PROGRAMAÇÃO LINEAR

# O ALGORITMO SIMPLEX

GRUPO: Anna Carolina Barros
Fernando Menucci
Sérgio Rodrigues

# Agenda

1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

# 1) OBJETIVOS DO TRABALHO

Objetivo: apresentar uma implementação do algoritmo Simplex como exemplo de programação linear

Entregas: Seminário sobre introdução ao PL + Simplex; atualização da Wikipédia e implementação em linguagem Python

Limitações do Estudo: não será abordada a degeneração de vértices.

# Agenda

1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

# 2) INTRODUÇÃO A PROGRAMAÇÃO LINEAR

Programação Linear é a área que destina-se a descrever tarefas de otimização como equações lineares (Dasgupta,Papadimitriou & Varzirani, 2009 (pág 188 português)

Função Objetivo: equação que traduz o objetivo a ser traçado em seu problema de otimização (minimização ou maximização) (Caixeta Filho, 2001)

Restrições: Inequações (ou equações) que representam as limitações das variáveis (Caixeta Filho, 2001)

# 2) EXEMPLO

Uma doceria possui dois produtos: os chocolates Pyramide e Nuit.

- Pyramide e Nuit têm demandas diárias de 200 e 300 caixas diárias, respectivamente
- Em um dia, a produção máxima da doceria é de 400 caixas
- Pyramide e Nuit geram lucros de R$ 6,00 e R$ 1,00 a cada caixa vendida, respectivamente

Como posso otimizar a minha produção?

# 2) EXEMPLO

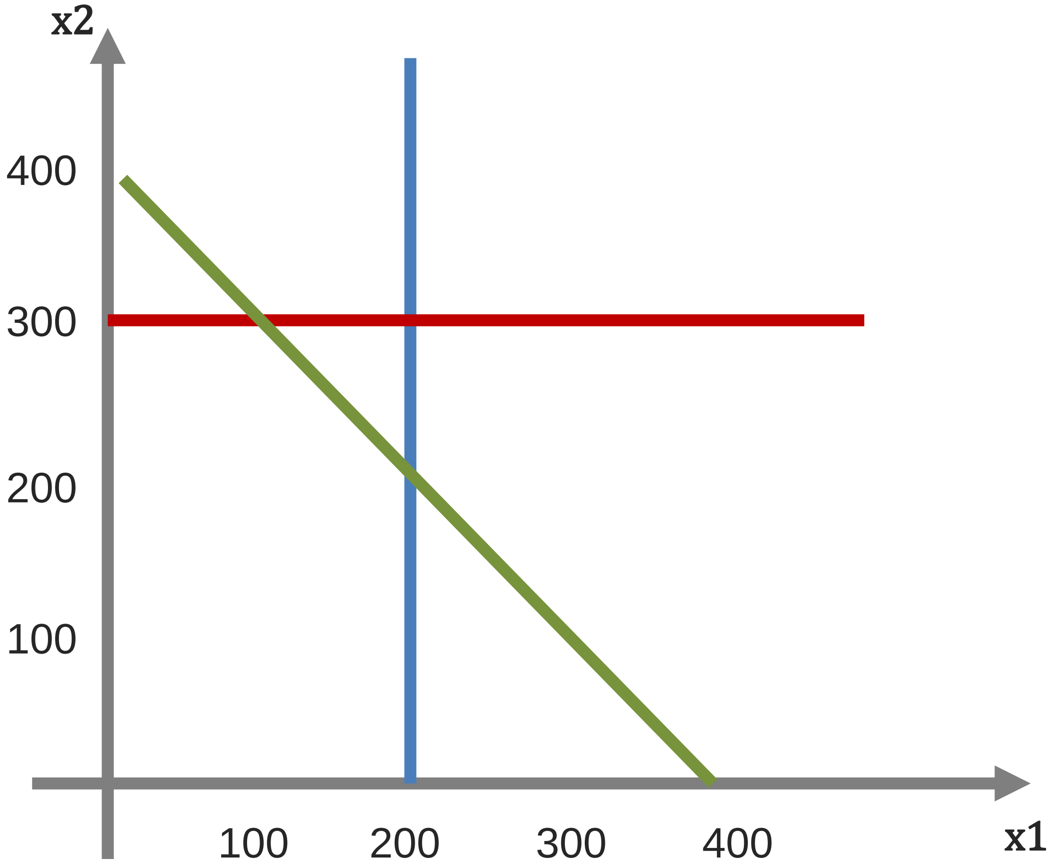
$$Função\ Objetivo: Max\ 6x1 + x2$$

$$Restrições: \quad x1 \leq 200$$

$$x2 \leq 300$$

$$x1 + x2 \leq 400$$

$$x1\ , x2 \geq 0$$



# 3) EXEMPLO

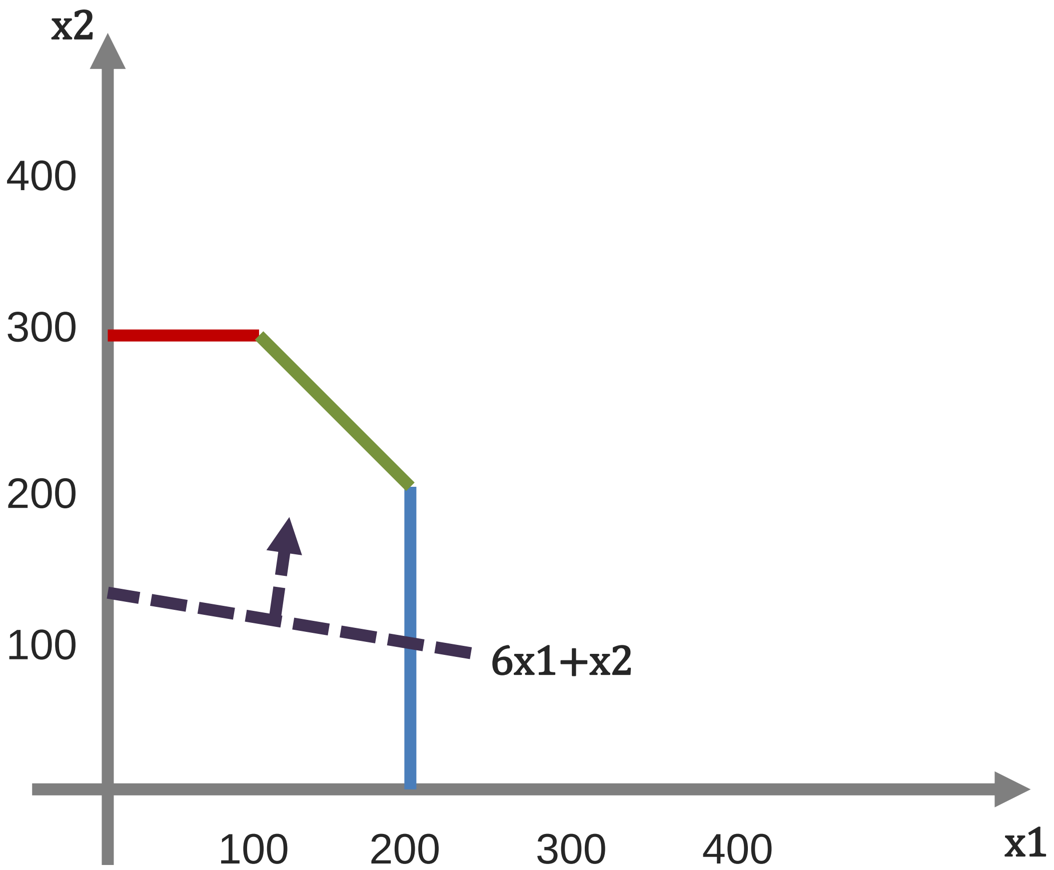
$$Função\ Objetivo: Max\ 6x1 + x2$$

$$Restrições:\ \ x1 \leq 200$$

$$x2 \leq 300$$

$$x1 + x2 \leq 400$$

$$x1\ , x2 \geq 0$$



# Agenda

1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

# 4) O ALGORITMO SIMPLEX

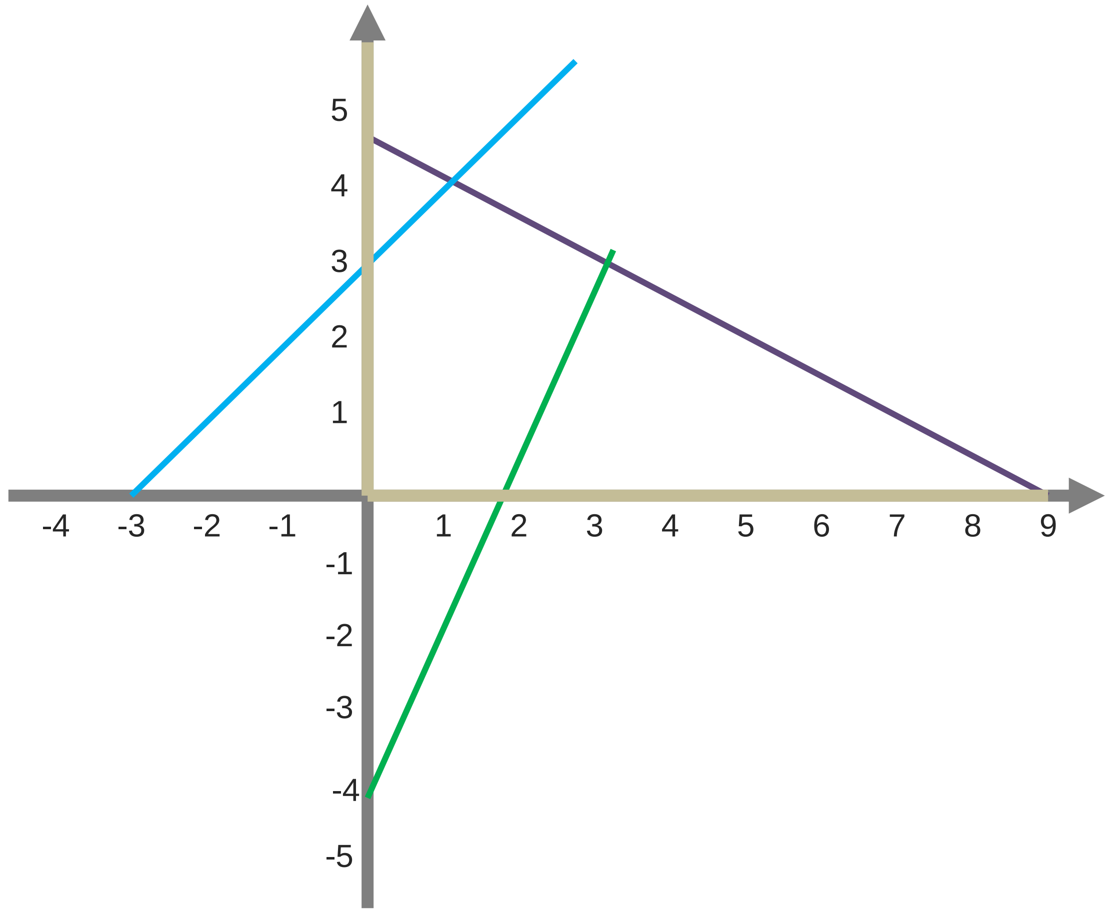
Algoritmo que considera o gráfico da Região factível como um grafo. As arestas são as inequações das restrições e os vértices são as interseções entre as inequações.

Cada vértice é comparado aos seus “vizinhos”. Caso ele seja ótimo, o algoritmo para. Caso algum vizinho seja melhor, será realizado o mesmo procedimento no vértice vizinho.

# 4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max\ 2x_1 + 5x_2$$

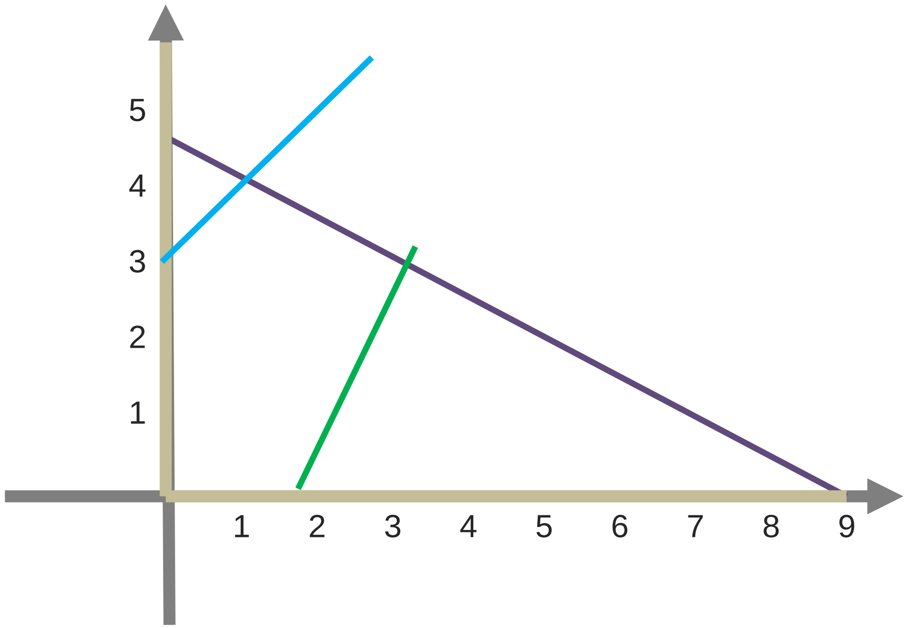
$$\begin{array}{rcll}
2x_1 - x_2 & \leq & 4 & (1) \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 9 & (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 3 & (3) \\
x_1 & \geq & 0 & (4) \\
x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$



# 4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max \; 2x_1 + 5x_2$$

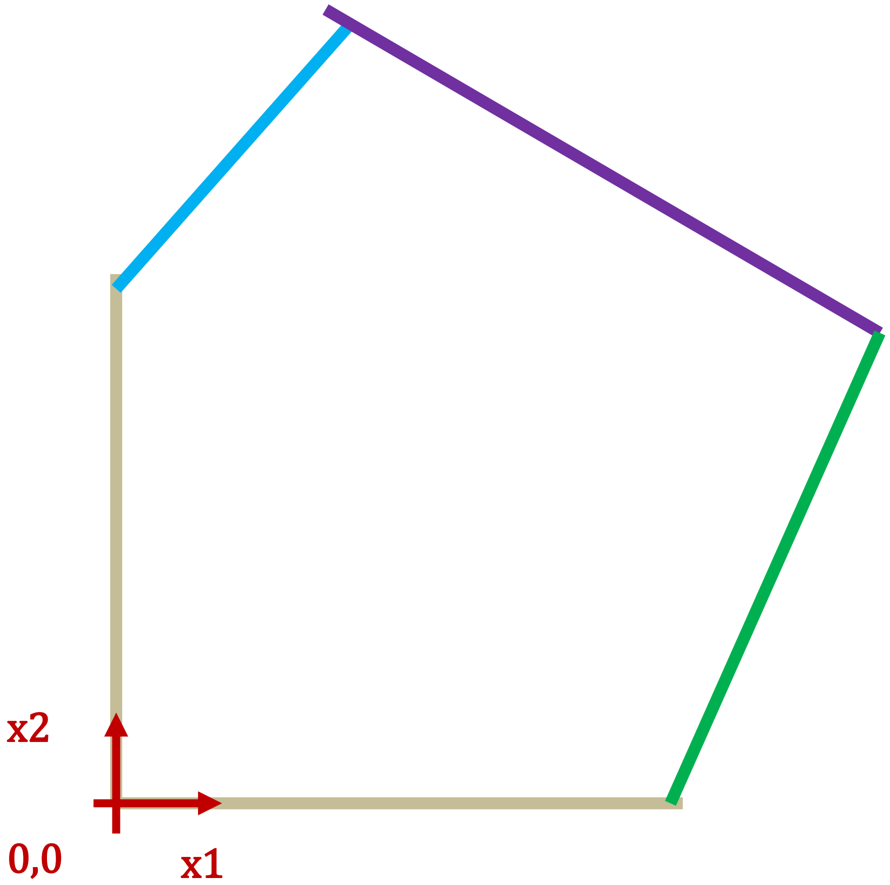
$$\begin{array}{rcll}
2x_1 - x_2 & \leq & 4 & (1) \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 9 & (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 3 & (3) \\
x_1 & \geq & 0 & (4) \\
x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$



# 4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max\ 2x_1 + 5x_2$$

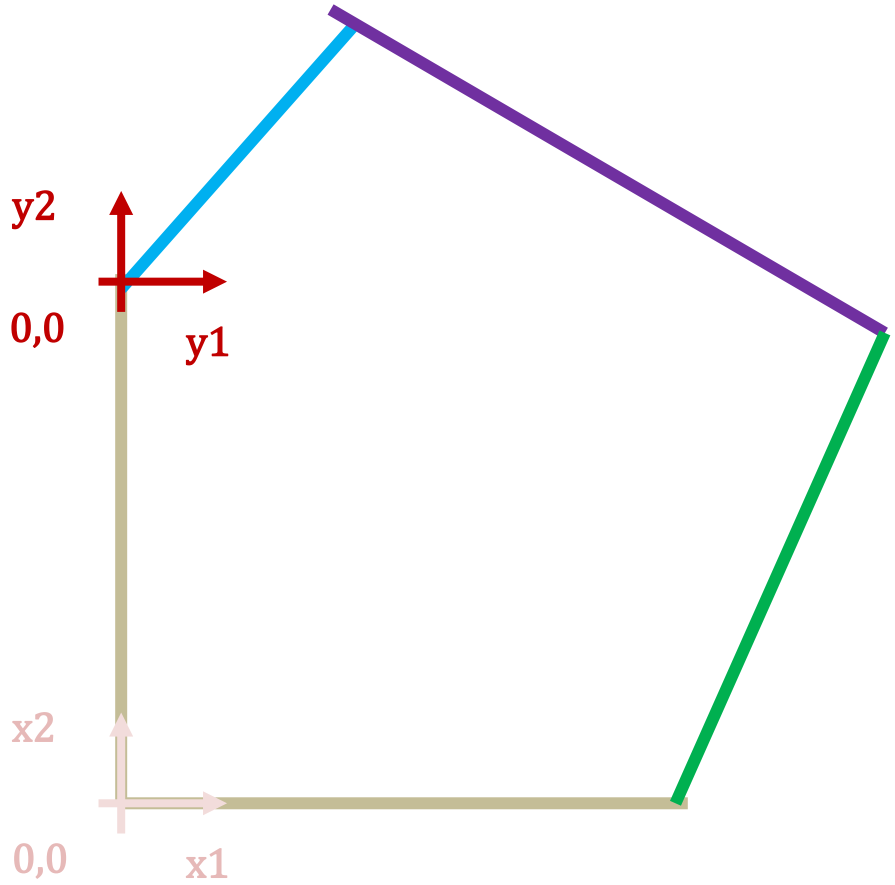
$$\begin{array}{rcll}
2x_1 - x_2 & \leq & 4 & (1) \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 9 & (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 3 & (3) \\
x_1 & \geq & 0 & (4) \\
x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$



# 4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max\ 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{rcll}
2x_1 - x_2 & \leq & 4 & (1) \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 9 & (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 3 & (3) \\
x_1 & \geq & 0 & (4) \\
x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$



# 4) Como?

Função Objetivo : $f(x1, x2) = ax1 + bx2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$X = \binom{x1}{x2}$$

$$f(x1, x2) = lX + d$$

# 4) Como?

Função Objetivo : $f(x1, x2) = ax1 + bx2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \binom{x1}{x2}$$

$$f(x1, x2) = lv + d$$

$$\max 2x1 + 5x2$$

$$f(x1, x2) = 2x1 + 5x2 + 0$$

$$l = (2,5)$$

# 4) Como?

Função Objetivo : $f(x1, x2) = ax1 + bx2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \binom{x1}{x2}$$

$$f(x1, x2) = lv + d$$

$$\max 2x1 + 5x2$$

$$f(x1, x2) = 2x1 + 5x2 + 0$$

$$l = (2,5)$$

Restrições

$$2x1 + 5x2 \leq 4$$
$$x1 + 2x2 \leq 9$$
$$-x1 + x2 \leq 3$$
$$x1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$

# 4) Como?

Função Objetivo : $f(x1, x2) = ax1 + bx2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$f(x1, x2) = lv + d$$

$$\max 2x1 + 5x2$$

$$\boldsymbol{f(x1, x2) = 2x}1 + 5x2 + 0$$

$$l = (2,5)$$

*Restrições*

$$2x1 + 5x2 \leq 4$$
$$x1 + 2x2 \leq 9$$
$$-x1 + x2 \leq 3$$
$$x1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}}_{X} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{B}}$$

$$AX \leq \text{B}$$

# 4) Passo a Passo

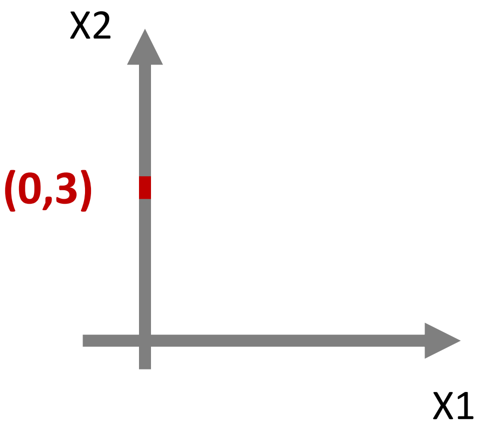
1- Análise de Sensibilidade:

$$\max\ 2x1 + \boxed{5x2}$$

# 4) Passo a Passo

## 1- Análise de Sensibilidade:

$$\max \ 2x1 + \boxed{5x2}$$




## 2- Definição restrição ativa:

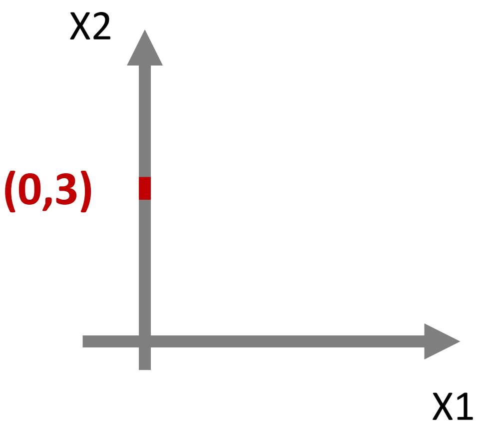
1. $2x1 + 5x2 \leq 4$
2. $x1 + 2x2 \leq 9$
3. $\boxed{-x1 + x2 \leq 3}$
4. $x1 \geq 0$
5. $x2 \geq 0$

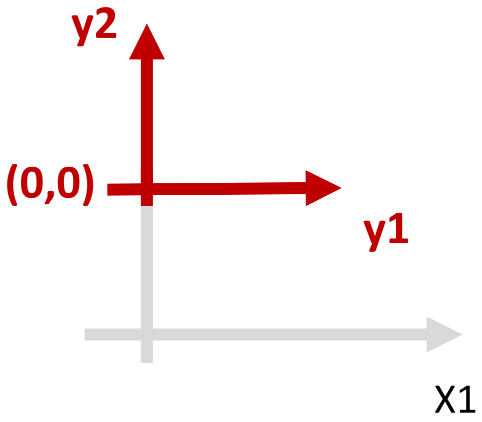
Coordenadas
(0,3)

# 4) Passo a Passo

## 1- Análise de Sensibilidade:

$$\max\ 2x1 + \boxed{5x2}$$




## 2- Definição restrição ativa:

1. $2x1 + 5x2 \leq 4$
2. $x1 + 2x2 \leq 9$
3. $\boxed{-x1 + x2 \leq 3}$
4. $x1 \geq 0$
5. $x2 \geq 0$

**Coordenadas (0,3)**

# 4) Passo a Passo

3- Realizar a transformação (y1,y2)=(0,0)

3 $-x1 + x2 \leq 3$

$$0 = x1 - x2 + 3$$

$$y2 = x1 - x2 + 3$$

$$x2 = y1 - y2 + 3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{M}} \times \underset{Y}{\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}} + \underset{p}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$X = M\,Y + p$$

# 4) Passo a Passo

3- Realizar a transformação (y1,y2)=(0,0)

$$0 = x1 - x2 + 3$$

$$y2 = x1 - x2 + 3$$

$$x2 = y1 - y2 + 3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{M}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}}_{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{p}$$

$$X = M\,Y + p$$

4- Assumir novos valores para as restrições

$$AX \leq \mathrm{B}$$

$$A(M\,Y + p) \leq \mathrm{B}$$

$$AM\,Y \leq \mathrm{B} - \mathrm{A}p$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# 4) Passo a Passo

4- Assumir novos valores para as restrições

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. $y1 + y2 \leq 7$
2. $3y1 - 2y2 \leq 3$
3. $y1 \geq 0$
4. $y2 \geq 0$
5. $-y1 + y2 \leq 3$

# 4) Passo a Passo

## 4- Assumir novos valores para as restrições

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. $y1 + y2 \leq 7$
2. $3y1 - 2y2 \leq 3$
3. $y1 \geq 0$
4. $y2 \geq 0$
5. $-y1 + y2 \leq 3$

## 5- Assumir novos valores função objetivo

$$\boldsymbol{f(x1, x2) = 2x}1 + 5x2 + 0 \qquad l = (2,5)$$

$$f = lX + d$$

$$f = l(M\,Y + p) + d$$

$$f = l(M\,Y + p) + d$$

$$f = (2,5)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} + (2,5)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$f$ =7y1-5y2+15

## 6- Voltar ao passo 1

# 4) Passo a Passo

## *OBS: Critério de Parada*

O processo se repete até que todos os coeficientes da função objetivo estejam negativos

## *6) Resolução do Sistema linear*

$$x1 = 1$$
$$x2 = 4$$

# Agenda

1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

# 4) Complexidade

Considerando:

R: número de restrições

V: número de variáveis

Complexidade:

Vizinhos Gaussiana

Por iteração: $O(RV)*O(V^3)*O(1) = O(RV^4)$

$O(RV)$

Qtd iterações: $\binom{V+R}{V}$ exponencial em V

# 4) Complexidade


DASGUPTA, Sanjoy. *Et alli* **ALGORITHIMIS**; Mc Graw Hill 2009.

STRANG, Gilbert. **ÁLGEBRA LINEAR E SUAS APLICAÇÕES;** 4.ed. CENAGE LEARNING 2010.

FILHO, Caixeta. **PESQUISA OPERACIONAL: Técnicas de otimização aplicadas a agroindústrias**; 4.ed. Ed. Campus 2009.

COLIN, Emerson Carlos. **PESQUISA OPERACIONAL - 170 Aplicações Em Estratégia, Finanças, Logística,** 4.ed. LTC 2007.

MOREIRA, Daniel . **ADMINISTRAÇÃO DA PRODUÇÃO E OPERAÇÕES** . CENAGE LEARNING 2010.