בס"ד ט' חשוון, התשפ"ה

בניית המספרים הממשיים

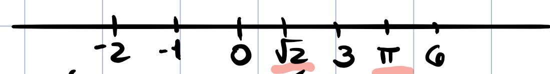
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$r\in\mathbb{Q}$ קיימים $m,n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $r=\frac{m}{n}$

לכל $r\in\mathbb{Q}$ יש ייצוג מינימלי יחיד: כלומר, לכל $r\in\mathbb{Q}$ ניתן למצוא $0<n$ קטן ביותר כך ש $r=\frac{m}{n}$ כאשר $m\in\mathbb{Z}$.

כלומר עבור ייצוג זה לא ניתן למצוא n' שקטן מ-n כך ש $r=\frac{m'}{n'}$ עבור $m'\in\mathbb{Z}$ כלשהו.

האם $\mathbb{Q}$ מכיל את כל המספרים על הקו הישר?



לא, כי הקו הישר מכיל גם מספרים לא רציונליים.

משפט - פרדוקס פיתגורס

$r=\sqrt{2}$

לא קיים מספר רציונלי r כך ש- $r\cdot r=r^2=2$

הוכחה: בסתירה (נניח את ההנחה השגויה)

נניח בשלילה שקיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש $r^2=$. קיימים $m,n\in\mathbb{Z}$ כך ש $r=\frac{m}{n}$. נניח ש $\frac{m}{n}$ הוא הייצוג המינימלי של r. כלומר, לא קיים $0<n'<n$ ו-$m'\in\mathbb{Z}$ כך ש- $r=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$. נעלה את r בריבוע כך ש:

$r^2=2$

$$r^2=\left(\frac{m}{n}\right)\cdot\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m^2}{n^2}=2$$

נעביר את n^2 אגף, נקבל $2n^2=m^2$

לכן המספר m^2 הוא זוגי. (מתחלק ב-2)

נשים ♥ שאם m^2 זוגי אז בהכרח גם m זוגי. שכן, לו m היה אי זוגי היה ניתן לכתוב את m כ-$2p+1$ עבור $p\in\mathbb{Z}$. זה אומר ש-

$$m^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=\underbrace{\underbrace{2(2p^2+2p)}_{\text{זוגי}}+\underbrace{1}_{\text{אי זוגי}}}_{\text{אי זוגי!}}$$

כלומר, m^2 אי זוגי, בסתירה להנחה ש-m^2 זוגי.

לכן, ההנחה שעשינו ש-m אי זוגי אינה נכונה

ולכן נסיק שאם m^2 זוגי אז גם m זוגי.

הנחנו בשלילה שקיים $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ (ייצוג מינימלי) כך ש $r^2=\left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow$

$m^2=2n^2 \Rightarrow m^2$ זוגי $\Rightarrow m$ זוגי $\Rightarrow$ קיים $m'\in\mathbb{Z}$ כך ש $m=2m'$. נציב את $m=2m'$ ב-$m^2=2n^2$:

$(2m')^2=2n^2$

שקול- $4m'^2=2n^2$

שקול- $n^2=2m'$

לכן n הוא גם זוגי (מתחלק ב-2). כלומר קיים $n'<n$ כך ש- $n=2n'$

כלומר, ראינו ש- $r=\frac{m}{n}=\frac{2m'}{2n'}=\frac{m'}{n'}$

מכיוון ש $n'<n$, $r=\frac{m'}{n'}$ זו סתירה לייצוג המינימלי $r=\frac{m}{n}$. מכיוון שקיבלנו סתירה, אז אחת מההנחות שלנו הייתה שגויה.

בס״ד

מובן שההנחה היחידה שלא ידענו אם היא נכונה או לא היא שקיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש- $r^2=2$ נקבל שההנחה הזו חייבת להיות שגויה. כלומר לא קיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש $r^2=2$

מ.ש.ל

המשפט מראה ש $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ולכן ישנם מספרים שהיינו רוצים שיהיו ב- $\mathbb{R}$ אבל לא ניתן לייצג אותם כמספרים רציונליים. נרחיב את $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{R}$ ע״י הוספת תכונה (אקסיומה) נוספת. תכונה זו תאפשר לנו לטעון לוגית שאכן $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$.

אקסיומת החסם העליון

הגדרה: (חסם מלעיל/מלרע)

בהינתן קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ נקרא חסם מלעיל של A אם לכל

α איבר הקבוצה

$\alpha\in A$ מתקיים $\alpha\le x$. x נקרא חסם מלרע של A אם לכל $\alpha\in A$ מתקיים $\alpha\ge x$.

דוגמה: לקבוצה $(0,1)$ $A=$, המספר $x=73$ הוא חסם מלעיל של A, שכן כל מספר $\alpha\in(0,1)$ מתקיים $\alpha\le 73$

הם גדולים ושווים ל-1.

גם $x=2$ וגם $x=1$ הם חסמי מלעיל של A.

דוגמה: גם לקבוצה $A=[0,1]$, $x=1$ או $x=2$ או $x=7$ הם חסמי מלעיל של A.

מלרע	מלעיל
$x\le\alpha$	$\alpha\le x$

באופן דומה $x=0$ או $x=-7$ הם חסמי מלרע של A. קבוצה A שיש לה חסם מלעיל נקראת קבוצה חסומה מלעיל ואם יש לה חסם מלרע אז היא נקראת קבוצה חסומה מלרע.

דוגמה: לקרן $(0,\infty)$ אין חסם מלעיל אבל יש חסם מלרע (כל מספר שקטן או שווה ל-0)

הגדרה: (חסם עליון/תחתון)

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה, לא ריקה וחסומה מלעיל.

המספר $S\in\mathbb{R}$ נקרא חסם עליון של A אם הוא חסם מלעיל מינימלי. כלומר:

1) S הוא חסם מלעיל של A

2) לא קיים חסם מלעיל ל-A שקטן מ-S.

החסם העליון של A, מסומן כ- $S=\sup A$

עבור קבוצה A לא ריקה וחסומה מלרע, $S\in\mathbb{R}$ נקרא חסם תחתון אם S הוא חסם מלרע מקסימלי.

מסומן: $S=\inf A$

דוגמה: $A=[0,1]$, אז כל מספר $1\le x$ הוא חסם מלעיל בנוסף, לא קיים מספר $x<1$ שהוא חסם מלעיל. לכן $\sup A=1$. באופן דומה $\inf A=0$

דוגמה 2: $B(0,1)$ (קטע פתוח בין 0-1)

בסדר

בדיוק באותו אופן $\sup B=1$, $\inf B=0$

טענה (תרגיל בית)

אם לקבוצה A יש מקסימום $S=\max A$ אז S הוא גם חסם עליון של A.