где

$$C_n(t) = a_n \cos\omega_n(t+\delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{n\pi}{l}a\right). \tag{1}$$

В момент времени t (при котором $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi}{l}a. \tag{2}$$

Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = T/\rho$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{3}$$

Энергия n-й стоячей волны (n-й гармоники) для случая поперечных колебаний струны равна

$$E_n = \frac{1}{2}\rho\int\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx = \tag{4}$$

$$= \frac{a_n^2}{2}\int\left[\rho\omega_n^2\sin^2\omega_n(t+\delta_n)\sin^2\frac{n\pi}{l}x + T\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos^2\omega_n(t+\delta_n)\cos^2\frac{n\pi}{l}x\right]dx = \tag{5}$$

$$= \frac{a_n^2}{2}\frac{l}{2}\left[\rho\omega_n^2\sin^2\omega_n(t+\delta_n) + T\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos^2\omega_n(t+\delta_n)\right], \tag{6}$$

так как

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x dx = \int_0^l \cos^2\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{l}{2}. \tag{7}$$

Пользуясь выражением для a_n, ω_n, а также равенством $T = a^2\rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho a_n^2\omega_n^2 l}{4} = \frac{\omega_n^2}{4}Ma_n^2\frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \tag{8}$$

где $M = \rho l$ – масса струны.
Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наилучшим наложением простых тонов,соответствующих стоячим волнам,на которые разлагается колебание.Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера.Выделение простых тонов можно произвести-эксперементально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний,соответствующих этому тону.Сила тона определяется его энергией и,следовательно,его амплитудой.Самый низкий тон,который может создавать струна,определяется самой низкой частотой $omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется *основным тоном* струны. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1 называются *обертонами* Набор обертонов зависит от свойств струны наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам
Низкий тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия

$$u(x,0) = \phi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{9}$$

через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n Если $A_n = B_n = 0$, то в низшем тоне будет тон, соответствующий частоте ω_n, где n – наименьшее число, для которого A_n или B_n отличны от нуля.
Обычно струна издает один и тот же тон. В самом деле, при чем тону колошения отрезают же ее в одну сторону и отпускай без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x,0) = 0; \quad u(x,0) = \varphi(x) > 0 \tag{10}$$

и

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi d\xi > 0, \tag{11}$$