Física para estudiantes de Ingeniería: Dinámica del Cuerpo Rígido

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Índice

Dinámica del Cuerpo rígido

1_ INTRODUCCIÓN

Corresponde ahora que analicemos las diferencias entre los efectos producidos en el movimiento de un objeto cuando se le aplica un sistema de fuerzas, si se toma como modelo de este un punto material o se lo considera un cuerpo rígido (CR).

Si aplicamos un sistema de fuerzas sobre una partícula, dicho sistema será necesariamente un sistema de fuerzas concurrentes, cuya resultante producirá la aceleración de la partícula. Si el modelo a aplicar es el de cuerpo rígido, las fuerzas no necesariamente son concurrentes (en particular no siempre están aplicadas en el centro de masa).

¿Qué consecuencias trae esto? El efecto producido por fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo es diferente si se aplican en diferentes puntos de este.

Por ejemplo, si sobre un mismo cuerpo actúa una fuerza de igual módulo, dirección y sentido, pero aplicada en diferentes puntos como se muestra en la figura 1, no se moverá de la misma forma.

¿Cómo analizar el problema? La situación se resuelve trasladando cada fuerza al CM. De este modo se pueden sumar las fuerzas aplicadas al CR como vectores concurrentes igual que para el punto material. Sin embargo, es necesario introducir "algo más", para no cambiar el efecto producido por ellas. Es decir, ¿cómo se trasladan fuerzas al CM?

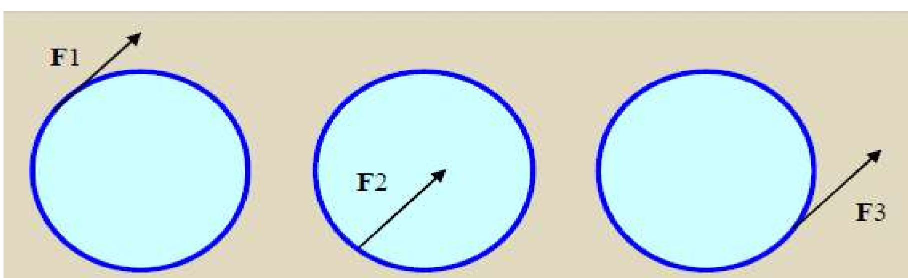


Figura 1

2_ RESULTADO DE TRASLADAR UNA FUERZA AL CM

Para que el efecto producido por la fuerza **F** no cambie, se agrega al sistema un par idénticamente nulo de igual módulo y de una dirección paralela a **F** que pasa por el CM (figura 2).

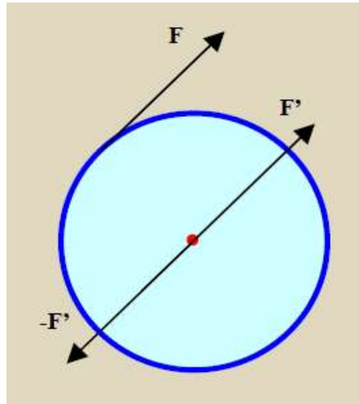


Figura 2

F' es la fuerza **F** trasladada al CM y **F** junto con **-F'** forman lo que se denomina cupla o par de fuerzas.

Conclusión: Trasladar una fuerza al CM da por resultado una fuerza aplicada en otro punto (en este caso el CM) más una cupla.

3_ CUPLA O PAR DE FUERZAS

Una cupla es un par de fuerzas, de igual intensidad y sentidos opuestos, en rectas de acción paralelas separadas una distancia "d".

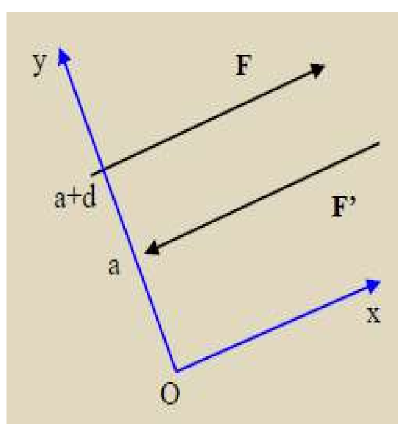


Figura 3

La resultante (su suma) es cero:

$$\vec{F} + \overrightarrow{F'} = \vec{0}$$

El momento o torque resultante de la cupla es:

$$\vec{M}_O^{Cupla} = \vec{M}_O^{F} + \vec{M}_O^{F'}$$

Se elige un sistema de coordenadas adecuado, como se muestra en la Figura 3, de manera de simplificar el cálculo de los torques. Para ello se considera como referencia de torque a un punto O fijo cualquiera del plano de la cupla. Como las fuerzas son axiales, se pueden deslizar a lo largo de sus rectas de acción.

Por esta razón, se va a considerar que $\vec{r}_F = (0; a + d; 0)$ y $\vec{r}_{F'} = (0; a; 0)$ donde "d" es la distancia entre las fuerzas de la cupla.

$$\vec{M}_O^{Cupla} = (0; a + d; 0) \times (F; 0; 0) + (0; a; 0) \times (-F; 0; 0)$$

Operando los productos vectoriales: $\vec{M}_O^{Cupla} = -F\,(a + d)\breve{k} + F\,a\,\breve{k}$

Si se aplican las propiedades distributiva y cancelativa: $\vec{M}_O^{Cupla} = -F\,d\,\breve{k}$

De acuerdo al resultado obtenido se puede afirmar que:

1. El torque o momento de la cupla es distinto de cero ya que tanto F como "d" son necesariamente no nulos.
2. El momento o torque de la cupla es el mismo para cualquier punto de su plano (es un invariante).
3. Todas las cuplas del mismo plano dan torques colineales (se pueden sumar algebraicamente).

Las cuplas tienen entonces la característica de tener resultante de fuerzas nula y torque no nulo.

¿Conoce algunos ejemplos de cuplas que se apliquen en la vida diaria?

¿Por qué es más fácil abrir una canilla utilizando dos dedos que utilizando uno solo?

Si la sumatoria de fuerzas sobre un cuerpo rígido es cero, ¿dicho cuerpo necesariamente permanecerá en reposo? Comparar el comportamiento de un cuerpo rígido con el de una partícula.

Observación: la segunda ecuación universal, que se estudia para sistemas de partículas y que también se aplica a cuerpo rígido, expresa que el efecto que produce una cupla es la variación en la velocidad de rotación del cuerpo.

4_ RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS y TORQUES APLICADOS A UN CR

En síntesis, la sumatoria de todas las fuerzas dará por resultado una fuerza neta aplicada al centro de masa y la sumatoria de todos los torques exteriores dará por resultado un torque resultante. La fuerza externa neta producirá aceleración del CM (traslación) y el torque neto externo una aceleración angular.
Como el cuerpo rígido es un SP particular, aplicaremos la primera ecuación universal para la dinámica de traslación y la segunda ecuación universal para la dinámica de rotación.
La primera ecuación universal aplicada al CR, es: $\sum \vec{F}_{ext} = M\, \vec{a}_{CM}$ y permite describir la traslación del CR.
En Física I trabajaremos sobre todo con movimientos planos, por lo que la segunda ecuación universal tendrá sólo una componente.

5_ MOMENTO CINÉTICO DE UN CR EN ROTACIÓN

Supongamos un cuerpo de revolución, de forma cualquiera, que gira alrededor de un eje de simetría con velocidad angular $\vec{\Omega}$ única y normal al plano como indicamos en la figura 4:

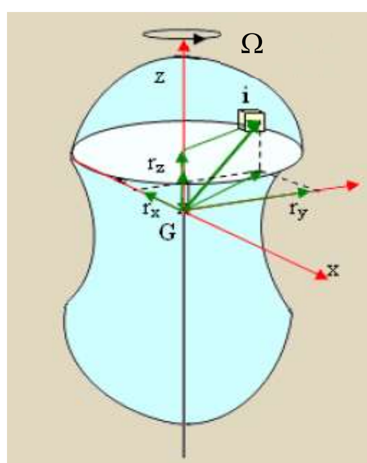


Figura 4

Para hallar el momento cinético o momento angular $\vec{L}$, respecto al centro de masa (CM), consideramos que el cuerpo está formado por infinitos elementos de volumen o cubos elementales con densidad conocida (en la mayoría de los casos uniforme). Cada uno de ellos realizará un movimiento circular en el plano horizontal, perpendicular al eje de rotación. Como ejemplo, hemos dibujado un elemento geométrico "i" que se mueve en un plano que se encuentra a una altura r_z por encima del CM. Su velocidad es:

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times \vec{r} = -r_y\, \Omega\, \breve{\imath} - r_x\, \Omega\, \breve{\jmath}$$

El momento cinético del elemento de diferencial de masa i es:

$$d\vec{L}^i_{CM} = \vec{r}_{i-CM} \times \vec{p}_i = dm\, (\vec{r}_{i-CM} \times \vec{v}_i)$$

$$d\vec{L}^i_{CM} = r_x\, r_z\, \Omega\, dm\, \breve{\imath} - r_y\, r_z\, \Omega\, dm\, \breve{\jmath} + \left(r_x^2 + r_y^2\right) \Omega\, dm\, \breve{k}$$

Si se quiere encontrar el momento cinético de todo el CR respecto al centro de masa, se tendrá que integrar la expresión anterior en todo el volumen del cuerpo.

$$\vec{L}_{CM} = \int d\vec{L}^i_{CM} = \Omega \int r_x\, r_z\, dm\, \breve{\imath} - \Omega \int r_y\, r_z\, dm\, \breve{\jmath} + \Omega \int \left(r_x^2 + r_y^2\right) dm\, \breve{k}$$

Observar que las integrales tienen la forma de $\int r^2 dm$. Se denominan momentos de segundo orden (donde "r" es una coordenada de posición de cada elemento respecto del eje normal al plano que pasa por el origen de referencia).

Lo precedente nos introduce en la importante noción del momento de inercia. Es frecuente definir este concepto como el análogo rotacional de la masa; si bien existen entre ambos determinadas analogías también podemos advertir diferencias.

Empecemos por las similitudes. Sabemos que la masa es una medida de la inercia, es decir, de la resistencia que la materia presenta al cambio de movimiento. El momento de inercia, por su parte, puede pensarse como una inercia de rotación. Es decir, como la resistencia que un cuerpo presenta a modificar su estado rotacional. Sin embargo, el momento de inercia es matemáticamente muy diferente de la masa. Para comprenderlo más claramente, vamos primero a definirlo y luego a efectuar algunos cálculos.

Definimos entonces el momento de inercia con respecto al centro de masa de un cuerpo rígido de la siguiente forma como: $I_{CM} = \int r^2 dm$

Si el cuerpo rígido es discreto, la integral es la siguiente sumatoria: $I_{CM} = \sum r_i^2 m_i$

Como veremos a continuación, el momento de inercia dependerá del eje respecto del cual efectuaremos el cálculo.

6_ CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA BARICÉNTRICO DE UN CILINDRO RESPECTO DE UN EJE PERPENDICULAR A SU EJE DE SIMETRÍA

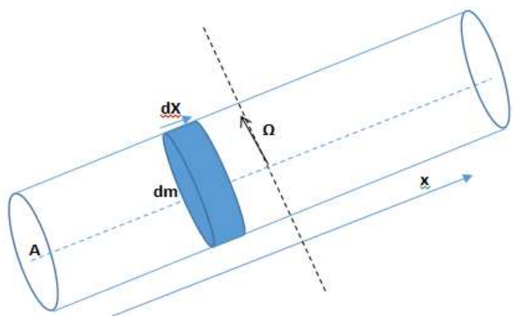


Figura 5

Encontremos el momento de inercia del cilindro, respecto a un eje baricéntrico perpendicular a su eje de simetría (eje del cilindro), tomando como elemento de masa un disco de área A y espesor dx cuyo volumen será A.dx y su masa dm.

El momento de inercia baricéntrico del cilindro lo definimos como $I_{CM} = \int r^2 dm$. A la integral entre –L/2 y +L/2, la podemos escribir como dos veces la integral entre x = 0 y x = L/2. El elemento de masa dm lo vamos a reemplazar por el producto de la densidad por el volumen elemental propuesto $dm = \rho\ A\ dx$ y la variable r en nuestro caso será la variable x.

La integral resulta ser:

$$I_{CM} = 2\int_0^{L/2} x^2 . \rho . A . dx$$

Como la densidad y la sección son constantes salen de la integral

$$I_{CM} = 2.\rho . A\int_0^{L/2} x^2 . dx$$

$$I_{CM} = 2.\rho . A\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{L}{2}}\right)$$

Con x variando entre 0 y L/2

$$I_{CM} = 2.\left(\frac{M}{A\,L}\right) A \left(\frac{(L/2)^3}{3}\right)$$

el resultado es:

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

Como por un punto pasan infinitas rectas, los cuerpos tienen múltiples momentos de inercia baricéntricos, uno respecto de cada eje que pasa por el CM.
Tomemos un ejemplo sencillo, el de dos masas iguales de masa m que podemos considerar puntuales, unidas a una barra de masa despreciable y de longitud L.

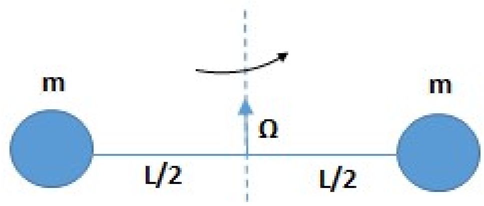


Figura 6

Si calculamos el momento de inercia baricéntrico respecto a un eje perpendicular a la barra, el resultado será la suma de los momentos de inercia de cada masa respecto del eje. Como cada masa es m y r = L/2, el $I_{CM} = \sum r_i^2 m_i = m\,(L/2)^2 + m\,(L/2)^2 = 2m\,(L/2)^2$.
Por lo tanto: $I_{CM} = \frac{m\,L^2}{2}$
Nota: En estos ejemplos es válido considerar el momento de inercia como un escalar. Sin embargo es otra clase de entidad matemática denominada *tensor*.

7_ TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

El Teorema de Steiner o de los ejes paralelos permite encontrar el momento de inercia respecto a un eje “e” que no pasa por el CM a partir del momento de inercia de un eje que pasa por el CM, con la condición de que los ejes sean paralelos entre sí.

De acuerdo a la figura 7 para un dm se verifica que: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{d}$.

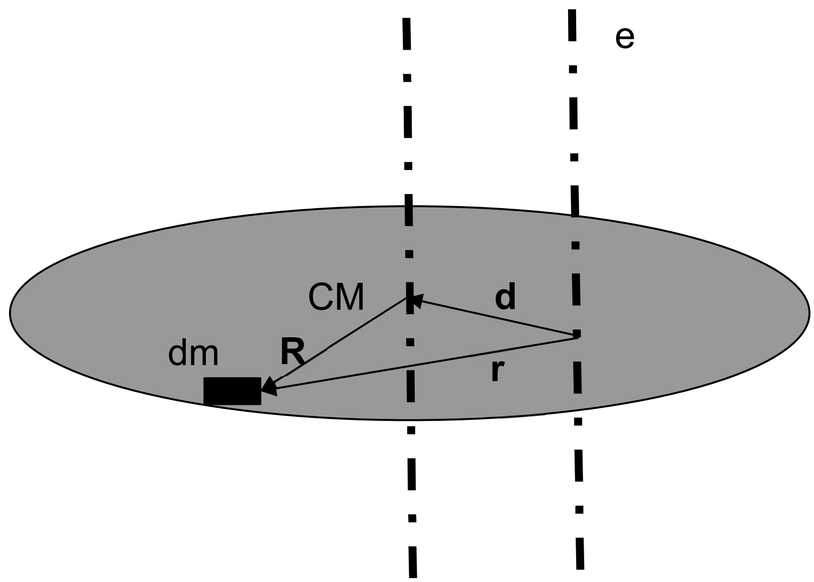


Figura 7

Por otro lado:

$I_{CM} = \int R^2 dm$

$I_e = \int r^2 dm$

Si hacemos el producto escalar de **r** por sí mismo obtendremos el módulo al cuadrado de dicho vector: $r^2 = R^2 + d^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{R}$

$$I_e = \int R^2 dm + \int d^2 dm + \int 2\vec{d} \cdot \vec{R} dm$$

El primer término es el momento de inercia respecto del CM. En el segundo término d^2 sale de la integral por ser constante y $\int dm = M$. En el tercero, el vector $\vec{d}$ puede salir de la integral por ser constante y $\int \vec{R} dm = \vec{0}$ porque representa el vector posición de la distribución de masa respecto del propio centro de masa.

Por lo tanto:

$$I_e = I_{CM} + Md^2$$

Conclusiones:

1. El valor mínimo del momento de inercia se obtiene para un eje pasante por el CM.

2. Dado que el momento de inercia respecto del CM es un real positivo, no hay posibilidad de obtener momentos de inercia negativos para cualquier eje.

8_ CÁLCULO DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO A UN EJE CUALQUIERA. EXPRESIÓN DEL TORQUE RESPECTO AL CM.

De acuerdo a lo visto en el modelo de SP, el momento cinético o momento angular de un sistema de *n* partículas respecto a un eje cualquiera es:

$$\vec{L}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i-e} \times m_i\, \vec{v}_{i-e}$$

Esta expresión la podemos expresar como:

$$\vec{L}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i-CM} \times m_i\, \vec{v}_{i-CM} + \vec{r}_{CM-e} \times M\vec{v}_{CM-e}$$

En esta última el primer término es el momento cinético relativo al CM (momento cinético de spin) y el segundo término es el momento cinético del CM respecto al eje e (momento cinético orbital).
Entonces, para nuestro modelo de CR es:

$$\vec{L}_e = I_{CM}\vec{\Omega} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$$
$$\vec{L}_{spin} = I_{CM}\vec{\Omega}$$
$$\vec{L}_{orbital} = \vec{r}_{CM-e} \times M\vec{v}_{CM-e}$$

Tener en cuenta que no siempre $\vec{L}$ y $\vec{\Omega}$ son paralelos. Como estamos considerando movimientos planos, esto se verifica.
Observemos que la expresión del momento cinético de spin es: $\vec{L}_{spin} = I_{CM}\vec{\Omega}$. La segunda ecuación universal para un CR, si el origen de momentos es el CM, se puede expresar como:

$$\vec{M}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{spin}}{dt} = \frac{d(I_{CM}\vec{\Omega})}{dt} = I_{CM}\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{CM}\vec{\gamma}$$

Donde $\vec{\gamma}$ es la aceleración angular del CR.

9_ MOMENTO CINÉTICO RELATIVO AL CIR. EXPRESIÓN DEL TORQUE RESPECTO AL CIR.

Vamos a analizar cómo encontrar el momento cinético con respecto a un eje paralelo al baricéntrico que pasa por el CIR. Apliquemos la expresión hallada anteriormente:

$$\vec{L}_{CIR} = I_{CM}\vec{\Omega} + \vec{r}_{CM-CIR} \times M\vec{v}_{CM-CIR}$$

Como todos los puntos del CR realizan un movimiento circular (rotación pura) respecto al CIR la velocidad relativa del CM respecto del CIR se puede escribir como:

$$\vec{v}_{CM-CIR} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CM-CIR}$$

Si suponemos que el CR se mueve en el plano x-y la expresión anterior nos queda.

$$\vec{v}_{CM-C} \quad = -y_{CM-CIR}\Omega\,\breve{\imath} + x_{CM-CIR}\Omega\,\breve{\jmath}$$

Luego el momento cinético orbital se puede escribir:

$$\vec{L}_{orbital} = (x^2_{CM-CIR} + y^2_{CM-CIR})M\,\Omega\,\breve{k}$$

De este modo la expresión entre paréntesis no es otra cosa que la distancia entre ejes elevada al cuadrado. Luego:

$$\vec{L}_{CIR} = I_{CM}\,\vec{\Omega} + M\,d^2\vec{\Omega}$$

Sacando factor común $\vec{\Omega}$:

$$\vec{L}_{CIR} = (I_{CM} \;+ M\,d^2)\,\vec{\Omega}$$

La expresión anterior entre paréntesis es el momento de inercia del CR respecto del eje paralelo al baricéntrico que pasa por el CIR, resultado que también encontramos aplicando el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. Podemos decir entonces que:

$$\vec{L}_{CIR} = I_{CIR}\,\vec{\Omega}$$

A partir de este resultado, si determinamos como origen el CIR, la segunda ecuación universal para un CR se puede escribir como:

$$\vec{M}_{CIR} = \frac{d\vec{L}_{CIR}}{dt} = \frac{d(I_{CIR}\vec{\Omega})}{dt} = I_{CIR}\,\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{CIR}\vec{\gamma}$$

10_ LOS MOMENTOS DE INERCIA SON ADITIVOS Y SUSTRACTIVOS

Para encontrar el momento de inercia de un cuerpo complejo podemos considerarlo como la suma o la diferencia, según convenga, de cuerpos simples cuyos momentos de inercia conocemos.

Veamos un ejemplo: cálculo del momento de inercia de un conjunto formado por una varilla y esfera (figura 8).

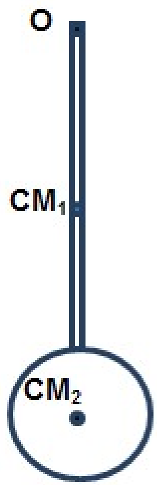


Figura 8

Supongamos un cuerpo compuesto formado por una varilla que tiene una esfera pegada en uno de sus extremos. Si la hacemos oscilar alrededor de un eje perpendicular al eje de simetría de la varilla que pase por O, como se muestra en la figura, ¿cómo calculamos el momento de inercia del conjunto respecto de ese eje?

Los datos son: masa de la varilla M_V, masa de la esfera M_E, longitud de la varilla L, radio de la esfera R, los momentos de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por su CM_1, $I_{CM}^{Varilla} = \frac{1}{12}\, M_V\, L^2$ y el momento de inercia de la esfera respecto de un eje baricéntrico CM_2 es $I_{CM}^{Esfera} = \frac{2}{5}\, M_E\, R^2$.

Destacamos que para sumar momentos de inercia es necesario que éstos refieran al mismo eje. Los CM de la varilla y de la esfera no coinciden con O, pero podemos aplicar el Teorema de Steiner en ambos cuerpos. Por todo lo expresado

$$I_O^{Total} = I_{CM}^{Varilla} + M_V(L/2)^2 + I_{CM}^{Esfera} + M_E(L+R)^2$$

$$I_O^{Total} = \frac{1}{12}\, M_V\, L^2 + M_V(L/2)^2 + \frac{2}{5}\, M_E\, R^2 + M_E(L+R)^2$$

11_ MOMENTO DE INERCIA BARICÉNTRICO DE CUERPOS NO HOMOGÉNEOS Y/O NO SIMÉTRICOS

El cálculo del momento de inercia de cuerpos no homogéneos y/o asimétricos es muy difícil de evaluar ya que la integral triple se complica mucho. Para resolver este problema se propone la siguiente metodología.

El momento de inercia baricéntrico es de la forma $I_{CM} = \int r^2 dm$. Si la distancia de todos los puntos del CR al eje baricéntrico son todas iguales, esta distancia r es constante y

podemos sacarla de la integral $I_{CM} = r^2 \int dm$. En este caso la integral triple se reduce al cálculo de la masa del CR.
Definimos radio de giro baricéntrico (k) a una distancia ficticia que permite calcular el momento de inercia baricéntrico de cualquier cuerpo como $I_{CM} = Mk^2$ donde M es la masa del CR y k el radio de giro baricéntrico. Puede interpretarse como el radio de un aro muy fino que tiene el mismo momento de inercia baricéntrico que el CR en estudio.
En la Tabla 1 proporcionamos ejemplos radios de giro baricéntrico de cuerpos perfectamente geométricos y homogéneos.

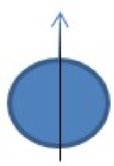
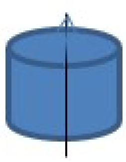
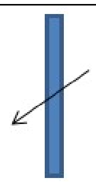
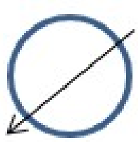
TABLA DE MOMENTOS DE INERCIA PARA ALGUNOS CUERPOS				
	**ESFERA**	$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$	$k^2 = \frac{2}{5}R^2$	$k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$
	**CILINDRO**	$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$	$k^2 = \frac{1}{2}R^2$	$k = \sqrt{\frac{1}{2}}R$
	**VARILLA**	$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$	$k^2 = \frac{1}{12}L^2$	$k = \sqrt{\frac{1}{12}}L$
	**ARO**	$I_{CM} = MR^2$	$k^2 = R^2$	$k = R$

Tabla 1

El concepto de radio de giro baricéntrico permite sortear la dificultad del cálculo de los momentos de inercia de cuerpos de formas complejas, no homogéneos o asimétricos pero, ¿cómo podemos hallar experimentalmente el k de estos cuerpos? Veamos a continuación qué pasa si a estos cuerpos los hacemos oscilar colgándolos de un eje.

12_ PÉNDULO FÍSICO

Denominamos péndulo físico a un CR que se cuelga de uno de sus puntos y se lo hace oscilar alrededor de un eje fijo. Como su forma puede ser cualquiera lo ejemplificamos con la que se muestra en la figura 9. En este caso el cuerpo lo colgamos de un eje que pasa por O, punto que denominamos centro de suspensión del CR.

El cuerpo solicitado, de este modo, sólo puede moverse con este vínculo alrededor del punto O con rotación pura. Es decir, O se constituye en el CIR para todo el movimiento.

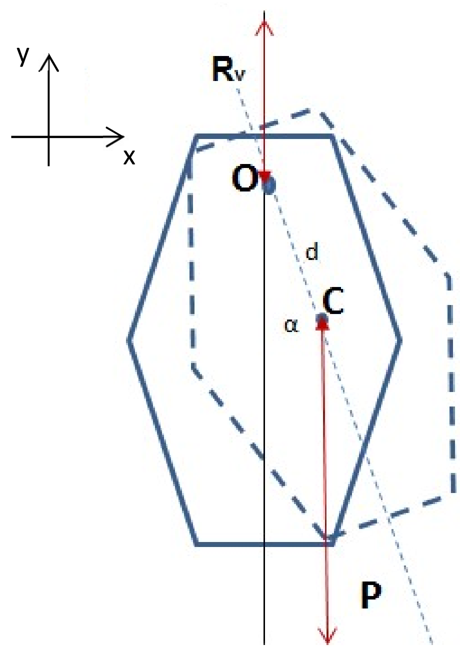


Figura 9

Consideramos un sistema de referencia inercial y el sistema de coordenadas con origen en el punto O indicado en la figura 9.

En esta figura también se representan las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo: el peso **P** aplicada en su centro de masa y la reacción de vínculo **Rv** en O.

Escribamos la ecuación para las rotaciones del CR respecto del punto O:

$$\vec{M}_O^{Fext} = \vec{M}_O^{Rv} + \vec{M}_O^{P} = I_0 \vec{\gamma}$$

De las dos fuerzas actuantes sólo el peso produce torque respecto de O ya que la recta de acción de **Rv** pasa por O. Llamando d a la distancia entre O y el CM.

El torque del peso es: $\vec{M}_O^P = -P\ d\ sen\ \alpha\ \breve{k}$

Como este cuerpo tiene una forma irregular, para calcular su momento de inercia baricéntrico aplicaremos el concepto de radio de giro baricéntrico: $I_{CM} = Mk^2$. Este es el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por su CM. Para encontrar el momento de inercia respecto a un eje baricéntrico paralelo al anterior que pasa por el punto O**,** aplicamos el teorema de Steiner:

$$I_O = Mk^2 + Md^2$$

Como $\vec{\gamma} = \gamma\ \breve{k}$**,** la expresión escalar resultante es: $-P\ d\ sen\ \alpha = M(k^2 + d^2)\gamma$, por lo tanto:

$$-\left[\frac{g\ d}{(k^2 + d^2)}\right] sen\alpha = \gamma$$

Si consideramos pequeñas oscilaciones, el ángulo en radianes es igual a su seno y a su tangente para valores pequeños. Con esta aproximación, la expresión anterior la podemos escribir como:

$$-\left[\frac{g\ d}{(k^2 + d^2)}\right] \alpha = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

El signo negativo indica que α y γ son opuestos. La expresión mencionada es una ecuación diferencial (aparece α y sus derivadas), homogénea (además del tiempo la única variable es α) y de segundo orden (la derivada mayor es de grado 2).

La expresión es característica del movimiento armónico simple (MAS): $-\omega^2 x = \frac{d^2x}{dt^2}$. Esto significa que el movimiento del péndulo físico para pequeñas aberturas puede considerarse un movimiento armónico simple. Igualamos entonces:

$$\omega^2 = \frac{g\ d}{(k^2 + d^2)}$$

donde ω es la pulsación del MAS.

Como sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donde T es el período del movimiento armónico, la expresión para el período del péndulo físico resulta ser:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g\,d}{(k^2+d^2)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(k^2+d^2)}{gd}}$$

Comparemos la expresión del período del péndulo físico con la del péndulo ideal: $T_{ideal} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ y $T_{físico} = 2\pi\sqrt{\frac{(k^2+d^2)}{gd}}$. Si logramos que los períodos sean iguales (sincronismo), entonces $l = \frac{(k^2+d^2)}{d}$, donde l es la longitud del péndulo simple sincrónico y d es la distancia del punto O al centro de masa que son dos valores medibles. Entonces, de la expresión anterior, podemos calcular el k.

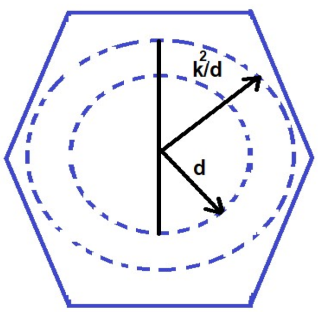


Figura 10

A la longitud $l = \frac{(k^2+d^2)}{d}$ del péndulo simple sincrónico con el péndulo físico la llamamos **longitud reducida**.

Conclusiones:

1- Todos los puntos que se encuentran a la distancia d del CM, si los tomamos como centro de suspensión, tienen el mismo período.

2- Se puede demostrar que todos los puntos que se encuentran en una circunferencia de radio k^2/d también tienen igual período.

Un punto a la distancia “d” del CM y otro a la distancia k^2/d, ubicados en una línea que pasa por el CM, se denominan **puntos conjugados**. Están entre sí a la distancia $(k^2/d) + d$ (longitud reducida).

13_ ENERGÍA EN EL CR

Energía potencial gravitatoria

En el modelo de SP, indicamos que, para alturas pequeñas con respecto al radio terrestre, la energía potencial gravitatoria es $Epg = M\,g\,h_{CM}$. Esta expresión la podemos usar para el CR si consideramos la altura del CM respecto del punto de energía potencial 0.

Energía cinética del CR

Para el mismo modelo obtuvimos una expresión de la energía cinética como la siguiente:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_{ir}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_{it}^2$$

El segundo término lo podemos analizar como una energía de expansión o compresión que en el caso del CR es nula ya que éste no se comprime ni se expande. El tercer término que refiere a $\vec{v}_{it}$, es una velocidad de rotación alrededor del CM. Con la condición de rigidez obtenemos que: $v_{it}^2 = \Omega^2 r_{i-CM}^2$ (Ω es el mismo para todo el cuerpo).
Si además tenemos en cuenta que para el CR la sumatoria se transforma en integral y m_i en dm, la energía cinética para el CR es:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \int r_{i-CM}^2 dm$$

La integral (de acuerdo con lo visto) es el momento de inercia baricéntrico. Entonces la expresión podemos escribirla como $E_c = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\Omega^2$ donde el primer término es la energía cinética de traslación y el segundo término la energía cinética de rotación respecto del CM.

14_ TRABAJO Y ENERGÍA PARA EL CR

La expresión general del teorema del trabajo y la energía para un CR es la misma que para un SP:

$$\sum W_{fnc} = \Delta Em$$

Para un cierto sistema, la suma de los trabajos de las fuerzas no conservativas (exteriores e interiores al sistema) es igual a la variación de la energía mecánica del mismo.
A diferencia de lo visto en SP, por la condición de rigidez podemos asegurar que el trabajo de las fuerzas interiores para un CR es 0.

15_ ECUACIONES UNIVERSALES DE LA DINÁMICA DEL CR

1° Ecuación (Ecuación de las traslaciones) $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$

2° Ecuación (Ecuación de las rotaciones) $\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = I_{CM}\vec{\gamma}$ o $\sum \vec{M}_{CIR}^{ext} = I_{CIR}\vec{\gamma}$

3° Ecuación (Ecuación de la energía) $\sum W_{fnc} = \Delta E_{mec}$

Estas ecuaciones son las que nos permiten resolver los problemas para el modelo de CR. Analicemos tres movimientos particulares de un CR que inicialmente está en reposo.

Primer caso: Traslación Pura

Si la suma de todas las acciones que se ejercen sobre el CR da por resultado que $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ pero $\sum \vec{M} = \vec{0}$, entonces el CR se encuentra en traslación pura. Cuando el cuerpo se mueve en traslación pura, como todos los puntos de este se mueven con la misma velocidad y aceleración, es aplicable el modelo de partícula o punto material referido al CM.

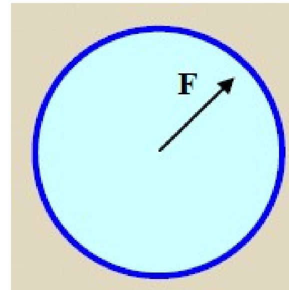


Figura 9

Segundo caso: Rotación pura

Si la suma de todas las acciones que se ejercen sobre el CR da por resultado que $\sum \vec{F} = \vec{0}$ pero $\sum \vec{M} \neq \vec{0}$, entonces el CR se mueve con rotación pura alrededor de su CM. En este caso aplicamos la segunda ecuación universal del CR. La resultante del sistema de fuerzas la podemos representar con cualquier cupla equivalente que produzca el mismo momento.

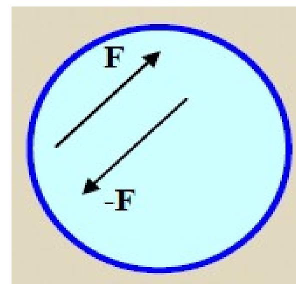


Figura 10

Tercer caso: Rototraslación

Si, finalmente, el resultado de todas las acciones sobre el CR es $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ y $\sum \vec{M} \neq \vec{0}$, entonces el CR se mueve con una rototraslación. La resultante del sistema es una fuerza y una cupla. También podemos interpretar este movimiento como una rotación pura alrededor del CIR, que puede pertenecer o no al CR.

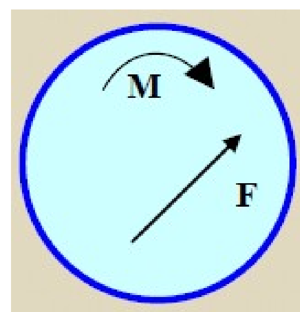


Figura 11

16_ ACERCA DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento por deslizamiento, como ya se vio en el modelo de partícula, puede ser de naturaleza estática o dinámica. La fuerza de rozamiento estática no se conoce a priori y toma valores menores o iguales a $\mu_e N$. Donde μ_e es el coeficiente de rozamiento estático y N es la reacción normal a las superficies en contacto.
La fuerza de rozamiento dinámica, si bien es función de la velocidad con que se desplaza un cuerpo sobre una superficie, consideramos que es constante e <u>igual</u> a $\mu_d N$ donde μ_d es

el coeficiente de rozamiento dinámico. Entonces aceptamos que, cuando existe deslizamiento del punto de contacto, la fuerza de rozamiento es dinámica e igual a $f_{rd} = \mu_d\, N$.

Análisis de la fuerza de rozamiento en el deslizamiento

Cuando la velocidad del punto de contacto es distinta de 0, el CR desliza respecto del plano. En este caso, la fuerza de rozamiento a utilizar es la dinámica. Su valor es constante y conocido y se sabe además cuál es su sentido, "se opone al deslizamiento relativo de las superficies en contacto".

Si necesitamos calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento, recordemos que el desplazamiento que debemos considerar es el del punto de apoyo del CR respecto de la superficie y no cuánto avanza el CM.

Nota: es un error muy frecuente confundir desplazamiento del CM con deslizamiento del punto de contacto.

Análisis de la fuerza de rozamiento de un CR que se mueve rodando sin deslizar.

Cuando la velocidad relativa del punto de contacto con respecto a la superficie es igual a 0, el CR rueda sin deslizar. En este caso, la fuerza de rozamiento que se pone de manifiesto es la estática. Su valor se desconoce y además en muchas ocasiones también se desconoce su sentido. Pero, como no hay deslizamiento de una superficie con otra, el desplazamiento del punto de contacto es 0. Por esta razón el trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo "rueda sin deslizar" es nulo (suponiendo que se rueda sobre una superficie en reposo).

Esto significa que, si la única fuerza no conservativa que puede producir trabajo en el sistema es la fuerza de rozamiento estática sobre una superficie fija, entonces se conserva la energía mecánica del sistema.

Proponemos analizar tres casos donde es posible determinar a priori el sentido de la fuerza de rozamiento.

Primer caso: Si el cuerpo está en equilibrio dinámico ($\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M} = \vec{0}$), en el plano horizontal, la fuerza de rozamiento toma un valor cero.

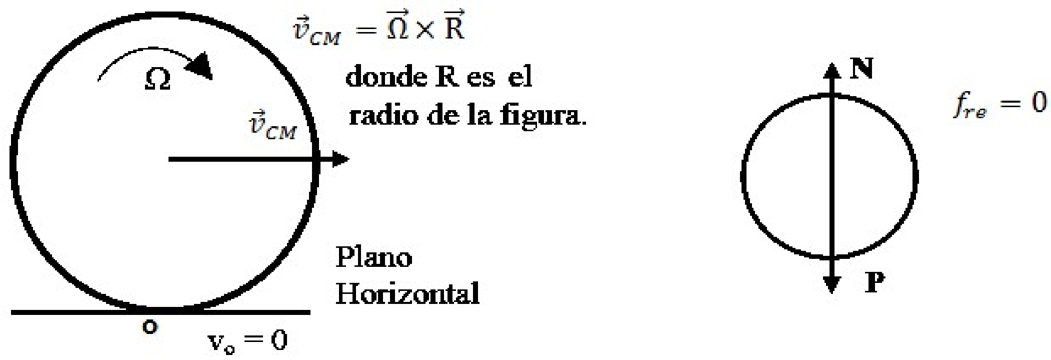


Figura 12

Segundo caso: Si el cuerpo está rodando sin deslizar, pero tiene una fuerza neta aplicada en el CM, debemos estudiar qué efecto produce esa fuerza. Este es el caso típico de un cuerpo que rueda sin resbalar en un plano inclinado o un aro. Analizamos, a continuación, que un cuerpo suba o baje rodando sin deslizar.

Nota: observemos que para ambos casos no se modifica el diagrama de cuerpo libre.

2.a: El cuerpo baja rodando sin deslizar.

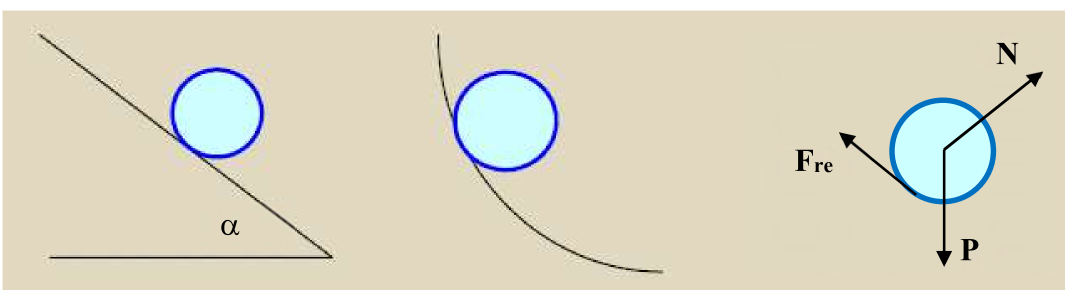


Figura 13

El valor de la componente del peso $P\ sen\ \alpha$, actuando sola, aumenta la velocidad del CM pero no puede cambiar $\vec{\Omega}$. Si la $\mathbf{F_{re}}$ no se pusiera en evidencia el cuerpo resbalaría hacia abajo, ya que la velocidad del punto de contacto debido a la rotación (de módulo ΩR, en sentido contrario a la $\vec{v}_{CM}$) permanecería constante mientras que la debida a la traslación ($\vec{v}_{CM}$) aumentaría. Por esta razón la $\mathbf{F_{re}}$ debe ser hacia arriba de modo de hacer un torque tal que aumente la velocidad de rotación $\vec{\Omega}$ y al mismo tiempo se oponga al aumento de la $\vec{v}_{CM}$. De modo que, para todo tiempo, se cumpla que $\vec{v}_{CM} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CIR-}$

<u>2.b:</u> El cuerpo sube rodando sin deslizar.
Tengamos en cuenta que el DCL es el mismo. El valor de la componente del peso $P\ sen\ \alpha$, actuando sola, disminuye la velocidad del CM pero no puede cambiar $\vec{\Omega}$. La velocidad del punto de contacto debido a la rotación (módulo ΩR, en sentido contrario a la $\vec{v}_{CM}$) permanecería constante mientras que la debida a la traslación ($\vec{v}_{CM}$) disminuiría. Por esta razón la $\mathbf{F_{re}}$ debe ser hacia arriba de modo de hacer un torque tal que disminuya la velocidad de rotación $\vec{\Omega}$ y al mismo tiempo se oponga a la disminución de la $\vec{v}_{CM}$. Así verificar que, para todo tiempo, se cumpla $\vec{v}_{CM} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CIR-CM}$.

17_ APLICACIONES DE DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Un movimiento rototraslatorio podemos pensarlo como una suma de dos movimientos puros, uno de traslación del CM y otro de rotación alrededor del CM. Esta superposición de dos movimientos "puros", nos permite describir el movimiento real del cuerpo. Esto es posible aplicando las dos ecuaciones universales. También es posible, referenciar el movimiento del CR como un movimiento de rotación instantánea respecto al CIR.
Sin embargo, respecto a la traslación, hay una diferencia entre partícula y CR ya que para una partícula calculamos su aceleración y para un CR aplicamos la primera ecuación universal referida al centro de masa.

<u>Recomendaciones para la resolución de problemas de dinámica del CR</u>
Independientemente de la estrategia seleccionada de resolución, hay algunas recomendaciones que es necesario tener en cuenta:

1. Definir los sistemas de referencia y de coordenadas a utilizar.
2. Hacer el diagrama de cuerpo libre del CR.
3. Plantear las ecuaciones universales.
4. Plantear la relación entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masa, y otras relaciones dadas por los vínculos del sistema.
5. Resolver el sistema de ecuaciones (sin hacer reemplazos numéricos previos).

6. Analizar la coherencia y compatibilidad del resultado final, con los posibles movimientos del sistema. Por ejemplo, si se calcula una fuerza de rozamiento estática, verificar que sea menor o igual que la fuerza de rozamiento estática máxima.

Ejemplo 1: Máquina de Atwood

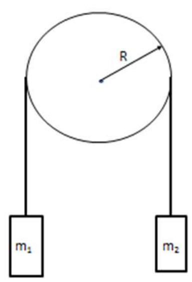


Figura 14

Supongamos una polea apoyada en un eje horizontal con rodamientos sin fricción de radio R = 0,10m y momento de inercia baricéntrico I_{CM}= $1{,}3.10^{-3}$ kg.$m^{2,}$ de la cual penden dos cuerpos de masas m_1= 0,50kg y m_2 = 0,55 kg respectivamente como se muestra en la figura 14.

Si el sistema se libera partiendo del reposo:

a) Encontrar la aceleración angular de la polea.

b) Calcular la aceleración del bloque mayor.

c) Hallar la velocidad angular de la polea y la velocidad del bloque menor cuando m_2 baja 1m.

Para resolver el problema debemos acordar que la polea y el hilo se mueven solidariamente (no hay movimiento relativo entre ellos). Como siempre antes de resolver debemos preguntarnos cómo se mueve la polea. Recordemos que es una polea fija.

¿Podemos considerar que la polea es un cilindro homogéneo? ¿Por qué?

¿Podemos suponer que las tensiones en ambos lados son iguales? ¿Por qué?

Ejemplo 2: Caída de un cilindro que tiene hilos enrollados a un punto fijo

Un cilindro de masa M y radio R cuelga de dos hilos enrollados como se muestra en la figura 15. Si al sistema se lo suelta partiendo del reposo calcular:

a.-La tensión $\vec{T}$ en cada hilo y la aceleración del CM del cilindro $\vec{a}_{CM}$

b.- Para un tiempo t después de soltarlo calcular $\vec{v}_{CM}$, $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$.

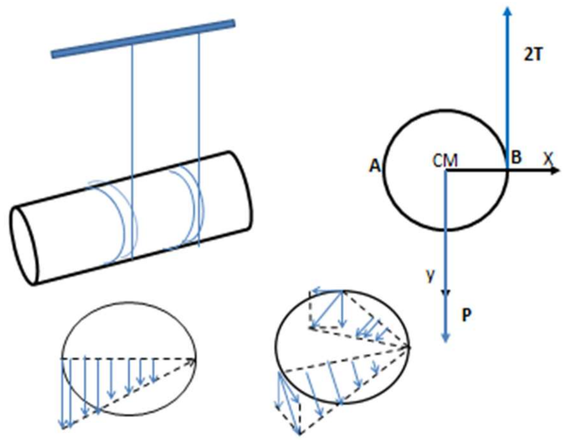


Figura 15

a) El cilindro gira en sentido antihorario. Los hilos y el cilindro se mueven solidarios. Es decir, la velocidad de los puntos de contacto del cilindro coincide instante a instante con la de los hilos en dichos puntos.

Por otro lado, los puntos de los hilos que se encuentran desde el techo hasta la posición del punto B permanecen en reposo V = 0. Por eso, los puntos de la generatriz horizontal del cilindro que pasa por el punto B son CIR.

Partimos de las ecuaciones fundamentales de la dinámica del CR: $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$ y $\sum \vec{M}_{CIR}^{ext} = I_{CIR}\vec{\gamma}$

En este caso y con el sistema de coordenadas elegido en la figura 15:

$$y)\ P - 2T = M\ a_{CM}$$

$$z)\ P\ R = I_{CIR}\gamma$$

De esta segunda ecuación obtenemos que: $2g/3\ R = \gamma$

Podemos relacionar la velocidad de dos puntos del cuerpo rígido a partir de su condición de rigidez:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CM-B}$$

Como $\vec{v}_B = \vec{0}$

Resolviendo vectorialmente llegamos a que: $\vec{v}_{CM} = \Omega\, R\, \breve{j}$

De la misma forma, relacionando sus aceleraciones:

$$\vec{a}_{CM_{(y)}} = \vec{a}_{B_{(x)}} + (\vec{\gamma} \times \vec{r}_{CM-B})_{(y)} + \left[\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{CM-B}\right]_{(x)}$$

De donde obtenemos que: $a_{CM} = \gamma\, R$. Por lo tanto: $\vec{a}_{CM} = \frac{2}{3} g\, \breve{j}$

Reemplazando esta expresión en y):

$$P - 2T = M\, \gamma\, R$$

Dado que ya obtuvimos el valor de la aceleración angular, obtenemos que:

$$\vec{T} = \frac{Mg}{6}\, \breve{j}$$

b) El cálculo de las velocidades del CM y de los puntos A y B en el tiempo t, como la aceleración del CM es 2/3 g es constante, la velocidad del CM será igual a:

$$v_{CM} = \frac{2}{3} gt$$

y como $\gamma = a_{CM}/R$

$$\gamma = \frac{2g}{3R}$$

como la aceleración angular es constante $\vec{\omega} = \vec{\gamma}\, t$ **;** $\vec{v}_{CM} = \frac{2}{3} gt\, \breve{j}$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A-CM}$$

Si operamos: $\vec{v}_A = \frac{4}{3} gt\breve{j}$

De igual modo $\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B-CM}$

Así, obtenemos que: $\vec{v}_B = \vec{0}$

Nota: como no siempre estamos en presencia de un MRUV, se recomienda resolver <u>siempre</u> a través de trabajo y energía.

Ejemplo 3: Un yo-yo rodando sin deslizar sobre una superficie horizontal

Un yo-yo se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal y está en libertad de rodar, figura 16. Se ejerce sobre el hilo del yo-yo una suave tracción hacia arriba con un ángulo θ de modo que el yo-yo ruede sin resbalar.

Hallar una expresión para la aceleración del CM en función de los datos.

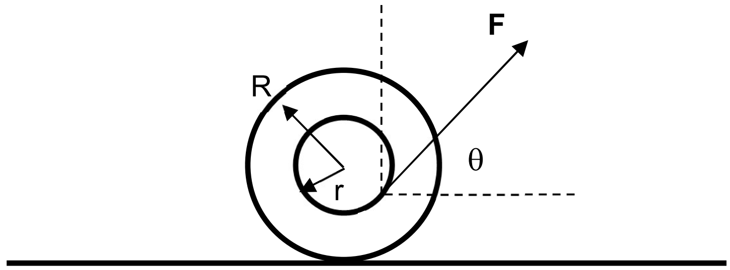


Figura 16

Posibles preguntas antes de empezar a resolver el problema:

- *¿Va a avanzar hacia la derecha o hacia la izquierda?*
- *¿Cuál es el momento de inercia del yo-yo?*
- *¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento?*
- *¿Es rozamiento estático o dinámico?*
- *¿Cuál es el punto de aplicación de F? ¿Este punto, es siempre el mismo o cambia con el ángulo?*
- *¿Es necesario que el observador sea inercial?*
- *¿Qué puntos notables podemos elegir como origen del sistema de coordenadas?*
- *¿Hacia dónde conviene poner positivos los ejes?*
- *¿Qué correcciones debemos hacer si deseamos trabajar con sistema levógiro o izquierdo?*

Resolución del problema:

Planteo del sistema de referencia y ejes de coordenadas.

Elegimos un sistema de referencia fijo a Tierra, ya que no tendríamos mayores ventajas en elegir un SRNI fijo al yo-yo.

Como el CM se mueve en forma rectilínea elegimos un sistema de coordenadas cartesiano x-y con, por ejemplo, el eje x paralelo al piso. El origen de coordenadas vamos a considerarlo en el CM o en el CIR, cada uno tiene sus pros y contras:

	Ventajas
Origen en el CM	El radio menor r, es siempre perpendicular a **F**, ya que **F** está aplicada por una cuerda que es tangente al disco interno del yo-yo.
Origen en el CIR	La fuerza de rozamiento no hace torque con respecto a ese punto.

Consideremos el origen en el CM con un sistema fijo a Tierra: Vamos a plantear un sistema de coordenadas como muestra la figura 17. Si trabajamos con una terna derecha donde se cumple que $\check{\imath} \times \check{\jmath} = \check{k}$, queda indicado el sentido positivo del eje z (entrante) y del sentido de giro (horario).

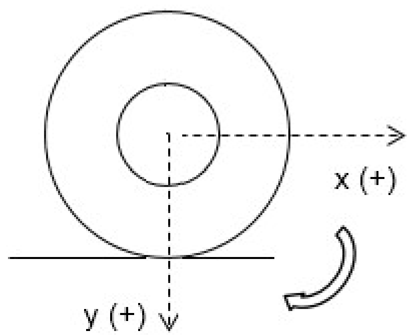


Figura 17

Si bien el origen de coordenadas está ubicado en la posición del CM, el sistema se encuentra fijo a Tierra. Lo que analizamos es una "foto" en la cual, en ese instante, el origen del sistema fijo a Tierra coincide con la posición del CM del yo-yo.

Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)

En la figura 18 presentamos el DCL del yo-yo

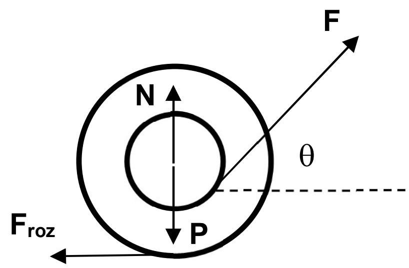


Figura 18

El sentido de la fuerza de rozamiento

No siempre podemos deducir a priori el sentido de la fuerza de rozamiento estática. En algunos casos, cuando hay datos suficientes, se puede pensar físicamente de forma cualitativa y "predecir" efectivamente el sentido de la misma. Este no es el caso, pero suponemos que el sentido de la fuerza de rozamiento es hacia la izquierda.

Ecuaciones universales

Considerando la primera ecuación universal y de acuerdo con la terna seleccionada:

$$y) -N + mg = 0$$

$$x)\ F_x - F_{roz} = m\, a_{CM}$$

Vamos a plantear las ecuaciones de momento con dos metodologías de análisis: analítico/formal y práctico/físico. Ambas son válidas y tienen sus pros y contras que veremos a continuación. Obviamente, ambos métodos deben conducirnos al mismo resultado final.

<table>
<tr><th>Método analítico/formal</th><th>Método práctico/físico</th></tr>
<tr><td>

$$\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = \vec{M}_{CM}^{F} + \vec{M}_{CM}^{F_{roz}} = I_{CM}\vec{\gamma}$$

Donde:

$$\vec{M}_{CM}^{F} = (rsen\,\theta; rcos\,\theta\,; 0) \times (\,Fcos\,\theta; -Fsen\,\theta\,; 0)$$

$$\vec{M}_{CM}^{F} = -rF\,\breve{k}$$

Y:

$$\vec{M}_{CM}^{F_{roz}} = (0;\; R\,; 0) \times (-F_{roz};\; 0\,; 0)$$

$$\vec{M}_{CM}^{F_{roz}} = RF_{roz}\breve{k}$$

Por lo tanto:

$$\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = -rF\breve{k} + RF_{roz}\breve{k} = I_{CM}\vec{\gamma}$$

</td><td>

$$\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = I_{CM}\vec{\gamma}$$

El análisis consiste en evaluar los siguientes aspectos:
1. Si la fuerza es perpendicular a la posición entonces, el módulo del producto vectorial es igual al producto de los módulos de fuerza y posición.
En nuestro caso, como **F** está aplicada mediante un hilo enrollado, la fuerza es tangente al disco interno del yo-yo y por lo tanto en todo momento es perpendicular al radio menor “r”. También, **R** y **F_{roz}** son siempre perpendiculares.
2. El signo del torque se lo asignamos, viendo en qué sentido tiende a hacer girar al cuerpo cada uno de los torques. Si lo hace girar en sentido horario, entonces es positivo en nuestro sistema, caso contrario es negativo.
Por ello el momento de **F** es negativo y el de **F_{roz}** es positivo.
En definitiva:

$$\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = -rF\breve{k} + RF_{roz}\breve{k} = I_{CM}\vec{\gamma}$$

</td></tr>
</table>

Relación entre γ y la a_{CM}

Para poder vincular las dos ecuaciones universales, tenemos que relacionar la aceleración angular con la del CM verificando la condición de rigidez. Cuando el cuerpo está vinculado, por ejemplo: en contacto con una superficie, girando alrededor de un eje, etc., las posibilidades de movimiento se restringen y se traduce en la escritura de otras relaciones específicas entre el movimiento de rotación y el de traslación.

En nuestro caso, el cuerpo está apoyado sobre una superficie horizontal lo que limita la dirección de su movimiento. Y como rueda sin deslizar podemos considerar que realiza una rotación pura alrededor del punto de contacto con el piso (CIR). Para el centro de masa se cumple que: $\vec{a}_{CM} = \vec{a}_{CIR} + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CIR-CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{CIR-CM})$

¿Es lícito escribir en este caso que: $\vec{a}_{CM} = \gamma R\breve{k}$. ¿Por qué?

Veamos más de cerca el origen de esta ecuación y sus signos. Como hicimos antes, también ahora podemos optar por un método analítico/formal y otro más práctico/físico.

Análisis y resolución del problema

Método analítico/formal	Método práctico/físico
Partimos de la relación general de velocidades para los CR y podemos escribir para cualquier par de puntos: $$\vec{v}_P = \vec{v}_q + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{q-p}$$ Donde p y q son dos puntos cualesquiera del cuerpo rígido, y la nomenclatura: $\vec{r}_{q-p}$significa que el vector tiene origen en el punto p y extremo en q. Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la relación de aceleraciones: $$\vec{a}_p = \vec{a}_q + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{q-p} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{q-p}\right)$$ Si a los puntos genéricos p y q, los consideramos como el CM y el CIR respectivamente, encontramos que: $$\vec{a}_{CM} = \vec{a}_{CIR} + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CIR-CM} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{CIR-} \quad \right)$$ Teniendo en cuenta que $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\breve{k}$ y que $\vec{\gamma} = \gamma\breve{k}$: $$\vec{a}_{CM} = \gamma R\breve{\imath}$$	Si analizamos las posibilidades de movimiento de nuestro sistema, podemos ver que el yo-yo puede avanzar hacia la izquierda o hacia la derecha. Además, como rueda sin deslizar (acá está la clave), si avanza hacia la derecha lo hará rotando en sentido horario y viceversa. Teniendo en cuenta lo anterior y que, en el sistema de coordenadas elegido, una aceleración "hacia la derecha" tiene sentido positivo de las "x" y un giro "horario" también tiene signo positivo, la aceleración del CM y la aceleración angular tienen el mismo signo. **Aclaración:** No perdamos de vista que esta relación de signos depende pura y exclusivamente de cómo elegimos nuestra terna derecha. Además, como γ y R son perpendiculares entre sí (uno es en $\breve{k}$ y el otro en $\breve{\jmath}$), podemos reemplazar el producto vectorial por: $$\vec{a}_{CM} = \gamma R\breve{\imath}$$ Con lo cual llegamos a la relación buscada. Pero cuidado que es válida por cómo se hizo el análisis de la traslación y rotación en el sistema de coordenadas elegido.

Resumiendo, si agrupamos las ecuaciones que son relevantes para resolver este problema, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ($\gamma; a_{CM}; F_{roz}$)

- *Primera ecuación universal, proyección sobre X:* $F\cos\theta - F_{roz} = m\, a_{CM}$
- *Segunda ecuación universal con respecto al CM:* $-rF + R\, F_{roz} = I_{CM}\,\gamma$
- *Relación entre la aceleración lineal y la angular (ecuación de vínculo):* $a_{CM} = \gamma\, R$

Los signos de las fuerzas, los momentos, y las aceleraciones, están de acuerdo con la terna derecha elegida como sistema de coordenadas.
Si resolvemos el sistema de ecuaciones, llegamos a la siguiente expresión para la aceleración angular:

$$\gamma = \frac{R\,F\,\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)}{I_{CM} + m\,R^2}$$

El denominador es siempre positivo, con lo cual el signo de γ viene dado por el signo del numerador $\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$ con lo cual si:

- $\cos\theta > \frac{r}{R} \Rightarrow \gamma > 0$
- $\cos\theta = \frac{r}{R} \Rightarrow \gamma = 0$
- $\cos\theta < \frac{r}{R} \Rightarrow \gamma < 0$ (no es el resultado esperado, inicialmente asumimos que γ es positivo).

Para este resultado debemos revisar en el DCL el sentido de $\vec{\gamma}$ y realizar un análisis del vínculo, lo que modificará su expresión:

$$\gamma = \frac{R\,F\,\left(\frac{r}{R} - \cos\theta\right)}{I_{CM} + m\,R^2}$$

Las relaciones anteriores muestran que existe un ángulo crítico a partir del cual el yo-yo avanza hacia la izquierda o hacia la derecha. Por ejemplo, si el coseno toma un valor próximo a 1 (su valor máximo) la aceleración angular será positiva. Y, según nuestro sistema de coordenadas, aceleraciones angulares positivas significan giros en sentido horario, lo que implica que el yo-yo se desplazará hacia la derecha. Por el contrario, para ángulos que sean mayores al ángulo crítico (por ejemplo para valores cercanos a $\pi/2$) el coseno tomará valores menores que r/R; esto significa que el yo-yo se desplazará hacia la izquierda girando en sentido anti-horario.

El ángulo crítico ($\gamma = 0$) se obtiene cuando $\frac{r}{R} = cos\,\theta$. Es decir:

$$\theta_{crítico} = cos^{-1}(r/R)$$

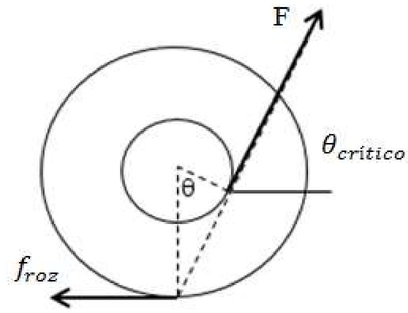


Figura 19

En la figura 19, se ve el yo-yo cuando el hilo tira con el ángulo crítico. Para ese ángulo, la prolongación de F pasa por el CIR haciendo nulo el torque de F con respecto a ese punto. Gráficamente, también se puede ver que el ángulo crítico es justamente cuando, $cos\,\theta = r/R$

Si tomamos como referencia el CIR, se ve claramente que cuando **F** tira con el ángulo crítico, la suma de momentos respecto de este origen es cero. Asimismo, tomando como centro de momentos el CM, cuando **F** tira con el ángulo crítico, la suma de torques nuevamente es cero, ya que el torque de **F** con respecto al CM es igual (en módulo) y contrario (en signo), al realizado por la $\mathbf{F_{roz}}$. Esta congruencia de resultados muestra que la dinámica del movimiento no depende del centro de momentos que elijamos para resolver el problema.

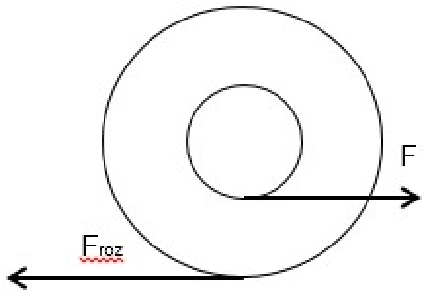
La fuerza de rozamiento

Si de las tres ecuaciones de movimiento, en vez de despejar la aceleración angular, despejamos la F_{roz}, obtenemos la siguiente expresión:

$$F_{roz} = \left(\frac{F}{3}\right)\left(cos\,\theta\ + 2\ \left(\frac{r}{R}\right)\right)$$

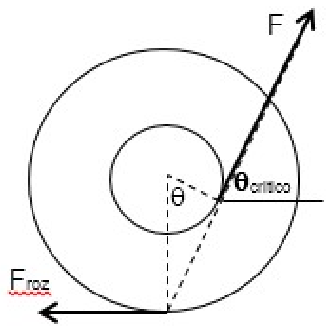
Con $0 \le \theta \le \pi/2$, la F_{roz} es siempre positiva o sea apunta hacia la izquierda.

En síntesis: grafiquemos los sentidos de la fuerza de rozamiento y de la fuerza F



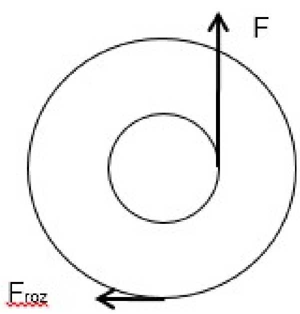
Avanza hacia la derecha y giro horario

Figura 20



No avanza, salvo en el caso que desliza sin rotar.

Figura 21



Avanza hacia la izquierda y giro antihorario

Figura 22

El planteo desde el CIR

Si en vez de elegir el CM, se hubiese elegido el CIR como centro de momentos, la F_{roz} no hace momentos y hay que referir la F al CIR.

Si aplicamos la segunda ecuación universal nos queda:

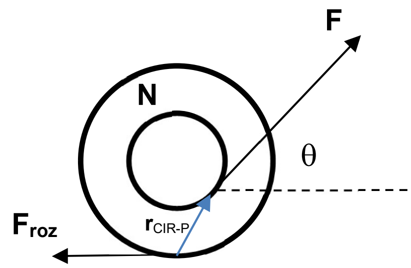


Figura 23

$$\sum \vec{M}_{CIR}^{ext} = \vec{r}_{CIR-P} \times \vec{F} = I_{CIR}\,\vec{\gamma}$$

Donde $\vec{r}_{CIR-P}$ se puede escribir como: $\vec{r}_{CIR-P} = (r\ sen\ \theta; -R + r\ cos\ \theta; 0)$
Y $\vec{F} = (F\ cos\ \theta; -F\ sen\ \theta\ ; 0)$
Entonces:

$$\vec{r}_{CIR-P} \times \vec{F} = (r\ sen\ \theta; -R + r\ cos\ \theta; 0) \times (F\ cos\ \theta; -F\ sen\ \theta\ ; 0)$$

$$\vec{r}_{CIR-P} \times \vec{F} = F\ (R\ cos\ \theta - r)\breve{k}$$

Entonces:

$$\vec{r}_{CIR-P} \times \vec{F} = I_{CIR}\,\vec{\gamma}$$

$$F\ (R\ cos\ \theta - r)\breve{k} = (I_{CM} + m\ R^2)\vec{\gamma}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{F(R\ cos\ \theta - r)}{(I_{CM} + m\ R^2)}\ \breve{k}$$

De la cual sacamos R factor común y obtenemos la misma expresión que habíamos hallado anteriormente:

$$\vec{\gamma} = \frac{R\ F\left(cos\ \theta\ - \frac{r}{R}\right)}{(I_{CM} + m\ R^2)}\ \breve{k}$$

Observemos que, en este caso, no tuvimos necesidad de utilizar la ecuación de la traslación para obtener $\vec{\gamma}$ pues ambas ecuaciones forman un sistema desacoplado.

18_SITUACIÓN PROBLEMÁTICA DE INTEGRACIÓN METODOLÓGICA

Pregunta inicial: ¿hay puntos de la barra que están más acelerados que una partícula en caída libre?

Antecedentes: En un examen se tomó el siguiente enunciado:

La varilla rígida, fina, homogénea, de masa m y longitud l, se encuentra inicialmente en reposo, en posición vertical. Está articulada en el extremo A (vínculo de eje fijo normal al papel). Se la deja en libertad y gira alrededor de A hasta alcanzar la posición horizontal. Decir y justificar para el instante final, si es verdadero o falso, lo siguiente:

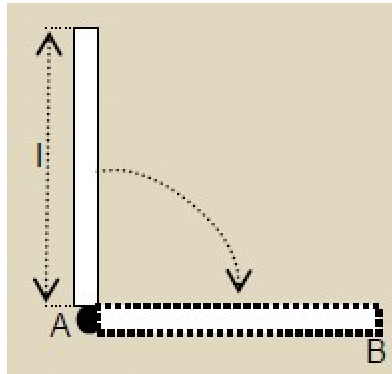


Figura 23

a) *El módulo de la aceleración total del centro de masa es igual al módulo de la aceleración total del extremo B.*

b) *El módulo de la aceleración total del centro de masa es mayor que el módulo de la aceleración de la gravedad.*

c) *La componente de aceleración radial del centro de masa es mayor que el módulo de la aceleración de la gravedad.*

d) *Las aceleraciones totales del centro de masa y del extremo B son vectores paralelos.*

Introducción: Realicemos una experiencia exploratoria de esta situación problemática y paradójica. Si a una partícula se la deja caer libremente en el vacío, en las proximidades de la superficie terrestre, independientemente de su masa, va a caer con MRUV con aceleración de módulo 9,8 m/s^2.

Sin embargo, la teoría de cuerpo rígido aplicada a una varilla que puede caer desde la posición vertical (o a partir de un cierto ángulo por sobre la horizontal) articulada en uno de sus extremos predice que el módulo de la aceleración del centro de masa es mayor que g y que la aceleración transversal del otro extremo puede superar la aceleración de la gravedad. Recomendamos ver el video del desarrollo de este problema:

https://www.youtube.com/watch?v=BV7TPvk__kE

Podemos mencionar un problema de aplicación en ingeniería civil con este tema: “la demolición por implosión de chimeneas” (falling chimney). Observemos que en la imagen 1 la chimenea aún no ha tocado el piso sin embargo se quiebra en la mitad ¿por qué? **Aclaración:** no se le han colocado cargas explosivas en su parte media.

Imagen 1

Comparemos con la siguiente situación:
http://www.youtube.com/watch?v=snfSgMgmgaI&NR=1
La chimenea posee una cumbrera que está sin anclaje. Entonces en algún momento vemos que se despega de la punta.

Imagen 2

Apuntes de Cátedra de Física I/E. Aveleyra (coord.), E. Aveleyra (coautora.), L. Chiabrando (coautora), J. Cornejo (coautor), A. Ferrini (coautor), S. Rossi (coautor), G. Gómez Toba (edición técnica)/1° edición/Buenos Aires: Facultad de Ingeniería, 2018.

ISBN ("en trámite")

Publicación digital