



Исследовательская работа по теме
"Аналитическая геометрия"

Группа М3103
Быкова Аксинья
Кравченкова Елизавета
Родецкий Никита

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Линейная алгебра
Университет ИТМО
Санкт-Петербург, Россия

23 декабря 2022 г.

Оглавление

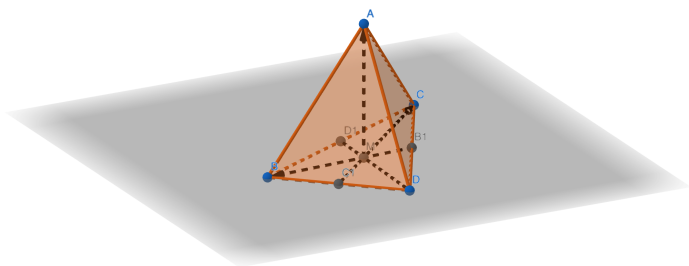
1	Задача 1. Замена базиса	3
1.1	Изобразите на графике тело в пространстве. Подпишите известные величины и соотношения.	3
1.2	Изобразите на этом графике две системы координат (постройте их базисные векторы).	3
1.3	Решите задачу аналитически.	4
1.4	Проверьте решение построением.	4
2	Задача 2. Кривые второго порядка	5
2.1	Покажите, что одно из множеств является кривой второго порядка, сведя его уравнение к каноническому виду преобразованием координат, а другое - кривой, распавшейся на прямые(найдите уравнения прямых).	5
2.2	Изобразите каждое множество на отдельном рисунке вместе со старой и новой системой координат (оси новой системы должны служить осями симметрии множества).	7
2.3	У нераспавшейся кривой определите расстояние p между фокусом и директрисой и эксцентриситет ϵ . Запишите полярное уравнение кривой с найденными параметрами.	7
2.4	На одном рисунке совместите началами и осями Ox декартову прямоугольную и полярную системы координат. Постройте кривую по ее каноническому уравнению в ДПСК и по ее полярному уравнению в ПСК. Объясните несовпадение кривых.	8

2.5	Найдите такое расположение ПСК и формулы преобразования полярных координат в декартовы, чтобы полярное и каноническое уравнения описывали одну и ту же кривую.	8
3	Задача 3. Аналитическое задание множества	10
3.1	Сделайте иллюстрацию к условию задачи: введите удобную для решения систему координат, необходимые обозначения, подпишите известные величины и соотношения.	10
3.2	Во введенных обозначениях запишите геометрическое свойство множества, для которого ищется уравнение.	10
3.3	Сведите геометрическое свойство к уравнению.	10
3.4	Изобразите множество по его уравнению.	11
4	Выводы	12
5	Оценочный лист	13

Задача 1

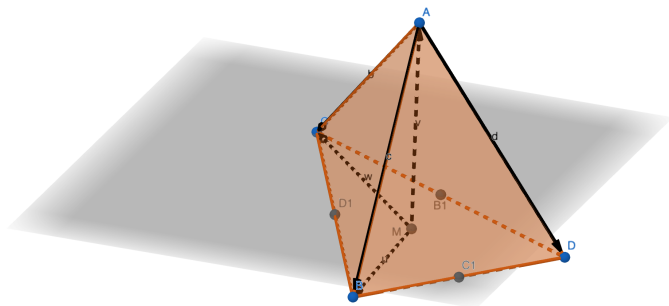
В тетраэдре $ABCD$ точка M - точка пересечения медиан грани BCD . Найти координаты точки пространства в системе координат $A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, если известны координаты x', y', z' в системе координат $M, \vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$.

1.1



B_1, C_1, D_1 – это середины сторон соответственно CD, BD, BC

1.2



Векторы $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ – это соответственно векторы u, w, v, c, b, d

1.3

Пусть есть точка $X(x', y', z')$. Тогда:

$$\begin{aligned}
 (x', y', z') &= x' \vec{MB} + y' \vec{MC} + z' \vec{MA} = \\
 &= x' \frac{2}{3} \vec{B_1B} + y' \frac{2}{3} \vec{C_1C} + z' (\frac{2}{3} \vec{C_1C} + \vec{CA}) = \\
 &= x' \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \vec{DC} + \vec{CB}) + y' \frac{2}{3} (\vec{C_1B} + \vec{BC}) + z' (\frac{2}{3} (\vec{C_1B} + \vec{BC}) + \vec{CA}) = \\
 &= x' \frac{2}{3} (\frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AC}) + \vec{CA} + \vec{CB}) + y' \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \vec{DB} + \vec{BC}) + z' (\frac{2}{3} (\frac{1}{2} \vec{DB} + \vec{BC}) + \vec{CA}) = \\
 &= x' \frac{2}{3} (\frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AC}) + \vec{CA} + \vec{CB}) + y' \frac{2}{3} (\frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \vec{AC}) + z' (\frac{2}{3} (\frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \vec{AC}) + \vec{CA}) = \\
 &= x' \frac{2}{3} (-\frac{1}{2} \vec{AD} - \frac{1}{2} \vec{AC} + \vec{AB}) + y' \frac{2}{3} (-\frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}) + z' (\frac{2}{3} (-\frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}) - \vec{AC}) = \\
 &= x' (-\frac{1}{3} \vec{AD} - \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{2}{3} \vec{AB}) + y' (-\frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{2}{3} \vec{AC} - \frac{1}{3} \vec{AB}) + z' (-\frac{1}{3} \vec{AD} - \frac{1}{3} \vec{AC} - \frac{1}{3} \vec{AB}) = \\
 &= -\frac{1}{3} (x' + y' + z') \vec{AD} + (-\frac{1}{3} x' + \frac{2}{3} y' - \frac{1}{3} z') \vec{AC} + (\frac{2}{3} x' - \frac{1}{3} y' - \frac{1}{3} z') \vec{AB}
 \end{aligned}$$

Для перехода в базис с началом в точке А требуется прибавить вектор $\vec{AM} = \frac{1}{3} (\vec{AD} + \vec{AC} + \vec{AB})$

То есть в базисе $A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ будут координаты:

$$(\frac{2}{3} x' - \frac{1}{3} y' - \frac{1}{3} z' + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} x' + \frac{2}{3} y' - \frac{1}{3} z' + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} x' - \frac{1}{3} y' - \frac{1}{3} z' + \frac{1}{3})$$

1.4

Возьмем точку $X(1,2,3)$ в системе с базисом $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$ и началом в М.

Тогда в ДПСК с началом в О:

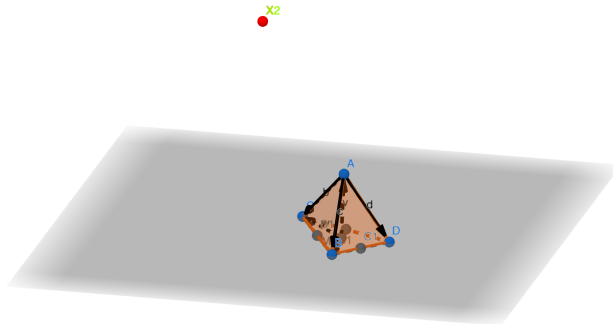
$$X = M + \vec{MB} + 2\vec{MC} + 3\vec{MA}$$

X_2 – это точка X в системе с базисом $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ и началом в А. Подставим в полученную нами в 1.3 формулу перевода:

$$X_2(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$$

Тогда в ДПСК с началом в О:

$$X_2 = A - \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} - \frac{5}{3} \vec{AD}$$



●	$X = M + u + 2w + 3v$ $= (-6.18, -11.37, 24)$	⋮
●	$X_2 = A - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}b - \frac{5}{3}d$ $= (-6.18, -11.37, 24)$	⋮

Как мы видим, $X(1,2,3)$ в системе с базисом $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$ и началом в М и $X_2(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ в системе с базисом $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ и началом в А совпадают.

Задача 2

Даны уравнения двух множеств:

Множество 1: $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$

Множество 2: $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

2.1

Множество 1:

$2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$

Сделаем перенос $Oxy \rightarrow O'x'y'$ ($O'(x_0, y_0)$), чтобы занулить коэффициенты при x, y .

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

После подстановки и раскрытия скобок получим систему (первое уравнение – коэффициент при x' , второе – коэффициент при y'):

$$\begin{cases} 2x_0 + \frac{5}{2}y_0 - \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{5}{2}x_0 - 3y_0 + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

Отсюда $O'(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7})$

В $O'x'y'$ множество 1 записывается: $2x'^2 + 5x'y' - 3y'^2 = 0$

Разобьем на скобки:

$$(2x' - y')(3y' + x') = 0$$

Получаем две прямые: $y' = 2x'$ и $y' = -\frac{1}{3}x'$

В Oxy прямые записываются: $y = 2x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Таким образом множество 1 – кривая, распавшаяся на прямые.

Множество 2:

$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

Сделаем поворот $Oxy \rightarrow O'x'y'$, чтобы занулить коэффициент при xy .

$$\begin{cases} x = x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) \\ y = x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) \end{cases}$$

Выпишем полученные коэффициенты при переменных:

При x'^2 : $-2\sin(2\alpha) + \frac{3}{2}\cos(2\alpha) + \frac{5}{2}$

При $x'y'$: $2(-\frac{3}{2}\sin(2\alpha) - 2\cos(2\alpha))$

При y'^2 : $2\sin(2\alpha) - \frac{3}{2}\cos(2\alpha) + \frac{5}{2}$

При x' : $2(-7\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$

При y' : $2(\sin(\alpha) - 7\cos(\alpha))$

Свободный член: 7

Занулим коэффициент при $x'y'$:

$$-\frac{3}{2}\sin(2\alpha) - 2\cos(2\alpha) = 0$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = 2 \text{ или } \operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Выбираем $\operatorname{tg}(\alpha) = 2$ (неважно какой угол выбирать на этом моменте)

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{4}{5}, \cos(2\alpha) = -\frac{3}{5}$$

Подставим полученные значения в формулы для коэффициентов. Тогда:

При x'^2 : 0

При $x'y'$: 0

При y'^2 : 5

При x' : $-6\sqrt{5}$

При y' : $-2\sqrt{5}$

Свободный член: 7

Тогда уравнение множества 2 в $Ox'y'$ записывается:

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$5(y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 6\sqrt{5}(x' - \frac{1}{30} - \frac{7}{6\sqrt{5}})$$

Сделаем перенос $Ox'y' \rightarrow O''x''y''$ ($O''(x_0, y_0)$):

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, y_0 = \frac{1}{30} + \frac{7}{6\sqrt{5}}$$

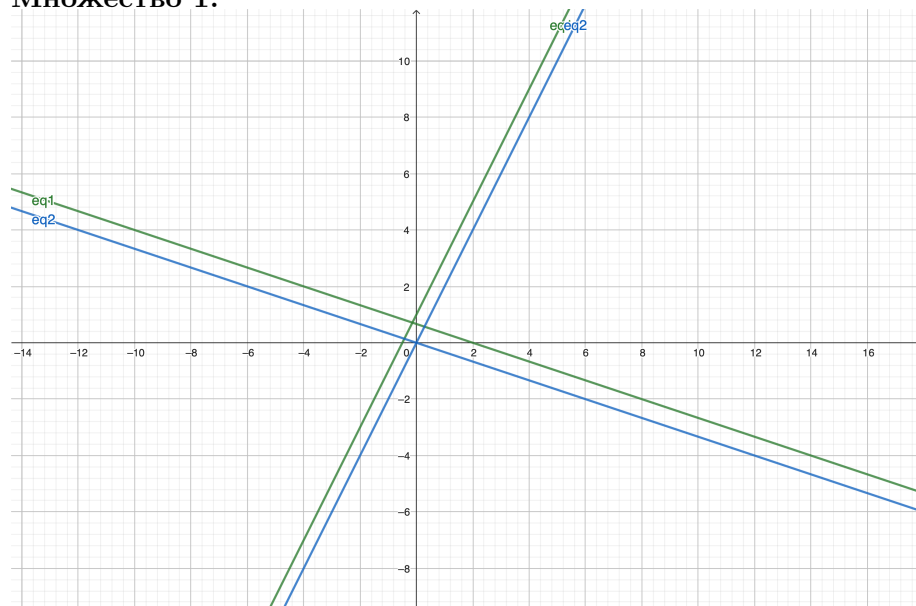
Тогда уравнение множества 2 в $O''x''y''$ записывается:

$$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$$

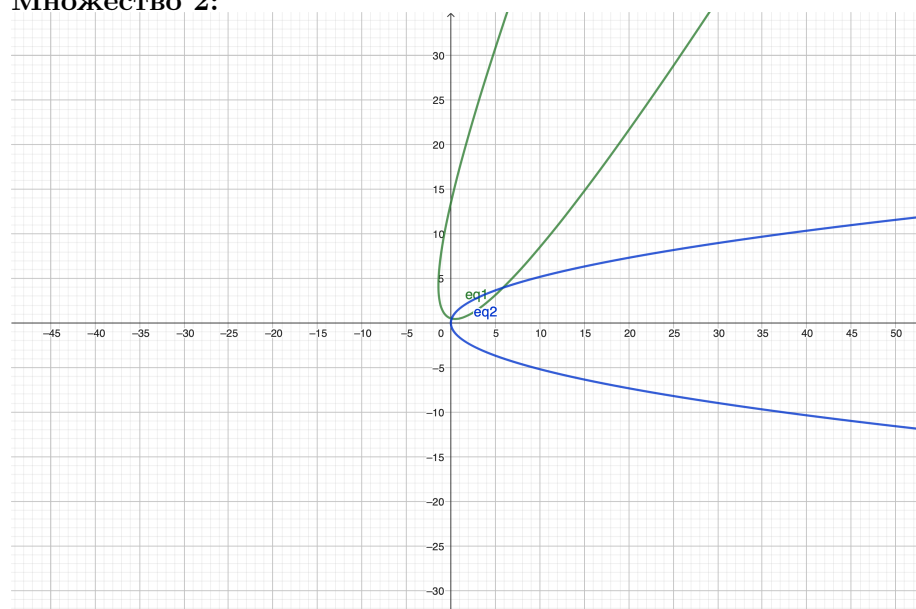
Таким образом, множество 2 задает параболу.

2.2

Множество 1:



Множество 2:



На обоих графиках: зеленая кривая расположена в старой системе координат, синяя – в новой.

2.3

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$, где p - расстояние между фокусом и директрисой. Эксцентриситет параболы равен 1.

Обратимся к полученному в пункте 2.1 каноническому уравнению множества 2.

$$y'^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$$

Таким образом: $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ и $\epsilon = 1$

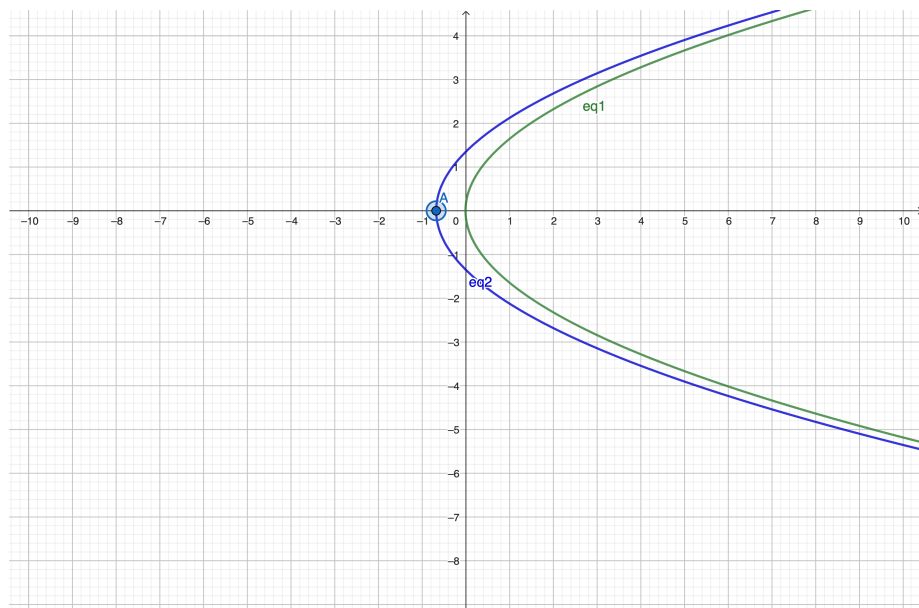
Уравнение в полярных координатах для эллипса, гиперболы и параболы имеет следующий общий вид:

$$\rho = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon \cos(\phi)}$$

Подставим найденные значения и получим:

$$\rho = \frac{3\sqrt{5}}{5(1 - \cos(\phi))}$$

2.4



Для построения были использованы формулы преобразования из полярных координат в декартовы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Зеленая кривая построена по уравнению для ДПСК, синяя – для ПСК.

Прямые не совпадают, потому что в уравнении для ПСК за точку начала отсчета берется фокус (правый фокус, в случае эллипса и гиперболы).

На графике отмечена точка $A(-\frac{p}{2}, 0)$. А значит и правда фокус синей кривой это точка $(0,0)$.

2.5

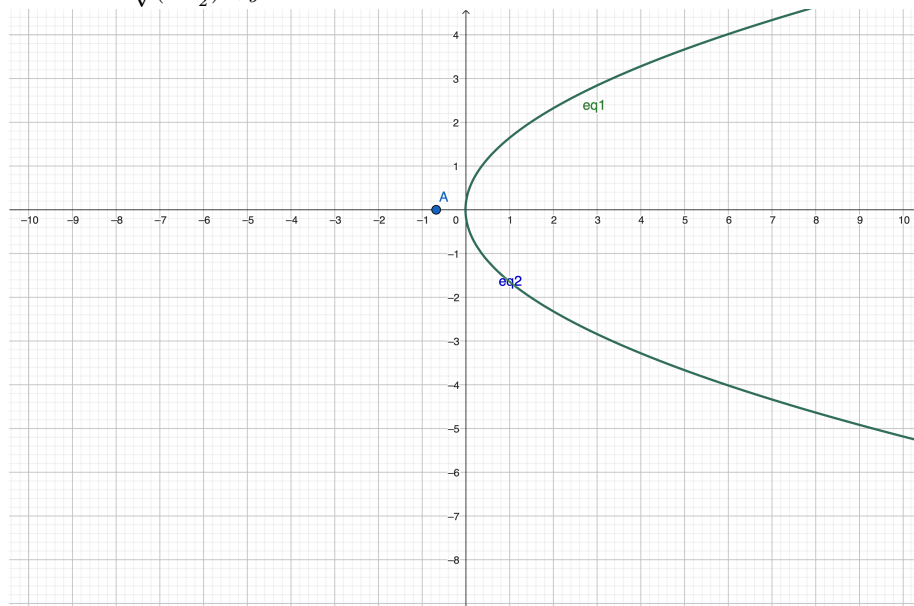
Для совпадения кривых достаточно совместить ось Ox декартовой и полярной системы координат, но начало ПСК поставить в точке с координатами $(\frac{p}{2}, 0)$ в ДПСК.

Этого можно также добиться с помощью формул перевода:

Сделаем перенос для них на $\frac{p}{2}$ вправо (в нашем случае $\frac{p}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$):

$$\rho = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}}$$

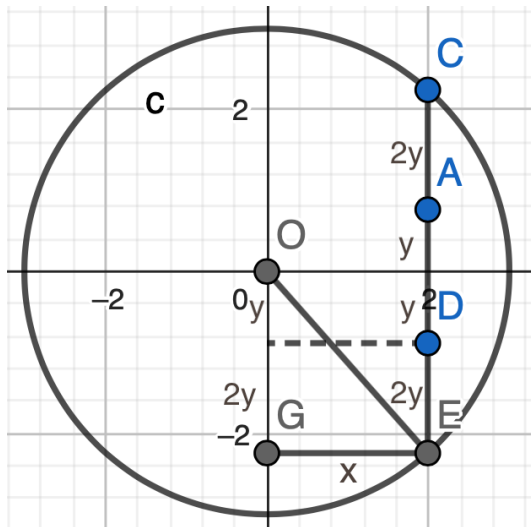


На данном графике видно, что две кривые совпали.

Задача 3

Дана окружность с центром в начале координат и радиусом 3. Найдите геометрическое место точек, делящих в отношении 2:1 хорды данной окружности, параллельные оси ординат.

3.1



Проведем хорду $CE \parallel Oy$

Обозначим $y = \frac{1}{6}CE$, а x - расстояние между CE и Oy , OE - радиус окружности

3.2

Точка $D(x, -y)$ принадлежит требуемому ГМТ, так как хорда CE делится ей в отношении 2:1 (точка A не принадлежит, так как делится в отношении 1:2)

3.3

Напишем теорему Пифагора для OEG :

$$9y^2 + x^2 = 9$$

Поделим на 9 и получим каноническое уравнение эллипса:

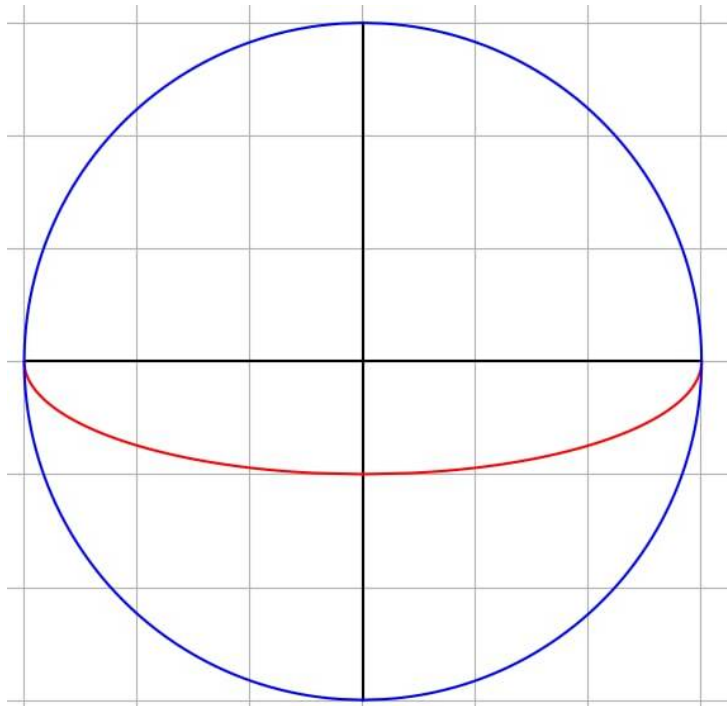
$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

Добавим условие о том, что нас интересуют только точки при условии $y \leq 0$ (так как иначе попадут точки, делящиеся еще и в отношении 1:2).

Тогда уравнение множества задается системой:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

3.4



Выводы 4

В результате нашей работы мы научились производить замену базиса в геометрических задачах, исследовать общее уравнение кривой второго порядка, определять по нему каноническое уравнение кривой, также поработали с полярными координатами, вывели уравнение, задающее требуемое геометрическое место точек.

Оценочный лист 5

Быкова Аксинья

Вклад исполнителя - $33\frac{1}{3}\%$

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - $33\frac{1}{3}\%$

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - $33\frac{1}{3}\%$