Дискретная математика
Домашняя работа №6

Группа M3103
Кравченкова Елизавета

Преподаватель
Сомов Артем Владимирович
Чухарев Константин Игоревич

Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

22 августа 2023 г.

Оглавление

Задача 1

One of the classical combinatorial problems is counting the number of arrangements of n balls into k boxes. There are at least 12 variations of this problem: four cases (a–d) with three different constraints (1–3). For each problem (case+constraint), derive the corresponding generic formula. Additionally, pick several representative values for n and k and use your derived formulae to find the numbers of arrangements. Visualize several possible arrangements for the chosen n and k.

Это конечно классно, но
Одной из классических комбинаторных задач является подсчет количества расположений n шаров в k ящиков. Существует по крайней мере 12 вариантов этой задачи: четыре случая (a-d) с тремя различными ограничениями (1-3). Для каждой задачи (случай+ограничение) выведите соответствующую общую формулу. Кроме того, выберите несколько представительных значений для n и k и используйте выведенные вами формулы для нахождения числа расстановок. Визуализируйте несколько возможных вариантов расположения для выбранных n и k.

1.1

U → L: Balls are Unlabeled, Boxes are Labeled.

1.1.1

$<=$ 1 ball per box— injective mapping.
Если $n > k$: 0 способов
Иначе:
Пронумеруем ящики от $1...k$.Нам следует выбрать n номеров от $1...k$, и в ящики с выбранными номерами положить какой-то шар.

ответ: C_k^n

1.1.2

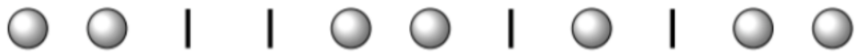
$>=$ 1 ball per box— surjective mapping.
Если $k > n$: 0 способов
Иначе:
Расположим шары в ряд и поставим между ними $k-1$ перегородку. (stars and bars). Мест для перегородок n-1.

ответ: C_{n-1}^{k-1}

1.1.3

Arbitrary number of balls per box.
Так как допускается нулевое количество шаров в ящикее.То нам подходят любые перестановки

следующего вида:



Перестановки мультимножества из n элементов одного типа и k-1 другого считаются как: $\frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!} = C_{n+k-1}^{k-1}$ P.S Формула работает так: она сначала подсчитывает все перестановки из всех элементов не взирая на их тип, потом действует так: n! раз посчитались перестановки, отличающиеся только взаимным расположением шаров, аналогично (k-1)! раз почитались перестановки, отличающиеся взаимным расположением перегородок.

ответ: C_{n+k-1}^{k-1}

1.1.4

в каждой ячейке записано количество шаров
1) 3 шара, 5 ящиков (10 способов)

Box	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1.	0	0	1	1	1	6.	1	1	0	1	0
2.	0	1	1	1	0	7.	0	1	1	0	1
3.	1	1	1	0	0	8.	1	0	1	1	0
4.	1	1	0	0	1	9.	0	1	0	1	1
5.	1	0	0	1	1	10.	1	0	1	0	1

2) 4 шара 3 ящика (3 способа)

Box	1	2	3
1.	1	1	2
2.	1	2	1
3.	2	1	1

3) 4 шара 3 ящика (15 способов)

Box	1	2	3		1	2	3
1.	0	0	4	9.	3	0	1
2.	0	4	0	10.	2	2	0
3.	4	0	0	11.	0	2	2
4.	1	0	3	12.	2	0	2
5.	0	1	3	13.	1	1	2
6.	1	3	0	14.	2	1	1
7.	0	3	1	15.	1	2	1
8.	3	1	0				

1.2

L → U: Balls are Labeled, Boxes are Unlabeled.

1.2.1

<= 1 ball per box— injective mapping.
Если $n > k$: 0 способов
Иначе:
Будем доставать шар и класть его в первую попавшуюся свободную коробку. (по большому счету нам важно только на какие пожмножества(ящиками) разбито множество шаров. Но так как в нашем случае способ разбить все шары только один: в каждом ящике по одному шару, то ответ 1)

ответ: 1

1.2.2

>= 1 ball per box— surjective mapping.
Если $k > n$: 0 способов
Иначе:
Как говорилось выше, нам важно только на какие пожмножества(ящиками) разбито множество шаров. Но теперь мы не можем однозначно сказать, как было выше, какого они размера. На помощь приходит $s_k^{II}(n)$(число стерлинга второго рода). Оно показывает количество способов разбить множество из n элементов на k непустых подмножеств.

ответ: $s_k^{II}(n)$

1.2.3

Arbitrary number of balls per box.
Выберем число i ящиков, которые должны быть заполнены (0 < i <= k), затем подсчитаем количество расстановок из n шаров в i ящиков так, чтобы ни один из них не был пустым. Это дает общее количество:

i=0 не учитывается, так как это значит не положить шар никуда.(случай когда n=0 тривиален и вообще не рассматриваем его)
$\sum_{i=1}^{k}(s_i^{II}(n))$

ответ: $\sum_{i=1}^{k}(s_i^{II}(n))$

1.2.4

Для каждого варианта записано множество из подмножеств шаров
1) 3 шара, 5 ящиков (1 способ)

   1) {{1},{2},{3},{ },{ }}

   2) 4 шара 3 ящика (6 способов)

1) {{1,4},{2},{3}}
2) {{1},{2,4},{3}}
3) {{1,2},{4},{3}}
4) {{1,3},{2},{4}}
5) {{1},{2,3},{4}}
6) {{1},{2},{3,4}}

   3) 4 шара 3 ящика (14 способов)

Помимо описанных выше:
1) {{1,2,3,4},{ },{ }}
2) {{1,2,3},{4},{ }}
3) {{1,2,4},{3},{ }}
4) {{1,3,4},{2},{ }}
5) {{2,3,4},{1},{ }}
6) {{1,2},{3,4},{ }}
7) {{1,3},{2,4},{ }}
8) {{1,4},{2,3},{ }}

1.3

L → L: Balls are Labeled, Boxes are Labeled.

1.3.1

$<=$ 1 ball per box— injective mapping.
Если $n > k$: 0 способов
Можно C_k^n способами выбрать n ящиков,которые будут заполнены. Учтем нумерацию шаров, домножив на число перестановок: $C_k^n * n!$.
$C_k^n * n! = \frac{k!}{n!(k-n)!} * n! = \frac{k!}{(k-n)!} = A_k^n$
P.S Можно заметить, что это не что иное, как 1.1.1, просто с учетом порядка шаров

ответ: A_k^n

1.3.2

>= 1 ball per box— surjective mapping.
Если $k > n : 0$ способов
Обратимся как и раньше к уже решенной задаче, но с непомеченными ящиками 1.2.2 (именно ящиками, так как в ином случае перестановка всех шаров не всегда будет давать разные разбиения по ящикам)
Итак, способов разбить множество из n элементов на k непустых подмножеств: $s_k^{II}(n)$, для каждого из этих способов выполним k! перестановок, учитывая порядок ящиков: $s_k^{II}(n) * k!$

ответ: $s_k^{II}(n) * k!$

1.3.3

Arbitrary number of balls per box.
Для каждого из n шаров существует k способов выбрать для него коробку: k^n

ответ: k^n

1.3.4

в каждой ячейке записан номер ящика
1) 3 шара, 4 ящиков (24 способа)

Ball	1	2	3		1	2	3
1.	1	2	3	13.	3	1	2
2.	1	2	4	14.	3	1	4
3.	1	3	2	15.	3	2	1
4.	1	3	4	16.	3	2	4
5.	1	4	2	17.	3	4	1
6.	1	4	3	18.	3	4	2
7.	2	1	3	19.	4	1	2
8.	2	1	4	20.	4	1	3
9.	2	3	1	21.	4	2	1
10.	2	3	4	22.	4	2	3
11.	2	4	1	23.	4	3	1
12.	2	4	3	24.	4	3	2

2) 3 шара 3 ящика (6 способов)

Ball	1	2	3		1	2	3
1.	1	2	3	4.	2	3	1
2.	1	3	2	5.	3	1	2
3.	2	1	3	6.	3	2	1

3) 3 шара 3 ящика (27 способов)
Помимо вышеописанных:

Ball	1	2	3		1	2	3
1.	1	1	1	12.	3	1	1
2.	2	2	2	13.	3	3	1
3.	3	3	3	14.	3	1	3
4.	1	1	2	15.	1	3	3
5.	1	2	1	16.	2	2	3
6.	2	1	1	17.	2	3	2
7.	1	2	2	18.	3	2	2
8.	2	1	2	19.	3	3	2
9.	2	2	1	20.	3	2	3
10.	1	1	3	21.	2	3	3
11.	1	3	1				

1.4

U $\rightarrow$ U: Balls are Unlabeled, Boxes are Unlabeled.

1.4.1

<= 1 ball per box— injective mapping.
Если $n > k$: 0 способов
Иначе:
Нам важно только на какие по размеру пожмножества(ящиками) разбито множество шаров. В нашем случае оно однозначно 1. А значит у нас ситуация однозначная: n ящиков занято 1 шаром, k-n - свободно. **ответ:** 1

1.4.2

>= 1 ball per box— surjective mapping.
Если $k > n$: 0 способов
Повторюсь, нас интересуют только то, на какие по размеру пожмножества(ящиками) разбито множество шаров, это и задает разные случаи. А значит задачу можно переформулировать как:
Найти количество способов решить следующее уравнение:
$n = a_1 + ... + a_k$, где $a_1 >= ... >= a_k >= 1$
Последнее ограничение добавлено, чтобы учеть, что ящики не маркированы(иначе мы бы считали симметричные случаи несколько раз)
Решение сформулированной задачи известно и задается функцией: Partition function: $p_k(n)$
ответ: $p_k(n)$

1.4.3

Arbitrary number of balls per box.
Размышление аналогично 1.2.3. Выберем число i - количество заполненных ящиков. Подсчитаем количество расположить n немаркированных шаров в i немаркированных ящика 1.4.2. i=0 не учитывается, так как это значит не положить шар никуда.(случай когда n=0 тривиален и вообще не рассматриваем его)
$\sum_{i=1}^{k}(p_i(n))$
ответ: $\sum_{i=1}^{k}(p_i(n))$

1.4.4

Для каждого варианта записано множество из мощностей подмножеств шаров
1) 3 шара, 5 ящиков (1 способ)

1) {1,1,1,1,1}

2) 4 шара 3 ящика (1 способ)
1) {1,1,2}

3) 4 шара 3 ящика (4 способа)
1) {1,1,2}
2) {0,1,3}
3) {0,2,2}
4) {0,0,4}

Задача 2

2.1

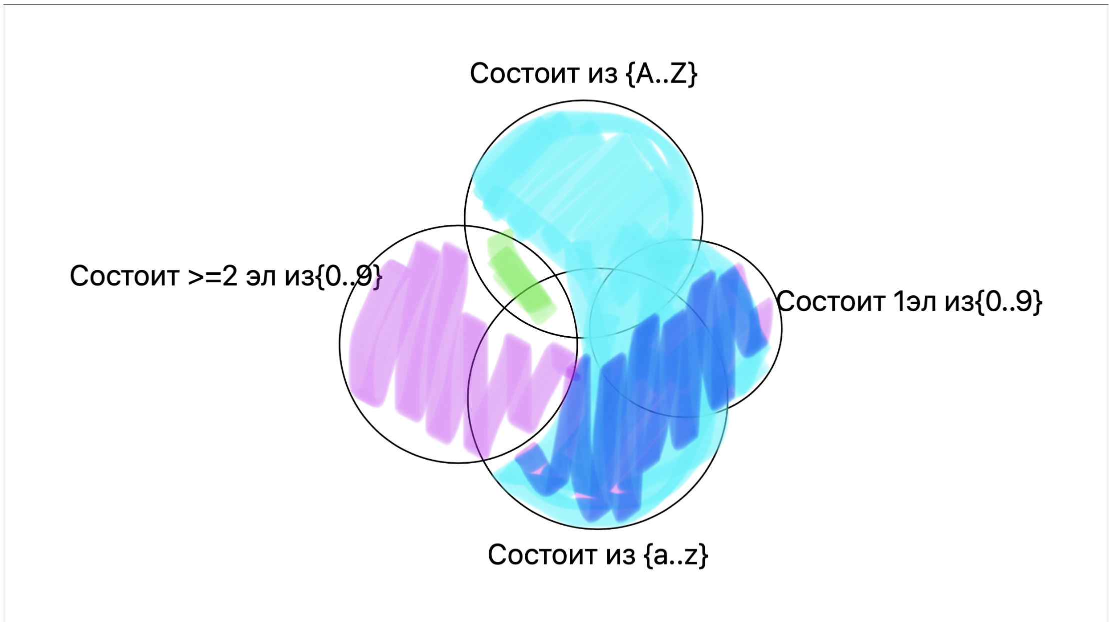
How many different passwords can be formed using the following rules?
* The password must be exactly 8 characters long.
* The password must consist only of Latin letters (a-z, A-Z) and Arabic digits (0-9).
* The password must contain at least 2 digits (0-9) and at least 1 uppercase letter (A-Z).
* Each character can be used no more than once in the password.

Сколько различных паролей можно составить, используя следующие правила?
* Пароль должен состоять ровно из 8 символов.
* Пароль должен состоять только из латинских букв (a-z, A-Z) и арабских цифр (0-9).
* Пароль должен содержать не менее 2 цифр (0-9) и не менее 1 заглавной буквы (A-Z).
* Каждый символ может быть использован в пароле не более одного раза.

Решение:
Заглавных/строчных букв-26, цифр - 10, всего: 62.
Посчитаем количество паролей, удовлетворяющих пунктам 1,2 4:
$C_{62}^{8} \cdot 8! = \frac{62!}{54!}$ (***)
Посчитаем количество паролей, в которых не встречается цифр:
$C_{52}^{8} \cdot 8! = \frac{52!}{44!}$
Посчитаем количество паролей, в которых встречается 1 цифра:
10 способов выбрать цифру, для каждой выбранной: $C_{52}^{7} = \frac{52!}{7! \cdot 45!}$ способов выбрать 7 букв, умножим все на число перестановок: $\frac{52! \cdot 8! \cdot 10}{7! \cdot 45!} = \frac{52! \cdot 80}{45!}$

Значит число паролей, в которых нет хотя бы 2 чисел:
$\frac{52!}{44!} + \frac{52! \cdot 80}{\cdot 45!}$ (*)

Посчитаем количество паролей, в которых не встречаются заглавные буквы:
$C_{36}^{8} \cdot 8! = \frac{36!}{28!}$ (**)



Зеленое-то, что нам нужно найти
Голубое-(*)
Розовое-(**)
Таким образом суммируя (*) и (**) надо вычесть лишнее, а именно такие пароли, которые состоят только из a..z и максимум 1 цифры.
Посчитаем лишние пароли:
Только из {a..z}:
$C_{26}^{8} \cdot 8! = \frac{26!}{18!}$
Из {a..z} и 1 цифры:
10 способов выбрать цифру, для каждой выбранной: $C_{26}^{7} = \frac{26!}{7! \cdot 19!}$ способов выбрать 7 букв, умножим все на число перестановок: $\frac{26! \cdot 8! \cdot 10}{7! \cdot 19!} = \frac{26! \cdot 80}{\cdot 19!}$
Итого лишних: $\frac{26! \cdot 80}{19!} + \frac{26!}{18!}$ (****)
Значит ответ: (***)-(*)-(**)+(****):
$\frac{62!}{54!} - \frac{52!}{44!} - \frac{52! \cdot 80}{\cdot 45!} - \frac{36!}{28!} + \frac{26! \cdot 80}{19!} + \frac{26!}{18!} = 51149739513600$

Ответ: 51149739513600

2.2

Сколько времени требуется для взлома такого пароля?
Пусть мы не очень умные(это вроде не карается), и чтобы выбрать 8 неповторяющихся элементов из 62х мы используем битовую маску из 62 битов, которую каждый раз будем проверять, что количество единиц в ней - 8.(за линию, т.е за 62 операции)
Эта битовая маска однозначно задает выборку 8 элементов из 62. За линию(за 8) мы умеем проверять-удовлетворяет ли она условиям для нашего пароля, а за O(1) проверяем крашнули

его или нет. Итого в худшем случае будет сделано: $(2^63 - 1) * 62 * 8 = 4574792530279968800272$ Если прикинуть, что C++ делает приблизительно 10^8 операций в секунду, то программа должна отработать примерно 45747925302800 секунд, что почти 529489877 суток, 1470805 лет, 147 веков.

Вывод: не будьте глупыми и генерите все за O(1)!

Задача 3

Find the number of different 5-digit numbers using digits 1–9 under the given constraints. For each case, provide examples of numbers that comply and do not comply with the constraints, and derive a generic formula that can be applied to other values of n (total available digits) and k (number of digits in the number). Express the formula using standard combinatorial terms, such as k-combinations C_n^k and k-permutations P (n, k).

Найдите количество различных пятизначных чисел с цифрами 1-9 при заданных ограничениях. Для каждого случая приведите примеры чисел, которые соответствуют и не соответствуют ограничениям, и выведите общую формулу, которая может быть применена к другим значениям n (общее количество доступных цифр) и k (количество цифр в числе). Выразите формулу с помощью стандартных комбинаторных терминов, таких как k-комбинации C_n^k и k-перестановки P (n, k).

3.1

a) цифры могут повторяться
Всего к позиций, для каждой из них есть n способов поставить цифру
ответ: n^k
Пример числа подходящего под ограничение: 11111
Пример числа, неподходящего по ограничение:(таких нет)
Для n=9,k=5 : $9^5 = 59049$

3.2

b) цифры не могут повторяться
ответ: $C_n^k \cdot k!$
Пример числа подходящего под ограничение: 12345
Пример числа, неподходящего по ограничение:11111
Для n=9,k=5 : $\frac{9!}{4!} = 15120$

3.3

c) цифры могут повторяться и должны быть записаны в невозрастающем порядке
Заметим, что если у нас есть набор из к чисел, мы его единственным образом можем превратить в число, такое что цифры в нем идут в невозрастающем порядке. А значит нам нужно посчитать количество способов выбрать из n чисел k, такие, что нам не важен их порядок, а также они могут повторятся.(На самом деле это число сочетаний с повторениями, но я выведу эту формулу):
Обозначим x_j-количество цифры j в нашей выборке. Тогда каждое решение следующего уравнения задает единсвенную выборку:

$x_1 + x_2 + ...x_n = k$
А это считается методом шаров и перегородок. У нас есть n labeled ящиков и k unlabeled шаров. Допускаются пустые ящики. (см 1.1.3). Это равно: C_{k+n-1}^{n-1}
ответ: C_{k+n-1}^{n-1}
Пример числа подходящего под ограничение: 54321
Пример числа, неподходящего по ограничение:12345
Для n=9,k=5 : $C_{13}^{8} = \frac{13!}{8!5!} = 1287$

3.4

d) цифры не могут повторяться и должны быть записаны в строго возрастающем порядке
Заметим, что рассуждения похожи на предыдущий пункт, только теперь числа не должны повторяться. Т.е каждая выборка из к различных цифр из n однозначно задает полученное число. Таких выборок: C_n^k
ответ: C_n^k
Пример числа подходящего под ограничение: 12345
Пример числа, неподходящего по ограничение:11234
Для n=9,k=5 : $C_9^5 = \frac{13!}{8!5!} = 126$

3.5

e) цифры могут повторяться и итоговое число должно делиться на 3 или на 5
Решение для n%3==0 :
Известно, что число делится на 3, если его сумма цифр делится на 3. Так вот, заметим, что всегда можно подобрать такую последнюю цифру числа, чтобы число делилось на 3(на самом деле такое число не одно):
Пусть нам надо найти количество чисел,делящихся на 3 длиной к, заполним n^{k-1} способами k-1 позицию.Тогда дальше есть 3 случая:
1)Сумма на этих позициях имеет остаток 0 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 3, либо 6, либо 9(в случае n=9). В общем случае: $\frac{n}{3}$
2)Сумма на этих позициях имеет остаток 1 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 2, либо 5, либо 8(в случае n=9). В общем случае: $\frac{n}{3}$
3)Сумма на этих позициях имеет остаток 2 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 1, либо 4, либо 7(в случае n=9). В общем случае: $\frac{n}{3}$
Тогда количество чисел,делящихся на 3 длиной к равно: $n^{k-1} \cdot \frac{n}{3}$ (*)

Посчитаем количество чисел,делящихся на 5 длиной к. Заметим, что число делится на 5, если заканчивается на 0 или 5. 0 - мы не используем. Тогда аналогичными размышлениями

всегда можно подобрать такую последнюю цифру числа, чтоб оно делилось на 5. В нашем случае способ только 1-поставить в конец 5(или если n<5, то таких чисел вообще нет).
Итого: $n^{k-1} \cdot [\frac{n}{5}]$ чисел длины к делится на 5. (**)
Посчитаем количество чисел,делящихся на 15 длиной к. Очевидно последняя цифра определяется однозначно -$[\frac{n}{5}]$ способами. Так как 5%3=2, то надо найти количество таких слов длиной k-1 сумма цифр которых дает остаток 1 при делении на 3. Рассуждения аналогичны тем,что использовались для поиска количества чисел, делящихся на 3. k-1ая цифра может быть:
1)Сумма на позициях перед ней имеет остаток 0 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 1, либо 4, либо 7(в случае n=9). В общем случае: n/3
2)Сумма на позициях перед ней имеет остаток 1 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 3, либо 6, либо 9(в случае n=9). В общем случае: n/3
3)Сумма на позициях перед ней имеет остаток 2 при делении на 3:
Тогда на последнюю позицию можно поставить либо 2, либо 5, либо 8(в случае n=9). В общем случае: n/3
Тогда количество чисел,делящихся на 15 длины к: $n^{k-2} \cdot \frac{n}{3}[\frac{n}{5}]$ (***)

Количество чисел, делящихся на 3 или на 5 $=$ (*)$+$(**)-(***):
Количество чисел, делящихся на 3 или на 5:
$n^{k-1} \cdot \frac{n}{3} + n^{k-1} \cdot [\frac{n}{5}] - n^{k-2} \cdot \frac{n}{3} \cdot [\frac{n}{5}] =$
$n^{k-1} \cdot \frac{n}{3} + n^{k-1} \cdot [\frac{n}{5}] - n^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot [\frac{n}{5}] =$
$n^{k-1}(\frac{n}{3} + [\frac{n}{5}] - \frac{1}{3} \cdot [\frac{n}{5}]) = n^{k-1}(\frac{n}{3} + \frac{2}{3} \cdot [\frac{n}{5}]) =$
$\frac{n^{k-1}}{3}(n + 2 \cdot [\frac{n}{5}])$

Для n=9,k=5: 24057
ответ: $\frac{n^{k-1}}{3}(n + 2 \cdot [\frac{n}{5}])$

Попробуем вывести формулу не только для n%3=0:
Посчитаем сколько чисел каждого остатка от 1 до n:
Числа с остатком 0: 3,6,9 (их [n/3])
Числа с остатком 1: 1,4,7 (их [n+2/3])
Числа с остатком 2: 2,5,8 (их [n+1/3])
$G_0(n,k)$ - количество чисел длины k с остатком 0 при делении на 3.
$G_1(n,k)$ - количество чисел длины k с остатком 1 при делении на 3.
$G_2(n,k)$ - количество чисел длины k с остатком 2 при делении на 3.
Нетрудно тогда вывести реккурентную формуу для каждой из них:
$G_0(n,k) = G_0(n,k-1) \times [\frac{n}{3}] + G_1(n,k-1) \times [\frac{n+1}{3}] + G_2(n,k-1) \times [\frac{n+2}{3}]$
$G_1(n,k) = G_0(n,k-1) \times [\frac{n+2}{3}] + G_1(n,k-1) \times [\frac{n}{3}] + G_2(n,k-1) \times [\frac{n+1}{3}]$
$G_2(n,k) = G_0(n,k-1) \times [\frac{n+1}{3}] + G_1(n,k-1) \times [\frac{n+2}{3}] + G_2(n,k-1) \times [\frac{n}{3}]$
База:
$G_0(n,1) = [\frac{n}{3}]$
$G_1(n,1) = [\frac{n+2}{3}]$
$G_2(n,1) = [\frac{n+1}{3}]$
Количество чисел, делящихся на 3 длины k: $G_0(n,k)$

Количество чисел, делящихся на 5 длины k(посчитано аналогично решению выше): $n^{k-1} \cdot [\frac{n}{5}]$
Количество чисел, делящихся на 15 длины k(рассуждения аналогичны): $G_1(n, k-1) \cdot [\frac{n}{5}]$
Тогда **ответ:** $G_0(n, k) + [\frac{n}{5}] \cdot (n^{k-1} - G_1(n, k-1))$
Возможно тут можно как то преобразовать формулы, чтоб получилась замкнутая формула, но я не умею такого делать... Я сделала код, который высчитывает ответ для n и к на основе полученной формулы: `https://github.com/elizabetinka/Combinatorics_problem_numbers`

Пример числа подходящего под ограничение: 12345
Пример числа, неподходящего по ограничение:11234
Для n=9,k=5 : 24057

3.6

f) цифры не могут повторяться и сумма цифр в числе должна быть четна
Четная сумма цифр достигается только при четном количестве нечетных цифр.Нечетных цифр в промежутке [1,n]: [(n+1)/2] (целая часть). $C^q_{[(n+1)/2]}$ - количество способов выбрать q нечетных цифр(q-четное). Выберем k-q четных цифр(их [n/2]): $C^{k-q}_{[n/2]}$, домножим это на всевозможные перестановки числа из данных цифр- k! :
$C^q_{[(n+1)/2]} \cdot C^{k-q}_{[n/2]} \cdot k!$ для q=2a<k
Полная формула: $\sum_{i=a}^{[k/2]} (C^{2a}_{[(n+1)/2]} \cdot C^{k-2a}_{[n/2]} \cdot k!)$

ответ: $\sum_{a=1}^{[k/2]} (C^{2a}_{[(n+1)/2]} \cdot C^{k-2a}_{[n/2]} \cdot k!)$

Пример числа подходящего под ограничение: 12346
Пример числа, неподходящего по ограничение:11234
Для n=9,k=5 : $\sum_{i=a}^{2} (C^{2a}_5 \cdot C^{5-2a}_4 \cdot 5!) = 4800 + 2400 = 7200$

Задача 4

Let n be a positive integer. Prove the following identity using a combinatorial argument:
Пусть n - целое положительное число. Докажите следующее тождество с помощью комбинаторного аргумента:

$$\sum_{k=1}^{n}(k \cdot C_n^k) = n \cdot 2^{n-1}$$

Proof:
(Признаться честно, я не сама придумала это доказательство, но оно мне очень понравилось.Кажется это тоже не карается)
Рассмотрим функцию $f(x) = (x+1)^n$.
Через Бином Ньютона:
$f(x) = (x+1)^n = \quad \sum_{k=1}^{n}(x^k \cdot C_n^k)$
Возьмем производные от двух частей:
$n(x+1)^{n-1} = \quad \sum_{k=1}^{n}(k \cdot x^{k-1} \cdot C_n^k)$
Подставим x=1:
$f'(1) = n \cdot 2^{n-1} = \quad \sum_{k=1}^{n}(k \cdot C_n^k)$
Что и требовалось доказать!

Proof2:
(Эти числа показывают сколькими способами можно разбить множество из n элементов на 2 подмножества(различимых), с выбором главного числа(просто какое-то число из множеств, назовем его номер разбиения, стоит заметить, что для любого разбиения все числа из начального множества побудут в качестве номера))
Для начала рассмотрим правую часть. 2^{n-1} задает двоичную маску из n битов. Биты, содержащие в себе 1 - хранятся в первом множестве, 0 - во втором. Ну и умножаем на n, так как для каждого из разбиений есть n способов выбрать номер.
Рассмотрим 2 слагаемых из левой части: $i \cdot C_n^i + (n-i) \cdot C_n^{n-i}$
$i \cdot C_n^i$ отражает количество способов выбрать из n i элементов и поместить их в первое подмножество, а все остальные во второе, при этом мы считаем количество способов при этом выюрать номер разбиения из каких-то чисел лежащих в первом множестве. Второе же слагаемое считает симметричную ситуацию. Количество способов выбрать из n n-i элементов и поместить их в первое подмножество, а все остальные во второе. Так мы перебрали все способы разбиения вида(i|n-i) на 2 различных подмножества. На языке формул: $C_n^i = C_n^{n-i}$. А значит: $i \cdot C_n^i + (n-i) \cdot C_n^{n-i} = n * C_n^i$.
Каждая такая пара(для нечетного n не всегда это пара) из левой части задает блок из разбиений вида (i|n-i), ну и их количество, умноженное на n. Каждое из этих разбиений между левой и правой частью можно однозначно сопоставить между собой. А именно блок из разбиений на (i|n-i) сопоставляется всем битовым маскам, в которых есть i или n-i битов равных 1. Те биты, которые равны 1- отправляются в первое подмножество, их как раз существует C_n^i.
Так, было найдено взаимо-однозначное соответствие между каждым значением из левой и правой части.
Что и требовалось доказать!

Задача 5

Let r,m, n be non-negative integers. Prove the following identity using a combinatorial argument:
Пусть r, m, n - неотрицательные целые числа. Докажите следующее тождество с помощью комбинаторного аргумента:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

$$C_{m+n}^{r} = \sum_{k=0}^{r} C_m^k \cdot C_n^{r-k}$$

Proof:
Обе части равенства считают количество способов выбрать из множества мощностью m+n r разных элементов.
Упорядочим как нибудь множество из которого вы выбираем(мощностью m+n). Тогда пусть первые m элементов относятся к множеству M,|M| = m, аналогично последние n - относятся к множеству N,|N| = n.
Тогда получая какую либо выборку из C_{m+n}^{r} мы можем однозначно понять, сколько элементов и какие выбраны из M и N.
Для всех выборок из C_{m+n}^{r} в которых встречается i элементов из M, и соответственно r-i элементов из N, существует такое к=i при котором будет подсчитано $C_m^i \cdot C_n^{r-i}$.
Аналогично в обратную сторону для любых выборок $C_m^k \cdot C_n^{r-k}$ k элементов из M и r-k элементов из N,будет существовать такое же количество выборок из C_{m+n}^{r} в которых встречается k элементов из M, и соответственно r-k элементов из N.
Так, была найдена биекция между каждым значением из левой и правой части.
Доказано!

Задача 6

Proof the Generalized Pascal's Formula (for n >= 1 and k1, . . . , kr >= 0 with k1 + · · · +kr = n):

$$\binom{n}{k_1, ..., k_r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n-1}{k_1, ..., k_i - 1, ..., k_r}$$

Левая часть равенства показывает число способов разбить множество размера n на r подмножеств, мощность которых равна k1, k2, ..., kr.
$\binom{n}{k_1,...,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_r!}$
$\sum_{k=0}^{r} \binom{n-1}{k_1,...,k_i-1,...,k_r} = \frac{(n-1)!}{(k_1-1)! \cdot ... \cdot k_r!} + ... + \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot ... \cdot (k_r-1)!}$

Домножим обе части равенства на произведение всех факториалов k_i. Получим следующее:

$$n! = \sum_{i=1}^{r} (n-1)! \cdot k_i =$$

$$n! = (n-1)! \sum_{i=1}^{r} k_i$$

Делим на (n-1)!:

$$n = \sum_{i=1}^{r} k_i$$

Получили начальное условие k1 + · · · +kr = n.
Так как все переходы были равносильные, то выполнив то же самое в обратную сторону мы докажем теорему:)

Задача 7

Find the coefficient of $x^5y^7z^3$ in the expansion of $(x+y+z)^{15}$
Найдите коэффициент $x^5y^7z^3$ в разложении $(x+y+z)^{15}$
$(x+y+z)^{15} = (x+y+z)\cdot(x+y+z)...(x+y+z)\cdot(x+y+z)$
При перемножении мы выбираем по одному одночлену в каждой скобке и перемножаем их
Способов выбрать 5 скобок с x: C_{15}^5
Способов выбрать 7 скобок с y из оставшихся: C_{10}^7
Способов выбрать 3 скобок с z из оставшихся: $C_3^3 = 1$
Итого: $C_{15}^5 \cdot C_{10}^7 \cdot 1 = 360360$
Ответ: 360360

Задача 8

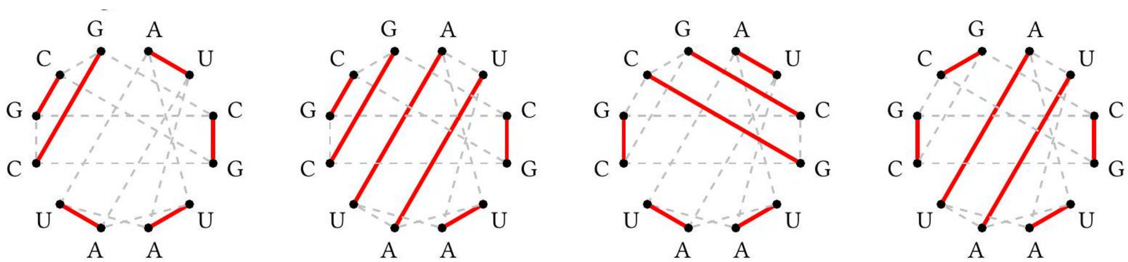
Count the number of permutations of the multiset $\sigma* = \{2 * \triangle, 3 * \square, 1 * cat\}$.
Подсчитать количество перестановок мультимножества.
Сначала будем считать, что элементы одного вида различны. Тогда количество перестановок: 6!
Заметим что если есть какая-то перестановка $\square_1, a_1, ..a_i, \square_2, a_{i+2}...\square_3$,то она посчитается 3! раз:
1) $\square_1, a_1, ..a_i, \square_2, a_{i+2}...\square_3$
2) $\square_1, a_1, ..a_i, \square_3, a_{i+2}...\square_2$
3) $\square_2, a_1, ..a_i, \square_1, a_{i+2}...\square_3$
4) $\square_2, a_1, ..a_i, \square_3, a_{i+2}...\square_1$
5) $\square_3, a_1, ..a_i, \square_1, a_{i+2}...\square_2$
6) $\square_3, a_1, ..a_i, \square_2, a_{i+2}...\square_1$
И так для каждой фигуры, встречающейся больше одного раза. Тогда ответ:
$\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60$
Ответ: 60

Задача 9

A non-crossing perfect matching in a graph is a set of pairwise disjoint edges that cover all vertices and do not intersect with each other. For example, consider a graph on 2n vertices numbered from 1 to 2n and arranged in a circle. Additionally, assume that edges are straight lines. In this case, edges i, j and a, b intersect whenever i $<$ a $<$ j $<$ b.

(a) Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in a complete graph K2n.

(b) Consider a graph on vertices labeled with letters from A, C, G, U. Each pair of vertices labeled with A and U is connected with a basepair edge. Similarly, C–G pairs are also connected.The picture below illustrates some of possible non-crossing perfect matchings in the graph with 12 vertices AUCGUAAUCGCG arranged in a circle. Basepair edges are drawn dashed gray,matching is red.



Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in the graph on 20 vertices arranged in a circle and labeled with CGUAAUUACGGCAUUAGCAU.

Непересекающееся идеальное паросочетание в графе - это множество попарно непересекающихся ребер, которые охватывают все вершины и не пересекаются друг с другом. Например, рассмотрим граф из 2n вершин, пронумерованных от 1 до 2n и расположенных по кругу. Кроме того, предположим, что ребра являются прямыми линиями. В этом случае ребра $\{i, j\}$ и $\{a, b\}$ пересекаются всякий раз, когда i $<$ a $<$ j $<$ b.

(a) Подсчитайте количество всех возможных непересекающихся идеальных соответствий в полном графе K2n.

(b) Рассмотрим граф с вершинами, помеченными буквами из A, C, G, U. Каждая пара вершин, помеченных буквами A и U, соединена ребром базовой пары. Аналогично, пары C-G также соединены.На рисунке ниже показаны некоторые из возможных непересекающихся идеальных соответствий в графе с 12 вершинами AUCGUAAUCGCG, расположенными по кругу. Ребра базовых пар нарисованы серым пунктиром, паросочетания - красным.

Подсчитайте количество всех возможных непересекающихся идеальных соответствий в графе на 20 вершинах, расположенных по кругу и обозначенных CGUAAUUUACGGCAUUAGCAU.

a)

Решение:

Докажем, что ответ c_n. Будем это делать по математической индукции.

База: n=1

2 вершины, $c_1 = 1$. 1 способ выбрать мачинг, очевидно это правда.

Переход. Докажем для 2n вершин, считая что для 2k<2n это выполняется.

Пронумеруем по кругу вершины от $1...2n$. Мы можем соединить вершину №1 с любой из $2n-1$

вершиной(пусть вершина №m). Так, мы не можем иметь ребра, пересекающие {1, m }, то есть, представим, что ребро {1, m } делит плоскость на две полуплоскости. Тогда все оставшиеся ребра мачинга находятся в разных полуплоскостях(я пыталась объяснить через аналогию с математикой). Несложно заметить, что тогда m обязано быть четным. (каждое ребро соединяет 2 вершинки, значит между 1 и m четное количество вершин, первая из них обязательно четная (имеет №2), далее они чередуются и последняя точно нечетная (имеет №m-1)).
Пусть $m = 2k$. Тогда с одной стороны от {1, m }: $2n - 2k$, с другой: $2n - 2 - 2n + 2k = 2k - 2$. Понятно, у нас образуется полный граф с одной и с другой строны от {1, m }. По предположению индукции существует: c_{n-k} с одной стороны, c_{k-1} - с другой способов выбрать мачинг. И того для конкретного m существует: $c_{n-k} \cdot c_{k-1}$ способов выбрать мачинг. Так как m может принимать четные значения от $2...2n$, то k принимает значения от $1...n$.
Итого, просуммируем:
$\sum_{k=1}^{n}(c_{n-k} \cdot c_{k-1})$.
Как известно:
$c_n = \quad \sum_{k=1}^{n}(c_{n-k} \cdot c_{k-1})$.
А значит количество всех возможных непересекающихся идеальных паросочетаний в полном графе K2n равно c_n

b)
Задача решалась при помощи программки (было разрешено):
Описание примененного алгоритма:
Обратимся к наблюдению из а), между любыми двумя вершинами, которое соединяет ребро должно быть четное количество вершин, это значит, что четность номера вершин, между которыми есть ребро, должна быть разной.Удалим те ребра, которые этому не удовлетворяют. Это позволило сократить количество ребер в 2 раза.Предподсчетом нашли четные и нечетные индексы для каждого вида вершин. Далее:
Переберем C_{26}^{10} комбинаций (26 - ребер, 10 из них надо выбрать).
Код можете увидеть здесь: `https://github.com/elizabetinka/bio-Informatics`
Ответ: 21
Ответ: а) c_n, b) 21

Задача 10

How many integer solutions are there for each given equation?
Сколько целочисленных решений существует для каждого данного уравнения?

10.1

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 20, \text{where } x_i >= 0$
На самом деле это тоже самое что 1.1.3 (unlabeled balls to labeled box). В нашем случае ящиков 3, а шаров 20.
$C_{20+3-1}^{3-1} = \frac{22!}{20! \cdot 2!} = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231$
Ответ: 231

10.2

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 20, \text{where } x_i >= 1$
На самом деле, отличие от предыдущего пункта только в том, что коробки не могут быть пустыми. (см 1.1.2).
$C_{19}^{2} = \frac{19!}{17! \cdot 2!} = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$
Ответ: 171

10.3

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20, \text{where } x_i >= 5$
Сразу наполним 3 коробки 5ю шарами. Тогда надо распределить оставшиеся 5 шаров на 3 коробки, коробки могут быть пустыми. Будем искать аналогично 10.1: $C_{5+3-1}^{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$
Ответ: 21

10.4

(d) $x_1 + x_2 + x_3 <= 20, \textbf{where } x_i >= 0$
Добавим четвертую переменную x_4.Это позволит учесть условие $<=$20.Коробки все также могут быть пустыми, возвращаемся к пункту 10.1:
$C_{20+4-1}^{4-1} = \frac{23!}{20! \cdot 3!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23}{2 \cdot 3} = 1771$
Ответ: 1771

10.5

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ **where** $1 <= x_1 <= x_2 <= x_3$
Это ни что иное как Partition function: $p_(20, 3, 18)$
$p(N, M; n) = p(N, M-1; n) + p(N-1, M; n-M)$

Но если честно не хотелось писать программку, напишу полный перебор просто:
Пусть $x_1 = 1 + \alpha$
$x_2 >= 1 + \alpha \hookrightarrow x_1 + x_2 + x_3 >= 3 + 3\alpha$
$3 + 3\alpha <= 20$
$\alpha <= \frac{17}{3}$
Так как $\alpha in \mathcal{N}$, то
$\alpha <= 5$
Пусть $\alpha = 0$:
$x_2 + x_3 = 19$ $1 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 19 - 1 - t = 18 - t$
$1 + t <= 18 - t$
$2t <= 17$
$0 <= t <= 8$
9 вариантов

Пусть $\alpha = 1$:
$x_2 + x_3 = 18$ $2 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 18 - 1 - t = 17 - t$
$1 + t <= 17 - t$
$2t <= 16$
$1 <= t <= 8$
8 вариантов

Пусть $\alpha = 2$:
$x_2 + x_3 = 17$ $3 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 17 - 1 - t = 16 - t$
$1 + t <= 16 - t$
$2t <= 15$
$2 <= t <= 7$
6 вариантов

Пусть $\alpha = 3$:
$x_2 + x_3 = 16$ $4 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 16 - 1 - t = 15 - t$
$1 + t <= 15 - t$
$2t <= 14$
$3 <= t <= 7$
5 вариантов

Пусть $\alpha = 4$:
$x_2 + x_3 = 15$ $5 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 15 - 1 - t = 14 - t$

$1 + t <= 14 - t$
$2t <= 13$
$4 <= t <= 6$
3 вариантов

Пусть $\alpha = 5$:
$x_2 + x_3 = 14$ $6 <= x_2 = 1 + t, x_3 = 14 - 1 - t = 13 - t$
$1 + t <= 13 - t$
$2t <= 12$
$5 <= t <= 6$
2 вариантов

Ответ: 33

10.6

(f) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ **where** $0 <= x_1 <= x_2 <= x_3$
Заметим, что часть ответа мы уже нашли в пункте выше. Найдем количество решений, допускающих ноль.
$x_3 \neq 0$ так как тогда $x_1 = x_2 = 0$, а это не решение.
Когда $x_2 = 0$, то $x_1 = 0$, однозначно определяется $x_3 = 20$ (+1 способ)
При $x_1 = 0$:
Пусть $x_2 = t, t > 0$, тогда однозначно $x_3 = 20 - t$
$t <= 20 - t$
$t <= 10$ (+10 способов)
Ответ: 33+11 = 44

10.7

(g) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ **where** $0 <= x_1 <= x_2 <= x_3 <= 10$
Обратимся к решению выше. Вычтем из него лишнее.
$x_1 < 11$ так как иначе $x_1 + x_2 + x_3 >= 33$, а это не решение.
Когда $x_2 >= 11$, то $x_2 + x_3 >= 22$, это не решение
При $x_3 == 11 + \alpha, \alpha >= 0$:
$x_1 + x_2 + \alpha = 9, \alpha <= 9$

Пусть $\alpha = 0$:
$x_1 + x_2 = 9$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 9 - t$
$t <= 9 - t$
$2t <= 9$
$t <= 4$ (-5 вариантов)

Пусть $\alpha = 1$:
$x_1 + x_2 = 8$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 8 - t$
$t <= 8 - t$
$2t <= 8$
$t <= 4$ (-5 вариантов)

Пусть $\alpha = 2$:
$x_1 + x_2 = 7$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 7 - t$
$t <= 7 - t$
$2t <= 7$
$t <= 3$ (-4 вариантов)

Пусть $\alpha = 3$:
$x_1 + x_2 = 6$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 6 - t$
$t <= 6 - t$
$2t <= 6$
$t <= 3$ (-4 вариантов)

Пусть $\alpha = 4$:
$x_1 + x_2 = 5$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 5 - t$
$t <= 5 - t$
$2t <= 5$
$t <= 2$ (-3 вариантов)

Пусть $\alpha = 5$:
$x_1 + x_2 = 4$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 4 - t$
$t <= 4 - t$
$2t <= 4$
$t <= 2$ (-3 вариантов)

Пусть $\alpha = 6$:
$x_1 + x_2 = 3$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 3 - t$
$t <= 3 - t$
$2t <= 3$
$t <= 1$ (-2 варианта)

Пусть $\alpha = 7$:
$x_1 + x_2 = 2$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 2 - t$
$t <= 2 - t$
$2t <= 2$
$t <= 1$ (-2 варианта)

Пусть $\alpha = 8$:
$x_1 + x_2 = 1$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 1 - t$

$t <= 1 - t$
$2t <= 1$
$t <= 0$ (-1 вариант)

Пусть $\alpha = 9$:
$x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = t, t >= 0, x_2 = 0 - t$
$t <= 0 - t$
$2t <= 0$
$t <= 0$ (-1 вариант)

Ответ: 14

10.8

h) $x_1 + x_2 + x_3 = 5, \textbf{where } -5 <= x_i <= 5$
Введем замену $y_i = x_i + 5$ (обращу внимание, биективную)
Тогда:
$y_1 + y_2 + y_3 = 20$, $0 <= y_i <= 10$
Найдем решения без ограничения сверху (см 10.1)
$C^2_{20+3-1} = 231$
Теперь найдем лишние решения, при которых $y_i >= 11$ (заметим, что он может быть лишь 1)
Для опредленности сделаем замену $q_3 = y_3 - 11$. Потом домножим на 3 (так как есть способов расположить число больше 11):
$y_1 + y_2 + q_3 = 9$, $0 <= y_i, q_3$
Решений такого уравнения:
$C^2_{9+3-1} = \frac{11!}{9!2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$
А значит решений, когда $y_i >= 11 : 55 * 3 = 165$
Ответ: 231 - 165 = 66

Задача 11

Consider three dice: one with 4 faces, one with 6 faces, and one with 8 faces. The faces are numbered 1 to 4, 1 to 6, and 1 to 8, respectively. Find the probability of rolling a total sum of 12.

Рассмотрим три игральные кости: одну с 4 гранями, другую с 6 гранями и третью с 8 гранями. Грани пронумерованы от 1 до 4, от 1 до 6 и от 1 до 8 соответственно. Найдите вероятность того, что выпадет сумма 12.

Решение:

Всего непересекающихся исходов: $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$

Нам следует выбрать из них те, сумма которых 12.

Будем рассматривать 4-х гранный кубик:

Пусть на нем выпало 1:

Пусть на втором выпало $1 <= t <= 6$, тогда на 3: 12-t-1

$12 - t - 1 <= 8$

$t >= 3$ (4 варианта)

Пусть на нем выпало 2:

Пусть на втором выпало $1 <= t <= 6$, тогда на 3: 12-t-2

$12 - t - 2 <= 8$

$t >= 2$ (5 варианта)

Пусть на нем выпало 3:

Пусть на втором выпало $1 <= t <= 6$, тогда на 3: 12-t-3

$12 - t - 3 <= 8$

$t >= 1$ (6 варианта)

Пусть на нем выпало 4:

Пусть на втором выпало $1 <= t <= 6$, тогда на 3: 12-t-4

$12 - t - 2 <= 8$

$t >= 0$ (6 варианта)

Итого: в 21 случае сумма равна 12.

Ответ: $\frac{21}{192} = \frac{7}{64}$

Задача 12

Let A = 1, 2, 3, . . . , 12. Define an interesting subset of A as a subset in which no two elements have a difference of 3. Determine the number of interesting subsets of A.

Пусть A = 1, 2, 3, . . . , 12. Определим интересное подмножество A как подмножество, в котором никакие два элемента не имеют разности 3. Определите количество интересных подмножеств A.

Решение:
Легко заметить, что любые 2 числа с разным остатком при делении на 3 никогда не дадут в разности 3.
Рассмотрим следующие подмножества:
$S_1 = \{1, 4, 7, 10\}$
$S_2 = \{2, 5, 8, 11\}$
$S_3 = \{3, 6, 9, 12\}$
Их интересно рассматривать, так как имея хорошие(интересные) подмножества каких-то из них(из разных групп), мы можем их склеить и получить новое. Причем таким образом мы действительно рассмотрим всевозможные интересные подмножества. Ведь если есть какое-то подмножество $X = \{a_1, b_2, a_2..c_3\}$, где $a_i \in S_1, b_i \in S_2, c_i \in S_3$, то оно эквивалентно "склеиванию"$\{a_1...a_j\}\{b_1...b_k\}\{c_1...c_l\}$

Рассмотрим сколько существует интересных подмножеств для S_1 (столько же будет и для остальных, так как эти множества имеют схожую структуру относительно арифметики числа 3, и разность i и j элемента в каждом из множеств будет одинакова)
{},{1},{4},{7},{10},{1,7},{1,10},{4,10} - 8 множеств
Тогда способов склеить: $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
Ответ: 512

Задача 13

Find the number of ways to arrange five people of distinct heights in a line such that no three consecutive individuals form a strictly ascending or descending height sequence.

Найдите количество способов расположить пять человек разного роста в линию так, чтобы никакие три человека подряд не образовывали строго возрастающую или убывающую последовательность высот.
Решение-переборный алгоритм: (был разрешен)
`https://github.com/elizabetinka/combinatorics_problem`
Там рассматриваются всевозможные перестановки 1...5, с последующей проверкой
Ответ: 32

Задача 14

GLaDOS, the mastermind AI, is testing a new batch of first-year students in one of her infamous test chambers. She assigns each test subject a unique number from 1 to n, and then splits the students into k groups (here, groups are indistinguishable). Furthermore, one student in each group is assigned as the group leader. GLaDOS wants to know how many different ways she can arrange the students into groups and select group leaders, so that the students can navigate through the test chambers without getting lost. She calls this arrangement a "GLaDOS Partition". For example, consider n = 7 students and k = 3 groups. Here are three (out of many!) different partitions, with the group leaders underlined: ($\underline{1}$ 2$\underline{5}$67 | 3$\underline{4}$), ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | $\underline{3}$4), and ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | 3$\underline{4}$). Let the number of GLaDOS Partitions for n students into k groups, where each group has a designated leader, be denoted as G(n, k). Your task is to find a generic formula and/or recurrence relation for G(n, k) and justify it.

GLaDOS, искусственный интеллект, тестирует новую партию первокурсников в одной из своих печально известных испытательных камер. Она присваивает каждому испытуемому уникальный номер от 1 до n, а затем делит студентов на k групп (здесь группы неразличимы). Кроме того, один студент в каждой группе назначается лидером группы. GLaDOS хочет знать, сколькими различными способами она может распределить студентов по группам и выбрать лидеров групп, чтобы студенты могли перемещаться по по испытательным камерам, не заблудившись. Она называет такое распределение "GLaDOS Partition". Например, пусть n = 7 студентов и k = 3 группы. Вот три (из многих!) различных разбиения, лидеры групп подчеркнуты: ($\underline{1}$ 2$\underline{5}$67 | 3$\underline{4}$), ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | $\underline{3}$4) и ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | 3$\underline{4}$). Пусть число GLaDOS-разделов для n студентов на k групп, где каждая группа имеет назначенного лидера, обозначается G(n, k). Ваша задача - найти общую формулу и/или рекуррентное соотношение для G(n, k) и обосновать ее.

Решение: Выберем k человек, которые будут старостами групп: C_n^k. С этого момента старосты становятся представителями групп, и если мы хотим разместить n-k человек по к групп, то мы понимаем, что количество человек в каждой из них может быть любым и группы становятся различными(так как у каждой группы разные старосты). Количество способов такого разбиения: k^{n-k} (см первую задачу 1.3.3).
Ответ: $C_n^k \cdot k^{n-k}$

Задача 15

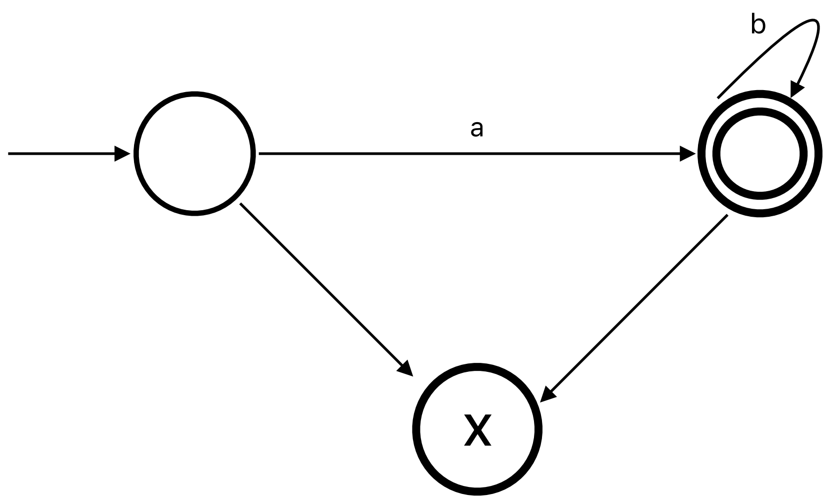
Every regular expression P generates a regular language L (P), which consists of all strings that match the pattern specified by P. For each given P, find the size of the set L' = {w ∈ L (P) |length(w) <= 5} which contains all accepted words of length at most 5. For "any" (.) and "neg-ative" ([^.]) matches, assume that the alphabet is σ = {a, b, c, d}. Additionally, construct the corresponding DFA (Deterministic Finite Automaton) for each pattern P.

Каждое регулярное выражение P порождает регулярный язык L (P), который состоит из всех строк, которые соответствуют шаблону, заданному P. Для каждого данного P найдите размер множества L' = {w ∈ L (P) |length(w) <= 5}, которое содержит все принятые слова длиной не более 5. Для "любых"(.) и "отрицательных"([^.])соответствий предположим, что алфавит σ = {a, b, c, d}. Кроме того, постройте соответствующий DFA (детерминированный конечный автомат) для каждого шаблона P.

В этом задании в автоматах буквы записаны не через запятую, а слитно. Так лучше не делать, но так как у нас алфавит однобуквенный никаких недопониманий данная запись (надеюсь) не должна вызывать.

15.1

$P1 = ab*$
Первая буква a, буква b может повторяться от 0 до бесконечного количества раз.
$L' = \{a, ab, abb, abbb, abbbb\}$
Ответ: |L'| = 5
Автомат:

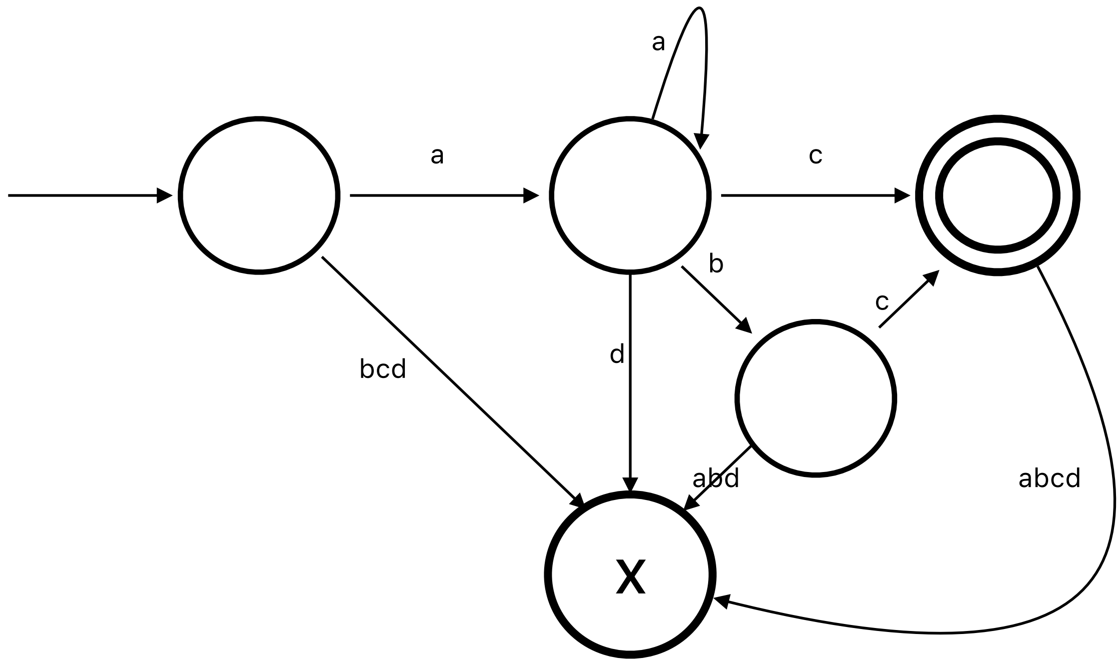


15.2

$P2 = a + b?c$
b? означает что b встречается 0 или 1 раз.
a+ означает, что a встречается >=1 раза.
Известно, что последняя буква -c. количество
Пусть x-количество букв a

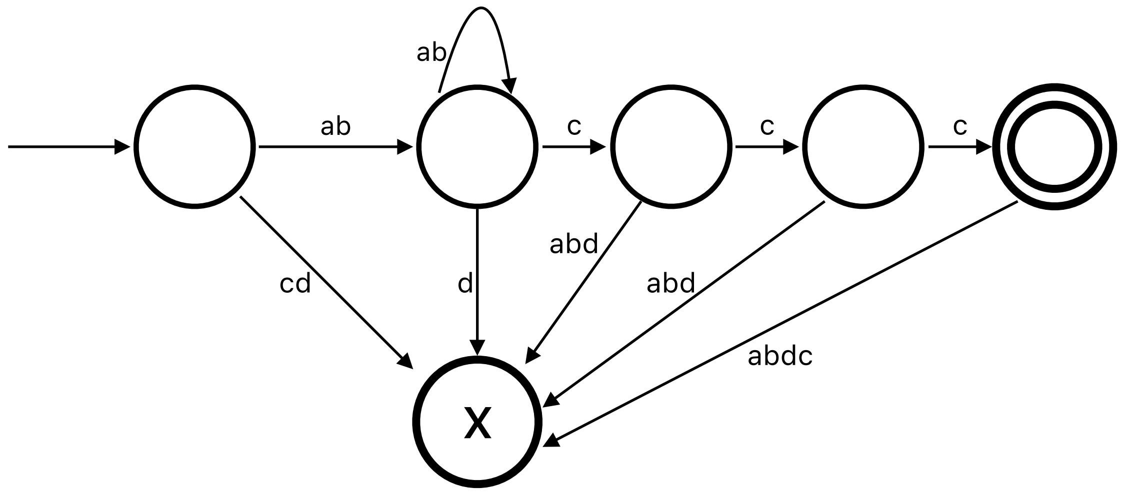
Пусть b встречается 0 раз:
Тогда 1<=x<=4 (4 слова)

Пусть b встречается 1 раз:
Тогда 1<=x<=3 (3 слова)
$L' = \{ac, abc, aac, aabc, aaac, aaabc, aaaac\}$
Ответ: |L'| = 7
Автомат:



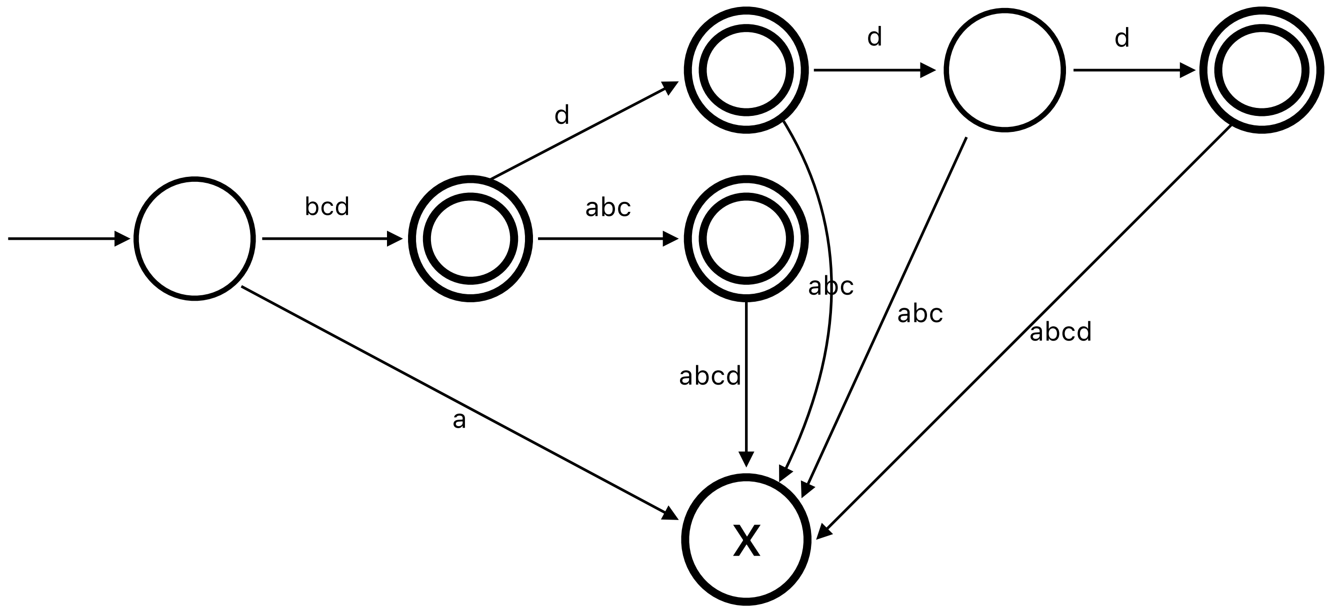
15.3

P3 = [^cd]+c{3}
$[cd]$ означает, что на этой позиции должна быть 'c' или 'd'. ^ отрицает это, а значит на этой позиции нет 'c' и 'd'
$[cd]+$ значит символ ни c и ни d(a или b) повторяется >=1 раза
c{3} - слово заканчивается тремя символами 'c'.
3 последние позиции заняты.
Если слово длины 5: способов $2^2 = 4$ (2 места на каждое можно поставить один из двух символов)
Если слово длины 4: способов 2
Итого 6 слов:
$L' = \{accc, bccc, aaccc, abccc, bbccc, baccc\}$
Ответ: |L'| = 6
Автомат:



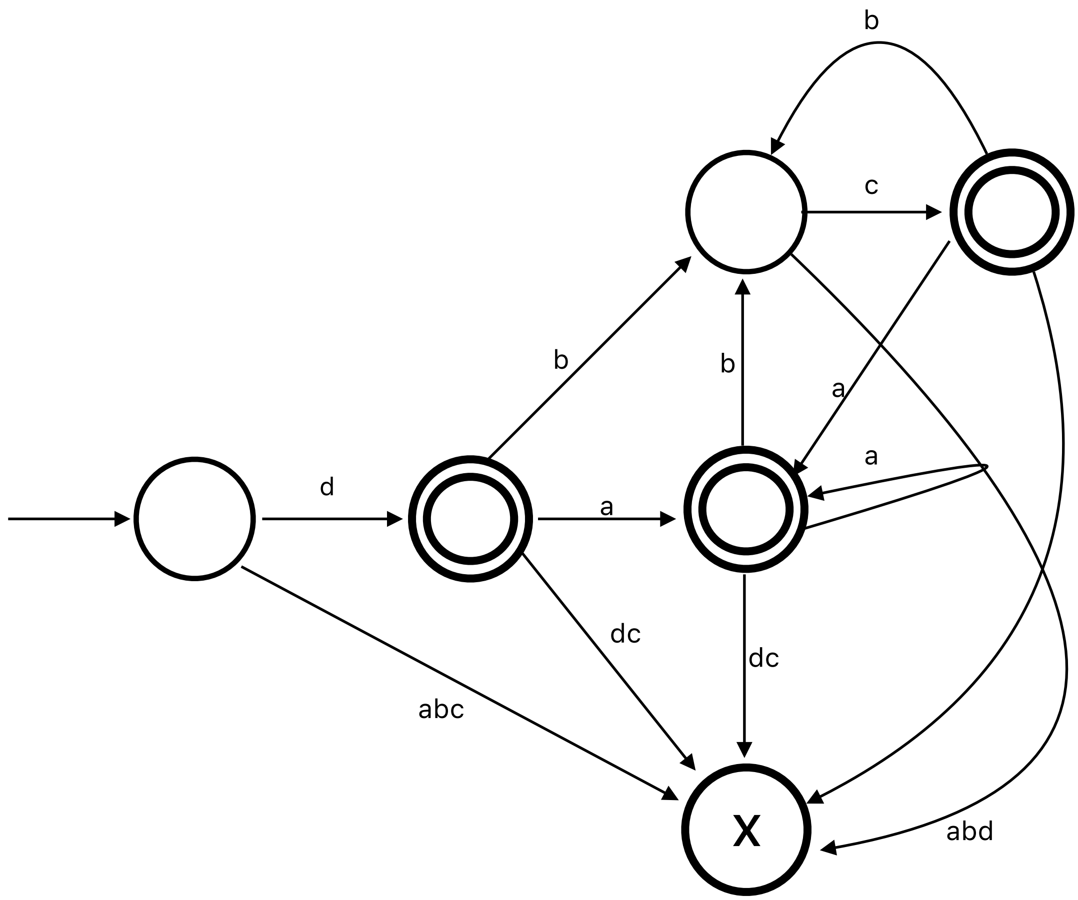
15.4

P4 = [^a](.|ddd)?
[^a] - означает какой-то символ из {b,c,d}
Далее следует 0 или 1 комбинация (.|ddd)
Она задает либо любой символ, либо ddd
Если комбинация (.|ddd) встречается 0 раз, то всего возможно 3 слова(длина 1)
Если комбинация '.' встречается 1 раз, то возможно 3*4 слова = 12 (длины 2)
Если комбинация ddd встречается 1 раз, то возможно 3 слова (длины 4)
$L' = \{b, c, d, ba, bb, bc, ca, cb, cc, da, db, dc, bd, cd, dd, bddd, cddd, dddd\}$
Ответ: |L'| = 18
Автомат:



15.5

P5 = d(a|bc)*
Первый символ d
Надо посчитать количество слов (a|bc)* длины <=4:
Пусть bc использовалось 0 раз:
Тогда a может встречаться <=4 раз (5 слов)
Пусть bc использовалось 1 раз:
Если bc занимает 1-2 позицию:
Тогда a может встречаться <=2 раз (3 слова)
Если bc занимает 2-3 позицию:
Тогда a после него может встречаться <=1 раз (2 слова)
Если bc занимает 3-4 позицию:
Тогда a после него может встречаться 0 раз (1 слово)
Пусть bc использовалось 2 раза: (1 слово)
$L' = \{d, da, daa, daaa, daaaa, dbc, dbca, dbcaa, dabc, dabca, daabc, dbcbc\}$
Ответ: |L'| = 12
Автомат:



15.6

P6 = ((a|ab)[cd]){2}
Дважды встречается комбинация (a|ab)[cd]
Для такой комбинации:
Количество слов длины 0: 0
Количество слов длины 1: 0
Количество слов длины 2: 2 (На первой позиции обязательно a. На второй 2 варианта)
Количество слов длины 3: 2 (На первой позиции обязательно ab. На второй 2 варианта)
Количество слов длины большей длины: 0

Тогда для нашего слова:
Если его длина 0-3 (0 случаев)
Если его длина 4 (2*2=4 случаев)
Если его длина 5 (2(из 3)*2(из 2)*2(перестановка)= 8 случаев)
$L' = \{acac, acad, adac, adad, acabc, acabd, adabc, adabd, abcac, abdac, abcad, abdad\}$
Ответ: |L'| = 12
Автомат: