Homework 2

№1

(a) $M_1 = \mathbb{R}$

$x R_1 y \Leftrightarrow |x-y| \le 1$

(b) $M_2 = \mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}, \{abc\}\}$

$R_2 = $ "$\subseteq$"

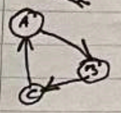
(c) $M_3 = \{a,b,c,d\}$

$$\|R_3\| = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(d) $R_4 = \{(x,y) \mid x \text{ beats } y\}$

$M_4 = \{$"rock", "scissors", "paper"$\}$ (a, b, c)

$R_4 = \{(c,a), (b,c), (a,b)\}$



properties	R_1	CEX	R_2	CEX	R_3	CEX	R_4	CEX
reflexive	+		+		—	$x=a$ $y=a$	—	x=rock
irreflexive	—	$x=5$ $\|0\| \le 1$	—	$x=\{a\}$	+		+	
coreflexive	—	$x=6$ $y=5$ $\|1\| \le 1$	—	$x=\emptyset$ $y=\{a\}$	—	$x=c$ $y=a$	—	x=rock y=scissors
symmetric	+		—	$x=\{a\}$ $y=\{ab\}$	—	$x=c$ $y=a$	—	x=rock y=scissors
antisymmetric	—	$x=6$ $y=5$	+		+		+	
asymmetric	—	$x=6$ $y=5$	—	$x=\{c\}$ $y=\{c\}$	+		+	
transitive	—	$x=6$ $y=7$ $c=8$	+		—	$x=a$ $y=d$ $c=c$	—	$x=c$, $y=a$ $c=b$
antitransitive	—	$x=6$ $y=6{,}5$ $z=7$	—	$x=\emptyset$ $y=\{a\}$ $c=\{ab\}$	—	$x=a$ $y=b$ $c=d$	+	
semiconnex	—	$x=6$ $y=8$	—	$x=\{a,b\}$ $y=\{a,c\}$	+		+	
connex	—	$x=6$ $y=8$	—	$x=\{a,b\}$ $y=\{a,c\}$	—	$x=a$ $y=a$	—	x=rock y=rock
left Euclidean	—	$y=2$ $x=3$ $c=4$	—	$x=\{abc\}$ $y=\{c\}$ $c=\{b\}$	—	$y=a$ $x=b$ $c=c$	—	x=rock $y=z$=scissors
right Euclidean	—	$y=2$ $x=3$ $c=4$	—	$x=\emptyset$ $y=\{a\}$ $c=\{b\}$	—	$x=a$ $y=d$ $c=b$	—	x=rock $y=z$=paper
dense	+		+		—	$x=a$ $y=b$	—	$x=a$ $y=b$

№2

(a) True

$\forall x \in M$ xRx и xSx

Значит $(x,x) \in R$ для $\forall x \in M$

$(x,x) \in S$

$\forall x \in M: (x,x) \in (R \cap S)$ ч.т.д.

(b) True

1 случай нет общих пар

$\forall x$ $(x,x) \in R \Rightarrow (x,x) \notin S$

$\forall x,y$ $(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \notin S$

$R \cap S = \emptyset$; $\emptyset$ - обладает свойством симметричности (нельзя доказать обратное)

(d) True

$\forall x \in M$ xRx, xSx, значит

$(x,x) \in R$ и $(x,x) \in S$

$\forall x \in M$ $(x,x) \in (R \cup S)$ ч.т.д.

(e) True

$\forall$ $(x,y) \in S \Rightarrow (x,y) \in S \cup R$

А значит $(y,x) \in S \cup R$ (тоже)

Аналогично с R

Для любой изначальной пары симметричная ей никуда не „пропадает"

2 случай Есть общие пары.

Если $(x,y) \in S$ и $(x,y) \in R$, то

$(y,x) \in S$ и $(y,x) \in R$

$\forall (x,y) \in (S \cap R) \quad (y,x) \in (S \cap R)$

(f) False

$R = \{(a,b), (p,d), (d,q), (p,q)\}$

$S = \{(b,q), (m,c), (c,s), (s,w)\}$

В $R \cup S$ не существует пары (a,q)

$R \cup S$ - no transitive

(c) True чтд

1) Если в пересечении R и S получается $\varnothing$ или 1 элемент, то оно транзитивно. Т.к нельзя доказать обратное (нет контрпримера)

2. Если в пересечении ≥ 2 элементов, но $\nexists\, x,y,z$!

То оно также транзитивно. (нет контрпримера)

3. $\forall\, xyz \mid (x,y) \in (R \cap S) \wedge (y,z) \in (R \cap S)$:

т.к R-транзитивно и $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

т.к S-транзитивно, то $xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$

$\Rightarrow (x,z) \in (R \cap S)$

$\boxed{R \cap S \text{- transitive}}$ чтд

№3

$ARB \iff |A| = |B|$

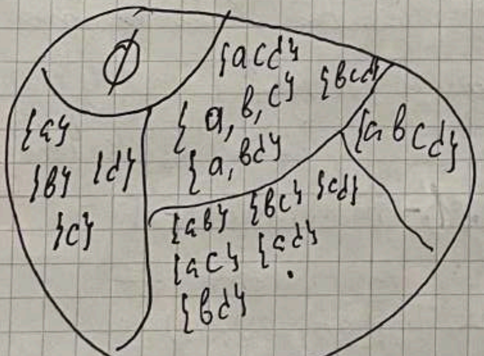
(a) reflexive т.к $|A| = |A| \Rightarrow ARA$

symmetric т.к если $|A| = |B|$, то $|B| = |A| \Rightarrow BRA$

transitive т.к $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C| \Rightarrow (ARC)$

$\Rightarrow R$ - отношение эквивалентности

(б)



№4

$$J_{ac}(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

$A R_\theta B \iff J_{ac}(A,B) \geq \theta \qquad \theta = 0{,}25$

№4

$A_1=\{1,2,5,6\}$ $A_2=\{2,3,4,5,7,9\}$ $A_3=\{1,4,5,6\}$ $A_4=\{3,7,9\}$

$A_5=\{1,5,6,8,9\}$

$Jac(A,B)=Jac(B,A)$; $Jac(A,A)=1$

$Jac(A_1,A_2)=\dfrac{|\{2,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6,7,9\}|}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}=0,25=\Theta$

$Jac(A_1,A_3)=\dfrac{3}{5}=0,6>\Theta$

$Jac(A_1,A_4)=0<\Theta$

$Jac(A_1,A_5)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0,5>\Theta$

$Jac(A_2,A_3)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}=0,25=\Theta$

$Jac(A_2,A_4)=\dfrac{3}{6}=0,5>\Theta$

$Jac(A_2,A_5)=\dfrac{2}{9}=0,(2)<\Theta$

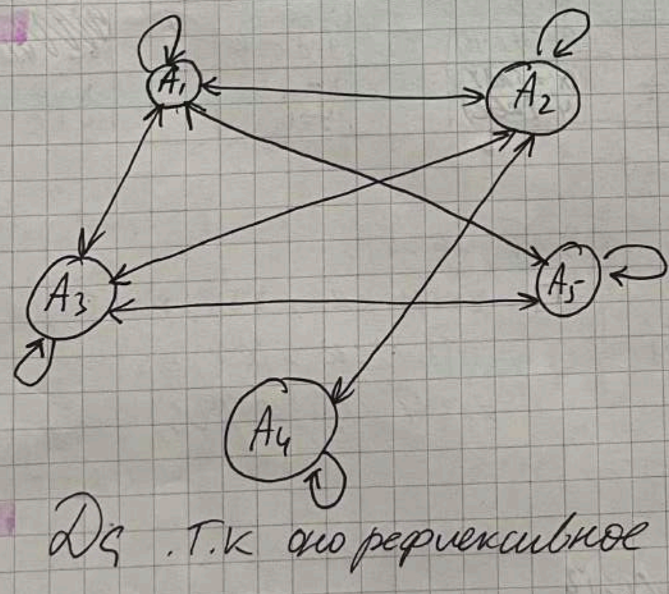
$Jac(A_3,A_4)=0<\Theta$

$Jac(A_3A_5)=\dfrac{3}{6}=0,5>\Theta$

$Jac(A_4A_5)=\dfrac{1}{7}=0,14<\Theta$

$R_\Theta=\{(A_1A_1),(A_2A_2),(A_3A_3),(A_4A_4),(A_5A_5),$
$(A_1A_2)(A_2A_1),(A_1A_3),(A_3A_1),(A_1A_5)(A_5A_1)$
$(A_2A_3)(A_3A_2)(A_2A_4)(A_4A_2)$
$(A_3A_5)(A_5A_3)\}$

(a)



(b) Да. Т.к. оно рефлексивное и симметричное.

(c) Нет. Рассмотрим $A_3 R_\Theta A_2$, $A_2 R_\Theta A_4$. Заметим, что $A_3 \not R_\Theta A_4$

№5

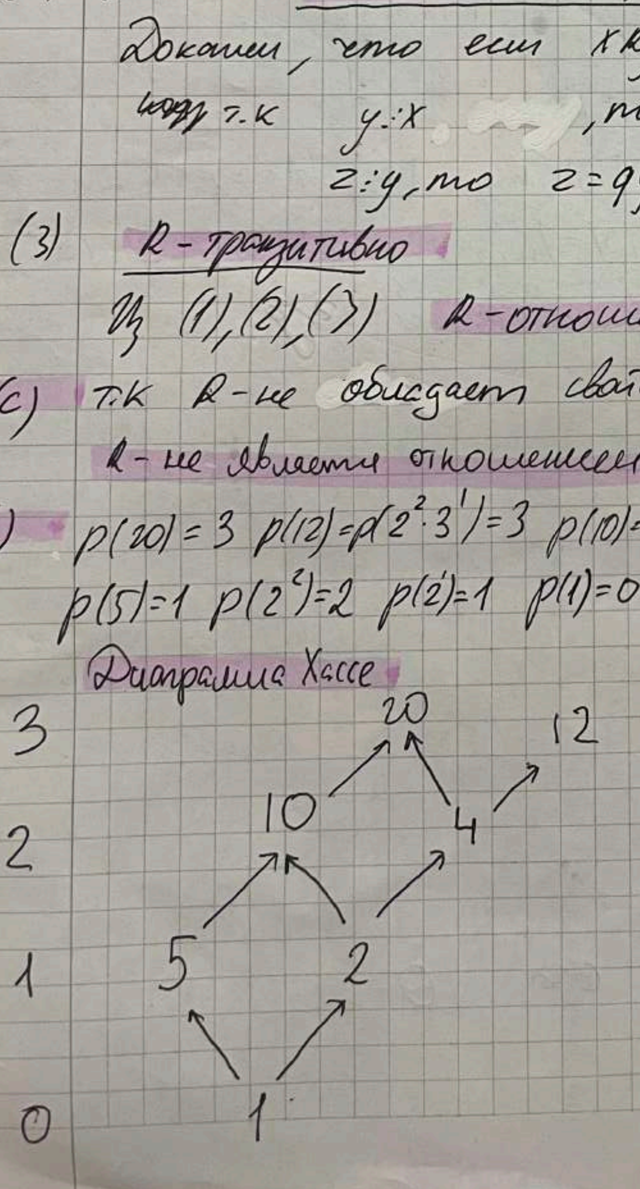
$H = \{1,2,4,5,10,12,20\}$ $\quad xRy \Leftrightarrow y \vdots x$

(a) $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,10), (1,12), (1,20),$
$(2,2), (2,4), (2,10), (2,12), (2,20),$
$(4,4), (4,12), (4,20),$
$(5,5), (5,10), (5,20),$
$(10,10), (10,20),$
$(12,12),$
(б) $(20,20)\}$

(1) Заметим, что $\forall x \in H \; xRx \Rightarrow$ R-рефлексивно
Также заметим, что $\forall x,y \in H \mid x \neq y$ если xRy, то $y \not R x$
(2) Значит R-антисимметрично
Докажем, что если xRy и yRz, то xRz
т.к $y \vdots x$, то $y = kx$, если
$z \vdots y$, то $z = qy = qkx \Rightarrow z \vdots x \Rightarrow xRz$
(3) R-транзитивно
Из (1),(2),(3) R-отношение частичного порядка

(c) т.к R-не обладает свойством сильной связности, то R-не является отношением линейного порядка ($x=12, y=20$ $x \not R y$ и $y \not R x$)

(d) $p(20)=3$ $p(12)=p(2^2 \cdot 3^1)=3$ $p(10)=2$
$p(5)=1$ $p(2^2)=2$ $p(2^1)=1$ $p(1)=0$
Диаграмма Хассе



(e) minimum: 1
maximum: —
(т.к $12 \not R 20$, $20 \not\vdots 12$)
minimal: 1
maximal: 20, 12
(т.к нет элементов $\vdots 20 (\neq 20)$ и $\vdots 12 (\neq 12)$)

№5

(f) $A(v)$ - множество вершин ведущих в v

Шаг	v	A(1)	A(2)	A(5)	A(4)	A(10)	A(12)	A(20)	Ans
0	–	∅	1	1	2	2,5	4	4,10	∅
1	1	∅	∅	∅	2	2,5	4	4,10	1
2	2	∅	∅	∅	∅	5	4	4,10	12
3	5	∅	∅	∅	∅	∅	4	4,10	1,2,5
4	4	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	1254
5	10	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	125410
6	12	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	1,2,5,4,10,12
7	20	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	1,2,5,4,10,12,20

1,2,5 4,10,12,20

№6 $\forall a,b,c$ если

$$\left.\begin{array}{l} aR^+b \Rightarrow aR^i b \\ bR^+c \Rightarrow bR^j c \end{array}\right\} \Rightarrow aR^{i+j}c \Rightarrow aR^+c$$

Значит R^+ – транзитивно ч.т.д.

(На языке графов $aR^i b$ значит в R, чтобы добраться от a до b требовалось i шагов)