Aplicaciones de la Derivada

Cap 3 Purcell

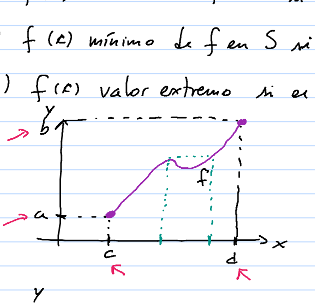
Máximos } Opt.
Mínimos
L'Hôpital
Teo. Aso. a Der.
Graf. de Curvas

Defⁿ: $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$ y $c \in S$ punto en el dom f

i) $f(c)$ máximo de f en S si $f(c) \geq f(x)$ $\forall x \in S$

ii) $f(c)$ mínimo de f en S si $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in S$

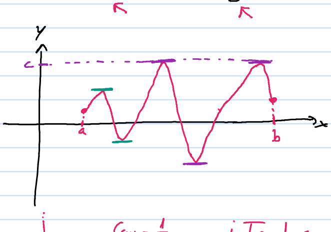
iii) $f(c)$ valor extremo si es máximo o mínimo



$f: S \to \mathbb{R}$, $S = [c, d]$

1.- ¿Cuáles son los puntos en que la función alcanza el máximo y el mínimo? } Dominio

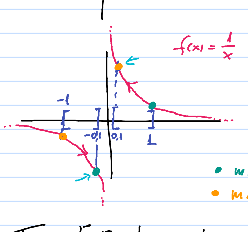
2.- ¿Cuáles son el máximo y el mínimo? } Recorrido



Verdes y Morado son v. extremos locales

Morado son v. extremos globales

$\{v.e. \text{ globales}\} \subseteq \{v.e. \text{ locales}\}$, $\not\supseteq$



$f(x) = \frac{1}{x}$

¿Tendrá f máximos y mínimos en $\mathbb{R}$?

No.

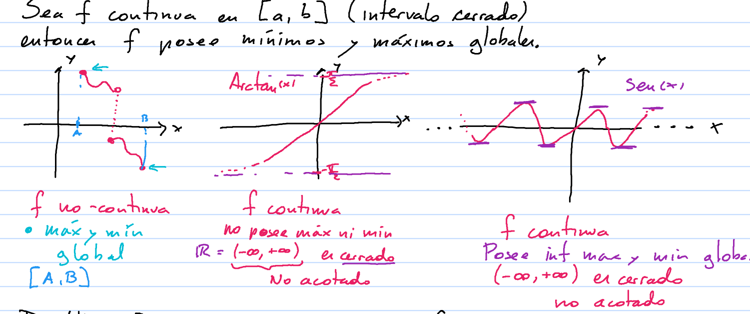
¿Y en $[-1, 1]$?

• mínimos
• máximos

$[a,b]$ es un conjunto compacto

Teo: [Existencia de máximos y mínimos]

Sea f continua en $[a, b]$ (intervalo cerrado) entonces f posee mínimos y máximos globales.



f no continua • máx y mín global $[A, B]$

Arctan(x): f continua, no posee máx ni mín, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ es cerrado, No acotado

Sen(x): f continua, Posee inf máx y mín globa. $(-\infty, +\infty)$ es cerrado, no acotado

Defⁿ: Diremos que $c \in S$, $f: S \to \mathbb{R}$, se llamará:

1.- Estacionario: $f'(c) = 0$

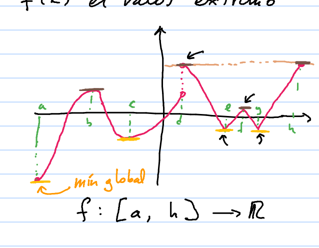
2.- Singular: $f'(c)$ no existe

3.- Frontera: $c = a \vee c = b \wedge S = [a, b]$

} Puntos Críticos

Teo (de los puntos críticos)

f definida en un intervalo I y $c \in I$.
Si $f(c)$ es valor extremo $\Rightarrow$ c es punto crítico



$f: [a, h] \to \mathbb{R}$

frontera: a, h
singulares: d, e, f, g
estacionarios: b, c

mín local: a, c, e, g
mín global: a
máx global: d, h
máx local: b, d, f, h

Ejemplos (Tarea): Encontrar puntos críticos

1.- $f(x) = x^3$ en $[-2, 2]$

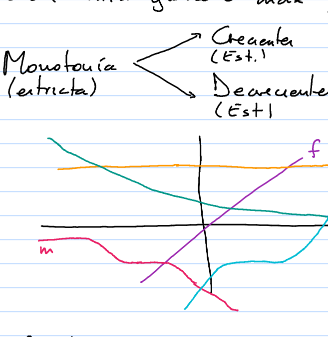
f es un polinomio $\Rightarrow$ continua y diferenciable en $\mathbb{R}$
ptos frontera $x = -2 \vee x = 2$
$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \leftarrow$ pto estacionario

2.- $f(x) = -5x^3 + 3x^2$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

3.- $f(x) = x + 2\cos(x)$ en $[-\pi, 2\pi]$

También determinar cual punto crítico corresponde a un mín global o máx global.

Monotonía (estricta) → Creciente (Est.) / Decreciente (Est.)



Definiciones		Teo. de Mono..	Aplicación	
f estricl. creciente	$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$		$f'(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$f, \tilde{u}, g$ creciente	$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$		$f'(x) \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
g constante	$x > y \Rightarrow f(x) = f(y)$		$f'(x) = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
h, m, g decreciente	$x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$		$f'(x) \leq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
h estrictam. decreciente	$x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$		$f'(x) < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Teo. de Monotonía

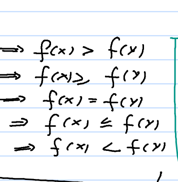
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f es est. crec. en I

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f es est. decre. en I

Ejemplos

1.- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

1.- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$



$(x-2)(x+1) = 0$
$x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0$
$x = 2 \vee x = -1$

Est. Crec. $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
Est. Decr. $f'(x) < 0$ si $x \in (-1, 2)$

2.- $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

Defⁿ: Sea f definida en un intervalo I, donde f es continua.

• Si f crece y luego decrece en I $\to$ Convexo (Cóncavo hacia abajo)

• Si f decrece y luego crece en I $\to$ Cóncavo (Cóncavo hacia arriba)

Teo (de concavidad) Sea f dos veces diferenciable en un intervalo I.

• Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f será cóncava

• Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f será convexa

Obs: Si $f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$
↳ Ec. Dif. Ordinaria (EDO) (ODE)

Criterio de la 1ᵉʳᵃ Derivada.

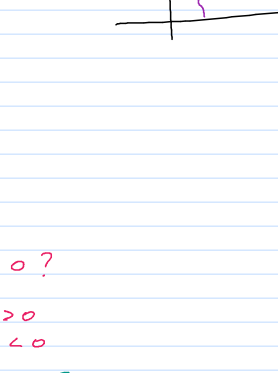
f continua en (a, b) y $c \in (a, b)$ tq $f'(c) = 0$

$I_1 = (a, c)$, $I_2 = (c, b)$

i) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I_1 \wedge f'(x) < 0 \quad \forall x \in I_2 \quad \therefore$ c es máx

ii) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I_1 \wedge f'(x) > 0 \quad \forall x \in I_2 \quad \therefore$ c es mín

iii) $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in I \setminus \{c\} \\ f'(x) < 0 & \forall x \in I \setminus \{c\} \end{cases} \quad \therefore$ c no es valor extremo



Criterio de la 2ᵈᵃ Derivada

f continua en (a,b) con f' y f'' definidas en (a, b) y $c \in (a, b)$ tq $f'(c) = 0$.

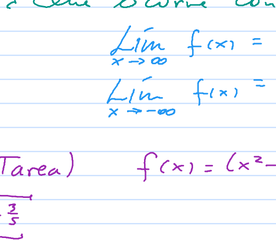
i) $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ es un máx local

ii) $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ es un mín local

Ej: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ — Raíces: ± 1

$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$ — 0

$f''(x) = 12x^2 + 4 = 4(3x^2 + 1)$ — No se anula



¿Dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$?

$f'(x) > 0$ si $x > 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 0$

¿Qué ocurre en $x = 0$? Es un mínimo local.

* ¿Qué ocurre con $f(x)$ si $x \to \pm\infty$?

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ } $\Rightarrow x = 0$ es mín global

Ej (Tarea) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)x$

$\pm\alpha = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{3}{5}} \approx 0{,}6$

Resumen de lo visto hasta ahora:

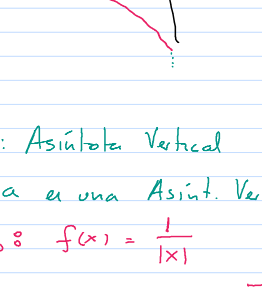
¿Cómo graficar una función relativa sencilla?

→ Raíces $f(x) = 0$
→ Máx y Mín $f'(x) = 0$
→ Int. Crec. y Decr. $f'(x) > 0 \vee f'(x) < 0$
→ Puntos de Inflexión $f''(x) = 0$
→ Concavidad $f''(x) > 0 \vee f''(x) < 0$
→ Asíntotas

Asíntotas

Defⁿ: "Es una recta a la que se acerca una función pero que nunca llega a alcanzarla"

Ej: $\{\frac{1}{x}\}$

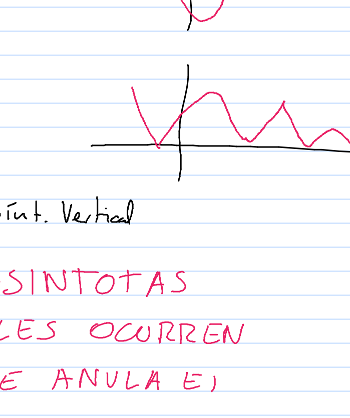


$x = 0$, $y = 0$ } son asíntotas

$x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$

$x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

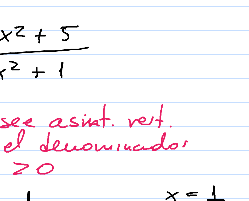
$x \to 0^-$, $\frac{1}{x} \to -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



Defⁿ: Asíntota Vertical

$x = a$ es una Asínt. Vertical de $f(x)$ si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Ej: $f(x) = \frac{1}{|x|}$



$x = 0$ Asínt. Vertical

LAS ASINTOTAS VERTICALES OCURREN DONDE SE ANULA EL DENOMINADOR

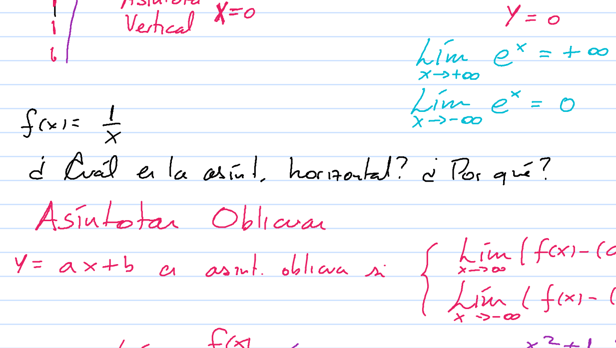
Ej: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$
↳ No posee asint. vert. porque el denominador es > 0

Ej: $f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$ — $x = 1$, $x = 0$

$x^3 - x^2 = 0$
$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Asíntotas Horizontales

$y = b$ es asín. Horizontal si $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = b \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \end{cases}$



log(x): Asíntota Vertical $x = 0$

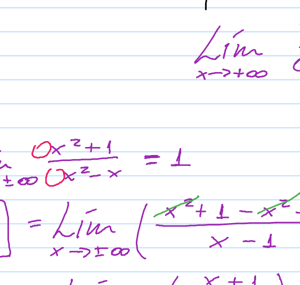
exp(x): Asíntota Hor. $y = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$
¿Cuál es la asínt. horizontal? ¿Por qué?

Asíntotas Oblicuas

$y = ax + b$ es asínt. oblicua si $\begin{cases} \lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \end{cases}$



$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ← $\frac{x^2+1}{x-1}$, $\frac{x}{1}$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \deg(Q) > \deg(P) \\ \frac{a_n}{b_n} & \deg(Q) = \deg(P) \\ \infty & \deg(P) > \deg(Q) \end{cases}$

$P(x) = a_n x^n + \cdots$
$Q(x) = b_n x^n + \cdots$

Ej: $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

Asínt. Vertical: $x = 1$
Asínt. Oblicua $y = x + 1$

Asínt. Oblicua

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + x}{x - 1}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = 1$

Importante: Algoritmo para encontrar Asíntota

1.- ¿Se anula el denominador?
→ Si → Asínt. Verticales
→ No → No hay Asín Vert.

2.- Determinar $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
→ si existe $\Rightarrow$ pasar a 3
→ si no existe $\Rightarrow$ no hay asínt. oblicua ni horizontal

3.- Determinar $b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$
→ $a = 0 \Rightarrow y = b$ es asínt. horizontal
→ $a \neq 0 \Rightarrow y = ax + b$ es asín oblicua

Formas Indeterminadas (8.1, 8.2 Purcell)

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ — o No

Ej: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{6}{5}$

Regla de L'Hôpital (L'Hospital) $(\frac{0}{0})$

Sup. $\lim_{x \to u} f(x) = \lim_{x \to u} g(x) = 0$

Entonces $\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \end{cases}$

Ej: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sen}(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$.

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sen}(x)}{1} = 0$

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{6}{5}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{\ln(1 + x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2(2x)}{\frac{1}{1+x}} \begin{matrix} \} 2 \\ \} 1 \end{matrix} = 2$

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$

Obs: La regla de L'Hôpital también aplica para el caso $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0} = \frac{\frac{1}{g(x)} \to \infty}{\frac{1}{f(x)} \to \infty}$

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xe^x} = 0$

Nota: L'Hôpital nos permite resolver otras formas indeterminadas luego de "arreglarlas"

Ej: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan(x) \cdot \ln(\operatorname{Sen}(x))) \text{"="} \infty \cdot 0$

$\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{Sen}(x))}{\cot(x)} \text{"="} \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)/\operatorname{Sen}(x)}{-\csc^2(x)} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)/\cancel{\operatorname{Sen}(x)}}{1/\operatorname{Sen}^{\cancel{2}}(x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\operatorname{Sen}(x)\cos(x) = 0$

Ej (Tarea) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \frac{1}{2}$

¿Qué no hace L'Hôpital?

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$

Clase Lunes 7

Dos Teoremas sobre Derivadas

1.- Teo. del Valor Medio (TVM)

f continua en $[a, b]$ y derivable (a, b) entonces $\exists c \in (a, b)$ tq $\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$

pendiente de la recta entre $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ — pendiente de la recta tang en c

2.- Teo de Rolle

f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tq $f'(c) = 0$.

Idea de Optimización

Optimizar → Máx / Mín } 1ª derivada = 0

Razón de Cambio

$A_{círculo} = \pi r^2$

$A(t) = \pi r^2(t) \quad / \frac{d}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt}$

$A = r^2\pi$, $25\pi \Rightarrow r = 5$

El radio de un círculo aumenta 5 cm/s, a que tasa cambia el Área cuando el radio mide 15 cm

$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 30 \cdot 5$

@knotted.user

Optimización

1.- Calcular la base y altura de un triang isósceles de perímetro 8 que maximiza el área:

$2y + 2x = 8 \Rightarrow \boxed{y = 4 - x}$

Pitágoras
$h^2 + x^2 = y^2$
$h = \sqrt{y^2 - x^2}$

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2x \cdot h}{2}$

$A(x, y) = x\sqrt{y^2 - x^2} = x\sqrt{16 - 8x + x^2 - x^2}$

$A(x) = x\sqrt{16 - 8x} = 2x\sqrt{4 - 2x}$

$A'(x) = 0 \iff A'(x) = \frac{8 - 6x}{\sqrt{4 - 2x}} = 0 \quad x \neq 2$

$\iff 8 - 6x = 0$
$\iff \boxed{x = 4/3} \Rightarrow y = 8/3 \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

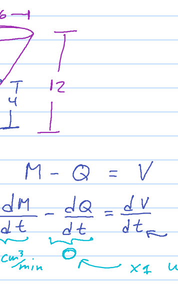
* No olvidar verificar si los puntos críticos son máximos o mínimos con la 2ª derivada

Verificar $A''(4/3) < 0 \Rightarrow x = 4/3$ es máximo

2.- Hallar las dimensiones de una caja abierta superiormente de base cuadrada, de 50 m³ de volumen que tenga superficie mínima

$V(x, y) = x^2 y = 50$

$\boxed{y = \frac{50}{x^2}}$



$S(x, y) = x^2 + 4 \cdot xy$

$S(x) = x^2 + \frac{200}{x}$

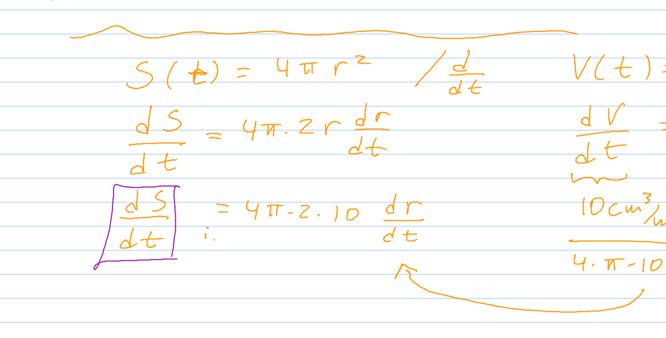
$S'(x) = 2x - \frac{200}{x^2} = 0$

$2x^3 = 200$
$x^3 = 100$
$x = \sqrt[3]{100}$
$y = \frac{50}{10^{4/3}}$

$S''(\sqrt[3]{100}) = 6 > 0$

Razón de Cambio

1.- Hacia un tanque cónico fluye agua a razón de 8 cm³/min, si la altura del tanque es 12 m y el radio de la base de 6 m ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando tiene 4 m de altura? ← $\frac{dh}{dt}$



M = Agua entra
Q = Agua sale
V = Agua en estanque

$\frac{dV}{dt} = f(t)$

$M - Q = V \quad / \frac{d}{dt}$

$\frac{dM}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}$

$8 \text{ cm}^3/\text{min}$, 0 ← x4 no sale agua

$\frac{h}{r} = \frac{12}{6}$

$\boxed{h = 2r}$

$\boxed{\frac{h}{2} = r}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{4} \cdot h \quad / \cdot \frac{d}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12_4} \cdot 3h^2 \cdot \boxed{\frac{dh}{dt}}$

$\frac{8 \cdot 4}{\pi \cdot 16} = \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi}}$

$S(t) = 4\pi r^2 \quad / \frac{d}{dt}$

$\frac{dS}{dt} = 4\pi \cdot 2r \frac{dr}{dt}$

$\boxed{\frac{dS}{dt}} = 4\pi \cdot 2 \cdot 10 \frac{dr}{dt}$

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{10 \text{ cm}^3/\text{min}}{4 \cdot \pi \cdot 100} = \frac{dr}{dt}$