动态规划(下篇)
Dynamic Programming II

课程版本 v3.3　　主讲 令狐冲

扫描二维码关注微信/微博
获取最新面试题及权威解答

微信: ninechapter
微博: http://www.weibo.com/ninechapter
知乎: http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang
官网: http://www.jiuzhang.com

大纲 Outline

- 复习上一节课的内容
- 单序列动态规划
- 双序列动态规划

什么情况下使用动态规划？

- 满足下面三个条件之一：
  - 求最大值、最小值
  - 判断是否可行
  - 统计方案个数
- 则 **极有可能** 是使用动态规划求解

什么情况下不使用动态规划？

- 满足下面三个条件之一：
- 求出所有 **具体** 的方案而非方案 **个数**
  - http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning/
- 输入数据是一个 **集合** 而不是 **序列**
  - http://www.lintcode.com/problem/longest-consecutive-sequence/
- **暴力**的算法已经是多项式级别
  - 2^n → n^2 是DP擅长的事
- 则 **极不可能** 使用动态规划求解

动态规划的四点要素

- **状态 State**
- 灵感，创造力，存储小规模问题的结果
- **方程 Function**
- 状态之间的联系，怎么通过小的状态，来算大的状态
- **初始化 Initialization**
- 最极限的小状态是什么，起点
- **答案 Answer**
- 最大的那个状态是什么，终点

面试中常见的动态规划类型

- **坐标型动态规划 15%**
- **序列型动态规划 30%**
- **双序列动态规划 30%**
- 划分型动态规划 10%
- 背包型动态规划 10%
- 区间型动态规划 5%

坐标型动态规划

- state:
- f[x] 表示我从起点走到坐标x……
- f[x][y] 表示我从起点走到坐标x,y……
- function: 研究走到x,y这个点之前的一步
- initialize: 起点
- answer: 终点

单序列动态规划

- state: f[i]表示前i个位置/数字/字符,第i个...
- function: f[i] = f[j] … j 是i之前的一个位置
- initialize: f[0]..
- answer: f[n]..
- 一般answer是f(n)而不是f(n-1)
  - 因为对于n个字符，包含前0个字符(空串)，前1个字符……前n个字符。

独孤九剑 —— 破鞭式

如果不是跟坐标相关的动态规划

一般有N个数/字符，就开N+1个位置的数组

第0个位置单独留出来作初始化

Word Break

http://www.lintcode.com/problem/word-break/

http://www.jiuzhang.com/solutions/word-break/

Word Break

- state: f[i]表示“前i”个字符能否被完美切分
- function: f[i] = OR{f[j]} 其中 j < i && j+1~i is a word
  - OR 运算的意思
  - 假如 j = 0, 1, 3, 5 时满足 j < i && j+1~i is a word
  - 那么 f[i] = f[0] || f[1] || f[3] || f[5]
- initialize: f[0] = true
- answer: f[n]

- 注意：切分位置的枚举->单词长度枚举 $O(NL^2)$
  - N: 字符串长度
  - L: 最长的单词的长度

n vs n+1

- N: f[i] 表示的是下标从0 ~ I
- N+1: f[i] 表示的是前i个字符(下标从0~i-1)

```
// state f[i]表示下标0~i这段子字符串是否可以被完美划分
boolean[] f = new boolean[n];

// intialize
for (int i = 0; i < n; i++) {
    String word = s.substring(0, i + 1);
    f[i] = dict.contains(word);
}

// function
for (int i = 1; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        String word = s.substring(j + 1, i + 1);
        f[i] = f[i] || f[j] && dict.contains(word);
    }
}

// answer
return f[n - 1];
```

```
// state f[i]表示前i个字符组成的子字符串是否可以被完美划分
boolean[] f = new boolean[n + 1];

// initialize
f[0] = true;

// function
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        String word = s.substring(j, i);
        f[i] = f[i] || f[j] && dict.contains(word);
    }
}

// answer
return f[n];
```

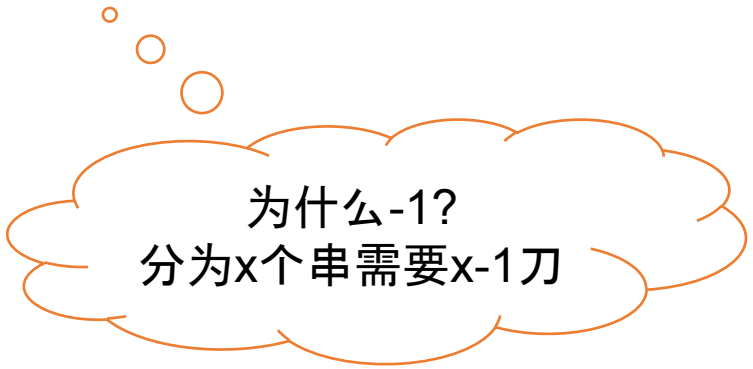
Palindrome Partitioning II

http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning-ii/

http://www.jiuzhang.com/solutions/palindrome-partitioning-ii/

Palindrome Partitioning II

- state: f[i]表示**前i**个字符组成的子串能被分割为**最少**多少个回文串
- function: f[i] = MIN{f[j]+1}, j < i && j+1 ~ i这一段是一个回文串
- initialize: f[i] = i (f[0] = 0)
- answer: f[n] – 1



如何快速判断某一段子字符串是不是回文串

- 区间型动态规划
- State: f[i][j]表示index从i到j这一段是不是一个回文串
- Function: f[i][j] = f[i+1][j-1] && (s[i] == s[j])
- Initialize: f[i][i] = true
- Answer: f[x][y] // x, y是你想查询的那一段区间

Take a break

5 minutes

双序列动态规划

- state: f[i][j]代表了第一个sequence的前i个数字/字符，配上第二个sequence的前j个...
- function: f[i][j] = 研究第i个和第j个的匹配关系
- initialize: f[i][0] 和 f[0][i]
- answer: f[n][m]
- n = s1.length()
- m = s2.length()

Longest Common Subsequence

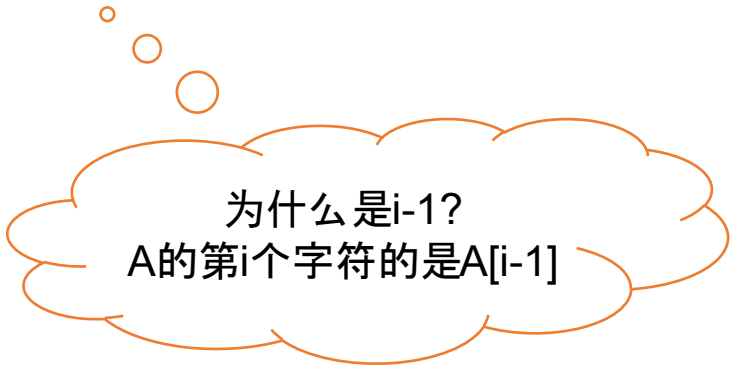
http://www.lintcode.com/problem/longest-common-subsequence/

http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-common-subsequence/

求Max

Longest Common Subsequence

- state: f[i][j]表示前i个字符配上前j个字符的LCS的长度
- function: f[i][j] = MAX(f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1] + 1) // A[i - 1] == B[j - 1]
- = MAX(f[i-1][j], f[i][j-1]) // A[i - 1] != B[j - 1]
- intialize: f[i][0] = 0 f[0][j] = 0
- answer: f[n][m]



- Related Question:
- http://www.lintcode.com/problem/longest-common-substring/

Edit Distance

http://www.lintcode.com/problem/edit-distance/

http://www.jiuzhang.com/solutions/edit-distance/

求Min

Edit Distance

- state: f[i][j]表示A的前i个字符最少要用几次编辑可以变成B的前j个字符
- function: f[i][j] = MIN(f[i-1][j]+1, f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]) // A[i - 1] == B[j - 1]
- = MIN(f[i-1][j]+1, f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]+1) // A[i - 1] != B[j - 1]
- initialize: f[i][0] = i, f[0][j] = j
- answer: f[n][m]

Distinct Subsequence

http://www.lintcode.com/problem/distinct-subsequences/

http://www.jiuzhang.com/solutions/distinct-subsequences/

求方案总数

Distinct Subsequence

- state: f[i][j] 表示 S的前i个字符中选取T的前j个字符，有多少种方案
- function: f[i][j] = f[i - 1][j] + f[i - 1][j - 1] // S[i-1] == T[j-1]
- = f[i - 1][j] // S[i-1] != T[j-1]
- initialize: f[i][0] = 1, f[0][j] = 0 (j > 0)
- answer: f[n][m] (n = sizeof(S), m = sizeof(T))

Interleaving String

http://www.lintcode.com/problem/interleaving-string/

http://www.jiuzhang.com/solutions/interleaving-string/

求是否可行

Interleaving String

- state: f[i][j]表示s1的前i个字符和s2的前j个字符能否交替组成s3的前i+j个字符
- function: f[i][j] = (f[i-1][j] && (s1[i-1]==s3[i+j-1]) ||
- (f[i][j-1] && (s2[j-1]==s3[i+j-1])
- initialize: f[i][0] = (s1[0..i-1] == s3[0..i-1])
- f[0][j] = (s2[0..j-1] == s3[0..j-1])
- answer: f[n][m], n = sizeof(s1), m = sizeof(s2)

动态规划(下)总结

- **什么情况下可能使用/不用动态规划？**
  - 最大值最小值/是否可行/方案总数
  - 求所有方案/集合而不是序列/指数级到多项式
- **解决动态规划问题的四点要素**
  - 状态，方程，初始化，答案
- **三种面试常见的动态规划类别及状态特点**
  - 坐标，单序列，双序列
- **两招独孤九剑**
  - 二维DP需要初始化第0行和第0列
  - n个字符的字符串要开n+1个位置的数组

其他类型的动态规划(算法强化班)

- 背包类:
- http://www.lintcode.com/problem/backpack/
- http://www.lintcode.com/problem/backpack-ii/
- http://www.lintcode.com/problem/minimum-adjustment-cost/
- http://www.lintcode.com/problem/k-sum/
- 区间类:
- http://www.lintcode.com/problem/coins-in-a-line-iii/
- http://www.lintcode.com/problem/scramble-string/
- 划分类:
- http://www.lintcode.com/problem/best-time-to-buy-and-sell-stock-iv/
- http://www.lintcode.com/problem/maximum-subarray-iii/