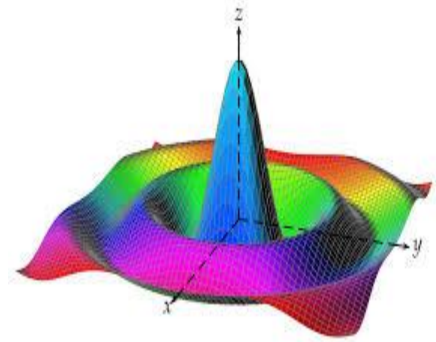


Funciones continuas

Definición

Sean U un conjunto abierto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función vectorial y a un punto de acumulación de U, entonces f es continua en a sí y sólo si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La definición anterior trae implícita tres condiciones:

1) $f(a)$ está definida $(es\ decir\ , a \in dom\ f)$
2) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Observaciones

Si cualquiera de estas tres condiciones no se cumple, se dice que f es discontinua en a y se presentan dos casos:

1.- Si no existe $\lim_{x \to a} f(x)$, se habla de una discontinuidad irreparable en a o discontinuidad esencial.

2.- Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y se cumple 1) pero no se cumple 3), se dice que f es discontinua reparable en a. Ello se debe a que, en estos casos es siempre posible obtener una nueva función, que se diferencia con f sólo en a, y que es continua en a.

3.- Una función vectorial $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es continua en a sí y sólo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ para } a \in U$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\,, \exists \delta > 0 \text{ tal que para } x \in U,$$
$$\text{Si } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\,, \exists \delta > 0 \text{ tal que para } x \in U,$$
$$\text{Si } x \epsilon B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon)$$

La condición

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

dice que en las funciones continuas no es necesario el cálculo de límites, sólo hay que sustituir por el valor de la función en el punto.

Ejemplo

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} (3x^2 + xy) = 3(-1)^2 + (-1)(2) = 1 = f(-1,2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left(\frac{x - 3xy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2 - 3(2)(-2)}{4 + 4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = f(2,-2)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(5,-1,3)} \frac{\sqrt{x + y - z}}{xyz} = \frac{\sqrt{5 - 1 - 3}}{(5)(-1)(3)} = \frac{1}{-15} = f(5,-1,3)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,02)} (x - y^2 + z, xy - 4z, xyz)$$

$$= \left(\lim_{(x,y,z)\to(1,02)} x - y^2 + z, \lim_{(x,y,z)\to(1,02)} xy - 4z, \lim_{(x,y,z)\to(1,02)} xyz\right)$$

$$= (3, -8,0) = f(1,0,2)$$

Definición

Una función f es continua en un abierto U, si es continua en cada punto de dicho abierto.

Proposición

Sea f una función vectorial $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f es continua en a sí y sólo si cada una de las funciones coordenadas $f_1, \cdots, f_m$ es continua en a.

En efecto : f es continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a} f_1(x), \cdots, \lim_{x\to a} f_m(x)\right) = \big(f_1(a), \cdots, f_m(a)\big)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_1(x) = f_1(a), \cdots, \lim_{x\to a} f_m(x) = f_m(a)$$

$\Leftrightarrow$ las funciones coordenadas son continuas en a .

Ejemplos

1) Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función identidad, $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

2) Sea $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=0}^{m} a_{i_1}\, a_{i_2\cdots i_n}\; x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

es función polinomial de grado m . Un polinomio es continuo en todo $\mathbb{R}^n$. Caso particular

$$p(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}\, x^i y^j \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.$$

Sea $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de n variables y $q(x)\neq 0$, $\forall x, f(x)$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades

1.- Para funciones vectoriales, la suma y multiplicación por escalares de funciones continuas en a son funciones continuas en a.

2.- Para funciones escalares la multiplicación de funciones en a es continua en a y la división de funciones continuas en a es continua en a siempre que en a el denominador no sea igual a 0.

3.- Sean f y g dos funciones tales que la función compuesta $g\circ f$ esta definida en a, siendo $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$.

Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, la función compuesta $g\circ f$ es continua en a. $\boxed{(g\circ f)(a)=g\big(f(a)\big)}$

Ejemplo 1

Las funciones $f(x,y)=\frac{x}{y-1}$ y $g(x,y)=\frac{3x+2}{y-1}$ son continuas en $(5,0)$ pues:

$$(5,0)\in Domf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y-1\neq 0\}=Domg$$

Además $f(x,y)+g(x,y)=\frac{4x+2}{y-1}$ es continua en $(5,0)$, pues

$$(5,0)\in Dom(f+g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y-1\neq 0\}$$

Ejemplo 2

Sea la función $z=f(x,y)=\frac{x+y}{y}$ y $g(z)=sen\,z$, analizar la continuidad de $w=g\big(f(x,y)\big)$ en $(-1,-2)$.

Solución

Siendo $f(x,y)$ continua en $(-1,-2)$ pues $(-1,-2) \in Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \neq 0\}$, se tiene que $z_1 = f(-1,-2) = \frac{3}{2}$, entonces como $sen\, z_1$ es continua en $\frac{3}{2}$, la función compuesta $w = g\big(f(x,y)\big) = sen\,\frac{x+y}{y}$ es continua en $(-1,-2)$.

$g(z_1) = g\big(f(-1,-2)\big) = g\left(\frac{3}{2}\right) = sen\ \frac{3}{2} \Rightarrow g \circ f$ es continua en $(-1,-2)$

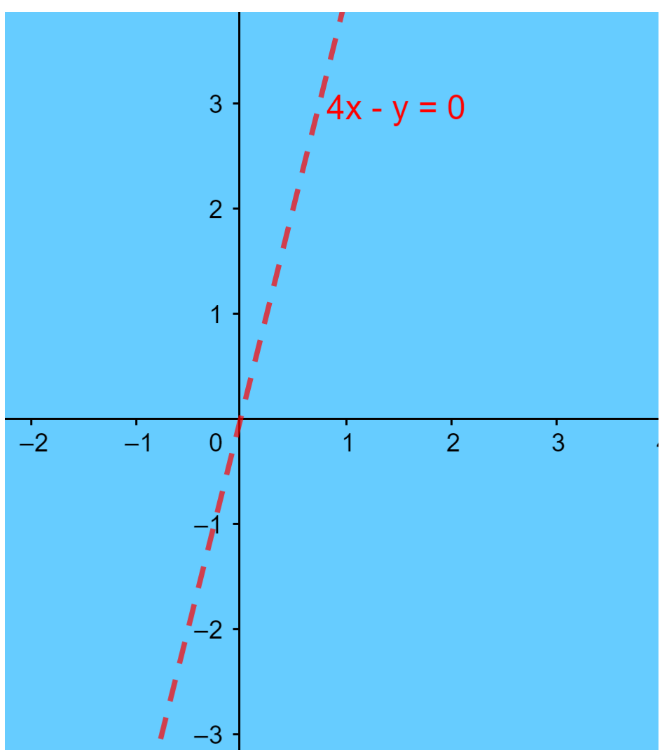
Ejercicio 3

Analizar la región del plano en que la función $f(x,y) = \frac{x^2+y-4}{4x-y}$

es continua.

Solución

$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x - y \neq 0\}$ luego la función es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x - y = 0\}$ **=** todo el plano menos la recta**.**



Ejemplo 4

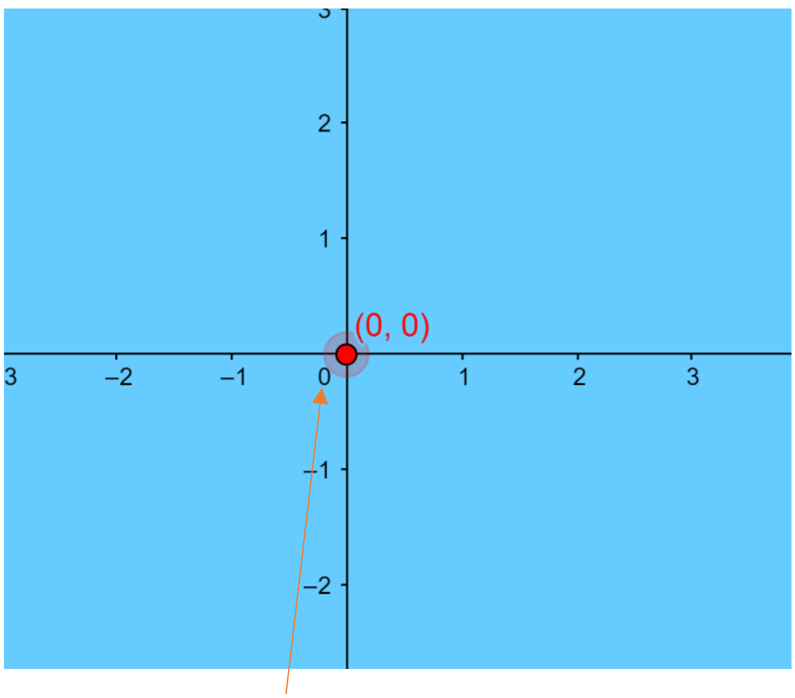
Analizar la región del plano en que la función

$$f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$$

es continua.

Solución

$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} / x^2 + y^2 > 0\}$ luego la función es continua en $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} - \{(0,0)\}$ = todo el plano menos el oigen**.**



Plano perforado en el origen

Ejemplo 5

Sea f la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & si\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & si\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Determinar la continuidad de f . ¿Cuál es la región de continuidad de f?

Solución

$$Dom\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} /\ x^2 + y^2 < 1\ \}$$
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} /\ x^2 + y^2 > 1\}$$
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} /\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Sean

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} / x^2 + y^2 < 1\ \}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} /\ x^2 + y^2 > 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} /\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Luego

$$Dom\ f = A \cup B \cup C = \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, la condición

$$f(a, b)\ existe\ \ \forall (a, b) \in A \cup B \cup C$$

Consideremos ahora los puntos (a, b) tal que $a^2 + b^2 \neq 1$, entonces se tiene dos casos:

Si $a^2 + b^2 < 1$, entonces $\forall (x, y) \in A$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 + y^2)$$
$$= a^2 + b^2 = f(a, b)$$

Si $a^2 + b^2 > 1$, entonces $\forall (x, y) \in B$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} 0 = 0 = f(a, b)$$

De este modo, f es continua en todo los puntos (a, b) para los cuales $a^2 + b^2 \neq 1$ eso es, continua en $A \cup B$.

Finalmente veremos la continuidad de f en los puntos $(a, b) \in C$, esto es, en los puntos (a, b) para los cuales $x^2 + y^2 = 1$. Para ello hay que determinar si se verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \text{ existe y es igual a 1.}$$

Sea S_1 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que se cumple, $x^2 + y^2 \leq 1$ y S_2 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que se cumple, $x^2 + y^2 > 1$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_1}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_1}} (x^2 + y^2) = a^2 + b^2 = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_2}} (0) = 0$$

Ya que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ P\in S_2}} f(x, y)$$

Concluimos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ no existe. Por tanto, f es discontinua en todos los puntos $(a, b) \in C$.

Resumiendo

La región de continuidad de la función f consta de todos los puntos en el plano XY excepto aquellos en la circunferencia unitaria, $x^2 + y^2 = 1$. En la figura siguiente se refleja claramente la discontinuidad.

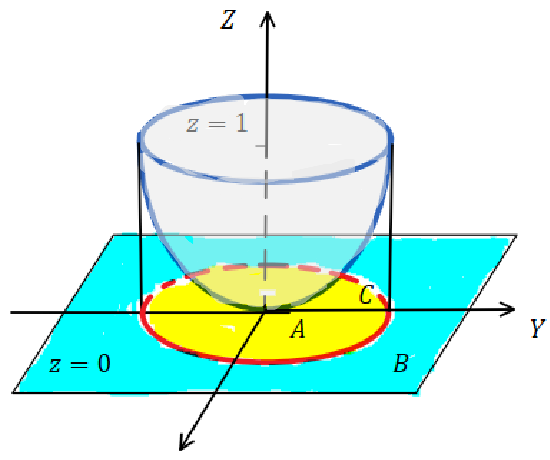


Gráfico de f

Ejemplo 6

$$Sea\ f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x-2y+3z}{4x^2-y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (1,0,-1) \\ -\dfrac{2}{5} & si\ (x,y,z) = (1,0,-1) \end{cases}$$

Determine si f es o no continua en $(1,0,-1)$.

Solución

Como

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{x-2y+3z}{4x^2-y^2+z^2} = -\frac{2}{5}\ ;$$

$$f(1,0,-1) = -\frac{2}{5}$$

Entonces se cumple que

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} f(x,y,z) = -\frac{2}{5} = f(1,0,-1)$$

Por lo tanto, se concluye que f es continua en $(1,0,-1))$.

Ejemplo 7

Sea $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-z}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{z}} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Determine si f es o no continua en (0,0,0).

Solución

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{z}}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x^2+y^2-z)\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x^2+y^2-z)\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z}\right)}{x^2+y^2-z}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z} = 0$$

Y

$$f(0,0,0) = 0$$

Entonces se cumple

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 = f(0,0,0)$$

Y por tanto f es continua en (0,0,0).

Ejemplo 8

Sea $f(x,y,z) = \begin{cases} 4+xyz & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ -1 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ función

Estudiar la continuidad en $(0,0,0)$ de la función.

Solución

Se tiene $f(0,0,0) = -1$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 4$ luego la función es discontinua evitable en el origen.

Entonces definiendo la función

$$g(x,y,z) = \begin{cases} 4 + xyz & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 4 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

resulta ser esta continua en todo punto de $\mathbb{R}^3$.

Nótese que g es casi igual a f salvo en el punto $(0,0,0)$.

Ejemplo 9

Determinar el conjunto de los puntos (x,y,z) tal que la función

$f(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ es continua.

Solución

La función es continua en la región cuyos puntos cumplen la condición $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ luego f es continua en su dominio:

$$Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

Ejemplo 10

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4 + y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función entorno al punto $(0,0)$.

Solución

Mediante límites sucesivos

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right)=0$$

Nada se puede concluir.

Mediante trayectorias radiales: $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2m^2x^2}{x^4+m^4x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^4m^2}{x^4(1+m^4)}=\frac{3m^2}{1+m^4}$$

Para diversos valores de m existen diversos límites luego se concluye que no existe límite, por tanto, la función f presenta una discontinuidad esencial en el punto $(0,0)$.

Ejemplo 11

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 5 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función entorno al punto $(0,0)$.

Solución

1. $f(0,0)=5$ por tanto, la condición 1) de la definición se cumple.

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Esto último se cumple pues

$$0 \leq \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{5x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{5x^2|y|}{x^2} = 5|y|$$

$$0$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$$

entonces se deduce que f es discontinua en el punto $(0,0)$. Sin embargo, esta discontinuidad es evitable pues es posible redefinir la función f de la siguiente manera:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es continua en el origen y observe que es casi igual a f salvo en el punto $(0,0)$.

Ejemplo 12

Determine un valor para $k \in \mathbb{R}$ de tal manera que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3(y+2)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2} & si \; (x,y) \neq (1,-2) \\ k & si \; (x,y) = (1,-2) \end{cases}$$

sea continua en $(1,-2)$.

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^3(y+2)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^3v^3}{u^2+v^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^3(\rho\operatorname{sen}\theta)^3}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3cos^3\theta\cdot\rho^3sen^3\theta}{\rho^2cos^2\theta+\rho^2sen^2\theta}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6cos^3\theta\cdot sen^3\theta}{\rho^2(cos^2\theta+sen^2\theta)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6cos^3\theta\cdot sen^3\theta}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^4cos^3\theta\cdot sen^3\theta = 0$$

$$0 \le |F(\rho,\theta)-0| = |\rho^4cos^3\theta\cdot sen^3\theta|$$

$$= \rho^4|cos^3\theta||sen^3\theta| \le \rho^4(1)(1) = \rho^4 = \varphi(\rho)$$

Ahora

$$\lim_{\rho\to 0}\varphi(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\rho^4 = 0$$

Por consiguiente

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^3(y+2)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2} = 0$$

$$\therefore\ para\ k=0\ \ f\ es\ continua\ en\ (1,-2)$$