Reporte

Solución Numérica de Ec. Diferenciales Parciales

Alumna: Elizabeth Torres Torrecillas

Profesor: Carlos Lizarraga Celaya
Física Computacional

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Licenciatura en Física

Cuarto Semestre
Exp. 219213622

5 de mayo de 2021

1. Introducción

El presente reporte consta de sintetizar y fundamentar las actividades 10, 11 y 12 realizadas anteriormente. Estas tuvieron como objetivo el obtener oluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales utilizando el Método de Diferencias Finitas.

Sabemos que el estudio de Las Ecuaciones Diferenciales Parciales es un área fundamental de las matemáticas. Siendo que su concepción y comprensión la base de las ciencias modernas, especial y como fundamento para la comprensión de la relatividad general, mecánica cuántica, electromagnetismo, termodinámica, entre muchas más.

La popularidad y éxito del uso de las ecuaciones diferenciales parciales es que a partir de ellas hemos logrado modelar una enorme diversidad de fenómenos físicos, biológicos, químicos, economía e innovaciones en la ingeniería, entre otras más.

Es por ello, la importancia de su estudio y concepción para lograr avanzar tanto en la ciencia como en sus aplicaciones. Siendo así, debemos solidificar nuestras bases en dicho ámbito, lograr su clasificación, resolución analítica o numérica y lograr un óptimo análisis de sus resultados.
En las actividades realizadas, nos enfocamos en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales con base en un método numérico.

2. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Tenemos que una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

Nuestro enfoque es las ecuaciones diferenciales parciales, entonces por definición tenemos que una ecuación diferencial parcial es aquella ecuación que involucran a las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.

Tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales de segundo orden se clasifican habitualmente dentro de cinco tipos de EDP que son de interés fundamental. Empero, dichos tipos son clasificados en tres grandes familias.

De forma general, si se tiene una EDP de segundo orden de la forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial x} + E\frac{\partial^2 u}{\partial y} + F = 0$$

con $A \neq 0$

A las EDP de este tipo se les conoce como EDP de segundo orden lineales de dos variables independientes.
A partir del determinante la matriz de coeficientes, $\Delta = B^2 - AC$, a continuación se presentan características de clasificación que deben cumplir para pertenecer a alguna de ellas:

Tenemos que para:

- Si $\Delta < 0$, pertenece a una EDP Elíptica
- Si $\Delta = 0$, pertenece a una EDP Parabólica
- Si $\Delta > 0$, pertenece a una EDP Hiperbólica

- **Parabólica** Como se mencionó, una EDP se considera de tipo Parabólica si su determinante de coeficientes es igual a 0. Siendo $B^2 - AC = 0$
  Este tipo de EDP comunmente se utilizan para describir fenómenos que involucren conducción y difusion térmica para describir la distribución de calor dependiente del tiempo, además tienen la característica de que sus derivadas son siempre continuas.

- **Hiperbólica** Como se mencionó, una EDP se considera de tipo Hiperbólica si su determinante de coeficientes es positivo. Siendo $B^2 - AC > 0$
  Este tipo de EDP comunmente se utilizan para describir fenómenos oscilatorios, vibraciones de cuerdas, membranas y radiaciones electromangéticas.

- **Elíptica** Como se mencionó, una EDP se considera de tipo Hiperbólica si su determinante de coeficientes es negativo. Siendo $B^2 - AC < 0$
  Este tipo de EDP comunmente se utilizan para describir fenómenos independientes del tiempo. Tenemos que resaltar que estas ecuaciones no tienen curvas características reales, curvas a las cuales no es posible eliminar al menos la segunda derviada de u. Es por ello que las EDP elípticas son óptimas para describir estados de equilibrio, donde las discontinuidades ya se han suavizado.

Tres tipos de condiciones a la frontera

Las condiciones a la frontera son ciertas circunstancias que se les debe satisfacer la frontera de nuestro objeto de estudio que es modelado por la EDP.
De la mano con estas, se brinda información sobre la unicidad y existencia de las soluciones de dichas EDP. De forma qu hay distintos tipos de condiciones de frontera.

- **Dirichlet** Sea Ω un conjunto abierto de R^n para $n > 1$, siendo la frontera $\partial\Omega$
  Este tipo de condición de fontera se presenta cuando una ecuación diferencial ordinaria o una de sus derivadas parciales, se le especifícan los valores de la solución que debe satisfacer la frontera del dominio.

  Para las ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos dos condiciones de la forma:

  $$y(0) = \alpha_1$$

  $$y(1) = \alpha_2$$

  Mientras para las EDP tenemos que existen dos tipos de EDP de Dirichlet:

  - Dependiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Dirchlet de la forma:

    $$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) : (\vec{x}, t) \in \partial\Omega XI$$

    Donde el intervalo $I \in R$ y $g : \partial\Omega XI$ es una función conocida.
  - Independiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Dirchlet de la forma:

    $$u(\vec{x}) = g(\vec{x}) : \vec{x} \in \partial\Omega$$

- **Neumann** Sea Ω un conjunto abierto de R^n para $n > 1$, siendo la frontera $\partial\Omega$
  Este tipo de condición de fontera se presenta cuando una ecuación diferencial ordinaria o una de sus derivadas parciales, se le especifícan los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera del dominio.

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos dos condiciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx}(0) = \alpha_1$$
$$\frac{dy}{dx}(1) = \alpha_2$$

Mientras para las EDP, tenemos que existen dos tipos de EDP de Neumann:

- Dependiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Neumann de la forma:

$$\Delta u(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\vec{x}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}, t) : (\vec{x}, t) \in \partial\Omega XI$$

  Donde el intervalo $I \in R$

- Inependiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Neumann de la forma:

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot \mathbf{n}(\vec{x}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}) : \vec{x} \in \partial\Omega$$

  Donde $\mathbf{n}$ representa un vector normal a la frontera de Ω

- **Robin (mixto)** Este tipo de condición de frontera se representa como una combinación lineal de las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann con constantes reales.
  Es el constraste de las condiciones de fronteras mixtas, siendo formada por de distintos tipos, especificadas en diferentes subconjuntos de frontera.

  Sea Ω un conjunto abierto de R^n para $n > 1$, siendo la frontera $\partial\Omega$, entonces su condición de frontera :

  - Dependiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Robin de la forma:

$$au(\vec{x}, t) + b\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = g$$

    Donde $\mathbf{n}$ representa un vector normal a la frontera de Ω

  - Independiente del tiempo Siendo la condición de frontera de Robin de la forma:

$$au(\vec{x}) + b\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \mathbf{n}} = g : (\vec{x}, t) \in \partial\Omega XI$$

    Donde el intervalo $I \in R$

3. Método de Diferencias Finitas

El método de Diferencias Finitas es un método numérico para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales, este surge de una expansión del polinomio de Taylor de la función escalar u.

Dicho método consiste en discretizar tanto el dominio espacial como el intervalo temporal, para con ello resolver ecuaciones de diferencias finitas y los alrededores de estas.
Si nos encontramos analizando una dimensión espacial, para facilitarnos la comprensión de ello podemos interpretarlo como una malla discretizada cuyas coordenadas son espaciales y temporales, estas se resuelven a partir del uso de los puntos del alrededor de este.

La aproximación numérica por diferencias finitas es escencial en el método de diferencias finitas para con ello lograr una resolución de las ecuaciones diferenciales parciales. El valor de la solución en los puntos discretos, se aproxima resolviendo ecuaciones algebraicas que contiene diferencias finitas y valores de puntos del alrededor.

4. Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

- Solución de la Ecuación de Calor

  La ecuación de calor unidimensional es una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico, descrita como:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  De forma que aplicando la aproximación de la segunda derivada espacial mediante Series de Taylor, utilizando una diferencia finita centrada de segundo orden:

  $$f^{''}(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + O(h^3)$$

  A partir del tipo de condición de frontera dado, podemos continuar. Por ejemplo, de los vistos en clase, tenemos que para el tipo de Dirichlet, se especifican los valores de la función solución en las fronteras.

  Mientras para el tipo Neumann, se necesita realizar una aproximación numérica finita de la primera derivada espacial. Además debemos hacer la consideración de que $U_{N+1} = U_{N-1}$

  Sin embargo, tenemos que formalmente u_{N+1} se encuentra fuera de nuestro dominio, entonces utilizamos lo siguiente para determinar la ecuación que satisface la frontera, reemplazando $U_{N+1} = U_{N-1}$ en la ecuación de calor obtenida. Tenemos que la condición de frontera tipo Neumann es de la forma:

  $$\frac{du_{N(t)}}{dt} = \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}$$

  Una vez obtenida la expresión para encontrar diferencias finitas con las condiciones iniciales y a la frontera, utilizamos un algoritmo para encontrar la solución. Los cuales se encuentran desarrollados en el siguiente hipervínculo:

  Actividad 10

- Solución de la Ecuación de Onda

  La ecuación de calor unidimensional es una ecuación diferencial parcial del tipo hiperbólico, descrita como:

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

  En este tipo de problema, para la resolución es necesario tener dos condiciones iniciales y dos condiciones de frontera.

  De forma que aplicando la aproximación de la segunda derivada espacial, utilizando una diferencia finita centrada de segundo orden en un punto de la malla discreta (x,t):

  $$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t+k)}{k^2} = c^2\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

  Siendo h el incremento en la dirección x y k el intervalo de tiempo.

  Esta define un esténcil computacional de 5 puntos, entonces con ello podemos determinar los valores de $u(x,t)$ en el espacio discretizado.

Calculamos el primer nivel de $u(x,k)$ en $t = k$ a partir de la información dada de la condición inicial. Después, tendremos la capacidad de calcular los valores futuro de $u(x, t+k)$ siendo que los valores $u(x,t)$ y $u(x, t-k)$ son conocidos.

Para simplificar la notación, definimos $u(x,t) = u(jh, nk) = u_j^n$, entonces podemos reescribir la ecuación de onda al aplicar el método de diferencias finitas como:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

Despejando u_j^{n+1} tenemos que:

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + c^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Hacemos la consideración para la condición incial de que:

$$u_j^1 = u_j^{-1}$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 + \frac{c^2}{2}(u_0^{j+1} - 2u_0^j + u_0^{j-1})$$

Una vez obtenida la expresión para encontrar diferencias finitas con las condiciones iniciales y a la frontera, utilizamos un algoritmo para encontrar la solución. Los cuales se encuentran desarrollados en el siguiente hipervínculo: Actividad 11

- Solución de la Ecuación de Poisson

  Siendo la Ecuación de Poisson de la forma:

$$-\Delta^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

Aplicando el Método de Diferencias Finitas, simplificando y eliminando errores no considerables, siendo de orden superior tenemos que:

$$-\left(\frac{u_{i+1,k} + u_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{u_{i,k+1} + u_{i,k-1}}{h_y^2}\right) + 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) u_{i,k} = f_{i,k}$$

Si se tiene una malla de valores (x,y) equiespaciada, entonces $h_x = h_y = h$ y teniendo que:

$$4u_{i,k} - u_{i-1,k} - u_{i,k-1} - u_{i,k+1} = h^2 f_{i,k}$$

Esta define un esténcil computacional de 5 puntos, de donde se concluye una expresión que involucra dicho esténcil, considerando los demás valores de la malla se puede concluir con un sistema de ecuaciones lineales.
Una vez obtenida la expresión para encontrar diferencias finitas con las condiciones iniciales y a la frontera, utilizamos un algoritmo para encontrar la solución. Los cuales se encuentran desarrollados en el siguiente hipervínculo: Actividad 12

5. Resumen y Conclusiones

Para lograr la resolución de EDP de segundo orden, estudiamos el método numérico de diferencias finitas y lo implementamos en el código de programación Python.
En lo que nos basamos dentro del código es clasificando dentro de las tres grandes familias de EDP (hiperbólica, elíptica, parabólica), dependiendo del valor que resulte en el determinante de la matriz de coeficientes.
El método de diferenicas finitas como se mencionó con anterioridad, consiste en la discretización del intervalo temporal y del dominio espacial, siendo que gracias a dicho método podemos encontrar una solución si conocemos las condiciones iniciales o de frontera (Dirichlet, Neumann, Robin) a partir de pasos temporales y espaciales.

Dentro de las actividades, estudiamos EDP de bastante relevancia en el ámbito y sus condiciones de frontera.
Se observó la utilidad del método y su eficacia para resolver problemas reales que se nos presentan en el ámbito de las ciencias. Sin embargo, pudimos notar que es un tema complicado y es necesario tener una base teórica bastante sólida para comprender como estas funciones es que realmente funcionan y poder utilizarlas en futuros problemas.

6. Bibliografía

Ecuaciones Diferenciales Parciales
Método de Diferencias Finitas
Métodos Numericos para Ecuaciones Diferenciales Parciales
Ecuación de Calor
Ecuación de Onda
Ecuación de Poisson
Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica
Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica
Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas, Elípticas y Parabólicas
Introducción a Ecuaciones Diferenciales Parciales