Исследовательская работа по теме "Линейная алгебра"

Группа М3103
Кравченкова Елизавета
Родецкий Никита
Смирнов Максим

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Линейная алгебра
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

1 декабря 2022 г.

Оглавление

1 Задача 1 **3**

1.1 Найдите базис подпространства, которое задаётся системой $AX = 0$. Изобразите графически подпространство решений это системы 3

1.2 Проверьте совместность и неопределённость системы $AX = B$. Найдите множество всех решений этой системы и изобразите его на том же графике 4

2 Задача 2 **5**

2.1 L - линейное пространство матриц второго порядка, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 5

2.2 L - пространство многочленов степени не больше четырёх, $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ 6

3 Задача 3 **7**

3.1 Найдите систему линейных уравнений подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A}$ 7

4 Задача 4 **8**

4.1 Покажите, что каждая из систем образует базис в пространстве L 8

4.2 Проверьте каждый из этих базисов на ортогональность и ортонормированность 8

4.3 Вектор x в базисе $\mathcal{B}$ имеет координаты $x_{\mathcal{B}}$. Найдите его кооординаты $x_{\mathcal{A}}$ в базисе $\mathcal{B}$ 9

4.4 Проиллюстрируейте на графике разложение вектора x по векторам базиса $\mathcal{A}$ . . 9

5 Выводы **10**

6 Оценочный лист **11**

Задача 1

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

1.1

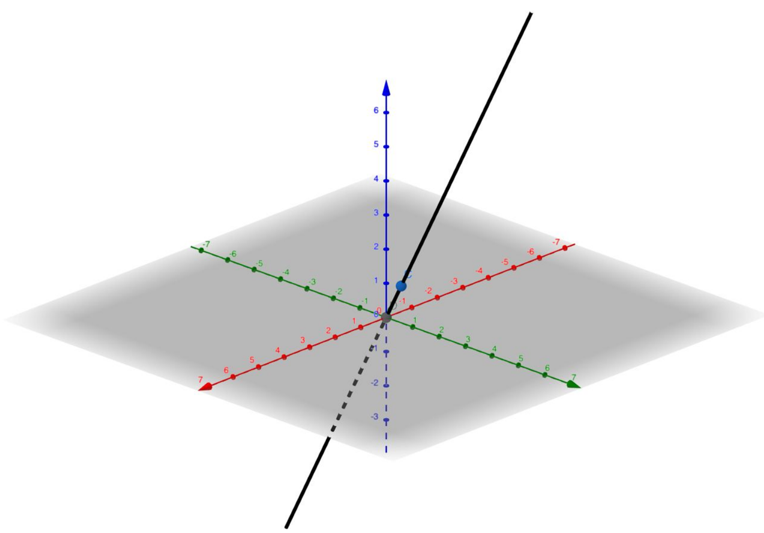
$AX = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{7}x_3 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 1$, тогда базис равен $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$.



1.2

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

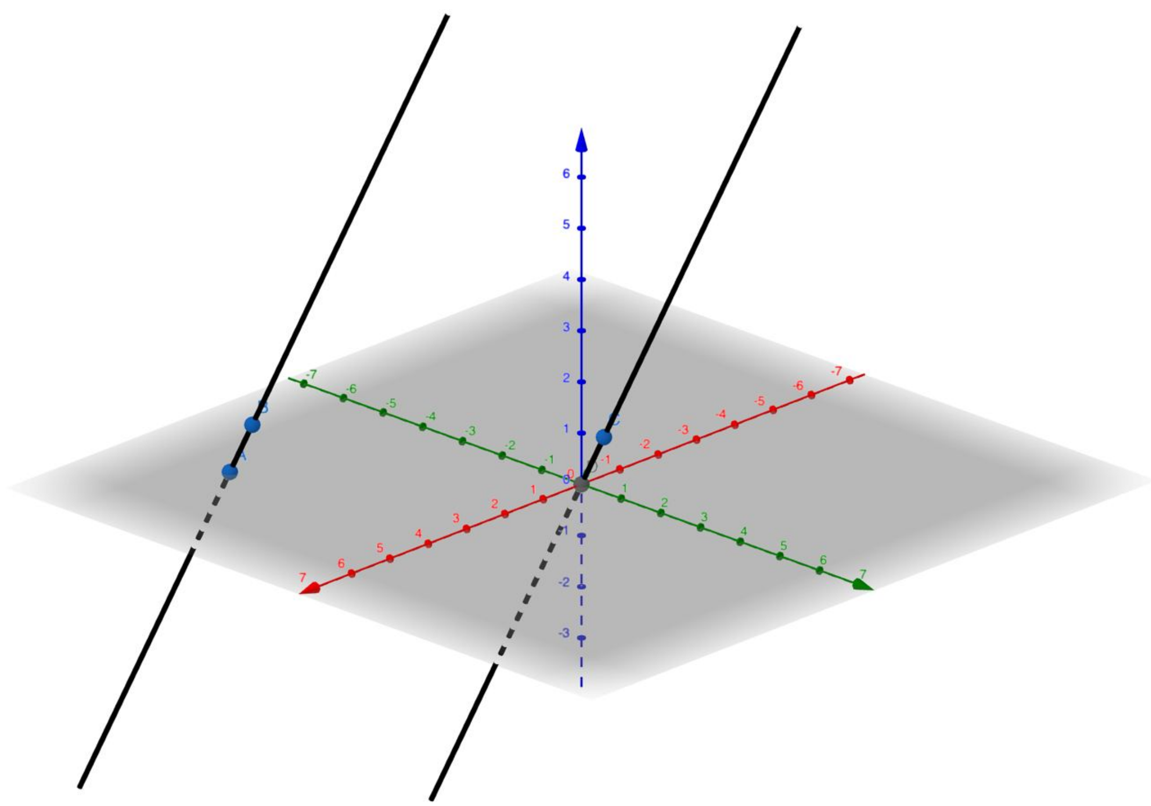
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Так как $rang\ A = rang\ A|B$, то матрица совместна.
x_3 - свободный член. Матрица имеет бесконечное множество решений, то есть она неопределённая.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 7x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}x_3 + 4 \\ x_2 = \frac{3}{7}x_3 - 5 \end{cases}$$

Из этого мы получаем что общее решение равно $\alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$



Задача 2

Дана система $\mathcal{A}$ элементов линейного пространства L. Докажите, что она является базисом в этом пространстве. Найдите в этом базисе координаты элемента x.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$e_1 = 1, e_2 = 1 + t, e_3 = 1 + t + t^2, e^4 = 1 + t + t^2 + t^3, e^5 = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4, x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1.$

2.1

Для удобства припишем вторую строчку матриц к первой (так можно сделать, потому что арифметические операции выполняются только с элементами, находящимися на одинаковых позициях в матрицах) и проверим являются ли полученные векторы линейно независимыми.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица приведена к трапециевидному виду. Ненулевые строки образуют базис. А значит и начальные векторы(матрицы) образуют базис. Что и требовалось доказать.

Найдем координаты x. Это такие α, β, γ, δ, что выполняется следующее равенство:
(в раз запишем строки как столбцы, так приятнее глазам)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + \delta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha - \beta - \delta = 4 \end{cases}$$

Получим координаты $x(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1)$

2.2

Если в многочлене присутствует t в i степени, то запишем в вектор-строке для этого многочлена на $i+1$ позиции (нумерация с 1) $1 \cdot a_j$, где a_j - коэффициент при этом многочлене. Тогда систему $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

По данной матрице видно, что векторы в ней линейно независимы (так как i+1 столбец показывает наличие степени i, то понятно, что отсюда следует, что никакой элемент из $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ нельзя выразить через другой. А значит они образуют базис. Что и требовалось доказать.

Найдем координаты $x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
Представим x в том же виде, что и $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ в начале решения. Тогда координаты x это такие α, β, γ, δ, λ, что выполняется следующее равенство:
(Как и в прошлом пункте для удобства запишем строки в виде столбцов)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \lambda = 1 \\ \beta + \gamma + \delta + \lambda = -1 \\ \gamma + \delta + \lambda = 1 \\ \delta + \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Получим координаты $x(2, -2, 2, -2, 1)$

Ответ:
2.1$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1)$
2.2 (2, -2, 2, -2, 1)

Задача 3

Найдите систему линейных уравнений подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1

Линейная оболочка пространства $\mathcal{L}$ задает подпространство $\mathcal{L}$. Подпространства, также являющиеся в свою очередь линейными пространствами, равны, если равны их базисы.

Преобразуем матрицу $\mathcal{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы. И векторы в последней матрице в преобразовании образуют базис подпространства, задающегося линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A}$. Значит через них можно выразить все элементы этого подпространства.

Рассмотрим систему уравнений с четырьмя неизвестными $BX = 0$. Где $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$
Убедимся, что базис подпространства решений этой системы совпадает с базисом линейной оболочки $\mathcal{A}$.
Решим эту систему:
Так как уравнение одно, а неизвестных 4, то образуются 3 свободные переменные.
$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$. Тогда $x_4 = \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma$
Фундаментальная система решений выглядит так:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Линейная оболочка системы из этих векторов образует пространство решений данного уравнения. Данные векторы являются в ней базисом.

Так как базисные векторы в пространстве решений и в линейной оболочке системы векторов $\mathcal{A}$ совпадают, данная система уравнений удовлетворятворяет условию задачи.

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 0 \right.$

Задача 4

В линейном пространстве L со стандартным базисом $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\right\}$ заданы системы векторов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

$$a_1 = \begin{pmatrix}0,3536\\0,9268\\0,1268\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}-0,6124\\0,1268\\0,7803\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}0,7071\\-0,3536\\0,6124\end{pmatrix}.$$
$$b_1 = \begin{pmatrix}-0,8712\\-1,0267\\2,0462\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1,9319\\1,5999\\-1,307\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}-2,3801\\2,1143\\-0,93\end{pmatrix}, x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2,6\\1,7\\1,2\end{pmatrix}.$$

4.1

Посчитаем детерминант каждой системы матриц

$$\det A = \begin{vmatrix}0.3536 & 0.9268 & 0.1268\\-0.6124 & 0.1268 & 0.7803\\0.7071 & -0.3536 & 0.6124\end{vmatrix} \approx 1.000053$$
$$\det B = \begin{vmatrix}-0.8712 & -1.0267 & 2.0462\\1.9319 & 1.5999 & -1.307\\-2.3801 & 2.1143 & -0.93\end{vmatrix} \approx 10.000024$$

Определитель каждой из матриц не равен 0 $\Rightarrow rangA = rangB = 3 \Rightarrow$ каждая система образует базис в пространстве L, т. к. L имеет размерность 3, и A, и B имеют ту же размерность. (Получается максимальная по включению система линейно независимых)

4.2

Проверим на линейную зависимость найдя скалярное произведения векторов:
$a_0 \cdot a_1 \approx -8.44$ $\quad b_0 \cdot b_1 \approx -6$
$a_0 \cdot a_2 \approx -3.36$ $\quad b_0 \cdot b_1 \approx -6$
$a_1 \cdot a_2 \approx -8.8$ $\quad b_1 \cdot b_2 \approx 6.34$
Из этого следует, что для любой системы любые 2 вектора не ортогональны, т. к. скалярные произведения не равны 0 следовательно, они не могут быть ортонормированными.
$a_0 \cdot a_0 = 1.00006944$ $\quad b_0 \cdot b_0 \approx 6$
$a_1 \cdot a_1 = 0.99998009$ $\quad b_1 \cdot b_1 \approx 8$
$a_2 \cdot a_2 = 0.99991572$ $\quad b_2 \cdot b_2 \approx 11$
Из этого следует что обе системы не ортонормированы.

4.3

Найдём обратную матрицу для матрицы B т. к. она является матрицей перехода из базиса B в стандартный базис.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.12754801 & 0.4907446 & 0.78925193 \\ 0.33714416 & 0.56803631 & 0.42856166 \\ -0.19318139 & 0.28143887 & 0.05896474 \end{pmatrix}$$

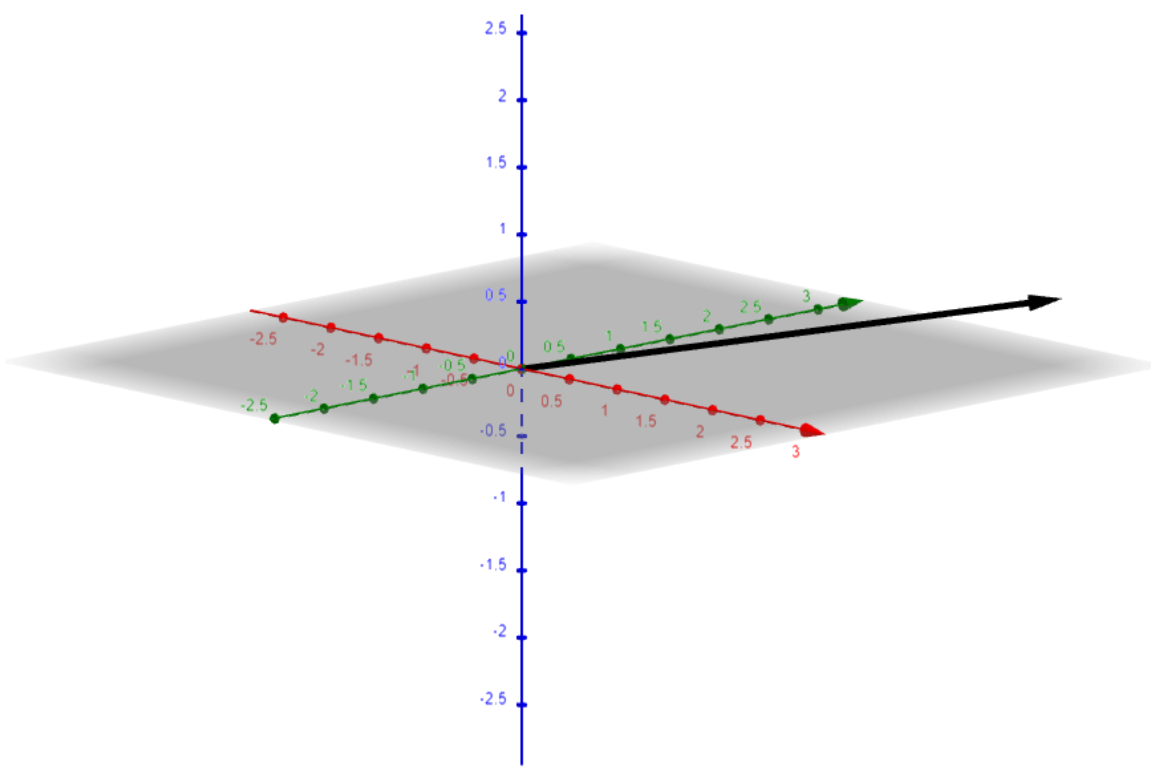
Матрица A является матрицей перехода из стандартного базиса в базис A.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0.3536 & -0.6124 & 0.7071 \\ 0.9268 & 0.1268 & -0.3536 \\ 0.1268 & 0.7803 & 0.6124 \end{pmatrix}$$

Найдём координаты

$$\left(\begin{pmatrix} 0.3536 & -0.6124 & 0.7071 \\ 0.9268 & 0.1268 & -0.3536 \\ 0.1268 & 0.7803 & 0.6124 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3536 & -0.6124 & 0.7071 \\ 0.9268 & 0.1268 & -0.3536 \\ 0.1268 & 0.7803 & 0.6124 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2,6 \\ 1,7 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0599481 \\ 2.51995977 \\ 0.62000903 \end{pmatrix}$$

4.4



Выводы 5

В результате нашей работы мы научились находить базис в пространстве, координаты элемента в этом пространстве. Научились проверять базис на ортогональность и ортонормированность. А также отточили навыки решения систем линейных алгебраических уравнений

Оценочный лист 6

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Смирнов Максим

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %