Исследовательская работа по теме "Дифференциальные уравнения"

Группа M3103
Кравченкова Елизавета
Лакеев Георгий
Родецкий Никита

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович

Специальные разделы высшей математики
Университет ИТМО
Санк-Петербург, Россия

4 июня 2023 г.

Оглавление

Задача 1

Моторная лодка движется по спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу её мотор был выключен, и через 20 с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Считая, что сила сопротив- ления воды движению лодки пропорциональна её скорости, найдите скорость лодки через 2 мин после остановки мотора. Найдите также расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

Решение:
По условию сила сопротивления воды пропорциональна ее скорости

$$v \cdot c_1 = F_c = ma = mv'$$

m занесем в константу:

$$v' = v \cdot c_1 \text{ \textbf{(где} } c_1 \text{ \textbf{- какая-то константа)} } \implies$$

$$\frac{dv}{dt} = v \cdot c_1 \implies$$

$$\frac{dv}{v} = dt \cdot c_1 \implies$$

$$\ln(\frac{v}{c_2}) = t \cdot c_1 \implies$$

$$v = c_2 \cdot e^{t \cdot c_1} \implies$$

$$\begin{cases} c_2 \cdot e^{c_1 \cdot 0} = 10 \\ c_2 \cdot e^{c_1 \cdot \frac{1}{3}} = 6 \\ c_2 \cdot e^{c_1 \cdot 2} = v_{\textbf{конечн.}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 10 \\ e^{c_1 \cdot \frac{1}{3}} = 0.6 \\ 10 \cdot e^{c_1 \cdot 2} = v_{\textbf{конечн.}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 10 \\ c_1 = 3 \cdot \ln(0.6) \\ 10 \cdot e^{3 \cdot \ln(0.6) \cdot 2} = v_{\textbf{конечн.}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 10 \\ c_1 = 3 \cdot \ln(0.6) \\ 10 \cdot (e^{\ln(0.6)})^6 = v_{\textbf{конечн.}} = 6^6 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

В итоге $v_{\textbf{конечн.}} = 6^6 \cdot 10^{-5}$

$$\Delta l = \int\limits_0^1 v dt = \int\limits_0^1 10 \cdot e^{3 \cdot \ln(0,6) \cdot t} dt = \frac{10}{3 \cdot \ln(0.6)} \int\limits_0^1 e^{3 \cdot \ln(0.6) \cdot t} d(3 \cdot \ln(0.6) \cdot t) = \frac{10 \cdot e^{3 \cdot \ln(0.6) \cdot t}}{3 \ln(0.6)} \bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{10 \cdot e^{3 \cdot \ln(0.6)}}{3 \ln(0.6)} - \frac{10}{3 \ln(0.6)} = -\frac{196}{75 \ln(0,6)}$$

В итоге $\Delta l = -\frac{196}{75 \ln(0,6)}$

Ответ: $6^6 \cdot 10^{-5}, -\frac{196}{75 \ln(0,6)}$

Задача 2

Пружинный маятник движется по закону: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

2.1

Выясните, почему движение маятника описывается дифференциальным уравнением такого вида.

Запишем второй закон Ньютона:

$$mg + k \cdot \Delta y + F_{\textbf{сопр.}} = m \cdot (\Delta y)''$$

Предположим, что сила сопротивления линейная функция от скорости:

$$mg + k \cdot \Delta y + c_1 \cdot (\Delta y)' = m \cdot (\Delta y)''$$

Заметим, что если мы прибавим к Δy константу, то производные не поменяются. Тогда, если мы $\frac{mg}{k}$ прибавим к Δy и обозначим это за y, то получим

$$k \cdot y + c_1 \cdot (y)' = m \cdot (y)''$$

$$m \cdot (y)'' - c_1 \cdot (y)' - k \cdot y = 0$$

$$(y)'' - \frac{c_1}{m} \cdot (y)' - \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Заменив $\frac{-c_1}{m}$ на p, а $\frac{-k}{m}$ на q получаем

$$(y)'' + p \cdot (y)' + q \cdot y = 0$$

2.2

Установите характер данного движения (периодический, апериодический) при $p(t) = 6, q(t) = 9$**.**

Решим ЛОДУ:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0 \implies$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \implies$$

$$y = \alpha_1 \cdot e^{-3t} + \alpha_2 \cdot t \cdot e^{-3t}$$

Характер данного движения апериодический.

2.3

Изобразите закон движения в системе координат.

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t}$$

Найдем y(t) в ситуации, когда мы отвели тело из положения равновесия и отпустили, начальное положение $y_0 = 20$:

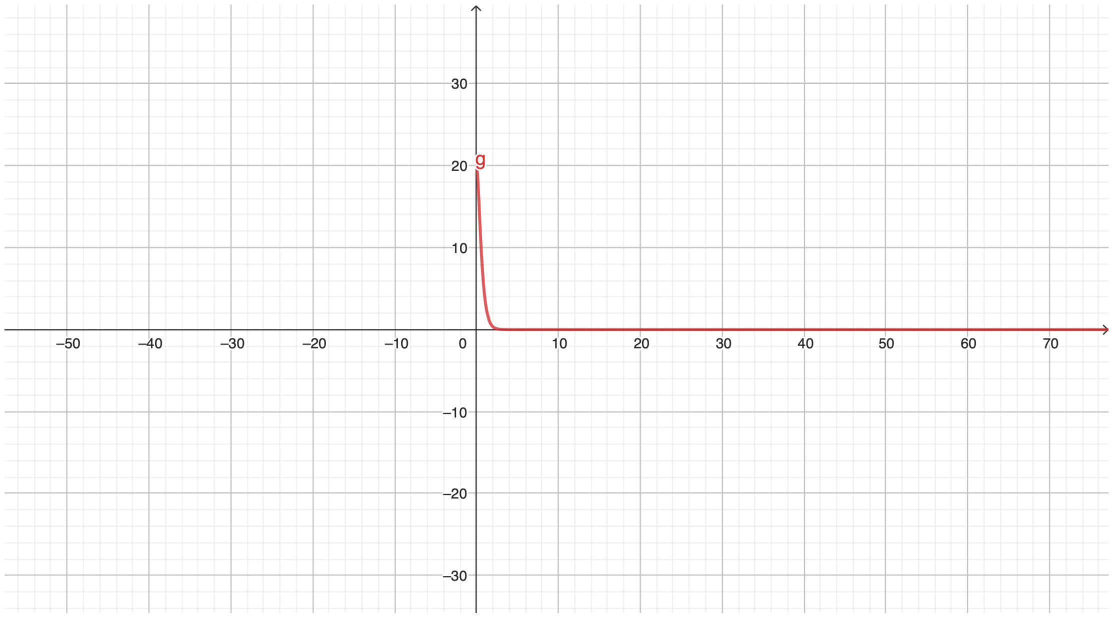
$$\begin{cases} y(0) = 20, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (At + B) \cdot e^{-3t} = 20, \\ A \cdot e^{-3t} - 3At \cdot e^{-3t} - 3B \cdot e^{-3t} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (At + B) \cdot e^{-3t} = 20, \\ A - 3At - 3B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 20, \\ A - 3B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 60, \\ B = 20. \end{cases}$$



Для других констант можете посмотреть здесь `https://www.geogebra.org/calculator/nhaxxxdy`

2.4

Убедитесь в линейной независимости фундаментальной системы решений данного ДУ, выпишите вронскиан.

$W = \begin{vmatrix} e^{-3t} & t \cdot e^{-3t} \\ (e^{-3t})' & (t \cdot e^{-3t})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-3t} & t \cdot e^{-3t} \\ -3e^{-3t} & -3t \cdot e^{-3t} + e^{-3t} \end{vmatrix} = (e^{-3t})^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -3 & -3t + 1 \end{vmatrix} = (e^{-3t})^2 \cdot (-3t + 1 - (-3)t) = (e^{-3t})^2$

2.5

Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t) = cost + 3$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.

В случае неоднородного ДУ на тело действует возбуждающая сила $f(t)$.
$y" + 6y' + 9y = cost + 3$
В нашем случае $cos(t)$ - закон, по которому изменяется вынуждающая сила, а с 3 мы можем сделать замену $y_1 = y - 3/9$

2.6

Решите ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной.

$$y = (C_2(t)t + C_1(t)) \cdot e^{-3t}$$

Система для нахождения $C_1'(t), C_2'(t)$:

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ -3e^{-3t} & e^{-3t} - 3te^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cost + 3 \end{pmatrix}$$

Решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ -3e^{-3t} & e^{-3t} - 3te^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-6t}$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & te^{-3t} \\ \cos t + 3 & e^{-3t} - 3te^{-3t} \end{vmatrix} = -3te^{-3t} - te^{-3t}\cos t$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} e^{-3t} & 0 \\ -3e^{-3t} & cost + 3 \end{vmatrix} = 3e^{-3t} + e^{-3t}\cos t$$

$$C_1'(t) = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{-3te^{-3t} - te^{-3t}\cos t}{e^{-6t}} = \frac{-3t - t\cos t}{e^{-3t}}$$

$$C_2'(t) = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{3e^{-3t} + e^{-3t}\cos t}{e^{-6t}} = \frac{3 + \cos t}{e^{-3t}}$$

$$C_1(t) = \int \frac{-3t - t\cos t}{e^{-3t}}dt = \int e^{3t}(-3t - t\cos t)dt = -3\int e^{3t}tdt - \int e^{3t}t\cos tdt =$$

$$-3(\frac{e^{3t}t}{3} - \frac{e^{3t}}{9}) - (\frac{(5t-3)e^{3t}\sin t}{50} + \frac{(15t-4)e^{3t}\cos t}{50}) + B =$$

$$-e^{3t}t + \frac{e^{3t}}{3} - \frac{(5t-3)e^{3t}\sin t}{50} - \frac{(15t-4)e^{3t}\cos t}{50} + B =$$

$$e^{3t}(-t + \frac{1}{3} - \frac{(5t-3)\sin t}{50} - \frac{(15t-4)\cos t}{50}) + B =$$

$$-\frac{e^{3t}}{150}(50(3t-1) + 3(5t-3)\sin x + 3(15t-4)\cos x)) + B$$

$$C_2(t) = \int \frac{3 + \cos t}{e^{-3t}}dt = \int (3 + \cos t)e^{3t}dt =$$

$$\int 3e^{3t}dt + \int \cos t e^{3t}dt = e^{3t} + \frac{e^{3t}\sin t}{10} + \frac{3e^{3t}\cos t}{10} + A = e^{3t}(1 + \frac{\sin t + 3\cos t}{10}) + A =$$

$$\frac{e^{3t}}{10}(10 + 3\cos x + \sin x) + A$$

$$y = t \cdot e^{-3t}(\frac{e^{3t}}{10}(10+3\cos x+\sin x)+A) - e^{-3t}(\frac{e^{3t}}{150}(50(3t-1)+3(5t-3)\sin x+3(15t-4)\cos x))+B)$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + (\frac{t}{10}(10 + 3\cos x + \sin x)) - \frac{1}{150}(50(3t-1) + 3(5t-3)\sin x + 3(15t-4)\cos x)$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + t + \frac{t(3\cos x + \sin x)}{10} - \frac{1}{3}(3t-1) - \frac{(5t-3)\sin x + (15t-4)\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{t(3\cos x + \sin x)}{10} + \frac{1}{3} - \frac{(5t-3)\sin x + (15t-4)\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + t + \frac{t(3\cos x + \sin x)}{10} - \frac{1}{3}(3t-1) - \frac{(5t-3)\sin x + (15t-4)\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{t(3\cos x + \sin x)}{10} + \frac{1}{3} - \frac{5t\sin x + 15t\cos x}{50} - \frac{-3\sin x - 4\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{t(3\cos x + \sin x)}{10} + \frac{1}{3} - \frac{t(\sin x + 3\cos x)}{10} + \frac{3\sin x + 4\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{3\sin x + 4\cos x}{50}$$

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{3\sin x}{50} + \frac{2\cos x}{25}$$

Ответ:

$$y = (At + B) \cdot e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{3\sin x}{50} + \frac{2\cos x}{25}$$

Задача 3

Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = y + z + x^2 - x, & (1) \\ z' = -2y - z + 2x. & (2) \end{cases}$$

Найдите методом исключения общее решение этой системы.

Решение:
Считаем x независимой переменной. Требуется найти :

$$\begin{cases} y(x), \\ z(x). \end{cases}$$

Выразим y из уравнения (2):

$$y = x - \frac{z + z'}{2} \tag{3.1}$$

Найдем y':

$$y' = 1 - \frac{z' + z''}{2}$$

Подставим полученное в уравнение (1):

$$1 - \frac{z' + z''}{2} = x - \frac{z + z'}{2} + z + x^2 - x$$

$$\frac{z - z''}{2} - z = x^2 - 1$$

$$-\frac{z + z''}{2} = x^2 - 1$$

$$z + z'' = 2 - 2x^2 \tag{3.2}$$

Это неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
Решим однородное:

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k = \pm i$$

Решение однородного:

$$z* = Acos(x) + Bsin(x)$$

Решим неоднородное методом СПЧ:

$$z_1 = Kx^2 + Mx + L$$

$$z_1' = 2Kx + M$$

$$z_1'' = 2K$$

$$2K + Kx^2 + Mx + L = 2 - 2x^2$$

$$\begin{cases} K = -2, \\ M = 0, \\ L = 6. \end{cases}$$

$$z_1 = -2x^2 + 6$$

Решение (3.2)

$$z = Acos(x) + Bsin(x) + 6 - 2x^2$$

Подставим в (3.1):

$$z' = -Asin(x) + Bcos(x) - 4x$$

$$y = x - \frac{Acos(x) + Bsin(x) + 6 - 2x^2 - Asin(x) + Bcos(x) - 4x}{2}$$

$$y = x - \frac{(A + B)cos(x) + (B - A)sin(x) + 6 - 2x^2 - 4x}{2}$$

$$y = x^2 + 2x - 3 + x - \frac{(A + B)cos(x) + (B - A)sin(x)}{2}$$

$$y = x^2 + 3x - 3 - \frac{(A + B)cos(x) + (B - A)sin(x)}{2}$$

Ответ:

$$\begin{cases} y(x) = x^2 + 3x - 3 - \frac{(A+B)cos(x)}{2} + \frac{(A-B)sin(x)}{2}, \\ z(x) = Acos(x) + Bsin(x) + 6 - 2x^2. \end{cases}$$

Задача 4

Примените операционный метод для решения следующих задач Коши:
Операционное исчисление — один из наиболее экономичных методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Введем некоторые определения:

- Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция f(x) действительного аргумента x, удовлетворяющая условиям:

    1. f(x) непрерывна при x $\geqslant$ 0, за исключением, быть может, конечного числа точек точек разрыва 1-го рода;
    2. для всех x $<$ 0 f(x) $=$ 0;
    3. существуют такие постоянные M $>$ 0 и a $>$ 0, при которых $|f(x)| \leqslant M \cdot e^{ax}$ для $\forall x$.

- Функция F(p) комплексного переменного p ($p \in \mathbb{C}$), определяем интегралом

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px} f(x) dx$$

  называют преобразованием Лапласа, или изображением по Лапласу, фукнции f(x).

- Для указанного соотвествия между оргиналом и изображением будем использовать следующую запись
$$f(x) \risingdotseq F(P)$$

- Важное свойство дифференцирования оригинала: пусть функция f(x) n раз дифференцируема, тогда

$$f^{(k)}(x) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - ... - p f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$$

- Свойство преобразования Лапласа – дифференцирование оригинала – позволяет сводить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению алгебраических уравнений.

- Тогда для решения линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффицентами операционным методом, достаточно применить преобразование Лапласа к заданному уравнению, затем решить полученное алгебраическое уравнение, вернуться к оригиналам.

- Чтобы каждый раз не вычислять преобразование Лапласа к каждому соглаемому уравнения, существуют табличные значения преобразования. Воспользуемся одной из такой таблиц для вычисления уравнений.

4.1

$$\begin{cases} x' = -7x - 18y - 67e^{-t}, & x(0) = -1 \\ y' = 2x + 5y + 22e^{-t}, & y(0) = -3. \end{cases}$$

Решение:
Применим преобразование Лапласа к системе уравнений (с помощью таблицы) и перезапишем получившуюся систему.

$$\begin{cases} x \risingdotseq F \\ y \risingdotseq G \\ x' \risingdotseq pF - x(0) = pF + 1 \\ y' \risingdotseq pG - y(0) = pG + 3 \\ e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} pF + 1 = -7F - 18G - \frac{67}{p+1} \\ pG + 3 = 2F + 5G + \frac{22}{p+1} \end{cases}$$

Выразим G через F из первого уравнения.

$$pF + 7F = -18G - 1 - \frac{67}{p+1}$$

$$F(p+7) = -18G - 1 - \frac{67}{p+1}$$

$$18G = -F(p+7) - 1 - \frac{67}{p+1}$$

$$G = \frac{-F(p+7) - 1 - \frac{67}{p+1}}{18}$$

Подставим во второе уравениние системы

$$pG + 3 = 2f + 5G + \frac{22}{p+1}$$

$$pG - 5G = 2F - 3 + \frac{22}{p+1}$$

$$G(p-5) = 2F - 3 + \frac{22}{p+1}$$

$$\frac{-F(p+7) - 1 - \frac{67}{p+1}}{18} \cdot (p-5) = 2F - 3 + \frac{22}{p+1}$$

$$\frac{-F(P+7)(p-5)-(p-5)-(p-5)\frac{67}{p+1}}{18} = 2F - 3 + \frac{22}{p+1}$$

$$-F(P+7)(p-5)-(p-5)-(p-5)\frac{67}{p+1} = 36F - 54 + 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$-F(p^2+2p-35)-(p-5)-(p-5)\frac{67}{p+1} = 36F - 54 + 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$F(p^2+2p-35)+(p-5)+(p-5)\frac{67}{p+1} = -36F + 54 - 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$F(p^2+2p+1)+(p-5)+(p-5)\frac{67}{p+1} = 54 - 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$F(p^2+2p+1) = -(p-5)-(p-5)\frac{67}{p+1} + 54 - 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$F(p^2+2p+1) = -(p-5)-(p-5)\frac{67}{p+1} + 54 - 18\frac{22}{p+1}$$

$$F(p^2+2p+1) = \frac{-(p-5)(p+1)}{(p+1)} - \frac{67(p-5)}{p+1} + \frac{54(p+1)}{(p+1)} - 18\cdot\frac{22}{p+1}$$

$$F(p+1)^2 = \frac{-(p^2-4p-5)-67p+67\cdot 5+54p+54-18\cdot 22}{p+1}$$

$$F(p+1)^2 = \frac{-p^2+4p+5-67p+67\cdot 5+54p+54-18\cdot 22}{p+1}$$

$$F(p+1)^2 = \frac{-p^2-9p+59+67\cdot 5-18\cdot 22}{p+1}$$

$$F(p+1)^2 = \frac{-p^2-9p-2}{p+1}$$

$$F = \frac{-p^2-9p-2}{(p+1)^3}$$

Разложим получившиеся значение, как сумму дробей:

$$F = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{(p+1)^3} = \frac{A(p^2+2p+1)+B(p+1)+C}{(p+1)^3} = \frac{Ap^2+p(2A+B)+(A+B+C)}{(p+1)^3}$$

$$\begin{cases} p^2 : A = -1 \\ p : 2A+B = -9 \\ 1 : A+B+C = -2 \\ \implies A = -1, B = -7, C = 6 \end{cases}$$

$$F=\frac{-1}{p+1}-\frac{7}{(p+1)^2}+\frac{6}{(p+1)^3}$$

Выразили значение изображения x, теперь все по той же таблице, перейдем от изображений к оригиналам (обратное преобразование Лапласа), используя формулу $\frac{1}{(p-a)^n} \risingdotseq \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$

$$\begin{cases} \frac{1}{p+1} \risingdotseq \frac{1}{0!}t^0e^{-1t}=e^{-t} \\ \frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{1!}t^1e^{-1t}=te^{-t} \\ \frac{1}{(p+1)^3} \risingdotseq \frac{1}{2!}t^2e^{-1t}=\frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ F \risingdotseq x \end{cases}$$

$$x=-e^{-t}-7te^{-t}+3t^2e^{-t}$$

Вспомним, что мы уже выражали G через F, тогда подставим значние F и выразим y.

$$G=\frac{-F(p+7)-1-\frac{67}{p+1}}{18}$$

$$G=\frac{-\left(\frac{-1}{p+1}-\frac{7}{(p+1)^2}+\frac{6}{(p+1)^3}\right)(p+7)-1-\frac{67}{p+1}}{18}$$

$$18G=\left(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{(p+1)^2}-\frac{6}{(p+1)^3}\right)(p+7)-1-\frac{67}{p+1}$$

$$18G=\frac{p+7}{p+1}+\frac{7(p+7)}{(p+1)^2}-\frac{6(p+7)}{(p+1)^3}-1-\frac{67}{p+1}$$

$$18G=\frac{p-60}{p+1}+\frac{7(p+7)(p+1)}{(p+1)^3}-\frac{6(p+7)}{(p+1)^3}-\frac{p+1}{p+1}$$

$$18G=\frac{p-60-p-1}{p+1}+\frac{(p+7)(7p+7-6)}{(p+1)^3}$$

$$18G=\frac{-61}{p+1}+\frac{(p+7)(7p+1)}{(p+1)^3}$$

$$18G=\frac{-61(p+1)^2}{(p+1)^3}+\frac{7p^2+50p+7}{(p+1)^3}$$

$$18G=\frac{-61p^2-122p-61+7p^2+50p+7}{p+1}$$

$$18G=\frac{-54p^2-72p-54}{(p+1)^3}$$

$$G = \frac{-3p^2 - 4p - 3}{(p+1)^3}$$

Разложим получившиеся значение, как сумму дробей:

$$G = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{(p+1)^3} = \frac{A(p^2+2p+1) + B(p+1) + C}{(p+1)^3} = \frac{Ap^2 + p(2A+B) + (A+B+C)}{(p+1)^3}$$

$$\begin{cases} p2 : A = -3 \\ p : 2A + B = -4 \\ 1 : A + B + C = -3 \\ \implies A = -3, B = 2, C = -2 \end{cases}$$

$$G = \frac{-3}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{-2}{(p+1)^3}$$

Выразили значение изображения y, теперь все по той же таблице, перейдем от изображений к оригиналам (обратное преобразование Лапласа), используя формулу $\frac{1}{(p-a)^n} \risingdotseq \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$. Ранее уже были посчитаны оригиналы для $\frac{1}{p+1}, \frac{1}{(p+1)^2}, \frac{1}{(p+1)^3}$. Тогда просто подставим их в формулу.

$$y = -3e^{-t} + 2te^{-t} - t^2e^{-t}$$

Тогда решением задачи Коши будут функции:

$$\begin{cases} x = -e^{-t} - 7te^{-t} + 3t^2e^{-t} \\ y = -3e^{-t} + 2te^{-t} - t^2e^{-t} \end{cases}$$

4.2

$$x'' + 8x' + 32x = \begin{cases} 384 & \text{t} \in [0,1), \; x(0) = -2 \\ 0 & \text{t} \notin [0,1), \; x'(0) = 16. \end{cases}$$

Решение:
Применим преобразование Лапласа к системе уравнений (с помощью таблицы) и перезапишем получившуюся систему.

$$\begin{cases} 1 \risingdotseq \frac{1}{p} \\ x \risingdotseq F \\ x' \risingdotseq pF - x(0) = pF + 2 \\ x'' \risingdotseq pF - px(0) - x'(0) = pF + 2p - 16 \end{cases}$$

1. Рассмотрим первый случай, когда $t \in [0, 1)$.

$$p^2F + 2p - 16 + 8(pF + 2) + 32F = \frac{384}{p}$$

$$p^2F + 2p - 16 + 8pF + 16 + 32F = \frac{384}{p}$$

$$p^2F + 2p + 8pF + 32F = \frac{384}{p}$$

$$F(p^2 + 8p + 32) + 2p = \frac{384}{p}$$

$$F(p^2 + 8p + 32) = \frac{384 - 2p^2}{p}$$

$$F = \frac{384 - 2p^2}{p(p^2 + 8p + 32)}$$

Разложим дробь на простейшие. Квадрный многочлен в знаменателе не имеет корней над полем $\mathbb{R}$ чисел, следовательно для представим его в разложении как $\frac{Bp+C}{p^2+8p+32}$.

$$F = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{(p^2 + 8p + 32)}$$

$$F = \frac{A(p^2 + 8p + 32)}{p} + \frac{(Bp + C)p}{(p^2 + 8p + 32)} = \frac{p^2(B + B) + p(8A + C) + 32A}{p(p^2 + 8p + 32)}$$

$$\begin{cases} A + B = -2 \\ 32A = 384 \\ 8A + C = 0 \\ \implies A = 12, B = -14, C = -96 \end{cases}$$

$$F = \frac{12}{p} + \frac{-14p - 96}{p^2 + 8p + 32}$$

Далее необходимо перейти от изображений к оригиналам, используя табличные преобразования. Так как знаменатель нельзя разложить на произведение скобок, то попытаемся разложить его, так чтобы удовлетворять каким-нибудь табличным преобразованиям.

$$p^2 + 8p + 32 = p^2 + 8p + 16 + 16 = (p + 4)^2 + 16 = (p - (-4))^2 + 4^2$$

Данный знаменатель, напоминает формулу: $\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq e^{at} \cos bt$. Чтобы использовать формулу числитель должне быть равен $p + 4$. В этом случае, переход от изображений к оригиналам запишется как:

$$\frac{p+4}{p^2+8p+32} \risingdotseq e^{-4t}\cos 4t$$

Также заметим, что при преобразовании числителся, возникнет дробь вида $\frac{1}{p^2+8p+32}$. Для такой дроби табличным преобразованием служит:

$$\frac{1}{p^2+8p+32} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{-4t}\sin 4t$$

Тогда, распишем F(p) в удобном для нас виде:

$$F = \frac{12}{p} + \frac{-14p-56-40}{p^2+8p+32} = \frac{12}{p} - 14\cdot\frac{p+4}{p^2+8p+32} - 40\cdot\frac{1}{p^2+8p+32}$$

Теперь выполним переход к оригиналам, исходя из ранее выведенных формул:

$$\begin{cases} F \risingdotseq x \\ \frac{p+4}{p^2+8p+32} \risingdotseq e^{-4t}\cos 4t \\ \frac{1}{p^2+8p+32} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{-4t}\sin 4t \\ \frac{1}{p} \risingdotseq 1 \end{cases}$$

Решение уравнение при $t \in [0,1)$.

$$x = 12 - 14e^{-4t}\cos 4t - 10e^{-4t}\sin 4t$$

2. Теперь рассмотрим систему при $t \notin [0,1)$.

$$p^2F + 2p - 16 + 8(pF+2) + 32F = \frac{0}{p}$$

$$p^2F + 2p - 16 + 8pF + 16 + 32F = 0$$

$$p^2F + 2p + 8pF + 32F = 0$$

$$F(p^2+8p+32) + 2p = 0$$

$$F(p^2+8p+32) = -2p$$

$$F = \frac{-2p}{(p^2+8p+32)}$$

Перейдем к оригиналам в этом задании также, как и в предыдуще: постараемся преобразовать числитель так, чтобы можно было свети к таблиному преобразованию.

$$F = \frac{-2p-8+8}{(p^2+8p+32)} = -2\cdot\frac{p+4}{(p^2+8p+32)} + 8\cdot\frac{1}{(p^2+8p+32)}$$

В предыдушем пункте данные дроби уже были посчитаны, так что воспользуемся предыдущими вычислениями.

$$\begin{cases} F \risingdotseq x \\ \frac{p+4}{p^2+8p+32} \risingdotseq e^{-4t}\cos 4t \\ \frac{1}{p^2+8p+32} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{-4t}\sin 4t \end{cases}$$

Решение уравнение при $t \notin [0,1)$.

$$x = -2e^{-4t}\cos 4t + 2e^{-4t}\sin 4t$$

Общий ответ на задание:

$$\begin{cases} x = 12 - 14e^{-4t}\cos 4t - 10e^{-4t}\sin 4t, t \in [0,1) \\ x = -2e^{-4t}\cos 4t + 2e^{-4t}\sin 4t, t \notin [0,1) \end{cases}$$

Выводы 5

В результате нашей работы мы научились применять дифференциальные уравнения для решения прикладных задач, а также для изучения физических явлений. Мы научились решать системы ДУ, а также изучили операционный метод для решения систем ДУ.

Оценочный лист 6

Кравченкова Елизавета

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Лакеев Георгий

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %

Родецкий Никита

Вклад исполнителя - 33 $\frac{1}{3}$ %