Electromagnetismo (LFIS 211)

Licenciatura en Física

Profesor: J. R. Villanueva Semestre I 2023

Prueba 2: Solucionario

---

1. Una carga puntual q es localizada a una distancia d de dos semiplanos conductores perpendiculares y puestos a tierra. Determine la expresión de
   (a) el potencial y el campo eléctrico en un punto arbitrario de la región física, y
   (b) la densidades superficiales de carga inducidas en los dos planos.
2. Un condensador está formado por dos esferas metálicas de radios a y b, y cuyos centros están a la distancia c, en que $c \gg a, b$, como es mostrado en la figura adjunta (izquierda). Calcule su capacidad.
3. Una cáscara esférica de radio interior a y exterior b está hecha de un material dieléctrico con una polarización
$$\vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r},$$
   donde k es una constante. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.
4. El puente de Wheatstone es un arreglo que permite determinar el valor de una resistencia desconocida, R_x, en términos de otras resistencias conocidas, R_1, R_2 y R_3, la cual es una resistencia variable que se ajusta para equilibrar al puente. En este regimen de equilibrio no pasa corriente por el galvanómetro, G, como se muestra en la figura derecha.
   (a) Determine el valor de R_x en el regimen de equilibrio.
   (b) ¿Para cuál valor R_3 la potencia disipada en R_x es máxima? Determine los valores de R_x, las corrientes y la potencia disipada en R_x.

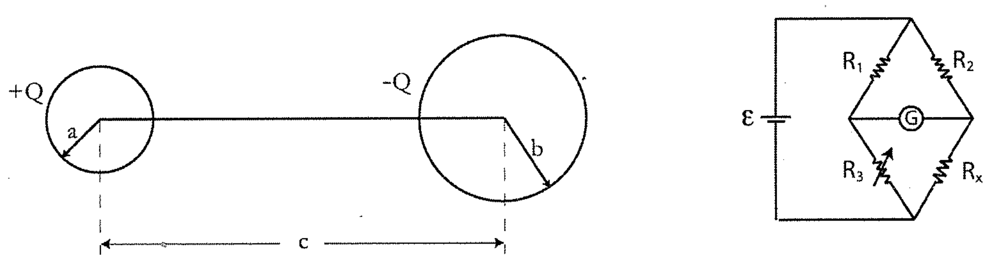
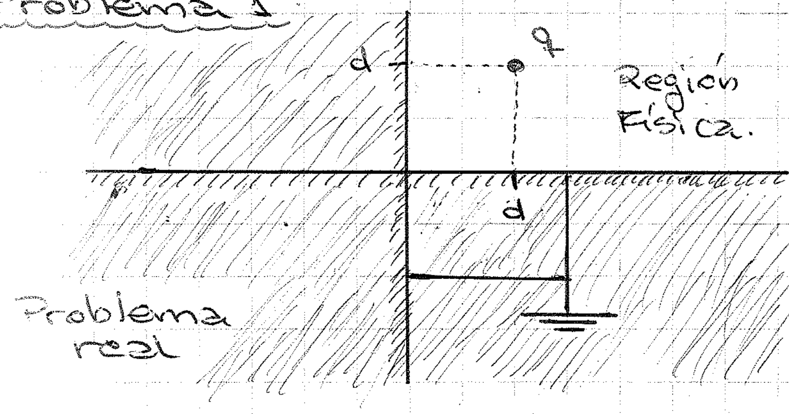
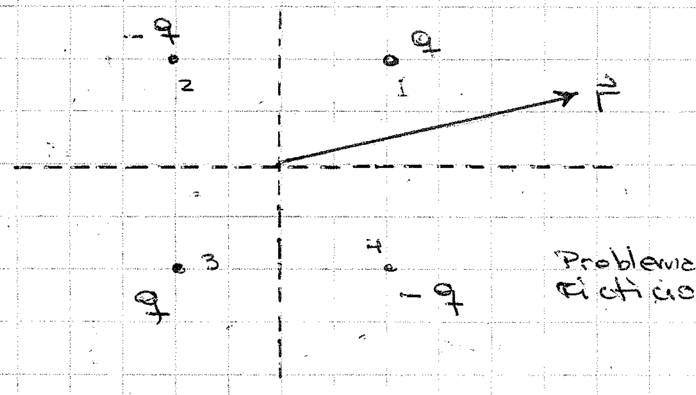


Figure 1: Izquierda: Figura del problema 2. Derecha: Figura del problema 4.

Problema 1:





Para el problema ficticio tenemos

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} + \frac{q_4}{|\vec{r}-\vec{r}_4|}\right\}$$

con $q_1 = q$; $\vec{r}_1 = d\hat{i} + d\hat{j}$; $q_2 = -q$, $\vec{r}_2 = -d\hat{i} + d\hat{j}$
$q_3 = q$; $\vec{r}_3 = -d\hat{i} - d\hat{j}$; $q_4 = -q$, $\vec{r}_4 = d\hat{i} - d\hat{j}$
$\wedge$ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\therefore \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+(y-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+(y-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+(y+d)^2}} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+(y+d)^2}}\right\} = \Phi(x,y)$$

con esto, es claro que $\Phi(0,y) = \Phi(x,0) = 0$, como lo requiere el problema real.

El campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(x-d)\hat{i}+(y-d)\hat{j}}{\sqrt{(x-d)^2+(y-d)^2}} - \frac{(x+d)\hat{i}+(y-d)\hat{j}}{\sqrt{(x+d)^2+(y-d)^2}} + \frac{(x+d)\hat{i}+(y+d)\hat{j}}{\sqrt{(x+d)^2+(y+d)^2}} + \right.$$

$$\left. - \frac{(x-d)\hat{i}+(y+d)\hat{j}}{\sqrt{(x-d)^2+(y+d)^2}}\right\}$$

(b) Densidades de cargas inducidas. $\sigma = \epsilon_0 \vec{E}\big|_s \cdot \hat{n}$

- En el plano $x = 0$; $\hat{n} = \hat{i} \Rightarrow \sigma_x(y)$

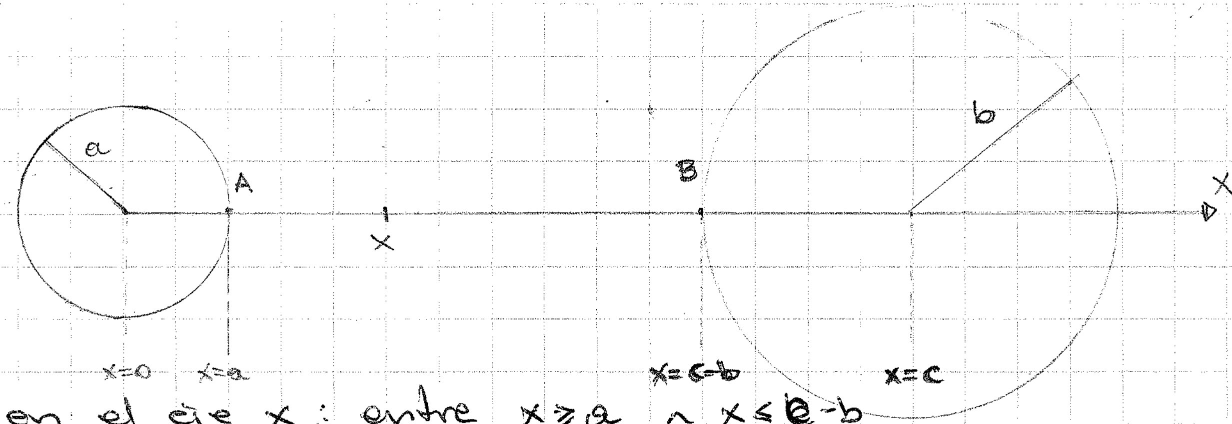
$$\sigma_x(y) = \frac{q}{4\pi}\left\{ \frac{-d}{\sqrt{d^2+(y-d)^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2+(y-d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{d^2+(y+d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{d^2+(y+d)^2}} \right\}$$

$$\boxed{\sigma_x(y) = \frac{qd}{2\pi}\left\{ \frac{1}{\sqrt{d^2+(y+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2+(y-d)^2}} \right\}}$$

- En el plano $y = 0$; $\hat{n} = \hat{j} \Rightarrow \sigma_y(x)$

$$\boxed{\sigma_y(x) = \frac{qd}{2\pi}\left\{ \frac{1}{\sqrt{d^2+(x+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2+(x-d)^2}} \right\}}$$

Problema 2



El potencial en el eje x; entre $x \geq a \wedge x \leq c-b$

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (c-x)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{c-x}\right]}$$

$\therefore$ La diferencia de potencial entre los puntos A y B

$$\Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = \Phi(x=a) - \Phi(x=c-b)$$

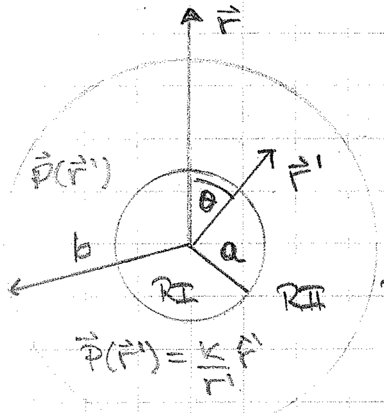
$$\Delta\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} + \frac{1}{b}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b}\right]$$

$$b \ll c \Rightarrow c-b \simeq c \quad \wedge \quad a \ll c \Rightarrow c-a \simeq c$$

$$\therefore \Delta\Phi \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right]$$

Capacidad: $C = \dfrac{Q}{\Delta\Phi} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}}}$

Problema 3: i) Cálculo directo: $\Phi(\vec{r}) = \Phi_\sigma(\vec{r}) + \Phi_\rho(\vec{r})$



- $\Phi_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\forall\Sigma} \frac{\sigma_P(\vec{r}')\, d\vec{a}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$; $\rho_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\forall V} \frac{\rho_p(\vec{r}')\, d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

- $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_\Sigma$; $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

con $\vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r} \Rightarrow \sigma_{P_a} = \frac{k}{r}\hat{r}\cdot(-\hat{r})\Big|_{r=a} = -\frac{k}{a}$

$$\rho_p = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r^2} \; ; \; \sigma_{P_b} = \frac{k}{r}\hat{r}\cdot(\hat{r})\Big|_{r=b} = \frac{k}{b}$$

$$\Phi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=a} \frac{\sigma_{Pa}\cdot a^2\, d\phi' \sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta'}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=b} \frac{\sigma_{P_b}\, b^2\, d\phi' \sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta'}}$$

$$\Phi_\sigma = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\, I(r,a) + b\, I(r,b)\right\} \; ; \; I(r,x) = \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos\theta'}}$$

$$I(r,x) = \int_{(r-x)^2}^{(r+x)^2} u^{-1/2}\frac{du}{2rx} = \frac{1}{rx}\left\{r+x-|r-x|\right\} = \frac{2}{r} \qquad (r>x)$$

$$I(x,r) = \frac{1}{rx}\left\{r+x-|x-r|\right\} = \frac{2}{x} \qquad (x>r)$$

RI: $0<r<a<b$
$$\Phi_\sigma = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\, I(a,r) + b\, I(b,r)\right\} = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\cdot\frac{2}{a} + b\frac{2}{b}\right\} = 0$$

RII: $a<r<b$
$$\Phi_\sigma = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\, I(r,a) + b\, I(b,r)\right\} = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\cdot\frac{2}{r} + b\cdot\frac{2}{b}\right\}$$

$$\Phi_\sigma = \frac{k}{\epsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

RIII: $b<r<\infty$
$$\Phi_\sigma = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\, I(r,a) + b\, I(r,b)\right\} = \frac{k}{2\epsilon_0}\left\{-a\frac{2}{r} + b\cdot\frac{2}{r}\right\} = \frac{k}{\epsilon_0}\frac{(b-a)}{r}$$

$$\Phi_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{(-k/r'^2)\, r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}} = -\frac{k}{2\epsilon_0}\int_a^b I(r,r')\,dr'$$

$$\Phi_\rho = -\frac{k}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{(r+r'-|\vec{r}-\vec{r}'|)}{rr'}dr' = -\frac{k}{2\epsilon_0 r}\int_a^b \frac{r+r'-|r-r'|}{r'}dr'$$

RI: $r'>r$ $\quad \Phi_\rho = -\frac{k}{2\epsilon_0}\cdot 2\int_a^b \frac{dr'}{r'} = -\frac{k}{\epsilon_0}\ln(b/a)$

RII: $a<r<b$ $\quad \Phi_\rho = -\frac{k}{2\epsilon_0}\left\{\int_a^r \frac{\cancel{r}+r'-\cancel{r}+r'}{rr'}dr' + \int_r^b \frac{r+\cancel{r'}-\cancel{r'}+r}{rr'}dr'\right\}$

$$\Phi_\rho = -\frac{k}{\cancel{2}\epsilon_0}\left\{\frac{\cancel{2}}{r}\int_a^r dr' + \cancel{2}\int_r^b \frac{dr'}{r'}\right\} = -\frac{k}{\epsilon_0}\left\{\frac{r-a}{r} + \ln\left(\frac{b}{r}\right)\right\}$$

RIII: $b<r$ $\quad \Phi_\rho = -\frac{k}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{\cancel{r}+r'-\cancel{r}+r'}{rr'}dr' = -\frac{k}{\cancel{2}\epsilon_0}\cdot\frac{\cancel{2}}{r}\int_a^b dr' = -\frac{k}{\epsilon_0}\frac{(b-a)}{r}$

Somando los contribuciones

RI: $\Phi_1(r) = 0 - \frac{k}{\epsilon_0}\ln(b/a) \Rightarrow \boxed{\Phi_1(r) = -\frac{k}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ $\quad 0\leq r\leq a$

RII: $\Phi_2(r) = \cancel{\frac{k}{\epsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)} - \cancel{\frac{k}{\epsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)} - \frac{k}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right)$

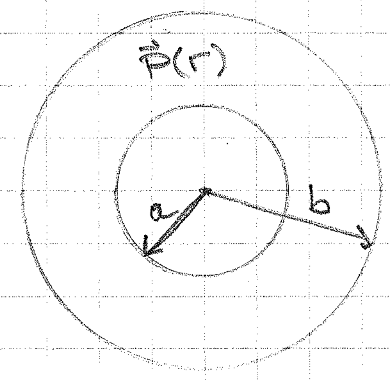
$$\rightarrow \boxed{\Phi_2(r) = -\frac{k}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right)} \quad a\leq r\leq b$$

RIII: $\Phi_3(r) = \frac{k}{\epsilon_0}\frac{(b-a)}{r} - \frac{k}{\epsilon_0}\frac{(b-a)}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_3(r)=0}$ $\quad b\leq r<\infty$

campo eléctrico: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d}{dr}\Phi\,\hat{r} \Rightarrow$ RI $\wedge$ RIII: $\boxed{\vec{E}=\vec{0}}$

En RII: $\boxed{\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{r} = -\frac{\vec{P}(r)}{\epsilon_0}}$

ii) Ley de Gauss generalizada: Dieléctrico lineal, entonces $\vec{E} \parallel \vec{P} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{P}$



$\therefore \exists$ simetría esférica respecto al centro de la distribución presentada.
$\vec{D}$ será normal a toda esfera centrada en el origen, y tendrá el mismo valor sobre toda la superficie que envuelve a dicha esfera.
Luego, es posible utilizar la ley de Gauss generaliz.

$$\oint_{SG} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{libre} = 0 \quad \text{pues } \nexists \text{ carga libre}$$

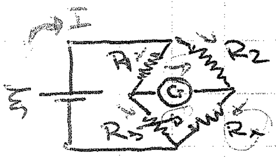
$$\nexists \; \vec{D} = \vec{0} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}}$$

Región I: $0 < r < a$: $\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{0}$

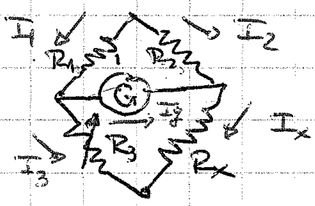
Región II $a < r < b$ $\vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{k}{r}\hat{r}$

Region III: $b < r < \infty$ $\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \vec{0}$

Problema 4: Fuera del equilibrio:



$$i)\ -I_1R_1 - I_gR_g + I_2R_2 = 0$$
$$ii)\ -I_3R_3 + I_xR_x + I_gR_g = 0$$



En el equilibrio $I_g = 0 \rightarrow I_1 = I_3 \wedge I_2 = I_x$

$$\left.\begin{array}{ll} i): & +I_1R_1 = I_2R_2 \\ ii): & I_1R_3 = I_2R_x \end{array}\right\} \quad \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x} \Rightarrow \boxed{R_x = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)R_3}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_2}I_1}$$

También $\xi - I_2(R_2+R_x) = 0 \Rightarrow \xi = I_2R_2\left(1+\frac{R_3}{R_1}\right) = I_2\frac{R_2}{R_1}(R_1+R_3)$

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_2}\frac{\xi}{(R_1+R_3)}}$$

Lo potencia disipada por R_x: $P_x = I_2^2R_x$

$$P_x = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{\xi^2}{(R_1+R_3)^2}\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right)R_3 = \frac{R_1}{R_2}\xi^2\frac{R_3}{(R_1+R_3)^2}$$

$$\therefore \frac{dP_x}{dR_3} = 0 = \frac{R_1}{R_2}\xi^2\frac{d}{dR_3}\left[\frac{R_3}{(R_1+R_3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(R_1+R_3)^2} - \frac{2R_3}{(R_1+R_3)^3}\right] = 0 = \frac{R_1+R_3-2R_3}{(R_1+R_3)^3} = \frac{R_1-R_3}{(R_1+R_3)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_3 = R_1}$$

$$\therefore \boxed{R_x = R_2};\ \boxed{I_2 = \frac{\xi}{2R_1}};\ \boxed{I_1 = \frac{\xi}{2R_2}};\ \boxed{P_x = \frac{\xi^2}{4R_2}}$$