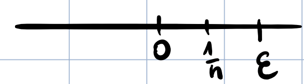
אקסיומת החסם העליון

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל יש חסם עליון.

מסקנה: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע יש חסם תחתון

מסקנה: $\mathbb{N}$ לא חסומה מלעיל ב-$\mathbb{R}$

טענה: לכל $0<\varepsilon$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$ $\varepsilon\in\mathbb{R}$



הוכחה: יהי $0<\varepsilon$. נניח בשלילה שלא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$. במילים אחרות

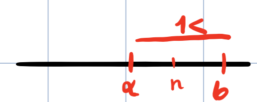
לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\varepsilon\le\frac{1}{n}$ או במילים אחרות לכל $n\in\mathbb{N}$,

$n\le\frac{1}{\varepsilon}$ (אחרי הכפלה וחילוק). כלומר $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא חסם מלעיל

של $\mathbb{N}$, בסתירה למסקנה. לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$

מסקנה: בכל קטע פתוח (a,b) שאורכו $|b-a|>1$ קיים טבעי $n\in\mathbb{N}$

כך ש- $n\in(a,b)$

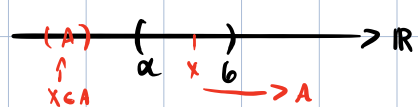


הגדרה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ נקראת קבוצה צפופה ב-$\mathbb{R}$, אם לכל קטע לא

מנוון $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, ק"מ $x\in A$ כך ש- $x\in(a,b)$. במילים אחרות לכל $a<b$ ממשיים

קיים $x\in A$ כך ש- $a<x<b$

* קטע לא מנוון - שהקצוות של הקטע לא שווים.



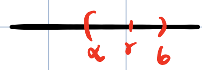
האם $A=\mathbb{N}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$?

דוגמה נגדית: עבור הקטע $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ לא קיים $y\in\mathbb{N}$ כך ש $y\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

משפט: $\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$

הוכחה: צריך להראות שלכל קטע $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ לא מנוון קיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש-

$r\in(a,b)$



יהי (a,b) קטע לא מנוון

מתכונת הארכימדיות קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{b-a}<n$

הופכי האורך של הקטע

נגדיר $a'=a\cdot n$, $b'=b\cdot n$

(המתיחה)

אז לקטע החדש (a',b') יש אורך: $|b'-a'|=b'-a'=n\cdot b-n\cdot a=n(b-a)$

$n>\frac{1}{(b-a)}>\frac{(b-a)}{(b-a)}=1$

כלומר לקטע (a',b') יש אורך גדול מ-1. מטענה קודמת, קיים מספר $m\in\mathbb{Z}$

כך ש- $m\in(a',b')$. כלומר: $na=a'<m<b'=nb$

נחלק ב-n ונקבל $a<\frac{m}{n}<b$

כלומר מצאנו $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ כך ש- $a<r<b$ מכיוון ש- $a<b$ שרירותיים,

קיבלנו שהרציונלים צפופים ב-$\mathbb{R}$.

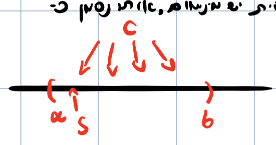
מסקנה: בכל קטע (a,b) לא ריק יש אינסוף מס' רציונלים

הוכחה: יהי $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ קטע לא ריק. נגדיר את הקבוצה $C\subseteq(a,b)$ קבוצת

כל המס' הרציונלים בקטע (a,b). רוצים להראות ש- C קבוצה אינסופית

נניח בשלילה ש- C היא סופית. לקבוצה סופית יש מינימום, אותו נסמן כ-

$S=\min C\in(a,b)$



מכך נובע ש- $a<S$. כלומר הקטע (a,S) לא מנוון ולכן קיים שם רציונלי

$r\in(a,S)$. כלומר $r\in C$. כי C מכילה את כל הרציונלים

ב-(a,b) אבל זו סתירה לכך ש- S הוא המינימום של C. לכן C אינסופית.

~מבוא ללוגיקה~

- כל משפט מתמטי יכול להיות נכון true או לא נכון false

- True, False נקראים ערכי אמת

למשל: הטענה הלוגית "1+1=2" היא True, בעוד ש-"1+1=3" היא False.

- טענה לוגית יכולה להיות משתנה חופשי (למשל x) כך שהטענה נכונה עבור x-ים מסוימים ולא נכונה עבור x-ים אחרים. למשל הטענה הלוגית "1+x=2" מקבלת ערך אמת T עבור $x=1$ ומקבלת שקר F עבור $x\neq1$.

- צריך לקבל טענות לוגיות חדשות מטענות קודמות ע"י קשרים (connections):

1. AND: בהינתן טענות לוגיות Q,P הטענה החדשה $Q\wedge P$ או Q and P מקבלת ערך אמת אמ"מ Q אמת וגם P אמת