Дискретная математика
Домашняя работа №7

Группа M3103
Кравченкова Елизавета

Преподаватель
Сомов Артем Владимирович
Чухарев Константин Игоревич

Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

22 августа 2023 г.

Оглавление

Задача 1

For each given recurrence relation, find the first five terms, derive the closed-form solution, and check it by substituting it back to the recurrence relation.

Для каждого заданного рекуррентного соотношения найдите первые пять членов, выведите решение в закрытой форме и проверьте его, подставив обратно в рекуррентное соотношение..

WARNING:
Для решения я применяла метод, который мы вроде особо не проходили на лекции и практике. Речь идет о методе решения линейных неоднородных реккурентных соотношений(ссылка на презентацию ВМК МГУ `https://mk.cs.msu.ru/images/6/6d/Dm_lection8.pdf`), мне кажется что оно как-то связано с методом решения при помощи аннигилятров.

К счастью, это задание не требует как такового наличия решения, если Вас не устроит то, что я использовала этот метод – пролистните в конец пункта и представьте, что у меня в генетическом коде заложено придумывать решения для реккурентных соотношений.(Все-таки один из методов решения реккурент-это угадайка) Проверка и подстановка, безусловно, присутствуют.

1.1

а) $a_n = a_{n-1} + n$ **with** $n_0 = 2$**.**
Решу методом решения линейных неоднородных реккурентных соотношений:
Общее решение является суммой однородного и частного
Решим однородное:
$a_n = a_{n-1}$
$k = 1$ - характеристический многочлен
$a_n = C \cdot 1^n = C$ - решение однородного

Найдем частное решение в следующем виде:
Так как $n = n \cdot 1^n$, то основание степени совпадает основанием в решении однородного, следует все домножить на n:
$a_n = (A \cdot n + B) \cdot n$
$a_{n-1} = (A \cdot n - A + B) \cdot (n - 1)$
Подставим в изначальное уравнение:
$(A \cdot n + B) \cdot n = (A \cdot n - A + B) \cdot (n - 1) + n$
$A \cdot n^2 + B \cdot n = A \cdot n^2 - 2A \cdot n + B \cdot n + A - B + n$
Получаем систему:

$$\begin{cases} A = A, \\ B = -2A + B + 1, \\ 0 = A - B. \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2A, \\ A = B. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Частное решение:
$a_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$
Общее решение:
$a_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + C$
Найдем C:
$a_0 = C = 2$
Общее решение:
$a_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + 2$
$a_n = \frac{n^2+n}{2} + 2$

Проверка
$\frac{n^2+n}{2} + 2 =? \frac{(n-1)^2+n-1}{2} + 2 + n$
$\frac{n^2+n}{2} =? \frac{n^2+n}{2} + \frac{-2n+1-1}{2} + n$
$0 =? -n + n$
$0 = 0$
Проверено

Первые несколько членов
$a_0 = 2$
$a_1 = 3 = a_0 + 1 = 2 + \frac{1+1}{2}$
$a_2 = 5 = a_1 + 2 = 2 + \frac{4+2}{2}$
$a_3 = 8 = a_2 + 3 = 2 + \frac{3+9}{2}$
$a_4 = 12 = a_3 + 4 = 2 + \frac{4+16}{2}$
$a_5 = 17 = a_4 + 5 = 2 + \frac{5+25}{2}$

Ответ: $a_n = \frac{n^2+n}{2} + 2$

1.2

b) $a_n = 2a_{n-1} + 2$ **with** $n_0 = 1$**.**
Буду решать аналогичным способом
Решим однородное:
$a_n = 2a_{n-1}$
$k = 2$ - характеристический многочлен
$a_n = C \cdot 2^n$ - решение однородного

Найдем частное решение в следующем виде:
Так как $2 = 2 \cdot 1^n$, то вид частного решения:
$a_n = A \cdot 1^n = A$
$a_{n-1} = A$
Подставим в изначальное уравнение:
$A = 2A + 2$

$A = -2$
Частное решение:
$a_n = -2$
Общее решение:
$a_n = C \cdot 2^n - 2$
Найдем C:
$a_0 = C - 2 = 1$
$C = 3$

Общее решение:
$a_n = 3 \cdot 2^n - 2$

Проверка
$3 \cdot 2^n - 2 =?6 \cdot 2^{n-1} - 4 + 2$
$3 \cdot 2^n =?6 \cdot 2^{n-1}$
$2^n =?2 \cdot 2^{n-1}$
$2^n = 2^n$
$0 = 0$
Проверено

Первые несколько членов
$a_0 = 1$
$a_1 = 4 = 2a_0 + 2 = 3 \cdot 2^1 - 2$
$a_2 = 10 = 2a_1 + 2 = 3 \cdot 2^2 - 2$
$a_3 = 22 = 2a_2 + 2 = 3 \cdot 2^3 - 2$
$a_4 = 46 = 2a_3 + 2 = 3 \cdot 2^4 - 2$
$a_5 = 94 = 2a_4 + 2 = 3 \cdot 2^5 - 2$

Ответ: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2$

1.3

c) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ **with** $n_0 = 5$
Буду решать аналогичным способом
Решим однородное:
$a_n = 3a_{n-1}$
$k = 3$ - характеристический многочлен
$a_n = C \cdot 3^n$ - решение однородного

Найдем частное решение в следующем виде:
$a_n = A \cdot 2^n$
$a_{n-1} = A \cdot 2^{n-1}$
Подставим в изначальное уравнение:
$A \cdot 2^n = 3A \cdot 2^{n-1} + 2^n$

$2A \cdot 2^{n-1} = 3A \cdot 2^{n-1} + 2^n$
$-2^n = A \cdot 2^{n-1}$
$A = -2$
Частное решение:
$a_n = -2 \cdot 2^n$
$a_n = -2^{n+1}$
Общее решение:
$a_n = C \cdot 3^n - 2^{n+1}$
Найдем С:
$a_0 = C - 2 = 5$
$C = 7$

Общее решение:
$a_n = 7 \cdot 3^n - 2^{n+1}$

Проверка
$7 \cdot 3^n - 2^{n+1} =?21 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 2^n$
$7 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n =?7 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + 2^n$
$2^n =?2^n$
$0 = 0$
Проверено

Первые несколько членов
$a_0 = 5$
$a_1 = 17 = 3a_0 + 2^1 = 7 \cdot 3^1 - 2^2$
$a_2 = 55 = 3a_1 + 2^2 = 7 \cdot 3^2 - 2^3$
$a_3 = 173 = 3a_2 + 2^3 = 7 \cdot 3^3 - 2^4$
$a_4 = 535 = 3a_3 + 2^4 = 7 \cdot 3^4 - 2^5$
$a_5 = 1637 = 3a_4 + 2^5 = 7 \cdot 3^5 - 2^6$

Ответ: $a_n = 7 \cdot 3^n - 2^{n+1}$

1.4

d) $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ **with** $n_0 = 1, n_1 = 17$**.** Будем решать как однородное реккурентное соотношение:
$k^2 = 4k + 5$
$k = -1, k = 5$
Решение имеет вид:
$a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 5^n$
Найдем A и B
$a_0 = A + B$
$a_1 = -A + 5B$

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -A+5B=17. \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=1, \\ 6B=18. \end{cases} \quad \begin{cases} A=-2, \\ B=3. \end{cases}$$

Решение
$a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$
Проверка
$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = ?12 \cdot 5^{n-1} - 8 \cdot (-1)^{n-1} + 15 \cdot 5^{n-2} - 10 \cdot (-1)^{n-2}$
$75 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2} = ?60 \cdot 5^{n-2} + 8 \cdot (-1)^{n-2} + 15 \cdot 5^{n-2} - 10 \cdot (-1)^{n-2}$
$75 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2} = ?75 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2}$
$0 = 0$
Проверено

Первые 5 членов
$a_0 = 1$
$a_1 = 17$
$a_2 = 73 = 4a_1 + 5a_0 = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot (-1)^2$
$a_3 = 377 = 4a_2 + 5a_1 = 3 \cdot 5^3 - 2 \cdot (-1)^3$
$a_4 = 1873 = 4a_3 + 5a_2 = 3 \cdot 5^4 - 2 \cdot (-1)^4$
$a_5 = 9377 = 4a_4 + 5a_3 = 3 \cdot 5^5 - 2 \cdot (-1)^5$
$a_6 = 46873 = 4a_5 + 5a_4 = 3 \cdot 5^6 - 2 \cdot (-1)^6$

Ответ: $a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$

1.5

e) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ **with** $n_0 = 3, n_1 = 11$**.** Будем решать как однородное реккурентное соотношение:
$k^2 = 4k - 4$
$k = 2$ (дважды)
Решение имеет вид:
$a_n = (A \cdot n + B)2^n$
Найдем A и B
$a_0 = B$
$a_1 = 2(A + B)$

$$\begin{cases} B=3, \\ 2(A+B)=11. \end{cases} \quad \begin{cases} B=3, \\ A=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Решение
$a_n = (\frac{5}{2} \cdot n + 3)2^n$
Проверка
$(\frac{5}{2} \cdot n + 3)2^n = ?4(\frac{5}{2} \cdot (n-1) + 3)2^{n-1} - 4(\frac{5}{2} \cdot (n-2) + 3)2^{n-2}$

$(\frac{5}{2}\cdot n+3)2^n =?2(\frac{5}{2}\cdot(n-1)+3)2^n-(\frac{5}{2}\cdot(n-2)+3)2^n$
$\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n+3\cdot 2^n =?5\cdot(n-1)\cdot 2^n+6\cdot 2^n-\frac{5}{2}\cdot(n-2)\cdot 2^n+3\cdot 2^n$
$\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n+3\cdot 2^n =?5\cdot n\cdot 2^n-5\cdot 2^n+6\cdot 2^n-\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n+5\cdot 2^n-3\cdot 2^n$
$\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n =?5\cdot n\cdot 2^n-\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n$
$\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n =?\frac{5}{2}\cdot n\cdot 2^n$
$0=0$
Проверено
Первые несколько членов
$a_0=3$
$a_1=11$
$a_2=32=4a_1-4a_0=(\frac{5}{2}\cdot 2+3)2^2$
$a_3=84=4a_2-4a_1=(\frac{5}{2}\cdot 3+3)2^3$
$a_4=208=4a_3-4a_2=(\frac{5}{2}\cdot 4+3)2^4$
$a_5=496=4a_4-4a_3=(\frac{5}{2}\cdot 5+3)2^5$
$a_6=1152=4a_5-4a_4=(\frac{5}{2}\cdot 6+3)2^6$

Ответ: $a_n=(\frac{5}{2}\cdot n+3)2^n$

1.6

f) $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$ **with** $n_{0,1,2}=3,2,6$**.**
Будем решать как однородное реккурентное соотношение:
$k^3=2k^2+k-2$
$k=-1,k=1,k=2$
Решение имеет вид:
$a_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot(1)^n+C\cdot 2^n$
$a_n=A\cdot(-1)^n+B+C\cdot 2^n$
Найдем A,B,C
$a_0=A+B+C$
$a_1=-A+B+2C$
$a_2=A+B+4C$

$$\begin{cases} A+B+C=3, \\ -A+B+2C=2, \\ A+B+4C=6. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=1. \end{cases}$$

Решение
$a_n=(-1)^n+1+2^n$
Проверка
$(-1)^n+1+2^n =?2\cdot(-1)^{n-1}+2+2\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-2}+1+2^{n-2}-2\cdot(-1)^{n-3}-2-2\cdot 2^{n-3}$
$(-1)^n+2^n =?2\cdot(-1)^{n-1}+2^n+(-1)^{n-2}+2^{n-2}-2\cdot(-1)^{n-3}-2^{n-2}$
$(-1)^n =?2\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}-2\cdot(-1)^{n-3}$
$-(-1)^{n-3} =?2\cdot(-1)^{n-3}-(-1)^{n-3}-2\cdot(-1)^{n-3}$

$-(-1)^{n-3} =? - (-1)^{n-3}$
$0 = 0$
Проверено
Первые несколько членов
$a_0 = 3$
$a_1 = 2$
$a_2 = 6$
$a_3 = 8 = 2a_2 + a_1 - 2a_0 = (-1)^n + 1 + 2^n$
$a_4 = 18 = 2a_3 + a_2 - 2a_1 = (-1)^n + 1 + 2^n$
$a_5 = 32 = 2a_4 + a_3 - 2a_2 = (-1)^n + 1 + 2^n$
$a_6 = 66 = 2a_4 + a_4 - 2a_3 = (-1)^n + 1 + 2^n$
$a_7 = 128 = 2a_6 + a_5 - 2a_4 = (-1)^n + 1 + 2^n$

Ответ: $a_n = (-1)^n + 1 + 2^n$

Задача 2

Solve the following recurrences by applying the Master theorem. For the cases where the Master theorem does not apply, use the Akra–Bazzi method. In cases where neither of these two theorems apply, explain why and solve the recurrence relation by closely examining the recursion tree. Solutions must be in the form $T(n) \in \theta(\ldots)$.

Решите следующие рекуррентные задачи, применяя теорему Мастера. Для случаев, когда теорема Мастера теорема не применима, используйте метод Акра-Баззи. В случаях, когда ни одна из этих двух теорем не применима объясните почему и решите рекуррентное соотношение, внимательно изучив дерево рекурсии. Решения должны быть в форме T (n) $\in \theta(...)$.

2.1

a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$**.**
Выполняются все требования для Мастер теоремы:
$a = 2 \in \mathbb{N}, b = 2 \in \mathbb{R}, b > 1$
$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_2 2 = 1$

Первый случай?
$n \in O(n^c)$, где $c < 1$
Неправда

Второй случай?
$n \in \theta(n \log^k n)$
Верно для k=0. А значит:

Ответ: $T(n) \in \theta(n \log n)$

2.2

b) $T(n) = T(\frac{3n}{4}) + T(\frac{n}{4}) + n$**.**
В данном случае Мастер теорема не применима, так как T(n) зависит от нескольких предыдущих членов.
Выполняются все требования для метода Акра-Баззи:
$a_{1,2} = 1(>0, \text{const}), b_1 = \frac{3}{4}(\text{const}), b_2 = \frac{1}{4}(\text{const}), 0 < b_{1,2} < 1, n \in O(n^1)$
Найдем такое p, что:
$(\frac{3}{4})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$
$p = 1$
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^1(1 + \int\limits_1^n \frac{t}{t^{1+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln t\Big|_1^n))$

$T(n) \in \theta(n(1 + \ln n)$
$T(n) \in \theta(n + n \ln n)$
Ответ: $T(n) \in \theta(n \log n)$

2.3

c) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$
Выполняются все требования для Мастер теоремы:
$a = 3 \in \mathbb{N}, b = 2 \in \mathbb{R}, b > 1$
$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_2 3 > 1$

Первый случай?
$n \in O(n^c)$, где $c < \log_2 3$
Верно для с = 1.А значит:

Ответ: $T(n) \in \theta(n^{\log_2 3})$

2.4

d) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$**.**
Попробуем применить Мастер Теорему.

$$c_{\text{crit}} = \log_b^a = \log_2^2 = 1$$

Для удобства сразу сделаю некоторые расчеты которые потом пригодятся:
По свойствам, которые были даны на лекции:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \neq \infty \Rightarrow f \in O(g) \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, c \neq 0, c \neq \infty \Rightarrow f \in \theta(g) \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \neq 0 \Rightarrow f \in \Omega(g) \tag{2.3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\log n \cdot n^c} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1-c}}{\log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-c)n^{-c}}{\frac{1}{n \cdot ln(2)}} = (1-c)ln(2) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^c}$
При с >= 1: $f(n) = \frac{n}{\log n} \in O(n^c)$
При с < 1: $f(n) = \frac{n}{\log n} \in \Omega(n^c)$

Можем заметить, что первый случай Мастер теоремы($f(n) \in O(n^c)$, где $c < 1$) не выполняется, как и третий ($f(n) \in \Omega(n^c)$, где $c > 1$)
Проверим может ли выполняться второй случай (я знаю про существование расширенной Ма-

стер теоремы, но показалось нелегальным ее применять):
$f(n) = \frac{n}{\log n} \in \theta(n \log^k n)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n \log n \log^k n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log^{k+1} n}$
При k>=0 предел равен бесконечности, а в классической Мастер теореме, применимо только k>=0
Пришли к выводу, что ни один случай из Мастер Теоремы не подходит в данном случае.

К нашему счастью выполняются все требования для метода Акра-Баззи, а именно:
$a = 2(>0, \text{const}), b = \frac{1}{2}(\text{const}), 0 < b < 1, f(n) = \frac{n}{\log n} \in O(n^c)$ при $c >= 1$
Найдем такое p, что:
$2(\frac{1}{2})^p = 1$
$p = 1$
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^1(1 + \int\limits_1^n \frac{t}{\ln t \cdot t^{1+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n^1(1 + \int\limits_1^n \frac{d(\ln t)}{\ln t} dt))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln \ln t \Big|_1^n))$
$T(n) \in \theta(n(1+\ln \ln n - \ln(0 + \alpha))$ где $\alpha-$бесконечно малая(так как логарифм в 0 не существует-рассматриваем как предел справа)
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln \ln n)$
$T(n) \in \theta(n \ln \ln n)$
Ответ: $T(n) \in \theta(n \log \log n)$

2.5

e) $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) + n^2 \log n$**.**
Выполняются все требования для Мастер теоремы:
$a = 6 \in \mathbb{N}, b = 3 \in \mathbb{R}, b > 1$
$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_3 6 \approx 1,63$

Первый случай?
$n^2 \log n \in O(n^c)$, где $c < \log_3 6$
Неправда

Третий случай?
$n^2 \log n \in \Omega(n^c)$, где $c > \log_3 6$
Верно для c = 2.
Проверим, что существует такое k<1, что:
$6(\frac{n}{3})^2 \log \frac{n}{3} <= kn^2 \log n$
$\frac{6}{9}(\log n - \log 3) <= k \log n$
$-\frac{2}{3} \log 3 <= (k - \frac{2}{3}) \log n$

Верно, например, для $k = \frac{8}{9}$
А значит:
Ответ: $T(n) \in \theta(n^2 \log n)$

2.6

f) $T(n) = T(\frac{3n}{4}) + n \log n$**.**
Выполняются все требования для Мастер теоремы:
$a = 1 \in \mathbb{N}, b = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}, b > 1$
$c_{\text{crit}} = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$

Первый случай?
$n \in O(n^c)$, где $c < 0$
Неправда

Третий случай?
$n \log n \in \Omega(n^c)$, где $c > 0$
Верно для c = 1.
Проверим, что существует такое k<1, что:
$\frac{3n}{4} \log \frac{3n}{4} <= kn \log n$
$\frac{3}{4} \log \frac{3n}{4} <= k \log n$
$\frac{3}{4}(\log n + \log 3 - \log 4) <= k \log n$
$\frac{3}{4}(\log 3 - \log 4) <= (k - \frac{3}{4}) \log n$
Верно, например, для $k = \frac{7}{8}$
А значит:
Ответ: $T(n) \in \theta(n \log n)$

2.7

g) $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n.$
В данном случае Мастер теорема не применима, так как T(n) зависит от нескольких предыдущих членов.
Можем представить T(n) как:
$T(n) = T(\frac{n}{2} + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2} + \lceil \frac{n}{2} \rceil - \frac{n}{2}) + n.$
Тогда выполняются все требования для метода Акра-Баззи:
$a_{1,2} = 1(>0, \text{const}), b_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{const}), 0 < b_{1,2} < 1, n \in O(n^1)$
Проверим, что погрешность $|h_i| \in O(\frac{n}{\log^2 n})$
$|\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \frac{n}{2}| <= 1$
$|\lceil \frac{n}{2} \rceil - \frac{n}{2}| <= 1$
Легко убедимся, что $1 \in O(\frac{n}{\log^2 n})$:
Вспомним (2.1)
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log^2 n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2 \log n}{\ln 2n}}{1} = \frac{2}{\ln 2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

Теперь применим, наконец, метод Акра-Баззи:
Найдем такое p, что:
$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{2})^p = 1$
$p = 1$
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^1(1 + \int\limits_1^n \frac{t}{t^{1+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln t\Big|_1^n))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln n))$
$T(n) \in \theta(n + n \ln n)$
Ответ: $T(n) \in \theta(n \log n)$

2.8

h) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + 1.$
В данном случае Мастер теорема не применима, так как T(n) зависит от нескольких предыдущих членов.
Выполняются все требования для метода Акра-Баззи:
$a_{1,2} = 1(>0, \text{const}), b_1 = \frac{1}{2}(\text{const}), b_2 = \frac{1}{4}(\text{const}), 0 < b_{1,2} < 1, 1 \in O(n^0)$
Найдем такое p, что:
$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$
$p = \log_2(1 + \sqrt{5}) - 1 \approx 0,6942$
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \int\limits_1^n \frac{1}{t^{p+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \int\limits_1^n t^{-(p+1)} dt))$
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \frac{-1}{pt^p}\Big|_1^n))$
$T(n) \in \theta(n^p(1 - \frac{1}{pn^p} + \frac{1}{p}))$
$T(n) \in \theta(n^p - \frac{1}{p} + \frac{n^p}{p})$
$T(n) \in \theta(n^p)$
$T(n) \in \theta(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1})$
Ответ: $T(n) \in \theta(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1})$

2.9

i) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{6}) + n$
В данном случае Мастер теорема не применима, так как T(n) зависит от нескольких преды-

дущих членов.
Выполняются все требования для метода Акра-Баззи:
$a_{1,2,3} = 1(>0, \text{const}), b_1 = \frac{1}{2}(\text{const}), b_2 = \frac{1}{3}(\text{const}), b_3 = \frac{1}{6}(\text{const}), 0 < b_{1,2,3} < 1, n \in O(n)$
Найдем такое p, что:
$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{3})^p + (\frac{1}{6})^p = 1$
$p = 1$
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^1(1 + \int\limits_1^n \frac{t}{t^{1+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln t\Big|_1^n))$
$T(n) \in \theta(n(1 + \ln n)$
$T(n) \in \theta(n + n\ln n)$
Ответ: $T(n) \in \theta(n \log n)$

2.10

j) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 2T(\frac{2n}{3}) + n$
В данном случае Мастер теорема не применима, так как T(n) зависит от нескольких предыдущих членов.
Выполняются все требования для метода Акра-Баззи:
$a_{1,2} = 2(>0, \text{const}), b_1 = \frac{1}{2}(\text{const}), b_2 = \frac{2}{3}(\text{const}), 0 < b_{1,2} < 1, n \in O(n)$
Найдем такое p, что:
$2(\frac{1}{3})^p + 2(\frac{2}{3})^p = 1$
$p \approx 2.19629$ (я писала по поводу данного задания Константину Игоревичу, он сказал "достаточно просто приписать приблизительное значение")
Тогда:
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \int\limits_1^n \frac{t}{t^{p+1}} dt))$
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \frac{1}{(1-p)t^{p-1}}\Big|_1^n))$
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \frac{1}{(1-p)n^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)})$
$T(n) \in \theta(n^p(1 + \frac{1}{(p-1)}) + \frac{n}{(1-p)})$
$T(n) \in \theta(n^p)$
$T(n) \in \theta(n^{2.19629})$
Ответ: $T(n) \in \theta(n^p)$, где p - решение $2(\frac{1}{3})^p + 2(\frac{2}{3})^p = 1$

2.11

k) $T(n) = T(n) = \sqrt{2n}T(\sqrt{2n}) + \sqrt{n}$.
Не применима Мастер теорема и метод Акра-Баззи, например, потому что a - не константа и не натуральное.
Изучим дерево рекурсии, в столбце each- работа для каждой подпроблемы на уровне, count- количество подпроблем на уровне, total - общая работа на уровне, size - текущее "n"

Height	Size	Each	Count	Total
1	n	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{n}$
2	$\sqrt{2n}$	$\sqrt[4]{2n}$	$\sqrt{2n}$	$\sqrt[4]{8n^3}$
3	$\sqrt{2\sqrt{2n}}$	$\sqrt[4]{2\sqrt{2n}}$	$\sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n}$	$2\sqrt[8]{32n^7}$
4	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}$	$\sqrt[4]{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n}$	$4\sqrt[16]{2^9 n^{15}}$
5	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}}$	$\sqrt[4]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n}$	$8\sqrt[32]{2^{17} n^{31}}$
k	$\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2^{2^{k-1}-1}n}}}$	$\sqrt{2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{k-1}}}}$	$2^{k-1} \cdot (\frac{n}{2})^{1-\frac{1}{2^{k-1}}}$	$\sqrt{2} \cdot n \cdot 2^{k-2} \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^k}}$

Изучим, чему равно $\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2n}}}$ (H-1 корней) $= \sqrt{\sqrt{...\sqrt{2^{2^{H-2}+2^{H-3}+...+2^0}n}}} = \sqrt{\sqrt{...\sqrt{2^{2^{H-1}-1}n}}} = (2^{2^{H-1}-1}n)^{\frac{1}{2^{H-1}}} = 2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{H-1}}}$

Рассмотрим произведение : $\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2n}}}$ (H-1 корней) $\cdot \sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2n}}}$ (H-2 корней) $\cdot ... \cdot \sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n} = \prod_{k=2}^{H} 2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{k-1}}} = 2^{H-1} \cdot (\frac{n}{2})^{\sum_{k=2}^{H} \frac{1}{2^{k-1}}} = 2^{H-1} \cdot (\frac{n}{2})^{1-\frac{1}{2^{H-1}}}$

Рассмотрим Total:
$\sqrt{2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{k-1}}}} \cdot 2^{k-1} \cdot (\frac{n}{2})^{1-\frac{1}{2^{k-1}}} = 2^{k-1} \cdot \sqrt{2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{k-1}}} \cdot (\frac{n}{2})^{2-\frac{2}{2^{k-1}}}} = 2^{k-1} \cdot \sqrt{2 \cdot (\frac{n}{2})^{2-\frac{1}{2^{k-1}}}} = 2^{k-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \sqrt{(\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^{k-1}}}} = 2^{k-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^k}} = 2^{k-2} \cdot \sqrt{2} \cdot n \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^k}}$

$T(n) \in \Theta(\sqrt{n} + \sqrt{2} \cdot n \cdot \sum_{i=2}^{H} (2^{i-2} \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^i}})$, где H-высота дерева рекурсии
$H \in \Theta(\log \log \frac{n}{2})$, потому что:
$T(2)$ циклится и его можно получить только из $T(2)$.
Округлим для удобства глубину рекурсии до $T(4)$

$\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2n}}} = 4$

$\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2^{2^{H-1}-1}n}}} = 4$

$(2^{2^{H-1}-1}n)^{\frac{1}{2^{H-1}}} = 4$

$(2^{2^{H-1}}\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{H-1}}} = 4$

$2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{H-1}}} = 4$

$(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^{H-1}}} = 2$

$\frac{1}{2^{H-1}} \cdot \log \frac{n}{2} = \log 2$
$2^{1-H} = \frac{\log 2}{\log \frac{n}{2}}$
$(1-H)\log 2 = \log \frac{\log 2}{\log \frac{n}{2}}$
$(1-H)\log 2 = \log\log 2 - \log\log \frac{n}{2}$
$(H-1)\log 2 = \log\log \frac{n}{2} - \log\log 2$
$H\log 2 = \log\log \frac{n}{2} - \log\log 2 + \log 2$
$H \in \Theta(\log\log \frac{n}{2})$

Тогда:

$T(n) \in \Theta(\sqrt{n} + \sqrt{2} \cdot n \cdot \sum_{i=2}^{\log\log \frac{n}{2}} (2^{i-2} \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^i}})$

Ответ: $T(n) \in \Theta(\sqrt{n} + \sqrt{2} \cdot n \cdot \sum_{i=2}^{\log\log \frac{n}{2}} (2^{i-2} \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2^i}})$
Так как ответ слишком некрасивый... хотя бы ради себя я решила методом замены:
Можно сделать замену и свести задачу к Мастер теореме:
$n = 2^{k+1}, \sqrt{n} = 2^{\frac{k+1}{2}}, \sqrt{2n} = 2^{\frac{k+2}{2}} = 2^{\frac{k}{2}+1}, k = log_2 n - 1$

$T(2^{k+1}) = 2^{\frac{k}{2}+1} \cdot T(2^{\frac{k}{2}+1}) + 2^{\frac{k+1}{2}}$
$\frac{T(2^{k+1})}{2^{k+1}} = 2^{-\frac{k}{2}} \cdot T(2^{\frac{k}{2}+1}) + 2^{-\frac{k+1}{2}}$
$\frac{T(2^{k+1})}{2^{k+1}} = 2 \cdot \frac{T(2^{\frac{k}{2}+1})}{2^{\frac{k}{2}+1}} + 2^{-\frac{k+1}{2}}$

Введем $S(k) = \frac{T(2^{k+1})}{2^{k+1}}$
$S(k) = 2S(\frac{k}{2}) + \frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}}$
Для $S(k)$ Выполняются все требования для Мастер теоремы:
$a = 2 \in \mathbb{N}, b = 2 \in \mathbb{R}, b > 1$
$c_{\text{crit}} = \log_b^a = \log_2^2 = 1$

Первый случай?
$\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}} \in O(k^c)$, где $c < 1$
Это правда. А значит:

$S(k) \in \Theta(k)$
$\frac{T(2^{k+1})}{2^{k+1}} \in \Theta(k)$
$T(2^{k+1}) \in \Theta(2^{k+1} \cdot k)$
$T(n) \in \Theta(n \cdot (log_2 n - 1))$

Ответ: $T(n) \in \Theta(n \log n)$

2.12

l) $T(n) = \sqrt{2n}T(\sqrt{2n}) + n$.

Не применима Мастер теорема и метод Акра-Баззи, например, потому что a - не константа и не натуральное.

Изучим дерево рекурсии, в столбце each- работа для каждой подпроблемы на уровне, count- количество подпроблем на уровне, total - общая работа на уровне

Height	Each	Count	Total
0	n	1	n
1	$\sqrt{2n}$	$\sqrt{2n}$	2n
2	$\sqrt{2\sqrt{2n}}$	$\sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n}$	4n
3	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2n}}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n}$	8n
k	$2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^k}}$	$2^k \cdot (\frac{n}{2})^{1-\frac{1}{2^k}}$	$2^k n$

Общие формулы взяты из прошлого пункта.

$T(n) \in \Theta(\sum\limits_{i=0}^{H} 2^i n)$, где H-высота дерева рекурсии

$H \in \Theta(\log\log\frac{n}{2})$, потому что:

$T(2)$ циклится и его можно получить только из $T(2)$.

Округлим для удобства глубину рекурсии до $T(4)$

$\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2n}}} = 4$

$\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2^{2^{H}-1}n}}} = 4$

$(2^{2^H-1}n)^{\frac{1}{2^H}} = 4$

$(2^{2^H}\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^H}} = 4$

$2 \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^H}} = 4$

$(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2^H}} = 2$

$\frac{1}{2^H} \cdot \log\frac{n}{2} = \log 2$

$2^{-H} = \frac{\log 2}{\log\frac{n}{2}}$

$(-H)\log 2 = \log\frac{\log 2}{\log\frac{n}{2}}$

$(-H)\log 2 = \log\log 2 - \log\log\frac{n}{2}$

$H\log 2 = \log\log\frac{n}{2} - \log\log 2$

$H\log 2 = \log\log\frac{n}{2} - \log\log 2$

$H \in \Theta(\log\log\frac{n}{2})$

Тогда:

$\sum\limits_{i=0}^{H} 2^i n = n \cdot \sum\limits_{i=0}^{H} 2^i = n \cdot (2^{\log\log\frac{n}{2}+1} - 1)$

$T(n) \in \Theta(n \cdot 2^{\log\log\frac{n}{2}})$

$T(n) \in \Theta(n \cdot \log\frac{n}{2})$

Ответ: $T(n) \in \Theta(n\log n)$

Задача 3

Consider a recurrence relation $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ with $a_0 = a_1 = 2$. Solve it (i.e. find a closed formula) and show how it can be used to estimate the value of $\sqrt{3}$ (hint: observe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$). After that, devise an algorithm for constructing a recurrence relation with integer coefficients and initial conditions that can be used to estimate the square root $\sqrt{k}$ of a given integer k.

Рассмотрим рекуррентное соотношение $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ с $a_0 = a_1 = 2$. Решите его (т.е. найдите замкнутую формулу) и покажите, как его можно использовать для оценки значения $\sqrt{3}$ (подсказка: соблюдайте $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$). После этого разработайте алгоритм построения рекуррентного соотношения с целочисленными коэффициентами и начальными условиями, которое можно использовать для оценки квадратного корня $\sqrt{k}$ из заданного целого числа k.
Решим соотношение:
$m^2 = 2m + 2$
$m = 1 - \sqrt{3}, m = 1 + \sqrt{3}$
$a_n = A(1-\sqrt{3})^n + B(1+\sqrt{3})^n$
Найдем A и B
$a_0 = A + B$
$a_1 = A(1-\sqrt{3}) + B(1+\sqrt{3})$

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ A(1-\sqrt{3}) + B(1+\sqrt{3}) = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

$a_n = (1-\sqrt{3})^n + (1+\sqrt{3})^n$
Рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{3})^n + (1+\sqrt{3})^n}{(1-\sqrt{3})^{n-1} + (1+\sqrt{3})^{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$
$\sqrt{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1$
Таким образом подбирая все больше и больше n мы будем получать все более точное значение $\sqrt{3}$
Решим для общего случая:
Корни $m = 1 - \sqrt{k}, m = 1 + \sqrt{k}$ задают характеристическое уравнение $m^2 = 2m + k - 1$
Рассмотрим рекуррентное соотношение: $b_n = 2b_{n-1} + (k-1)b_{n-2}$
Его решение: $b_n = (1-\sqrt{k})^n + (1+\sqrt{k})^n$
Рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{k})^n + (1-\sqrt{k})^n}{(1+\sqrt{k})^{n-1} + (1-\sqrt{k})^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{k})^n + (1-\sqrt{k})^n}{\frac{(1+\sqrt{k})^n}{1+\sqrt{k}} + \frac{(1-\sqrt{k})^n}{1-\sqrt{k}}} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (\frac{(1-\sqrt{k})}{1+\sqrt{k}})^n}{\frac{1}{1+\sqrt{k}} + \frac{(1-\sqrt{k})^n}{(1-\sqrt{k})(1+\sqrt{k})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-k)(1 + (\frac{(1-\sqrt{k})}{1+\sqrt{k}})^n)}{1-\sqrt{k} + \frac{(1+\sqrt{k})(1-\sqrt{k})^n}{(1+\sqrt{k})^n}} = \frac{1-k}{1-\sqrt{k}}$
Домножаем на сопряжённое и получаем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \sqrt{k} + 1$

$\sqrt{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} - 1$
где $b_n = 2b_{n-1} + (k-1)b_{n-2}$ with $b_0 = b_1 = 2$ Таким образом подбирая все больше и больше n мы будем получать все более точное значение $\sqrt{k}$
Ответ: $\sqrt{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} - 1$ где $b_n = 2b_{n-1} + (k-1)b_{n-2}$ with $b_0 = b_1 = 2$

Задача 4

Find a closed formula for the n-th term of the sequence with generating function $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$

Найдите замкнутую формулу для n-го члена последовательности с производящей функцией $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$.

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`
$\frac{1}{1-4x}$ имеет вид:
$(1, 4, 16...4^n)$
$\frac{3}{1-4x}$ имеет вид:
$(3 \cdot 1, 3 \cdot 4, 3 \cdot 16...3 \cdot 4^n)$
$\frac{3x}{1-4x}$ имеет вид:
$(0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 4, 3 \cdot 16...3 \cdot 4^{n-1})$
$\frac{1}{1-x}$ имеет вид:
$(1, 1, 1...1)$

Тогда $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$ имеет вид:
$(1, 1 + 3 \cdot 1, 1 + 3 \cdot 4, 1 + 3 \cdot 16...1 + 3 \cdot 4^{n-1})$
Ответ:

$$\begin{cases} 1 + 3 \cdot 4^{n-1} & \text{n} > 0 \\ 1 & \text{n} = 0 \end{cases}$$

Задача 5

Given the generating function $G(x) = \frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}$, decompose it into partial fractions and find the sequence that it represents.

Учитывая порождающую функцию $G(x) = \frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}$, разложите ее на частичные дроби и найдите последовательность, которую она представляет.

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`
$\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} = \frac{Ax^2+A-2Ax+B-Bx+C}{(1-x)^3}$

$$\begin{cases} A = 5, \\ -2A - B = 2, \\ A + B + C = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5, \\ B = -12, \\ C = 8. \end{cases}$$

$\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3} = \frac{5}{1-x} + \frac{-12}{(1-x)^2} + \frac{8}{(1-x)^3}$

$\frac{5}{1-x}$ имеет вид:
$(5, 5, 5...5)$
$\frac{-12}{(1-x)^2}$ имеет вид:
$(-12 \cdot 1, -12 \cdot 2, -12 \cdot 3... - 12 \cdot (n+1))$
$\frac{8}{(1-x)^3}$ имеет вид:
$(8 \cdot 1, 8 \cdot C_3^1, 8 \cdot C_{3+1}^2 ... 8 \cdot C_{3+n-1}^n)$
$(8 \cdot 1, 8 \cdot C_3^1, 8 \cdot C_4^2 ... 8 \cdot C_{2+n}^2)$

$\frac{5}{1-x} + \frac{-12}{(1-x)^2} + \frac{8}{(1-x)^3}$ имеет вид:
$(1, 5, 17...8 \cdot C_{2+n}^2 - 12 \cdot (n+1) + 5)$
$a_n = 8 \cdot C_{2+n}^2 - 12 \cdot (n+1) + 5$
$a_n = 4(n+1)(n+2) - 12 \cdot (n+1) + 5$
$a_n = 4n^2 + 1$
Ответ $(1, 5, 17...4n^2 + 1)$

Задача 6

Pell-Lucas numbers are defined by $Q_0 = Q_1 = 2$ and $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ for n >= 2. Derive the corresponding generating function and find a closed formula for the n-th Pell-Lucas number.

Числа Пелла-Лукаса определяются $Q_0 = Q_1 = 2$ и $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ для n >= 2. Выведите соответствующую порождающую функцию и найдите замкнутую формулу для n-го числа Пелла-Лукаса.

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`

$$\begin{cases} Q_0 = 2, \\ Q_1 = 2, \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_0 \cdot z^0 = 2 \cdot z^0, \\ Q_1 \cdot z^1 = 2 \cdot z^1, \\ Q_n \cdot z^n = (2Q_{n-1} + Q_{n-2}) \cdot z^n. \end{cases}$$

Просуммируем уравнения:
$\sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^i = 2 + 2z + \quad \sum_{i=2}^{n} (2Q_{i-1} + Q_{i-2}) \cdot z^i$
$\sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^i = 2 + 2z + \quad \sum_{i=2}^{n} 2Q_{i-1} \cdot z^i + \quad \sum_{i=2}^{n} Q_{i-2} \cdot z^i$
$\sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^i = 2 + 2z + \quad \sum_{i=1}^{n} 2Q_i \cdot z^{i+1} + \quad \sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^{i+2}$
$\sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^i = 2 + 2z + 2z \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot z^i + z^2 \quad \sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot z^i$
Обозначим нашу порождающую функцию $G(z)$
$G(z) = 2 + 2z + 2z(G(z) - a_0) + z^2 \cdot G(z)$
$G(z) = 2 + 2z + 2z(G(z) - 2) + z^2 \cdot G(z)$
$G(z) = 2 + 2z + 2z \cdot G(z) - 4z + z^2 \cdot G(z)$
$G(z) = 2 - 2z + 2z \cdot G(z) + z^2 \cdot G(z)$
$G(z)(1 - 2z - z^2) = 2 - 2z$
$G(z) = \frac{2-2z}{1-2z-z^2}$

Разложим на простые дроби
$\frac{2-2z}{1-2z-z^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-1-x} + \frac{B}{-\sqrt{2}-1-x}$

$$\begin{cases} A = \sqrt{2} - 1, \\ B = -\sqrt{2} - 1. \end{cases}$$

$G(z) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1-x} + \frac{-\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}-1-x}$
Домножим на сопряжённое:
$G(z) = \frac{1}{1-(1+\sqrt{2})x} + \frac{1}{1-(1-\sqrt{2})x}$

$\frac{1}{1-(1+\sqrt{2})x}$ имеет вид:
$(1, 1 + \sqrt{2}, (1 + \sqrt{2})^2 ... (1 + \sqrt{2})^n)$
$\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})x}$ имеет вид:
$(1, 1 - \sqrt{2}, (1 - \sqrt{2})^2 ... (1 - \sqrt{2})^n)$
$G(x)$ имеет вид
$(2, 2, (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 ... (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n)$

Итого $Q_n = (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n$

Задача 7

For each given recurrence relation, derive the corresponding generating function and find a closed formula for the n-th term of the sequence.

Для каждого заданного рекуррентного соотношения выведите соответствующую порождающую функцию и найдите замкнутую формулу для n-го члена последовательности.

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`

7.1

a) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ **with** $a_0 = 3$ **and** $a_1 = 5$**.**

$$\begin{cases} a_0 \cdot z^0 = 3 \cdot z^0 \\ a_1 \cdot z^1 = 5 \cdot z^1 \\ a_n \cdot z^n = (2a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot z^n \end{cases} \tag{7.1}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 3 + 5z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} ((2a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot z^n)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 3 + 5z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} \cdot z^n) - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 3 + 5z + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot z^{n+1}) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{n+2}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 3 + 5z + 2z\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot z^n) - z^2\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$
$G(z) = 3 + 5z + 2z(G(z) - a_0) - z^2G(z)$
$G(z) = 3 + 5z + 2z(G(z) - 3) - z^2G(z)$
$G(z) = 3 + 5z + 2zG(z) - 6z - z^2G(z)$
$G(z)(z^2 - 2z + 1) = 3 - z$
$G(z) = \frac{3-z}{(1-z)^2}$
$G(z) = \frac{1}{(1-z)} + \frac{2}{(1-z)^2}$
$(1, 1, 1...1) + (1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2...(n+1) \cdot 2$
$(1 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 2 + 1, 3 \cdot 2 + 1...(n+1) \cdot 2 + 1)$
А значит:
$a_n = (n+1) \cdot 2 + 1$
Ответ: $a_n = 2n + 3$

7.2

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ **with** $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 5$**.**

$$\begin{cases} a_0 \cdot z^0 = 1 \cdot z^0 \\ a_1 \cdot z^1 = 1 \cdot z^1 \\ a_2 \cdot z^2 = 5 \cdot z^2 \\ a_n \cdot z^n = (a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}) \cdot z^n \end{cases} \tag{7.2}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 + z + 5z^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} ((a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}) \cdot z^n)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 + z + 5z^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n + \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n - \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-3} \cdot z^n$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 + z + 5z^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n + \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n - \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-3} \cdot z^n$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 + z + 5z^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^{n+2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{n+3}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 + z + 5z^2 + z\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n + z^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n - z^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$
$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z(G(z) - a_0 - a_1 z) + z^2(G(z) - a_0) - z^3 G(z)$
$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z(G(z) - 1 - z) + z^2(G(z) - 1) - z^3 G(z)$
$G(z)(1 - z - z^2 + z^3) = 1 + z + 5z^2 - z - 2z^2$
$G(z)(1 - z - z^2 + z^3) = 1 + 3z^2$
$G(z) = \frac{1+3z^2}{1-z-z^2+z^3}$
$G(z) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2}$
$(1, -1, 1 ... (-1)^n) - (2, 2, 2 ... 2) + (1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 ... (n+1) \cdot 2)$
$(1 + 1 \cdot 2 - 2, 2 \cdot 2 - 1 - 2 ... (-1)^n - 2 + (n+1) \cdot 2$
А значит:
$a_n = (-1)^n - 2 + (n+1) \cdot 2$
$a_n = (-1)^n + 2n$
Ответ: $a_n = (-1)^n + 2n$

7.3

c) $a_n = a_{n-1} + n$ with $a_0 = 0$

$$\begin{cases} a_0 \cdot z^0 = 0 \cdot z^0 \\ a_n \cdot z^n = (a_{n-1} + n) \cdot z^n \end{cases} \tag{7.3}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ((a_{n-1} + n) \cdot z^n)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} \cdot z^n) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n \cdot z^n)$

Вторую сумму раскроем через производящие функции:
Понятно, что это (только сдвинутое направо(т.е умноженное на z)):

6	$(1, 2, 3, 4, \ldots)$	$\sum (n+1)z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot z^n) + \frac{z}{(1-z)^2}$
$G(z) = zG(z) + \frac{z}{(1-z)^2}$
$G(z)(1-z) = \frac{z}{(1-z)^2}$
$G(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$
$G(z) = \frac{-1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-z)^3}$
$(-1, -2, -3... - (n+1)) + (1, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, \binom{5}{3} ... \binom{n+2}{n})$
$(-1, -2, -3... - (n+1)) + (1, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, \binom{5}{3} ... \frac{n^2+3n+2}{2})$
А значит:
$a_n = \frac{n^2+3n+2}{2} - (n+1)$
$a_n = \frac{n^2+n}{2}$
Ответ: $a_n = \frac{n^2+n}{2}$

7.4

d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$ **with** $a_0 = 2, a_1 = 1$**.**

$$\begin{cases} a_0 \cdot z^0 = 2 \cdot z^0 \\ a_1 \cdot z^1 = 1 \cdot z^1 \\ a_n \cdot z^n = (a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n) \cdot z^n \end{cases} \tag{7.4}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 2 + z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} ((a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n) \cdot z^n)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 2 + z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} \cdot z^n) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (2a_{n-2} \cdot z^n) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (2^n \cdot z^n)$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 2 + z + z \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot z^n) + 2z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot z^n) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (2^n \cdot z^n)$
Вторую сумму раскроем через производящие функции:
Понятно, что это:

7	$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$	$\sum 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = 2 + z + z \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot z^n) + 2z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot z^n) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{1-2z} - 1 - 2z)$
$G(z) = 2 + z + z(G(z) - a_0) + 2z^2 G(z) + \frac{1}{1-2z} - 1 - 2z$
$G(z) = 1 - z + z(G(z) - 2) + 2z^2 G(z) + \frac{1}{1-2z}$
$G(z)(1 - z - 2z^2) = 1 - z - 2z + \frac{1}{1-2z}$

$G(z)(1-z-2z^2) = \frac{2-5z+6z^2)}{1-2z}$
$G(z)(1-2z)(z+1) = \frac{2-5z+6z^2)}{1-2z}$
$G(z) = \frac{2-5z+6z^2)}{(1-2z)^2(z+1)}$
$G(z) = \frac{-\frac{1}{9}}{(1-2z)} + \frac{\frac{2}{3}}{(1-2z)^2} + \frac{\frac{13}{9}}{(z+1)}$
Найдем разложение для функции $\frac{1}{(1-2z)^2}$
$\frac{1}{(1-2z)^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-2z})'$
Разложим функцию внутри производной по табличке:
$\frac{1}{(1-2z)^2} = \frac{1}{2}(1, 2 ... 2^n)'$
При взятии производной от степенного ряда формула для n-ого члена получается как производная от n+1 члена: $(2^{n+1} \cdot z^{n+1})' = 2^{n+1} \cdot (n+1) \cdot z^n$
$\frac{1}{(1-2z)^2} = \frac{1}{2}(2, 8 ... 2^{n+1} \cdot (n+1)) = (1, 4, ... 2^n \cdot (n+1))$
$(-\frac{1}{9} \cdot 1, -\frac{1}{9} \cdot 2 ... -\frac{1}{9} \cdot 2^n) + (\frac{2}{3} \cdot 1, \frac{2}{3} \cdot 4, ... \frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (n+1)) + (\frac{13}{9} \cdot 1, -1\frac{13}{9}, 1\frac{13}{9} ... (-1)^n \frac{13}{9})$
А значит:
$a_n = -\frac{1}{9} \cdot 2^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (n+1) + \frac{13}{9}(-1)^n$
$a_n = \frac{5}{9} \cdot 2^n + 2^n \cdot \frac{2n}{3} + \frac{13}{9}(-1)^n$
Ответ: $a_n = \frac{5}{9} \cdot 2^n + 2^n \cdot \frac{2n}{3} + \frac{13}{9}(-1)^n$

Задача 8

Find the number of non-negative integer solutions to the Diophantine equation $3x+5y=100$ using generating functions.

Найти число неотрицательных целочисленных решений для диофантового уравнения $3x+5y=100$ с помощью порождающих функций

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`
Решение
Заметим, что решением будет коэффициент при 100 в следующем выражении (ведь коэффициент при 100 это ничто иное как количество, показывающее сколько раз левая скобка и правая скобка в сумме дали 100(в показателе степени, конечно)) :
$(1+x^3+x^6+...x^{99})(1+x^5+x^{10}+...x^{100})$
коэффициент при 100 равен 7.

$$7x^{104}+7x^{103}+6x^{102}+7x^{101}+7x^{100}+7x^{99}+7x^{98}+6x^{97}+7x^{96}+$$

*Результат можете посмотреть здесь `https://www.wolframalpha.com/input?i=Sum%5BPower%5Bx%2C3i%5D%2C%7Bi%2C0%2C33%7D%5D*Sum%5BPower%5Bx%2C5j%5D%2C%7Bj%2C0%2C20%7D%5D`

Получен он был: $1\cdot x^{100}, x^{15}\cdot x^{85}, x^{30}\cdot x^{70}, x^{45}\cdot x^{55}, x^{60}\cdot x^{40}, x^{75}\cdot x^{25}, x^{90}\cdot x^{10}$
Ответ: 7

Задача 9

Consider a 2n-digit ticket number to be “lucky” if the sum of its first n digits is equal to the sum of its last n digits. Each digit (including the first one!) in a number can take value from 0 to 9. For example, a 6-digit ticket 345 264 is lucky since 3 + 4 + 5 = 2 + 6 + 4.

Считайте, что 2n-значный номер билета "счастливый если сумма его первых n цифр равна сумме его последних n цифр. Каждая цифра (включая первую!) в числе может принимать значение от 0 до 9. Например, 6-значный билет 345 264 является счастливым, так как 3 + 4 + 5 = 2 + 6 + 4

Использовалась эта таблица `https://images.app.goo.gl/ugjFUKFzADEnCrTm7`

9.1

Find the number of lucky 6-digit and 8-digit tickets.
Найти количество 6-тизначных и 8-мизначных счастливых билетиков.

Решение для 6-ти.
Мы вытащили какой-то билетик.Пусть a_i - число на i позиции в билетике
Тогда я точно знаю, что: $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$, где $0 <= a_i <= 9$.
Пусть

$$a_i = 9 - b_i \tag{9.1}$$

Рассмотрим выражение: $a_1 + a_2 + a_3 + b_4 + b_5 + b_6$
$a_1 + a_2 + a_3 + (9 - a_4) + (9 - a_5) + (9 - a_6) = 27$.
$a_1 + a_2 + a_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 27$.
Очевидно, это верно для любого 6-тизначного билетика (так как я не накладывала никаких условий на вытянутый билет).
Найдем количество решений уравнения $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$, где $0 <= a_i <= 9$.
Из-за однозначности замены 9.1 понятно, что определив b_i однозначно определится a_i. Т.е неважно какое уравнение рассматривать(только с a_i или с a_i и b_i)
Найдем количество решений уравнения

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 27, \text{ где } 0 <= a_i <= 9. \tag{9.2}$$

Из 9.1 и $0 <= a_i <= 9$ очевидно $0 <= b_i <= 9$

Зная ограничения для каждой переменной количество решений уравнения 9.5 узнать несложно:

Надо рассмотреть коэффициент при x^{27} в полиноме $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^6$.
Почему?
Коэффициент при x^{27} это ничто иное как количество, показывающее сколько раз исксы из

скобок в произведении(а произведение одночленов вида x^α тесно связанно с суммой показателей степеней) дали x^{27}

Вобьем в Вольфрам:
https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=Power%5B%5C%2840%291+%2B+x+%2B+Power%5Bx%2C2%5D+%2B+Power%5Bx%2C3%5D+%2B+Power%5Bx%2C4%5D+%2B+Power%5Bx%2C5%5D+%2B+Power%5Bx%2C6%5D+%2B+Power%5Bx%2C7%5D+%2B+Power%5Bx%2C8%5D+%2B+Power%5Bx%2C9%5D%5C%2841%29%2C6%5D

$$39662\,x^{33} + 43917\,x^{32} + 47712\,x^{31} + 50877\,x^{30} + 53262\,x^{29} + 54747\,x^{28} +$$
$$55252\,x^{27} + 54747\,x^{26} + 53262\,x^{25} + 50877\,x^{24} + 47712\,x^{23} + 43917\,x^{22} +$$
$$39662\,x^{21} + 35127\,x^{20} + 30492\,x^{19} + 25927\,x^{18} + 21582\,x^{17} + 17577\,x^{16} +$$

Ответ: 55252

Решение для 8-ти.
Проведем аналогичные действия:
Найдем количество решений уравнения $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$, где $0 <= a_i <= 9$.
Пусть

$$a_i = 9 - b_i \tag{9.3}$$

Тогда количество решений уравнения выше равно количеству решений:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 9 * 4 = 36$, где $0 <= a_i, b_i <= 9$.
Надо рассмотреть коэффициент при x^{36} в полиноме $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)^8$.
Вобьем в Вольфрам:
https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=Power%5B%5C%2840%291+%2B+x+%2B+Power%5Bx%2C2%5D+%2B+Power%5Bx%2C3%5D+%2B+Power%5Bx%2C4%5D+%2B+Power%5Bx%2C5%5D+%2B+Power%5Bx%2C6%5D+%2B+Power%5Bx%2C7%5D+%2B+Power%5Bx%2C8%5D+%2B+Power%5Bx%2C9%5D%5C%2841%29%2C8%5D

$$3405600\,x + 3735720\,x + 4038560\,x + 4303545\,x + 4521000\,x +$$
$$4682700\,x^{38} + 4782360\,x^{37} + 4816030\,x^{36} + 4782360\,x^{35} + 4682700\,x^{34} +$$
$$4521000\,x^{33} + 4303545\,x^{32} + 4038560\,x^{31} + 3735720\,x^{30} + 3405600\,x^{29} +$$

Ответ: 4816030

9.2

Find the generating function for the number of 2n-digit lucky tickets.
Найдите порождающую функцию для количества 2n-значных счастливых билетиков .

Пуступаем аналогично 9.1
Мы вытащили какой-то билетик.Пусть a_i - число на i позиции в билетике
Тогда я точно знаю, что: $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}$, где $0 <= a_i <= 9$.

Пусть
$$a_i = 9 - b_i \tag{9.4}$$

Рассмотрим выражение: $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{2n}$
$a_1 + a_2 + ... + a_n + (9 - a_{n+1}) + (9 - a_{n+2}) + ... + (9 - a_{2n}) = 9n$.
$a_1 + a_2 + ... + a_n + b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{2n} = 9n$.

Найдем количество решений уравнения $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}$, где $0 <= a_i <= 9$.

Найдем количество решений уравнения

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{2n} = 9n, \text{ где } 0 <= a_i, b_i <= 9. \tag{9.5}$$

Надо рассмотреть коэффициент при x^{9n} в:
$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^{2n} = (\frac{x^{10}-1}{x-1})^{2n}$.
Ответ: $(\frac{x^{10}-1}{x-1})^{2n}$

9.3

Find a closed formula for the number of 2n-digit lucky tickets.
Найти замкнутую формулу для количества 2n-значных счастливых билетиков.
Бином Ньютона:
Рассмотрим $(1 - x^{10})^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-x^{10})^k$
Используем все ту же табличку:
Рассмотрим $(\frac{1}{(x-1)})^{2n} = (\frac{1}{(1-x)})^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{2n+k-1}{k} x^k$
$G(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-x^{10})^k \sum\limits_{j=0}^{\infty} \binom{2n+j-1}{j} x^j$
$G(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \binom{2n}{k} x^{10k+j} \binom{2n+j-1}{j} \cdot (-1)^k$
Нам нужно значение при x^{9n}
Зная значение к-мы однозначно можем узнать значение j для их суммы 9n
$10k + j = 9n$
Чтобы не уходить в отрицательные степени и вообще лишний раз не итерироваться ограничим $k <= \lfloor \frac{9n}{10} \rfloor$-понятно что это достижимая оценка(возьмем наименьшее j) Тогда ответ:
$\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{9n}{10} \rfloor} \binom{2n}{k} \binom{2n+9n-10k-1}{9n-10k} \cdot (-1)^k$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{9n}{10} \rfloor} \binom{2n}{k}\binom{11n-10k-1}{9n-10k} \cdot (-1)^k$$

Ответ: $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{9n}{10} \rfloor} \binom{2n}{k}\binom{11n-10k-1}{9n-10k} \cdot (-1)^k$