Problemario

Ramos Gómez Elisa
3CV3

A. Indicar, para cada par de expresiones (A, B) en la siguiente tabla si A es O, o, Ω, ω o Θ de B. Suponga que $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ y $c > 1$ son ctes. Su respuesta debe estar en forma de tabla con sí o no escrito en cada casilla.

B. Ordena por crecimiento asintótico

$\lg(\lg^*(n))$	n^3	$n \cdot 2^n$	$4^{\lg n}$	$2^{2^{n+1}}$
$(3/2)^n$	$\lg^* n$	e^n	2^n	$n \lg n$
$\lg(\lg(n))$	$(\lg n)^{\lg n}$	n	$n!$	$(\lg n)!$
$2^{\lg(n)}$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n^2	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	$\lg(n!)$	$\ln(n)$	1
$2^{\lg^* n}$	$\lg^2 n$	$n^{\lg \lg(n)}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$

Actividad A

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ	sí	sí	no	no	no
n^k	c^n	sí	sí	no	no	no
$\sqrt{n}$	$n^{\sin(n)}$	no	no	no	no	no
2^n	$2^{n/2}$	no	no	sí	sí	no
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	sí	no	sí	no	sí
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	sí	no	sí	no	sí

ejercicio 1

$\lg^1 n$, n^1

Para O:

Sea $O(g(n)) = \{ f(n)$: existen constantes positivas c y n_0 | $0 \leq f(n) \leq g(n)$ para todos los $n \geq n_0 \}$

Queremos demostrar que $\lg^1 n = O(n)$ "pertenece"

Aplicamos definición

$$0 \leq \lg^1 n \leq C(n)$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\lg^1(n)}{n} \leq C(n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq \frac{\lg^1(n)}{n} \leq C$$

cuando n es muy grande se vuelve 0 entonces $C \geq 0$ con $n_0 = 0$ por lo que queda demostrado que $\lg^{(1)} n = O(n)$ → pertenece.

Sea $o(g(n)) = \{ f(n)$: para cualquier constante positiva $C>0$ existe una constante $n_0>0$ tal que $0 \le f(n) < C(g(n))$ para todos $n \ge n_0 \}$

Queremos demostrar $\lg^1 n = o(n)$

Aplicando la definición

$$0 \le \lg^1 n < C(n)$$

entonces

$$0\left(\tfrac{1}{n}\right) \le \frac{\lg^1 n}{n} < C(n)\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

$$0 \le \frac{\lg^1 n}{n} < C$$

cuando n es muy grande entonces se vuelve 0 por lo que el valor tendría que ser mayor a cero $C=1$ con $n_0=1$ entonces queda demostrado que $\lg^1(n) = o(n)$

Para Ω:

Sea $\Omega(g(n)) = \{ f(n)$ existe const. positivas c y n_0 tal que $0 \le C(g(n)) \le f(n)$ para todas las $n \ge n_0 \}$

Supongamos que $\lg^1(n) = \Omega(n)$

Aplicamos definición

$$0 \le C(n) \le \lg^1(n)$$

entonces

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)0 \le C n\left(\tfrac{1}{n}\right) \le \frac{\lg^1(n)}{n}$$

$$0 \le C \le \frac{\lg^1(n)}{n}$$

podemos observar que no existe un C tal que satisfaga la condición $C \le \frac{\lg^1(n)}{n}$ debido a que mientras n crece tiende a 0 dejando claro que C no existe llegando a una contradicción a nuestra suposición y queda demostrado que

$$\lg^1(n) \ne \Omega(n)$$

Para ω:

Sea $\omega(g(n)) = \{ f(n)$ existe ctes positiva $C>0$ existe una constante $n_0>0$ tal que $0 \le C(g(n)) < f(n)$ para todos los $n \ge n_0 \}$

Supongamos que $lg^1(n) = \omega(n)$

Aplicando la definición

$$0 \leq c(n) < lg^1(n)$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq c(n)\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{lg^1(n)}{n}$$

$$0 \leq c < \frac{lg^1(n)}{n}$$

como podemos ver llegamos a una contradicción porque no existe c tal que sea menor a $\frac{lg^1(n)}{n}$ ya que cuando n es muy grande tiende a cero por lo que se demuestra que

$$lg^1(n) \neq \omega(n)$$

Para Θ

Sea $\Theta(g(n)) = \{f(n)$ donde existen constantes positivas c_1, c_2 y n_0 tal que $0 \leq c_1(g(n)) \leq f(n) \leq c_2(g(n))$ para todos los $n \geq n_0\}$

Supongamos que

$$lg^1(n) = \Theta(n)$$

Aplicando la definición

$$0 \leq c_1(n) \leq lg^1(n) \leq c_2(n)$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq c_1(n)\left(\frac{1}{n}\right) \leq lg^1(n)\left(\frac{1}{n}\right) \leq c_2(n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq c_1 \leq \frac{lg^1(n)}{n} \leq c_2$$

cuando n es muy grande tiende a 0 por lo que

$c_2 \geq 0$; $c_2 = 1$ para $n_0 = 0$

pero para la cte c_1 podemos observar que no existe un valor de c_1 que satisfaga la desigualdad por lo que queda demostrado que

$$lg^1(n) \neq \Theta(n)$$

ejercicio 2

$n^1 \quad c > 1 \Rightarrow c = 2^n$

Para O

Aplicamos la definición que nos dice

$O(g(n)) \{f(n)$ existen ctes. positivas c y n_0 | $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ $\forall\, n \geq n_0\}$

Queremos demostrar que $n^1 = O(2^n)$

Teniendo así

$$0 \le n \le C(2^n)$$

$$0\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{n}{2^n} \le C(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$0 \le \frac{n}{2^n} \le C$$

$$0 \le n \cdot 2^{-n} \le C$$

cuando n es muy grande tiende a 0 por lo que $C \geq 0$ para $n_0 = 0$ entonces queda demostrado que

$$n = O(2^n)$$

Para o. Aplicando la definición tenemos

$$0 \le n < c(2^n)$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{2^n}\right) \le n\left(\frac{1}{2^n}\right) < C(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$0 \le n/2^n < C$$

$$0 \le n \cdot 2^{-n} < C$$

cuando n es muy grande es 0 por lo que

$C > 0 \rightarrow C = 1$ para un $n_0 = 0$ entonces queda demostrado que n pertenece a $o(2^n)$

$$n = o(2^n)$$

Para Ω

Supongamos que $n = \Omega(2^n)$

Aplicamos definición la cual nos dice:

$$0 \le C(2^n) \le n$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{2^n}\right) \le C(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right) \le n\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$0 \le C \le n/2^n$$

$$0 \le C \le n \cdot 2^{-n}$$

sabemos que cuando n es muy grande se vuelve 0 entonces no existe un valor C para que satisfaga la desigualdad de la definición por lo que queda demostrado que $n \neq \Omega(2^n)$

Para ω: Supongamos que $n = \omega(2^n)$

Aplicando la definición tenemos $0 \leq c(2^n) < n$

luego $0\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq c(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right) < n\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$0 \leq c < n/2^n$

$0 \leq c < n \cdot 2^{-n}$

sabemos que no existe un valor c que cumpla la definición porque n cuando es muy grande se hace cero obteniendo así una contradicción por lo que queda demostrado que

$n \neq \omega(2^n)$

Para Θ

Supongamos que $n = \Theta(2^n)$

Aplicamos definición obteniendo

$0 \leq c_1(2^n) \leq n \leq c_2(2^n)$

entonces

$0\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq c_1(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq n\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq c_2(2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$0 \leq c_1 \leq n\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq c_2$

$0 \leq c_1 \leq n \cdot 2^{-n} \leq c_2$

para c_2 cuando n es grande se vuelve cero por lo que

$c_2 \geq 0$ para $n_0 = 0$

y por la misma razón no hay un c_1 que pueda satisfacer la desigualdad por lo tanto obtenemos una contradicción dejando demostrado que $n \neq \Theta(2^n)$

ejercicio 3

$\sqrt{n}$ $n^{sen(n)}$

Para O: Supongamos que $\sqrt{n} = O(n^{sen(n)})$

Aplicando la definición tenemos

$0 \leq \sqrt{n} \leq cn^{sen(n)}$

entonces

$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{cn^{sen(n)}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0 \leq 1 \leq \frac{cn^{sen(n)}}{\sqrt{n}}$

cuando n es muy grande se vuelve 0 por lo que no existe un valor para c que cumpla entonces queda demostrado que $\sqrt{n} \neq O(n^{sen(n)})$

Para O:

Supongamos que $\sqrt{n} = O(n^{sen(n)})$

Aplicando la definición obtenemos

$$0 \leq \sqrt{n} \leq c n^{sen(n)}$$

debido a que tenemos sen(n) para todos los valores 1, 2, 3, ... es $n^{sen(n)} = 1$ no existe un $n_0 > 0$ que satisfaga la desigualdad por lo que llegamos a una contradicción entonces queda demostrado que

$$\sqrt{n} \neq O(n^{sen(n)})$$

Para Ω:

Supongamos que $\sqrt{n} = \Omega(n^{sen(n)})$

Aplicamos la definición

$$0 \leq C n^{sen(n)} \leq \sqrt{n}$$

$$0 \leq C^2 n^{2 sen(n)} \leq 1$$

cuando sustituimos n por un valor tenemos que $n = 7$ tenemos $1 \geq C^2 12.8$ entonces vemos que no cumple la definición por lo tanto $\sqrt{n} \neq \Omega(n^{sen(n)})$

Para ω:

Supongamos que

$$\sqrt{n} = \omega(n^{sen(n)})$$

Aplicando la definición tenemos.

$$0 \leq c n^{sen(n)} < \sqrt{n}$$

retomando las demostraciones anteriores sabemos que bajo específicos valores de n el $sen(n) = 1$ por lo que no permite que se cumpla la definición dejando así demostrado que $\sqrt{n} \neq \omega(n^{sen(n)})$

Para Θ:

Supongamos que:

$$\sqrt{n} = \Theta(n^{sen(n)})$$

Aplicando la definición tenemos que

$$0 \leq C_1 n^{sen(n)} \leq \sqrt{n} \leq C_2 n^{sen(n)}$$

$$0 \leq c_1 n^{2sen(n)} \leq n \leq c_2 n^{2sen(n)}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) 0 \leq c_1 n^{2sen(n)} \left(\frac{1}{n}\right) \leq n\left(\frac{1}{n}\right) \leq c_2 n^{2sen(n)} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq \frac{c_1 n^{2sen(n)}}{n} \leq 1 \leq \frac{c_2 n^{2sen(n)}}{n}$$

para $c_1 \geq 0$ se cumple la definición pero para un c_2 no existe algún valor que lo satisfaga porque cuando n es muy grande tiende a 0 y eso hace que lleguemos a una contradicción dejando demostrado que $\sqrt{n} \neq \Theta n^{sen(n)}$

ejercicio 4

2^n , $2^{n/2}$

Para O:

Sea $O(g(n)) \{ f(n)$ existen constantes positivas c y n_0 | $0 \leq f(n) \leq c(g(n))$ para todos los $n \geq n_0 \}$

Supongamos que:

$$2^n = O(2^{n/2})$$

Aplicando la definición tenemos

$$0 \leq 2^n \leq c\, 2^{n/2}$$

$$\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) 0 \leq 2^n \left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) \leq c\, 2^{n/2} \left(\frac{1}{2^{n/2}}\right)$$

$$0 \leq 2^{n/2} \leq c$$

podemos observar que siempre encontraremos un n tal que supere cualquier valor de c por lo qe tenemos una contradicción dejando demostrado que

$$2^n \neq O(2^{n/2})$$

Para o

Sea $o(g(n)) \{ f(n)$ existen constantes positivas $c>0$ existe una constante $n_0>0$ tal que $0 \leq f(n) < c(g(n))$ para todos $n \geq n_0 \}$

Supongamos que

$$2^n = o(2^{n/2})$$

Aplicando la definición tenemos

$$0 \leq 2^n \leq c(2^{n/2})$$

$$0\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) \leq 2^n\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) < c\,2^{n/2}\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right)$$

$$0 \leq 2^{n/2} < c$$

para cualquier valor de c existe un n que supere el valor de c por lo que no se cumple la definición teniendo una contradicción dejando demostrado que

$$2^n \neq o(2^{n/2})$$

Para Ω

Sea $\Omega(g(n)) = \{ f(n)$ existen constantes positivas c y n_0 | $0 \leq c(g(n)) \leq f(n)$ para todos $n \geq n_0 \}$

Queremos demostrar que

$$2^n = \Omega(2^{n/2})$$

Aplicando la definición

$$0 \leq c\,2^{n/2} \leq 2^n$$

$$0\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) \leq c\,2^{n/2}\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) \leq 2^n\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right)$$

$$0 \leq c \leq 2^{n/2}$$

para un $c = 1$ con $n_0 = 2$ por lo que sí pertenece

$$2^n = \Omega(2^{n/2})$$

Para ω

Sea $\omega(g(n)) = \{ f(n)$ existe ctes positivas $c > 0$ existe una cte. $n_0 > 0$ | $0 \leq c(g(n)) < f(n)$ para todos los $n \geq n_0 \}$

Queremos demostrar que

$$2^n = \omega(2^{n/2})$$

Aplicando la def tenemos que:

$$0 \leq c\,2^{n/2} < 2^n$$

$$0\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) \leq c\,2^{n/2}\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right) < 2^n\left(\frac{1}{2^{n/2}}\right)$$

$$0 \leq c < 2^{n/2}$$

para cada constante c existe un $n_0 > 4$ donde se cumple la definición dejando demostrado que

$2^n = \omega(2^{n/2})$ sí pertenece.

ejercicio 5

$n^{\lg c}$ $c^{\lg n}$

$n^{\lg 2}$ $2^{\lg n}$ Primero demostraremos que

n $2^{\log n} = n$

Usaremos una variable z que sea igual a

$$z = 2^{\log(n)}$$

aplicaremos $\log_2$ de cada lado obteniendo lo siguiente

$$\log_2 z = \log_2(2^{\log_2 n})$$

usaremos la propiedad de los logaritmo que nos dice

$$\log_a n^m = m \log_a n$$

$$\log_2 z = \log_2(n \log_2 2)$$

sabemos que $\log_2 2 = 1$ por lo que tenemos

$$\log_2 z = \log_2 n$$

como podemos observar

$$z = n$$

por lo que queda demostrado que $2^{\log n} = n$

usando lo que hemos demostrado ahora checamos si $n \in$ a las complejidades

Para O

Aplicando la definición tenemos

$$0 \leq n \leq C(n)$$

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq n\left(\frac{1}{n}\right) \leq C(n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq 1 \leq C$$

para $C = 2$ con $n_0 = 0$ por lo queda demostrado que sí pertenece

$$2^{\lg n} = O(n)$$

Para o

Supongamos que $2^{\lg n} = o(n)$

Aplicando definición

$$0 \leq \frac{2^{\log(n)}}{n} < C$$

como podemos observar siempre habrá un valor n que supere a C por lo que llegamos a una contradicción demostrando que $2^{\lg n} \neq o(n)$

Para Ω:

Usando la propiedad antes demostrado demostraremos que $2^{\lg n} = \Omega(n)$ que podemos expresarlo como $\Omega(n)$

Aplicamos la def teniendo

$$0 \leq c(n) \leq 2^{\lg n}$$

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq cn\left(\frac{1}{n}\right) \leq n\frac{2^{\lg n}}{n}$$

$$0 \leq c \leq \frac{2^{\lg n}}{n}$$

cuando n es muy grande tiende a cero ($c = 0$) por lo que se cumple la desigualdad demostrando que $2^{\lg n} = \Omega(n)$

Para ω:

Supongamos que

$$n = \omega(n) \text{ (ya que demostramos } 2^{\lg n}\text{)}$$

Aplicando la definición teniendo

$$0 \leq c\,n < n$$

entonces

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq cn\left(\frac{1}{n}\right) < n\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq c < 1$$

como podemos ver no existe un valor de C que satisfaga la desigualdad por lo que tenemos una contradicción y deja demostrado que $2^{\lg n} \neq \omega(n)$

Para Θ

Queremos demostrar que

$$2^{\lg n} = \Theta(n)$$

Aplicando la definición tenemos que

$$0 \leq c_1 n \leq 2^{\lg n} \leq c_2 n$$

$$0\left(\frac{1}{n}\right) \leq c_1 n\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2^{\lg n}}{n} \leq c_2 n\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq c_1 \leq \frac{2^{\lg n}}{n} \leq c_2$$

cuando n es muy grande tiende a 0 por lo que para $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ con $n_0 = 0$ se cumple la desigualdad por lo que queda demostrado que sí pertenece

$$2^{\lg n} = \Theta n$$

ejercicio 6

$\lg(n!)$ $\lg(n^n)$

Para O

Queremos demostrar que $\lg(n!) = O(\log(n^n))$

Aplicando la definición tenemos

$$0 \leq \lg(n!) \leq c \lg(n^n)$$

y podemos reescribirla como

$$0 \leq n\lg(n) - n + 1 \leq c\, n\lg(n)$$

ya que $\lg(n!) = n\lg(n) - n + 1$

$$0\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right) \leq n\lg(n) - n + 1\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right) \leq c\, n\lg(n)\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right)$$

$$0 \leq 1 - \frac{n}{n\lg(n)} + \frac{1}{n\lg(n)} \leq c$$

cuando n es muy grande obtenemos la desigualdad

$$0 \leq 1 \leq c$$

para $c \geq 1$ para $n_0 = 1$ por lo que demostramos que sí pertenece

$$\lg(n!) = O(\log(n^n))$$

Para o

Supongamos que $\lg(n!) = o(\log(n^n))$

Aplicando la definición

$$0 \leq \lg(n!) < c \lg(n^n)$$

y podemos reescribirla como

$$0 \leq n\lg(n) - n + 1 < c\, n\lg(n)$$

$$0\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right) \leq n\lg(n) - n + 1\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right) < c\, n\lg(n)\left(\frac{1}{n\lg(n)}\right)$$

$$0 \leq 1 - \frac{n}{n\lg(n)} + \frac{1}{n\lg(n)} < C$$

cuando n es muy grande obtenemos la desigualdad

$$0 \leq 1 < C$$

por lo que $C > 1$ pero tal valor de C no existe para $n_0 > 0$ por lo que tenemos una contradicción dejando demostrado que $\lg(n!) \neq o(\lg(n^n))$

Para Ω

Queremos demostrar $\lg(n!) = \Omega(\lg(n^n))$

Aplicando la definición tenemos

$$0 \leq C \leq 1 - n/n\lg(n) + 1/(n\lg n)$$

para $C = 1$ con $n_0 = 10$ cumple la definición por lo tanto pertenece $\lg(n!) = \Omega(\lg(n^n))$

Para ω

Supongamos que $\lg(n!) = \omega(\lg(n^n))$

Aplicando la definición obtenemos $0 \leq C\lg(n^n) < \lg(n!)$

$\hookrightarrow 0 \leq Cn\lg(n) < n\lg(n) - n + 1$

cuando n es muy grande obtenemos $0 \leq C < 1$

para $C < 1$ no existe un $n_0 > 0$ que cumpla con la definición por lo que a través de la contradicción demostramos que $\lg(n!) \neq \omega(\lg(n^n))$

Para Θ

Queremos demostrar $\lg(n!) = \Theta(\lg(n^n))$

Aplicando la definición tenemos $0 \leq C_1 \leq 1 - \frac{n}{n\lg(n)} + \frac{1}{n\lg(n)} \leq C_2$

$$0 \leq C_1 \leq 1 \leq C_2$$

cuando n es muy grande obtenemos la expresión de arriba por lo que $C_1 \leq 1$, $C_2 \geq 1$ con $n_0 = 1$ se cumple la definición dejando demostrado que sí pertenece

$$\lg(n!) = \Theta(\lg(n^n))$$

B (Actividad)

1. Queremos demostrar $2^{2^{n+1}} = \Omega(2^{2^n})$

Aplicamos la definición tenemos $0 \leq C 2^{2^n} \leq 2^{2^{n+1}}$

$0\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right) \leq C 2^{2^n}\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right) \leq 2^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right) \Longrightarrow 0 \leq C \leq 2^{2^{n+1}-2^n} \Rightarrow 0 \leq C \leq 2^{2^n}$

para $C=1$ con $n_0 = 1$ se cumple la definición $\therefore$ pertenece

$$2^{2^{n+1}} = \Omega(2^{2^n})$$

2. Queremos demostrar que $2^{2^n} = \Omega((n+1)!)$

Aplicando la definición tenemos $0 \leq C(n+1)! \leq 2^{2^n}$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(C(n+1)!) \leq \ln(2^{2^n}) \Rightarrow 0 \leq (n+1)\ln(n+1) - n \leq \ln|2^{2^n}|$

para $C=1$ con $n_0 \geq 1$ se cumple la definición por lo que demostramos la pertenencia de que $2^{2^n} = \Omega((n-1)!)$

3. Queremos demostrar que $(n+1)! = \Omega(n!)$

Aplicando la definición tenemos $0 \leq C n! \leq (n+1)!$

$\Rightarrow 0 \leq C \leq n+1$ esto se cumple para $C=1$ con $n_0 = 1$ por lo que sí pertenece $(n+1)! = \Omega(n!)$

4. Demostraremos que $n! = \Omega(e^n)$

Aplicamos la def de Ω obteniendo $0 \leq C e^n \leq n!$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \ln|Ce^n| \leq \ln|n!| \Rightarrow 0 \leq \ln|C| + \ln|e^n| \leq \ln|n!|$

$\Rightarrow C + n\ln|e| \leq n\ln|n| - n + 1$; esto se cumple si $C=1$ con $n_0 \geq 10$ por lo que demostramos que sí pertenece $n! = \Omega(e^n)$

5. Demostraremos que $e^n = \Omega(n \cdot 2^n)$

Aplicamos def Ω y tenemos $0 \leq C(n2^n) \leq e^n$

$\Rightarrow 0 \leq \ln|C| + \ln|n| + \ln|2^n| \leq n\ln|e| \Rightarrow 0 \leq C + \ln|n| + n\ln|2| \leq n\ln|e|$

viendo que se cumple la definición cuando $C=1$ con $n_0 \geq 1$ por lo tanto pertenece $e^n = \Omega(n \cdot 2^n)$

6. Queremos demostrar $n \cdot 2^n = \Omega(2^n)$

Aplicando la definición tenemos $0 \leq C 2^n \leq n \cdot 2^n$

$\Rightarrow 0 \leq C \leq n$ por lo que vemos que petenece cuando $C=1$ con $n_0 = 1$ por lo tanto $n \cdot 2^n = \Omega(2^n)$

7. Queremos demostrar que $2^n = \Omega((3/2)^n)$
Aplicando la definición tenemos $0 \leq c(3/2)^n \leq 2^n$
$\Rightarrow 0 \leq \lg c + n\lg(3/2) \leq n\lg(2) \Rightarrow 0 \leq c + n\lg(3/2) \leq n\lg(2)$
con $c = 1$, $n_0 = 5$ cumple la definición dejando demostrado que pertenece $2^n = \Omega((3/2)^n)$

8. Demostraremos que $(3/2)^n = \Omega(\lg(n)^{\lg(n)})$
Aplicando la definición tenemos $0 \leq c\lg(n)^{\lg(n)} \leq (3/2)^n$
usando las propiedades los logaritmos tenemos $0 \leq \lg(c\lg(n)^{\lg(n)}) \leq \lg((3/2)^n)$
$\Rightarrow 0 \leq c + \lg(n)\lg(\lg(n)) \leq n\lg(3/2)$ cumple cuando $c = 1$, $n_0 = 10$
por lo que sí pertenece $(3/2)^n = \Omega(\lg(n)^{\lg(n)})$

9. Queremos demostrar que $\lg(n)^{\lg(n)} = \Omega(\lg(n)!)$ $\ln|n!| = n\ln|n| - n + 1$
Aplicando la def Ω tenemos $0 \leq c\lg(n)! \leq \lg(n)^{\lg(n)}$
$\Rightarrow 0 \leq \ln|c| + \lg(n)\ln|\lg(n)| - \lg(n) + 1 \leq \lg(n)\ln|\lg(n)|$
entonces $= 0 \leq c \leq \lg(n) - 1$ para $c = 1$, $n_0 \geq 11$ se cumple la definición dejando demostrado que $\lg(n)^{\lg(n)} = \Omega(\lg(n)!)$

10. Demostraremos que $\lg(n)! = \Omega(n^3)$
Aplicando la definición obtenemos $0 \leq cn^3 \leq \lg(n)!$
$\Rightarrow 0 \leq \ln|cn^3| \leq \ln|\lg(n)!| \Rightarrow 0 \leq c \leq \lg(n)\ln|\lg(n)| - n + 1 - \ln|n^3|$
cuando $c = 1/100000$, $n_0 \geq 1$ cumple la definición entonces concluimos que $\lg(n)! = \Omega(n^3)$

11. Queremos demostrar que $n^3 = \Omega(n^2)$
Aplicando la def. Ω obtenemos $0 \leq cn^2 \leq n^3$
$\Rightarrow 0 \leq c \leq n$ para $c = 1$ con $n_0 \geq 1$ se cumple por lo que deja demostrado que $n^3 = \Omega(n^2)$

12. Demostraremos que $n^2 = \Omega(n\lg(n))$
Aplicando la definición tenemos $0 \leq cn\lg(n) \leq n^2$
$\Rightarrow 0 \leq \lg(c) + \lg(n) + \lg(\lg(n)) \leq 2\lg(n)$
$\Rightarrow 0 \leq c \leq \lg(\lg(n)) + \lg(n)$ cuando $c = 1$, $n_0 \geq 1$ se cumple la definición por lo tanto $n^2 = \Omega(n\lg(n))$

13. Queremos demostrar que $n\lg(n) = \Omega(n)$
Aplicando la definición tenemos $0 \leq cn \leq n\lg(n)$
$\Rightarrow 0 \leq c \leq \lg(n)$ con $c=1$ y $n_0 \geq 3$ se cumple la desigualdad de la definición demostrando que pertenece
$n\lg(n) = \Omega(n)$

14. Demostraremos que $n = \Omega(\sqrt{n})$
Aplicando la definición tenemos $0 \leq c\sqrt{n} \leq n$
$\Rightarrow 0 \leq c \leq n/n^{1/2}$ esto se cumple para $c=1$, $n_0 \geq 1$ tenemos que pertenece por lo tanto $n = \Omega(\sqrt{n})$

15. Queremos demostrar que $\sqrt{n} = \Omega(2^{\sqrt{2\lg(n)}})$
Aplicando la definición $0 \leq c\,2^{\sqrt{2\lg(n)}} \leq \sqrt{n}$
$\Rightarrow 0 \leq \lg(c\,2^{\sqrt{2\lg n}}) \leq \lg(\sqrt{n}) \Rightarrow 0 \leq c \leq \frac{1}{2}\lg(n) - \sqrt{2\lg(n)}$
cuando $c = 2/5$, $n_0 \geq 1$ se cumple la definición dejando demostrado que $\sqrt{n} = \Omega(2^{\sqrt{2\lg(n)}})$

16. Demostraremos que $2^{\sqrt{2\lg(n)}} = \Omega(\lg^2(n))$
Aplicando la def. obtenemos $0 \leq c\lg^2(n) \leq 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$
$\Rightarrow 0 \leq \lg(c) + \lg(\lg(n)^2) \leq \sqrt{2\lg(n)}\log(2) \Rightarrow 0 \leq c \leq \sqrt{2\lg(n)} - 2\lg(\lg(n))$
cuando $c = 1/12$ con $n_0 \geq 1$ se cumple la definición y pertenece $2^{\sqrt{2\lg(n)}} = \Omega(\lg^2(n))$

17. Queremos demostrar $\lg^2(n) = \Omega(\ln(n))$
Aplicando la definición $0 \leq c\ln(n) \leq \lg^2(n)$
$\Rightarrow 0 \leq c\ln(n) \leq \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(2)} \Rightarrow 0 \leq c \leq \ln(n)/\ln^2(2)$
dejando demostrado que cumple cuando $c=1$, $n_0 \geq 2$
por lo tanto cumple $\lg^2(n) = \Omega(\ln(n))$

18. Demostraremos que $\ln(n) = \Omega(\sqrt{\lg(n)})$
Por definición tenemos $0 \leq c\sqrt{\lg(n)} \leq \ln(n)$
$\Rightarrow 0 \leq c \leq \sqrt{\ln(n)}$ para $c=1$, $n_0 = 3$ se cumple la definición por lo tanto $\ln(n) = \Omega(\sqrt{\lg(n)})$

19. Queremos demostrar que $\sqrt{\lg(n)} = \Omega(\ln(\ln(n)))$

Aplicando la definición $0 \le c\ \ln(\ln(n)) \le \sqrt{\lg(n)} = \sqrt{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}}$

$0 \le \ln|c| + \ln(\ln(\ln(n))) \le 1/2 (\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)))$

$\Rightarrow 0 \le c \le \frac{1}{2}(\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))) - \ln(\ln(\ln(n)))$ esto se cumple cuando $c = 1$, $n_0 \ge 2$ demostrando que sí pertenece $\sqrt{\lg(n)} = \Omega(\ln(\ln(n)))$

20. Demostraremos que $\ln(\ln(n)) = \Omega(2^{\lg^*(n)})$

Aplicamos def de Ω $0 \le c\,2^{\lg^*(n)} \le \ln(\ln(n))$

$0 \le \lg^*(n)\lg(2) + \lg(c) \le \lg(\ln(\ln(n)))$

$\Rightarrow 0 \le c \le \lg(\ln(\ln(n))) - \lg^*(n)$ esta desigualdad se cumple cuando $c = 1/100$ con $n_0 \ge 5$ demostramos que sí pertenece $\ln(\ln(n)) = \Omega(2^{\lg^*(n)})$

21. Queremos demostrar que $2^{\lg^*(n)} = \Omega(\lg^*(n))$

Aplicando la definición tenemos $0 \le c\,\lg^*(n) \le 2^{\lg^*(n)}$

$\Rightarrow 0 \le \lg(c) + \lg(\lg^*(n)) \le \lg^*(n)\lg(2)$

$\Rightarrow 0 \le c \le \lg^*(n) - \lg(\lg^*(n))$ se cumple cuando $c = 1$ con $n_0 \ge 2$ por lo tanto $2^{\lg^*(n)} = \Omega(\lg^*(\ln(n))$

22. Demostraremos que $\lg^*(n) = \Omega(\lg(\lg^*(n)))$

Aplicamos definición de Ω $0 \le c(\lg(\lg^* n)) \le \lg^* n$

$\Rightarrow 0 \le \lg(c) + \lg(\lg(\lg^*(n))) \le \lg(\lg^* n)$

$\Rightarrow 0 \le c \le \lg(\lg^*(n)) - \lg(\lg(\lg^*(n)))$ se cumple cuando $c = 1$ con $n_0 \ge 2$ dejando demostrado que $\lg^*(n) = \Omega(\lg(\lg^*(n)))$

23. Queremos demostrar que $\lg(\lg^*(n)) = \Omega(n^{1/\lg(n)})$

$0 \le c\,n^{1/\lg(n)} \le \lg(\lg^*(n)) \Rightarrow 0 \le 2c \le \lg(\lg^*(n))$

esto se cumple cuando $c = 1$ con $n_0 \ge 17$ por lo tanto queda demostrado $\lg(\lg^*(n)) = \Omega(n^{1/\lg(n)})$

Equivalencias

24. $(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$

Si aplicamos $\lg(n)$ tenemos $\lg(\lg(n)^{\lg(n)}) = \lg(n^{\lg(\lg(n))})$

Usando las propiedades de los logaritmos
$lg(n) lg(lg(n)) = lg(lg(n)) lg(n)$ como podemos observar tenemos lo mismo de ambos lados de la igualdad.

25. $n^2 = 4^{\log n}$
Aplicamos lg_2 a ambas partes $lg_2(n^2) = lg_2(4^{lg n})$
$\Rightarrow 2 lg_2(n) = lg(n) lg_2(4) \Rightarrow 2 lg_2(n) = 2 lg_2(n)$ por lo tanto es equivalente

$n lg(n) = lg(n!)$
Usando la fórmula de Stirling sabemos que
$$lg(n!) \approx n lg(n) - n + 1$$
entonces $n lg(n) \approx n lg(n)$ entonces son equivalentes

26. $n = 2^{lg n}$
Ya se demostro en la sección A.

27. $\sqrt{2}^{lg n} = \sqrt{n}$
Aplicando lg en ambas partes tenemos
$$lg(\sqrt{2}^{lg(n)}) = lg(\sqrt{n})$$
entonces
$$lg(n) lg(\sqrt{2}) = l(n^{1/2})$$
$$\frac{1}{2} lg(n) = \frac{1}{2} lg(n)$$ — es equivalencia

28. $lg^* n = lg^*(lg(n))$
Usaremos $2^{lg^* n} = \Omega(lg^* n)$ — ya demostramos y ahora $2^{lg^* n} = \Omega(lg^*(lg(n))$
Aplicando la definición tenemos
$$0 \leq c\, lg^*(ln(n)) \leq 2^{lg^* n}$$
$$\Rightarrow c \leq lg^*(n) - lg(lg^*(lg(n)))$$
esto se cumple cuando $c = 1$ con $n_0 \geq 3$ dejando demostrado que $2^{lg^* n} = \Omega(lg^*(lg(n)))$
y $lg^* = lg^*(lg(n))$

$n^{1/\lg(n)} = 2 = 1$

29. $n^{1/\lg(n)} = 2$

Aplicamos lg $\lg(n^{1/\lg(n)}) = \lg(2) \Rightarrow \frac{1}{\lg(n)} \lg(n) = \lg(2)$

$\therefore$ $1 = 1$ son equivalentes

30. Usaremos $\lg(\lg^*(n)) = \Omega(1)$

Aplicamos def Ω $0 \leq c(1) \leq \lg(\lg^*(n))$

cuando $c = 1$ con $n_0 \geq 3$ se cumple la definición demostrando la pertenencia y equivalencia

Por lo que enlistamos las complejidades de la siguiente forma

1) $2^{2^{n+1}}$
2) 2^{2^n}
3) $(n+1)!$
4) $n!$
5) e^n
6) $n \cdot 2^n$
7) 2^n
8) $(3/2)^n$
9) $\lg(n)^{\lg(n)} = n^{\lg(\lg(n))}$
10) $\lg(n)!$
11) n^3
12) $n^2 = 4^{\lg(n)}$
13) $n\lg(n) = \lg(n!)$
14) $n = 2^{\lg(n)}$
15) $\sqrt{2}^{\lg n} = \sqrt{n}$
16) $2^{\sqrt{2\lg(n)}}$
17) $\lg^2(n)$
18) $\ln|n|$
19) $\sqrt{\ln|n|}$
20) $\ln(\ln(n))$
21) $2^{\lg^*(n)}$
22) $\lg^*(n) = \lg^*(\lg(n))$
23) $\lg(\lg^*(n))$
24) $n^{1/\lg(n)} (= 2) = 1$