בס"ד ד' חשון התשפ"ה 5.11

בנית המספרים הממשיים $\mathbb{R}$:

• נק' התחלה: מס' טבעיים

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$$

שייך ל- $\mathbb{N}$

• $\mathbb{N}$ סגורה ל- $+$ ול- $\times$ (כפל)

• $\mathbb{N}$ לא סגורה לחיסור. אין פתרון ל- $x+1=0$, $x\in\mathbb{N}$

• **PI: חילופיות**

לכל $x,y\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$x\cdot y=y\cdot x$$

$$x+y=y+x$$

• **PII: קיבוציות**

לכל $x,y,z\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z$$

• **PIII: פילוג**

לכל $x,y,z\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$x(y+z)=xy+xz$$

שאלה: האם מתקיים?

$$x+yz=(x+y)(x+z)$$

לא

• **PIV: המספרים המיוחדים 0 ו-1**

לכל $x\in\mathbb{N}$ $\quad x+0=x \quad x\cdot 1=x$

נקראים איברים נטרליים לחיבור וכפל בהתאמה.

כאמור, אין פתרון $x\in\mathbb{N}$ כש- $x+1=0$

• נרחיב את $\mathbb{N}$ למספרים השלמים $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

• **PV: מספר נגדי.** לכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים מספר $y\in\mathbb{Z}$ כך ש: $x+y=0$

את הפתרון y של המשוואה מסמנים כ- $y=(-x)$

זה מגדיר את פעולת החיסור

$$x-y=x+(-y)$$

$\mathbb{Z}$ לא סגורה לחילוק. בפרט, אין פתרון $y\in\mathbb{Z}$ למשוואה $2\cdot y=1$

באופן כללי, לא לכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים $y\in\mathbb{Z}$ כך שמתקיים $x\cdot y=1$

בס"ד

~ המספרים הרציונליים ~

מסומנים באות $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\right\}$$

• **PVI:** $\mathbb{Q}$ סגורה לחילוק לכל מס' רציונלי $0\neq r\in\mathbb{Q}$ קיים מספר רציונלי $r^{-1}\in\mathbb{Q}$ כך ש: $r\cdot r^{-1}=1$

- r^{-1} מסומן גם כ- $\frac{1}{r}$ או $1/r$
- r^{-1} נקרא האיבר ההופכי ל-r.

נשים ♡ שלמספר רציונלי $r\in\mathbb{Q}$ אין הצגה יחידה כ- $\frac{m}{n}$. למשל: $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ הוא שווה ל- $\frac{2}{4}$ וגם $\frac{122}{144}$ ... למעשה יש אינסוף "הצגות" לכל מספר רציונלי.

• לכל מס' רציונלי r יש "הצגה" שקול כ- $r\cdot\frac{l}{l}=\frac{m\cdot l}{n\cdot l}$ כאשר $l\in\mathbb{Z}$

אבל לכל מספר רציונלי $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ ישנה הצגה יחידה שמקיימת

1. $n>0$
2. $n\in\mathbb{Z}$ הוא הקטן ביותר כך ש- $r=\frac{m}{n}$

למשל: $\frac{-7}{-14}$ ההצגה המינימלית שלו הוא $\frac{-1}{2}_{n>0}$

• **PVII:** לכל x,y מתקיים אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות:

1. $x<y$ 2. $x=y$ 3. $x>y$

• **PVIII:** לכל x,y,z אם $x<y$ וגם $y<z$ אז $x<z$

• **PIX:** לכל מספר a, אם $x<y$ אזי $x+a<y+a$

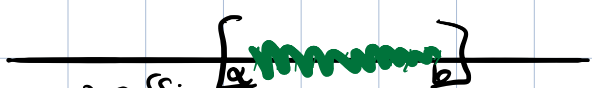
• **PX:** אם $x>0$ וגם $x<y$ אזי $ax<ay$

לשים ♡ שהאי-שוויון נכון רק עבור $a>0$
לדוגמה: $1<2$, $a=4$ $1\cdot 4<2\cdot 4$

קטעים ב- $\mathbb{R}$:

• עבור $a\leq b$

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$$



כולל הקצוות

$[a,b]$ נקרא קטע סגור.

• עבור $a<b$ $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$

לא כולל קצוות

(a,b) נקרא קטע פתוח

(אם $a=b$ אז $(a,b)=\emptyset$)

(המשך ->)

בס"ד

$[a,b) = \{x\in\mathbb{R} : a\le x<b\}$

$(a,b] = \{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\}$

קטעים אלו נקראים <u>חצי</u> פתוחים.

- קטע נקרא לא מנוון (אין נפח) אם $a<b$

נשים ♡ שכל קטע לא מנוון מכל אינסוף מספרים למשל $(1,2)$ יש אינסוף מספרים. לעומת זאת הקטעים

$(a,a)=\emptyset,\ [a,a)=\emptyset\ (a,a]=\emptyset$

קטעים מנוונים $[a,a]=\{a\}$

רק כש $a=b$ הקטע מנוון

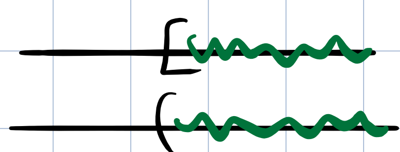
* אינסוף ∞ <u>אינו מספר</u>, כלומר

לא ניתן לרשום $\infty\in\mathbb{R}$

קרן ב- $\mathbb{R}$:

$[a,\infty) = \{x\in\mathbb{R} : a\le x\}$

$(a,\infty) = \{x\in\mathbb{R} : a<x\}$



כנ"ל: $(-\infty,a), (-\infty,a]$

בפרט $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

* $\le$ - [יש גבול } לכן אוחזי ∞ לא יכול

$<$ (אין גבול להגיע [

הגדרה: בהינתן קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ (מוכלת) ו- $S\in\mathbb{R}$ (שייכת)

S נקרא המקסימום של A אם מתקיימים 2 התנאים הבאים:

1. לכל $x\in A$, $x\le S$
2. $S\in A$ (המקסימום מסומן ב- $\max A$. באופן דומה מגדירים מינימום)

דוגמה: $A=[1,2]$ אז $\max A=2$

מכיוון שלכל $x\in A$ מתקיים $x\le 2$ ובנוסף $2\in A$.

לעומת זאת לקטע $[1,2)$ אין מקסימום

תנאי 1 מתקיים אבל תנאי 2 לא מתקיים

שכן $2\notin[1,2)$