Clase nº9

Cálculo II

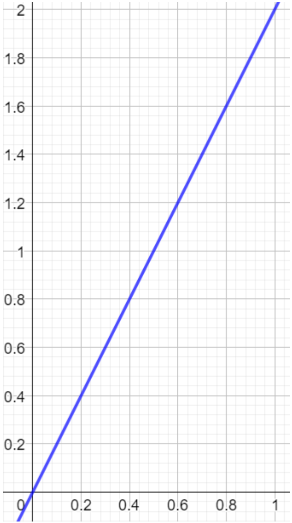
Universidad de Valparaíso
Profesor: Juan Vivanco

8 de Septiembre 2021

Objetivo de la clase

- Introducir el concepto de sumas de Riemann

Sea la recta $y = 2x$. Se quiere aproximar el área que está debajo de la curva por medio de rectángulos.



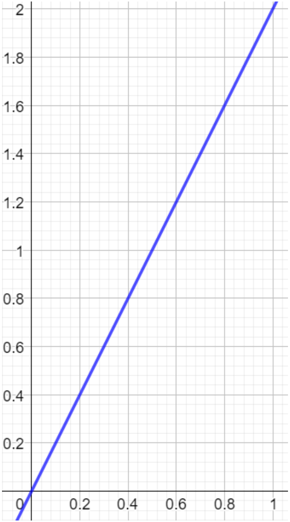
Consideremos que:

- $x \in [0, 1]$.

Algunas preguntas para guiar nuestro pensamiento:

- ¿Cómo dividiremos el intervalo? ¿La división del intervalo será de distancias iguales?
- ¿Qué altura consideraremos para cada rectángulo?
- ¿De acuerdo a lo anterior aproximaremos por "arriba" o por "abajo" el área?

Propuestas...



- ¿Cantidad de divisiones del intervalo?
- ¿Ancho de cada subintervalo?
- ¿Cuál es el área de cada rectángulo?
- ¿Cuál es el área aproximada bajo la curva?

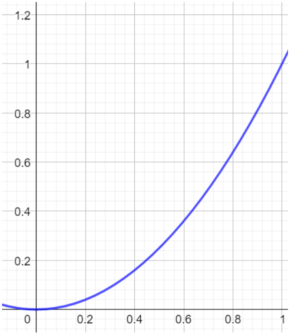
Para pensar...

- ¿Qué sucede con la aproximación del área si se consideran más divisiones del intervalo?

Si se divide el intervalo en n partes iguales.

- ¿Qué crees que sucederá con el ancho del rectángulo si n toma valores cada vez más grandes?
- ¿Qué crees que sucederá con las aproximaciones por "arriba" y por "abajo"?

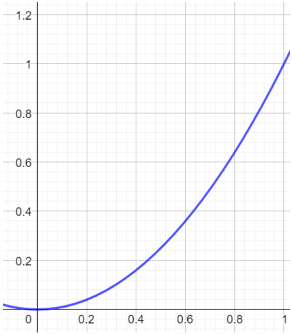
Sea $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Realicemos una aproximación, por "arriba" y por "abajo", del área que se encuentra bajo la curva utilizando rectángulos.



Propuesta: Vamos a dividir el intervalo $[0, 1]$ en n partes iguales. Calcularemos una aproximación por " arriba"de la curva.

- ¿Cuál es el área de cada rectángulo?
- ¿Cuál es la expresión que representa el área aproximada de la curva?

Ahora, realizaremos una aproximación, por "abajo", de la curva.



- ¿Cuál es el área de cada rectángulo?
- ¿Cuál es la expresión que representa el área aproximada de la curva?

¿Cómo podemos mejorar nuestra aproximación?

Definición

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, $a < b$. Una **partición** de $[a, b]$ es una familia finita $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de puntos tales que

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$$

Ejemplo 40

Sea el intervalo $[10, 15]$. Veamos algunas particiones de $[10, 15]$

1. $\mathcal{P}_1 = \{10, 11, 13, 15\}$
2. $\mathcal{P}_2 = \{10, 13, 14{,}5, 14{,}6, 14{,}8, 15\}$
3. $\mathcal{P}_3 = \{10, 10{,}5, 11{,}5, 13{,}8, 15\}$

Observaciones

- Para cada partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ tenemos que los subintervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$ satisfacen la relación

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$$

- Denotaremos por $\triangle t_i$ a la longitud del subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, es decir,

$$\triangle t_i = t_i - t_{i-1} = \text{longitud del subintervalo } i$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \triangle t_i = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + ... + (t_n - t_{n-1}) = b - a,$ donde $b - a$ es la longitud del intervalo $[a, b]$.

Definición

Se llama **norma de la partición** $\mathcal{P}$ al número

$$||\mathcal{P}|| = \text{máx}\{\triangle t_i : i = 1, ..., n\}$$

Definición

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada $i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n$ se definen los números

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{n-1}, t_i]\}$$
$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{n-1}, t_i]\}$$

Observación

$m_i \leq f(x) \leq M_i$, para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]; i = 1, 2, ...n.$

Ejemplo 41

Sea $f(x) = 3x^2$ y $\mathcal{P} = \{3, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}, 8, 10\}$ una partición del intervalo $[3, 10]$. Calcular

a) $\triangle t_i$ para cada subintervalo.

b) $||\mathcal{P}||$

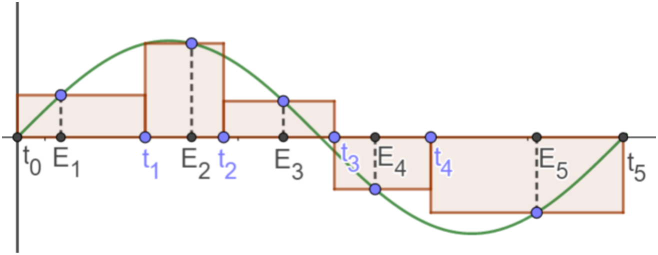
c) M_i

d) m_i

Definición 14

Se llama una **suma de Riemann** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ a cualquier número de la forma:

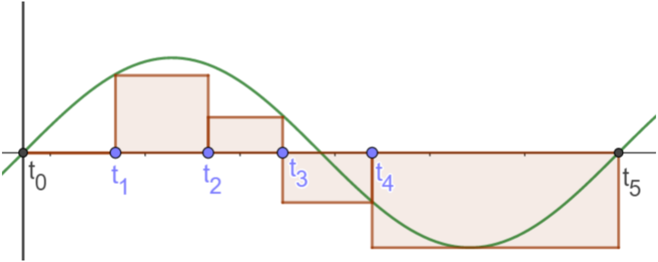
$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)(t_i - t_{i-1}), \quad E_i \in [t_{i-1}, t_i].$$



Definición 15

Se llama **suma inferior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número:

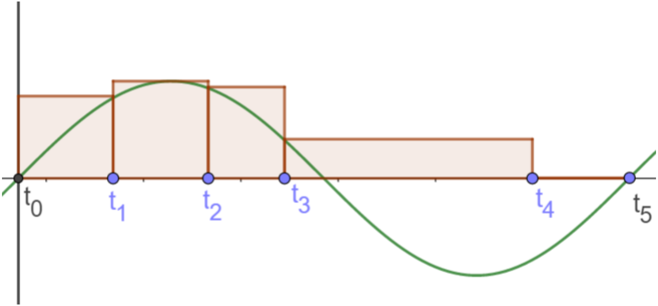
$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$



Definición 16

Se llama **suma Superior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número:

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$



Observaciones

- Si f es acotada en $[a, b]$ entonces es acotada en cada $[t_{i-1}, t_i]$ y luego tiene supremo e ínfimo en dicho intervalo. Si además, f es continua, el Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza su valor máximo y mínimo en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.
- Se puede verificar que:

$$I(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$$

para toda partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$.

Definición 17

Una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ se dice **más fina** o un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ si se cumple que todo punto $\mathcal{P}'$ es punto de $\mathcal{P}$. En tal caso escribimos $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 3

Sean $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{P}' = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\}$ dos particiones de $[1, 4]$.

Definición 17

Una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ se dice **más fina** o un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ si se cumple que todo punto $\mathcal{P}'$ es punto de $\mathcal{P}$. En tal caso escribimos $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 3

Sean $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{P}' = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\}$ dos particiones de $[1, 4]$. Tenemos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$.

Cuidado

Sean $\mathcal{P}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 4\}$ dos particiones de $[1, 4]$.

Definición 17

Una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ se dice **más fina** o un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ si se cumple que todo punto $\mathcal{P}'$ es punto de $\mathcal{P}$. En tal caso escribimos $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 3

Sean $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{P}' = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\}$ dos particiones de $[1, 4]$. Tenemos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$.

Cuidado

Sean $\mathcal{P}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 4\}$ dos particiones de $[1, 4]$. En este caso no podemos decir que $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_2$ y no podemos decir que $\mathcal{P}_2$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_1$.

Teorema 18

Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ particiones de $[a, b]$ tales que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, tenemos:

$$I(f, \mathcal{P}') \leq I(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}').$$

Teorema 19

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces se cumple que

$$I(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}').$$

El teorema anterior le da sentido a la siguiente definición.

Definición 20

1. La **integral inferior** de f en $[a, b]$ es el número

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{I(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

2. La **integral superior** de f en $[a, b]$ es el número

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \text{ínf}\{I(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ es partición de } [a, b]\}$$

3. Diremos que f es **integrable** en $[a, b]$ si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Ejercicio

Sea $f(x) = 3\sqrt{x}$. Considerando la función f sobre el intervalo $[4, 9]$, realiza 3 particiones sobre $[4, 9]$ y para cada una de estas calcular

a) $\triangle t_i$ para cada subintervalo

b) $||\mathcal{P}||$

c) M_i

d) m_i

Bibliografía

	Autor	Título	Editorial	Año
1	Stewart, James	Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas	México: Cengage Learning	2021
2	Burgos Román, Juan de	Cálculo infinitesimal de una variable	Madrid: McGraw-Hill	1994
3	Zill Dennis G.	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones	Thomson	2007
4	Thomas, George B.	Cálculo una variable	México: Pearson	2015

Puede encontrar bibliografía complementaria en el programa.