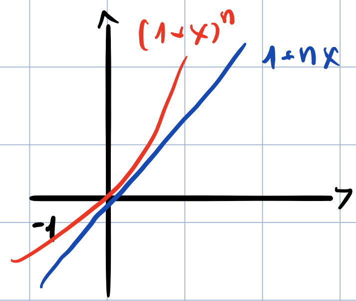
בס"ד כ"ג חשון התשפ"ה

אי שוויון ברנולי

לכל מספר ממשי $x \geq -1$ מתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$



הוכחה באינדוקציה:

מקרה בסיס: עבור $n=0$ מתקבל האי שוויון $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$

ששקול ל- $1 \geq 1$ שתמיד נכון. לכן מקרה הבסיס $n=0$ נכון.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה $(1+x)^k \geq 1+kx$

נכונה לכל $0 \leq k \leq n$ ונוכיח שהטענה $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

באופן שקול: נניח שהטענה. עבור $n \geq 0$ (מקרה בסיס) $(1+x)^n \geq 1+nx$

ונראה שגם הטענה $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ נכונה

1. מהנחת האינדוקציה

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

2. $(1+x) \geq 0$ לכל $x \geq -1$

$$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

$nx^2 \geq 0$

וגם מוכיח את צעד האינדוקציה

סדרות

הגדרה: סדרה היא התאמה של אינסוף מספרים ממשיים מקבוצת המס' הטבעיים.

$$1 \to a_1 \in \mathbb{R},\ 2 \to a_2 \in \mathbb{R},\ 3 \to a_3 \in \mathbb{R} \dots\ n \to a_n \in \mathbb{R}$$

a_1 (הוא) האיבר הראשון בסדרה, a_2 האיבר השני, וכו'

סימון $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2 \dots)$

בסדרה (בניגוד לקבוצה) סדר האיברים חשוב.

n ב- a_n נקרא האינדקס של איבר a_n

נאמר שסדרות $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שוות אם $a_n = b_n$ לכל $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

שימו ♥ כל סדרה היא אינסופית לא סדרה - $(1, 2, 2.5)$ כי היא סופית

ניתן גם להתחיל מאינדקס גדול מ-1 (או אפילו מ-0), למשל

$$(a_5, a_6, a_7, \dots) = (a_n)_{n=5}^{\infty}$$

n נקרא אינדקס סרק (damping index). הסדרה $(a_n)_{k=1}^{\infty}$ ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

זו בדיוק אותה סדרה

דוגמה 1: סדרה קבועה: עבור $S \in \mathbb{R}$, הסדרה $S, S, S \dots$ נקראות הסדרה

הקבועה עם ערך S וניתן להגדיר אותה באופן שקול ע"י כתיבה $a_n = S$ לכל $n \geq 1$

דוגמה 2: הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots$ נקראת הסדרה ההרמונית. איברה הכללי

הינו $a_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \geq 1$ / $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$

דוגמה 3: סדרה חשבונית (אריתמטית): עבור $a, d \in \mathbb{R}$, $a, a+d, a+2d, a+3d \dots$

$a_n = a+(n-1)d$ לכל $n \geq 1$

דוגמה 4: סדרה גאומטרית (הנדסית) · עבור $S \in \mathbb{R}$ $S, S^2, S^3 \dots$

$a_n = S^n$ לכל $n \geq 1$

נוסף

לפעמים מתחילים מאינדקס $n=0$, $1, q, q^2, q^3 \dots$

עבור $q=-1$ מתקבלת הסדרה:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}=(-1,1,-1,1\dots)$$

דוגמה 5: הגדרת סדרה ברקורסיה: למשל נגדיר $f_1=1$, $f_2=2$

ולכל $n\geq 3$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

סדרת פיבונצ'י, והיא שווה ל- $1,2,3,5,8,13$

חשוב להבדיל בין סדרה לבין קבוצת האיברים של סדרה.

למשל: $(a_n)_{n=1}^{\infty}=0,0,1,0,0,1\dots$

$(b_n)_{n=1}^{\infty}=1,1,0,1,1,0\dots$

אלו סדרות שונות. קבוצת איברי הסדרה היא הקבוצה

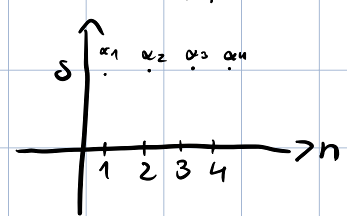
$$\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}=\{0,1\}$$

$$\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}=\{0,1\}$$

גבול של סדרה

רוצים למצוא הגדרה טובה (שימושית) לגבול של סדרה.

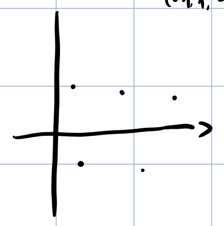
למשל, היינו רוצים להגיד שהסדרה הקבועה $a_n=q$ לכל n מתכנסת למספר q.



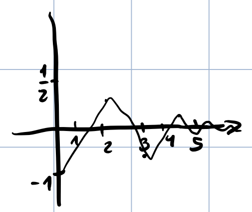
היינו רוצים להגיד שהסדרה ההרמונית $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ מתכנסת ל-0 למרות שהיא לא תקבל את הערך 0 לעולם.

מצד שני, הסדרה $(-1,1,-1,1\dots)$

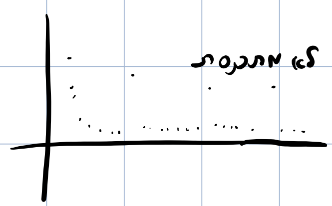
לא תהיה מתכנסת



עוד דוגמה לסדרה שהיינו רוצים להגיד שהיא מתכנסת: $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$



דוגמה אחרונה: לא מתכנסת



|