ $(-\pi \le \phi \le \pi)$. Usando ese círculo para calcular los coeficientes de la serie de Laurent, muestre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right]d\phi \tag{16}$$

donde z es cualquier punto en el dominio anular.

Solución: Los coeficientes de la serie de Laurent son

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \tag{17}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ para los a_n y $n = 1, 2, \ldots$ para los b_n. En este caso tenemos C como el círculo unitario alrededor del origen con parametrización $z = e^{i\phi}$. Entonces $z_0 = 0$. Eligiendo primero $n = 0$, tenemos

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\phi})}{e^{i\phi}} ie^{i\phi}d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi \tag{18}$$

donde hemos reemplazado $z = e^{i\phi}$ en la integral, con límites dados por al rango del argumento principal $-\pi < \arg z < \pi$ para parametrizar el círculo. En la serie de Laurent el término con coeficiente a_0 corresponde al término constante, así que no está multiplicado por ningún factor de z.

Ahora consideramos los coeficientes a_n con $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\phi})ie^{i\phi}d\phi}{e^{in\phi}e^{i\phi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\frac{1}{e^{in\phi}} \tag{19}$$

Así que los términos en la serie con coeficientes a_n son

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n \tag{20}$$

Para los coeficientes b_n con $n \geq 1$ tenemos:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\phi})ie^{i\phi}d\phi}{e^{-in\phi}e^{i\phi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\frac{1}{e^{-in\phi}} \tag{21}$$

Así que los términos en la serie con coeficientes b_n son

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n \tag{22}$$

Sumando las ecuaciones (18), (20) y (22) llegamos al resultado.

(b) Escribe $u(\theta) = \text{Re}[f(e^{i\theta})]$ y muestre como sigue de la expansión en la parte (a) que

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]d\phi. \tag{23}$$

Esta es una forma de la expansión de la función $u(\theta)$ de valores reales en una **serie de Fourier** en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Solución: Evaluando la función en el círculo unitario tenemos $f(z) = f(e^{i\theta})$ y la serie es

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{e^{i\theta}}\right)^n\right]d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right]d\phi \qquad (24) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})2\cos[n(\theta-\phi)]d\phi \end{aligned}$$

Tomando la parte real tenemos

$$u(\theta) = \text{Re}[f(e^{i\theta})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]d\phi \tag{25}$$

5. Encuentre la serie de Taylor de la función

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2} \tag{26}$$

alrededor del punto $z_0 = 2$. Después, por derivación de la serie término por término, muestre que

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2|<2) \tag{27}$$

Solución: Considerando valores de z cerca del punto $z_0 = 2$ podemos aplicar la condición $|z-2| < 2$ tal que se puede aplicar la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+(z-2)/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2|<2) \tag{28}$$

Por lo tanto la expansión de $1/z$ alrededor de $z_0 = 2$ es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2|<2) \tag{29}$$

Ahora derivamos la serie término por término:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{1}{2}\left(\frac{z-2}{2}\right)^{n-1} \quad (|z-2|<2) \tag{30}$$

Finalmente, cambiamos $n \to n-1$:

$$-\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2|<2) \tag{31}$$

6. Muestre que la función definida por las ecuaciones

$$f(z) = \begin{cases}(1-\cos z)/z^2 & z \neq 0\\ 1/2 & z = 0\end{cases} \tag{32}$$

es entera (por uso de series!).

Solución: La representación de $\cos z$ como serie de Taylor es

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \tag{33}$$

Entonces, para $(1-\cos z)/z^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}(1-\cos z) &= \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+2)!}\end{aligned} \tag{34}$$

En el punto $z = 0$ el único término de la serie es $1/2$. Así que esta serie corresponde a una definición de la función en todo el plano complejo. Por ser una serie de potencias, corresponde a una función analítica.

7. Por multiplicación de series muestre que

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < 1) \tag{35}$$

Solución: Escribimos la función así:

$$\frac{1}{z}e^z\frac{1}{1+z^2} \tag{36}$$

Hay una expansión como serie de potencias de la función $\exp(z)$. En el caso de $|z| < 1$ también tenemos $|z^2| < 1$. Así que la expansión de la función $1/(1+z^2)$ alrededor del origen es

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + \mathcal{O}(z^4) \tag{37}$$

La expansión de $\exp(z)$ es

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \tag{38}$$

El producto de las dos series y el factor $1/z$ es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}e^z\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z}\left(1 - z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right)\left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4)\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - z^2 - z^3 + \mathcal{O}(z^4)\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(1 + z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{5}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4)\right) \\
&= \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^3)
\end{aligned} \tag{39}$$

8. Por división de series muestre que

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \cdots \quad (0 < |z| < 2\pi) \tag{40}$$

Solución: Una forma de resolver este problema es con división polinómica. La serie en el denominador es

$$\begin{aligned}
e^z - 1 &= \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \mathcal{O}(z^5)\right) - 1 \\
&= z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \mathcal{O}(z^5) \\
&= z\left(1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{4!}z^3 + \mathcal{O}(z^4)\right)
\end{aligned} \tag{41}$$

Ahora aplicamos división polinómica con la serie en parentesis:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{4!}z^3 + \mathcal{O}(z^4)} \tag{42}$$

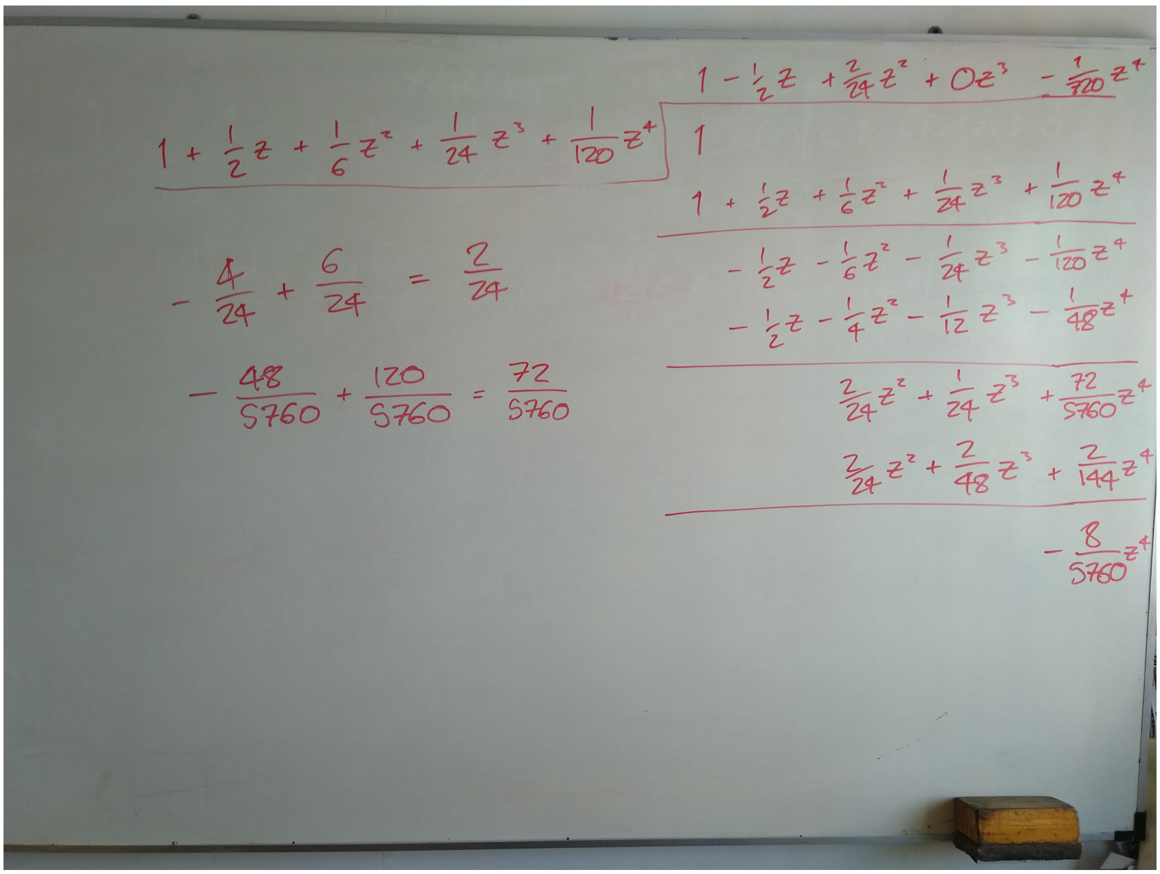

Figure 1: División polinómica.

El procedimiento está en la imagen en Fig. 1. Después multiplicamos por $1/z$ para obtener la serie final.

La otra opción es reconocer que

$$1 = (e^z - 1) \cdot S(z) \tag{43}$$

donde $S(z)$ es la serie que buscamos. Ya que el primer término de $e^z - 1$ es de orden z, significa que el primer término de $S(z)$ debe ser de orden $1/z$. Así que obtenemos

$$1 = \left(z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{5!}z^5 + \mathcal{O}(z^6) \right) \cdot \left(a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \cdots \right) \tag{44}$$

Multiplicando series, tenemos

$$\begin{aligned} 1 = {} & a_{-1} + a_{-1}\frac{1}{2}z + a_{-1}\frac{1}{6}z^2 + a_{-1}\frac{1}{24}z^3 + a_{-1}\frac{1}{120}z^4 + a_0 z + a_0\frac{1}{2}z^2 + a_0\frac{1}{6}z^3 + a_0\frac{1}{24}z^4 \\ & + a_1 z^2 + a_1\frac{1}{2}z^3 + a_1\frac{1}{6}z^4 + a_2 z^3 + a_2\frac{1}{2}z^4 + a_3 z^4 + \mathcal{O}(z^5) \end{aligned} \tag{45}$$

Colectamos términos del mismo orden en z:

$$\begin{aligned} 1 &= a_{-1} \\ 0 &= \frac{1}{2}a_{-1} + a_0 \\ 0 &= \frac{1}{6}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \\ 0 &= \frac{1}{24}a_{-1} + \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + a_2 \\ 0 &= \frac{1}{120}a_{-1} + \frac{1}{24}a_0 + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + a_3 \end{aligned} \tag{46}$$

La solución a la primera ecuación es $a_1 = 1$. Sustituimos este resultado en la segunda para obtener $a_0 = -1/2$. La tercera ecuación es

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + a_1 = 0 \tag{47}$$

que tiene solución $a_1 = \frac{1}{12}$. La cuarta ecuación es

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + a_2 = 0 \tag{48}$$

que tiene solución $a_2 = 0$. Finalmente, la quinta ecuación es

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + a_3 = 0 \tag{49}$$

Encontrando el denominador común tenemos $a_3 = -1/720$.