Modelos matemáticos para identificar o perfil 3d de superfícies digitalizados por meio da visão monocular com projeção de luz estruturada

Elisângela Ribeiro, Fernando Pujaico Rivera, Bianca Batista Barreto, Roberto Alves Braga Junior, Marco Antônio Barbosa
elismar1952@hotmail.com; fernando.pujaico.rivera@gmail.com; biabarreto89@gmail.com; robbraga@gmail.com; marco.fisioedu@ufla.br

3 de Março de 2021

Resumo

Uma imagem é a representação visual de um objeto real em uma superfície sensível gerada a partir de um foco central. Esta pode variar de acordo com os dados intrínsecos da câmera e da geometria da cena. Sendo a luz estruturada um processo de projetar um padrão conhecido em uma cena, a forma como o padrão se deforma quando atinge a superfície permite que sistemas de visão calculem a profundidade e informações das superfícies dos objetos na cena. Partindo desse pressuposto, este trabalho tem o objetivo de identificar o perfil de um objeto em um plano de referência, a partir de dados intrínsecos da câmera, da geometria da cena e da luz estruturada, por meio de visão monocular. Para isso foi desenvolvido uma função de correção envolvendo modelos matemáticos para identificar todos os parâmetros que compõem o sistema gerador da imagem. Esse sistema é composto pelas variáveis de entrada de acordo com a configuração experimental. Os resultados mostraram que foi possível identificar as distorções dos eixos X, Y e Z e traçar o perfil do objeto em análise em três dimensões.

Palavra-chave: Luz estruturada; perfil; três dimensões.

Abstract

An image is the visual representation of a real object on a sensitive surface generated from a central focus. This can vary according to the intrinsic data of the camera and scene geometry. Being structured light is a process of projecting a known pattern in a scene, the way the pattern deforms when it reaches the surface allows vision systems to calculate the depth and information of the surfaces of objects in the scene. Based on this assumption, this work aims to identify the profile of an object in a reference plane, using intrinsic data from the camera, the geometry of the scene and structured light, through monocular vision. For this purpose, a correction function was developed involving mathematical models to identify all the parameters that make up the image generating system. This system is composed of the input variables according to the experimental configuration. The results showed that it was possible to identify the distortions of the X, Y and Z axes and to profile the object under analysis in three dimensions.

Keywords: Structured light; profile; three dimensions.

1 Introdução

Aqui vem o texto

2 Material e Métodos

Os procedimentos metodológicos para a execução do projeto seguiram os seguintes passos:

- Montagem da configuração experimental (ver Seção 2.1).
- Digitalização de uma superfície (ver Seção 2.2).
- Binarização de uma imagem em cores (ver Seção 2.3).
- Obtendo uma linha em 3D a partir de imagens em 2D (ver Seção 2.4).
- Otimizando experimentalmente os valores dos parâmetros (ver Seção 2.5).

Todos os experimentos foram realizados nas dependências da Universidade Federal de Lavras (UFLA), dividido entre os laboratórios nº 2 e 7 do Centro de Desenvolvimento à Instrumentação aplicado à Agropecuária (CEDIA), ligado ao Departamento de Automática.

A configuração experimental foi elaborada por meio da visão monocular [4] com projeção de Luz estruturada para a digitalização de várias superfícies. Nessa configuração, com o auxílio do projetor conectado ao computador, projetam-se linhas horizontais sobre o objeto em análise, de forma a identificar o delineamento da superfície.

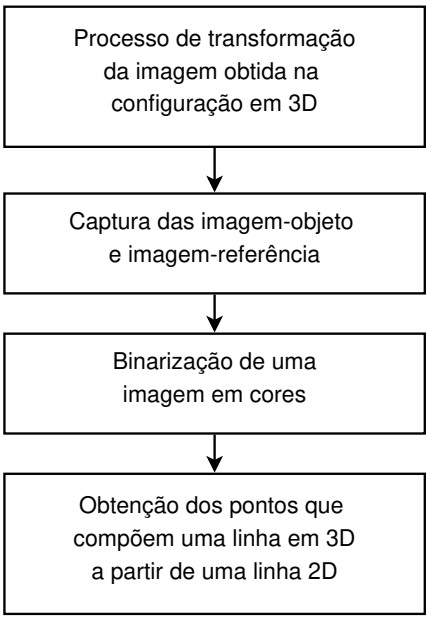
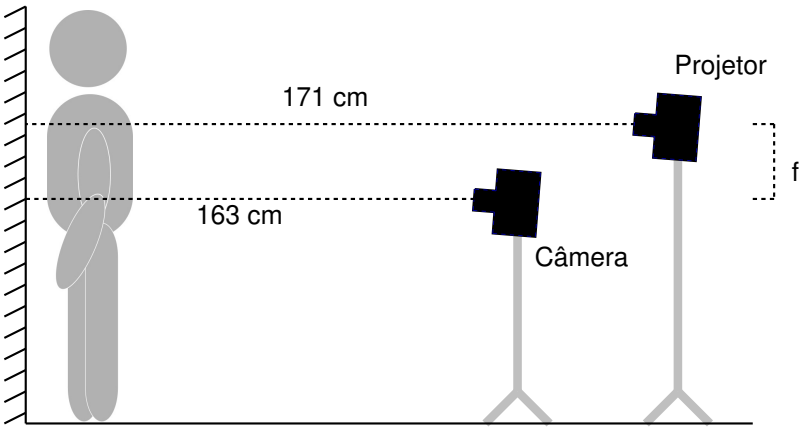


Figura 1: Fluxograma para identificar o perfil 3D

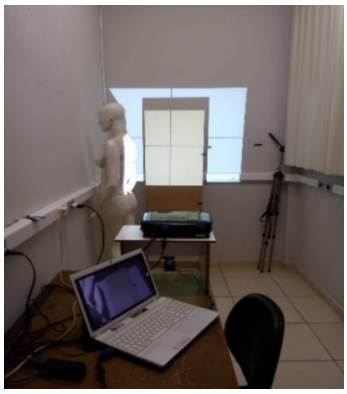
No fluxograma da Figura 1, é responsável pelo procedimento de transformação da imagem obtida na configuração em 3D, o qual primeiramente teve como objetivo apresentar o processo de transformação da imagem digitalizada, na configuração experimental, a uma representação em 3D. Para isso, foi necessário a captura das imagens objeto e referência com a projeção das linhas coloridas sobre as costas humana. Em seguida, foi desenvolvido um algoritmo para a binarização de uma imagem em cores.

2.1 Montagem da configuração experimental

Para a configuração do sistema, utilizou-se de uma fonte de luz como o projetor e apenas uma câmera, ambos dispostos em ângulos em relação ao objeto, ilustrado na Figura 2, conhecido também como Luz estruturada (projeção de um padrão conhecido – como linhas horizontais que ao tocar o objeto desenha a sua superfície) por meio da visão monocular (utiliza apenas uma câmera).



(a) Disposição do arranjo experimental



(b) Fotografia do arranjo experimental

Figura 2: Arranjo experimental utilizando luz estruturada

Os equipamentos utilizados na configuração experimental foram: uma webcam com as seguintes configurações: Hd, 3.0 Mb, Usb da marca Logitech C270 960-000691, um projetor multimídia Benq com as seguintes descrições: Mx525b 3200 Lumens/Xga/Hdmi/3D Ready/Bndes e um computador portátil Sony Vaio Core i3.

Na configuração, a fonte de luz ficou fixada a uma distância de 171 cm do objeto. A câmera ficou fixada a uma distância de 136 cm do objeto, conforme ilustra a Figura 2. Com a utilização de um computador portátil conectado ao projetor, projetaram linhas sobre o objeto.

Ao montar a configuração experimental utilizando visão monocular, foi possível identificar várias variáveis no setup, conforme ilustra a Figura 3 a seguir.

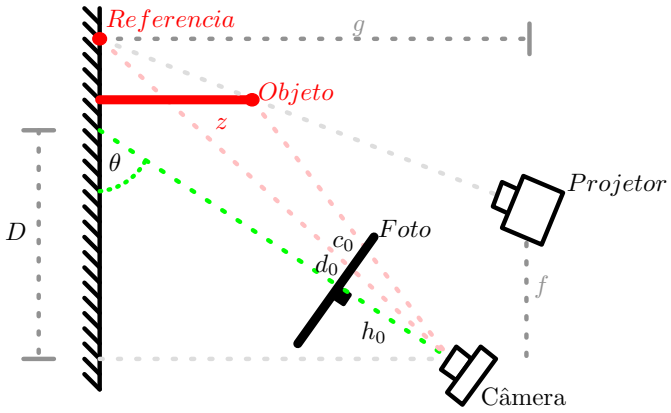


Figura 3: Variáveis da Configuração Experimental em uma vista sagital

Sendo:

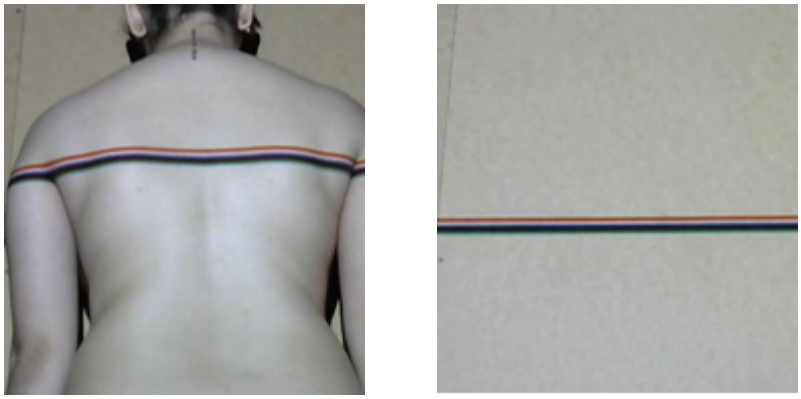
- g: Medida em centímetros da altura do projetor em relação ao plano de referência;
- f: Distância em centímetros entre o projetor e a câmera;

- θ: Ângulo formado entre a câmera e o plano de referência;
- h_0: Distância focal em pixels da câmera em relação ao objeto;
- D: Distância em centímetros entre sigma e beta;
- C: Altura real do objeto, também identificado pela variável z;
- c_0: Altura relativa em pixels do objeto na imagem digitalizada;
- d_0: Diferença em pixels entre o ponto central real da imagem até a linha de referência projetada, sendo que esses dados estão em referência na fotografia digitalizada.

Todas essas variáveis foram importantes para o desenvolvimento de modelos matemáticos utilizados nos algoritmos desenvolvidos.

2.2 Digitalização de uma superfície

Com a câmera fixada em um tripé, capturou-se uma foto da projeção da linha sobre o objeto, conforme ilustra a Figura 4a. Em seguida, removeu-se o objeto, e o mesmo procedimento foi repetido para a captura da imagem do plano, conhecida como imagem referência ilustrado na Figura 4b.



(a) Imagem objeto (b) Imagem referência

Figura 4: Projeção das linhas coloridas

As linhas projetadas nas costas das pessoas foram coloridas seguindo o padrão RGB [2] associado às cores preta e branca, de forma que uma das cinco cores projetadas fossem visualizadas nas fotos capturadas, pois o conjunto de amostras possuíam uma variedade de tonalidade na cor da pele.

2.3 Binarização de uma imagem em cores

Esta Seção foi responsável por transformar as imagens capturadas em apenas linhas (binária), ou seja, deixar em evidência binária somente a linha de melhor delineamento, que no caso das imagens digitalizadas, a cor vermelha foi a que teve o melhor destaque nas costas dos indivíduos.

Para realizar esse processo, um algoritmo baseado em identificação de cores foi desenvolvido. Ele teve como dados de entrada a imagem original digitalizada, na qual o algoritmo percorreu toda ela e identificou a cor desejada e descartou todos as outras, obtendo, assim, como imagem final somente a linha da superfície digitalizada, conforme ilustra a Figura 5.

(a) Imagem **A** em RGB. (b) Imagem **D** em BW.

Figura 5: Processo para identificação da linha na imagem digitalizada

2.3.1 Lógica matemática na identificação de linha

Conhecida uma imagem **A** com L pixels codificados em RGB (como na Figura 5a), onde $a_l = (r_l, g_l, b_l) \in R^3$ representa o pixel l, $\forall\ 1 \leq l \leq L$ em **A**, de modo que r_l indica o valor da componente em vermelho do pixel, g_l indica o valor da componente em verde do pixel e b_l indica o valor da componente em azul do pixel. Definimos um detector de cores mediante a função $func\_compare$ descrita na Equação (1),

$$func\_compare(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \epsilon) = \begin{cases} 1 & if \quad \frac{||\mathbf{a}-\mathbf{c}||}{||\mathbf{c}||} < |\epsilon| \\ 0 & else \end{cases}, \tag{1}$$

que recebe como entrada os vetores **a** e **c** (representando pixeis), e se procura se estes tem uma diferença relativa menor a $|\epsilon|$, em caso afirmativo, é dizer se os vetores são semelhantes, se retorna 1 em caso contrario se retorna 0. Na Equação (1) o operador $||\mathbf{c}||$ indica a norma euclidiana de **c**.

Assim, para obter a linha detetada em branco e preto da Figura 5b a partir da linha projetada em cores da Figura 5a, é utilizada a função $func\_compare()$, de modo que primeiro selecionamos um pixel $\mathbf{a}_c$ na imagem **A**, representando este pixel a cor a detetar, e logo comparamos cada pixel $\mathbf{a}_l \in \mathbf{A}$, obtendo como resultado desta comparação $\mathbf{d}_l$, é dizer

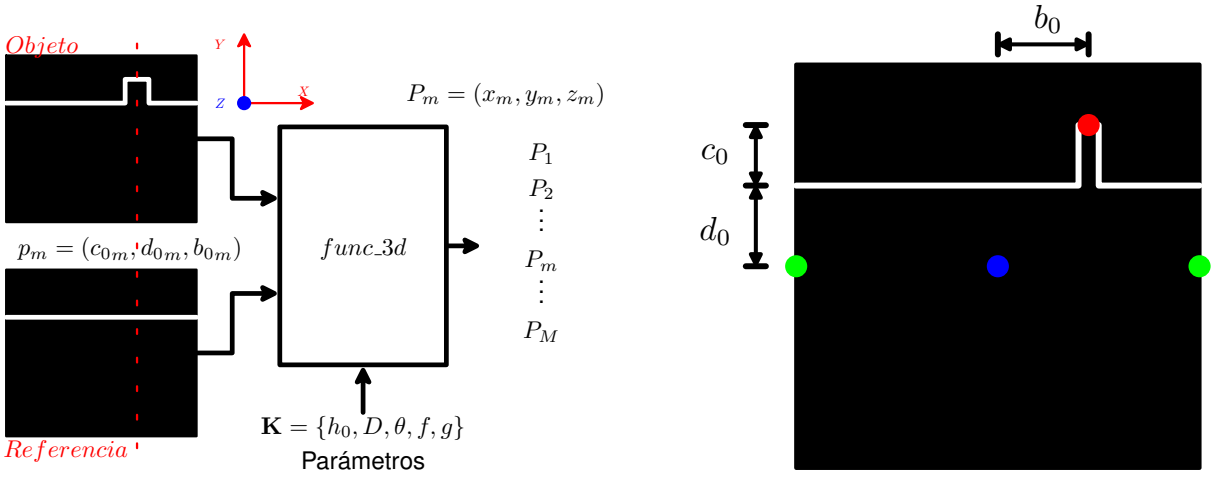
$$\mathbf{d}_l \leftarrow func\_compare(\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_c, \epsilon), \quad \forall\ 1 \leq l \leq L, \tag{2}$$

apos estes cálculos os valores $\mathbf{d}_l$ são ordenados para formar a imagem **D**, como exemplifica a Figura 5b, onde a cor branca representa um valor 1 e a cor preta um valor 0. No caso da Figura 5 é usado o valor $\epsilon = 0.25$.

2.4 Obtendo uma linha em 3D a partir de imagens em 2D

Nesta seção é mostrado como a partir de duas imagens binarias, uma referente a um objeto iluminado com luz estruturada, e outra da mesma luz iluminando um plano de referencia; podemos obter uma curva em 3D que representa a altura de um objeto em estudo em relação ao plano de referencia. Podemos ver todo este processo resumido na Figura 6a, onde são extraídos M pontos p_m (em 2D) das imagens binarias e são convertidos em pontos P_m (em 3D), mediante a função $func\_3d()$

$$P \leftarrow func\_3d(p; \mathbf{K}), \tag{3}$$



(a) Diagrama de blocos. (b) Objeto em estudo.

Figura 6: Obtendo uma linha em 3D.

$$p = (c_0, d_0, b_0) \xrightarrow[\mathbf{K}]{func\_3d} P = (x, y, z), \tag{4}$$

$$p_m = (c_{0m}, d_{0m}, b_{0m}) \xrightarrow[\mathbf{K}]{func\_3d} P_m = (x_m, y_m, z_m). \tag{5}$$

Os pontos p_m são extraídos um por cada coluna das imagens binarias, e estão referenciados ao centro da imagem, é dizer os valores em p_m podem ser positivos ou negativos. A Figura 6b mostra como são selecionados os valores (c_0, d_0, b_0) para um ponto p, que está ressaltado com um circulo vermelho na imagem. O centro da imagem está representado com um circulo azul. O valor d_0 representa a distancia vertical de um ponto da linha de referencia ao centro da imagem, o valor c_0 representa a distancia vertical de um ponto da linha do objeto à linha de referencia, e o valor b_0 representa a distancia horizontal de um ponto da linha do objeto ao centro da imagem.

Os parâmetros do sistema $\mathbf{K} \equiv \{h_0, D, \theta, f, g\}$ são agrupado num vetor $\mathbf{K}$, e estos valores são extraídos da geometria do sistema; por este motivo estes valores não mudam para todos os pontos p_m, $\forall\ 1 \leq m \leq M$. A Figura 3 mostra uma vista sagital da disposição do sistema, onde as variáveis h_0, D, θ, f e g são obtidas. Dado que a vista é sagital somente são mostradas aqui os valores y e z de um ponto $P = (x, y, z)$; onde z representa altura do objeto e y a distancia vertical da base do objeto em estudo ao ponto no plano de referencia a onde aponta a câmera; este ponto é considerada a posição $(0, 0, 0)$ em 3D.

A função $func\_3d()$ calcula a altura z de um ponto mediante as Equações (6) e (7),

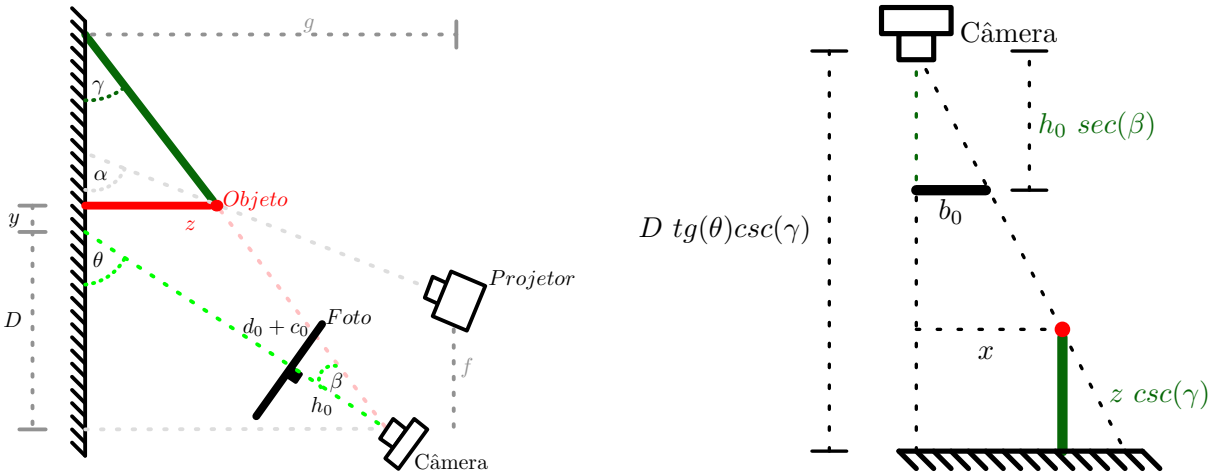
$$z = \frac{D\ tg(\theta)\left[1 + ctg\left(\theta + atg\left(\frac{h_0}{d_0+c_0}\right)\right) ctg\left(\theta - atg\left(\frac{d_0}{h_0}\right)\right)\right]}{\left[1 + ctg\left(\theta + atg\left(\frac{h_0}{d_0+c_0}\right)\right) ctg(\alpha)\right]}, \tag{6}$$

$$ctg(\alpha) = \frac{D\ tg(\theta) ctg\left(\theta - atg\left(\frac{d_0}{h_0}\right)\right) - f}{g}. \tag{7}$$

O valor y de um ponto analisado pode ser calculado mediante as Equações (8) e (7),

$$y = D\ tg(\theta) ctg\left(\theta - atg\left(\frac{d_0}{h_0}\right)\right) - D - z\ ctg(\alpha). \tag{8}$$

Para obter o valor x são criadas as variáveis temporais γ e β, como mostra a Figura 7a. Se geramos um plano com um angulo γ obtemos uma vista onde a variável x está



(a) Vista sagital do sistema.

(b) Vista do plano com angulo γ.

Figura 7: Detecção de cores.

evidente, como mostra a Figura 7b. Destas figuras concluímos que a variável x pode ser obtida das Equações (9), (10) e (11)

$$x = b_0 \left(\frac{D\ tg(\theta) - z}{h_0} \right) \left(\frac{csc\,(\gamma)}{\sec\,(\beta)} \right), \tag{9}$$

$$\gamma = \theta - \beta, \tag{10}$$

$$\beta = atg \left(\frac{c_0 + d_0}{h_0} \right). \tag{11}$$

2.4.1 Calculando a altura z

Para obter a altura z de um objeto a partir de um valor c_0 extraído de uma imagem em 2D, é usada a função $func\_z(c_0; \mathbf{K})$,

$$z = func\_z(c_0; \mathbf{K}), \tag{12}$$

$$func\_z(c_0; \mathbf{K}) \equiv \frac{D\ tg(\theta) \left[1 + ctg \left(\theta + atg \left(\frac{h_0}{d_0 + c_0} \right) \right) ctg \left(\theta - atg \left(\frac{d_0}{h_0} \right) \right) \right]}{\left[1 + ctg \left(\theta + atg \left(\frac{h_0}{d_0 + c_0} \right) \right) \left(\frac{D\ tg(\theta) ctg \left(\theta - atg \left(\frac{d_0}{h_0} \right) \right) - f}{g} \right) \right]}, \tag{13}$$

sendo $\mathbf{K} = [d_0, h_0, D, \theta, f, g]^T$ um vetor que contem os parâmetros que não modificam seu valor em todos os analises, pois pertencem à geometria do sistema implementado (setup). Assim, se conhecemos o vetor $\mathbf{K}$, o cálculo da altura z, mediante a função $func\_z()$, depende unicamente da variável c_0. Porém o cálculo dos parâmetros em $\mathbf{K}$ mediante medições de alturas e ângulos é um trabalho laborioso que traz muitos erros de medida. Pelo que em vez de tentar obter ou medir os parâmetros em $\mathbf{K}$, aqui se optou por realizar a seguinte aproximação da função $func\_z()$, mediante a função $f_{\mathbf{P}}()$,

$$func\_z(c_0; \mathbf{K}) \equiv f_{\mathbf{P}}(c_0), \tag{14}$$

que representa una serie de Taylor,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{P}}(c_0) &\equiv p_0 + p_1\ c_0 + p_2\ c_0^2 + p_3\ c_0^3 + ... \\ &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} p_i\ c_0^i \end{aligned} \tag{15}$$

na qual, o vetor $\mathbf{P} = [p_0,\ p_1,\ p_2,\ ...]$ tem infinitos elementos. O parâmetro p_0 é fácil de aproximar pois se assume que $f_{\mathbf{P}}(0) \approx 0$, de modo que $p_0 \approx 0$ e

$$f_{\mathbf{P}}(x) \equiv p_1\ x + p_2\ x^2 + p_3\ x^3 + ... \tag{16}$$

a partir de aqui realizamos uma aproximação considerando a geometria do sistema e testes para identificar o erro desta aproximação. Finalmente foi observado que um polinômio de primeiro ordem (quer dizer $p_i = 0 | \forall i \geq 2$) já produzia uma aproximação adequada à altura real dos objetos, pelo que agora

$$func\_z(c_0; \mathbf{K}) \equiv f_{\mathbf{P}}(c_0) \approx p_1 c_0; \tag{17}$$

assim, o único parâmetro desconhecido é p_1. É importante ressaltar que esta é uma aproximação, pelo que se houvéssemos escolhido $func\_z(c_0; \mathbf{K}) \approx p_0 + p_1 c_0 + p_2 c_0^2$, poderíamos ter atingido reconstruções mais apuradas, porém a aproximação de primeiro ordem já cumpre com o objetivo.

Assim, usando a função $f_{\mathbf{P}}(c_0)$ podemos achar a altura z a partir do valor c_0 numa fotografia, como mostra a Figura 6b. Lembrando que c_0 é a medida de diferencia da altura entre de um objeto na fotografia e a linha de referencia numa posição d_0.

Por outro lado, para obter o valor p_1 é usado um objeto de tamanho z conhecido, ao qual se lhe toma uma fotografia e se obtém o valor c_0; assim, para obter o valor p_1 usamos,

$$p_1 = \frac{z}{c_0}. \tag{18}$$

Para aprimorar mais o cálculo de p_1 também poderiam ser tomadas varias amostras $d_n = \{z^{(n)}, c_0^{(n)}\}$, para todo inteiro n que cumpra $1 \leq n \leq N$. De modo que $p_1 = E\left[\frac{z^{(n)}}{c_0^{(n)}}\right]$, sendo que $E[.]$ representa ao operador esperança.

2.5 Otimizando experimentalmente os valores dos parâmetros

Nesta Seção, foi desenvolvido o sistema representado na Figura 8, o qual foi composto por cinco variáveis (h_0, D, θ, f e g), e seus parâmetros foram possíveis de serem identificados de forma manual que, eventualmente, possui erro devido à imprecisão de medição humana. Porém, é necessário que esses parâmetros sejam o mais real possível, sendo necessário realizar uma aproximação desses dados.

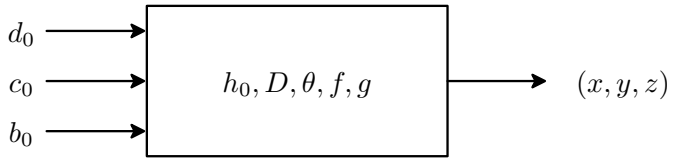


Figura 8: Sitema para otimizar parâmetros

Utilizando o software Octave, foi possível desenvolver um algoritmo que fosse capaz de otimizar os dados inseridos manualmente e retornar o melhor valor da medição com o menor erro possível. Baseado nos passos descritos no fluxograma da Figura 9, foi possível realizar essa aproximação dos dados.

Para desenvolver o algoritmo de otimização dos parâmetros, primeiro definiram-se os parâmetros do sistema como sendo h_0, D, θ, f e g, para receber os dados calculados manualmente. Logo, foi criado um vetor com o propósito de receber os parâmetros de c_0

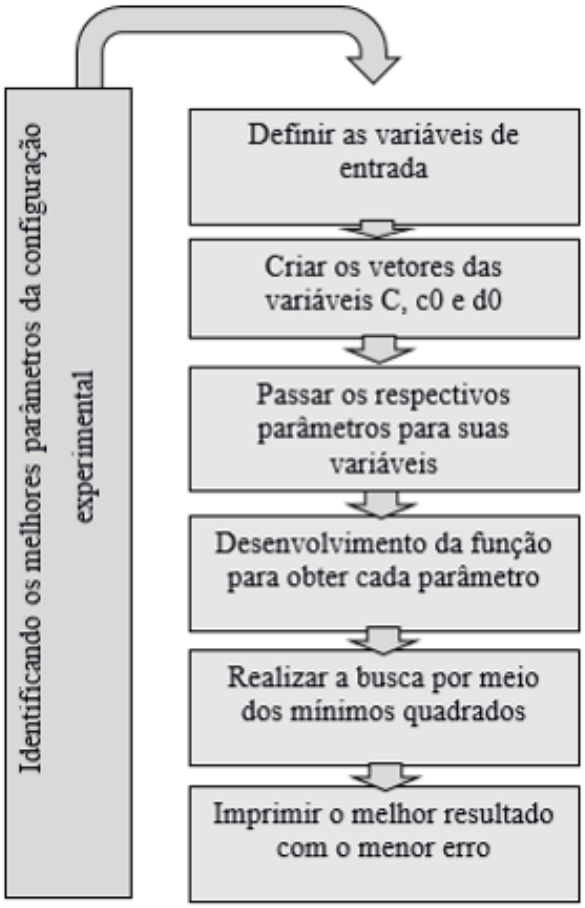


Figura 9: Fluxograma para identificar parâmetros

e d_0 que foram calculados do primeiro objeto digitalizado, com o objetivo de otimizar e identificar os melhores parâmetros para z.

Uma função para receber todos os dados da geometria foi desenvolvida. Utilizou-se de cálculos matemáticos baseados no método dos mínimos quadrados, pelo qual se procurou encontrar o melhor ajuste para o conjunto de dados medidos manualmente, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e os dados medidos manualmente; porém, utilizar parâmetros calculados medidos manualmente apresentou respostas com erros.

Para melhorar os parâmetros medidos manualmente, foi necessário oferecer mais parâmetros de entrada ao sistema da Figura 8; porém, desta vez, recebendo como parâmetros de entrada c_0, correspondente às linhas projetadas no plano em relação às mesmas linhas em cima do objeto, d_0 correspondente à diferença entre o meio da imagem e à linha de referência no plano e à variável z, como a altura real do objeto.

Com o conjunto de parâmetros f, g, h_0, c_0, d_0 calculados manualmente, realizaram-se as interações com base nos três parâmetros de entrada que retornaram ao melhor valor dos parâmetros do sistema, ou seja, oferecendo os parâmetros certos citados acima, o sistema funcionou perfeitamente, Figura 8. Uma variável E foi inserida ao algoritmo para representar o valor do erro estimado entre as interações feitas nos parâmetros no algoritmo. Essa variável representou que quanto menor o erro, melhor a interação realizada.

Para que a otimização desses parâmetros alcançasse seus melhores resultados, foram utilizados no mínimo 5 grupos de c_0, d_0 e z, que foram oferecidos em blocos/vetor, pois quanto mais amostras de entrada para z, c_0 e d_0, melhor os ajustes dos parâmetros e com

retorno de valores mais favoráveis para h_0, D, θ, f e g.

2.5.1 Lógica matemática para otimização dos parâmetros do sistema

Como já foi visto em seções anteriores, para obter um ponto $P = (x, y, z)$ em 3D a partir de um ponto $p = (c_0, d_0, b_0)$ extraído a partir de imagens em 2D, é usada a função $P \leftarrow func\_3d(p; \mathbf{K})$, sendo $\mathbf{K} = [h_0, D, \theta, f, g]^T$ um vetor que contem os parâmetros da geometria do sistema. Porem, os valores em $\mathbf{K} \in R^4$ inicialmente são medidos manualmente, e precisam ser ajustados a sus valores reais, ou o mais próximos a estos que seja possível; para cumprir este proposito podemos usar a função $func\_z()$ que é uma simplificação da função $func\_3d()$ onde

$$z \leftarrow func\_z(\{c_0, d_0\}; \mathbf{K}), \tag{19}$$

$$\hat{p} = \{c_0, d_0\} \quad \xrightarrow[\mathbf{K}]{func\_z} \quad z; \tag{20}$$

de modo que o cálculo da altura z, mediante a função $func\_z()$, só depende dos valores $\hat{p} = \{c_0, d_0\}$ e $\mathbf{K}$.

$$func\_z(\hat{p}; \mathbf{K}) = \frac{D\ tg(\theta)\left[1 + ctg\left(\theta + atg\left(\frac{h_0}{d_0+c_0}\right)\right) ctg\left(\theta - atg\left(\frac{d_0}{h_0}\right)\right)\right]}{\left[1 + ctg\left(\theta + atg\left(\frac{h_0}{d_0+c_0}\right)\right) ctg(\alpha)\right]}, \tag{21}$$

$$ctg(\alpha) = \frac{D\ tg(\theta) ctg\left(\theta - atg\left(\frac{d_0}{h_0}\right)\right) - f}{g}. \tag{22}$$

Usando todos estes antecedentes, nosso interesse é encontrar $\mathbf{K}$ com o valor mais ajustado a realidade; é dizer com valores optimizados, com este fim são processados, e convertidas a imagens binarias, um conjunto de objetos de tamanho conhecido, obtendo L dados $\hat{p}_l$ e z_l, $\forall\ 1 \leq l \leq L$. Onde z_l são as alturas dos objetos e $\hat{p}_l$ são os dados extraídos do objeto nas imagens binarias; com a informação destes dois âmbitos (3D e 2D respetivamente) definimos a função de custo $e(\mathbf{K})$,

$$e(\mathbf{K}) = \sum_{l=1}^{L} \left(z_l - func\_z(\hat{p}_l; \mathbf{K})\right)^2. \tag{23}$$

Assim, se os valores $\mathbf{K}$, $\hat{p}_l$ e z_l, são medidos ou obtidos de forma exata, $e(\mathbf{K})$ deveria ser igual a zero, devido a que $z_l \approx func\_z(\hat{p}_l; \mathbf{K})$; porem, como na prática usamos medidas e cálculos aproximados, nosso objetivo mais eficiente é achar o vetor $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}$ que minimiza $e(\mathbf{K})$.

Para facilitar o cálculo deste mínimo é conveniente expressar a Equação (23) na forma matricial como na Equação (24)

$$e(\mathbf{K}) = ||\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{K})||^2, \tag{24}$$

onde $\mathbf{Z} \in R^L$ é um vetor coluna, $\mathbf{F}(\mathbf{K}) : R^4 \rightarrow R^L$ é uma função vetorial de variável vetorial $\mathbf{K}$, e o operador $||.||^2$ indica a norma ao quadrado do vetor,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} func\_z(\hat{p}_1; \mathbf{K}) \\ func\_z(\hat{p}_2; \mathbf{K}) \\ \vdots \\ func\_z(\hat{p}_l; \mathbf{K}) \\ \vdots \\ func\_z(\hat{p}_L; \mathbf{K}) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Assim, para minimizar a Equação (24) podemos aplicar o "algoritmo de Levenberg-Marquardt" (LMA o simplesmente LM), tambem conhecido como o "método de mínimos quadrados amortiguados" (DLS) [1, pp. 232-234] [3, pp. 82]. De modo que o vetor $\bar{\mathbf{K}}$ que minimiza a Equação (24) é calculado iterativamente usando a Equação (26)

$$\mathbf{K}_{i+1} \leftarrow \mathbf{K}_i + \left[\mathbf{J}(\mathbf{K}_i)^T \mathbf{J}(\mathbf{K}_i) + \alpha \mathbf{I}\right]^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{K}_i)^T \left[\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{K}_i)\right], \tag{26}$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de 4×4, a variável $\alpha \geq 0$ é um fator de regularização escolhido por nos, cujo propósito é conseguir que a matriz $\left[\mathbf{J}(\mathbf{K}_i)^T \mathbf{J}(\mathbf{K}_i) + \alpha \mathbf{I}\right]$ sempre tenha inversa, e $\mathbf{J}(\mathbf{K}) \in R^{L \times 4}$ é a matriz jacobiana [6, pp. 130] de $\mathbf{F}(\mathbf{K})$; é dizer

$$\mathbf{J}(\mathbf{K}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial func\_z(\hat{p}_1;\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}^T} \\ \frac{\partial func\_z(\hat{p}_2;\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}^T} \\ \vdots \\ \frac{\partial func\_z(\hat{p}_L;\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}^T} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}^T} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial h_0} & \frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial D} & \frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial \theta} & \frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial f} & \frac{\partial func\_z(\hat{p};\mathbf{K})}{\partial g} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Finalmente a Equação (26) converge a um vetor $\mathbf{K}_{i+1}$ que é um mínimo global de $e(\mathbf{K})$, se inciamos o cálculo iterativo desde um valor $\mathbf{K}_0$ próximo à solução, neste caso são usados os valores $\{h_0, D, \theta, f, g\}$ medidos o calculados manualmente. As iterações finalizam quando $\mathbf{K}_{i+1} \approx \mathbf{K}_i$ onde se declara que o valor ótimo $\bar{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}_{i+1}$.

Sobre o cálculo das derivadas parciais da função $func\_z(\hat{p};\mathbf{K})$ em relação a $\mathbf{K}$, como descrito na Equação (28), é fácil observar que estes cálculos são possíveis porem extremadamente laboriosos; por este motivo foi usado o motor de cálculo simbólico e sistema de álgebra computacional: Maxima [5]. Assim, com a ajuda desse software é calculado de forma simbólica as derivadas parciais da função $func\_z(\hat{p};\mathbf{K})$ em relação a $\mathbf{K}$.

Todo o processo de optimização antes descrito pode ser sistematizado mediante o diagrama de blocos da Figura 10, onde podemos ver 3 entradas de dados e uma saída, que neste caso é o valor de $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}$ que minimiza $e(\mathbf{K})$.

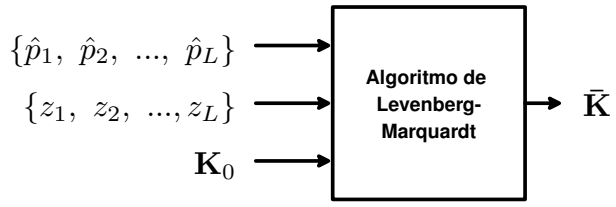


Figura 10: Algoritmo de Levenberg-Marquardt.

3 Resultados e Discussões

Utilizando apenas uma câmera fixada a uma distância de 136 centímetros em relação ao objeto e a uma altura de 75 centímetros da superfície; um projetor multimídia fixado a uma distância de 171 centímetros do objeto a ser analisado e a uma altura de 112 centímetros da superfície; em seguida, foi possível projetar linhas sobre o objeto de estudo e resultar em seu perfil após o processamento das imagens. A Figura 2 ilustra a disposição dos equipamentos, bem como suas respectivas medidas.

4 Conclusões

Foi possível desenvolver uma configuração experimental baseada no método interferométrico a partir de apenas uma webcam e um projetor multimídia.

Referências

[1] A. Doicu, T. Trautmann e F. Schreier. *Numerical Regularization for Atmospheric Inverse Problems*. Springer Praxis Books. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 9783642054396. URL: https://books.google.com.br/books?id=P_tYXLtQ5x8C.

[2] K. N. LUKAC R.; PLATANIOTIS. "Desenvolvimento universal para tubulações de imagem com uma matriz de filtros de cores RGB". Em: *Reconhecimento de Padrões* 38.11 (2005), pp. 2208–2212.

[3] Fernando Pujaico Rivera. *Métodos numéricos: Problemas não lineares e inversos*. 1ra. 2020. ISBN: 978-65-00-07314-0. URL: https://trucomanx.github.io/metodos.numericos/.

[4] E. RIBEIRO. "Correção digital das distorções em imagens provenientes de digitalização tridimensional". Tese de mestrado. the Netherlands: Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas - Universidade Federal de Lavras, 2014, p. 98.

[5] Bruna Santos. "Introdução ao software maxima". Em: *Centro de Matemática da Universidade do Porto* (2009).

[6] X.D. Zhang. *Matrix Analysis and Applications*. Cambridge University Press, 2017. ISBN: 9781108417419. URL: https://books.google.com.br/books?id=YBs0DwAAQBAJ.