



Лабораторная работа №1.02
"Изучение скольжения тележки по наклонной
плоскости"

Группа М3203
Кравченкова Елизавета
Лакеев Георгий

Преподаватель
Хуснутдинова Наира Рустемовна

Физические основы компьютерных и сетевых технологий
Университет ИТМО
Санкт-Петербург, Россия

7 января 2024 г.

Оглавление

1 Цели и Задачи	3
2 Установка	4
2.1 Объект исследования	4
2.2 Метод экспериментального исследования	4
2.3 Измерительные приборы	4
2.4 Схема установки	4
3 Теория и рабочие формулы	5
3.1 Погрешности	7
3.2 Метод наименьших квадратов (МНК)	8
4 Ход работы	10
4.1 Задание 1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона	10
4.1.1 Проведение измерений	10
4.1.1.1 Установка направляющего рельса	10
4.1.1.2 Замеры	10
4.1.1.3 Измерения	10
4.1.2 Обработка результатов	11
4.1.2.1 Рассчитаем величины Y и Z и их погрешности	11
4.1.2.2 Найденные точки экспериментальной зависимости $\{Y_i; Z_i\}$ и их погрешности нанесем на график	12

4.1.2.3	Найдем ускорение тележки методом наименьших квадратов (МНК). Рассчитаем погрешность	13
4.1.2.4	Построим график зависимости $Y(Z)$	14
4.1.2.5	Сформулируем и запишем вывод: можно ли считать движение тележки равноускоренным?	15
4.2	Задание 2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения	15
4.2.1	Проведение измерений	15
4.2.2	Обработка результатов	16
4.2.2.1	Для каждой серии измерений вычислим значение синуса угла наклона рельса к горизонту	16
4.2.2.2	Для каждой серии измерений вычислим средние значения времени t_1 и t_2 и их погрешности	17
4.2.2.3	Вычислим значение ускорения и его погрешность для каждой серии	17
4.2.2.4	Результаты расчета ускорения в виде доверительного интервала	18
4.2.2.5	Найдем коэффициенты линейной зависимости $a = A + B \sin \alpha$	18
4.2.2.6	Рассчитаем СКО для ускорения свободного падения. Найдем погрешность.	19
4.2.2.7	Найдем абсолютное отклонение экспериментального значения ускорения свободного падения $g_{\text{эксп}}$ от его табличного значения $g_{\text{табл}}$ для Санкт-Петербурга	19
4.2.2.8	Сформулируем и запишем вывод о достоверности измерений	20
4.2.2.9	Отметим на графике экспериментальные точки зависимости $a = a(\sin \alpha)$	20
4.2.2.10	Постройте на том же рисунке график аппроксимирующей линейной зависимости $a = A + B \sin \alpha$	20
5	Результаты	22
5.1	Таблица 1 : Измерительные приборы.	22
5.2	Таблица 2: Вертикальные координаты h_0 и h'_0 верхнего края линейки на рельсе.	22
5.3	Таблица 3: Результаты прямых измерений (Задание 1).	22

5.4	Таблица 4: Результаты прямых измерений (Задание 2).	23
5.5	Таблица 5: Результаты расчетов (Задание 2).	24
5.6	Таблица 6: Посчитанные погрешности ΔZ	24
5.7	График 1: Экспериментальные точки зависимости $Y(Z)$)	25
5.8	Доверительный интервал для a	25
5.9	График 2: Зависимость $Y(Z)$	26
5.10	Таблица 7 : средние значения времени t_1 и t_2 , СКО и их погрешности.	26
5.11	Таблица 8 : Значения ускорения и его погрешности для каждой серии.	27
5.12	Доверительный интервал для g	27
5.13	График 3: Экспериментальные точки зависимости $a(\sin \alpha)$	27
5.14	График 4: Зависимость $a(\sin \alpha)$	28
6	Используемая литература	29
7	Выводы	30
8	Ответы на контрольные вопросы	31
8.1	Дайте определения пути, перемещения, траектории. Каковы принципиальные различия этих понятий?	31
8.2	Изобразите графики зависимостей координаты $x(t)$ и проекции скорости $V_x(t)$ для случаев равномерного и равнопеременного прямолинейного движения.	31
8.3	В любой момент времени мгновенное и среднее значение скорости равны друг другу. Что в этом случае можно сказать о величине ускорения?	32
8.4	В первом случае некоторому телу придали начальную скорость параллельно шероховатой наклонной плоскости в направлении вверх, а во втором случае - вниз. В каком случае модуль ускорения тела будет больше и почему?	33
8.5	Изобразите качественный рисунок (чертеж) иллюстрирующий получение формулы (11) данных методических указаний.	33
8.6	Как зависит величина силы трения скольжения, действующая на тело находящееся на наклонной плоскости, от угла ее наклона при прочих равных условиях? Изобразите график соответствующей зависимости.	34
8.7	Как зависит ускорение свободного падения от географической широты?	34

Цели и Задачи

Цели:

1. Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.
2. Определение величины ускорения свободного падения g .

Задачи:

1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона.
2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту.
3. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренности движения тележки.
4. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения.

Установка

2.1 Объект исследования

Исследование движение тележки по рельсу с фиксированным и переменным углом наклона.

2.2 Метод экспериментального исследования

Исследование косвенных величин (ускорения), полученных из многократных прямых измерений.

2.3 Измерительные приборы

Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	$\Delta_{\text{и}}$
Линейка на рельсе	1.3 м	$1 \frac{\text{см}}{\text{дел}}$	—	5 мм
Линейка на угольнике	250 мм	$1 \frac{\text{мм}}{\text{дел}}$	—	0.5 мм
ПКЦ-3 в режиме секундомера	100 с	0.1 с	—	0.1 с

2.4 Схема установки

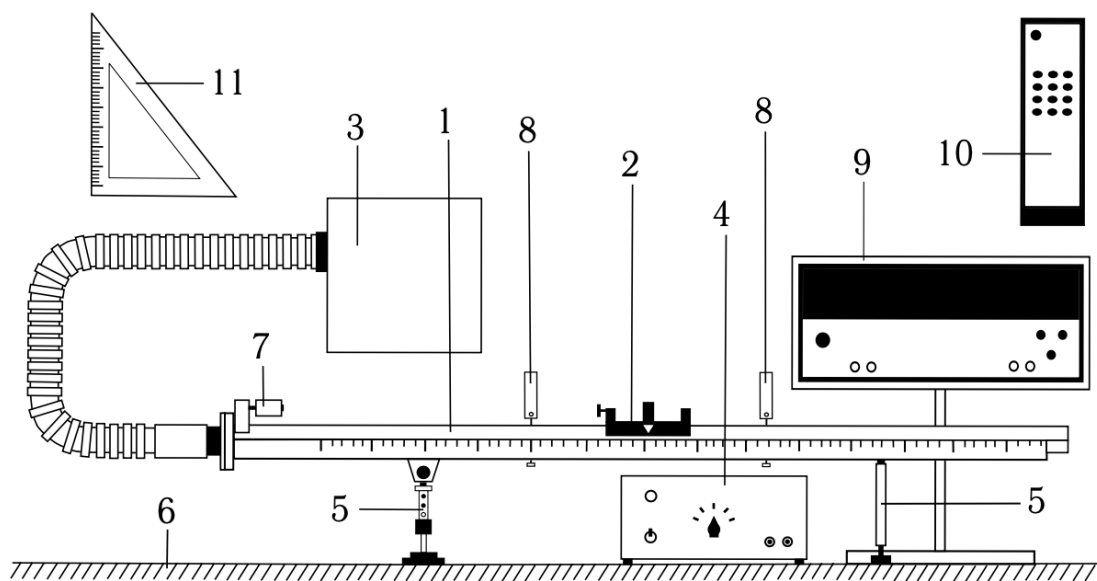


Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки

Теория и рабочие формулы

Как известно, при поступательном равноускоренном движении тела вдоль оси Ox зависимость проекции его скорости v_x от времени t определяется выражением:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad (1)$$

где v_{0x} - проекция скорости на ось Ox в момент времени $t = 0$, a_x - ускорение тела.

Зависимость координаты тела x от времени t имеет вид:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (2)$$

Здесь x_0 - начальная координата. Если начальная скорость тела равна нулю, то из (2) следует:

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) \quad (3)$$

Таким образом, существует линейная зависимость между перемещением $\Delta x = x_2 - x_1$ и полуразностью квадратов значений времени $\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$. Коэффициент пропорциональности этой зависимости равен ускорению тела. Если экспериментальный график этой зависимости будет представлять собой прямую линию, то это будет доказательством движения с постоянным ускорением.

В качестве объекта совершающего равнопеременное поступательное движение рассмотрим тележку, скользящую по наклонной плоскости (см. рис.1)

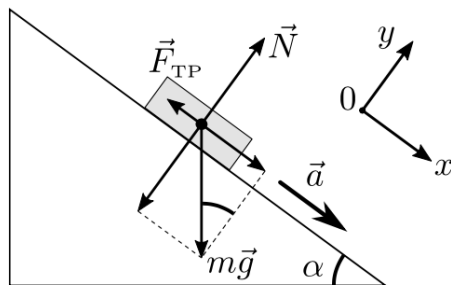


РИС. 1. Векторная диаграмма сил, действующих на тело, расположенное на наклонной плоскости

Второй закон Ньютона, описывающий ее движение, имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \quad (4)$$

где \vec{a} – ускорение тележки, \vec{N} – сила реакции опоры, а сила трения, возникающая при скольжении, по модулю равна произведению коэффициента трения на силу нормальной реакции: $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Проекция уравнения (4) на координатные оси:

$$\begin{cases} Ox : 0 = N - mg \cos \alpha, \\ Oy : ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \end{cases} \quad (5)$$

где α – угол между наклонной плоскостью и горизонталью.

Из (5) следует выражение для модуля ускорения:

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \quad (6)$$

Поскольку в лабораторной установке коэффициент трения μ и угол α достаточно малы, то $\cos \alpha$ в формуле (6) можно заменить единицей. С учетом этого выражение для ускорения будет иметь вид:

$$a = g(\sin \alpha - \mu) \quad (7)$$

Таким образом, теоретическая зависимость ускорения a от $\sin \alpha$ является линейной и угловой коэффициент этой зависимости равен ускорению свободного падения g .

Найдем синус угла наклона рельса к горизонту.

Выразим длину гипотенузы, а также противолежащего катета через имеющиеся значения.

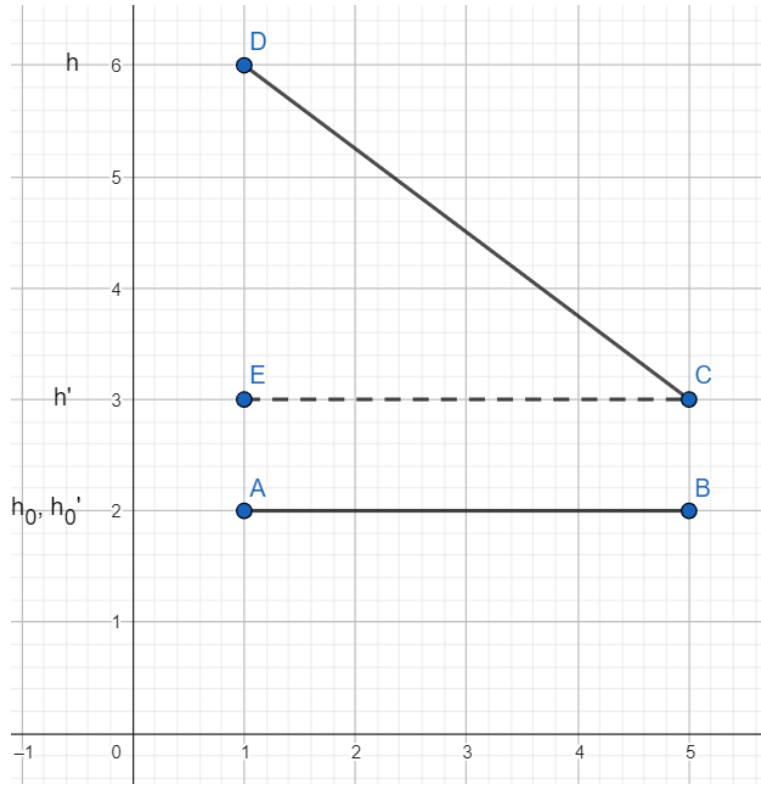


Рис. 3.1: Схема установки

Можем заметить что синус угла будет равен $\frac{DE}{DC}$. Для этого параллельным переносом перенесем отрезок АВ на высоту $(h' - h'_0)$. Теперь заметим, что $DE = (h - h_0) - (h' - h'_0)$. А гипотенуза $DC = x' - x$ по условию лабораторной работы. Таким образом,

$$\sin \alpha = \frac{(h - h_0) - (h' - h'_0)}{x' - x} \quad (8)$$

3.1 Погрешности

Среднее арифметическое всех результатов измерений:

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \quad (9)$$

Расчет погрешности, используя коэффициент Стьюдента. Доверительный интервал для измеряемого в работе промежутка времени:

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} \quad (10)$$

$$\alpha = P(t \in [\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]) \quad (11)$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t} \cdot 100\% \quad (12)$$

Среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N - 1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} \quad (13)$$

Погрешности косвенных измерений :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2} \quad (14)$$

3.2 Метод наименьших квадратов (МНК)

Цель метода - подбор такой функции $y = f(x) = a + bx$, чтобы сумма квадратов отклонений, измеренных в опытах значений $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ от рассчитанных была бы минимальной.

МНК рассмотрим в варианте, когда приняты следующие допущения:

- между переменными существует зависимость вида $y = a + bx$;
- погрешности величины x малы.

Формулы расчета коэффициентов линейной зависимости по МНК приведены в разделе «6.5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов» пособия Обработка экспериментальных данных.

В данном пособии рекомендуется делать расчет коэффициентов по такому плану:

1. Выписать все пары значений для каждой риски. Таким образом у нас будет 4 пары значений функции.
2. Найти среднее значение экспериментальных точек:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i ; \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

3. Найти коэффициенты прямой по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} ; a = \bar{y} - b\bar{x}$$

4. Рассчитать параметры d и D :

$$d_i = y_i - (a + bx_i) ; D = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

5. Определить СКО коэффициентов a и b .

$$S_b^2 = \frac{1}{D} \cdot \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

$$S_a^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D} \right) \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

Расчет коэффициента b и его СКО упрощается, если из теории известно, что прямая проходит через начало координат. Тогда параметр b и его СКО находят по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{\sum x_i^2} \quad (15.1)$$

$$S_b^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} \cdot \frac{\sum (y_i - bx_i)^2}{n-1} \quad (15.2)$$

Ход работы

4.1 Задание 1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона

4.1.1 Проведение измерений

4.1.1.1 Установка направляющего рельса

1. Подключим вилку насоса к блоку питания, соблюдая полярность (положительный контакт насоса помечен белым), выставим рабочее напряжение 6 В, включим источник;
2. Поместим тележку на рельс около точки с координатой 0,6 м (приблизительно в середине рельса);
3. Вращая винт правой (одиночной) опоры, добьемся неподвижности тележки;
4. Выключим насос.

4.1.1.2 Замеры

Установим угольник вертикально на опорной плоскости, измерим с его помощью вертикальные координаты h_0 и h'_0 верхнего края линейки на рельсе, соответственно, в точках $x = 0,22$ м и $x' = 1,0$ м. Координаты x и x' , а также измеренные величины h_0 и h'_0 запишем в Таблицу 2 с указанием приборных погрешностей их измерения $\Delta x = \Delta x' = 5$ мм = 0,005 м, $\Delta h_0 = \Delta h'_0 = 0,5$ мм.

Таблица 2:

х, м	х', м	h_0 , мм	h'_0 , мм
$0,22 \pm 0,005$	$1 \pm 0,005$	$204 \pm 0,5$	$204 \pm 0,5$

4.1.1.3 Измерения

1. Под обе ножки левой опоры подложим одну стандартную пластину толщиной $d \approx 1$ см.
2. Включим прибор ПКЦ-3 тумблером на правой боковой панели.
3. На дистанционном пульте управления нажмем последовательно три кнопки: «режим работы: 0», «механика: сброс», «индикация: время t1, t2».
4. Установим первые оптические ворота в точке с координатой $x_1 = 0,15$ м, а вторые - $x_2 = 0,40$ м.
5. Включим блок питания воздушного насоса ВС 4-15.

6. На дистанционном пульте управления нажмем кнопку «механика: сброс» на цифровом приборе.
7. Тележку установим в крайнем левом положении и прижмем к электромагниту.
8. На дистанционном пульте управления нажмем кнопку «механика: пуск». Тележка начнет двигаться и последовательно пройдет левые и правые оптические ворота. На дисплее прибора ПКЦ-3 отразятся промежутки времени t_1 и t_2 от начала движения до прохождения ворот. Величины x_1 , x_2 , t_1 , t_2 внесем в Таблицу 3:

№	Измеренные величины				Расчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$x_2 - x_1$, м	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$, с ²
1	0.15	0.4	1.5	2,7		
2	0.15	0.5	1.6	3,2		
3	0.15	0.7	1,4	3,6		
4	0.15	0.9	1,4	4,1		
5	0.15	1.1	1,4	4,5		

9. Выключим блок питания воздушного насоса ВС 4-15.
10. Установим вторые оптические ворота последовательно в точках $x_2 = 0,50; 0,70; 0,90; 1,10$ м и для каждого положения оптических ворот выполним пункты 3–9.

4.1.2 Обработка результатов

4.1.2.1 Рассчитаем величины Y и Z и их погрешности

Используя данные из Таблицы 3 посчитаем значения переменных $Y = x_2 - x_1$ и $Z = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$. Запишем их в Таблицу 3:

№	Измеренные величины				Расчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$x_2 - x_1$, м	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$, с ²
1	0.15	0.4	1.5	2,7	0,25	2,52
2	0.15	0.5	1.6	3,2	0,35	3,84
3	0.15	0.7	1,4	3,6	0,55	5,5
4	0.15	0.9	1,4	4,1	0,75	7,425
5	0.15	1.1	1,4	4,5	0,95	9.145

Найдем их погрешности по формуле (14)

$$\Delta Y = \sqrt{(-\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} = 0,007$$

$$\Delta Z = \sqrt{(t_1 \Delta t_1)^2 + (-t_2 \Delta t_2)^2}$$

Где $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.005$, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0.1$ - приборная погрешность.

Так как погрешность Z зависит от t_1 и t_2 , то для каждого измеренного промежутка мы имеем свою погрешность:

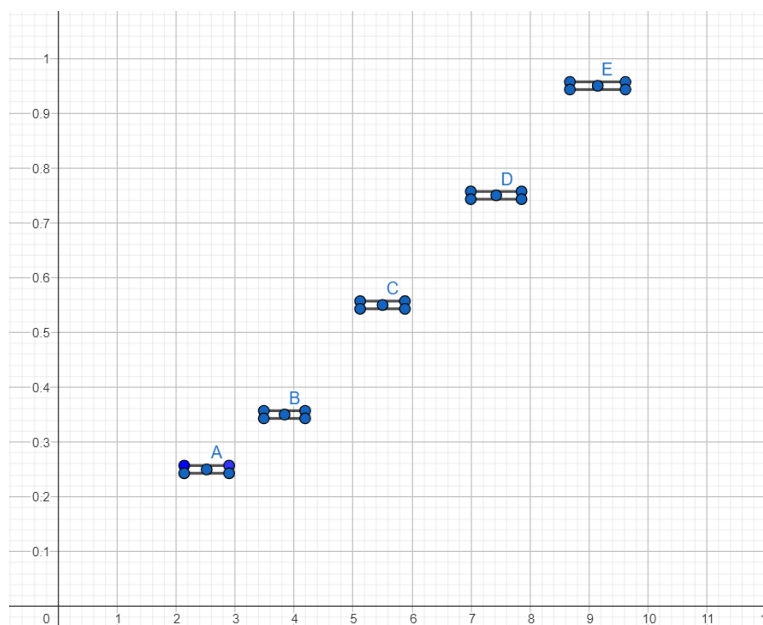
Таблица 6:

t_1 , с	t_2 , с	ΔZ , с ²
1.5	2.7	0,3088689042
1.6	3.2	0,3577708764
1.4	3.6	0,3862641583
1.4	4.1	0,4332435804
1.4	4.5	0,4712748667

4.1.2.2 Найденные точки экспериментальной зависимости $\{Y_i; Z_i\}$ и их погрешности нанесем на график

Зависимость $\{Y_i; Z_i\}$ найдем из Таблицы 3 из последних двух столбцов.

Изобразим на Графике 1:



4.1.2.3 Найдем ускорение тележки методом наименьших квадратов (МНК). Рассчитаем погрешность

Теоретическая зависимость Y от Z в соответствии с формулой (3) должна иметь линейный вид $Y = aZ$, с угловым коэффициентом равным ускорению.

А значит с помощью метода наименьших квадратов можно подобрать такую функцию $Y(Z) = aZ$, чтобы сумма квадратов отклонений от рассчитанных была бы минимальной.

Найдем a по формуле (15.1), а его среднеквадратическое отклонение (СКО) σ_a по формуле (15.2):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2} = 0,1012873496, \sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - aZ_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N Z_i^2}} = 0,003371877949$$

Где N - количество экспериментальных точек, в данной серии измерений $N = 5$.

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента a для доверительной вероятности $\alpha = 0,90$ по формуле (10) ($t_{0,90,5} \approx 2$):

$$\Delta_a = 2\sigma_a = 0,006743755898$$

Найдем относительную погрешность ускорения по формуле (12):

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\% = 3,329021801$$

Запишем доверительный интервал по формуле (11):

$$\alpha = P(a \in [a - \Delta a, a + \Delta a])$$

$$0,90 = P(a \in [-0.1013, 0.3039])$$

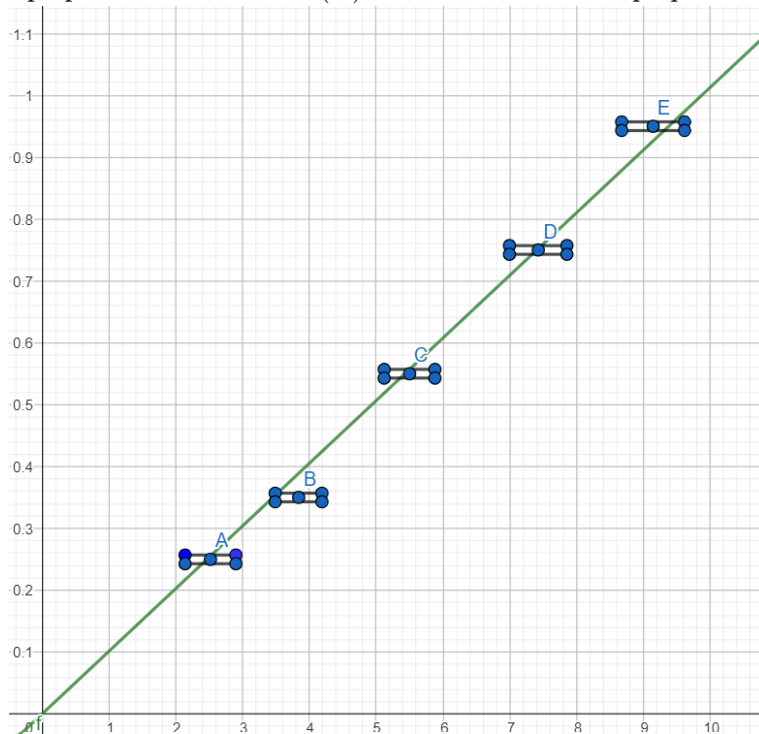
Промежуточные вычисления можете посмотреть здесь [МНК1](#)

4.1.2.4 Построим график зависимости $Y(Z)$

Формула графика, полученная из предыдущего пункта:

$$Y = 0,1012873496 * Z$$

График зависимости $Y(Z) = aZ$ покажем на Графике 2



4.1.2.5 Сформулируем и запишем вывод: можно ли считать движение тележки равноускоренным?

Движение тележки можно считать равноускоренным, так как экспериментальный график зависимости $Y(Z)$ с мелкими огрехами, но представляет собой прямую линию. Это значит что линейность зависимости $Y(Z)$ показана экспериментом. Уже из теории удалось узнать, что коэффициент этой зависимости равен ускорению. Так как эта прямая и у нее коэффициент угла наклона не меняется, а следовательно не меняется ускорение, то да движение равноускоренное.

4.2 Задание 2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения

4.2.1 Проведение измерений

1. Установим первые оптические ворота в точке с координатой $x_1 = 0,15$ м, а вторые – $x_2 = 1,10$ м.
2. Под ножки левой опоры положим одну стандартную пластину.
3. Установив угольник вертикально на опорной плоскости, измерим с его помощью вертикальные координаты h и h' верхнего края шкалы, соответственно, в точках $x = 0,22$ м и $x' = 1,00$ м. Значения вертикальных координат занесем в Таблицу 4
4. Включим блок питания воздушного насоса ВС 4-15.
5. На дистанционном пульте управления нажмем кнопку «механика: сброс» на цифровом приборе.
6. Тележку установим в крайнем левом положении и прижмем к электромагниту.
7. На дистанционном пульте управления нажмем кнопку «механика: пуск». Тележка начнет двигаться и последовательно пройдет левые и правые оптические ворота.
8. На дисплее прибора ПКЦ-3 отразятся промежутки времени t_1 и t_2 от начала движения до прохождения ворот. Величины t_1 , t_2 занесем в Таблицу 4. Повторим еще четыре раза измерения t_1 , t_2 . Результаты также занесем в Таблицу 4.
9. Выключим блок питания воздушного насоса ВС 4-15.
10. Последовательно увеличивая число пластин под ножками левой опоры до пяти, для каждого набора пластин выполним пункты 3-9, записывая результаты в Таблицу 4.
11. После окончания всех измерений выключим прибор ПКЦ-3 тумблером на правой боковой панели.

Таблица 4:

$N_{\text{Пл}}$	h , мм	h' , мм	№	t_1 , с	t_2 , с
1	214	204	1	1.4	4.5
			2	1.4	4.5
			3	1.4	4.4
			4	1.4	4.4
			5	1.5	4.5
2	224	206	1	1	3.1
			2	0.9	3.1
			3	1	3.1
			4	0.9	3.1
			5	1	3.1
3	234	206	1	0.7	2.5
			2	0.8	2.5
			3	0.7	2.5
			4	0.7	2.5
			5	0.7	2.5
4	243	206	1	0.6	2.1
			2	0.7	2.2
			3	0.6	2.1
			4	0.7	2.2
			5	0.6	2.2
5	254	208	1	0.6	1.9
			2	0.5	1.9
			3	0.5	1.9
			4	0.6	1.9
			5	0.6	1.9
$N_{\text{Пл}}$ - количество пластин h - высота на координате $x = 0.22$ м h' - высота на координате $x' = 1.00$ м					

4.2.2 Обработка результатов

4.2.2.1 Для каждой серии измерений вычислим значение синуса угла наклона рельса к горизонту

Для каждой серии измерений из Таблицу 4 вычислим синус угла наклона рельса к горизонту по формуле (8)

Полученные значения запишем в Таблицу 5:

$N_{\text{ПЛ}}$	$\sin \alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1$, с	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2$, с	$\langle a \rangle \pm \Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	0,01282051282			
2	0,02307692308			
3	0,0358974359			
4	0,04743589744			
5	0,05897435897			
$N_{\text{ПЛ}}$ - количество пластин $\langle t_{1,2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_{1i,2i}$				

4.2.2.2 Для каждой серии измерений вычислим средние значения времени t_1 и t_2 и их погрешности

Найдем среднее арифметическое t_1 и t_2 по формуле (9)

Найдем среднеквадратичное отклонение среднего значения: t_1 и t_2 по формуле (13)

Погрешность t_1 и t_2 найдем по формуле (10)

Полученные значения запишем в Таблицу 7:

№	$\langle t_1 \rangle$, с	$\langle t_2 \rangle$, с	СКО t_1 , с	СКО t_2 , с	Δt_1 , с	Δt_2 , с
1	1,42	4,46	0,02	0,02449489743	0,0556	0,06809581485
2	0,96	3,1	0,02449489743	0	0,06809581485	0
3	0,72	2,5	0,1069579357	0	0,2973430611	0
4	0,64	2,16	0,02449489743	0,02449489743	0,06809581485	0,06809581485
5	0,56	1,9	0,02449489743	0	0,06809581485	0

Также заполним 3,4 столбцы Таблицы 5.

4.2.2.3 Вычислим значение ускорения и его погрешность для каждой серии

Найдем ускорение по формуле(полученной из (3)) :

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

Погрешность найдем, как погрешность косвенных измерений по следующей формуле (полученной из (14))

$$\Delta a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \cdot \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + ((\langle t_2 \rangle) \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

Полученные значения запишем в Таблицу 8:

$\langle t_1 \rangle, \text{с}$	$\Delta t_1, \text{с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{с}$	$\Delta t_2, \text{с}$	$\langle a \rangle, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1,42	0,0556	4,46	0,06809581485	0,08727175081	0,003164627866
0,96	0,06809581485	3,1	0	0,1795497445	0,00315429744
0,9	0,2973430611	2,5	0	0,2867647059	0,02833302557
0,7	0,06809581485	2,16	0,06809581485	0,3735990037	0,02787446383
0,64	0,06809581485	1,9	0	0,4874390701	0,01399148598

4.2.2.4 Результаты расчета ускорения в виде доверительного интервала

Результаты расчета ускорения в виде доверительного интервала $\langle a \rangle \pm \Delta a$ внесем в последний столбец Таблицы 5.

4.2.2.5 Найдем коэффициенты линейной зависимости $a = A + B \sin \alpha$

Из формулы (7) следует, что теоретическая связь между ускорением и синусом угла наклона рельса описывается уравнением:

$$a = -\mu g + g \sin \alpha \quad (14)$$

т.е. зависимость $a(\sin \alpha)$ является линейной, а величины $-\mu g$ и g – коэффициенты этой зависимости.

А значит с помощью метода наименьших квадратов можно подобрать такую функцию $a = A + B \sin \alpha$, чтобы сумма квадратов отклонений от рассчитанных была бы минимальной. И тогда найти g как B

Рассчитаем коэффициенты по плану, описанному тут

$$B = g = \frac{\sum_{i=1}^N a_i \sin \alpha_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2} = 8,519796753$$

$$A = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N a_i - B \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right) = -0,02072943954$$

Промежуточные вычисления можете посмотреть здесь МНК2

4.2.2.6 Рассчитаем СКО для ускорения свободного падения. Найдем погрешность.

Рассчитаем СКО для ускорения свободного падения по формулам (полученным из метода наименьших квадратов)

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{D(N-2)}} = 0,1895009287$$

где

$$d_i = a_i - (A + B \sin \alpha_i)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2$$

Промежуточные вычисления можете посмотреть здесь МНК2

Посчитаем абсолютную погрешность g для доверительной вероятности $\alpha = 0.90$, по формуле (10) ($t_{0.90,5} \approx 2$)

$$\Delta g = 2\sigma_g = 0,3790018574$$

Рассчитаем относительную погрешность g по формуле (12).

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} \cdot 100\% = 4,448484728$$

Запишем доверительный интервал по формуле (11):

$$\alpha = P(g \in [g - \Delta g, g + \Delta g])$$

$$0,90 = P(g \in [7.769778, 8.549815])$$

4.2.2.7 Найдем абсолютное отклонение экспериментального значения ускорения свободного падения $g_{\text{эксп}}$ от его табличного значения $g_{\text{табл}}$ для Санкт-Петербурга

Ускорение свободного падения в Санкт-Петербурге: 9,8195.

Абсолютное отклонение

$$\Delta g_{\text{откл}} = |g_{\text{эксп}} - g_{\text{табл}}| = 1,299703247$$

Относительное отклонение $\varepsilon_{g_{\text{откл}}} = \frac{\Delta g_{\text{откл}}}{g_{\text{табл}}} = 0,132359 = 13,24\%$

$$\Delta g = 0,3790018574 < |g_{\text{эксп}} - g_{\text{табл}}| = 1,299703247$$

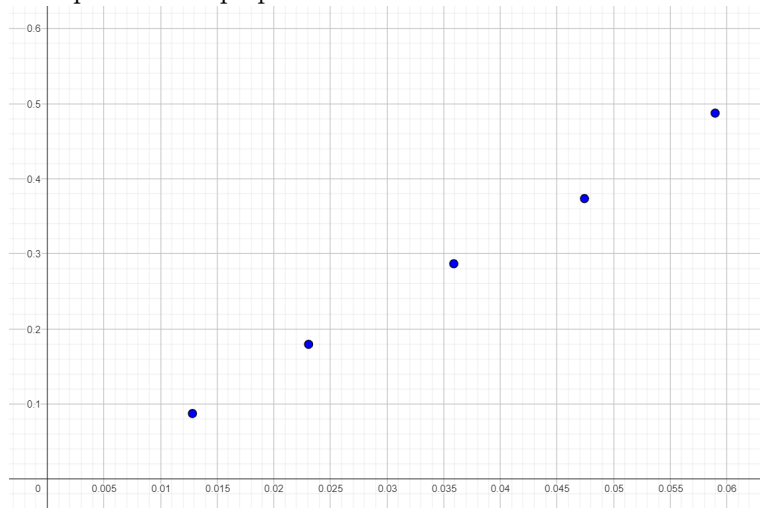
4.2.2.8 Сформулируем и запишем вывод о достоверности измерений

Найденное значение ускорения свободного падения не совпадает с табличным (если считать, что погрешность табличного значения намного меньше полученной при проведении эксперимента), однако отличается от него всего на 13,24%, при этом разница между табличным и экспериментальными значениями превышает абсолютную погрешность в $\frac{1,299703247}{0,3790018574} = 3,43$ раз. Таким образом, хоть табличное значение и не попало в доверительный интервал, оно находится довольно близко к нему, скорее всего, это произошло из-за случайных факторов (например, наклон рельса в одну из сторон: на наблюдателя или от него в процессе проведения эксперимента, ошибки наблюдателя, сила сопротивления воздуха). Эксперимент можно считать подходящим для определения примерного значения ускорения свободного падения.

4.2.2.9 Отметим на графике экспериментальные точки зависимости $a = a(\sin \alpha)$

Зависимость $\{\sin \alpha_i; a_i\}$ найдем из Таблицы 5 из 2го и последнего столбца.

Изобразим на Графике 3:

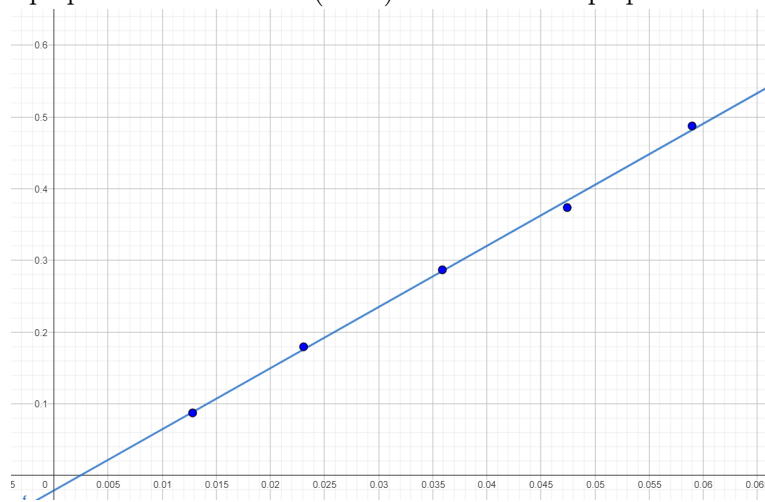


4.2.2.10 Постройте на том же рисунке график аппроксимирующей линейной зависимости $a = A + B \sin \alpha$

Формула графика, полученная из предыдущих пунктов:

$$a = -0,02072943954 + 8,519796753 \sin \alpha$$

График зависимости $a(\sin \alpha)$ покажем на Графике 4



Результаты

5.1 Таблица 1 : Измерительные приборы.

Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	$\Delta_{\text{и}}$
Линейка на рельсе	1.3 м	$1 \frac{\text{см}}{\text{дел}}$	—	5 мм
Линейка на угольнике	250 мм	$1 \frac{\text{мм}}{\text{дел}}$	—	0.5 мм
ПКЦ-3 в режиме секундомера	100 с	0.1 с	—	0.1 с

5.2 Таблица 2: Вертикальные координаты h_0 и h'_0 верхнего края линейки на рельсе.

х, м	х', м	h_0 , мм	h'_0 , мм
$0,22 \pm 0,005$	$1 \pm 0,005$	$204 \pm 0,5$	$204 \pm 0,5$

5.3 Таблица 3: Результаты прямых измерений (Задание 1).

№	Измеренные величины				Расчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$x_2 - x_1$, м	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$, s^2
1	0.15	0.4	1.5	2,7	0,25	2,52
2	0.15	0.5	1.6	3,2	0,35	3,84
3	0.15	0.7	1,4	3,6	0,55	5,5
4	0.15	0.9	1,4	4,1	0,75	7,425
5	0.15	1.1	1,4	4,5	0,95	9.145

5.4 Таблица 4: Результаты прямых измерений (Задание 2).

$N_{\text{ПЛ}}$	h , мм	h' , мм	№	t_1 , с	t_2 , с
1	214	204	1	1.4	4.5
			2	1.4	4.5
			3	1.4	4.4
			4	1.4	4.4
			5	1.5	4.5
2	224	206	1	1	3.1
			2	0.9	3.1
			3	1	3.1
			4	0.9	3.1
			5	1	3.1
3	234	206	1	0.7	2.5
			2	0.8	2.5
			3	0.7	2.5
			4	0.7	2.5
			5	0.7	2.5
4	243	206	1	0.6	2.1
			2	0.7	2.2
			3	0.6	2.1
			4	0.7	2.2
			5	0.6	2.2
5	254	208	1	0.6	1.9
			2	0.5	1.9
			3	0.5	1.9
			4	0.6	1.9
			5	0.6	1.9
$N_{\text{ПЛ}}$ - количество пластин h - высота на координате $x = 0.22$ м h' - высота на координате $x' = 1.00$ м					

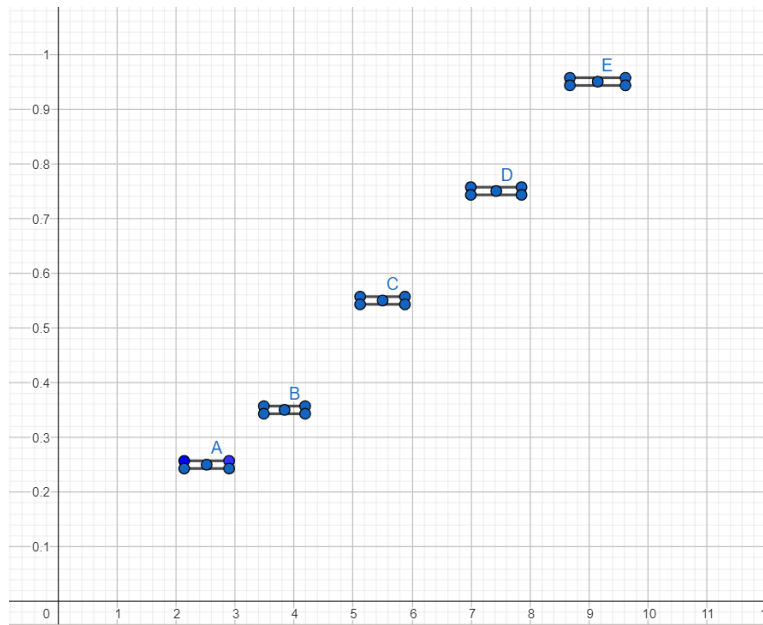
5.5 Таблица 5: Результаты расчетов (Задание 2).

$N_{\text{ПЛ}}$	$\sin \alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1$, с	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2$, с	$\langle a \rangle \pm \Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	0,01282051282	$1.42 \pm 0,0556$	$0.4,46 \pm 0,06809581485$	$0,08727175081 \pm 0,003164627866$
2	0,02307692308	$0,96 \pm 0,06809581485$	$3,1 \pm 0$	$0,1795497445 \pm 0,00315429744$
3	0,0358974359	$0.9 \pm 0,2973430611$	$2,5 \pm 0$	$0,2867647059 \pm 0,02833302557$
4	0,04743589744	$0.7 \pm 0,06809581485$	$2,16 \pm 0,06809581485$	$0,3735990037 \pm 0,02787446383$
5	0,05897435897	$0.64 \pm 0,06809581485$	$1,9 \pm 0$	$0,4874390701 \pm 0,01399148598$
$N_{\text{ПЛ}}$ - количество пластин $\langle t_{1,2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_{1i,2i}$				

5.6 Таблица 6: Посчитанные погрешности ΔZ

t_1 , с	t_2 , с	ΔZ , с ²
1.5	2.7	0,3088689042
1.6	3.2	0,3577708764
1.4	3.6	0,3862641583
1.4	4.1	0,4332435804
1.4	4.5	0,4712748667

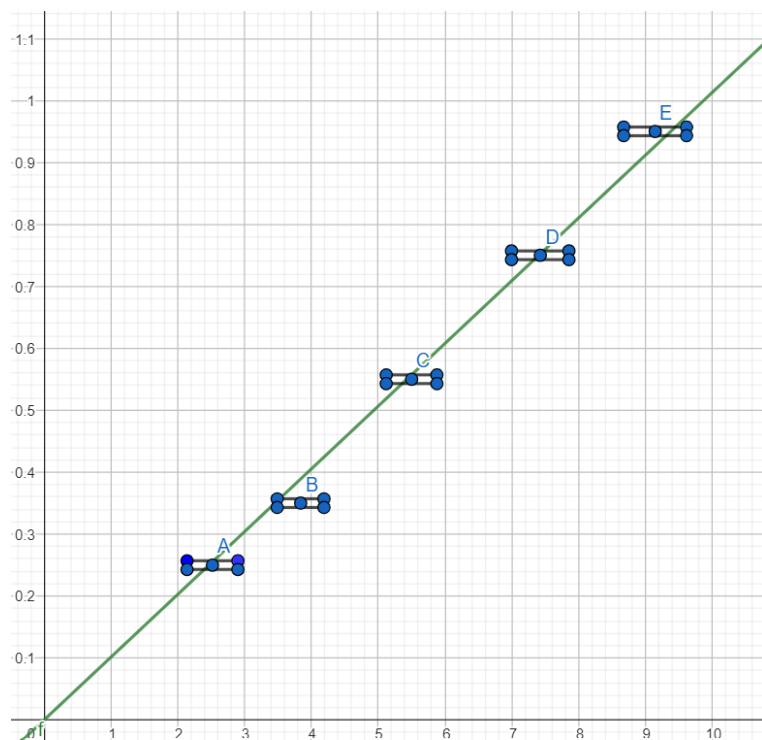
5.7 График 1: Экспериментальные точки зависимости $Y(Z)$



5.8 Доверительный интервал для a

$$0,90 = P(a \in [-0.1013, 0.3039])$$

5.9 График 2: Зависимость $Y(Z)$



5.10 Таблица 7 : средние значения времени t_1 и t_2 , СКО и их погрешности.

№	$\langle t_1 \rangle$, с	$\langle t_2 \rangle$, с	СКО t_1 , с	СКО t_2 , с	Δt_1 , с	Δt_2 , с
1	1,42	4,46	0,02	0,02449489743	0,0556	0,06809581485
2	0,96	3,1	0,02449489743	0	0,06809581485	0
3	0,72	2,5	0,1069579357	0	0,2973430611	0
4	0,64	2,16	0,02449489743	0,02449489743	0,06809581485	0,06809581485
5	0,56	1,9	0,02449489743	0	0,06809581485	0

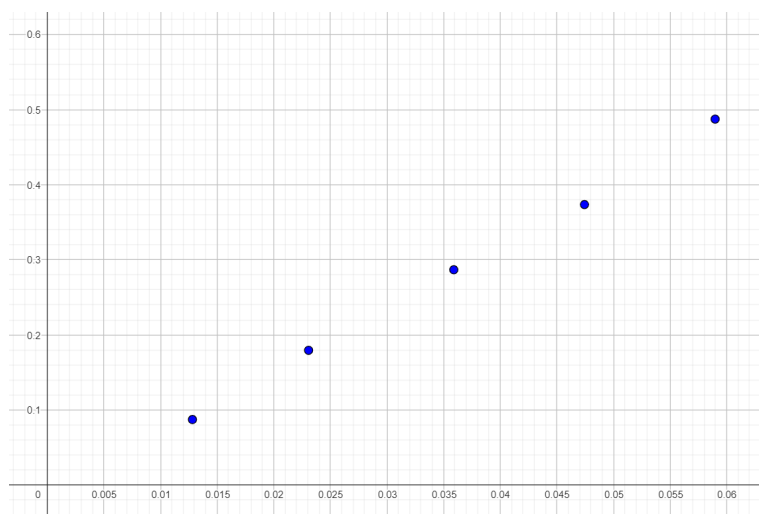
5.11 Таблица 8 : Значения ускорения и его погрешности для каждой серии.

$\langle t_1 \rangle, \text{с}$	$\Delta t_1, \text{с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{с}$	$\Delta t_2, \text{с}$	$\langle a \rangle, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1,42	0,0556	4,46	0,06809581485	0,08727175081	0,003164627866
0,96	0,06809581485	3,1	0	0,1795497445	0,00315429744
0,9	0,2973430611	2,5	0	0,2867647059	0,02833302557
0,7	0,06809581485	2,16	0,06809581485	0,3735990037	0,02787446383
0,64	0,06809581485	1,9	0	0,4874390701	0,01399148598

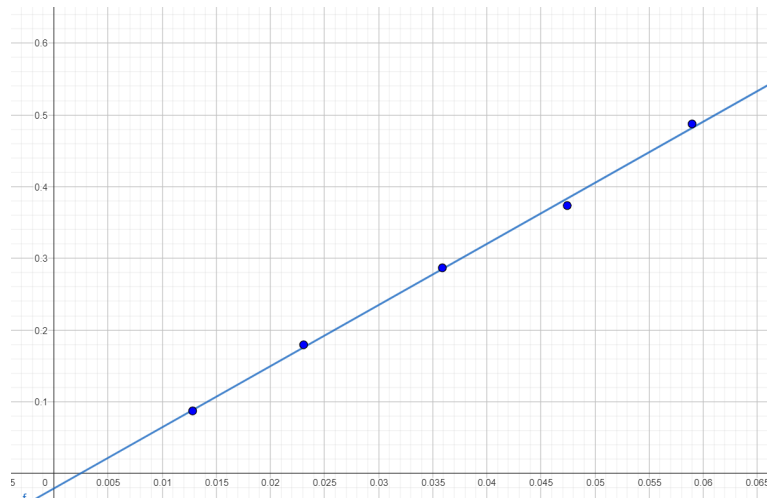
5.12 Доверительный интервал для g

$$0,90 = P(g \in [7.769778, 8.549815])$$

5.13 График 3: Экспериментальные точки зависимости $a(\sin \alpha)$



5.14 График 4: Зависимость $a(\sin \alpha)$



Используемая литература

1. Курепин В.В., Баранов И.В. Обработка экспериментальных данных: Методические указания к лабораторным работам. – СПб, 2003..

Выводы

В ходе лабораторной работы нами было измерено время движения тележки по рельсу с фиксированным (см Таблица 3) и с переменным (см Таблица 4) углом наклона. Также на основе полученных данных рассчитали ускорение тележки при фиксированном ($a = 0,1012873496 \frac{m}{c^2}$) и при переменном (см Таблица 5) и экспериментальное ускорение свободного падения ($g = 8,519796753 \frac{m}{c^2}$).

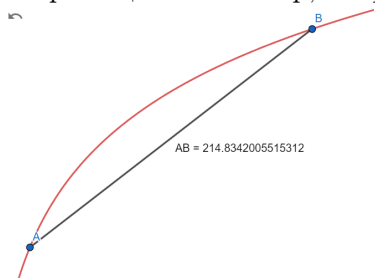
В результате исследований пришли к выводу, что движение тележки можно считать равноускоренным, так как экспериментальный график зависимости $Y(Z)$ с мелкими огрехами, но представляет собой прямую линию. Это значит что линейность зависимости $Y(Z)$ показана экспериментом. Уже из теории удалось узнать, что коэффициент этой зависимости равен ускорению. Так как эта прямая и у нее коэффициент угла наклона не меняется, а следовательно не меняется ускорение, то да движение равноускоренное.

Помимо этого, исследовали достоверность полученного значения ускорения свободного падения. Найденное значение g не совпадает с табличным (если считать, что погрешность табличного значения намного меньше полученной при проведении эксперимента), однако отличается от него всего на 13,24%, при этом разница между табличным и экспериментальным значениями превышает абсолютную погрешность в $\frac{1,299703247}{0,3790018574} = 3,43$ раз. Таким образом, хоть табличное значение и не попало в доверительный интервал, оно находится довольно близко к нему, скорее всего, это произошло из-за случайных факторов (например, наклон рельса в одну из сторон: на наблюдателя или от него в процессе проведения эксперимента, ошибки наблюдателя, сила сопротивления воздуха). Эксперимент можно считать подходящим для определения примрного значения ускорения свободного падения.

Ответы на контрольные вопросы

8.1 Дайте определения пути, перемещения, траектории. Каковы принципиальные различия этих понятий?

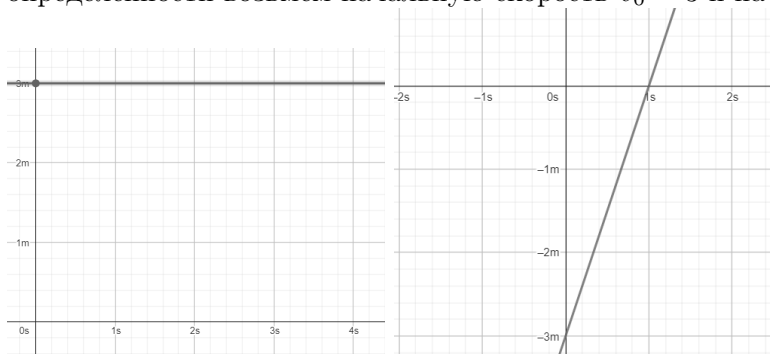
Траектория - это линия, по которой движется тело. Пройденный путь - это длина этой линии, а перемещение - вектор, направленный из начальной точки перемещения в конечную.



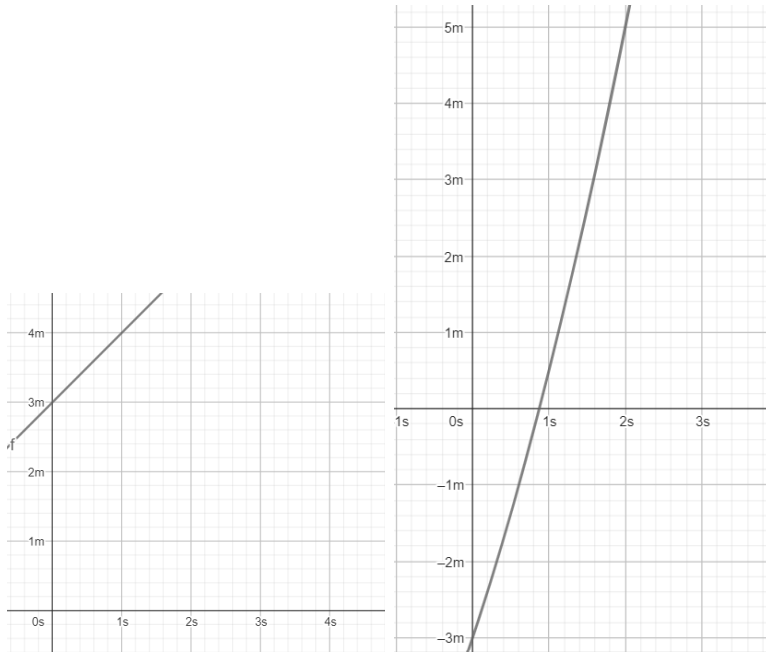
Пусть тело перемещается из точки А в точку В, по изображенной траектории, тогда точно видно, что путь не равен перемещению, так как перемещение равно просто длине вектора АВ, а путь равен интегралу по кривой первого рода.

8.2 Изобразите графики зависимостей координаты $x(t)$ и проекции скорости $V_x(t)$ для случаев равномерного и равнопеременного прямолинейного движения.

Сначала рассмотрим равномерное движение. При равномерном движении координата изменяется по следующему закону $x = x_0 + v_x \cdot t$. В таком случае, графиком будет прямая. Для определенности возьмем начальную скорость $v_0 = 3$ и начальная координата $x_0 = -3$



Теперь посмотрим на равноускоренное движение. В этом случае координата будет задаваться следующим уравнением $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$. Чтобы сравнее было нагляднее возьмем начальные значения из равномерного движения $v_0 = 3$, $x_0 = -3$, и ускорение равное $a = 1$.



8.3 В любой момент времени мгновенное и среднее значение скорости равны друг другу. Что в этом случае можно сказать о величине ускорения?

Вспомним формулу скоростей:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t}$$

Так как в любой момент времени мгновенное и среднее значение скорости равны, то приравняем полученные формулы и решим дифференциальное уравнение.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta S}{\Delta t} &= \frac{S}{t} \\
\frac{\Delta S}{S} &= \frac{\Delta t}{t} \\
\int \frac{\Delta S}{S} &= \int \frac{\Delta t}{t} \\
\ln S &= \ln t + c_1 \\
S &= t \cdot e_1^c \\
S &= t \cdot c
\end{aligned}$$

Получается, что если перемещение задается уравнением $S = t \cdot c$, где c - это произвольная постоянная, то $v_{\text{мгн}} = v_{\text{ср}}$. Это уравнение описывает равноускоренно движение, т.е. в случае если ускорение постоянно, то обе скорости равны.

8.4 В первом случае некоторому телу придали начальную скорость параллельно шероховатой наклонной плоскости в направлении вверх, а во втором случае - вниз. В каком случае модуль ускорения тела будет больше и почему?

8.5 Изобразите качественный рисунок (чертеж) иллюстрирующий получение формулы (11) данных методических указаний.

Данная формула выводится в ходе работы.

8.6 Как зависит величина силы трения скольжения, действующая на тело находящееся на наклонной плоскости, от угла ее наклона при прочих равных условиях? Изобразите график соответствующей зависимости.

По определению, сила трения скольжения равна $F_{\text{тр}} = \mu N$, где μ - коэффициент трения тела о плоскость, а N - сила реакции опоры. Рассмотрим проекцию на ОУ всех сил, действующих на тело

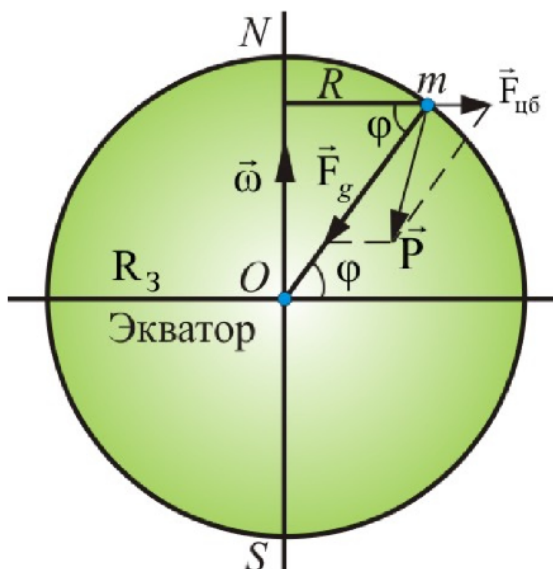
$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \\ 0 &= N - mg \cos \alpha \\ \implies F_{\text{тр}} &= \mu mg \cos \alpha \end{aligned}$$

Из этого следует, что величина силы трения скольжения, действующая на тело, находящееся на наклонной плоскости, обратно пропорциональна углу наклона: чем больше угол наклона, тем меньше сила трения.

8.7 Как зависит ускорение свободного падения от географической широты?

Земля не идеальная сферическая поверхность, а является так называемым геоидом – она сплюснута у полюсов (радиус от центра Земли к полюсам и радиус Земли по экватору немного различны), поэтому ускорение свободного падения у полюсов немного больше, чем ускорение свободного падения в районе экватора. Чем ближе к полюсу, тем больше ускорение свободного падения. Также на ускорение свободного падения влияет вращательное движение Земли. Тело, находящееся на поверхности земли имеет еще и центростремительное ускорение. $a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Так как на разных широтах, Земля имеет разные радиуса, то можем выразить радиус земли через угол. $R = R \cos \phi$.

$$a_{\text{ц.с.}} = \omega^2 R \cos \phi$$



Теперь можем записать 2 закон Ньютона.

$$\begin{aligned}
 ma &= mg - N \\
 N &= m(g - a) \\
 \vec{P} &= -\vec{N} \\
 \Rightarrow P &= m(g - a)
 \end{aligned}$$

Получается, что вес, с которым телом взаимодействует с землей равен $P = m(g - a)$. Выразим центростремительное ускорение:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{ц.с.}} &= \omega^2 R \cos \phi = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R \cos \phi = \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \phi \\
 \Rightarrow P &= m(g - a) = m \left(g - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \phi \right)
 \end{aligned}$$

Теперь обозначим, полученный вес за силу тяжести. Так делают во многих задачах, так как в обычных вычислениях такая точно не нужна. В таком случае можем обозначить $P = mg'$, где g' - это ускорение свободного падения, который меняется в зависимости от широты, а g - это настоящее ускорение, которое постоянно.

$$mg' = mm \left(g - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \phi \right)$$

$$g' = \left(g - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \phi \right)$$

Получили зависимость ускорения свободного падения g' от широты.