Исследовательская работа по теме "Пределы"

Группа M3103
Кравченкова Елизавета
Левков Андрей
Родецкий Никита
Смирнов Максим

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Математический анализ
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

23 октября 2022 г.

Оглавление

Задача 1

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$$

1.1

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$

1. При $n \to +\infty \quad 9n^2 - 2n + 3 \sim 9n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n^2-2n+3}{9n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{9} = 1$

2. Числитель:

По формуле разности кубов:

$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}})$

(1) $\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2} = \frac{5n^6-3n^5-5n^6-2}{\left(n^{\frac{10}{3}}(5n-3)^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{5}{3}}(25n^7-15n^6+10n-6)^{\frac{1}{3}} + (5n^6+2)^{\frac{2}{3}}\right)}$

Докажем в общем случае для $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{a_n x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{a_n} = 1$

В знаменателе (1) имеет смысл рассматривать только старшую степень при n и коэффициент при ней

И в $(n^{\frac{10}{3}}(5n-3)^{\frac{2}{3}})$ это $\sqrt[3]{25n^{12}} = \sqrt[3]{25}n^4$

в $(n^5(25n^7 - 15n^6 + 10n - 6))^{\frac{1}{3}}$ это $\sqrt[3]{25n^{12}} = \sqrt[3]{25}n^4$

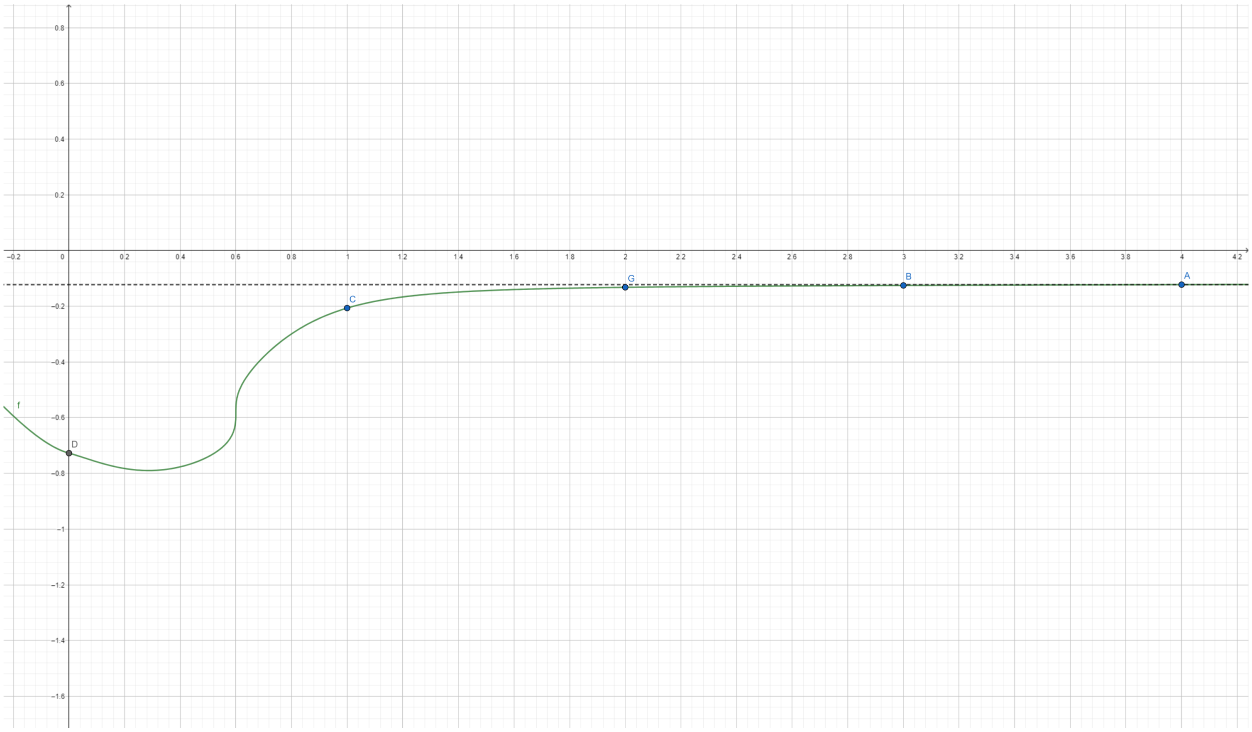
в $((5n^6+2)^2)^{\frac{1}{3}}$ это $\sqrt[3]{25}n^4$

А значит знаменатель эквивалентен $3\sqrt[3]{25}n^4$ при $n \to +\infty$

А числитель: $-3n^5$ при $n \to +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n^5}{\sqrt[3]{25}\cdot n^4 \cdot \sqrt{9n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n^5}{3*3\sqrt[3]{25}\cdot n^5} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$

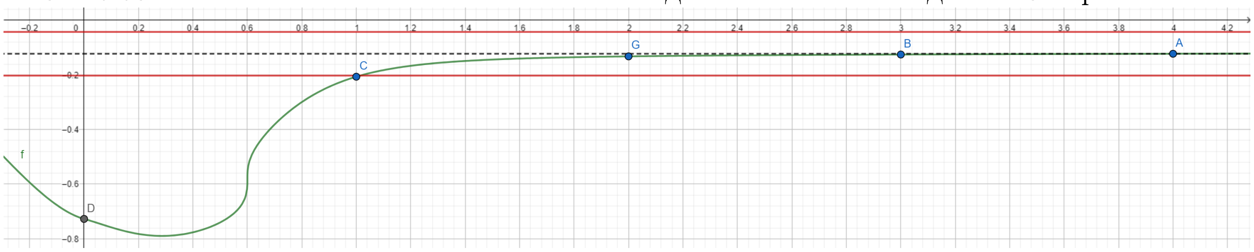
1.2



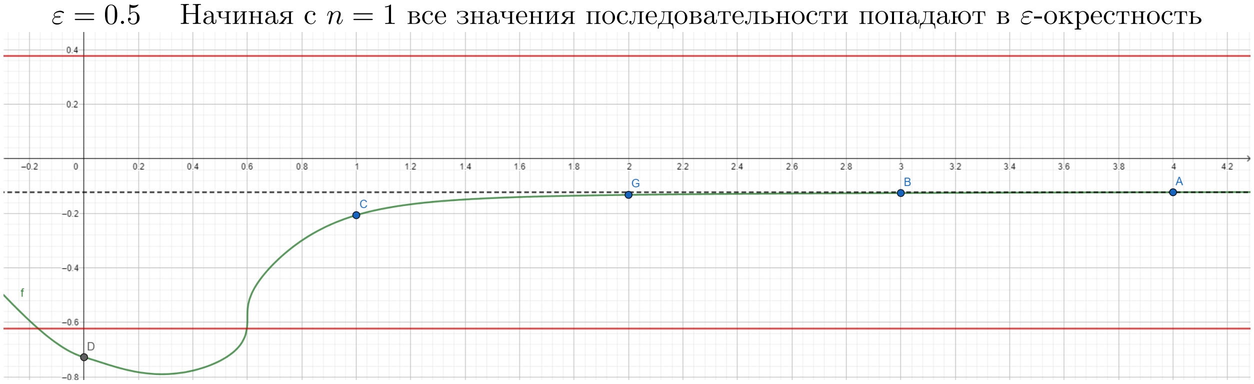
1.3

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = y_n$ - последовательность. Если предел при $n \to +\infty$ существует и конечен, то говорят, что последовательность сходится. Это означает, что если a - это предел, то выполняется $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \;\; \forall n \geqslant N_\varepsilon : |y_n - a| < \varepsilon$.

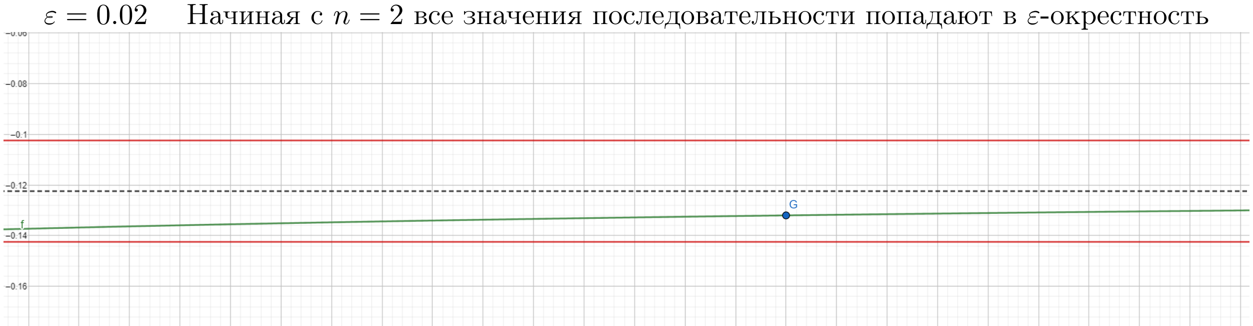
$\varepsilon = 0.08$ Начиная с $n = 2$ все значения последовательности попадают в ε-окрестность



$\varepsilon = 0.5$ Начиная с $n = 1$ все значения последовательности попадают в ε-окрестность



$\varepsilon = 0.02$ Начиная с $n = 2$ все значения последовательности попадают в ε-окрестность



Задача 2

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$$

2.1

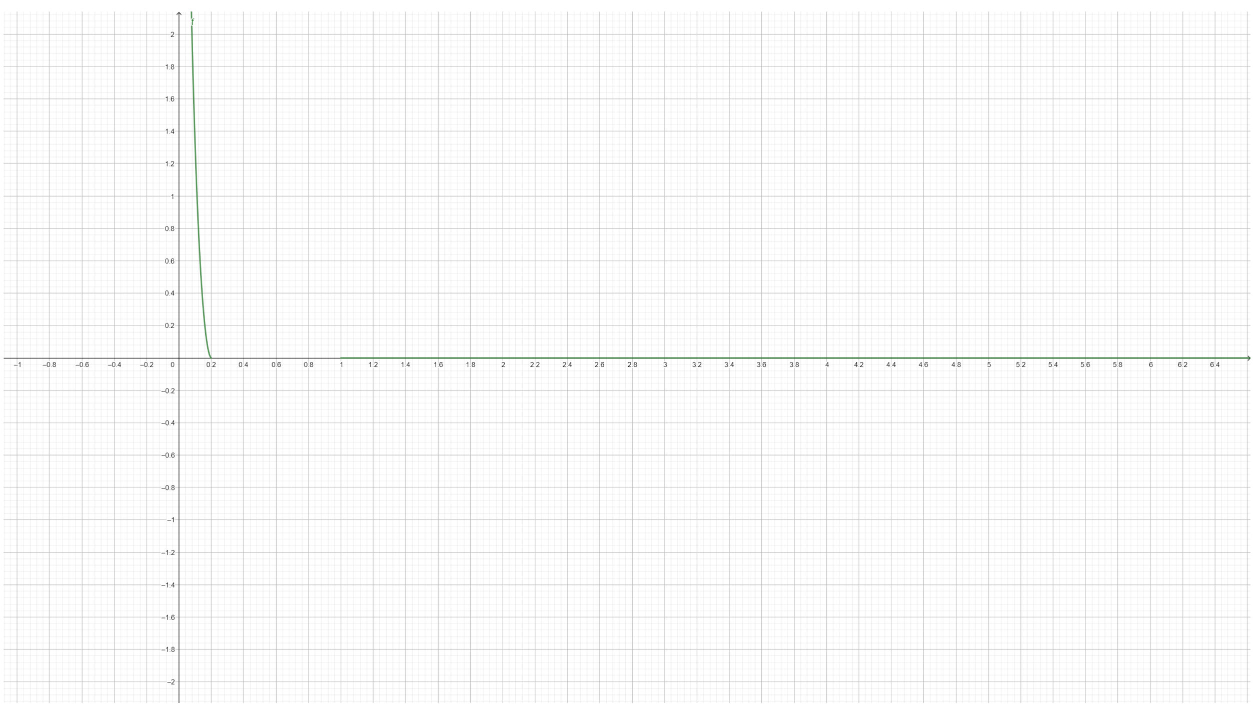
$\frac{1-x}{2-10x}$ стремится к $\frac{1}{10}$, при $x \to \infty$

При x $\to +\infty$ функция $5x-3$ стремится к $+\infty$ и поэтому предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

При x $\to -\infty$ функция $5x-3$ стремится к $-\infty$ и поэтому предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Отсюда следует, что предела при $x \to \infty$ (бесконечности без знака) не существует.

2.2

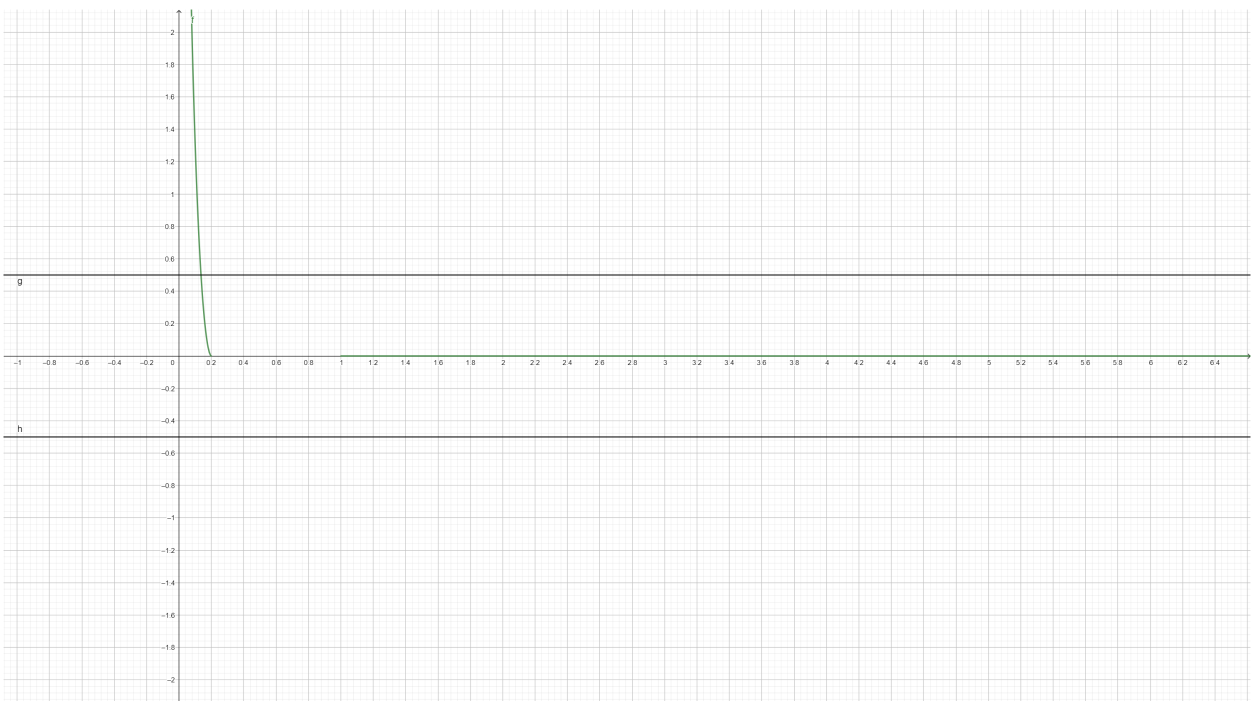


2.3

1. Назовём функцию $g(x)$ сходящейся на бесконечности, если она стремится к числу А при $x \to \infty$. Иначе говоря, число А называется пределом функции $g(x)$ при $x \to \infty$ если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число Δ, что для всех $|x| > \Delta$ выполняется $|g(x) - A| < \varepsilon$. Если число А существует и конечно, то $g(x)$ сходится на бесконечности. Иначе назовём функцию $g(x)$ расходящейся на бесконечности.

2. Возьмём $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$ и $\varepsilon_3 = 0.5$.

3. График с ε_1-окрестностью в точке 0 (первая картинка), ε_2- окрестностью в точке 0 (вторая картинка) и ε_3-окрестностью (третья картинка). Функция $f(x)$ нарисована зелёным цветом.

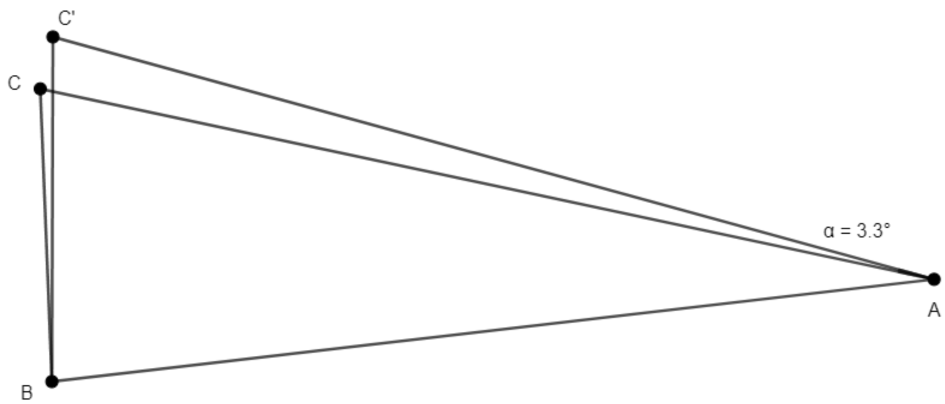


4. Так как пределы при $x \to \pm\infty$ различны и, более того, один из них бесконечен, то не существует таких Δ, что для всех $|x| > \Delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon_i$ для $i \in \{1, 2, 3\}$ для какого-то числа A.

Задача 3

Какой порядок будет иметь приращение площади треугольника по отношению к бесконечно малому приращению одного из его углов?

3.1



3.2

Обозначим угол CAC' за $\Delta\alpha$. Угол BAC за α. $BA = c, AC = AC' = b$.
Площадь треугольника можно выразить через две стороны и угол между ними. Тогда наша задача сводится к нахождению производной частной функции:

$$\frac{\partial S(b, c, \alpha)}{\partial \alpha}$$

3.3

$$\frac{\partial S(b,c,\alpha)}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{S(b,c,\alpha+\Delta\alpha) - S(b,c,\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(\gamma + \Delta\gamma) - \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{\Delta\gamma} =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin(\gamma)}{\Delta\gamma} = \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin(\gamma)}{\Delta\gamma} = \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \cdot \cos\gamma$$

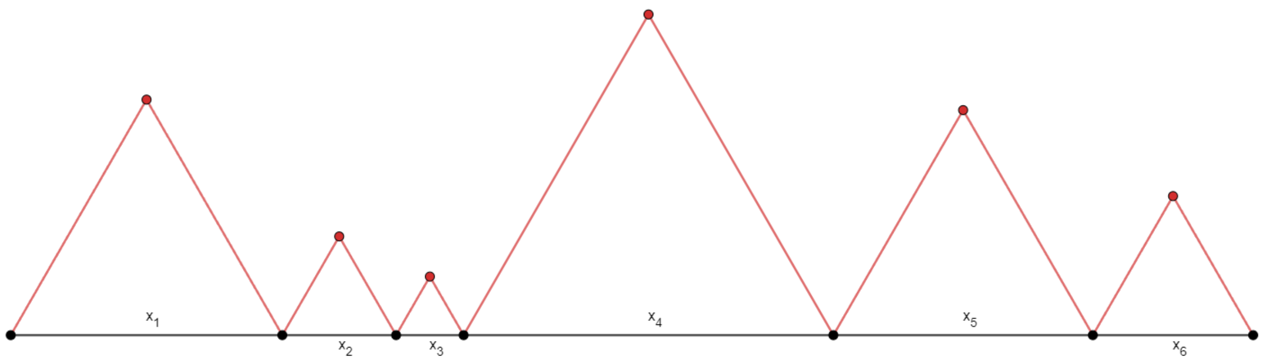
Заметим, что из-за того, что приращение угла небольшое, $AC' = AC$ и $\Rightarrow$ Изменение площади равно изменению синуса на произведение сторон пополам. Следовательно, приращение площади к приращению угла равно отношению приращения синуса к приращению угла, умноженное на две стороны пополам. Что равно косинусу угла на произведение сторон пополам

Задача 4

Отрезок длиной a разделён на n частей, и на каждой построен равносторонний треугольник. Найдите предел длины получившейя ломаной при $n \to \infty$.

4.1

Отрезок разделен на n частей (на картинке разделен на 6 частей)



4.2

Нам нужно найти предел суммы ломаной. Для этого мы выразим для каждого разбиения отрезка сумму и найдем ее предел.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_n = 2 \cdot \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_n = 2 \cdot a$$

4.3

Каждый x_i отрезок учитывается дважды, а сумма всех отрезков равна длине всего отрезка. Значит сумма длин равна $2a$

Выводы 5

При решении рассматриваемых задач мы научились исследовать последовательность функции на сходимость/расходимость, улучшили свои навыки в решении пределов, научились использовать их в решении задач практического характера, а также сделали иллюстрации к своим решениям. Таким образом, все поставленные перед нами задачи были выполнены.

Оценочный лист 6

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 25 %

Левков Андрей

Вклад исполнителя - 25 %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 25 %

Смирнов Максим

Вклад исполнителя - 25 %