בס"ד י"א חשון, התשפה

אקסיומת החסם העליון

הגדרה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעל. $S\in\mathbb{R}$ נקרא

חסם עליון של A אם הוא החסם מלעל המינימלי של A

$S=\sup A$ אם $S\le t$ לכל t שהוא חסם מלעל של A.

באותו אופן, עבור קבוצה A לא ריקה חסומה מלרע, $S=\inf A$

נקרא החסם מלרע המקסימלי של A.

הגדרה שקולה: $S=\sup A$:

1. S חסם מלעל של A: לכל $\alpha\in A$, מתקיים $\alpha\le S$

2. S חסם מלעל מינימלי: לכל מספר $t<S$ קיים $\alpha\in A$

כך ש- $t<\alpha$

$S=\max A$

1. S חסם מלעל של A: לכל $\alpha\in A$ קיים $\alpha\le S$

2. $S\in A$

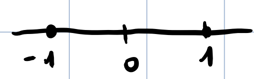
טענה (תרגיל בית): נניח $S=\sup A$ קיים. אז

$S=\max A$ אמ"מ $S=\sup A\in A$

טענה (תרגיל בית): אם $S=\max A$ קיים. אז S

הוא חסם עליון של A. $\max A=$ A

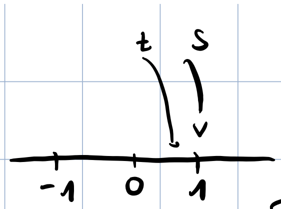
דוגמה: $A=\{-1,2\}$



1. $S=\sup A=1$

2. $t=0.99, 0.99$

דוגמה: $A=(-1,1)$



$S=\sup A=1$ לכל $-1<t<S=1$

לקבוצה הזו אין מקסימום ממוצע הממוצע

$\frac{S+t}{2}\in A$, $t<\frac{S+t}{2}<1$

לכן, t לא חסם מלעל של A

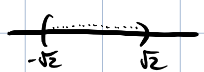
* $A=[1,1]=\{1\}$ יש מינימום ומקסימום

* $A=(1,1)=\emptyset$ לקבוצה ריקה יש חסם מלעל, אבל אין חסם מלעל מינימלי

אותו דבר עם חסם מלרע.

$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2\le 2\}$ - החסם העליון של הקבוצה לא נמצא ב- $\mathbb{Q}$

וגם לא חסם תחתון $\inf=-\sqrt{2}, \sup=\sqrt{2}$



אם נרחיב את הקבוצה לממשיים, אז הקבוצה תהיה סגורה [ ].

אם היינו "חיים" ב- $\mathbb{Q}$ אז ל-A לא היה חסם עליון (כי $\sqrt{2}$ לא שייך ל-$\mathbb{Q}$)

כנ"ל לגבי חסם תחתון שגם לא שייך ל- $\mathbb{Q}$.

הצו לקבוצה לא שייך $\leftarrow B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<49\}$

כיוון שזוהי הקבוצה של הרציונלים

אקסיומות החסם העליון - $\mathbb{R}$

לכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעל יש חסם עליון

מסקנה: (כלומר לא צריך להניח בנפרד) זה שלכל קבוצה A לא ריקה וחסומה

מלרע יש חסם תחתון (נובע מהמשפט הראשון)

תכונת הארכימדיות

משפט (תכונת ארכימדיות): הקבוצה $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ב- $\mathbb{R}$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל (על מנת לקבל סתירה)

$\mathbb{N}$ לא ריקה. ומכיוון שחסומה מלעיל, מאקסיומת החסם העליון יש לה חסם עליון אותו נסמן כ- s. $s=\sup\mathbb{N}\in\mathbb{R}$

$s=\sup A$

לחסם עליון (מההגדרה עצמה) יש את התכונה שלכל t שקטן מ- s, ניתן למצוא איבר $a\in A$ כך ש $a>t$.

בגלל ש- $s=\sup\mathbb{N}$

אז עבור $t=s-1<s$ לכן, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>s-1$

נוסיף 1 ל-2 האגפים: $s<n+1\in\mathbb{N}$

וזו סתירה לכך ש- s הוא חסם מלעיל מינימלי של $\mathbb{N}$

אפסילון

מסקנה (מתכונת ארכימדיות): לכל מספר $\mathbb{R}\ni\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-

$$0<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. אם לכל $n\in\mathbb{N}$ היה מתקיים ש- $\frac{1}{n}\geq\varepsilon$