Конспект по метрике к КР-1

1) Парная регрессия: $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ $\quad$ Y_i – зависимая; X_i – регрессор; ε_i – навязка

$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \underset{\text{остаток}}{e_i}$ $\qquad$ $RSS = \sum\limits_1^n e_i^2 = \sum\limits_1^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

2) МНК: $RSS \to min$

$$FOC: \begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \sum\limits_1^n X_i \hat{\beta}_1 = \sum\limits_1^n Y_i \\ \sum\limits_1^n X_i \hat{\beta}_0 + \sum\limits_1^n X_i^2 \hat{\beta}_1 = \sum\limits_1^n X_i Y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_1^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{sCov(X,Y)}{\mathrm{sVar}(X)} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{aligned}$$

3) Леммы:

1. Линия регрессии проходит через точку $(\bar{X}, \bar{Y})$, т.е. $\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$

   Док-во: $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}}$

2. $\sum\limits_1^n e_i = 0$

   Док-во:

   $e_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$

   $\sum\limits_1^n e_i = \sum\limits_1^n Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum\limits_1^n X_i$

   $\frac{1}{n} \sum\limits_1^n e_i = \bar{Y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_1^n e_i = 0}$

3. $\sum\limits_1^n Y_i = \sum\limits_1^n \hat{Y}_i$

   Док-во:

   $\sum\limits_1^n e_i = \sum\limits_1^n Y_i - \sum\limits_1^n \hat{Y}_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_1^n Y_i = \sum\limits_1^n \hat{Y}_i}$

   Следствие:

   $\frac{1}{n} \sum\limits_1^n e_i = \bar{Y} - \bar{\hat{Y}} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}}$

4. $\sum\limits_1^n X_i e_i = 0$

   Док-во:

   $\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum\limits_1^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) X_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_1^n X_i e_i = 0}$

5. $\sum\limits_1^n \hat{Y}_i e_i = 0$

   Док-во:

   $\sum\limits_1^n \hat{Y}_i e_i = \sum\limits_1^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) e_i = \hat{\beta} \sum\limits_1^n e_i + \hat{\beta}_1 \sum\limits_1^n X_i e_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_1^n \hat{Y}_i e_i = 0}$

4) $Y_i = \hat{Y}_i + e_i;\ \bar{Y} = \bar{\hat{Y}} \Rightarrow Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} + e_i$

$$\sum_1^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_1^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 + 2(\sum_1^n \hat{Y}_i e_i - \bar{\hat{Y}} \sum_1^n e_i) + \sum_1^n e_i^2$$

$$\sum_1^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_1^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 + \sum_1^n e_i^2$$

$TSS = ESS + RSS$

5) Коэффициент детерминации R^2 :

$R^2 = \frac{ESS}{TSS};\ x_i = X_i - \bar{X};\ y_i = Y_i - \bar{Y};\ \bar{\hat{Y}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$

$$R^2 = \frac{\sum_1^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2}{\sum_1^n y_i^2} = \frac{\sum_1^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})^2}{\sum_1^n y_i^2} = \frac{\sum_1^n (\hat{\beta}_1 x_i)^2}{\sum_1^n y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum_1^n x_i^2}{\sum_1^n y_i^2} = \frac{\sum_1^n (x_i y_i)^2 \cdot \sum_1^n x_i^2}{(\sum_1^n x_i^2)^2 \cdot \sum_1^n y_i^2} =$$

$$= \frac{\sum_1^n (x_i y_i)^2}{\sum_1^n x_i^2 \cdot \sum_1^n y_i^2} = \frac{sCov^2(X,Y)}{\mathrm{sVar}(X) \cdot \mathrm{sVar}(Y)} = sCorr^2(X,Y)$$

6) Регрессия без свободного члена:

$Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 X_i$

$e_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_i$

$RSS \to \min : \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_1^n x_i y_i}{\sum_1^n x_i^2}$

Если:

$a) \sum_1^n e_i \neq 0$

$b) \sum_1^n Y_i \neq \sum_1^n \hat{Y}_i$

$c) \bar{Y} \neq \bar{\hat{Y}},$

то R^2 неприменим

7) Теорема Гаусса-Маркова для парной регрессии:

Если:

1. Модель правильно специфицирована
2. Все X_i детерминированы и не равны между собой
3. Ошибки не носят систематического характера, т.е. $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = \forall i$
4. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \forall i$
5. Ошибки некоррелированы

Тогд оценки МНК $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ оптимальны (имеют наименьшую дисперсию) в классе линейных несмещенных оценок – являются BLUE.

8) МНК-оценки - случайные величины:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{sCov(X,Y)}{\mathrm{sVar}(X)} = \frac{sCov(X, \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon)}{\mathrm{sVar}(X)} = \beta_1 \frac{\mathrm{sVar}(X)}{\mathrm{sVar}(X)} + \frac{sCov(X,\varepsilon)}{\mathrm{sVar}(X)} = \beta_1 + \frac{sCov(X,\varepsilon)}{\mathrm{sVar}(X)}$$

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = \mathbb{E}\left(\beta_1 + \frac{sCov(X,\varepsilon)}{\mathrm{sVar}(X)}\right) = \beta_1 + \frac{1}{\mathrm{sVar}(X)} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})\right) =$$

$$= \beta_1 + \frac{1}{\mathrm{sVar}(X)} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_1^n (X_i - \bar{X})(\mathbb{E}(\varepsilon_i) - \mathbb{E}(\bar{\varepsilon})) \overset{\mathbb{E}(\varepsilon)=\mathbb{E}(\bar{\varepsilon})}{=} \beta_1$$

Утверждение 1: $\operatorname{Var}(\hat\beta_1) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_1^n x_i^2}; \operatorname{Var}(\hat\beta_0) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 \sum\limits_1^n x_i^2}{n \sum\limits_1^n x_i^2}$

$$\hat\beta_1 = \frac{\sum\limits_i x_i y_i}{\sum\limits_j x_j^2} = \sum_i \frac{x_i}{\sum\limits_j x_j} y_i = \sum_i w_i y_i$$

$a) \sum\limits_i w_i = 0$ $\quad b) \sum\limits_i w_i x_i = 1$ $\quad c) \sum\limits_i w_i^2 = \dfrac{1}{\sum\limits_j x_j^2}$

$$\sum_i w_i = \frac{\sum\limits_i x_i}{\sum\limits_j x_j^2} = \frac{\sum\limits_i (X_i - \bar X)}{\sum\limits_j x_j^2} = \frac{n\bar X - n\bar X}{\sum\limits_j x_j^2} = 0 \qquad \frac{\sum\limits_i x_i \cdot x_i}{\sum\limits_j x_j^2} = 1 \qquad \sum_i w_i^2 = \frac{\sum\limits_i x_i^2}{(\sum\limits_j x_j^2)^2} = \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2}$$

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_1) = \operatorname{Var}\left(\sum_i w_i y_i\right) = \sum_i w_i^2 \operatorname{Var}(y_i) + \sum_i \sum_j w_i w_j Cov(y_i, y_j) = \sum_i w_i^2 \sigma_\varepsilon^2 = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_j x_j^2}}$$

$$\hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar X = \frac{1}{n}\sum_1^n Y_i - \sum_1^n w_i (Y_i - \bar Y)\cdot \bar X = \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - w_i \bar X\right) Y_i + \bar X \bar Y \sum_1^n w_i = \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - w_i \bar X\right) Y_i$$

$$\mathbb{E}(\beta_0) = \mathbb{E}\left(\sum_1^n \left(\frac{1}{n} - w_i \bar X\right) Y_i\right) = \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - w_i \bar X\right) \mathbb{E}(Y_i) = 0??$$

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_0) = \sum_1^n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} w_i \bar X + w_i^2 \bar X^2\right) \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\bar X \sum_1^n w_i + \bar X^2 \sum_1^n w_i^2\right) = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar X^2}{\sum\limits_1^n x_i^2}\right) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum\limits_1^n x_i^2 + n\bar X^2}{n \sum\limits_1^n x_i^2} = \boxed{\sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum\limits_1^n X_i^2}{n \sum\limits_1^n x_i^2}}$$

$Cov(\hat\beta_0, \hat\beta_1) - ?$

$\bar Y = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 \bar X;\ \operatorname{Var}(\bar Y) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{n}$

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 \bar X) = \operatorname{Var}(\hat\beta_0) + 2\bar X Cov(\hat\beta_0, \hat\beta_1) + \bar X^2 \operatorname{Var}(\hat\beta_1)$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum\limits_1^n X_i^2}{n \sum\limits_1^n x_i^2} + 2\bar X Cov(\hat\beta_0, \hat\beta_1) + \bar X^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_j x_i^2}$$

$$Cov(\hat\beta_0, \hat\beta_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{\bar X^2}{\sum_1^n x_i^2} - \frac{\bar X^2}{\sum_1^n x_i^2}\right)}{2\bar X} = \boxed{\frac{-\sigma_\varepsilon^2 \cdot 2\bar X^2}{2\bar X \sum\limits_1^n x_i^2}}$$

Утверждение 2: при выполнении условией ТГМ оценки $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ являются лучшими, т.е. имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок

Пусть $\tilde{\beta}_1 = \sum\limits_1^n \tilde{w}_i Y_i$ – другая несмещенная оценка, т.е. $\mathbb{E}(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}_1) = \sum_1^n \tilde{w}_i \mathbb{E}(Y_i) = \sum_1^n \tilde{w}_i \mathbb{E}(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 \sum_1^n \tilde{w}_i + \beta_1 \sum_1^n tildew_i X_i \equiv \beta_1 \Rightarrow$$

(1) $\sum\limits_1^n \tilde{w}_i = 0$

(2) $\sum\limits_1^n \tilde{w}_i x_i = 1$

Т.е. необходимо решить задачу: $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_1) = \sigma_\varepsilon^2 \sum\limits_1^n \tilde{w}_i^2 \to \min$ при ограничениях (1) и (2)

$$\sum_1^n \tilde{w}_2^2 = \sum_1^n (\tilde{w}_i - w_i + w_i)^2 = \sum_1^n (\tilde{w}_i - w_i)^2 + 2\sum_1^n (\tilde{w}_i - w_i) w_i + \sum_1^n w_i^2$$

$$\sum_i (\tilde{w}_i - w_i) w_i = \sum_i \tilde{w}_i \cdot w_i - \sum_i w_i^2 = \sum_i \tilde{w}_i \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum\limits_j x_j^2} - \sum_i w_i^2 = \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2} \left(\sum_i \tilde{w}_i X_i - \bar{X} \sum_1^n \tilde{w}_i \right) - \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2} =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2} - \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2} = 0 \Rightarrow \sum_i \tilde{w}_i^2 = \sum_1^n (\tilde{w}_i - w_i)^2 + \frac{1}{\sum\limits_j x_j^2}$$

$\Rightarrow \sum\limits_1^n \tilde{w}_i^2$ достигает минимума при $\tilde{w}_i = w_i$, т.е. для оценок МНК.

Для β_0 доказательство аналогично

9) МНК – линейны поY

$$\hat{\beta}_1 = \frac{sCov(X,Y)}{\mathrm{sVar}(X)} \qquad \text{Если } \tilde{Y} = nY, \qquad \hat{\tilde{\beta}} = \frac{sCov(X,\tilde{Y})}{\mathrm{sVar}(X)} = n\hat{\beta}_1$$

10) Гипотезы о конкретном значении:

В рамках линейной модели усилим ТГМ утверждением $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Утверждение 1: Если $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, то $\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \sigma_{\hat{\beta}_0}^2)$, $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma_{\hat{\beta}_1}^2)$

$H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

Тогда статистика $z = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \sim N(0, 1)$

В $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ входит σ_ε^2 и она неизвестна. Заменим оценкой $\hat{\sigma_\varepsilon}^2$

$z = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim\ ?$

Утверждение 2: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{RSS}{n-2}$ – несмещенная оценка σ_ε^2

Утверждение 3: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{RSS}{n-k}$ – общий случай для k регрессоров (включая свободный член),

$n-k$ – число независимых слагаемых RSS, степени свободы

Утверждение 4: $\dfrac{RSS}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{n-k}$, где k - количество регрессоров

Утверждение 5: Оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ независимы

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\varepsilon^2} \cdot \frac{\sum\limits_1^n X_i^2}{n\sum\limits_1^n x_i^2}}, \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1^2} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon^2}}{\sum\limits_1^n x_i^2}}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1^0)/\sigma_{\hat{\beta}_1}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}/\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1^0)/\sigma_{\hat{\beta}_1}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}(n-k)}{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}}/(n-k)}} = \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1^0)/\sigma_{\hat{\beta}_1}}{\sqrt{\frac{RSS}{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}}/(n-k)}}$$

Так как $\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \sim N(0,1)$, $\dfrac{RSS}{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}} \sim \chi^2_{n-k}$ и они независимы, то

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim t_{n-k} \qquad \boxed{\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sum\limits_1^n x_i^2}{\sigma_\varepsilon^2/\sum\limits_1^n x_i^2} = \frac{\hat{\sigma_\varepsilon}^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{RSS/(n-2)}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{RSS/\sigma_\varepsilon^2}{n-2} \sim \chi^2_{n-k}}$$

Доверительный интервал для коэффициентов: $\left|\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \leq t^{cr}_{n-k} \Rightarrow |\hat{\beta}_1 - \beta_1^0| \leq t^{cr}_{n-k} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$

$$-t^{cr}_{n-k} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} - \hat{\beta}_1 \leq -\beta_1^0 \leq t^{cr}_{n-k} - \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} - \hat{\beta}_1 \Rightarrow [\hat{\beta}_1 - t^{cr}_{n-k} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}; \, \hat{\beta}_1 + t^{cr}_{n-k} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}]$$

11) Прогнозирование:

a) Точечный прогноз

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

$Y_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+1}$ – точечный прогноз

b) Интервальный прогноз (ИП) индивидуальный (= предикативный)

$Y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$

$$e^{ind}_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 X_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \beta_0 - \hat{\beta}_0 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) X_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(e^{ind}) &= \mathrm{Var}(\varepsilon_{n+1}) + \mathrm{Var}[(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) X_{n+1}] = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) + X_{n+1}^2 \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) + 2X_{n+1} Cov[(\beta_0 - \hat{\beta}_0), (\beta_1 - \hat{\beta}_1)] = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) + X_{n+1}^2 \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) + 2X_{n+1} Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum\limits_1^n x_i^2} + \frac{X_{n+1}^2}{\sum\limits_1^n x_i^2} - \frac{2X_{n+1}\bar{X}}{\sum\limits_1^n x_i^2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2 + X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}\bar{X}}{\sum\limits_1^n x_i^2}\right) = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum\limits_1^n x_i^2}\right)$$

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(e^{ind}_{n+1})}} \sim t_{n-k}$$

ДИ для индивидуального прогноза:

$$[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+1} - t^{cr}_{n-k} \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(e^{ind}_{n+1})} \leq Y_{n+1} \leq \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+1} + t^{cr}_{n-k} \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(e^{ind}_{n+1})}]$$

c) Индивидуальный прогноз для среднего

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, X) = \mathbb{E}(\beta_0 + \beta_1 X_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \,|\, X = X_{n+1})$$

Ошибка прогноза:

$$e^{mean}_{n+1} = \mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, X = X_{n+1}) - \hat{Y}_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 X_{n+1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{n+1} = (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + X_{n+1}(\beta_1 - \hat{\beta}_1)$$

$$\text{Var}(e^{mean}_{n+1}) = \text{Var}(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + X^2_{n+1} \text{Var}(\beta_1 - \hat{\beta}_1) + 2X_{n+1} Cov(\beta_0 - \hat{\beta}_0,\, \beta_1 - \hat{\beta}_1) = \dots = \sigma^2_{\varepsilon} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum\limits_{1}^{n} x_i^2} \right)$$

ДИ для среднего прогноза:

$$[\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 X_{n+1} - t^{cr}_{n-k} \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(e^{mean}_{n+1})};\; \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 X_{n+1} + t^{cr}_{n-k} \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(e^{mean}_{n+1})}]$$