Исследовательская работа по теме "Аналитическая геометрия"

Группа M3103
Быкова Аксинья
Кравченкова Елизавета
Родецкий Никита

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Линейная алгебра
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

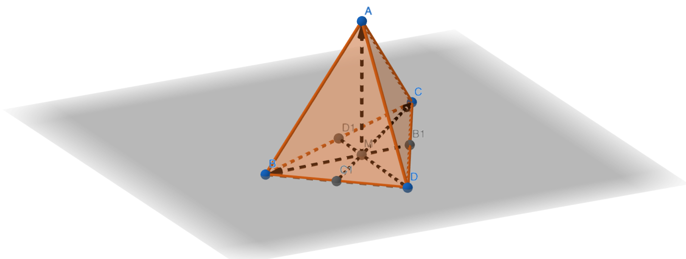
23 декабря 2022 г.

Оглавление

Задача 1

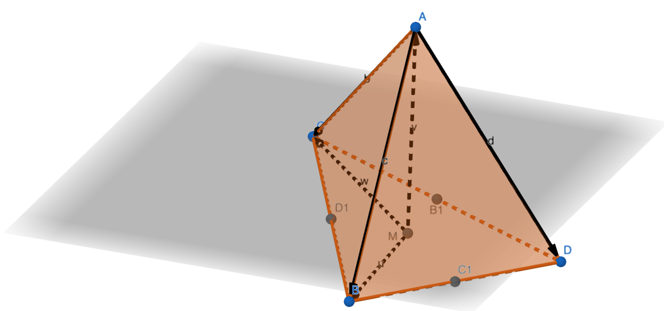
В тетраэдре $ABCD$ точка M - точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты точки пространства в системе координат $A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, если известны координаты x', y', z' в системе координат $M, \vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$.

1.1



B_1, C_1, D_1 – это середины сторон соответственно CD,BD,BC

1.2



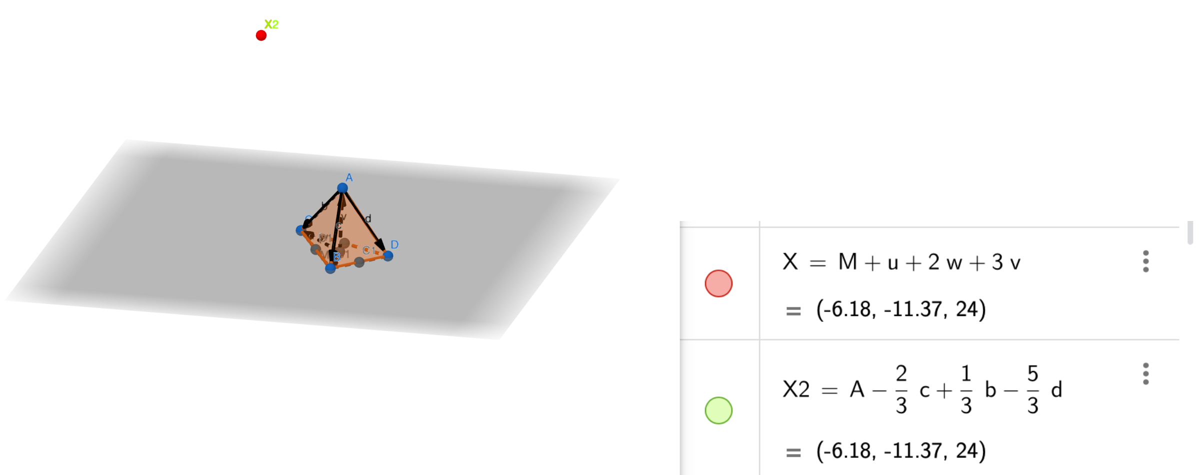
Векторы $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ – это соответственно векторы u, w, v, c, b, d

1.3

Пусть есть точка X(x', y', z'). Тогда:
$(x', y', z') = x'\vec{MB} + y'\vec{MC} + z'\vec{MA} =$
$= x'\frac{2}{3}\vec{B_1B} + y'\frac{2}{3}\vec{C_1C} + z'(\frac{2}{3}\vec{C_1C} + \vec{CA}) =$
$= x'\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{DC} + \vec{CB}) + y'\frac{2}{3}(\vec{C_1B} + \vec{BC}) + z'(\frac{2}{3}(\vec{C_1B} + \vec{BC}) + \vec{CA}) =$
$= x'\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AC}) + \vec{CA} + \vec{CB}) + y'\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{DB} + \vec{BC}) + z'(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{DB} + \vec{BC}) + \vec{CA}) =$
$= x'\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AC}) + \vec{CA} + \vec{CB}) + y'\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \vec{AC}) + z'(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \vec{AC}) + \vec{CA}) =$
$= x'\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AB}) + y'\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}) + z'(\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}) - \vec{AC}) =$
$= x'(-\frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}) + y'(-\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}) + z'(-\frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}) =$
$= -\frac{1}{3}(x' + y' + z')\vec{AD} + (-\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z')\vec{AC} + (\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z')\vec{AB}$
Для перехода в базис с началом в точке A требуется прибавить вектор $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AD} + \vec{AC} + \vec{AB})$
То есть в базисе $A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ будут координаты:
$(\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3})$

1.4

Возьмем точку X(1,2,3) в системе с базисом $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$ и началом в M.
Тогда в ДПСК с началом в O:
$X = M + \vec{MB} + 2\vec{MC} + 3\vec{MA}$
X2 – это точка X в системе с базисом $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ и началом в A. Подставим в полученную нами в 1.3 формулу перевода:
$X2(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$
Тогда в ДПСК с началом в O:
$X2 = A - \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{5}{3}\vec{AD}$



Как мы видим, X(1,2,3) в системе с базисом $\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MA}$ и началом в M и $X2(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ в системе с базисом $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ и началом в A совпадают.

Задача 2

Даны уравнения двух множеств:
Множество 1: $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$
Множество 2: $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

2.1

Множество 1:
$2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$
Сделаем перенос $Oxy \to O'x'y'$ $(O'(x_0, y_0))$,чтобы занулить коеффициенты при x,y.

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

После подстановки и раскрытия скобок получим систему (первое уравнение – коэффициент при x', второе – коэффициент при y'):

$$\begin{cases} 2x_0 + \frac{5}{2}y_0 - \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{5}{2}x_0 - 3y_0 + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

Отсюда $O'(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7})$
В $O'x'y'$ множество 1 записывается: $2x'^2 + 5x'y' - 3y'^2 = 0$
Разобьем на скобки:
$(2x' - y')(3y' + x') = 0$
Получаем две прямые: $y' = 2x'$ и $y' = -\frac{1}{3}x'$
В Oxy' прямые записываются: $y = 2x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Таким образом множество 1 – кривая, распавшаяся на прямые.

Множество 2:
$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$
Сделаем поворот $Oxy \to Ox'y'$,чтобы занулить коэффициент при xy.

$$\begin{cases} x = x'cos(\alpha) - y'sin(\alpha) \\ y = x'sin(\alpha) + y'cos(\alpha) \end{cases}$$

Выпишем полученные коэффициенты при переменных:
При $x'^2 : -2sin(2\alpha) + \frac{3}{2}cos(2\alpha) + \frac{5}{2}$
При $x'y' : 2(-\frac{3}{2}sin(2\alpha) - 2cos(2\alpha))$
При $y'^2 : 2sin(2\alpha) - \frac{3}{2}cos(2\alpha) + \frac{5}{2}$
При $x' : 2(-7sin(\alpha) - cos(\alpha))$
При $y' : 2(sin(\alpha) - 7cos(\alpha))$

Свободный член: 7

Занулим коэффициент при x'y':
$-\frac{3}{2}sin(2\alpha) - 2cos(2\alpha) = 0$
$tg(2\alpha) = -\frac{4}{3}$
$tg(\alpha) = 2$ или $tg(\alpha) = -\frac{1}{2}$
Выбираем $tg(\alpha) = 2$ (неважно какой угол выбирать на этом моменте)
$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$sin(2\alpha) = \frac{4}{5}$, $cos(2\alpha) = -\frac{3}{5}$

Подставим полученные значения в формулы для коэффициентов.Тогда:
При $x'^2 : 0$
При $x'y' : 0$
При $y'^2 : 5$
При $x' : -6\sqrt{5}$
При $y' : -2\sqrt{5}$
Свободный член: 7

Тогда уравнение множества 2 в $Ox'y'$ записывается:
$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$
Выделим полный квадрат:
$5(y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 6\sqrt{5}(x' - \frac{1}{30} - \frac{7}{6\sqrt{5}})$

Сделаем перенос $Ox'y' \to O''x''y''$ $(O''(x_0, y_0))$:

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

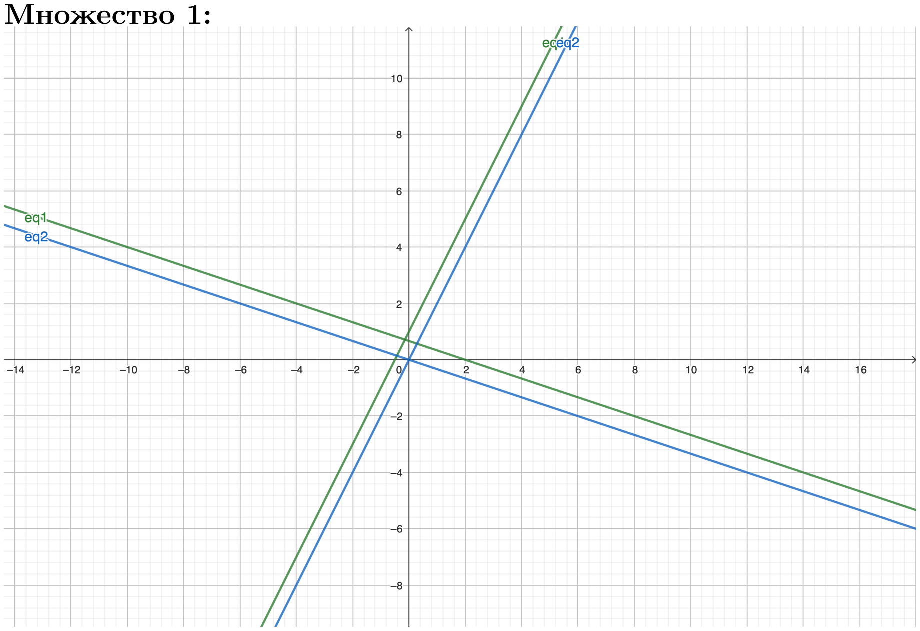
$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y_0 = \frac{1}{30} + \frac{7}{6\sqrt{5}}$
Тогда уравнение множества 2 в $O''x''y''$ записывается:

$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$

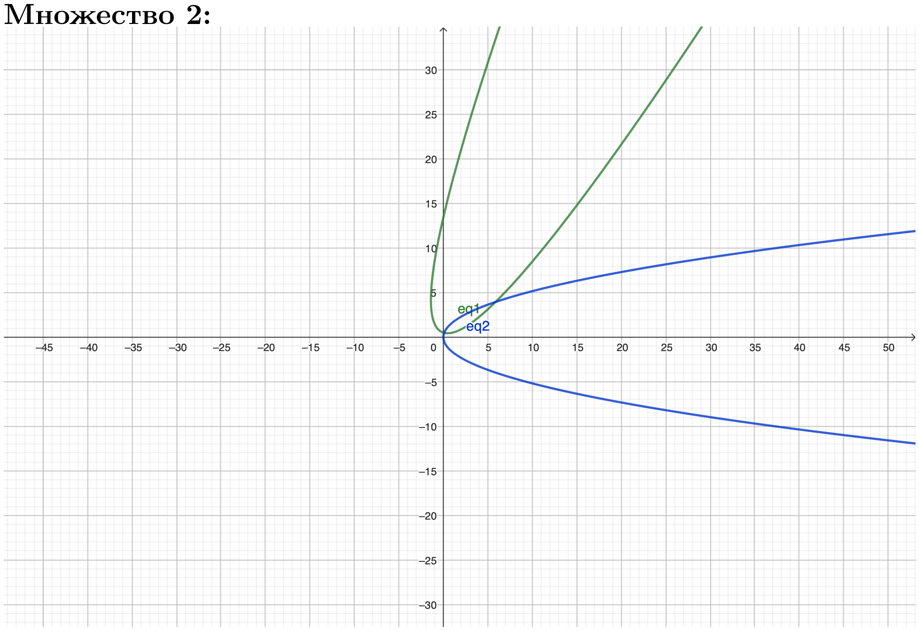
Таким образом, множество 2 задает параболу.

2.2

Множество 1:



Множество 2:



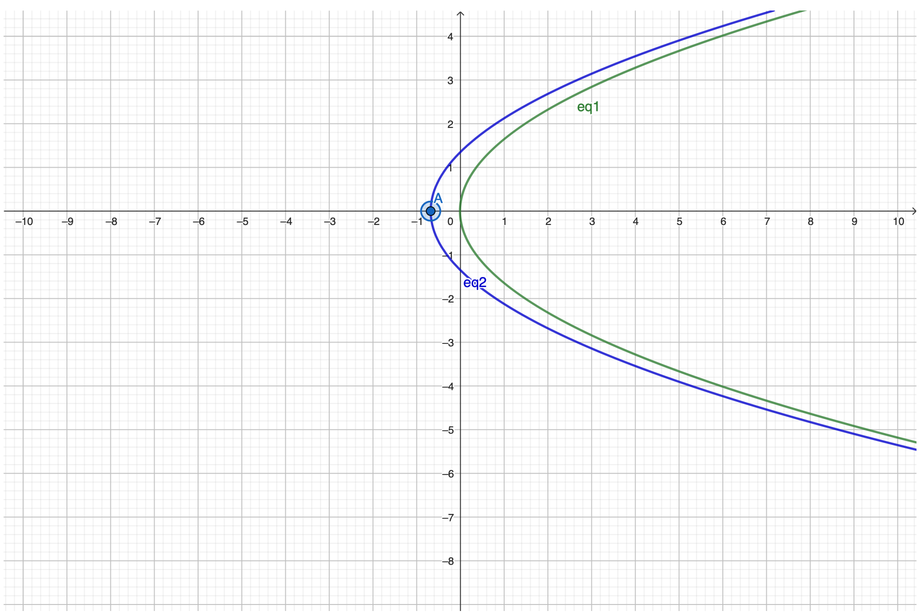
На обоих графиках: зеленая кривая расположена в старой системе координат, синяя – в новой.

2.3

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$, где p - расстояние между фокусом и директрисой. Эксцентриситет параболы равен 1.

Обратимся к полученному в пункте 2.1 каноническому уравнению множества 2.
$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$
Таким образом: $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ и $\epsilon = 1$
Уравнение в полярных координатах для эллипса, гиперболы и параболы имеет следующий общий вид:
$\rho = \frac{\epsilon p}{1-\epsilon cos(\phi)}$
Подставим найденные значения и получим:
$\rho = \frac{3\sqrt{5}}{5(1-cos(\phi))}$

2.4

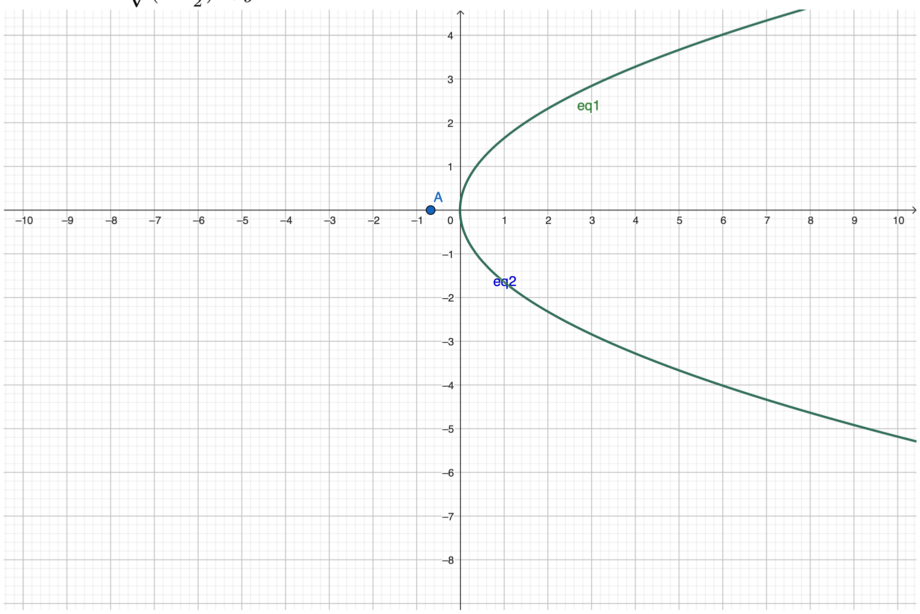


Для построения были использованы формулы преобразования из полярных координат в декартовы:
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Зеленая кривая построена по уравнению для ДПСК, синяя – для ПСК.
Прямые не совпадают, потому что в уравнении для ПСК за точку начала отсчета берется фокус (правый фокус, в случае эллипса и гиперболы).
На графике отмечена точка A$(-\frac{p}{2}, 0)$. А значит и правда фокус синей кривой это точка (0,0).

2.5

Для совпадения кривых достаточно совместить ось Ox декартовой и полярной системы координат, но начало ПСК поставить в точке с координатами $(\frac{p}{2}$,0) в ДПСК.
Этого можно также добиться с помощью формул перевода:

Сделаем перенос для них на $\frac{p}{2}$ вправо (в нашем случае $\frac{p}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$):
$\rho = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$
$cos(\phi) = \frac{(x - \frac{p}{2})}{\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}}$

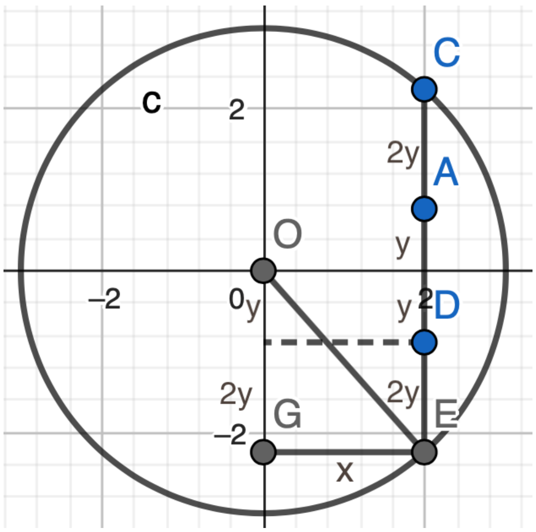


На давнном графике видно, что две кривые совпали.

Задача 3

Дана окружность с центром в начале координат и радиусом 3. Найдите геометричекое место точек, делящих в отношении 2:1 хорды данной окружности, параллельные оси ординат.

3.1



Проведем хорду CE||Oy
Обозначим $y = \frac{1}{6}CE$, а x - расстояние между CE и Oy, OE - радиус окружности

3.2

Точка D(x,-y) принадлежит требуему ГМТ, так как хорда CE делится ей в отношении 2:1 (точка A не принадлежит, так как делится в отношении 1:2)

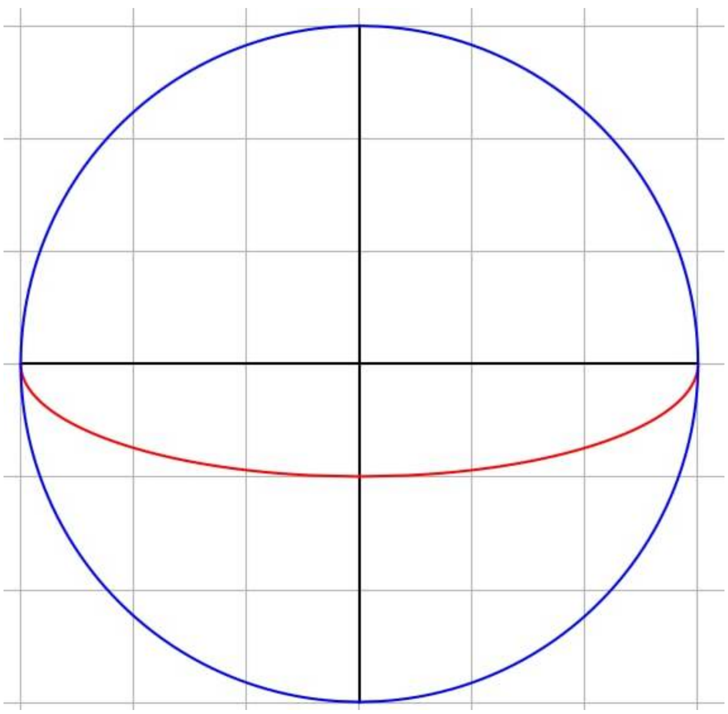
3.3

Напишем теорему Пифагора для OEG:
$9y^2 + x^2 = 9$
Поделим на 9 и получим каноническое уравнение эллипса:
$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$
Добавим условие о том, что нас интересуют только точки при условии $y <= 0$ (так как иначе попадут точки, делящиеся еще и в отношении 1:2).

Тогда уравнение множества задается системой:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y <= 0 \end{cases}$$

3.4



Выводы 4

В результате нашей работы мы научились производить замену базиса в геометрических задачах, исследовать общее уравнение кривой второго порядка, определять по нему каноническое уравнение кривой, также поработали с полярными координатами, вывели уравнение, задающее требуемое геометрическое место точек.

Оценочный лист 5

Быкова Аксинья

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %