

Mètodes Numèrics II

**Pràctica de simulació:**

**TITOLTITOLTITOL**

G01

1548086: Bujones Umbert, Jun Shan

1666739: Franco Avilés, Eric

1672980: González Barea, Eric

1644841: Vilarrúbias Morral, Natàlia

Gener 2025



# Índex

1	Introducció i Objectius .....	1
2	Plantejament del problema del Sistema Solar .....	1
2.1	Modelització del Sistema Solar .....	1
2.2	Normalització de les equacions .....	1
2.3	Condicions inicials .....	2
2.4	Mètode numèric i avaluació de l'error .....	2
3	Plantejament del problema de la placa solar .....	2
3.1	Modelització del moviment del Sol sobre Mont-rós .....	2
3.2	Normalització de les equacions .....	2
3.3	Condicions inicials .....	3
3.4	Mètode numèric i avaluació de l'error .....	3
4	Resultats i discussió .....	3
4.1	Sistema Solar .....	3
4.2	Moviment del Sol sobre Mont-rós .....	4
4.3	Energia subministrada per la placa solar .....	4
5	Conclusions .....	4
A	Repositori de <i>GitHub</i> .....	6
B	Normalització sistema solar .....	6

# 1 Introducció i Objectius

Amb el pretext de poder calcular l'energia subministrada per una placa solar de superfície igual a  $2 \text{ m}^3$  situada en un habitatge unifamiliar de Mont-rós (poble de la província de Lleida, Catalunya), en aquesta pràctica ens plantejarem modelitzar el moviment del Sol sobre aquesta localitat en el transcurs de tot un any.

Per aconseguir això últim, hem fet una simulació del Sistema Solar usant el mètode d'Euler per a diverses discretitzacions temporals, tenint en compte un seguit d'aproximacions fonamentals, entre les quals en destaquem la consideració que tots els planetes es mouen sobre el pla de l'eclíptica i que el Sistema Solar simulat està conformat pels 5 primer planetes del cas real. En els annexos, però, ampliarem aquest estudi considerant un cas més pròxim a la realitat i adjuntant, a més a més, un seguit d'animacions que ens permetran visualitzar millor la dinàmica del sistema caracteritzat.

## 2 Plantejament del problema del Sistema Solar

### 2.1 Modelització del Sistema Solar

Per tal de modelitzar el Sistema Solar, partirem de la Segona Llei de Newton i la igualarem a la Llei de la Gravitació Universal, tot dividint per la massa del cos  $p$ ,  $M_p$ . Fent això ens queda que l'acceleració a la qual està sotmesa aquest cos és:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^{(p)}}{dt^2} = -G \left[ \sum_{l \neq p} M_l \frac{(\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)})}{|\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)}|^3} \right], \quad p = 1, 2, \dots \quad (1)$$

En aquesta equació el vector  $\mathbf{r}^{(p)}$  és el vector posició (marquem els vectors en negreta) del cos  $p$  respecte del Sol (de manera que el nostre origen de coordenades serà la posició inicial del Sol),  $M_l$  la massa dels cossos diferents a  $p$  i  $\mathbf{r}^{(l)}$  les seves posicions respecte l'origen. Fixem-nos, doncs, que segons aquesta equació, la força que actua sobre un planeta donat es correspon amb la suma de les forces exercides per tots els cossos del sistema solar sobre ell.

Simplificarem l'expressió definint  $\mathbf{d}_{pl} \equiv (\mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)})$ . Així, la darrera equació queda com

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^{(p)}}{dt^2} = -G \left[ \sum_{l \neq p} M_l \frac{\mathbf{d}_{lp}}{|\mathbf{d}_{lp}|^3} \right], \quad p = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Per tal de facilitar-ne la resolució, podem transformar aquesta equació diferencial de segon ordre a la següent

$$\frac{d\mathbf{v}^{(p)}}{dt} = -G \left[ \sum_{l \neq p} M_l \frac{\mathbf{d}_{lp}}{|\mathbf{d}_{lp}|^3} \right], \quad p = 1, 2, \dots \quad (3)$$

De forma que tenim ara un conjunt de  $n \times p$  (on  $n$  són les dimensions) equacions diferencials de primer ordre a resoldre. A la pràctica, com que tots els planetes del sistema solar tenen orbites coplanàries (a excepció de Plutó, que no el considerarem), podem assumir que estem davant d'un problema bidimensional, de manera que tindrem  $2 \times p$  EDOs de primer ordre a resoldre.

Considerarem un model en què els únics cossos del Sistema Solar són Mercuri, Venus, la Terra, Mart i Júpiter (i, naturalment, el Sol), per tal de simplificar les gràfiques. A més a més, el moviment d'aquests cossos serà al pla de l'eclíptica; no considerarem moviments en l'eix  $z$ . Es podrà trobar una versió més complexa (amb la modelització de tots els planetes i les corresponents gràfiques per diferents temps finals) al repositori de *GitHub* (veure A).

### 2.2 Normalització de les equacions

Per tal de resoldre el problema minimitzant errors i temps de càlcul cal normalitzar (3). Definim unes quantitats característiques del sistema: escollim  $M_0 = M_s$  (la massa del Sol) i  $d_0 = UA$  (unitat astronòmica),

ja que així podrem treballar amb valors propers a la unitat. D'aquí se'n deriva que

$$t_0 = \sqrt{\frac{d_0^3}{M_s \cdot G}}$$

Usant tot això, podem arribar fàcilment a

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^{(p)}}{d\tilde{t}^2} = - \sum_{l \neq p} \frac{\mathbf{d}_{lp}}{|\mathbf{d}_{lp}|^3}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4)$$

d'on tenim que

$$\boxed{\frac{d\tilde{v}_i^{(p)}}{d\tilde{t}} = - \sum_{l \neq p} M_l \frac{d_{lp,i}}{|\mathbf{d}_{lp}|^3} \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2} \quad (5)$$

## 2.3 Condicions inicials

Per tal de conèixer les condicions inicials de cadascun dels cossos del sistema solar modelitzat (això és,  $\mathbf{r}^{(p)}$  i  $\mathbf{v}^{(p)}$ ) hem usat la base de dades del *Horizons Ephemeris Service* de la NASA, que podeu trobar a <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Agafem com a punt inicial les posicions i les velocitats el dia 01-01-2025 de tots els cossos rellevants del sistema solar.

## 2.4 Mètode numèric i avaluació de l'error

El mètode numèric utilitzat ha estat el mètode d'Euler (per sistemes EDOs)<sup>1</sup> aplicat a l'equació (5) per diferents discretitzacions temporals:  $dt = 1$  any,  $dt = 1$  mes i  $dt = 1$  dia.

Per tal d'avaluar l'error comés estudiarem l'evolució de les dues quantitats conservades d'aquest sistema: el moment angular  $|\mathbf{L}| \equiv L$  i l'energia total  $\varepsilon$ . Idealment, a cada cas d'iteració el valor de  $E$  i  $L$  ha de ser el mateix que a  $t_0$ ; les fluctuacions en aquestes quantitats ens permetran determinar l'error numèric comés segons:

$$E_{\varepsilon_i} = \left( \frac{\Delta \varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

$$E_{L_i} = \left( \frac{\Delta L_i}{L_0} \right) = \frac{L_i - L_0}{L_0} \quad (7)$$

On els valors de  $\varepsilon$  i  $L$  es poden treure a partir de les equacions fonamentals de la dinàmica.

# 3 Plantejament del problema de la placa solar

## 3.1 Modelització del moviment del Sol sobre Mont-rós

Per modelitzar el moviment del Sol des d'un sistema de referència situat en una teulada a Mont-rós, partim d'unes coordenades esfèriques on un angle  $\theta$  indica l'alçada del sol i un angle  $\phi$  indica la posició horitzontal del sol utilitzant el centre de la placa solar com a origen de coordenades.

Així doncs, partint d'aquests angles, realitzem una discretització de cada angle en funció de les hores de llum solar que té cada dia de l'any<sup>2</sup>. En aquesta discretització tenim en compte els angles  $\phi$  que limiten la regió on rebem incidència de llum solar i els angles  $\theta$  màxims als quals arriba el sol depenent de l'estació de l'any, aquests últims delimitats en un interval determinat per la latitud de Mont-Rós  $\pm 15^\circ$ .

## 3.2 Normalització de les equacions

SI CAL

<sup>1</sup>Les corresponents equacions es poden consultar als apunts de l'assignatura.

<sup>2</sup>Informació que hem extret de <https://meteogram.es/sol/espana/vielha/>

### 3.3 Condicions inicials

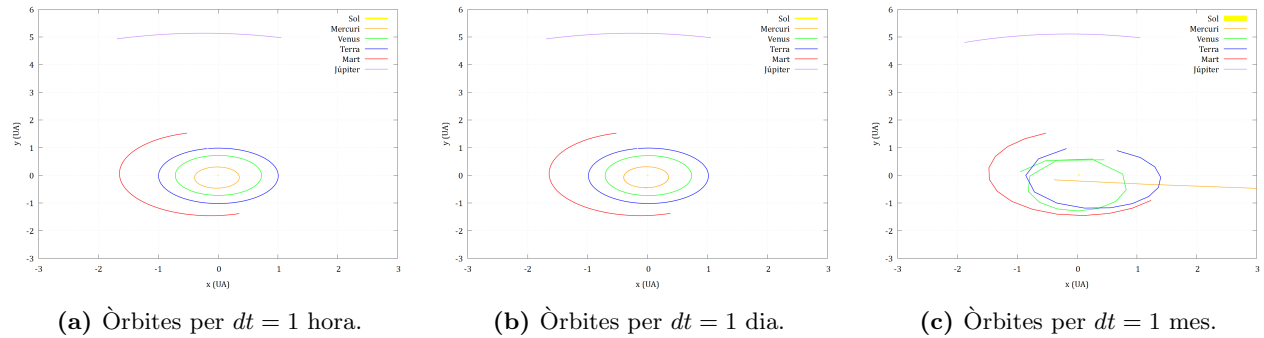
### 3.4 Mètode numèric i avaluació de l'error

SI FEU ALGO D'AIXÒ

## 4 Resultats i discussió

### 4.1 Sistema Solar

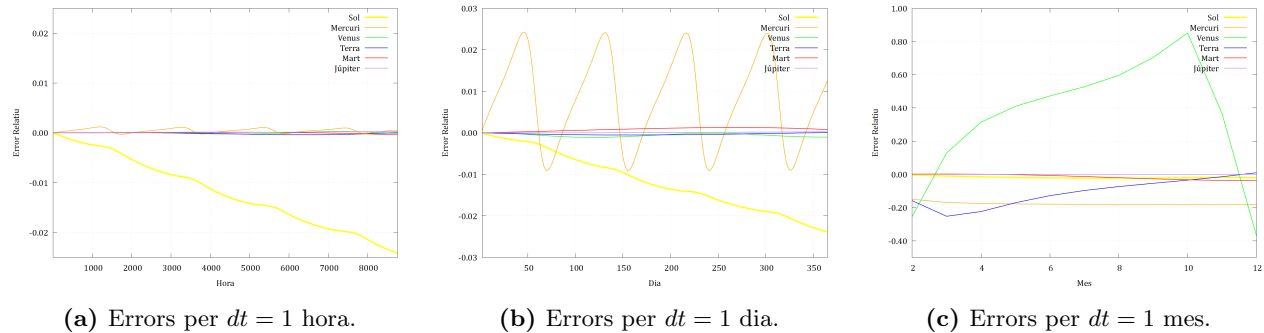
Després d'implementar el mètode numèric s'han trobat les òrbites (per a cada valor de  $dt$ ) fins a  $t = 1$  any (terrestre) que es poden veure a la figura 1. Més tard, a la figura 3, podem veure les òrbites per a  $t = 100$  anys per la discretització  $dt = 1$  dia amb el corresponent error.



**Figura 1:** Òrbites del sistema solar a  $t = 1$  any (terrestre) per diferents valors de la discretització obtingudes.

A l'annex A podeu trobar les gràfiques corresponents a tot el Sistema Solar (amb els cossos no descrits aquí) i un seguit d'animacions per tal de visualitzar més clarament l'evolució temporal de tots els cossos fins a un  $t_{final} = 15$  anys.

Els errors relatius en l'energia associats als diferents planetes es poden veure a la figura 2



**Figura 2:** Errors relatius respecte l'energia inicial pels diferents cossos del Sistema Solar a partir de la solució trobada mitjançant el mètode d'Euler, classificat en funció de la discretització emprada, fins a  $t_{final} = 1$  any.

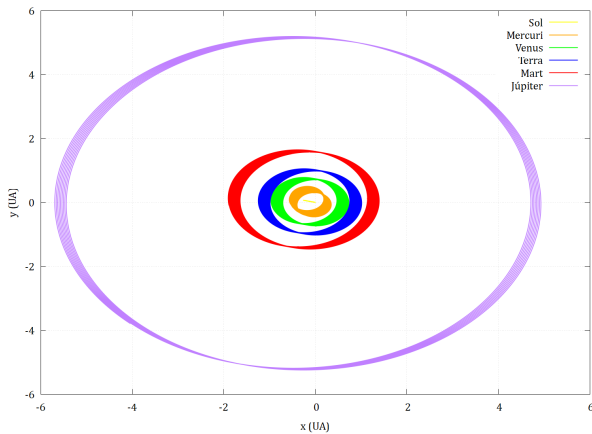
Tal i com podem veure a les anteriors tres gràfiques, la discretització amb un major error numèric és la corresponent a  $dt = 1$  mes, degut a que els grans salts en el temps fan que els errors associats al mètode d'Euler, que de per si no és molt bo, es disparin. En concret, podem veure com l'error associat a l'energia de Venus s'arriba a disparar fins a més d'un 80%. La Terra i Mercuri tenen també errors relatius grans, sobretot al principi, essent aquests propers al 20% (valor absolut).

De fet, si ens fixem en la figura 1, per la discretització  $dt = 1$  mes, podem veure que Mercuri surt disparat del Sistema Solar. Que això no es vegi reflectit, aparentment, en l'error associat a l'energia de Mercuri (que es manté pràcticament constant en una desviació del 20%) pot ser degut a què les variacions en els termes en l'energia cinètica i l'energia potencial d'aquest cos es compensen conforme l'astre s'allunya de la seva posició inicial.

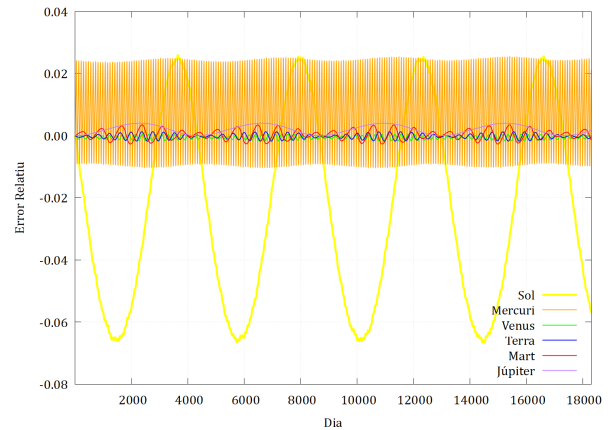
Tant a la discretització de  $dt = 1$  dia com a la de  $dt = 1$  hora tenim errors associats als planetes més exteriors del sistema modelitzat similars, essent aquests lleugerament menors en el cas de la discretització per hores, a costa d'un temps de càlcul major. La principal diferència rau, però, en l'error associat a Mercuri: per a la discretització en dies presenta un error relatiu molt major al de la resta de cossos (exceptuant el Sol), assolint pics de fins a un 2.5%; per a la discretització en hores aquest efecte es disminueix significativament.

Cal que comentem a part, però, el cas del Sol. Per a les tres discretitzacions presenta una evolució de l'error associat a l'energia molt similar: en tots els casos té una clara tendència a desviar-se negativament. Podem explicar això si pensem en què el Sol és, dels 6 cossos modelitzats, el que ha tenir posicions i velocitats menors, de forma que l'acumulació d'errors associats al mètode numèric pot fer que aquestes petites quantitats es vegin afectades de forma significativa.

Si fem un estudi de l'evolució del Solar fins a un  $t_{final}$  major, usant  $dt = 1$  dia, els resultats que s'obtenen són els que es poden veure a la figura 3.



(a) Òrbites fins a  $t_{final} = 100$  anys amb  $dt = 1$  dia.



(b) Errors per  $dt = 1$  dia.

**Figura 3:** Estudi de l'evolució del Sistema Solar a  $t_{final}$  major.

Ara es posa de manifest el caràcter oscil·latori de l'error relatiu per tots els cossos del Sistema Solar. Podem veure com l'error màxim obtingut és proper al 6.5% (valor absolut) en el cas del Sol, pels motius ja comentats abans<sup>3</sup>. La resta de planetes, exceptuant el cas de Mercuri, no arriben en cap cas a errors superiors al 1%.

## 4.2 Moviment del Sol sobre Mont-rós

## 4.3 Energia subministrada per la placa solar

## 5 Conclusions

<sup>3</sup>Per motius de qualitat de, la gràfica associada a l'error per  $t_{final} = 100$  anys arriba només fins als 50 anys. Podeu trobar més informació a l'enllaç de l'annex A

## Referències

- [1] Escartín, J.M. i Navau, C. *Mètodes Numèrics II*. Apunts de l'Assignatura (veure CV).
- [2] Aguilar, L. *Modelizando el Sistema Solar*. Consultat el: 11/12/2024. [https://www.astrosen.unam.mx/~aguilar/MySite/Teaching\\_files/BasicEqns-1.pdf](https://www.astrosen.unam.mx/~aguilar/MySite/Teaching_files/BasicEqns-1.pdf).
- [3] *Horizon Ephemeris*, NASA. Web de consulta de les posicions de tots els astres del sistema solar. Consultat el: 23/12/2024. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>.
- [4] Universidad de Granada. *El Sistema Solar y las Galaxias. Una Introducción a la Dinámica Molecular*. Consultat el: 11/12/2024. <https://ergodic.ugr.es/cphys/LECCIONES/ssolar/planetas-SLIDES.pdf>.
- [5] *MeteoGram*. Web per a consultar els horaris de les sortides i postes del Sol a tot el planeta. Consultat el: 05/01/2024. <https://meteogram.es/sol/espana/vielha/>.

# Annexos

## A Repositori de *GitHub*

Podeu trobar els codis usats en *Fortran*, les representacions de les gràfiques usant *Gnuplot*, animacions de les simulacions del sistema solar i més al següent repositori (públic) de *GitHub*: [https://github.com/elitus7/PSimulacio\\_MN2](https://github.com/elitus7/PSimulacio_MN2).

## B Normalització sistema solar

Per tal de dur a terme la normalització definim unes quantitats característiques del sistema:  $M_0 = M_s$  i  $d_0 = UA$  (unitat astronòmica). Per altra banda, definim també  $\mathbf{d}_{pl} = \mathbf{r}^{(p)} - \mathbf{r}^{(l)}$  (distància entre dos cossos del sistema solar).