Laboratori d'Electromagnetisme

Informes de Pràctiques

Grup A1

1549086: Bujones Umbert, Jun Shan
1669619: Rama Ariza, Raul
1672980: González Barea, Eric
1644841: Vilarrúbias Morral, Natàlia

Març – Maig 2025

UAB
Universitat Autònoma
de Barcelona

Pràctica 1

Representació de camps

Abstract

En aquesta pràctica estudiem diferents problemes electrostàtics en medis conductors aprofitant la dualitat existent entre la densitat de corrent $\vec{J}$ i el vector desplaçament $\vec{D}$. El nostre objectiu és trobar experimentalment les superfícies equipotencials per a determinades geometries, amb una simetria tal que podem reduir el problema a dues dimensions espacials. Una de les distribucions de càrrega amb què treballem és un condensador de plaques planoparal·leles ideal; per aquest cas, a més a més, fem el càlcul de la seva capacitat per unitat de longitud, partint del teorema de Gauss.

1.1 Introducció i fonament teòric

Per a materials lineals, isòtrops i homogenis, sota la presència d'un camp electrostàtic $\vec{E}$ s'apliquen les següents equacions si el medi és conductor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{1.1}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{1.3}$$

O, si el medi és dielèctric:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{1.4}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{1.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \tag{1.6}$$

Per aquest tipus de medis ε i σ són constants, així, combinant les darreres equacions trobem:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \tag{1.8}$$

Això últim implica que tant $\vec{J}$ com $\vec{D}$ són camps conservatius i, per tant, es poden definir com el gradient (canviat de signe) d'una funció escalar, és a dir:

$$\vec{J} = -\vec{\nabla} U \tag{1.9}$$

$$\vec{D} = -\vec{\nabla} U' \tag{1.10}$$

A partir de les equacions (1.3) i (1.6) podem deduir

$$\nabla^2 U = 0, \quad \nabla^2 U' = 0 \tag{1.11}$$

que són les corresponents equacions de Laplace. Així, donat uns potencials escalars U i U' que satisfacin les condicions de contorn i (1.11), podem trobar $\vec{J}$ i $\vec{D}$, respectivament.

Si comparem les equacions (1.2) i (1.5) per una banda i les equacions (1.3) i (1.6), podem veure que qualsevol solució per $\vec{J}$ és també una solució vàlida per $\vec{D}$, sempre que estiguem sota condicions de contorn equivalents i que ni σ ni $\vec{E}$ presentin discontinuïtats. Per tant, si coneixem una solució per un medi conductor, podrem trobar-ne una equivalent pel medi dielèctric intercanviant ε per σ.

Recordem que per poder calcular la capacitat per unitat de longitud d'un condensador de plaques planoparal·leles, considerem una superfície equipotencial que tanca una de les plaques del condensador. En virtut del teorema de Gauss tenim que:

$$q = \varepsilon \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \tag{1.12}$$

Assumint que el condensador és infinitament llarg en la direcció z, podem assegurar que el camp és constant en aquesta direcció i, per tant, $dS = Zdl$, on dl és el diferencial de longitud a la intersecció de la superfície equipotencial amb un pla perpendicular al condensador **POSAR FOTO**. Amb això tenim que

$$\frac{q}{Z} = \varepsilon \oint_C E dl \tag{1.13}$$

1.2 Metodologia experimental

1.2.1 Representació de corbes equipotencials

Per tal de poder representar les línies equipotencials usem fulls de paper impregnats amb carbó de resistències compreses en un rang de 5 kΩ $-$ 20 kΩ per quadrat, que actuaran com a medis conductors (de conductivitat σ homogènia) entre els elèctrodes. Les distribucions de càrrega (elèctrodes) les dibuixem usant un retolador que desprèn una tinta conductora, produïda per partícules de plata en suspensió en un líquid; per assegurar-nos que la conductivitat d'aquesta tinta esdevé màxima deixem reposar durant 20 minuts, aproximadament. Per evitar possibles problemes de falta de càrregues als elèctrodes, ens hem assegurat de dibuixar línies suficientment gruixudes.

Hem treballat amb les següents 3 distribucions: dues línies verticals (que són la projecció d'un condensador de plaques planoparal·leles), dos punts (projecció de dos fils infinits) i dues línies secants amb un punt entre elles (projecció de dos plans infinits formant angle d'aproximadament 60 º amb un fil infinit entre els dos).

Amb el pretext de generar el camp sobre les distribucions dibuixades, s'ha fixat el paper conductor (en el qual hem fet els dibuixos) sobre un suro usant xinxetes i hem connectat els elèctrodes (per a cada distribució per separat) a una font de corrent continu (DC) usant un parell de cables i més xinxetes. Per mesurar la diferència de potencial hem usat un multímetre, deixant un cable fixat a un dels dos elèctrodes (establint així una referència de potencial) i l'altre lliure per tal de fer mesures de ΔV a qualsevol altre punt del paper. Prèviament, però, ens hem assegurat què la diferència de potencial entre dos punts en els conductors (els elèctrodes dibuixats) no fos major de l'1%[1].

Per dibuixar les corbes equipotencials usem el cable lliure del multímetre per buscar aquestes corbes sobre el paper. Marquem tots els punts que estan a un mateix potencial amb un llapis i, tot seguit, unim aquests punts amb una línia. Repetint això un seguit de cops podem construir vàries corbes equipotencials. Per tal d'assegurar-nos que es tanquen, és millor que comencem a buscar les corbes des de l'exterior dels nostres elèctrodes. Si comencem per l'interior, com que tindrem una densitat de corbes molt major, serà més fàcil que la línia escollida no s'acabi tancant. Veurem que ens interessa trobar corbes que tanquin els nostre elèctrodes per tal de poder aplicar el teorema de Gauss (en especial pel cas del condensador de plaques planoparal·leles).

Finalment, per representar el camp elèctric $\vec{E}$, hem dibuixat línies que sortien dels elèctrodes i tallaven les corbes equipotencials perpendicularment (en ambdós casos).

1.2.2 Càlcul de la capacitat del condensador

Si aproximem la integral donada per l'equació (1.13) per un sumatori i calculem el camp E_i segons

$$E_i \approx \frac{\Delta V_i}{\Delta r_i} \tag{1.14}$$

on Δr_i és la distància radial i ΔV_i és la diferència de potencial de l'element Δl_i tenim:

$$\frac{q}{Z} \approx \varepsilon \sum_i \frac{\Delta V_i \Delta l_i}{\Delta r_i} \tag{1.15}$$

[1] Recordem que, per ser aquests materials conductors, hem de tenir un potencial constant en tot el seu volum i, en particular, sobre la seva superfície.

Usant que la capacitat d'un condensador de plaques planoparal·leles es correspon amb

$$c = \frac{q}{\Delta V} \tag{1.16}$$

tenim que la capacitat per unitat de longitud, sota les aproximacions usades és:

$$\frac{c}{Z} = \frac{Q/Z}{\Delta V} = \frac{\varepsilon}{\Delta V} \sum_i \frac{\Delta V_i \Delta l_i}{\Delta r_i} \tag{1.17}$$

on ΔV és la diferència de potencial a la que hem sotmès les dues plaques del condensador.

1.2.3 Simulacions

1.3 Resultats i discussió

1.3.1 Condensador de plaques planoparal·leles

1.3.2 Fils infinits

1.3.3 Fil infinit i dos plans

1.4 Conclusions