

PROGRAMAÇÃO LINEAR

O ALGORITMO SIMPLEX

GRUPO: Anna Carolina Barros
Fernando Menucci
Sérgio Rodrigues

Agenda



1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

1) OBJETIVOS DO TRABALHO

Objetivo: apresentar uma implementação do algoritmo Simplex como exemplo de programação linear

Entregas: Seminário sobre introdução ao PL + Simplex; atualização da Wikipédia e implementação em linguagem Python

Limitações do Estudo: não será abordada a degeneração de vértices.

Agenda



1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

2) INTRODUÇÃO A PROGRAMAÇÃO LINEAR

Programação Linear é a área que destina-se a descrever tarefas de otimização como equações lineares (Dasgupta, Papadimitriou & Varzirani, 2009 (pág 188 português))

Função Objetivo: equação que traduz o objetivo a ser traçado em seu problema de otimização (minimização ou maximização) (Caixeta Filho, 2001)

Restrições: Inequações (ou equações) que representam as limitações das variáveis (Caixeta Filho, 2001)

2) EXEMPLO

Uma doceria possui dois produtos: os chocolates Pyramide e Nuit.

- Pyramide e Nuit têm demandas diárias de 200 e 300 caixas diárias, respectivamente
- Em um dia, a produção máxima da doceria é de 400 caixas
- Pyramide e Nuit geram lucros de R\$ 6,00 e R\$ 1,00 a cada caixa vendida, respectivamente

Como posso otimizar a minha produção?

2) EXEMPLO

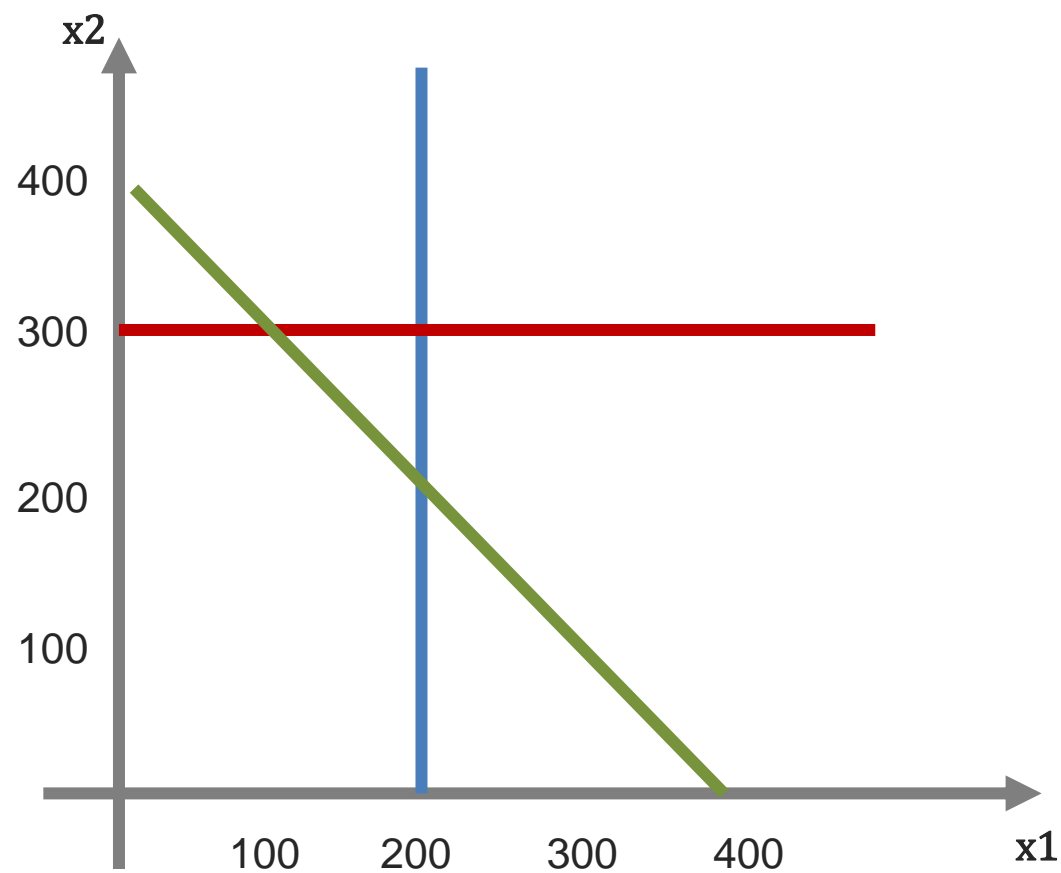
Função Objetivo: $\text{Max } 6x_1 + x_2$

Restrições: $x_1 \leq 200$

$x_2 \leq 300$

$x_1 + x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$



3) EXEMPLO

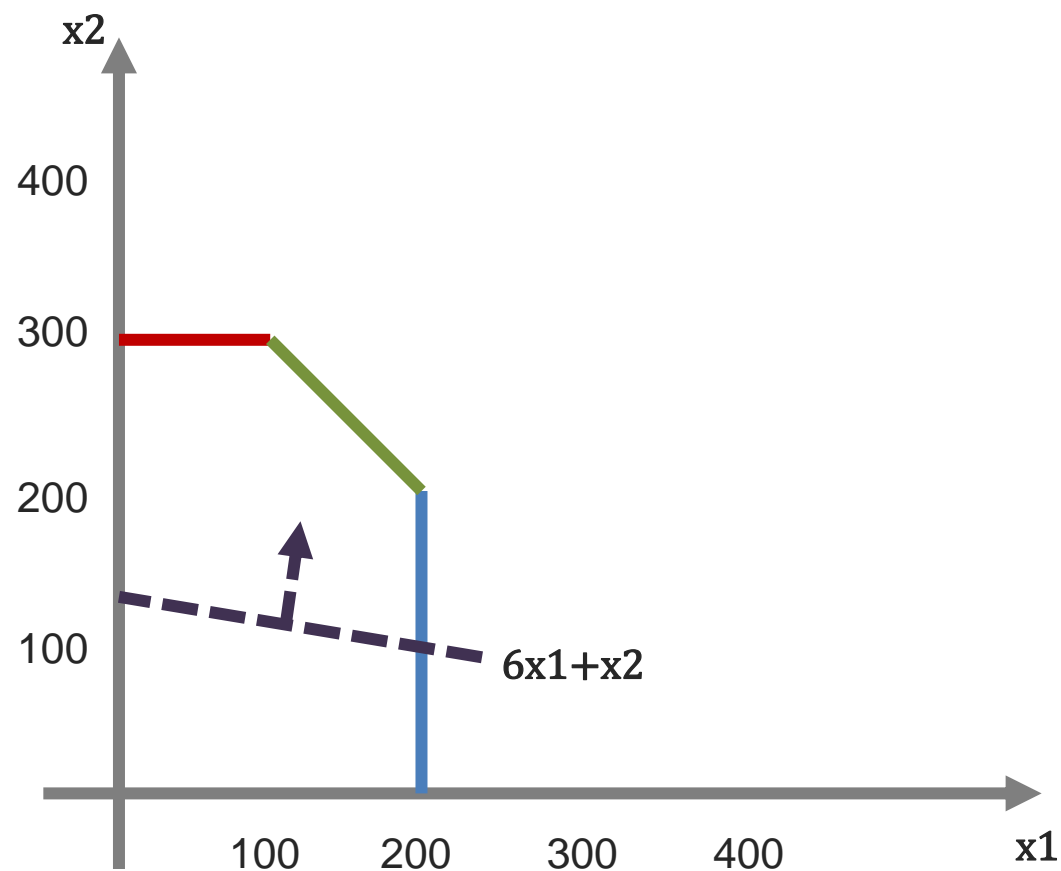
Função Objetivo: $\text{Max } 6x_1 + x_2$

Restrições: $x_1 \leq 200$

$x_2 \leq 300$

$x_1 + x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$



Agenda



1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

4) O ALGORITMO SIMPLEX

Algoritmo que considera o gráfico da **Região factível** como um **grafo**. As **arestas** são as **inequações das restrições** e os **vértices** são as **interseções** entre as inequações.

Cada vértice é **comparado** aos seus **"vizinhos"**. Caso ele seja **ótimo**, o algoritmo para. Caso algum vizinho seja melhor, será realizado o mesmo procedimento no vértice vizinho.

4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

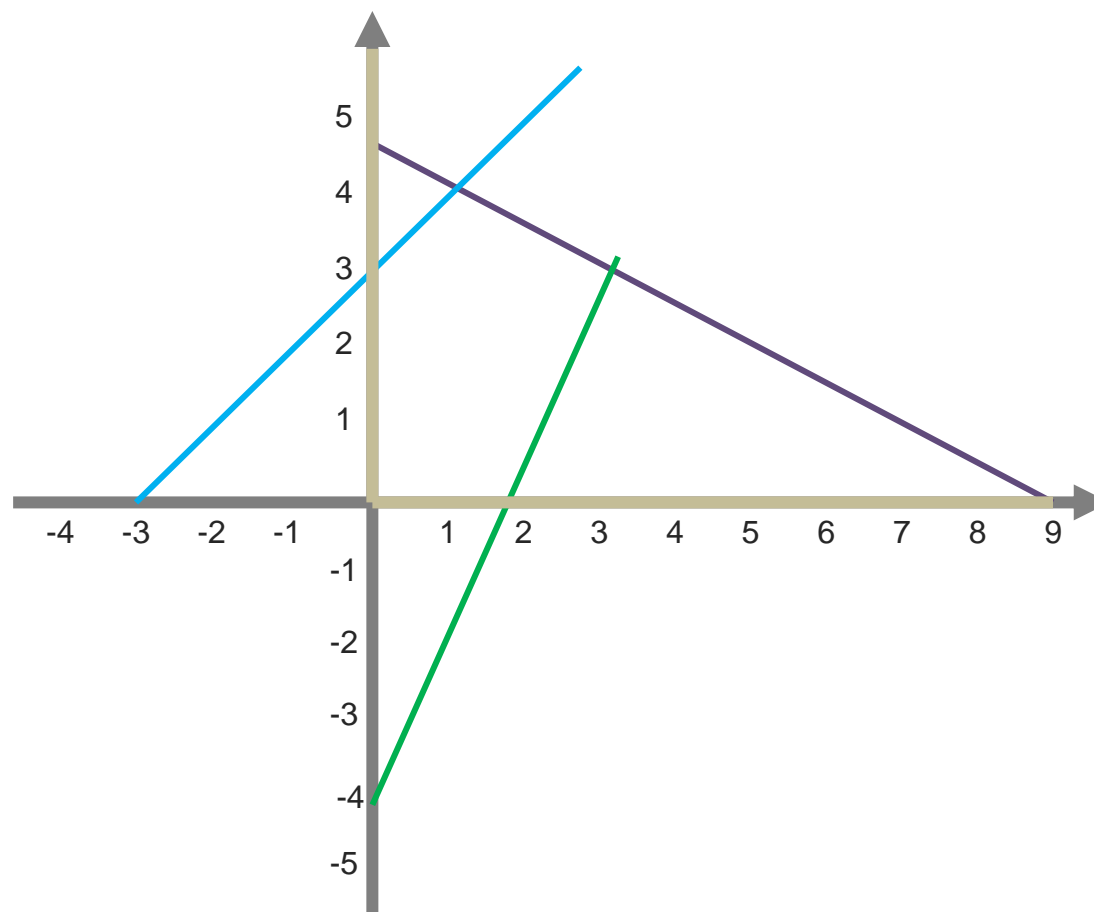
$$2x_1 - x_2 \leq 4 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad \textcircled{2}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$$



4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

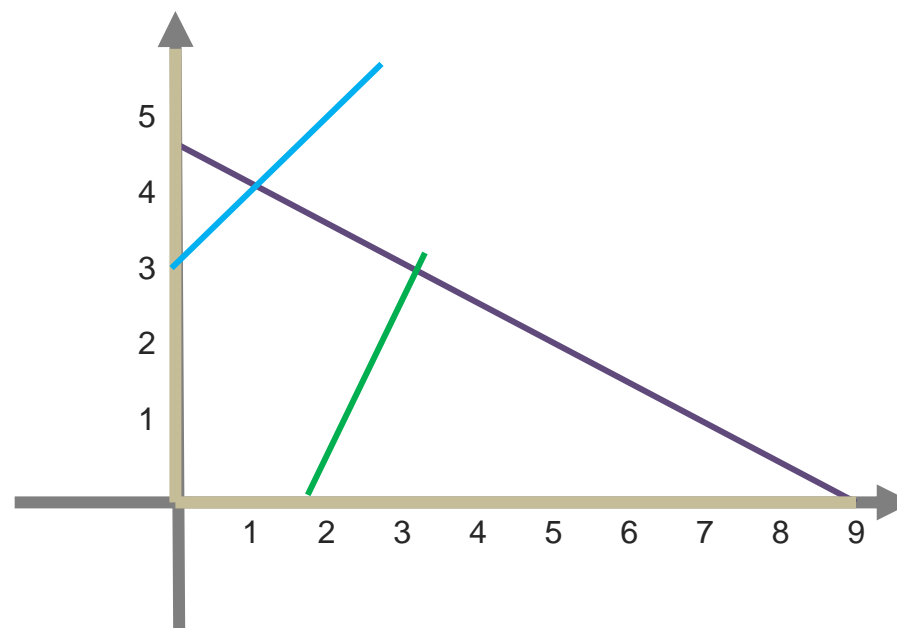
$$2x_1 - x_2 \leq 4 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad \textcircled{2}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$$



4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

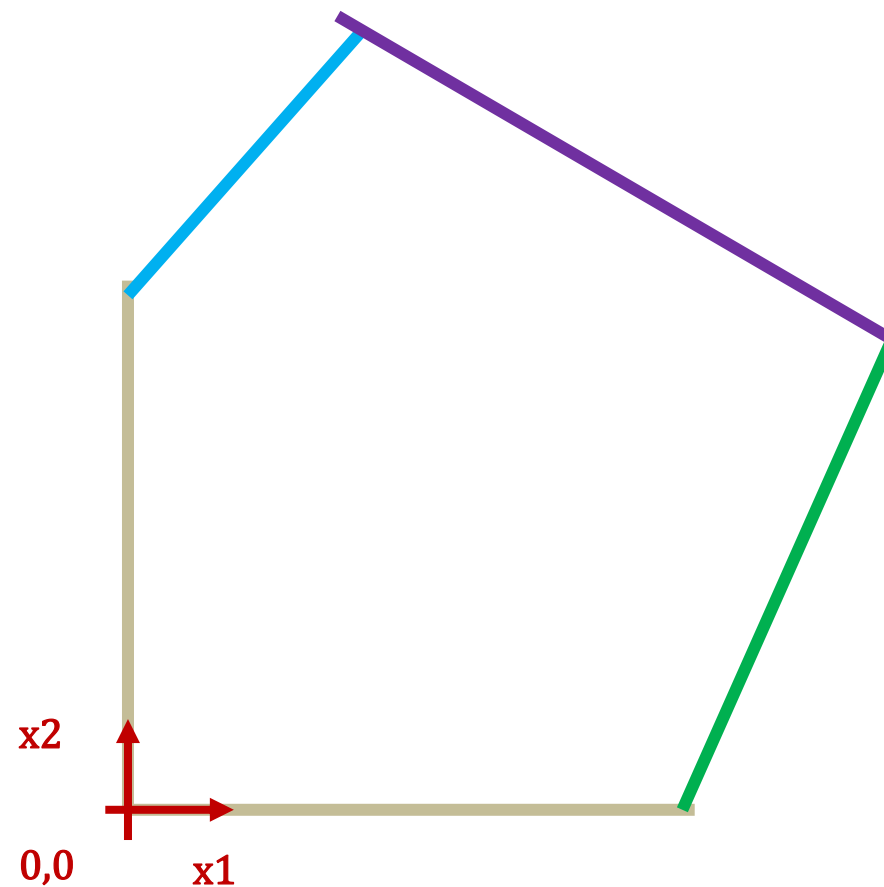
$$2x_1 - x_2 \leq 4 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad \textcircled{2}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$$



4) O ALGORITMO SIMPLEX

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

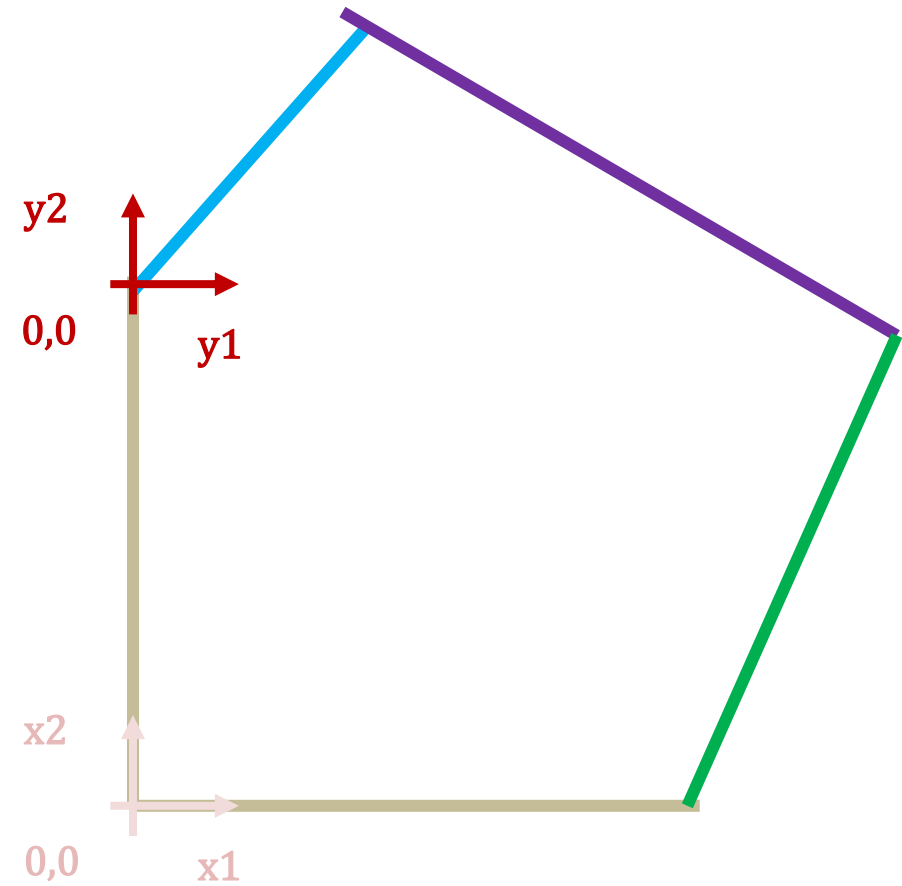
$$2x_1 - x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$



4) Como?

Função Objetivo : $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = lX + d$$

4) Como?

Função Objetivo : $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = lv + d$$

$$\max 2x_1 + 5x_2$$



$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 + 0$$

$$l = (2, 5)$$

4) Como?

Função Objetivo : $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = lv + d$$

$$\max 2x_1 + 5x_2$$



$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 + 0$$

$$l = (2, 5)$$

Restrições

$$2x_1 + 5x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

4) Como?

Função Objetivo : $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + d$

$$l = (a, b)$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = lv + d$$

$$\max 2x_1 + 5x_2$$



$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 + 0$$

$$l = (2, 5)$$

Restrições

$$2x_1 + 5x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_X \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_B$$

$$AX \leq B$$

4) Passo a Passo

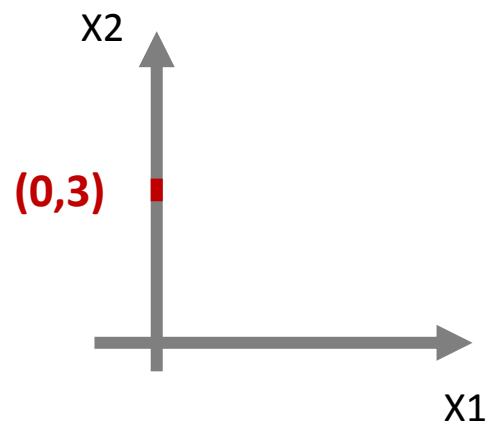
1- *Análise de Sensibilidade:*

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

4) Passo a Passo

1- *Análise de Sensibilidade:*

$$\max 2x_1 + 5x_2$$



2- *Definição restrição ativa:*

① $2x_1 + 5x_2 \leq 4$

② $x_1 + 2x_2 \leq 9$

③ $-x_1 + x_2 \leq 3$

Coordenadas
(0,3)

④ $x_1 \geq 0$

⑤ $x_2 \geq 0$

4) Passo a Passo

1- *Análise de Sensibilidade:*

$$\max 2x_1 + 5x_2$$

2- *Definição restrição ativa:*

① $2x_1 + 5x_2 \leq 4$

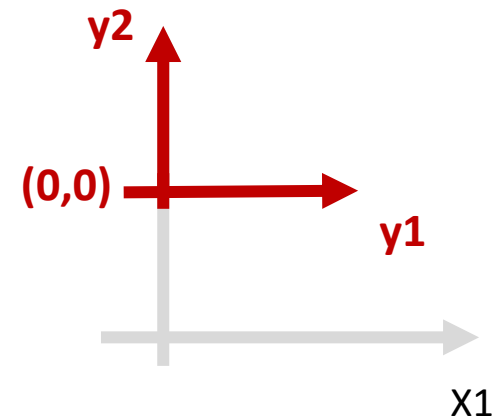
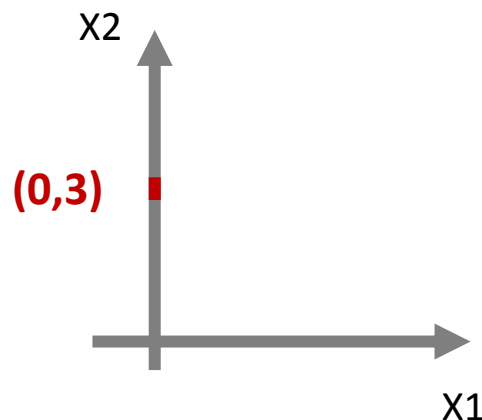
② $x_1 + 2x_2 \leq 9$

③ $-x_1 + x_2 \leq 3$

④ $x_1 \geq 0$

⑤ $x_2 \geq 0$

Coordenadas
(0,3)



4) Passo a Passo

3- Realizar a transformação $(y_1, y_2) = (0, 0)$

$$\textcircled{3} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 = x_1 - x_2 + 3$$

$$y_2 = x_1 - x_2 + 3$$

$$x_2 = y_1 - y_2 + 3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_M \times \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_p$$

$$X = M Y + p$$

4) Passo a Passo

3- Realizar a transformação $(y1,y2)=(0,0)$

$$0 = x1 - x2 + 3$$

$$y2 = x1 - x2 + 3$$

$$x2 = y1 - y2 + 3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_M \times \underbrace{\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}}_Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_p$$

$$X = M Y + p$$

4- Assumir novos valores para as restrições

$$AX \leq B$$

$$A(M Y + p) \leq B$$

$$AM Y \leq B - Ap$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4) Passo a Passo

4- Assumir novos valores para as restrições

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ① $y_1 + y_2 \leq 7$
- ② $3y_1 - 2y_2 \leq 3$
- ③ $y_1 \geq 0$
- ④ $y_2 \geq 0$
- ⑤ $-y_1 + y_2 \leq 3$

4) Passo a Passo

4- Assumir novos valores para as restrições

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ① $y_1 + y_2 \leq 7$
- ② $3y_1 - 2y_2 \leq 3$
- ③ $y_1 \geq 0$
- ④ $y_2 \geq 0$
- ⑤ $-y_1 + y_2 \leq 3$

5- Assumir novos valores função objetivo

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 + 0 \quad l = (2, 5)$$

$$f = lX + d$$

$$f = l(MY + p) + d$$

$$f = l(MY + p) + d$$

$$f = (2, 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (2, 5) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 7y_1 - 5y_2 + 15$$

6- Voltar ao passo 1

4) Passo a Passo

OBS: Critério de Parada

O processo se repete até que todos os coeficientes da função objetivo estejam negativos

6) Resolução do Sistema linear

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Agenda



1) Objetivos do Trabalho

2) Introdução à Programação Linear

3) O Algoritmo Simplex

4) Complexidade

4) Complexidade

Considerando:

R: número de restrições

V: número de variáveis

Complexidade:

Por iteração:

Vizinhos

Gaussiana

$$O(RV) * O(V^3) * O(1) = O(RV^4)$$

$$O(RV)$$

Qtd iterações:

$$\binom{V+R}{V} \text{ exponencial em } V$$

5) Bibliografia

DASGUPTA, Sanjoy. *Et alli* ALGORITHMIS; Mc Graw Hill 2009.

STRANG, Gilbert. ÁLGEBRA LINEAR E SUAS APLICAÇÕES; 4.ed. CENAGE LEARNING 2010.

FILHO, Caixeta. PESQUISA OPERACIONAL: Técnicas de otimização aplicadas a agroindústrias; 4.ed. Ed. Campus 2009.

COLIN, Emerson Carlos. PESQUISA OPERACIONAL - 170 Aplicações Em Estratégia, Finanças, Logística, 4.ed. LTC 2007.

MOREIRA, Daniel . ADMINISTRAÇÃO DA PRODUÇÃO E OPERAÇÕES . CENAGE LEARNING 2010.

6) Links

Github: https://github.com/srodriguex/simplex_prog_linear

Wikipedia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_simplex