Mètodes Numèrics II

Pràctica de simulació:

TITOLTITOLTITOL

G01

1548086: Bujones Umbert, Jun Shan
1666739: Franco Avilés, Eric
1672980: González Barea, Eric
1644841: Vilarrúbias Morral, Natàlia

Gener 2025

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Índex

1 Introducció

Here goes *blahblahblah*

2 Plantejament del problema del Sistema Solar

Here goes more *blahblahblah* AAAAAAA

2.1 Modelització del Sistema Solar

Per tal de modelitzar el Sistema Solar, partirem de la Segona Llei de Newton i la igualarem a la Lley de la Gravitació Universal, tot dividint per la massa del cos p, M_p. Fent això ens queda que l'acceleració a la qual està sotmesa aquest cos és:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}^{(p)}}{\mathrm{d}t^2} = -G\left[\sum_{l\neq p} M_l \frac{(\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)})}{\left|\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)}\right|^3}\right], \quad p = 1, 2, \dots \tag{1}$$

En aquesta equació el vector $\mathbf{r}^{(p)}$ és el vector posició (marquem els vectors en negreta) del cos p respecte del Sol (que el situem a l'origen de coordenades), M_l la massa dels cossos diferents a p i $\mathbf{r}^{(l)}$ les seves posicions respecte l'origen. Fixem-nos, doncs, que segons aquesta equació, la força que actua sobre un planeta donat es correspon amb la suma de les forces exercides per tots els cossos del sistema solar sobre ell.

Simplificarem l'expressió definint $\mathbf{d}_{pl} \equiv (\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)})$ i treballant amb vectors unitaris, de tal manera que $\mathbf{d}_{pl} = d_{lp} \cdot \hat{u}_{lp}$. Així, la darrera equació queda com

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}^{(p)}}{\mathrm{d}t^2} = -G\left[\sum_{l\neq p} M_l \frac{\hat{u}_{lp}}{d_{lp}^2}\right], \quad p = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Per tal de facilitar-ne la ressolució, podem transformar aquesta equació diferencial de segon ordre a la següent

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^{(p)}}{\mathrm{d}t} = -G\left[\sum_{l\neq p} M_l \frac{\hat{u}_{lp}}{d_{lp}^2}\right], \quad p = 1, 2 \dots \tag{3}$$

on hem usat que

$$\mathbf{v}^{(p)} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^{(p)}}{\mathrm{d}t}, \quad p = 1, 2 \dots \tag{4}$$

De forma que tenim ara un conjunt de $n \times p$ (on n són les dimensions) equacions diferencials de primer ordre a resoldre. A la pràctica, com que tots els planetes del sistema solar tenen orbites coplanàries (a excepció de Plutó, que no el considerarem), podem assumir que estem davant d'un problema bidimensional, de manera que tindre $2 \times p$ EDOs de primer ordre a resoldre.

2.2 Normalització de les equacions

Per tal de resoldre el problema minimitzant errors i temps de càlcul cal normalitzar (3). Definim unes quantitats característiques del sistema: escollim $M_0 = M_s$ (la massa del Sol) i $d_0 = UA$ (unitat astronòmica), ja que així podrem treballar amb valors propers a la unitat. D'aquí se'n deriva que

$$t_0 = \sqrt{\frac{d_0^3}{M_s \cdot G}}$$

Usant tot això, podem arribar fàcilment a

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\mathbf{r}}^{(p)}}{\mathrm{d}\tilde{t}^2} = -\sum_{l\neq p} \frac{\tilde{M}_l}{\tilde{d}_{lp}^2}\tilde{\hat{u}}_{lp}, \quad p = 1, 2\ldots \tag{5}$$

d'on tenim que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\tilde{v}_i^{(p)}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\sum_{l\neq p} \alpha_{lp}\tilde{u}_{lp,i}, \quad p = 1, 2\ldots, \quad i = 1, 2} \tag{6}$$

on $\alpha_{lp} \equiv \frac{\tilde{M}_l}{\tilde{d}_{lp}^2}$.

Referències

Annexos

A Normalització sistema solar

Per tal de dur a terme la normalització definim unes quantitats característiques del sistema: $M_0 = M_s$ i $d_0 = UA$ (unitat astronòmica). Per altra banda, definim també $\mathbf{d}_{pl} = \mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)}$ (distància entre dos cossos del sistema solar).