Исследовательская работа по теме "Функции"

Группа M3103
Белова Инга
Костыгов Андрей
Кравченкова Елизавета

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Математический анализ
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

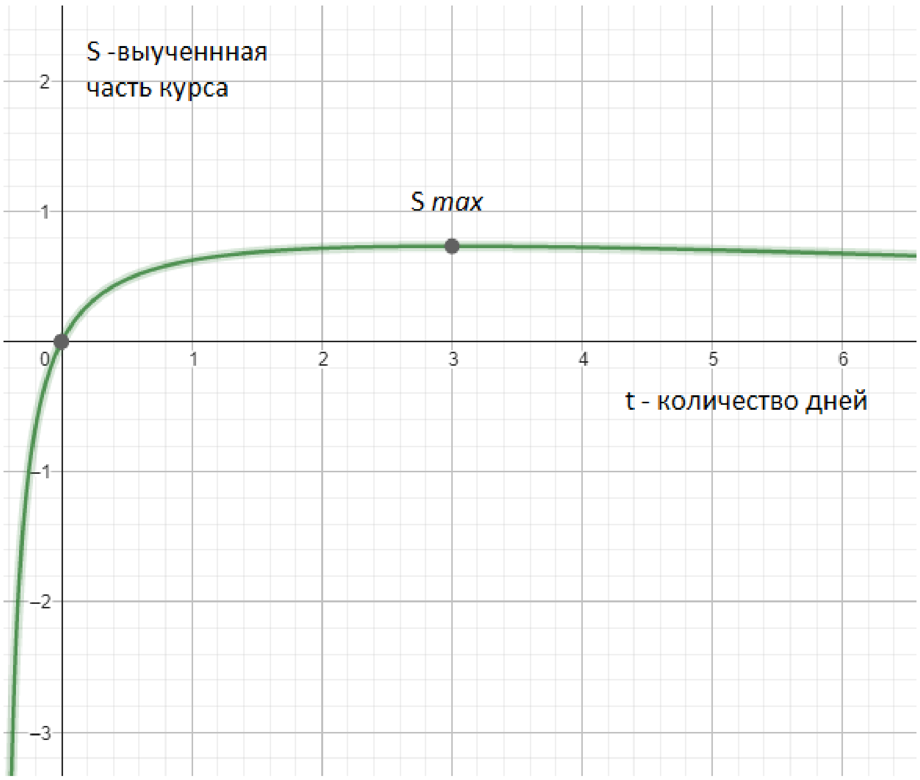
12 декабря 2022 г.

Оглавление

Задача 1

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+0.5}$-ю часть курса, а забывает $\frac{2}{49}t$-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

1.1



1.2

Пусть t - это количество дней, а $S(t)$ - выученная часть курса

Составим формулу: $S(t) = \frac{t}{t+0.5} - \frac{2}{49}t$

1.3

Найдём производную:

$S'(t) = \frac{(t)'(t+0.5)-t(t+0.5)'}{(t+0.5)^2} - (\frac{2}{49}t)' = \frac{t+0.5-t}{t^2+t+0.25} - \frac{2}{49} = \frac{0.5}{t+t+0.25} - \frac{2}{49}$

Чтобы найти максимальное кол-во дней, нужно приравнять производную к нулю

$\frac{0.5}{t+t+0.25} - \frac{2}{49} = 0$

$\frac{0.5}{t+t+0.25} = \frac{2}{49}$

$2t^2 + 2t + 0.5 = 24.5$

$2t^2 + 2t - 24 = 0$

$t^2 + t - 12 = 0$

Получаем:

$t_1 = -4$ и $t_2 = 3$

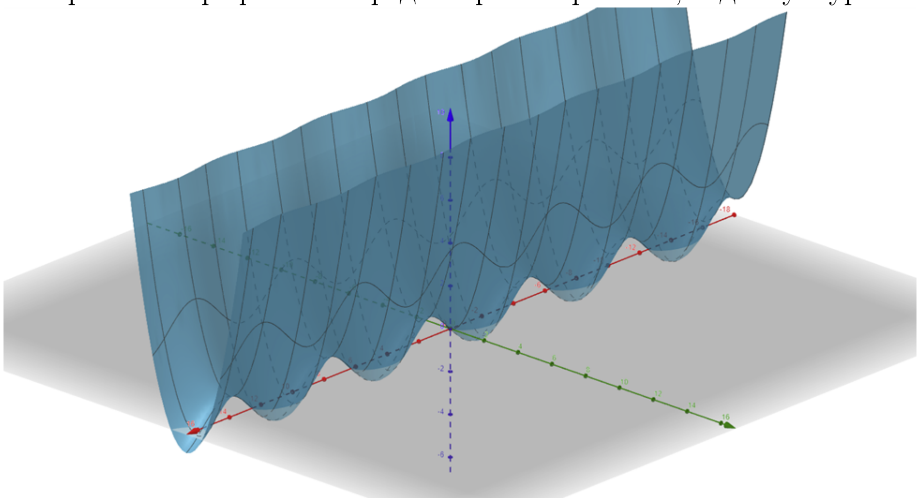
t_1 - неподходит, т. к. t - это время, а значит t не может быть отрицательным

Значит, $t = 3$ дня

Ответ: 3 дня нужно затратить студенту на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса

Задача 2

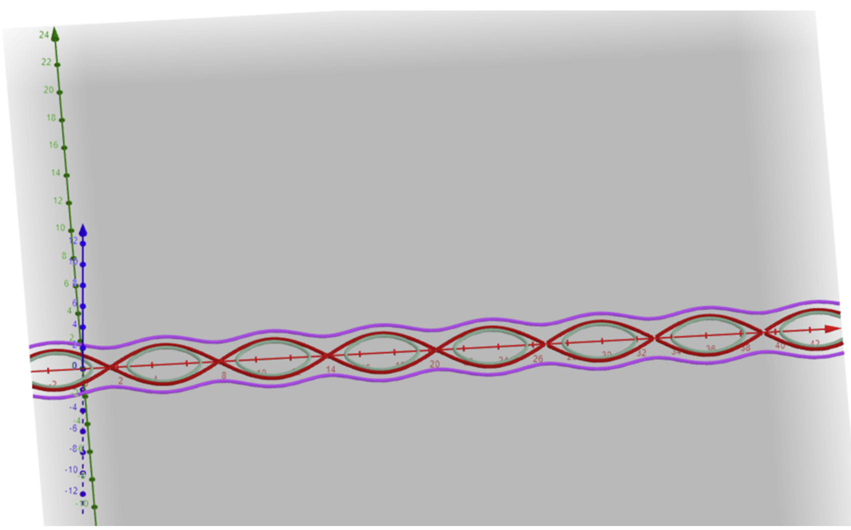
Изобразите в графическом редакторе поверхность, заданную уравнением $z = \sin x + y^2$



2.1

Область определения: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

2.2



$c = 0.5$ - эллипсы (зеленая)
$c = 1$ - трансцендентная функция (красная)
$c = 3$ - синусоиды (фиолетовая)

2.3

Выберите на поверхности какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не являющейся ни особой, ни стационарной, и докажите это по определению.
Стационарными называются точки, в которых обе частные производные первого порядка равны 0.
Точка М называется **особой**, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или когда не существует хотя бы одна из них.

$F = sin(x) + y^2 - z = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = cos(x)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial F}{\partial z} = -1$

Выберем точку $M_0(\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ и убедимся что она подходит.
$F'_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$F'_y = 2$

$F'_z = -1$

$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = 2$

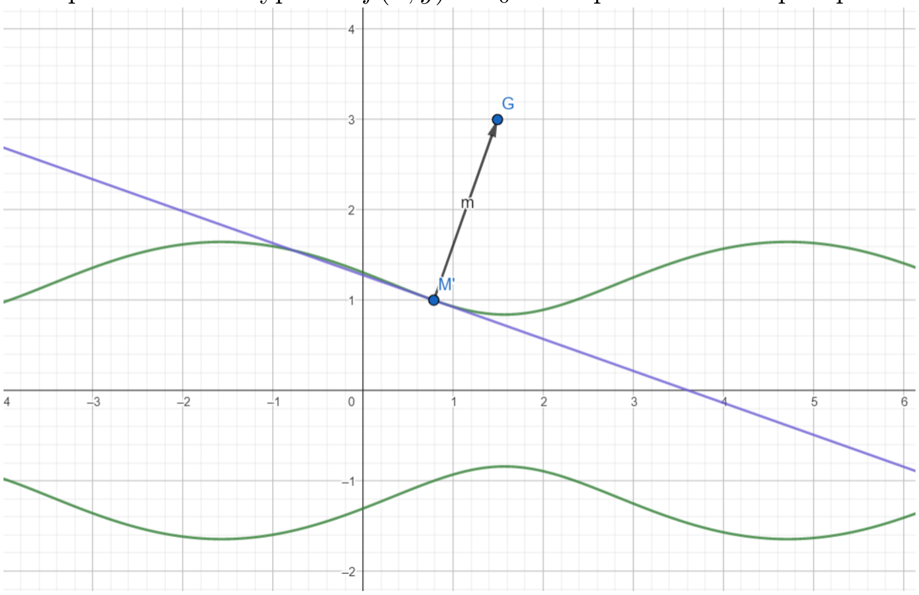
2.4

Градиент функции в точке - вектор, отложеный от точки, показывающий направление наискорейшего роста функции в данной точке.
Для функции двух переменных $z(x, y)$: $\vec{\nabla} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$

Таким образом $\vec{\nabla} z = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{m}$ Является вектором отложенным от точки $M_0(\frac{\pi}{4}, 1)$, показывающим направление наискорейшего роста функции в данной точке.

2.5

Изобразите линию уровня $f(x,y) = z_0$ и направление $\vec{m}$.Проверьте их ортогональность.



Найдем угловой коэффицент касательной в точке $M'(\frac{\pi}{4}, 1)$ для функции

$Q : \sin x + y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$ (линия уровня)

$k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{Q'_x}{Q'_y} = -\frac{cos(x)}{2y}$

Теперь угловой коэффицент прямой, задающейся градиентом:

$k_2 = \frac{z'_x}{z'_y} = \frac{2y}{cos(x)}$

Заметим, что $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Так как две прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффицентов равно -1, то прямая, задающаяся градиентом перпендикулярна касательной в точке M'
Значит $f(x,y) = z_0$ и $\vec{m}$ ортогональны.

Задача 3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = -2x^2 + 4x - y^2 + 2y$ в области $D = [-3, 0] \times [0, 3]$.

3.1

Стационарными называются точки, в которых обе частные производные первого порядка равны 0.
$z'_x = -4x + 4$
$z'_y = -2y + 2$

$$\begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Решением системы является точка M(1,1), являющаяся единственной стационарной точкой данной функции.
Данная точка не попадает в область D, поэтому приходим к выводу, что стационарных точек в данной области нет

3.2

Проверим точку M(1,1) на экстремум.
Для этого найдем частные производные второго порядка для данной функции
$A = z''_{x_x} = -4$
$B = z''_{x_y} = 0$
$C = z''_{y_y} = -2$
По теореме о достаточных условиях (гладкого) экстремума: так как $AC - B^2 > 0$, то функция имеет экстремум в точке M(1,1), причем точка M является точкой максимума (так как $A < 0$)

3.3

При $y = 0$
$z = -2x^2 + 4x$, тогда $z'_x = -4x + 4$.
$z_x = 0$ при $x = 1$, что не входит в исследуемую область. А значит точка $M_1(1, 0)$ (критическая точка) нас не интересует
Посчитаем значения также на концах отрезка для x [-3,0].
$z(-3, 0) = -30 - 0 + 0 = -30$
$z(0, 0) = 0 - 0 = 0$

При $x = -3$
$z = -30 - y^2 + 2y$, тогда $z'_y = -2y + 2$.
$z'_y = 0$ при $y = 1$, точка $M_2(-3, 1)$ (критическая точка) входит в область D, посчитаем $z(M_2) = -30 - 1 + 2 = -29$
Посчитаем значения также на концах отрезка для y [0,3].
$z(-3, 0) = -30 - 0 + 0 = -30$
$z(-3, 3) = -30 - 9 + 6 = -33$

При $x = 0$
$z = -y^2 + 2y$, тогда $z'_y = -2y + 2$.
$z'_y = 0y = 1$, точка $M_3(0, 1)$ (критическая точка) входит в область D, посчитаем $z(M_3) = -1 + 2 = 1$
Посчитаем значения также на концах отрезка для y [0,3].
$z(0, 0) = 0 + 0 = 0$
$z(0, 3) = -9 + 6 = -3$

При $y = 3$
$z = -2x^2 + 4x - 3$, тогда $z'_x = -4x + 4$.
$z_x = 0$ при $x = 1$, что не входит в исследуемую область. А значит точка $M_4(1, 3)$ (критическая точка) нас не интересует
Посчитаем значения также на концах отрезка для x [-3,0].
$z(-3, 3) = -30 - 0 + 0 = -33$
$z(0, 3) = -30 - 9 + 6 = -3$

3.4

Из предыдущих пунктов следует, что наибольшее значение функции $z = -2x^2 + 4x - y^2 + 2y$ в области $D = [-3, 0] \times [0, 3]$ достигается в точке $M_3(0, 1)$ в которой $z(M_3) = 1$
Наименьшее значение z достигается в точке $(-3, 3)$ в которой $z(-3, 3) = -33$

Выводы 4

В результате нашей работы мы научились работать с функциями одной и двух переменных. Исследовавать их на экстремумы, а в случае функции двух переменных – находить линии уровня и градиент.

Оценочный лист 5

Белова Инга

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Костыгов Андрей

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %