בס"ד

יח' חשוון, התשפ"ה

מבוא ללוגיקה

פעולות לקבלת טענות לוגיות חדשות:

1) AND (וגם): P,Q טענות לוגיות אז $P\wedge Q$ או P and Q היא טענה לוגית חדשה שמקבלת ערך T אמ"מ P מקבל T וגם Q מקבל T

Q	P	$Q\wedge P$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

* חייב ש-2 הטענות יהיו נכונות כדי ש$P\wedge Q$ יהיה נכון.

דוגמה: $P = "2\geq 2"$ ו- $Q = "2>1"$

$$P\wedge Q = (2\overset{T}{\geq} 2)\wedge(2\overset{T}{>}1) = T$$

2. NOT. Q טענה לוגית אז $\neg Q$ (not) טענה לוגית חדשה שמקבלת ערך T אמ"מ Q הוא F

Q	$\neg Q$
F	T
T	F

3. OR (או) - $Q\vee P$ מקבלת ערך T אמ"מ לפחות אחד מP או Q הוא T

Q	P	$Q\vee P$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

4. IF THEN (אם אז) $Q\Rightarrow P$

Q	P	$Q\Rightarrow P$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

דוגמה: אם $Q=$"ירד גשם" עכשיו, $P=$"יש עננים"

$Q\Rightarrow P$ מקבלת ערך אמת T תמיד בעולם שלנו

דוגמה: $Q=(\overset{\text{משתנה חופשי}}{x}>1)$, $P=(\overset{\text{משתנה חופשי}}{x}\geq 2)$

הטענה: $\overset{\text{אם}}{Q}\Rightarrow \overset{\text{אז}}{P}$ בעולם שלנו (תחת הנחות PI-PXI) מקבלת ערך T לכל x שנבחר. האם $Q_{(x)}\Rightarrow P_{(x)}$ מקבלת תמיד ערך T? לא, למשל עבור $x=\frac{3}{2}$ אז $Q(\frac{3}{2})=T$ אבל $P(\frac{3}{2})=F$. כלומר $Q_{(x)}\Rightarrow P_{(x)}$ מקבלת ערך F עבור $x=\frac{3}{2}$. לעומת זאת, עבור $x=2$ $Q_{(2)}=T$ וגם $P_{(2)}=T$. במקרה זה $Q_{(x)}\Rightarrow P_{(x)}$ מקבלת ערך T.

הטענה לקבוצה הריקה $\emptyset$ כל מספר x הוא חסם מלעיל ואין חסם עליון.

לכל $S\in\mathbb{R}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $(\overset{F}{x\in\emptyset} \overset{\text{לא משנה מה יהיה פה}}{\Rightarrow} x\leq S)$ - תמיד T

דוגמה: $x=5\Rightarrow x=6$. מקבלת T לכל $x\neq 5$ ומקבלת F לכל $x=5$.

* משתנה חופשי: אפשר לקבל דרכו הרבה טענות לוגיות

5. If and only if (אם ורק אם): הטענה $Q\Leftrightarrow P$ מקבלת ערך T אמ"מ Q ו-P מקבלות ערך T ביחד או F ביחד

Q	P	
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ניתן לומר ש- $(Q\Leftrightarrow P)=(Q\Rightarrow P)\wedge(P\Rightarrow Q)$

Contraposition: הטענה $P\Rightarrow Q$ שקולה לוגית ל- $\neg Q\Rightarrow\neg P$

בכתיב לוגי: $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\Rightarrow\neg P)$

P	Q	$P\Rightarrow Q$	$\neg Q$ (A)	$\neg P$ (B)	$\neg Q\Rightarrow\neg P$ ($A\Rightarrow B$)
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	F	F	T

כמתים (Quantifiers):

נסתכל על טענה לוגית עם משתנה חופשי x ‏$P(x)$.

כמת "לכל" (For all): $\forall x(P(x))$ מקבלת ערך T אמ"מ $P(x)$ מקבלת T

לכל x שנבחר (בטענה אין משתנה חופשי).

דוגמה: $P(x)=$ ירד גשם ביום x, $Q(x)=$ יש עננים ביום x

$$\forall x(P(x)\Rightarrow Q(x))=T$$

נוסף

חשוב מאוד: $\forall x$ הוא אופרטור שלוקח טענה לוגית ומחזיר טענה לוגית.

- **כמת "קיים" (Exist):** הטענה $\exists x(P(x))$ מקבלת ערך אמת T אם"ם קיימת הצבה של x כך ש-$P(x)$ מקבלת ערך אמת T

* **תזכורת: חוק דמורגן:** $\neg(P\wedge Q) \iff (\neg P \vee \neg Q)$

$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P)\wedge(\neg Q)$

קשרים בין הכמתים:

- תהי $P(x)$ טענה לוגית עם משתנה חופשי x.

$$\left(\overset{\text{not}}{\neg}(\forall x(P(x)))\right) \iff \left(\exists x(\overset{\text{not}}{\neg}P(x))\right)$$

יורד גשם ביום x = $P(x)$ יש עננים ביום x = $Q(x)$

ראינו ש- $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

נטען שהטענה $\overset{\text{not}}{\neg}\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ היא T

זה שקול ל- $\iff \exists x(\neg(P(x)\wedge Q(x)))$

$$\overset{\text{חוק דמורגן}}{\iff} \exists x((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))$$

סדר כמתים: הסדר של הכמתים חשוב!

תהי $P(x,y)$ טענה לוגית עם 2 משתנים חופשיים.

(למשל $P(x,y) = (x \geq y)$)

מתי הסדר לא חשוב? $\forall x(\forall y P(x,y)) \iff \forall y(\forall x P(x,y))$

$$\exists x \exists y P(x,y) \iff \exists y \exists x P(x,y)$$

$\neg\forall x(\forall y(x \geq y)) \iff \neg\forall y(\forall x(x \geq y))$ תמיד T

$\forall x(\exists y(x > y))$ הוא T

$\exists y(\forall x(x > y))$ הוא F