בס״ד ג׳ כסלו התשפ״ה

גבול של סדרה

תזכורת: הגדרה של גבול של סדרה:

סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת למספר L אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$

דוגמה: $C_n=\frac{n^2+n-1}{n^2+1}$. רוצים להראות ש- $\lim_{n\to\infty}=1$.

יהי $\varepsilon>0$. צריך להראות שקיים N כך שלכל $N<n$ ⟸ $|C_n-1|<\varepsilon$

נשים ♡ ש-

$$C_n=\frac{n^2+n-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-1+n-1}{n^2+1}=$$

$$=\frac{n^2+1}{n^2+1}+\frac{n-2}{n^2+1}=\underbrace{1}_{\text{הגבול}}+\underbrace{\frac{n-2}{n^2+1}}_{\text{סדרה שהולכת ל-0}}$$

צריך להראות שקיים N כך שלכל $N<n$ כך ש-

$$|C_n-1|=\left|1+\frac{n-2}{n^2+1}-1\right|=$$

$$=\frac{|n-2|}{|n^2+1|}<\varepsilon$$

בהמשך, נבחר $N>1$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|n-2|=n-2$

צריך להראות שלכל $N<n$, $\frac{n-2}{n^2+1}<\varepsilon$.

נשים ♡ ש-

$$0\leq\frac{n-2}{n^2+1}<\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

אם נמצא N כך שלכל $N<n$, $\frac{1}{n}<\varepsilon$ אז גם $\frac{n-2}{n^2+1}$.

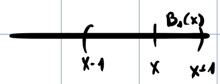
נבחר $\frac{1}{\varepsilon}$ N ואז לכל $N<n$,

$$\frac{n-2}{n^2+1}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leq\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}=\varepsilon$$

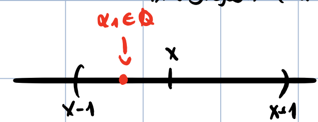
דוגמה: יהי $x\in\mathbb{R}$. קל להראות שקיימת סדרה שמתכנסת ל-x (למשל $a_n=x$ לכל n)

רוצים להראות שלכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת סדרה של רציונליים $a_n\in\mathbb{Q}$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}a_n=x$

נסתכל על סדרת הסביבות $B_{\frac{1}{n}}(x)$: $\overset{a_1}{B_1(x)},\overset{a_2}{B_{\frac{1}{2}}(x)},\overset{a_3}{B_{\frac{1}{3}}(x)},\ldots$



מכיוון ש- $B_{\frac{1}{n}}(x)$ הוא קטע פתוח לא מנוון, אז מצפיפות הרציונליים ב-$\mathbb{R}$, קיים רציונלי $a_n\in B_{\frac{1}{n}}(x)$ כאשר $a_n\in\mathbb{Q}$. נשאר להראות שהסדרה שבנינו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-x.



כדי להראות ש-a_n אכן מתכנסת ל-x, נשים ♡ שלכל n, $|a_n-x|\underset{!}{<}\frac{1}{n}$

$(a_n=B_{\frac{1}{n}}(x))$

בהינתן $\varepsilon>0$, צריך להראות שקיים N כך שעבור כל $N<n$, $|a_n-x|<\varepsilon$

עבור $N\geq\frac{1}{\varepsilon}$ מתקיים שלכל $N<n$, $\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leq\varepsilon$ ולכן $N<n$

$|a_n-x|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leq\varepsilon$ (בניית הקבוצה), כלומר $\lim_{n\to\infty}a_n=x$

יחידות גבול של סדרה

משפט: אי - שוויון המשולש

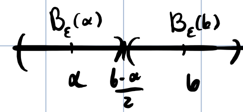
לכל 2 מספרים, $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x+y|\leq|x|+|y|$

ושוויון מתקיים אמ״מ ל- x,y יש את אותו סימן (חיובי או שלילי)

כסר

למה (טענת עזר): לכל $a\neq b$ מספרים ממשיים, קיים $\varepsilon>0$ כך ש-

הסביבות $B_\varepsilon(a)$ ו-$B_\varepsilon(b)$ הן זרות, כלומר $B_\varepsilon(a)\cap B_\varepsilon(b)=\emptyset$



$a\neq 0$

נבחר $\varepsilon=\frac{b-a}{2}>0$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $a<b$

נניח בשלילה שקיים x כך ש- $x\in B_\varepsilon(a)\cap B_\varepsilon(b)$

כלומר $|x-a|<\varepsilon$ וגם $|x-b|<\varepsilon$.

נשים ♥ ש- $2\varepsilon=|b-a|=|b-x+x-a|\overset{\text{אי-שוויון המשולש}}{\leq}|b-x|+|x-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

כלומר קיבלנו $2\varepsilon<2\varepsilon$ וזו סתירה!

לכן עבור $\varepsilon=\frac{|b-a|}{2}$, $B_\varepsilon(a)\cap B_\varepsilon(b)=\emptyset$

(זה נכון לכל $\varepsilon\leq\frac{|b-a|}{2}$)