Исследовательская работа по теме "Интегралы от функции одной переменной"

Группа M3103
Костыгов Андрей
Кравченкова Елизавета
Лакеев Георгий
Родецкий Никита

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Математический анализ

Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

23 апреля 2023 г.

Оглавление

Задача 1

Дана кусочно-заданная функция

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & -1 <= x <= 2, \\ 3x^2 + 2x - 1, & x < -1, \\ 4x - 8, & x > 2. \end{cases}$$

1.1

Def. $f(x)$ называется первообразной для $g(x)$, если $f'(x) = g(x)$.
Найдем первообразную кусочно-заданной функции $g(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)ln(x+2) - x + A, & -1 <= x <= 2, \\ x^3 + x^2 - x + B, & x < -1, \\ 2x^2 - 8x + C, & x > 2, \text{ A, B, C - константы.} \end{cases}$$

Нас просят найти непрерывную функцию $f'(x) = g(x)$. Чтобы кусочно-заданная функция была непрерывной, необходимо, чтобы подфункции, задающие ее, были непрерывны на своих областях определения (областях, на которых подфункция задает поведение основной функции), а также чтобы не было точек разрыва на месте "склейки"подфункций. Очевидно, что $(x+2)ln(x+2) - x$ непрерывна на [-1, 2], $x^3 + x^2 - x$ и $2x^2 - 8x$ непрерывны для $\forall(x)$. Чтобы у функции не было точек разрыва, необходимо,

$$\begin{cases} lim_{x \to -1+}(x^3 + x^2 - x + B) = \lim_{x \to -1-}((x+2)ln(x+2) - x + A) \\ lim_{x \to 2-}((x+2)ln(x+2) - x + A) = \lim_{x \to 2+}(2x^2 - 8x + C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{1 + 1 - 1 + B = 0 + 1 + A} \\ \text{4ln(4) - 2 + A = 8 - 16 + C} \end{cases}$$

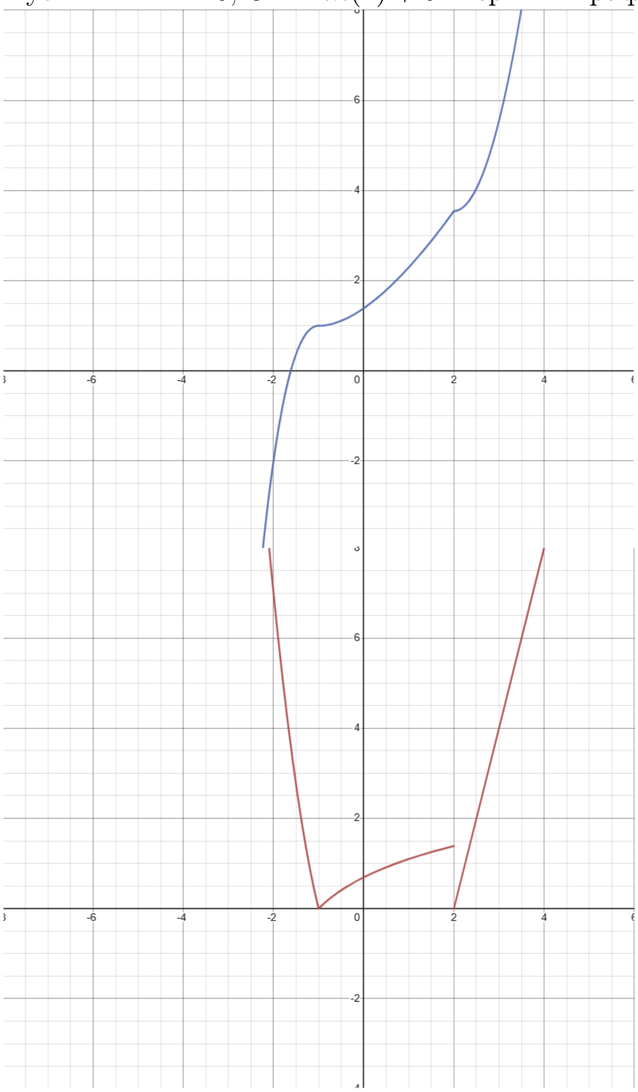
$$\begin{cases} \text{A = B} \\ \text{C = A + 4ln(4) + 6} \end{cases}$$

При таких A, B, C $f(x)$ будет непрерывной. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)ln(x+2) - x, & -1 <= x <= 2, \\ x^3 + x^2 - x, & x < -1, \\ 2x^2 - 8x + 4ln(4) + 6, & x > 2. \end{cases}$$

1.2

Пусть $A = B = 0$, $C = 4ln(4) + 6$. Верхний график - $f(x)$, нижний - $g(x)$.



1.3

Можно убедиться в том, что первообразная $f(x)$ для $g(x)$ найдена корректная, так, например, видно, что $f(x)$ неубывает на всем показанном промежутке, что и отражает график ее производной $g(x)$, который неотрицательный на всем показанном промежутке. Также можно заметить, что в местах "склейки"двух функций, как и должно быть в критических точках, производная равна 0.

Задача 2

2.1

2-A. Вычислите работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения, представляющего собой правильную треугольную пирамиду со стороной основания 3 м и высотой 6 м, из некоторого материала, удельный вес которого 20 кН/м3. Результат округлите до целого числа.

1)Составьте математическую модель: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

$$H = 6\text{м}$$

$$S = 3^2 \cdot (\sqrt{3}/4)\text{м}^2$$

$$\rho g - \text{удельный вес}$$

$$A = \Delta E = \int_0^H \rho g(H-h) \cdot dV(h)$$

2)Решите задачу аналитически.

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot sh = \frac{1}{3}h \cdot \frac{h^2}{H^2} \cdot S$$

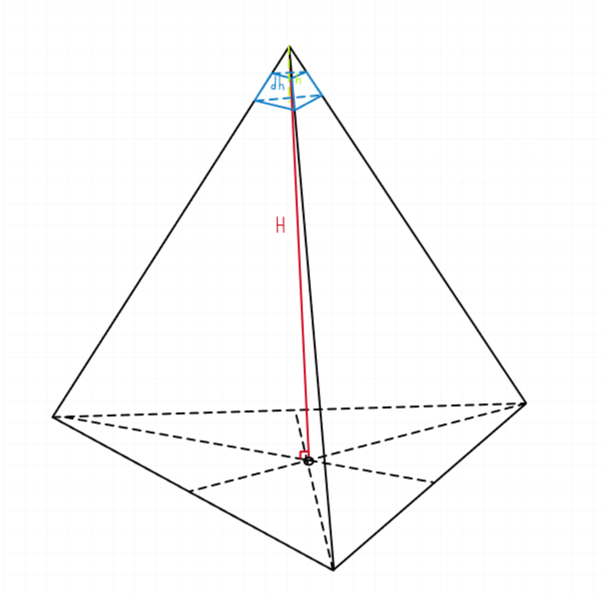
$$V'(h) = h^2 \cdot \frac{S}{H^2}$$

$$A = \int_0^H \rho g(H-h) \cdot dV(h) = \int_0^H \rho g(H-h) \cdot V'(h)dh = \int_0^H \rho g(H-h)h^2 \cdot \frac{S}{H^2} \cdot dh = \frac{S\rho g}{H^2} \int_0^H (H-h)h^2 \cdot dh =$$

$$= \frac{S\rho g}{H^2} \int_0^H (H \cdot h^2 - h^3) \cdot dh = \frac{S\rho g}{H^2} \left(\int_0^H H \cdot h^2 \cdot dh - \int_0^H h^3 \cdot dh\right) =$$

$$= \frac{S\rho g}{H^2} \left(H \cdot \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^H = \frac{S\rho g}{H^2} \left(\frac{H^4}{3} - \frac{H^4}{4}\right) = \frac{S\rho g}{H^2} \cdot \frac{H^4}{12} = \frac{S\rho g \cdot H^2}{12}$$

3)Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи.



4)Запишите ответ.

$$A = \frac{\rho g S \cdot H^2}{12} = 20 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 \frac{1}{12} = 2 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 135\sqrt{3}\text{кДж} \approx 234\text{кДж}$$

2.2

2-Б. Вычислите силу давления воды на пластинку, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9,81 кН/м3. Результат округлите до целого числа. Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке 3.2-Б.

Рисунок 3.2-Б.

1)Составьте математическую модель: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

$$H = 2\text{м}$$

$$L = 4\text{м}$$

$$P = \frac{F(h,l)}{S(h,l)}$$

Представим, что картинка трёхмерная. Тогда у нас есть ширина(обозначим ее за a)

2)Решите задачу аналитически.

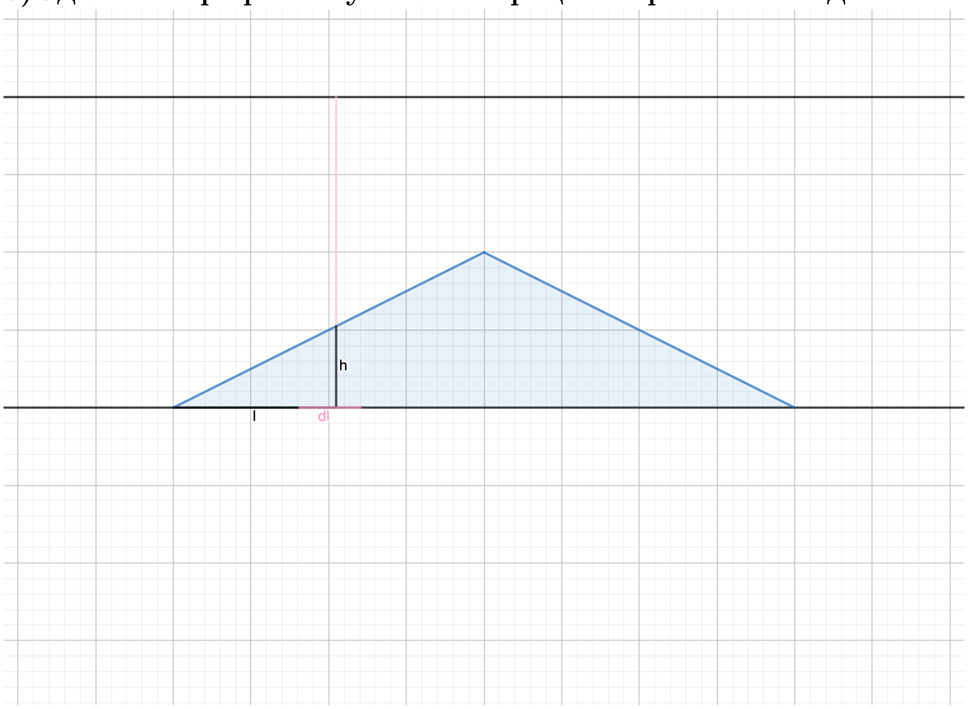
$\frac{l}{h} = 2$

$S(h,l) = l * a = 2h * a$

$$P = \frac{F(h)}{S(h)} = 2 \cdot \frac{\int_0^H \rho g(H-h)\,dS(h)}{S} = 4 \cdot \frac{\int_0^H \rho g(H-h)\,d(h\cdot a)}{a \cdot L} =$$

$$4 \cdot \frac{\int_0^H \rho g(H-h)\,dh}{L} = 4 \cdot \frac{\rho g \cdot \left(H \cdot h - \frac{1}{2}h^2\right)}{L}\Bigg|_0^H = 2 \cdot \frac{\rho g H^2}{L}$$

3)Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи.



4)Запишите ответ.

$$\frac{2\rho g H^2}{L} = \frac{2 \cdot 9.81 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{4} = 19.62\text{кН/м}^2$$

2.3

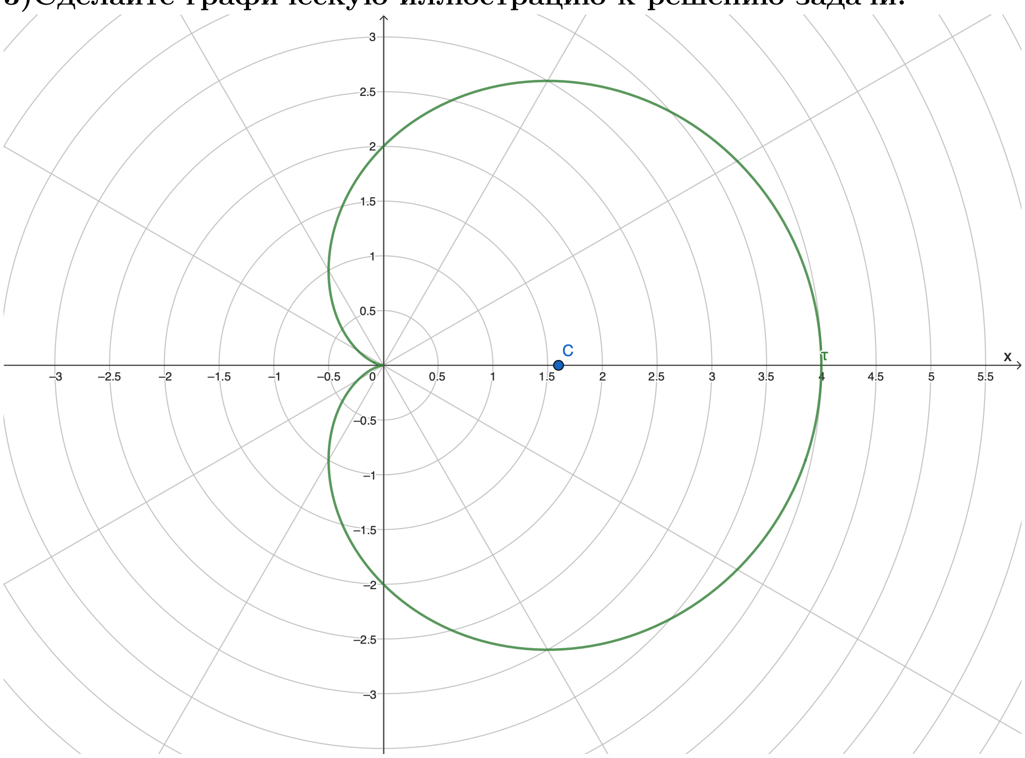
2-B. Найдите координаты центра масс однородной плоской кривой, представляющей собой кардиоиду $\rho = 2(1 + cos\phi)$.

1)Составьте математическую модель: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
Точка $C(x_c, y_c)$ - центр масс кардиоиды $\rho = 2(1 + cos\phi)$.
L - длина кардиоиды
2)Решите задачу аналитически.
$d\rho = -2sin\phi \cdot d\phi$
Найдем дифференциал дуги: $dl = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx$
Внесем dx под корень: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
В декартовых координатах: $x = \rho cos\phi$, $y = \rho sin\phi$
$dx = cos\phi \cdot d\rho - \rho \cdot sin\phi \cdot d\phi$,
$dy = sin\phi \cdot d\rho + \rho \cdot cos\phi \cdot d\phi$
Можно заметить, что при сложении квадратов dx и dy попарное произведение пропадет и получится:
$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}$
$dl = \sqrt{4sin\phi^2 d\phi^2 + 4(1 + cos\phi)^2 d\phi^2}$
$dl = 2|d\phi|\sqrt{sin\phi^2 + 1 + 2cos\phi + cos\phi^2}$
$dl = 2|d\phi|\sqrt{2(1 + cos\phi)}$
$dl = 2|d\phi|\sqrt{2(1 + 2cos\frac{\phi}{2}^2 - 1)}$
$dl = 2|d\phi|\sqrt{4cos\frac{\phi}{2}^2}$
$dl = 4|cos\frac{\phi}{2}d\phi|$
На промежутке: $[0, \pi]$: $dl = 4cos\frac{\phi}{2}d\phi$
На промежутке: $[\pi, 2\pi]$: $dl = -4cos\frac{\phi}{2}d\phi$

Найдем массу кривой (если бы кривая была неоднородная тогда следовало бы домножить на функцию, задающую ее плотность, в нашем случае мы считаем что она везде равна 1 и по сути ищем длину кривой):
Заметим, что $cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha$, а это значит, что наша функция симметрична относительно полярной оси и оси Ox. Тогда для поиска длины рассмотрим только половину кардиоиды:
$\frac{L}{2} = L_1 = \int_0^\pi dl = 4\int_0^\pi cos\frac{\phi}{2}d\phi = 8\int_0^\pi cos\frac{\phi}{2}d(\frac{\phi}{2}) = 8(sin\frac{\phi}{2})\Big|_0^\pi = 8$
$L = 16$
*Формулы для центра масс кривой взяты из Н.Н Голованов Геометрическое моделирование
Найдем x_c:
$x_c = \frac{1}{L}S_x = \frac{1}{L}\int_L xdl = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} \rho cos\phi \cdot 4|cos\frac{\phi}{2}d\phi| = \frac{1}{L}(\int_0^\pi 2(1 + cos\phi)cos\phi \cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi - \int_\pi^{2\pi} 2(1 + cos\phi)cos\phi \cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi)$
$\int 2(1 + cos\phi)cos\phi \cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi =$
$= 8\int(1 + cos\phi)cos\phi \cdot cos\frac{\phi}{2}d\phi =$

$= 8\int(1+2cos\frac{\phi}{2}^2-1)\cdot(2cos\frac{\phi}{2}^2-1)\cdot cos\frac{\phi}{2}d\phi =$
$= 32\int cos\frac{\phi}{2}^3\cdot(2cos\frac{\phi}{2}^2-1)d(\frac{\phi}{2}) =$
$= 32(2\int cos\frac{\phi}{2}^5 d(\frac{\phi}{2}) - \int cos\frac{\phi}{2}^3 d(\frac{\phi}{2})) =$
$= 32(2\int(1-sin\frac{\phi}{2}^2)^2 d(sin\frac{\phi}{2}) - \int(1-sin\frac{\phi}{2}^2)d(sin\frac{\phi}{2})) =$
$= 64(sin\frac{\phi}{2} - \frac{2}{3}sin\frac{\phi}{2}^3 + \frac{1}{5}sin\frac{\phi}{2}^5) - 32(sin\frac{\phi}{2} - \frac{1}{3}sin\frac{\phi}{2}^3) + C =$
$32sin\frac{\phi}{2} - 32sin\frac{\phi}{2}^3 + 64sin\frac{\phi}{2}^5 + C$
$\int_0^\pi 2(1+cos\phi)cos\phi\cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi = (32sin\frac{\phi}{2} - 32sin\frac{\phi}{2}^3 + \frac{64}{5}sin\frac{\phi}{2}^5)\Big|_0^\pi = \frac{64}{5}$
$\int_\pi^{2\pi} 2(1+cos\phi)cos\phi\cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi = (32sin\frac{\phi}{2} - 32sin\frac{\phi}{2}^3 + \frac{64}{5}sin\frac{\phi}{2}^5)\Big|_\pi^{2\pi} = -\frac{64}{5}$
$x_c = \frac{1}{L}(\frac{64}{5} + \frac{64}{5}) = \frac{128}{5*16} = \frac{8}{5}$
Найдем y_c:
$y_c = \frac{1}{L}S_y = \frac{1}{L}\int_L ydl = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi}\rho sin\phi\cdot 4|cos\frac{\phi}{2}d\phi| = \frac{1}{L}(\int_0^\pi 2(1+cos\phi)sin\phi\cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi - \int_\pi^{2\pi} 2(1+cos\phi)sin\phi\cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi)$
$\int 2(1+cos\phi)sin\phi\cdot 4cos\frac{\phi}{2}d\phi = -4\cos\frac{3}{2}x - 8\cos\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}\cos\frac{5}{2}x + C$
$y_c = \frac{1}{L}(4+8+\frac{4}{5}-4-8-\frac{4}{5}) = 0$

3)Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи.



4)Запишите ответ.

Координаты центра масс кардиоиды $\rho = 2(1+cos\phi)$ равны $(\frac{8}{5}, 0)$.

Задача 3

Найдите площадь фигуры, образованной графиком функции $f(x)$ и ее наклонной асимптотой, если $f(x) = -\frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{4(x+1)^2}$

3.1

Вертикальные асимптоты
Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой, так как $f(x)$ не определена в точке -1, а предел $f(x)$ в точке $x = -1$ стремится к ∞.
Горизонтальные асимптоты
Горизонтальные асимптоты - это горизонтальные линии, к которым приближается график функции по мере того, как x стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Рассмотрим предел $f(x)$ при $x \to \infty$

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-(x-1)(x^2+4x+7)}{4(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-(x^3+4x^2+7x-x^2-4x-7)}{4(x^2+2x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3-3x^2-3x+7}{4x^2+8x+4} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) = \infty$$

Так как предел $f(x)$ равен ∞ можно сделать вывод, что у функции нет горизонтальных асимптот.
Наклонные асимптоты
Наклонная асимптота - прямая, к которой неограниченно стремится график функции $f(x)$ по мере того, как x неограниченно возрастает или убывает. Наклонные асимптоты задаются уравнением $y = kx+b$, где $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. По ранее найденному, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4}\right)$. Надем k, разделив полученный предел на x.

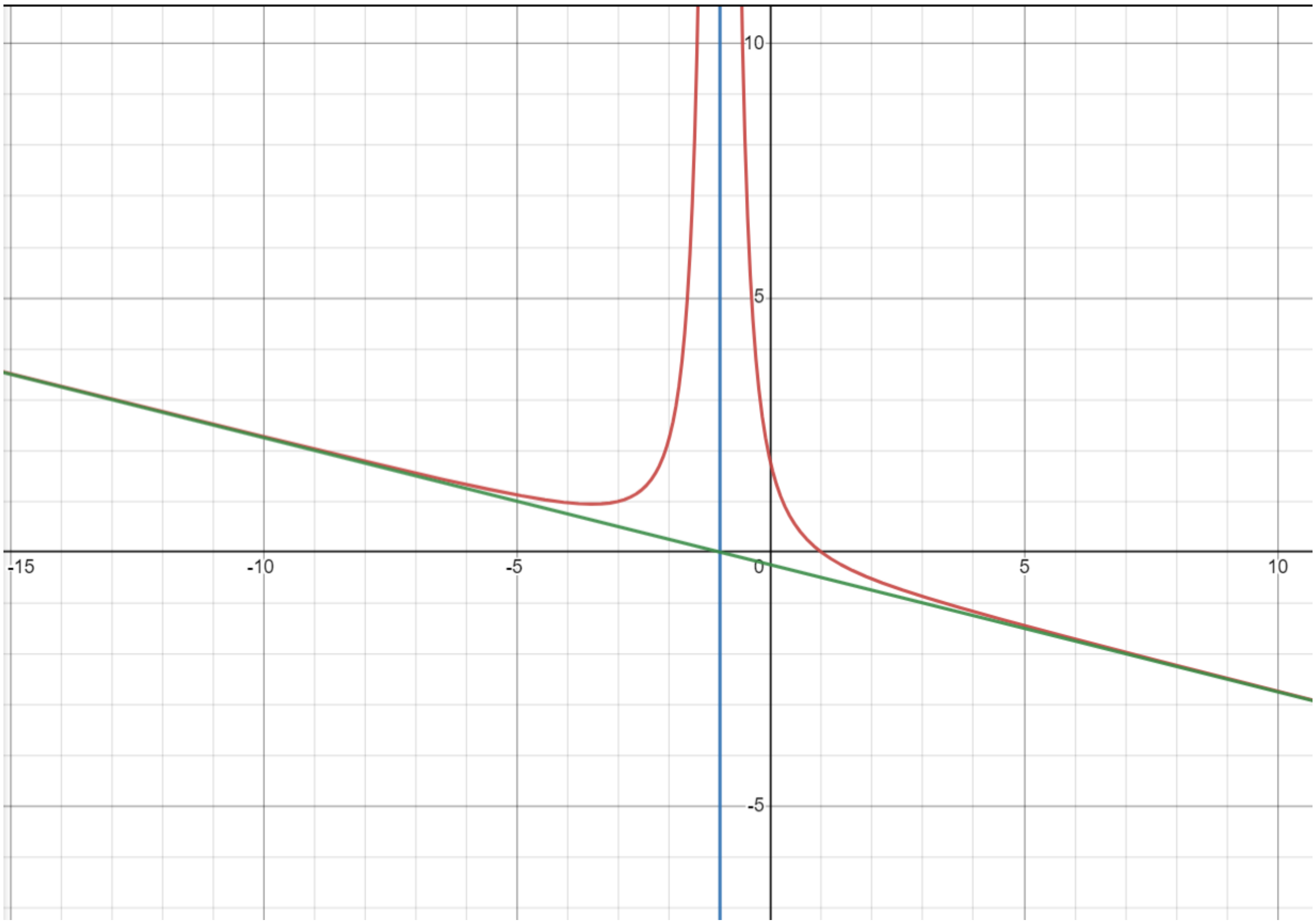
$$k = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Вне зависимости от знака бесконечности, $k = -\frac{1}{4}$. Коэффицент $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. По ранее найденному, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4}\right)$.

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{8}{4x^2+8x+4}\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Вне зависимости от знака бесконечности, $b = -\frac{1}{4}$. Следовательно, единственная наклонная асимптота равна: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

3.2



3.3

Площадь фигуры, ограниченной функцией и ее наклонной асимптотой, будет равна интегралу разности.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) dx \right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}dx \right) + \int\limits_{-1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{8}{4x^2+8x+4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}dx \right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \left(\frac{2}{x^2+2x+1}dx \right) + \int\limits_{-1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x^2+2x+1}dx \right) = 2\int\limits_{-\infty}^{-1} (x+1)^{-2}dx + 2\int\limits_{-1}^{+\infty} (x+1)^{-2}dx$$

$$= \left.\frac{-2}{x+1}\right|_{-\infty}^{-1} + \left.\frac{-2}{x+1}\right|_{-1}^{+\infty} = \left(\lim_{x\to-1}\frac{-2}{x+1} - \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x+1}\right) + \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+1} - \lim_{x\to-1}\frac{-2}{x+1}\right)$$

Так как $\lim\limits_{x\to-1}\frac{-2}{x+1}$ не существует, то исходный интеграл расходится. Следовательно, площадь исходной фигуры равна ∞.

3.4

Ответ: данная функция имеет 2 асимпоты, одна из которых вертикальная и задается уравнением $x = -1$, вторая же наклонная $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$. Площадь фигуры вычислить невозможно из-за того, что интеграл расходится.

Выводы 4

В результате нашей работы мы научились находить непрерывную первообразную кусочно-заданной функции, поработали с прикладными задачами, требующими навыков интегрирования функции одной переменной. Так, мы научились использовать интегралы в для нахождения центра масс плоской кривой, физических задачах, а также для поиска площади фигуры на бесконечном промежутке. В последнем случае требовалось дополнительное исследование сходимости/расходимости несобственного интеграла.

Оценочный лист 5

Костыгов Андрей

Вклад исполнителя - 25 %

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 25 %

Лакеев Георгий

Вклад исполнителя - 25 %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 25 %