ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n

Definición Una ecuación diferencial lineal de orden n, es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

Si en la edo $q(x) = 0$ entonces la ecuación se dice homogénea
y si $a_0(x)$, $a_1(x)$, ...,$a_n(x)$ son constantes, la ecuación se dice a coeficientes constantes.

Teorema(De existencia y unicidad)

Si $a_0(x)$,..., $a_{n-1}(x)$, $q(x)$ son continuas en un intervalo I, $x_0 \in I$ y si $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes, entonces existe una única solución $y = f(x)$ de la ecuación:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

que es válida para todo $x \in I$ y cumple que:

$$y(x_0) = y_0;\ \ y'(x_0) = y_1; \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Operadores Diferenciales

Un operador diferencial de orden n se define como una función sobre $\mathcal{C}^n(I)$ de las funciones con n-ésima derivada continua en un intervalo I:

$$L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

definido por $L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_1(x)D + a_0(x)$
donde $a_i(x)$ son funciones continuas en I.
de esta forma:

$$\begin{aligned} L(f) &= a_n(x)D^n(f) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(f) + ... + a_1(x)D(f) + a_0(x)f \\ &= a_n(x)\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{df}{dx} + a_0(x)f \end{aligned}$$

En particular, si $y = f(x)$, entonces :

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

Proposición
El operador diferencial $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}^n(I)$ es una transformación lineal, es decir:

$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ para $f, g \in \mathcal{C}^n(I),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Demostración Consecuencia inmediata de la linealidad del operador derivación.

Observación Por lo anterior un a edo lineal de orden n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

podemos anotarla: $L(y) = q(x)$

Teorema
Dado un operador diferencial de orden n, $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}^n(I)$, se tiene que el kernel, $\text{Ker}(L) = \{y \in \mathcal{C}^n(I) \,/\, L(y) = 0\} \leq \mathcal{C}^n(I)$ es un subespacio vectorial de dimensión n.

Observación
Una base del espacio Ker(L), $\mathcal{B} = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ se llama un *conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea* $L(y) = 0$.

Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $L(y) = 0$ entonces la solución general es dada por $y = c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n$, para $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$

Ejemplo La ecuación $y'' + y = 0$, tiene conjunto fundamental de soluciones $\{\cos(x), \text{sen}(x)\}$ debido a que la ecuación es de segundo orden y el conjunto es l.i., entonces la solución general es de la forma: $y = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$.

Ecuaciones Lineales Homogéneas y no Homogéneas

Del álgebra lineal sabemos que si $L : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales, entonces se cumple que:

$$S = v_p + Ker(L)$$

donde $S = \{v \in V \,/\, L(v) = w\}$ para algún $w \in W$ y $v_p \in S$ es una solución particular de $L(v) = w$.

Aplicado a ecuaciones diferenciales se tiene que : dada una edo lineal no homogénea de orden n, $L(y) = q(x)$ y se conoce una solución particular y_p. Entonces si $\{y_1, ..., y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, entonces la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = y_p + c_1 y_1 + ... + c_n y_n$$

Esto divide el trabajo de buscar la solución general en dos partes: 1º hallar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y 2º hallar una solución particular de la ecuación no homogénea.

Definición

Dadas las funciones $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ con derivadas hasta el orden $n-1$, se define el **wronskiano** de las funciones por el determinante:

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema

Si $y_1, y_2, ..., y_k$ son soluciones de la edo lineal homogénea de orden n, $L(y) = 0$ definidas en un intervalo I. Entonces el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I, si y sólo si :

$$(\exists x \in I)(W(y_1, y_2, ..., y_k) \neq 0)$$

Ejemplo La ecuación $y'' - y = 0$ tiene las soluciones $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$

y se tiene que: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Teorema

Dado $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un conjunto linealmente independiente de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n, $L(y) = 0$ en un intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_k y_k(x)$$

donde c_i son constantes arbitrarias, para $x \in I$.

Polinomios en el operador D

Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes
podemos tratarlo como un polinomio en D, esto es:

Si $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ y $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$
entonces, $L = p(D)$.
De esta forma si $p(x)$ se factoriza en $\mathbb{R}[x]$ como $p(x) = r(x)q(x)$, entonces
$p(D) = r(D) \circ q(D)$ que por simplicidad anotaremos: $r(D)q(D)$

Ejemplo
Dado $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$
comprobaremos que $p(D) = D^2 - 3D + 2 = (D-1)(D-2)$

$$\begin{aligned}
(D-1)(D-2)y &= (D-1)((D-2)y) \\
&= (D-1)(y' - 2y) \\
&= D(y' - 2y) - (y' - 2y) \\
&= y'' - 2y' - y' + 2y \\
&= y'' - 3y' + 2y \\
&= (D^2 - 3D + 2)y
\end{aligned}$$

Resolución de Ecuaciones Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Consideremos una edo lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes
$L(y) = 0$ donde $L = p(D)$ con $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$

Caso1: $p(D)$ se descompone en n factores lineales distintos

Si $p(D) = (D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$
la ecuación se puede resolver por aplicaciones reiteradas de la ecuación lineal
de primer orden.

Ejemplo Resolver: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Anotamos: $(D^2 - 3D + 2)y = (D-1)(D-2)y$
cambiando de variables: $u = (D-2)y$
se tiene la ecuación lineal de primer orden:

$$(D-1)u = 0$$
$$u' - u = 0 \qquad / \, e^{-x}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x}u)' &= 0 \qquad / \textstyle\int \\ e^{-x}u &= c_1 \\ u &= c_1 e^x \end{aligned}$$

como $u = (D-2)y$

$$\begin{aligned} (D-2)y &= c_1 e^x \quad / \, e^{-2x} \\ (e^{-2x}y)' &= c_1 e^{-x} \quad / \textstyle\int \\ e^{-2x}y &= c_1 e^{-x} + c_2 \\ y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

Teorema

Si $p(D) = (D-r_1)(D-r_2)\cdots(D-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$ entonces la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

Ejemplo Resolver: $3y''' - 2y'' - y' = 0$

Solución: La ecuación es $(3D^3 - 2D^2 - D)y = 0$

$$\begin{aligned} D(3D+1)(D-1)y &= 0 \\ D\left(D+\tfrac{1}{3}\right)(D-1)y &= 0 \end{aligned}$$

y la solución general es: $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} + c_3 e^x$

<u>Caso2:</u> $p(D)$ se descompone en factores lineales repetidos

Si $p(D) = (D-r_1)^{n_1}(D-r_2)^{n_2}\cdots(D-r_m)^{n_m}$ con $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$

entonces la solución general de $p(D)y = 0$

$$y = e^{r_1 x}\left(c_1^1 + c_2^1 x + \cdots + c_{n_1}^1 x^{n_1 - 1}\right) + \cdots + \quad e^{r_n x}\left(c_1^m + c_2^m x + \cdots + c_{n_m}^m x^{n_m - 1}\right)$$

Ejemplo Resolver: $y''' + 2y'' + y' = 0$

Solución : Se tiene que

$$\begin{aligned} (D^3 + 2D^2 + D)y &= 0 \\ D(D^2 + 2D + 1)y &= 0 \\ D(D+1)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

entonces, $y = c_1 + e^{-x}(c_2 x + c_3)$

Caso3: $p(D)$ contiene factores irreducibles cuadráticos

En este caso usaremos la identidad de Euler en los números complejos:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$$

obsérvese que : $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = i^k\,,\ k \in \mathbb{Z}$

entonces usando series de potencia en los complejos se tiene:

$$\begin{aligned}
\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}x^k + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\
&= e^{ix}
\end{aligned}$$

Si $z = a + ib$ es raíz de $p(x)$, entonces $\overline{z} = a - ib$ también lo es,
por tanto $(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ es un factor de p(x)

Consideremos una ecuación: $(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)y = 0$

$$(D - (a + ib))(D - (a - ib))y = 0$$

resolviendo formalmente en los complejos, se tiene la solución general

$$\begin{aligned}
y &= c_1e^{(a+ib)x} + c_2e^{(a-ib)x} \\
&= c_1e^{ax}e^{ibx} + c_2e^{ax}e^{-ibx} \\
&= e^{ax}\left(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx}\right) \\
&= e^{ax}(c_1(\cos(bx) + i\operatorname{sen}(bx)) + c_2(\cos(bx) - i\operatorname{sen}(bx))) \\
&= e^{ax}((c_1 + c_2)\cos(bx) + (c_1 - ic_2)\operatorname{sen}(bx))
\end{aligned}$$

y reemplazando las constantes $c_1 + c_2$ por c_1 y $(c_1 - ic_2)$ por c_2

se tiene la solución general: $y = e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\operatorname{sen}(bx))$

$$y = c_1e^{ax}\cos(bx) + c_2e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

Entonces para una ecuación de la forma: $p(D)y = 0$ con:

$p(D) = (D - r_1)^{n_1} \cdots (D - r_m)^{n_m} (D^2 + d_1 D + e_1)^{s_1} \cdots (D^2 + d_k D + e_k)^{s_k}$
con $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + 2(s_1 + \ldots + s_k) = n$
entonces la solución general es dada por:

$$y = e^{r_1 x}\left(c_1^1 + c_2^1 x + \cdots + c_{n_1}^1 x^{n_1 - 1}\right) + \cdots + \quad e^{r_n x}\left(c_1^m + c_2^m x + \cdots + c_{n_m}^m x^{n_m - 1}\right) + e^{a_1 x}\cos(b_1 x)\left(g_1^1 + g_2^1 x + \cdots + g_{s_1}^1 x^{s_1 - 1}\right) + e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\left(g_1^k + g_2^k x + \cdots + g_{s_1}^k x^{s_1 - 1}\right)$$

c_j^i ; g_j^i constantes.

Ejemplo Resolver: $D(D-5)^2(D^2 + 2D + 4)y = 0$

Resolución: factorizamos $p(x)$ en $\mathbb{C}$

$$x(x-5)^2(x^2 + 2x + 4) = x(x-5)^2\left(x - \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right)$$

entonces la solución general es:

$$y = c_1 + e^{5x}(c_2 + c_3 x) + e^{-x}\cos\left(\sqrt{3}x\right)c_4 + e^{-x}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}x\right)c_5$$

Ejemplo Resolver: $\left(D^6 + 4D^4 + 4D^2\right)y = 0$

factorizando el polinomio :

$$\left(x^6 + 4x^4 + 4x^2\right) = x^2\left(x^4 + 4x^2 + 4\right) = x^2(x^2 + 2)^2 = x^2\left(x + i\sqrt{2}\right)^2\left(x - i\sqrt{2}\right)^2$$

se tiene la solución general:

$$y = c_1 + c_2 x + \cos\left(\sqrt{2}\right)(c_3 + c_4 x) + \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)(c_5 + c_6 x)$$

Polinomios Anuladores y Coeficientes Indeterminados

Dada una función f diferenciable hasta el orden n y L un operador lineal tal que

$$L(f) = 0$$

se dice que L es un *anulador* o un *aniquilador* para f.

De acuerdo a la solución de edos lineales homogéneas a coeficientes constantes, se tiene que:

$L = (D - r)^n$ es un polinomio anulador para las funciones : $e^{rx},\ xe^{rx}, x^2e^{rx}, ..., x^{n-1}e^{rx}$
por tanto anula a toda combinación lineal de ellas: $c_1e^{rx} + c_2\, xe^{rx} + ... + c_nx^{n-1}e^{rx}$

En particular D^n anula a las funciones de la forma $c_1 + c_2\, x + ... + c_nx^{n-1},\ c_i \in \mathbb{R}$

$L = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^n$ anula a las funciones:

$e^{ax}\cos(bx); xe^{ax}\cos(bx)\ ; ...; x^{n-1}e^{ax}\cos(bx);$
$e^{ax}\operatorname{sen}(bx); xe^{ax}\operatorname{sen}(bx)\ ; ...; x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx).$
y a todas sus combinaciones lineales.

Ejercicio

Determine un operador anulador para las funciones dadas:

a) $3x^2 + 5$ b) $e^{2x} + 5x^4$ c) $x^3e^{6x} - 2e^{-x}$
d) $5\operatorname{sen}(x)$ e) $6e^{2x}\cos(3x) + e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$ $f)$ $e^{-5x}\cos(-2x) + 5x^2e^{3x}\operatorname{sen}(x) + x$

Resolución

a) $L = D^3$ b) $L = (D-2)D^5$ c) $L = (D-6)^4(D+1)$
d) $L = (D^2 + 1)$ e) $L = (D^2 - 4D + 4 + 9)$
$f)$ $L = (D^2 + 10D + 29)(D^2 - 6D + 10)^3D^2$

Coeficientes Indeterminados

Sea $L(y) = q(x)$ una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes, tal que:
$q(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma: $x^me^{ax}\cos(bx); x^me^{ax}\operatorname{sen}(bx)$
para $m \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces hallamos un operador L_1 anulador de $q(x)$ y lo aplicamos a la ecuación.

$$L_1 L(y) = 0$$

resolviendo esta ecuación homogénea se tiene la forma de una solución particular y_p de la ecuación original y sustituyendo en la ecuación original se obtiene una solución particular de la ecuación.

Ejemplo Resolver $y'' - 3y' + 2y = x + 1$

La solución complementaria de la ecuación homogénea
$(D^2 - 3D + 2)y = (D-1)(D-2)y = 0$ es $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

Aplicando el operador anulador de $x+1$, $L_1 = D^2$ se tiene :

$$L(y) = x + 1 \quad /L_1$$

$$L_1 L(y) = D^2(D-1)(D-2)y = 0$$

cuya solución general es: $y = c_1 x + c_2 + c_3 e^x + c_4 e^{2x}$

Por tanto una solución particular de $L(y) = x + 1$ es,

$$y_p = c_1 x + c_2 + c_3 e^x + c_4 e^{2x}$$

Pero como $L(c_3 e^x + c_4 e^{2x}) = 0$ entonces $L(y_p) = L(c_1 x + c_2)$
esto implica que podemos considerar la solución particular sólo de la forma $(Ax + B)$
Así basta resolver $(D-1)(D-2)(Ax+B) = x + 1$

consideramos $y_p = Ax + B \Rightarrow y_p'' - 3y_p' + 2y_p = x + 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -3A + 2(Ax + B) = x + 1 \\
&\Rightarrow 2Ax + 2B - 3A = x + 1 \\
&\Rightarrow 2A = 1 \wedge 2B - 3A = 1 \\
&\Rightarrow A = \tfrac{1}{2} \wedge B = \tfrac{5}{4}
\end{aligned}$$

Por tanto una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$
y la solución general es: $y = y_p + y_c = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

Ejemplo Resolver $y'' - 3y' + 2y = 2\cos(4x)$

La solución complementaria es $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

un operador anulador para $2\cos(4x)$ es $(D^2 + 16)$

aplicando a ambos lado de la ecuación se tiene:

$$\left(D^2+16\right)(D-1)(D-2)y=0$$

cuya solución $c_1\cos(4x)+c_2\text{sen}(4x)+c_3e^x+c_4e^{2x}$
como $c_3e^x+c_4e^{2x}$ es solución de la ecuación homogénea asociada,
la forma de la solución particular es $y_p=A\cos(4x)+B\text{sen}(4x)$

$y_p'=-4\text{sen}(4x)+4\cos(4x)$
$y_p''=-16\cos(4x)+16\text{sen}(4x)$

entonces, $y_p''-3y_p'+2y_p=2\cos(4x)$
$(-14A-12B)\cos(4x)+(12A-14B)=2\cos(4x)$

$$\begin{array}{r|}-14A-12B=2\\12A-14B=0\\\hline\end{array}$$

de donde: $A=\frac{-7}{85}$ $B=\frac{-6}{85}$
y la solución general es: $y=\frac{-7}{85}\cos(4x)+\frac{-6}{85}\text{sen}(4x)+c_1e^x+c_2e^{2x}$

Ejemplo Resolver $y''-2y'+y=e^x$

La ecuación homogénea es: $(D-1)^2y=0$
la solución complementaria es : $y_c=e^x(c_1+c_2x)$
aplicando el operador anulador se tiene: $(D-1)^3y=0$
con solución: $y=e^x(c_1+c_2x+c_3x^2)$

entonces la forma de la solución particular es: $y_p=Ax^2e^x$
$y_p'=Ax^2e^x+2Axe^x$
$y_p''=Ax^2e^x+4Axe^x+2Ae^x$

igualando se tiene: $2Ae^x=e^x \Rightarrow A=\frac{1}{2}$
así la solución particular es: $y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$
y la solución general es: $y=\frac{1}{2}x^2e^x+e^x(c_1+c_2x)$.

Resolución de Ecuaciones Lineales con Coeficientes Variables

Teorema (Fórmula de Abel)

Sean $y_1(x), ..., y_n(x)$ soluciones sobre un intervalo I de la ecuación de orden n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = 0$$

Entonces, existe una constante real c tal que:

$$W(y_1(x), ..., y_n(x)) = ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$$

Demostración (para el caso $n = 2$)

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones de la ecuación: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ entonces,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}W(y_1, y_2) &= \tfrac{d}{dx}\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right) = \tfrac{d}{dx}\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) \\
&= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' \\
&= y_1y_2'' - y_2y_1'' \\
&= y_1\left(-p(x)y_2' - q(x)y_2\right) - y_2\left(-p(x)y_1' - q(x)y_1\right) \\
&= -y_1p(x)y_2' - y_1q(x)y_2 + y_2p(x)y_1' + y_2q(x)y_1 \\
&= -y_1p(x)y_2' + y_2p(x)y_1' \\
&= p(x)\left(y_2y_1' - y_1y_2'\right) \\
&= -p(x)W(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

$$\tfrac{d}{dx}W(y_1, y_2) + p(x)W(y_1, y_2) = 0$$

el factor integrante es: $e^{\int p(x)dx}$

$$\tfrac{d}{dx}(W(y_1, y_2))e^{\int p(x)dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)W(y_1, y_2) = 0$$

$$\tfrac{d}{dx}\left(W(y_1, y_2)e^{\int p(x)dx}\right) = 0$$

$$W(y_1, y_2)e^{\int p(x)dx} = c$$

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$$

Teorema (Reducción de Orden)

Sea $y_1(x) \neq 0$ una solución de la ecuación: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ entonces una segunda solución $y_2(x)$ li de la ecuación es dada por:

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx}$$

Demostración

Como $W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y_2' - y_2 \frac{y_1'}{y_1} = \frac{c}{y_1} e^{-\int p(x)dx}$$

el factor integrante es: $e^{-\int \frac{y_1'}{y_1} dx} = e^{-ln(y_1)} = \frac{1}{y_1}$

$$\frac{1}{y_1} y_2' - y_2 \frac{y_1'}{y_1^2} = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y_1} y_2\right) = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \qquad / \int dx$$

$$\frac{1}{y_1} y_2 = c \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx + k$$

tomando $c = 1$; $k = 0$ se tiene:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx$$

que es la fórmula de reducción de orden para edos homogéneas de 2º orden.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Ejemplo Resolver $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$

Tomando una solución particular de la forma: $y=ax+b$

$$y'=a; y''=0$$

$$-2xa+2(ax+b)=0$$

$$b=0$$

así, $y=ax$ son soluciones de la ecuación.

Consideremos $y_1(x)=x$, solución de la edo.

Normalicemos la ecuación dividiendo por (x^2-1),

$$y''-\frac{2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

en la ecuación normalizada aplicamos la fórmula de reducción de orden,

entonces, $$\begin{aligned} y_2 &= x\int\frac{e^{-\int -\frac{2x}{x^2-1}dx}}{x^2}dx \\ &= x\int\frac{e^{ln(x^2-1)}}{x^2}dx \\ &= x\int\frac{x^2-1}{x^2}dx \\ &= x\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= x^2+1 \end{aligned}$$

luego $y_2=x^2+1$ es una 2ª solución l.i. de la ecuación,

entonces la solución general es:

$$y = c_1 x + c_2(1 + x^2)$$

Ejercicio Resolver $(x^2 + x)y'' + 2y' - 2y = 0$

Respuesta: $y_1 = \frac{1}{x}$; $y_2 = x^2 + 3x + 3$

Ejercicio Resolver $y'' + \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} y' + 2y = 0$

Respuesta: $y_1 = \cos(x)$; $y_2 = \cos(x) \ln\left(\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right) - 2$

La Ecuación de Euler-Cauchy

La ecuación de Euler-Cauchy es de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

con a_i constantes.

Consideremos una solución de la forma $y = x^k$, reemplazando queda:

$$a_n x^n k(k-1)\cdots(k-(n-1))x^{k-n} + ... + a_2 x^2 k(k-1)x^{k-2} + a_1 x k x^{k-1} + a_0 x^k = 0$$

se obtiene, entonces, la ecuación polinomial en k

$$a_n x^n k(k-1)\cdots(k-(n-1)) + a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

y si la solución tiene n raíces reales distintas : $r_1,\ r_2, ..., r_n$, entonces la ecuación tiene la solución general : $y = c_1 x^{r_1} + \cdots + c_n x^{r_n}$

En particular la ecuación de Euler de segundo orden es:

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0$$

y la ecuación asociada es:

$$k(k-1) + pk + q = 0$$

Sean $k_1,\ k_2$ las soluciones de la ecuación:

Caso I: $k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 \neq\ k_2$

entonces: $y = c_1x^{k_1} + c_2x^{k_2}$ es su solución general.

Caso II: $k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 = k_2$

entonces usando reducción de orden, se tiene una 2ª solución
$y_2 = x^{k_1}ln(x)$ y la solución general es:

$$y = c_1x^{k_1} + c_2x^{k_1}ln(x)$$

Caso III: $k_1,\ k_2 \in \mathbb{C}$ con $k_1 = a + bi\,;\ k_2 = a - bi$

entonces $x^{a\pm bi}$

$$\begin{aligned} &= e^{(a\pm bi)ln(x)} \\ &= e^{aln(x)}\cdot e^{\pm biln(x)} \\ &= x^a[\cos(bln(x) \pm i\text{sen}(bln(x)))] \end{aligned}$$

y la solución general en variable real es dada por:

$$y = c_1x^a\cos\big(bln(x)\big) + c_2x^a\text{sen}\big(bln(x)\big)$$

Ejemplo Resolver $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$

la ecuación asociada es $k(k-1) + 7k + 13 = 0$
que tiene las soluciones : $k = \ -3 \pm 2i$

entonces la solución general es :

$$y = c_1x^{-3}\cos\big(2ln(x)\big) + c_2x^{-3}\text{sen}\big(2ln(x)\big)$$

Ejercicios: $y'' - 4y' + 4y = 0\ ;\ y_1 = e^{2x}$
$4x^2y'' + y = 0\ ;\ y_1 = \sqrt{x}$
$x^2y'' - xy' = 0$
$x^2y'' + 7xy' + 25y = 0$

Método de Variación de Parámetros

Dada la ecuación de segundo orden no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

si y_1 , y_2 son soluciones l.i. de la ecuación homogénea, consideramos una solución particular de la forma:

$y_p = c_1y_1 + c_2y_2$, donde $c_1 = c_1(x)$ y $c_2 = c_2(x)$

entonces,

$$y_p' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2' = c_1y_1' + c_2y_2' + \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2}_{0}$$

$$y_p'' = c_1y_1'' + c_1'y_1' + c_2y_2'' + c_2'y_2' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + (c_1'y_1' + c_2'y_2')$$

como y_1 , y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, se cumple que:

$$y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1$$

$y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2$, reemplazando, se tiene:

$$y_p'' = -c_1p(x)y_1' - c_1q(x)y_1 - c_2p(x)y_2' - c_2q(x)y_2 + (c_1'y_1' + c_2'y_2')$$

$$y_p'' = -p(x)\Big[c_1y_1' + c_2y_2'\Big] - q(x)\Big[c_1y_1 + c_2y_2\Big] + c_1'y_1' + c_2'y_2'$$

si se cumple que: $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ y $c_1'y_1' + c_2'y_2' = r(x)$
entonces,

$$y_p'' = -p(x)\left[c_1y_1' + c_2y_2' + \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2}_{0}\right] - q(x)\Big[c_1y_1 + c_2y_2\Big] + r(x)$$

es decir:

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' = -p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' - q(x)\Big[c_1y_1 + c_2y_2\Big] + r(x)$$

por tanto, $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución de la ecuación si se cumple el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = r(x) \end{array}\right|$$

y usando la Regla de Cramer se tiene:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow c_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} \quad dx$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} \quad dx$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3y_1 + c_4y_2$$

Ejemplo Resolver : $y'' + y = \mathrm{tg}(x)$

Ejercicio Resolver : $x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{6}{x}$