负频率频谱究竟有没有物理意义

陈怀琛

（西安电子科技大学　西安　710071）

说明　2007 年 4 月 13 日，我在旁听了”信号与系统”的一堂课后，写了一篇短文，发给了我校教此课程的系和部分教信号处理的教师，得到了很多反馈。有不少教授支持我的意见，他们提供了负频率的其他例证，并对短文提了一些修改意见。使得文章更加充实和有力。另外参照西安理工大学张华容教授的文章的思路，我把正负频率分量如何合成为时间信号的过程用动画演示写成了一个 MATLAB 程序。这可以更形象地看出负频率分量的几何意义。这个例题已经放进了刚修订的《MATLAB 及其在理工课程中的应用指南》（十一五规划教材）一书中。为了使讨论更深入，我把当初的短文稍作了一些修改，把其他教师提供的好例子也放了进去，使得论据更加充实，并把那个例题也附在文后供读者参考。

2007 年 7 月 4 日补充

在对任何信号进行傅立叶分析时，得出的频谱为复数，且其频率范围将从-∞～∞。对于负频率以及该范围的频谱应当如何理解，它有没有物理意义，是一个还缺乏讨论，因而没有统一看法的问题，本文将对此进行讨论。

1．频率的概念就是从机械旋转运动来的，$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$定义为角速度，对于周期运动，角速度也就是角频率。通常 θ 以反时针为正，因此转动的正频率是反时针旋转角速度，负频率就是顺时针旋转角速度。这就是它的物理意义，正、负号不影响它的物理意义。

2．电的单位向量（电压或电流）围绕原点的转动，可以用$u=e^{j\theta}=e^{j(\omega t+\theta_0)}$表示，这是在电路中都清楚的。θ 的正负所代表的物理意义从未有什么争议，它的导数$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$的物理意义不言自明，取正取负都不影响定义。为什么取负就会失去物理意义了呢？

3．在信号与系统课程中，为了简化问题，便于初学者掌握概念，开宗明义地把研究范围限定于实信号 f(t)，也就是在电压旋转向量

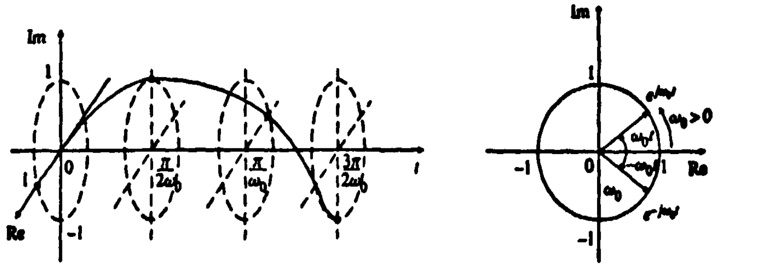

图 1(a) $e^{j\omega_0 t}$ 的三维图形　　(b) x-y 平面的二维图形

$u=e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$中，只研究它在实平面或虚平面上的一个投影-sin(ωt)或 cos(ωt)，研究复信号 $e^{j\omega t}$ 的特性与只研究实信号 sin(ωt)或 cos(ωt) 是两个不同的层次。前者是反映信号在空间的全面特性，后者只研究了信号在一个平面（x-t 或 y-t 组成的平面）上投影的特性。这就必然要丢掉一些重要的信息，至少会丢掉旋转信息。很显然，在 x-t 或 y-t 的平面内，是不可能看出旋转的，不管是正转还是反转。既看不到 θ，更看不到 ω，只有在 x-y 平面上才能看到这两个参数。

4. 同样，用 $e^{j\omega t}$ 或 sin(ωt)或 cos(ωt)作为核来做傅立叶变换所得的结果也是前者全面，后者片面。对实信号做傅立叶变换时，如果按指数 $e^{j\omega t}$ 求，我们将得到双边频谱。以角频率为 Ω 的余弦信号为例，它有具有位于±Ω 两处的，幅度各为 0.5，相角为零的频率特性。它的几何关系可以用图 2 表示。两个长度为 0.5 的向量，分别以±Ω 等速转动，它们的合成向量就是沿实轴方向的余弦向量。而沿虚轴方向的信号为零。可见必须有负频率的向量存在，才可能构成纯粹的实信号。所以欧拉公式 $\cos(\Omega t)=0.5(e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t})$ 是有其明确的几何意义（即物理意义）的。在我写的《数字信号处理—MATLAB 释义与实现》中给出了动画，并给出了正、负数字频率的几何解释。

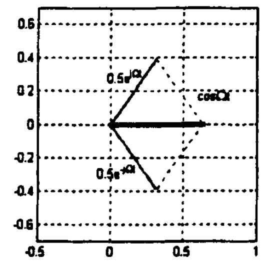

图 2 实数信号由正负频率复向量合成

5. 了解了正余弦信号中包括正负双边频谱，不仅有物理意义，而且具有重要的工程价值。例如，可以根据这个概念来构成旋转电磁场，设计电动机。上面给出了单位余弦波在正负两个频率上有幅度相等，相角相均为零的两根谱线；同样，单位正弦波在同样正负两个频率上也有幅度相等的谱线，不过它们的相角分别为±π/2。用立体图表示如图 3(a)。

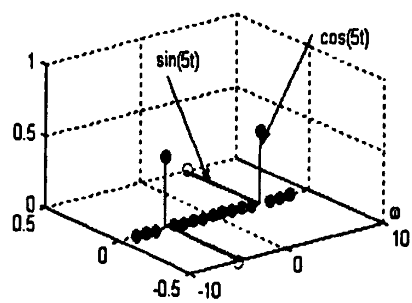

图 3 (a) 正余弦信号的双边频谱

如果把正弦和余弦两个信号的正频率频谱设计得相等相反，则把它们合成以后，就只剩下负频率的频谱，它就构成一个单纯负向旋转的电信号。为此可以把正弦信号在空间上转动 π/2，使它的正频率谱线恰好与余弦信号的正频率谱线反向，这样两个信号的合成（见图 3 (b)）就成为一个只有负频率谱线的信号，当然它在时域必然是复数信号，怎么可能是没有物理意义的东西呢？常用的二相异步电机就是这样负向转动的。而要使该电机正转，则要使两者的负频率频谱互相抵消，只保留其正频率频谱。

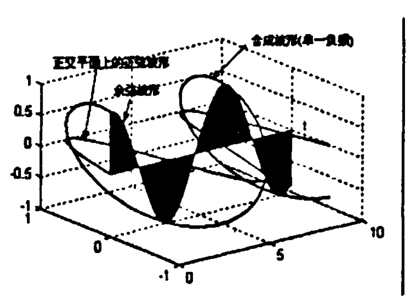

图 3(b) 只有负频率频谱的信号

6. 实信号的正负频谱是奇对称的。如果

它的单边频带宽 W，考虑到负频率频谱，实际占的频谱区域就是±W，所以通信中要传输这样的信号就需要占用 2W 的频带宽度。为了节省频带，人们就发明了 Hilbert 变换，它可以把信号的正频率频谱移相负 90 度，把负频率频谱移相 90 度，然后再将这个信号移相 90 度与原信号相加，使两者的负频率频谱互相抵消，正频率频谱加倍，构成一个没有负频率频谱的复信号（如同上面所说的二相异步电机那样）。这个复信号的带宽就只占 W 了。用这个方法，使频带节约了一半。在这里，我们看到负频率频谱的重要性，在传送信号时。它是不可或缺的部分。另外，也看到负频率频谱与复信号的密切关系。

7. 多普勒频率又是一个负频率的实例，如果信号的发射源向我们运动而来，那么多普勒频率就是正频率；如果信号的发射源向我们远离而去，那么多普勒频率就是负频率，在这里正负频率都是有明确物理意义的。虽然多普勒频率是一种差频，它仍然符合上述的原理，在实信号域只能求出多普勒频率的大小，但检测不出它的正负。要得到负频率，必须从复信号域考虑，利用信号实部和虚部的相位关系来判断，从而找到相应的原理和设备框图。

8. 负频率频谱的物理意义往往不为某些人们理解，其主要原因是他们忘记了实数信号平面内研究问题的局限性。因为在信号与系统课程中研究的信号通常只限于实信号。从实信号的 x-t 的波形图上根本看不出频率的转向和正负，频率只能表现为每秒信号重复的次数。分不清正负就以为是正频率，只是一种习惯性的思维方法而已。

科学地说，转角和频率的正负，必须在 x-y 平面或三维信号空间中才能观察到。因为观察的方法不对，看不到其意义，从而否认它的存在，这是认识论上的错误，不是科学的方法。这就和“瞎子摸象”的故事所说的那样，摸象腿的人否认象有鼻子，毛病出在他的验证方法。他老想在象腿（实信号域）上找到象鼻子（负频率），当然也永远找不到。正确的方法是必须换一个角度，摸别的部位（复信号域），才能得到全面的知识。

9. 某些人不承认负频率还是由于固执地坚持"频率是每秒钟循环的次数”的陈旧概念，其实频率的概念是不断发展充实的。从傅立叶变换的核 $e^{j\omega t}$ 已经可以清楚地看到它用到的是角频率即角速度的概念，单位是弧度/秒，而且具有明确的方向和正负号。而进入到数字信号处理时频率又进一步发展为数字频率，它的单位是弧度，取值范围是[-π，π]。它的物理意义已变为两次采样时刻之间向量转过的角度，在文献[1]中对此有详细的说明。如果停留在"每秒次数"的旧概念上，那就永远无法接受新的事物。

10. 我认为，“×××只有数学意义，没有物理意义”这样的话，在哲学上是不对的。教师和科学工作者在任何情况下都不该这么认识，更不能写在书上和幻灯片上。数学是更抽象、更深刻地描述物理现象的工具，其中通常包含了极为重要的结果，而物理是实证的科学，有时限于条件，人们暂时还认识不到其物理意义。数学超前物理是科学史上多次出现的现象，比如虚数、非欧氏几何等。这时应该努力去理解它，认识它，而不是轻易地放弃它。给学生讲课时，只能说“我们目前还没有想通×××的物理意义”，自己没想通，没找到的事物，不能说它不存在。这是我自己探索科学的座右铭，也希望青年师生有这种钻研精神。

11. 这个问题的提出，是因为我在旁听“信号与系统”课程时，在老师的幻灯片上看到了“关于双边谱，负频率只有数学意义，没有物理意义”的提法。我觉得这是个大问题，恐怕不是一个老

师的想法。回来一问，果然如此。据说也不单是我们学校的问题，有的教材上甚至都这么写。

讨论这个问题，不仅是理论上的探讨，对于提高教学质量是有重大意义的。今天，信息技术如此的发展，很大程度是由于深入大量地开发频谱资源的结果。在同学刚进入这个资源库的时候，我们要引导他们对这个宝藏发生极大的兴趣，非常珍惜这个宝藏，去深钻，去挖掘。不能轻率地、毫无根据地一句话就把它一半扔掉了。在入门的时候，当然不可能把我上面说的概念统统灌输给学生，要顺序渐进。但老师首先要有更宽广的知识面和更科学的思维方法，教出的学生的才会具备更多的想象力和创造性。所以我希望教信号与系统课和信号处理课的老师参与这个讨论。特别希望听到有论据的反面意见。

参 考 文 献

[1] 陈怀琛，数字信号处理教程—MATLAB释义与实现，电子工业出版社，2004年10月

附：《MATLAB及其在理工课程中的应用指南》（十一五规划版）

第9章　在信号与系统中的应用

9．4　频谱及其几何意义

频谱分析是信号与系统课程中最重要的内容之一，许多读者在学习中感到抽象，往往只能从数学上承认时域信号与它的频谱之间的变换关系，而没有理解它的物理意义。用MATLAB可以帮助读者建立形象的几何概念，真正掌握它。

首先来看欧拉公式，它是以最简明的方式建立了信号频域与时域的关系：

$$\cos\Omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right)$$

它说明一个最简单的实余弦信号可以由正、负两个 Ω_0 频率分量合成。在复平面上，正的 Ω_0 对应于反时针旋转的向量，负的 Ω_0 对应于顺时针旋转的向量，当这两个向量的幅度相同，而相角符号相反时，就合成为一个在实轴上的向量。它的相角为零，大小按正弦变化，形成了实信号 $\cos\Omega_0 t$。（如图9-11所示）。推而广之，任何实周期信号必然具有正、负两组频频率的频谱成分，正、负频率频谱的幅度对称而相位反对称，或者说，是共轭的。

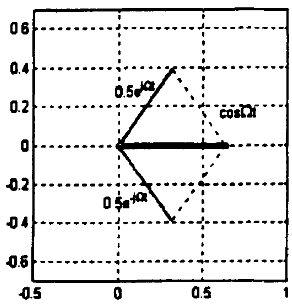

图9-11　实序列由对称的正负频率合成

如果频谱不止这两项，而是有四项或更多，它们的合成仍然可以用几何动画来表示。可以把每个频谱看作一根长度等于频谱幅度、按频率 Ω 旋转的杆件，频谱的相加等价于多节杆件首尾相接，杆件末端的轨迹就描述了生成的时域波形。因为这个端点是在平面上运动，所以它将产生复信号，在实轴和虚轴上的投影分别为实信号和虚信号。

【例9-4-1】设计一个演示程序，它能把四个用户任意给定集总频谱合成并生成对应的时域信号。

解：

◆ 建模 按上述多节杆合成模型

程序设计包括三个主要部分：（1）各频谱分量的输入，包括其幅度和频率（有正负号）；（2）将各分量当作转动的杆件首尾相接；（3）记录多节杆系末端的轨迹画出图形。

◆ MATLAB 程序 exn941

```
% （1）给频谱向量赋值
N=input('N(输入向量个数，限定 N 不大于 4)=  ');
for i=1:N
    i，a(i)=input('振幅 a(i)= ');
    w(i)=input('角频率 w(i)=');
end
% （2）将各个频谱向量相加合成并画图
% 此处应该把各时刻的图形转为动画，此处省略了动画的语句）
t=0:0．1:20;lt=length(t);                          % 给出时间数组
p=a'*ones(1，lt)．*exp(j*w'*t);                    % 各频谱分量随时间变化的复数值
q=cumsum(p);                                       % 各频谱分量的累加（包括所有节点）
figure(1)，plot(real(q(4，:))，imag(q(4，:)))，grid on      % 画合成复信号的端点轨迹
% （3）将此轨迹的在实轴与虚轴两个方向的投影画成时间信号
figure(2)，subplot(2，2，1)，plot(real(q(4，:))，imag(q(4，:)))，grid on
subplot(2，2，3)，plot(real(q(4，:))，t)，grid on         % 画出实信号的时间波形
subplot(2，2，2)，plot(t，imag(q(4，:)))，grid on         % 画出虚信号的时间波形
```

◆ 程序运行的结果

运行程序并按提示输入，如果只取两个幅度相等，频率符号相反的集总频谱，那么将得到与图9-11相仿的结果。现取四个集总频谱，输入

a(1)=1，w(1)=-1；

a(2)=1，w(2)=-1；

a(3)=0．5，w(3)=3；

a(4)=0．5，w(1)=-4；

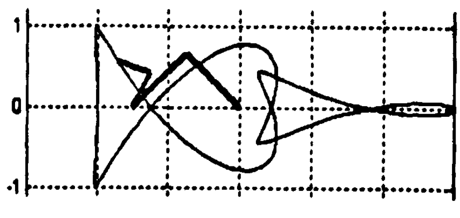

图 9-12 四个频谱向量组成的多节杆及其端点轨迹

在此处，为了显示复信号，我们有意把输入频谱设成不对称的。于是读者将看到四节杆的运动动画，并得到杆系及其端点在复平面上的轨迹，如图9-12，改变了比例尺的轨迹见图9-13子图(a)。将它在 x，y 两方向的投影与时间轴的关系画在子图(b)和(c)中，我们就得到信号与系统课程中常见的实信号曲线。

输入频谱的幅度可以是负数，也可以是虚数，甚至可以是复数，它不仅反映了频谱的大小，还反映了该向量的起始相位；频谱的频率则只能是可正可负的实数，正频率和负频率以及在该频率上频谱的意义在此不言自明。读者可以做各种各样的试验，例如当两组频率具有倍频关系时，得到的是周期信号，如果频率比是任意小数，那将得出非周期的信号；另外，这样的演示只适用于集总频谱，对于分布的频谱密度，就要把它想象为若干小的集总频谱的叠合。总支有了这样的形象演示，可以大大扩展时域信号与频域谱之间关系的思维空间。

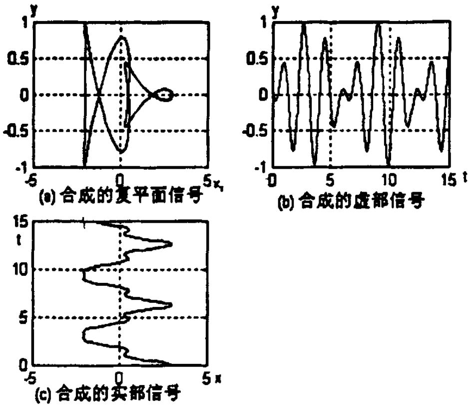

图9—13 频谱分量合成的复信号、实信号和虚信号

可见，只有在复信号平面上，才能看到频率的正负。许多人往往看不到负频率频谱的意义，这是因为他们老是停留在实信号的局部范畴来思考问题。要想知道象有没有鼻子（负频率），必须去摸象头（复信号），只摸象腿（实信号）是得不到信号理论普遍而科学的规则的。

[1] 陈怀琛，MATLAB及其在理工课程中的应用指南(十一五规划版)，西安电子科技大学出版社，2007年7月