Исследовательская работа по теме "Линейная алгебра"

Группа М3103
Костыгов Андрей
Кравченкова Елизавета
Лакеев Георгий
Родецкий Никита

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Специальные разделы высшей математики
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

30 апреля 2023 г.

Оглавление

Задача 1

1.1

Дано постранство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке [-1,1].Проведите исследование.

$P_3(t) = t^3 + t^2 + 4t - 3$

1) Проверьте, что система векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ является базисом этого пространства. Ортогонализируйте систему (построенный ортогональный базис обозначьте B_H)

$$\text{Пусть } \exists \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 :$$

$$f(t) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 + \lambda_3 \cdot t^3 = 0 \, (\forall t \in [-1; 1]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0^2 + \lambda_3 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \lambda_1 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 + \lambda_3 \cdot t^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1^2 + \lambda_3 \cdot 1^3 = 0 \\ f(-1) = \lambda_1 \cdot -1 + \lambda_2 \cdot (-1)^2 + \lambda_3 \cdot (-1)^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) + f(-1) = 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \lambda_1 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ f(1/2) = \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2 \cdot f(1/2) = 2 \cdot \left(\lambda_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2 \cdot f(1/2) = \lambda_1 + \lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) - 2 \cdot f(1/2) = \frac{3}{4}\lambda_3 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{B - является линейно независимой системой векторов}$$

Получить любой многочлен можно подставив вместо λ_i a_i, где a_i - это коэффициент многочлена при степени i

$\Rightarrow B-$является базисом

Теперь ортогонализируем систему:

$$B = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$\langle P(t)\|Q(t)\rangle$	1	t	t^2	t^3
1	$\int_{-1}^{1} dt$	$\int_{-1}^{1} tdt$	$\int_{-1}^{1} t^2dt$	$\int_{-1}^{1} t^3dt$
t	$\int_{-1}^{1} tdt$	$\int_{-1}^{1} t^2dt$	$\int_{-1}^{1} t^3dt$	$\int_{-1}^{1} t^4dt$
t^2	$\int_{-1}^{1} t^2dt$	$\int_{-1}^{1} t^3dt$	$\int_{-1}^{1} t^4dt$	$\int_{-1}^{1} t^5dt$
t^3	$\int_{-1}^{1} t^3dt$	$\int_{-1}^{1} t^4dt$	$\int_{-1}^{1} t^5dt$	$\int_{-1}^{1} t^6dt$

$$\int_{-1}^{1} t^{k_1} \cdot t^{k_2} dt = \int_{-1}^{1} t^{k_1+k_2} dt = \frac{1}{k_1+k_2+1} \cdot t^{k_1+k_2+1} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{k_1+k_2+1} \cdot \Big((1)^{k_1+k_2+1} - (-1)^{k_1+k_2+1}\Big)$$

Очевидно, что скалярное произведение одночленов с нечетной суммой степеней равно нулю, а для одночленов с четной суммой $\frac{2}{k_1+k_2+1}$

$\langle P(t)\|Q(t)\rangle$	1	t	t^2	t^3
1	2	0	2/3	0
t	0	2/3	0	2/5
t^2	2/3	0	2/5	0
t^3	0	2/5	0	2/7

Воспользуемся ортогонализацией Грамма-Шмидта:

$b_1 = 1$ и $b_2 = t$ так как они уже ортогональны.

$$b_3 = t^2 - \frac{\langle t^2|1\rangle}{\langle 1|1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle t^2|t\rangle}{\langle t|t\rangle} \cdot t = t^2 - \frac{\langle t^2|1\rangle}{\langle 1|1\rangle} \cdot 1 = t^2 - \frac{2/3}{2} = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$b_4 = t^3 - \frac{\langle t^3|t\rangle}{\langle t|t\rangle} \cdot t - \frac{\langle t^3|b_3\rangle}{\langle b_3|b_3\rangle} \cdot b_3 = t^3 - \frac{2/5}{2/3} \cdot t - \frac{\langle t^3|b_3\rangle}{\langle b_3|b_3\rangle} \cdot b_3$$

$$\langle t^3|b_3\rangle = \langle t^3|t^2 - \frac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1} (t^5 - \frac{t^3}{3}) dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_4 = t^3 - \frac{3}{5} \cdot t$$

$$B_H = \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5} \cdot t\}$$

2) Выпишите первые четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$) многочлена Лежандра:

$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$**, где** $\frac{d^n}{dt^n}(y(t))$ **- производная n-ого порядка функции** $y(t)$

$$L_0(t) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dt^0}((t^2-1)^0) = 1$$

$$L_1(t) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dt^1}((t^2-1)^1) = \frac{1}{2}\cdot 2t = t$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dt^2}((t^2-1)^2) = \frac{1}{8}\left(2(t^2-1)\cdot 2t\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left((t^2-1)\cdot t\right)' = \frac{1}{2}\cdot(t^2-1+2t^2) = \frac{1}{2}\cdot(3t^2-1)$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dt^3}((t^2-1)^3) = \frac{1}{48}\cdot((t^2-1)^3)''' = \frac{1}{48}\cdot(3(t^2-1)^2\cdot 2t)'' =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot((t^2-1)^2\cdot t)'' = \frac{1}{8}\cdot(2(t^2-1)\cdot 2t\cdot t+(t^2-1)^2)' = \frac{1}{8}\cdot(4t^4-4t^2+t^4-2t^2+1)' =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot(5t^4-6t^2+1)' = \frac{1}{8}\cdot(4\cdot 5t^3-2\cdot 6t) = \frac{1}{2}\cdot(5t^3-3t)$$

3) Найдите координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H. Сделайте вывод об ортогональности системы векторов $L_n(t)$.

$$L_0(t) = 1 = b_1$$

$$L_1(t) = t = b_2$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2}\cdot(3t^2-1) = \frac{3}{2}\cdot(t^2-1/3) = \frac{3}{2}\cdot b_3$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2}\cdot(5t^3-3t) = \frac{5}{2}\cdot(t^3-\frac{2}{5}\cdot t) = \frac{5}{2}\cdot b_4$$

Так как скалярное произведение является симметричной билинейной функцией, то домножение на ненулевые коэффициенты не влияет на ортогональность
⇒Если B_H ортогональна, то и система векторов $L_n(t)$ также ортогональна.

4) Разложите данный многочлен $P_3(t)$ по системе векторов $L_n(t)$.

$$P_3(t) = t^3+t^2+4t-3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)+\frac{3}{5}t+t^2+4t-3 =$$

$$= \frac{2}{5}L_3(t)+t^2+4t+\frac{3}{5}t-3 = \frac{2}{5}L_3(t)+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(t^2-1/3)+1/3+4t+\frac{3}{5}t-3 =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot L_3(t)+\frac{2}{3}\cdot L_2(t)+1/3+4t+\frac{3}{5}t-3 =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot L_3(t)+\frac{2}{3}\cdot L_2(t)+4\frac{3}{5}\cdot L_1(t)-2\frac{2}{3}L_0(t)$$

$$P_3(t) = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/3 \\ 23/5 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

1.2

Дано постранство R функций, непрерывных на отрезке [-π, π] со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и длиной вектора $||f|| = \sqrt{(f,f)}$.
Тригонометрические многочлены $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos t + b_n \sin t$, где a_k, b_k - вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R.
Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве P, минимально отличающийся от функции $f(x)$ - вектора пространства R.Проведите исследование.

$$f(t) = t + 1$$

Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от $f(t)$ до $P_n(t)$ будет наименьшим, если это длина перпендикуляра $h = f(t) - P_n(t)$, опущенного из точки $f(t)$ на подпространство P. В этом случае, $P_n(t)$ будет ортогональной проекцией вектора $f(t)$ на P. Таким образом, требуется найти координаты вектора $P_n(t)$ (коэффициенты многочлена) в заданном базисе P.Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора $f(t)$ на векторы данного базиса.
1) Проверьте, что система векторов $\{1, \cos t, \sin t, ... \cos(nt), \sin(nt)\}$ является ортогональным базисом подпространства P. Нормируйте систему.
Сразу отметим, что постранство R функций является Евклидовым, так как выполняются все требования для него.
В ортогональной системе для каждой пары векторов, верно, что их скалярное произведение равно 0:
$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin at dt = \frac{1}{a}\int_{-\pi}^{\pi} \sin at d(at) = -\frac{1}{a}(\cos at)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{a}(cos(a\pi) - cos(-a\pi)) = -\frac{1}{a}(cos(a\pi) - cos(a\pi)) = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos at dt = \frac{1}{a}\int_{-\pi}^{\pi} \cos at d(at) = \frac{1}{a}(\sin at)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{a}(sin(a\pi) - sin(-a\pi)) = \frac{1}{a}(sin(a\pi) + sin(a\pi)) = \frac{2}{a}sin(a\pi) = 0$ (верно для всех $a \in \mathbf{N}$)

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos at \sin bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos at \sin bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin((b+a)t) + \sin((b-a)t))dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((b+a)t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((b-a)t)dt = 0$ (верно по доказанному выше, в случае, когда $b - a < 0, \sin((b-a)t) = -\sin((a-b)t),$ для чего уже выполняется полученное выше)

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin at \sin bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin at \sin bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((b-a)t) - \cos((b+a)t))dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((b-a)t)dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((b+a)t)dt = 0$ (верно по доказанному выше, в случае, когда $b - a < 0, \cos((b-a)t) = \cos((a-b)t),$ для чего уже выполняется полученное выше)

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos at \cos bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos at \cos bt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((b-a)t) + \cos((b+a)t))dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((b-a)t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((b+a)t)dt = 0$ (верно по доказанному выше, в случае, когда $b-a < 0, \cos((b-a)t) = \cos((a-b)t),$ для чего уже выполняется полученное выше)

Th. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.
(На всякий случай) **Proof:**
Предположим противное: существует ортогональная система ненулевых векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_k}$ и она линейно зависима. Следовательно, найдутся числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ не все равные нулю такие, что:
$\vec{a_1}c_1 + \vec{a_2}c_2 + ... + \vec{a_k}c_k = 0$ (*)
Умножим обе части равенства на $\vec{a_1}$ скалярно:
$(\vec{a_1}, (\vec{a_1}c_1 + \vec{a_2}c_2 + ... + \vec{a_k}c_k)) = (\vec{a_1}, 0)$
По линейности:
$(\vec{a_1}, \vec{a_1})c_1 + (\vec{a_1}, \vec{a_2})c_2 + ... + (\vec{a_1}, \vec{a_k})c_k) = 0$
Так как система ортогональна:
$(\vec{a_1}, \vec{a_1})c_1 = 0$
Так как $\vec{a_1}$ ненулевой вектор, то $(\vec{a_1}, \vec{a_1}) > 0$:
$c_1 = 0$
Аналогично, умножая равенство (*) последовательно на вектора $\vec{a_2}, \vec{a_3}...\vec{a_k}$ получим, что $c_2 = 0, c_3 = 0, \ldots, c_k = 0$, т.е. все коэффициенты линейной комбинации векторов равны нулю. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Это значит, что система векторов $\{1, \cos t, \sin t, ... \cos(nt), \sin(nt)\}$ является ортогональным базисом подпространства P.

Нормируем систему, для этого найдем норму для каждого вектора:
$||1|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dt} = \sqrt{t\Big|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{2\pi}$
$||\sin at|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin at^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2at)}{2} d(at)} = \sqrt{\frac{1}{4a}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2at) d(2at)} = \sqrt{\frac{1}{4a}(2at - \sin(2at))\Big|_{-\pi}^{\pi}}) = \sqrt{\frac{1}{4a}(2a\pi - \sin(2a\pi) + 2a\pi + \sin(-2a\pi))} = \sqrt{\frac{1}{4a}(4a\pi)} = \sqrt{\pi}$
$||\cos at|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos at^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2at)}{2} d(at)} = \sqrt{\frac{1}{4a}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2at) d(2at)} = \sqrt{\frac{1}{4a}(2at + \sin(2at))\Big|_{-\pi}^{\pi}}) = \sqrt{\frac{1}{4a}(2a\pi + \sin(2a\pi) + 2a\pi - \sin(-2a\pi))} = \sqrt{\frac{1}{4a}(4a\pi)} = \sqrt{\pi}$

Тогда нормированная система выглядит так:
$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, ... \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\}$

2) Найдите проекции вектора $f(t)$ на векторы полученного ортонормированного базиса.

Пр$_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{b}||}$
$(f(t), 1) = \int_{-\pi}^{\pi}(t+1)dt = (\frac{t^2}{2} + t)\Big|_{-\pi}^{\pi} = (\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi) = 2\pi$

$(f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \sqrt{2\pi}$
$(f(t), \cos(at)) = \int_{-\pi}^{\pi} (t+1) \cdot \cos(at) dt =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} (t \cos(at)) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) dt =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} (t \cdot (\frac{\sin(at)}{a})') dt + \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) d(at) =$
$= (t \cdot \frac{\sin(at)}{a})\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(at) d(at) + \frac{1}{a}(\sin(at))\Big|_{-\pi}^{\pi} =$
$= (t \cdot \frac{\sin(at)}{a})\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{a^2}(\cos(at))\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{a}(\sin(at))\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$
$(f(t), \frac{\cos at}{\sqrt{\pi}}) = 0$

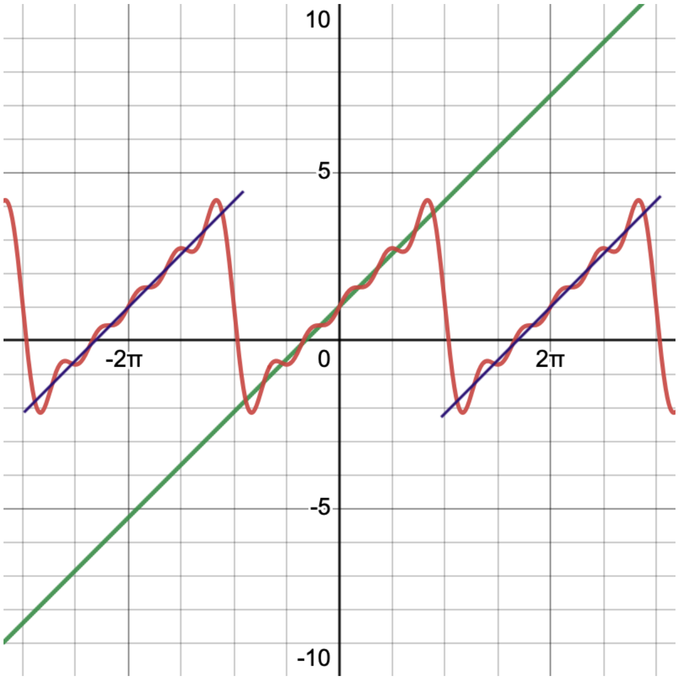
$(f(t), \sin(at)) = \int_{-\pi}^{\pi} (t+1) \cdot \sin(at) dt =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} (t \sin(at)) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(at) dt =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} (t \cdot (-\frac{\cos(at)}{a})') dt + \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(at) d(at) =$
$= (-t \cdot \frac{\cos(at)}{a})\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) d(at) + \frac{1}{a}(-\cos(at))\Big|_{-\pi}^{\pi} =$
$= (\frac{-2\pi \cos(a\pi)}{a})$
$(f(t), \frac{\sin at}{\sqrt{\pi}}) = \frac{-2\sqrt{\pi} \cos(a\pi)}{a}$
Найдем проекции:
$\text{Пр}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} f(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$
$\text{Пр}_{\frac{\sin at}{\sqrt{\pi}}} f(t) = \frac{-2\sqrt{\pi} \cos(a\pi)}{a\sqrt{\pi}} = \frac{-2\cos(a\pi)}{a} = -\frac{2 \cdot (-1)^a}{a}$
$\text{Пр}_{\frac{\cos at}{\sqrt{\pi}}} f(t) = 0$

3) Запишите минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ с найденными коэффициентами(тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).

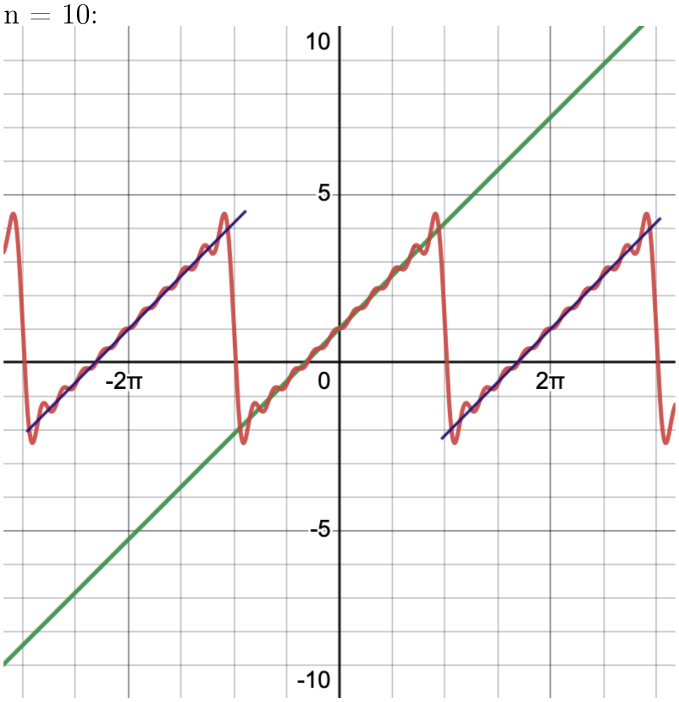
$P_n(t) = 1 - 2 \sum_{a=1}^{n} (\frac{(-1)^a \sin at}{a})$

4) Изобразите (например, в Desmos) графики функции $f(t)$ и многочлена Фурье различных порядков n(можно положить $n = 5; 10; 15$).

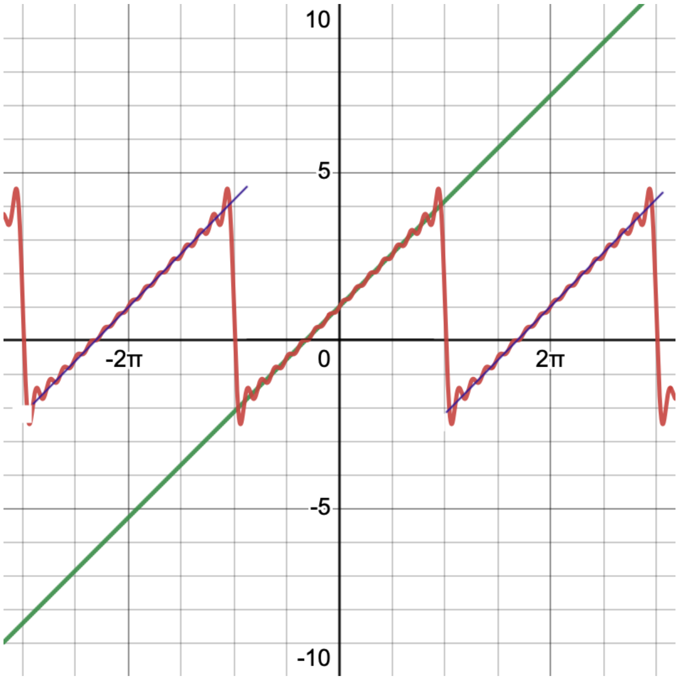
n = 5:



n = 10:



n = 15:



5) Сделайте вывод о поведении многочлена при росте его порядка.

Можно заметить, что многочлен $P_n(t) = 1 - 2\sum\limits_{a=1}^{n}(\frac{(-1)^a \sin at}{a})$ на центральном отрезке от $[-\pi, \pi]$ сходится к функции $f(t)$. Причем чем больше значение n, тем сильнее график $P_n(t)$ "сливает-ся"с $f(t)$.

Также можем увидеть, что на $[-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]$ график также сходится к $f(t)$, сдвинутому на $2\pi k$ в сторону (синие прямые). Причиной этому является периодичность используемых в $P_n(t)$ функций.

Итак, $f(t) \sim 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n \sin nt}{a})$ на $[-\pi, \pi]$.

Задача 2

Дано уравнение поверхности 2-го порядка:
$x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 12 = 0$

2.1

Составьте матрицу квадратичной формы и диагонализируйте ее. Запишите канонический базис квадратичной формы.
Матрица квадратичной формы:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
Характеристический многочлен:

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$$

Корни характеристического многочлена:
$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}\right.$
Найдем собственные векторы:
1) $\lambda_1 = -1$
A - λ_1E $= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$
ФСР: $\{\alpha * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
2) $\lambda_1 = -2$
A - λ_1E $= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$
ФСР: $\{\gamma * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
3) $\lambda_1 = 3$

A - $\lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

ФСР: $\{\delta * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Диагональная матрица (из собственных чисел):

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе собственных векторов $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2

Классифицируйте поверхность по ее каноническому уравнению.

Ортонормируем базис системы, состоящей из собственных векторов. Очевидно, что он уже ортогональный (2 вектора лежат на y = x и y = -x и один на оси Oz). Нормируем:

$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Запишем формулы перехода к новым координатам:

$\mathcal{A}_{e\to v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x_v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$x_e = \mathcal{A}_{e\to v} * x_v$

$\mathcal{A}_{v\to e} = (\mathcal{A}_{e\to v})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x' + z') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + z') \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x + y) \\ y' = z \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \end{cases}$

Запишем уравнение в новых координатах:

$x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 12 = 0$

$(x^2 + 2xy + y^2) + 2xy - 2z^2 - 12 = 0$

$(x + y)^2 + 2xy - 2z^2 - 12 = 0$

$2(z')^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}((z')^2 - (x')^2) - 2(y')^2 - 12 = 0$

$2(z')^2 + (z')^2 - (x')^2 - 2(y')^2 - 12 = 0$

$-(x')^2 - 2(y')^2 + 3(z')^2 - 12 = 0$

$-\frac{(x')^2}{12} - \frac{(y')^2}{6} + \frac{(z')^2}{4} = 1$
$\frac{(x')^2}{12} + \frac{(y')^2}{6} - \frac{(z')^2}{4} = -1$
Выполним поворот изменением осей в уравнении ($Oz' \to Ox'', Ox' \to Oy'', Oy' \to Oz''$), чтобы привести к тому виду, который давался нам на практиках/лекциях:
$$\begin{cases} x'' = z' \\ y'' = x' \\ z'' = y' \end{cases}$$
$\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{12} - \frac{(z'')^2}{6} = 1$
Это двуполостный гиперболоид.

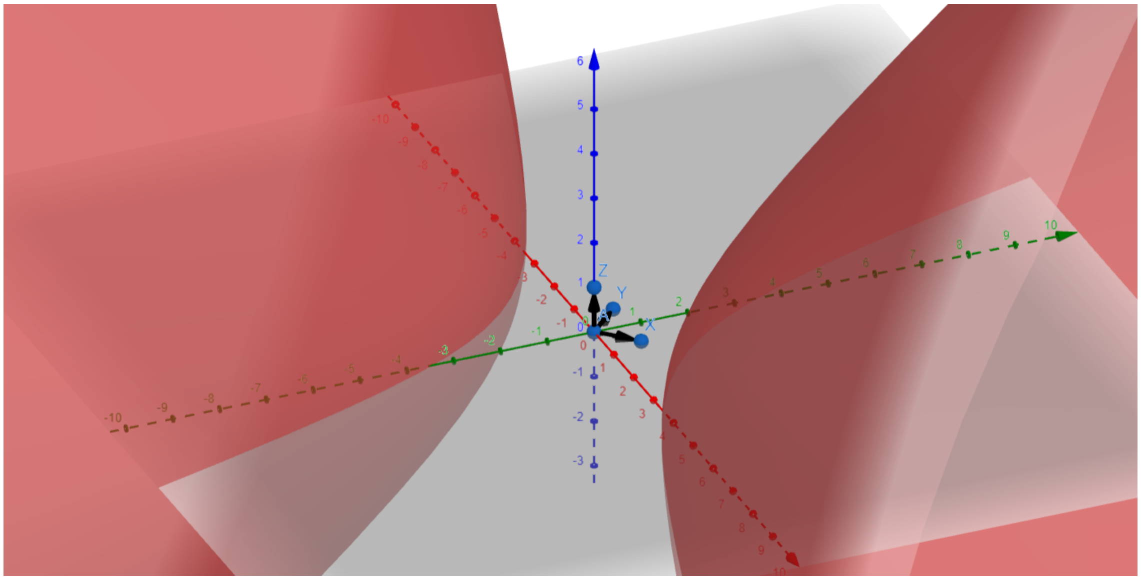
2.3

Определите, каким преобразованием пространства поверхность была приведена к главным осям.
Запишем формулы перехода к новым координатам:
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x + y) \\ y' = z \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'' = z' \\ y'' = x' \\ z'' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x + y) \\ z'' = z \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x' + z') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + z') \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-y'' + x'') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y'' + x'') \\ z = z'' \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Так как в изначальном уравнении не было линейных членов (x, y, z), то мы привели уравнение к каноническому виду только с помощью поворота (без переноса).

2.4

4) Изобразите график уравнения в исходной системе координат.Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.



Задача 3

3.1

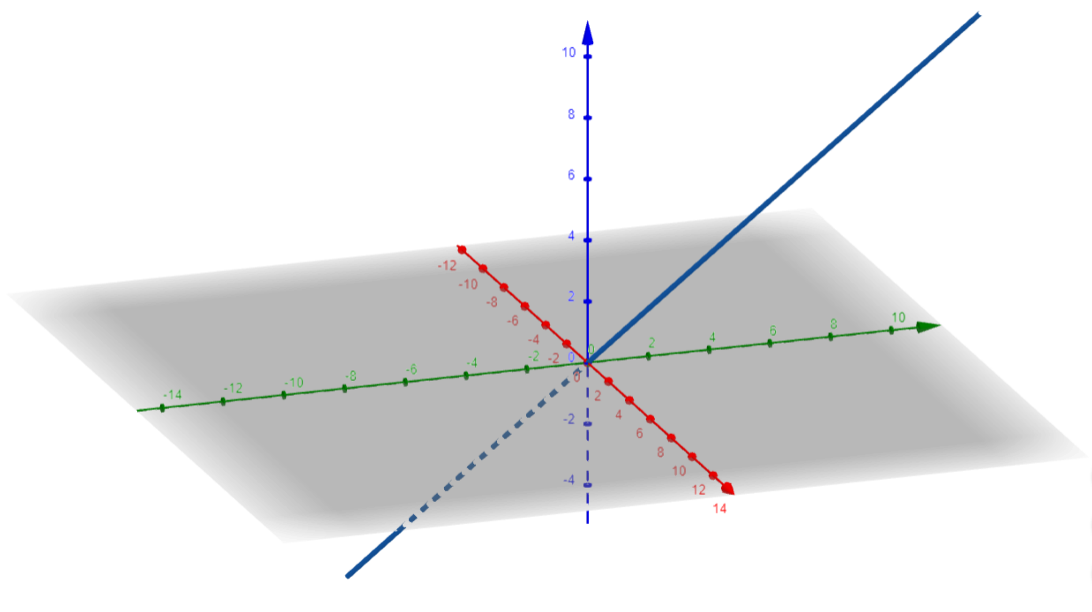
Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, его подпространства L_1 и L_2 и линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.Проведите исследование.

$\mathcal{A}$ - оператор ортогонального отражения пространства $\mathbb{R}^3$ относительно L_1, заданного уравнениями $x = 2y = z$.

Ортогональное отражение - это отображение относительно разбиения в прямую сумму, такое что $v = v - 2 * proj(v)$, где proj - это ортогональное дополнение вектора v.

1)Изобразите на графике подпространства L_1 и L_2.

Подпространство L_1 задается уравнением $x = 2y = z$, т.у L_1 является прямой. Подпространство L_2 явно в условии задачи не дано, соотвественно на рисунке его нет.

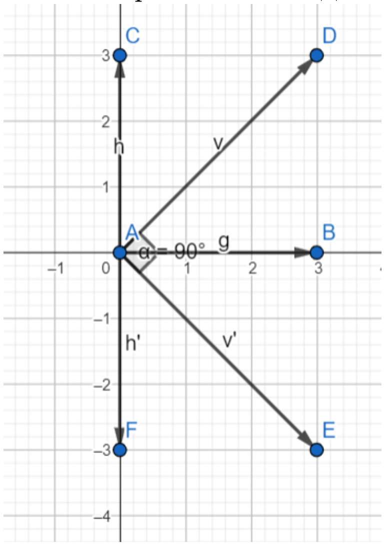


2)Методами аналитической геометрии составьте формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$.

Теорема: всякое n-мерное евклидово пространство E представляет собой прямую сумму своего произвольного подпространства G и его ортогонального дополнения.

Следствие из этого, любой вектор можно представить, как $\vec{v} = \vec{g} + \vec{h}$, где $\vec{g}$ - это вектор из пространства G, а $\vec{h}$ - это вектор, принадлежащий ортогональному дополнению пространства G.

Def.Ортогональное дополнение подпространства W векторного пространства V с билинейной формой B — это множество всех векторов V , ортогональных каждому вектору из W. Обозначим H - ортогональное дополнение к простанству L_1.



На рисунке приведен пример (несвязанный с условием задачи) того, как произвольный вектор $\vec{v}$ ортогонально отражается. На чертеже показано, как после ортогонального отражения $\vec{h}$ перейдет в $\vec{h'}$, а $\vec{v}$ соответственно – в $\vec{v'}$.

Ортогональное отражение - это такой линейный оператор, при котором любой вектор пространства $\vec{v} = \vec{g} + \vec{h}$ переходит в $\vec{v'} = \vec{g} - \vec{h'}$, т.е этот линейный оператор произвольное подпространство (относительно которого он отражает) не изменяет, а ортогональную составляющую ветора отражает, таким образом исходное подпространства отражается.

Следовательно, формула линейного оператора $\mathcal{A}\vec{v} = \vec{g} - \vec{h}$, где $\vec{g}$ - вектор из подпространства L_1, а $\vec{h}$ - вектор из ортогонального дополнения.

3)Составьте его матрицу в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства $\mathbb{R}^3$.

В нашем случае, отражение происходит относительно подпространства L_1, заданного уравнением $x = 2y = z$. Следовательно, для восстановление матрицы в пространстве $\mathbb{R}^3$ необходимо найти ортогональное дополнение к пространству L_1.

Для этого сначала найдем базис пространства L_1. Из равенства, достанем 2 уравнения:

$$x - 2y = 0$$

$$2y - z = 0$$

Запишем это в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица состоит из линейно-независимых векторов. Найдм ФСР:

$$\vec{g} = \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Так как каждый вектор из ортогонального дополнения должен быть перпендикулярен каждому вектору из L_1, то скалярное произведение векторов из H (орт. доп.) с векторами из L_1 должно быть равно 0. Следовательно, $\vec{h} \perp \vec{g} \implies (\vec{h}, \vec{g}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2|0 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$\vec{h_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\vec{h_2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

Тогда ортогональное дополнение: $H = \mathrm{span}\{\vec{h_1}, \vec{h_2}\}$.

Чтобы найти матрицу оператора в базисе необходимо применить оператор к базисным векторам. Для этого необходимо разложить стандартные базисные вектора через прямую сумму подпространства L_1 и его ортогональное дополнение H.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{9}, \lambda_2 = \frac{5}{9}, \lambda_3 = -\frac{4}{9}$$

$$\mathcal{A}_{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \\ \frac{2}{9} \\ \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \\ -\frac{10}{9} + \frac{8}{9} \\ \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \\ \frac{4}{9} \\ \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Выполняя аналогичную операцию для оставшихся базисных векторов получим:
Для вектора $e_2 = (0, 1, 0)^T$

$$\lambda_1 = \frac{1}{9}, \lambda_2 = -\frac{2}{9}, \lambda_3 = -\frac{2}{9}$$

$$\mathcal{A}_{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Для вектора $e_3 = (0, 0, 1)^T$

$$\lambda_1 = \frac{2}{9}, \lambda_2 = -\frac{4}{9}, \lambda_3 = \frac{5}{9}$$

$$\mathcal{A}_{e_3} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Матрица оператора

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

4)Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.

Спектральное разложение матрицы или разложение матрицы на основе собственных векторов — представление квадратной матрицы A в виде произведения трёх матриц $A = V\Lambda V^{-1}$, где V - матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A, Λ — диагональная матрица с соответствующими собственными значениями на главной диагонали, V^{-1} — матрица, обратная матрице V.
Для начала найдем собственные числа оператора. Из определения собственного вектора v соответствующего собственному значению λ: $A{*}V = \lambda{*}V$. Тогда: $A{*}V - \lambda{*}V = (A - \lambda{*}E){*}V = 0$
Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E)$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

Собственные числа оператора $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

Для каждого λ найдем его собственные вектора: $A-\lambda_1 E$. Решая данно СЛАУ, получаем, ФСР:

$$x = \alpha * \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{1}{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

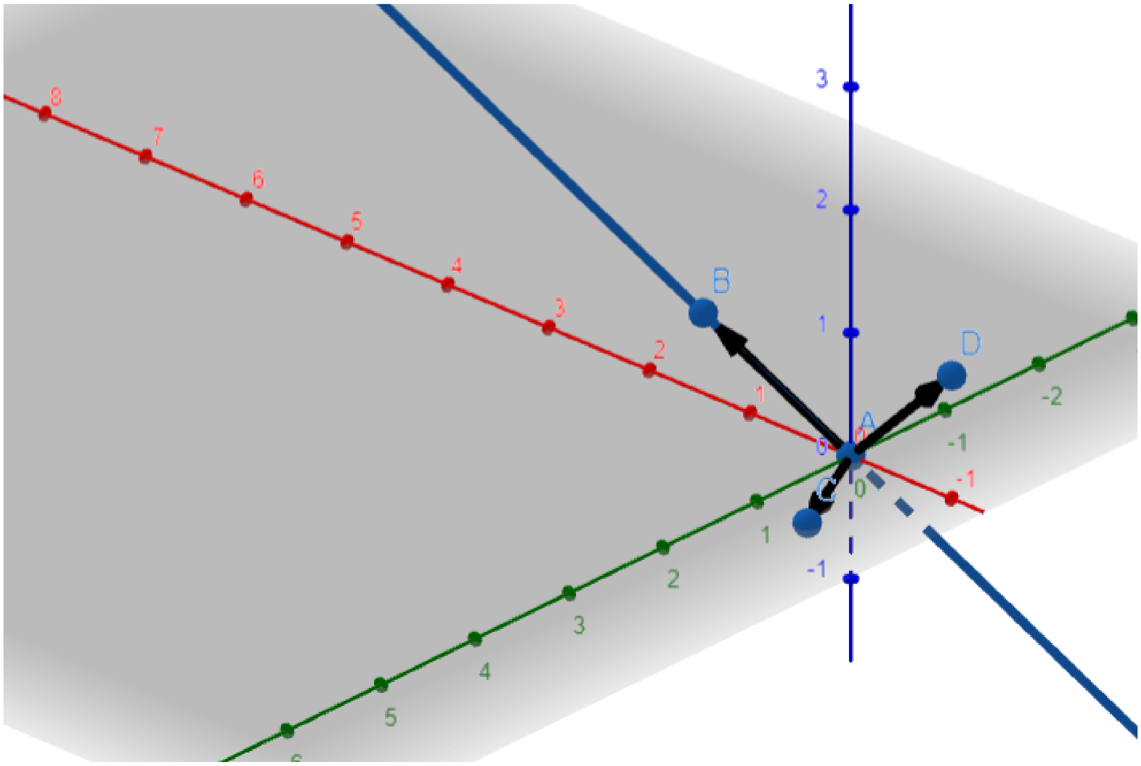
Аналогично, для λ_2 составляем СЛАУ, решаем

$$x = \alpha * \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица Λ (элементы на диагонали являются собственными числами - λ_1, λ_2 и λ_2). V - матрица составленная из собственных векторов, V^{-1} - обратная матрица V.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

5)На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Объясните его смысл.



Одним из собственных векторов является вектор, совпадающий с прямой из пространства L_1, так как это вектор при ортогональном отражении переходит в себя. Остальные 2 вектора ортогональны прямой из пространства L_1, следовательно оператор не изменил координаты этих векторов. Геометрический смысл: эти вектора при ортогональном отражении не меняют своих координат.

3.2

L - пространство многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами,
$\mathcal{A}f = (1+t)f'' + f$
$p(t) = t^2 - 2t$ **1)Выберите базис L (докажите, что это базис).**
Стандартным базисом многочленов степени не выше второй является $\{1, t, t^2\}$. Это система являтеся базисом, так как невозоможно какое-либо значение выразить через остальные значения базиса.

$$\lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 = 0$$

Единственным решением этого уравнения ялвяется $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Следовательно, $\{1, t, t^2\}$ - базис.

2)Убедитесь, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным (оператором).
Отображение $\mathcal{A} : V \to V$ называется линейным оператором, если оно обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$, т.е. образ суммы двух векторов совпадает с суммой образов этих

векторов.

2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}(x)$ - образ вектора, умноженного на число, совпадает с произведением образа этого вектора на то же число.

Проверим отображение на эти свойства. Для этого, сначала посчитаем f', f''. Так как L пространство многочленов степени не выше второй, то любой элемент, принадлижащий данному пространству можно представить, как $f = at^2 + bt + c = 0$. Тогда $f' = 2at + b$, а $f'' = 2a$. Тогда формулу оператора $\mathcal{A}$ можно переписать как $\mathcal{A} = (1+t)2a + at^2 + bt + c$.
Певрое свойство выполняется:

$$\mathcal{A}(x+y) = (1+t)(2a_1 + 2a_2) + (a_1t^2 + b_1t + c_1 + a_2t^2 + b_2t + c_2)$$

$$= (1+t)2a_1 + a_1t^2 + b_1t + c_1 + (1+t)2a_2 + a_2t^2 + b_2t + c_2 = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$$

Второе свойство тоже выполняется:

$$\mathcal{A}(\lambda x) = (1+t)(\lambda 2a) + \lambda at^2 + \lambda bt + \lambda c =$$

$$= \lambda((1+t)2a + at^2 + bt + c) = \lambda\mathcal{A}(x)$$

3)Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе и его ранг.

Матрица A $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного оператора в данном базисе.
В столбцах этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов в рассматриваемом базисе. Тогда задача поиска матрицы оператора сводится к нахождению образов базисных векторов. Следовательно, применим наш линейный оператор ко всем базисным векторам, полученные значения запишем в матрицу. Эта матрциа и будет матрицей оператора.

$$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}(1) = (1+t)*0 + 1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}(t) = (1+t)*0 + t = t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(e_3) = \mathcal{A}t^2 = (1+t)*2 + t^2 = t^2 + 2t + 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ запишется, как

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4)Найдите размерности ядра и образа оператора $\mathcal{A}$.

Ядро оператора (обозначается Ker $\mathcal{A}$), состоит из множества всех векторов, отображаемых в нулевой вектор 0: $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x : \mathcal{A}(x) = 0\}$.

$$\mathcal{A}(f) = (1+t)2a + at^2 + bt + c = 0$$

$$2a + 2at + at^2 + bt + c = 0$$

$$at^2 + (2a+b)t + (2a+c) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Соответсвенно, в ядре оператора, содержится одни нулевой вектор. Размерность ядра 0.
Образ оператора (обозначается Im $\mathcal{A}$), состоит из множества всех образов векторов пространства V: $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{y : y = \mathcal{A}(x)\}$.
По теореме: dim(Ker) + dim(Im) = dim(L), так как размерность ядра оператора равняется 0, то размерность образа равняется 3: dim(Im $\mathcal{A}$) = 3

5)Найдите собственные числа и векторы оператора.Опеределите размерность пространства собственных векторов и сделайте вывод о диагонализируемости матрицы оператора.

Найдем собственные числа по формуле характеристического многочлена: $det(A) - \lambda * E = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

Собственные числа оператора: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. подставим значения собственных чисел в матрицу и найдем ФСР, это и будут собственные вектора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР можно записать: $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Собственные вектора $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Так как число собственных векторов не совпадает с размерностью подпространства, то матрицу линейного оператора нельзя представить в диагональном виде.

6)Найдите образ вектора $p(t)$ умножением на матрицу оператора.Проверьте результат дифференцированием.

Матрица вектора $p = (0, -2, 1)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверим результат дифференцированием: $\mathcal{A}(p) = (1+t)*2+t^2-2t = 2+2t+t^2-2t = t^2+2$. Если полученный результат представить в базисе $\{1, t, t^2\}$, то результаты совпадут.

Выводы 4

В результате нашей работы мы научились исследовать функции, представленные в Евклидовом пространстве, ортогонализировать и нормировать системы векторов в них, находить минимально отличающие функции с помощью тригонометрического многочлена Фурье, диагонализировать матрицу, приводить уравнение поверхности 2-го порядка к каноническому виду, а также решать задачи на поиск оператора ортогонального отражения, искать ортогональное дополнение, образ и ядро оператора.

Оценочный лист 5

Костыгов Андрей

Вклад исполнителя - 25 %

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 25 %

Лакеев Георгий

Вклад исполнителя - 25 %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 25 %