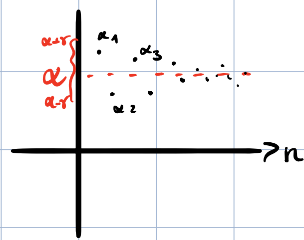
בס"ד חשוון, התשפ"ה

גבול של סדרה

סדרה מתכנסת: נאמר שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת למספר a אם לכל סביבה של a, כל איברי הסדרה החל ממקום מסוים נמצאים בסביבה



כאשר סביבה עם רדיוס $r>0$ סביב a היא הקבוצה

* הרדיוס קובע את גודל הסדרה $$B_r(a)=\{x\in\mathbb{R} : |x-a|<r\}$$

הגדרה שקולה להתכנסות סדרה: הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-a אם לכל רדיוס $\varepsilon>0$.

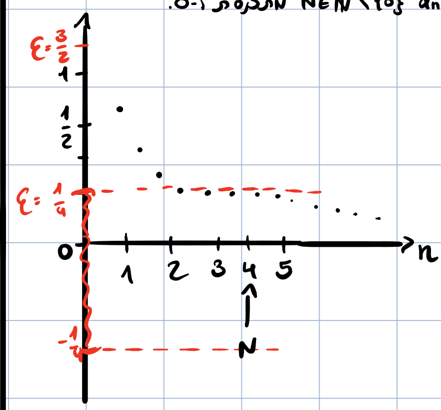
קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$ ← המרחק של a_n מ-a קטן מ-ε.

$$a_n\in B_\varepsilon(a)$$

כתיב לוגי:

$$\left(\lim_{n\to\infty}a_n=a\right) \iff \left(\forall_{\varepsilon>0}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall_{n>N}\ |a_n-a|<\varepsilon\right)$$

דוגמה: נראה שהסדרה $a_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ מתכנסת ל-0.



$\varepsilon=\frac{1}{10}$, $N=10$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$. צריך להראות שקיים N כך שעבור כל $N<n$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$

$(|a_n-a|<\varepsilon)$ (0 הוא הגבול)

מכיוון ש-$\frac{1}{n}>0$ אז התנאי האחרון שקול ל-$\frac{1}{n}<\varepsilon$

כלומר, צריך להראות שקיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים $\frac{1}{n}<\varepsilon$

$\frac{1}{n}<\varepsilon$ שקול ל-$\frac{1}{\varepsilon}<n$ (הכפלה והעברת אגפים). נבחר את N להיות טבעי כך ש-$\frac{1}{\varepsilon}<N$

(N כזה קיים מתכונת הארכימדיות).

לכן, לכל $N<n$, מתקיים $\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$

דוגמה: נראה שהסדרה $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנסת ל-0.

צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $N<n$ $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|<\varepsilon$

התנאי האחרון שקול ל-$\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ $\qquad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\frac{|(-1)^n|}{n^2}=\frac{1}{n^2}$

צריך להראות שקיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$. כלומר:

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}<n^2 \iff \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<n.$$

נבחר $N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ טבעי (N קיים מתכונת הארכימדיות)

ואז יתקיים שלכל $n>N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{N^2}<\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2}=\varepsilon$$

דוגמה: $C_n=\frac{n^2+n-1}{n^2+1}$

נשים ♡ ש-

$$\frac{n^2+n-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-1+n-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1}{n^2+1}+\frac{-1+n-1}{n^2+1}=1+\frac{n-2}{n^2+1}$$

$C_n=1+\frac{n-2}{n^2+1}$ מתכנסת ל-0 כי המכנה גדול מהמונה אז הביטוי הולך וקטן.

בס"ד

נראה ש-(c_n) מתכנסת ל-1.

צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$: $\left|\cancel{1}+\frac{n-2}{n^2+1}-\cancel{1}\right|<\varepsilon$

$$\Updownarrow$$

צריך למצוא N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $\frac{|n-2|}{|n^2+1|}<\varepsilon$

נגביל את עצמינו ל- $N>2$ כך שעבור $n>N$, $|n-2|=n-2\le n$

לכן, עבור $n>N>2$ צריך למצוא N כך ש:

$$\frac{|n-2|}{|n^2+1|}=\frac{n-2}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}$$

בנוסף, $n^2+1>n^2 \Leftarrow$ $\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$