El efecto de los números complejos en la física de ondas

Erick Pastén[2*]

[2]*Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Gran Bretaña 1111, Valparaíso, Chile*

I. FRECUENCIA Y AMPLITUD COMPLEJA

Partamos con la ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

Para resolver esta ecuación, podemos probar una solución tipo compleja oscilatoria de la forma:

$$x(t) = \tilde{A}_0 e^{i\omega t} \tag{2}$$

En donde $\tilde{A}_0$ es una amplitud compleja. Si la reemplazamos en la ecuación obtenemos:

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

Y podemos resolver para ω como:

$$\omega = i\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega_I \pm \omega_R \tag{4}$$

Notemos que el efecto de introducir una componente compleja en la frecuencia ω, introduce un término de decaimiento exponencial en la función oscilatoria, es decir un término de *disipación*:

$$x(t) = \tilde{A}_0 e^{i(i\omega_I \pm \omega_R)t} = \tilde{A}_0 e^{-\omega_I t} e^{\pm i\omega_R t} \tag{5}$$

Además la amplitud compleja puede ser escrita en su forma fasorial:

$$\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\phi} \tag{6}$$

Por lo que la solución final es:

$$x(t) = A_0 e^{-\omega_I t} e^{\pm i\omega_R t + \phi} \tag{7}$$

Si tomamos solo la parte real que corresponde al observable físico:

$$x(t) = A_0 e^{-\omega_I t}\cos(\omega_R t + \phi) \tag{8}$$

De este resultado podemos asimilar que el efecto de introducir números complejos en una función oscilatoria tiene dos efectos: por un lado el introducir un término de disipación y por otro una diferencia de fase.

A. Impedancia Compleja

Consideremos ahora el caso forzado mediante una fuerza sinusoidal o armónica $F(t)$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \tag{9}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: una homogénea y una particular. El caso homogéneo lo vimos anteriormente y para tiempos grandes tiende a 0 ya que el termino exponencial decae rápidamente. Sin embargo la solución homogénea permanece en el tiempo y resulta interesante para analizar el caso *estacionario*. Para esto, propongamos para la solución particular nuevamente:

$$x(t) = \tilde{A}_0 e^{i\omega t} \tag{10}$$

En este caso, podemos obtener la relación:

$$\tilde{A}_0 = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)} \tag{11}$$

Por lo que la posición es:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)}e^{i\omega t} \tag{12}$$

Nuevamente tenemos una amplitud compleja, la cual indica que la posición está *desfasada* con respecto a la fuerza. Esto es mas evidente si escribimos la amplitud compleja como el producto de su magnitud y una fase ϕ:

$$x(t) = \frac{F_0}{m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}e^{(i\omega t + \phi)} \tag{13}$$

Una forma mas interesante de analizar este problema, es calculando la rapidez en su forma compleja. Esto es:

$$v(t) = \dot{x} = \frac{i\omega F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)}e^{i\omega t} \tag{14}$$

Podemos introducir entonces un número llamado *impedancia* Z el cual corresponde a la razón entre la fuerza aplicada y la rapidez de la partícula:

$$Z = \frac{F(t)}{v(t)} = \frac{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)}{i\omega} = m[\gamma + i(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)] \tag{15}$$

*Electronic address: erick.contreras[at]postgrado.uv.cl

La característica de la impedancia como número complejo permite no solo relacionar las magnitudes de las variables si no que tambien establecer la diferencia de fase entre ellas. Un caso muy interesante es que cuando la frecuencia de la fuerza externa ω se iguala a la frecuencia natural del sistema ω_0 tenemos que la fuerza y la velocidad oscilan en fase. Sin embargo esto no significa que la transferencia de energía sea la máxima posible. En efecto este máximo se logra derivando la amplitud de la posición con respecto a la frecuencia (ver solución de Tarea 1).

Este análisis es extrapolable a cualquier sistema que siga la misma ecuación matemática. Por ejemplo en la ecuación de un circuito RLC con voltaje alterno, podemos escribir:

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = V(t) = V_0 e^{i\omega t} \tag{16}$$

O en términos de la carga:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L} e^{i\omega t} \tag{17}$$

Donde podemos notar que $\frac{R}{L}$ cumple el mismo significado que el factor de amortiguación γ, la masa o la inercia del sistema está relacionada con L y la frecuencia natural del sistema ω_0 es $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. De esta forma, la carga sigue la misma relación que la posición:

$$q(t) = \frac{V_0}{L(\omega^2 - \frac{1}{LC} + i\frac{R}{L}\omega)} e^{i\omega t} \tag{18}$$

La corriente será análoga a la rapidez:

$$I(t) = \dot{q} = \frac{i\omega V_0}{L(\omega^2 - \frac{1}{LC} + i\frac{R}{L}\omega)} e^{i\omega t} \tag{19}$$

Y análogamente podemos establecer la relación entre el voltaje y la corriente identicamente a la ley de ohm pero en vez de resistencia usando el concepto de impedancia:

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{L(\omega^2 - \frac{1}{LC} + i\frac{R}{L}\omega)}{i\omega} = R + i(\frac{1}{C\omega} - L\omega) \tag{20}$$

El término $X_C = \frac{1}{C\omega}$ se denomina *reactancia capacitiva* y el término $X_L = L\omega$ se denomina *reactancia inductiva*. La reactancia corresponde a la oposición que realizan los campos electricos y magnéticos inducidos a la propagación de la corriente y el establecimiento de una diferencia de potencial. La principal diferencia de la reactancia con la resistencia común, es que debido a ser un número complejo produce además de la disminución de la intensidad de la corriente, un desfase con respecto al voltaje aplicado. Cuando tanto la reactancia capacitiva y la reactancia inductiva tienen el mismo valor, el desfase entre ámbas propiedades desaparece.

B. Impedancia en ondas mecánicas

Recordemos que en ondas mecánicas, el concepto de impedancia está relacionado mediante una relación similar. En efecto la impedancia de una onda se define como la razón entre el modulo de la fuerza necesaria para mover las partículas del medio sobre la rapidez de esas partículas. Esto es:

$$Z = \frac{F}{v} \tag{21}$$

Por ejemplo para una onda en una cuerda, la fuerza corresponde a la tensión vertical por lo que podemos escribir:

$$Z = \frac{T_y}{v} = \frac{T\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}} \tag{22}$$

Y para una onda viajera hacia la izquierda $y \sim e^{i(kx+\omega t)}$:

$$Z = \frac{Tike^{i(kx+\omega t)}}{i\omega e^{i(kx+\omega t)}} = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T}{c} = \mu c \tag{23}$$

Sin embargo, para una onda que viaja hacia la derecha $y \sim e^{i(kx-\omega t)}$, la razón entre la fuerza y la velocidad se vuelve un número negativo:

$$\frac{F}{v} = \frac{Tike^{i(kx-\omega t)}}{-i\omega e^{i(kx-\omega t)}} \tag{24}$$

Para mantener la impedancia como una cantidad independiente de la dirección en la que viaja la onda, entonces asumiremos la convención en que $F = Zv$ si la onda viaja hacia la izquierda, y $F = -Zv$ si la onda viaja hacia la derecha. Esta definición de impedancia nos permite calcular de manera simple los coeficientes de reflexión y transmisión. Si consideramos las condiciones de continuidad de la rapidez y de la fuerza de restitución:

$$v_I + v_R = v_T \tag{25}$$
$$F_I + F_R = F_T \rightarrow -Z_1 v_I + Z_1 v_R = -Z_2 v_T \tag{26}$$

Podemos resolver entonces para $\frac{v_R}{v_I}$ y $\frac{v_T}{v_I}$ en términos de la impedancia:

$$\frac{v_R}{v_I} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{27}$$
$$\frac{v_T}{v_I} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{28}$$

Que son los coeficientes de reflexión y transmisión usuales. Esta derivación es general para cualquier onda, independiente de la forma de Z. Es decir, para cualquier onda viajera que se comporte según la ecuación ideal de onda, corresponderá una impedancia que ejercerá el medio sobre ella. Entonces, ¿Cómo afectan los números complejos en la impedancia?

Para responder esta pregunta, analogamente al caso del oscilador amortiguado podemos introducir una fuerza de amortiguación f_γ proporcional a la velocidad de las particulas:

$$f_\gamma = -\gamma v = -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{29}$$

Por lo que la ecuación de onda se convierte en:

$$T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{30}$$

O si llamamos $\sigma = \gamma / T$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{31}$$

Sin embargo, si reemplazamos esta vez una onda armónica $\psi \sim e^{i(kx - \omega t)}$ en la ecuación, llegamos a la relación de dispersión;

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \sigma \omega i \tag{32}$$

Es decir, el número de onda es esta vez complejo. Ahora notemos que si usamos la definición usual de impedancia:

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \sigma\omega i}}{\omega} = \sqrt{T\mu + \frac{T\sigma}{\omega} i} \tag{33}$$

Nuevamente, una impedancia compleja significa tanto una proporcionalidad entre la fuerza y la velocidad asi como un desfase entre ellas.

C. Ondas electromagnéticas en conductores

El efecto de frecuencia/número de onda compleja también se puede hacer presente en las ondas electromagnéticas. Por ejemplo la ecuación para una onda EM que se propaga en un conductor óhmico en la dirección z puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{34}$$

Donde σ es la conductividad. Como vimos anteriormente, la relación de dispersión puede escribirse como:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \sigma \mu \omega i} = \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 + \sigma \mu \omega i} \tag{35}$$

Por lo que podemos dividir el número de onda en una parte real y una parte imaginaria:

$$k = k_R + k_I i \tag{36}$$

La onda electromagnética armónica puede ser escrita como:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)} \tag{37}$$

Y la intensidad media de la onda electromagnética decrece de forma exponencial:

$$I(z) = I_0 e^{-2k_I z} \tag{38}$$

El efecto de un número de onda complejo es entonces un efecto de amortiguación que hace que la intensidad de la onda decrezca con la distancia que ésta va recorriendo. A este efecto se le denomina *extinción.*

D. Impedancia de ondas electromagnéticas

Debido a las condiciones de borde para los campos en electromagnetismo clásico, los coeficientes de transmisión y reflexión aparecen descritos de una forma muy diferente a las ondas mecánicas. Si recordamos, estas condiciones de borde están definidas sobre los campos E, B, D y H cuando no existen ni corrientes ni cargas en la superficie de contorno:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{39}$$
$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \tag{40}$$
$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \tag{41}$$
$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \tag{42}$$

Donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de contorno que apunta hacia el lado 1 del espacio. Consideremos ahora una onda EM cuya dirección es completamente perpendicular a la superficie. En este caso, las dos primeras ecuaciones no entregan información, sin embargo las dos segundas ecuaciónes pueden ser escritas como:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \tag{43}$$
$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 \tag{44}$$

Si consideramos una onda electromagnética que incide a la superficie descrita mediante los campos $\vec{E}_I, \vec{H}_I$ entonces podemos escribir:

$$\vec{E}_I + \vec{E}_R = \vec{E}_T \tag{45}$$
$$\vec{H}_I + \vec{H}_R = \vec{H}_T \tag{46}$$

Donde los subíndices R y T índican la componente de la onda reflejada y transmitida respectivamente. Si consideramos que los campos incidentes y reflejados poseen la misma dirección, entonces podemos escribir las condiciones de borde según solo las magnitudes:

$$E_I + E_R = E_T \tag{47}$$
$$H_I + H_R = H_T \tag{48}$$
$$\tag{49}$$

Notemos que si comparamos estas ecuaciones con las condiciones de borde para unda onda mecánica que vimos anteriormente sobre la fuerza y la velocidad, podemos hacer un paralelo si definimos la impedancia como:

$$Z = \frac{E}{H} \tag{50}$$

Podemos escribir entonces:

$$E_I + E_R = E_T \tag{51}$$
$$-\frac{E_I}{Z_1} + \frac{E_R}{Z_1} = -\frac{E_T}{Z_2} \tag{52}$$
$$\tag{53}$$

Y de esta forma recuperamos los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{54}$$
$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{2\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{55}$$

Podemos notar dos cosas interesantes. En primer lugar la impedancia de una onda electromagnética está definida al enfocarnos en la transmisión y reflexión de la amplitud del campo eléctrico E de la onda. Si calcularamos los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud del campo magnético H, podemos notar que la relación que se cumple es:

$$-Z_I H_I + Z_1 H_R = -Z_2 H_T \tag{56}$$
$$H_I + H_R = H_T \tag{57}$$
$$\tag{58}$$

Y para la razón entre los campos magnéticos obtendríamos:

$$\frac{H_R}{H_I} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{59}$$
$$\frac{H_T}{H_I} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{60}$$

Se puede ver uno de los campos reflejados cambia necesariamente su dirección dependiendo de cual medio tenga mayor impedancia, lo cual tiene sentido al considerar que la onda se propaga en dirección contraria. Además podemos ver que si la densidad de energía de una onda electromagnética se escribe como:

$$u_{EM} = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{\mu}{Z^2})E^2 \tag{61}$$
$$= \frac{1}{2}(\epsilon Z^2 + \mu)H^2 \tag{62}$$

Lo que da origen a los coeficientes de reflexión y transmisión para la energía:

$$\mathcal{R} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{63}$$
$$\mathcal{T} = \frac{(\epsilon_2 + \frac{\mu_2}{Z_2^2})}{(\epsilon_1 + \frac{\mu_1}{Z_1^2})} \frac{4Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{64}$$

Note que si desarrollamos el coeficiente de transmisión:

$$\mathcal{T} = \frac{(\epsilon_2 Z_2^2 + \mu_2)}{(\epsilon_1 Z_1^2 + \mu_1)} \frac{4Z_1^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{65}$$

Este coeficiente es el mismo que aparece si lo calculamos a partir de las amplitudes para el campo magnético H.

La segunda cosa interesante es que bajo esta interpretación de la impedancia, el campo eléctrico E puede ser visto como la fuerza que produce los cambios en la onda electromagnética, mientras H se puede interpretar como la velocidad de estos cambios de movimiento, análogo a la relación entre voltaje y corriente. También podemos ver que la impedancia está definida de esta manera para obtener el mismo resultado que en el caso de ondas mecanicas para la velocidad: los coeficientes de reflexión y transmisión para H toman la misma forma que para v en el caso de ondas mecánicas.

En el vacío, la impedancia no toma un valor 0. Esto es intuitivo debido a que la velocidad de la luz es finita y por lo tanto el espacio vacío presenta cierta oposición a que se propaguen las ondas electormagnéticas. Para este caso se define la impedancia de vació Z_0 como:

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{\mu_0 E}{B} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sim 377\Omega \tag{66}$$

E. Impedancia en un medio conductor óhmico

Un caso interesante para visualizar la utilidad del concepto de impedancia es para una onda EM en un medio conductor óhmico. Si consideramos como μ y ϵ las respectivas permeabilidad y permitividad del medio, entonces la ecuación de onda se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{67}$$

$$\tag{68}$$

Donde el campo $\vec{H}$ se puede obtener desde la ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\mu\vec{H} \tag{69}$$

Por simplicidad, si consideramos que el campo $\vec{E}$ está polarizado en la dirección $\hat{x}$ mientras el campo $\vec{H}$ en la dirección $\hat{y}$ entonces:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\omega\mu H \tag{70}$$

Por lo que si $E = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$:

$$H = \frac{ikE_0}{i\omega\mu} e^{i(kz-\omega t)} \tag{71}$$

Luego:

$$Z = \frac{\omega\mu}{k} \tag{72}$$

Y la impedancia resulta nuevamente un número complejo inducido por la presencia de sigma:

$$Z = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\epsilon\mu\omega^2 + \sigma\mu\omega i}} = \sqrt{\frac{\mu\omega i}{\epsilon\omega i - \sigma}} \tag{73}$$

El que la impedancia tenga esta forma en un conductor, significa que la relación entre las magnitudes de E y B ya no es tan simple y que además ambos campos están *desfasados*. La relación entre los campos electromagnéticos se transforma en:

$$E = ZH = \sqrt{\frac{\mu\omega i}{\epsilon\omega i - \sigma}} \frac{B}{\mu} \tag{74}$$

Para el caso en que $\sigma = 0$, resulta la relación usual entre E y B:

$$E = ZH = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{B}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} B = cB \tag{75}$$