# Física para estudiantes de Ingeniería:
# Sistemas de Referencia No Inerciales

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

# Sistemas de Referencia No Inerciales

Hasta ahora se vieron situaciones descriptas desde sistemas en reposo o con MRU "respecto a un sistema que consideramos fijo". Pero, ¿cómo modelizamos si deseamos realizar la descripción del movimiento desde un sistema acelerado? Dicho de otra forma, si el sistema móvil se acelera no resulta un sistema equivalente a otro que consideramos fijo a Tierra. En estos sistemas acelerados, entonces, no se cumplirían las leyes de Newton. Veamos un ejemplo.



Supongamos una barra de hielo B apoyada sobre un camión C. El camión parte del reposo y acelera con una aceleración $\vec{a}$ respecto de Tierra

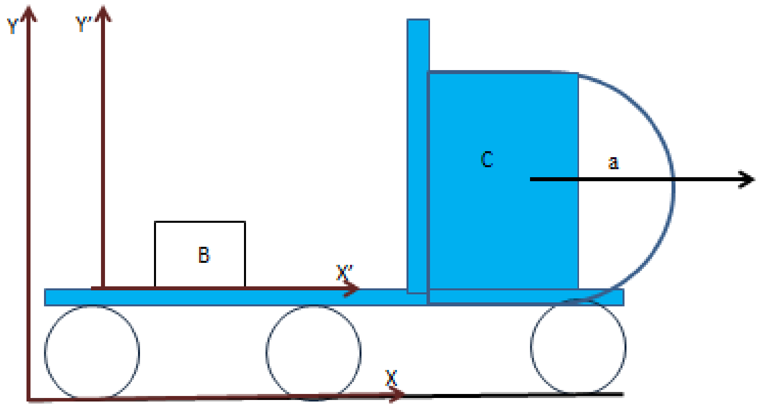


**Figura 1**

Colocamos la barra de hielo de modo que la fuerza de rozamiento entre la barra y el camión sea despreciable. Hagamos un DCL de la barra de hielo respecto a un sistema fijo a Tierra poniendo de manifiesto todas las interacciones que se ejercen sobre ella.

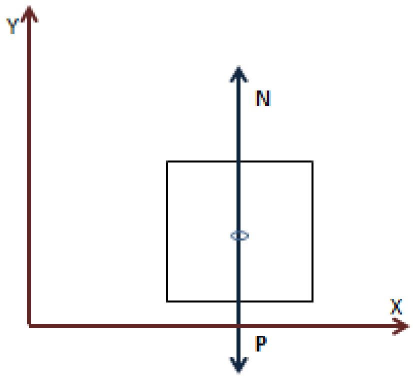


**Figura 2**

Las únicas interacciones de la barra son el peso**,** cuyo par de interacción está en el centro de la Tierra**,** y la reacción de vínculo con el piso del camión que en este caso la llamamos normal y tiene su par en la superficie del camión.

Si aplicamos la segunda ley fundamental de la dinámica: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\,\vec{a}$

Proyectando en los ejes X **e** Y:

$x)\ 0 = 0$

$y)\ N - P = 0$

De acuerdo con estas ecuaciones la barra de hielo permanece en reposo. Es decir, el camión se acelera hacia la derecha y la barra se queda en el lugar. Cuando se termina el camión la barra cae al piso. Este análisis es correcto.

Veamos ahora qué pasa si hacemos un análisis similar "para un sistema de referencia fijo en el camión."

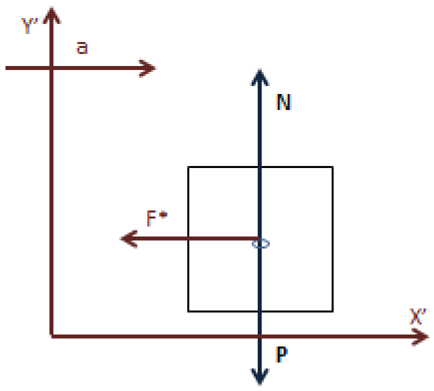


**Figura 3**

Sobre la barra de hielo no se ejercen más que dos interacciones, las mismas que antes. Sin embargo como el sistema móvil se acelera hacia la derecha, respecto de dicho sistema la barra se acelera hacia la izquierda. El movimiento de la barra es el que le veríamos realizar si nos subimos al camión. De hecho podríamos medir desde el camión la aceleración de la barra y mediríamos una aceleración igual a la del camión, pero hacia la izquierda.

Para el observador acelerado no se cumple el Principio de Inercia, porque observaría que la barra se acelera "sola", por ello "agrega" la fuerza ficticia como un recurso para salvar la situación. Podemos decir que para que se cumpla **una expresión equivalente**

**a** la segunda ley de Newton agregamos una fuerza $\overrightarrow{F^{*}}$ . De este modo el sistema de ecuaciones $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\,\vec{a}$ tiene ahora el siguiente significado:

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} + \sum \vec{F}^{\,*} = m\vec{a}$$

Donde $\sum \vec{F}_{\text{int}}$ representa las fuerzas de interacción y $\sum \vec{F}^{\,*}$ las denominadas "fuerzas ficticias", "fuerzas de inercia" o "pseudofuerzas". Y $\vec{a}$ es la aceleración medida desde el SNI, es decir, desde el sistema de referencia que se encuentra acelerado respecto de Tierra.



En el sistema $x'y'$:

$x')\ -F^{*} = -m\,a'$

$y')\ N - P = 0$

La fuerza $\overrightarrow{F^{*}}$ no es una fuerza newtoniana. No tiene por origen una interacción (no tiene par de interacción) y no existe en todos los sistemas de referencia. Por esta razón la denominamos fuerza ficticia. Sólo aparece en los sistemas acelerados. Se opone a la aceleración del sistema móvil (que llamamos **aceleración de arrastre**) y su valor es la masa del cuerpo por la aceleración del sistema móvil.

La expresión vectorial es:

$$\sum \vec{F}^{\,*} = -m\vec{a}_{sist}$$

Donde $\vec{a}_{sist}$ es la aceleración del sistema de referencia no inercial respecto de un sistema fijo a Tierra, la que no debe confundirse con la aceleración individual de cada partícula. En nuestro caso:

$x')\ -m\,a_{sist} = -m\,a'$

De donde $a_{sist} = a'$. En nuestro ejemplo, el módulo de la aceleración relativa de la barra de hielo, es igual al módulo de la aceleración del sistema móvil.

*A los sistemas de referencia fijos a Tierra o que se mueven a velocidad constante respecto a Tierra (sistemas equivalentes para la ley de inercia newtoniana) los llamaremos: "Sistemas Inerciales" y en ellos se cumplen las leyes de Newton.*

*Los sistemas acelerados respecto a Tierra los llamaremos:*

*"Sistemas No Inerciales".*

*En estos sistemas, para escribir las ecuaciones dinámicas, tenemos que agregar a cada uno de los puntos materiales que formen parte del sistema, una fuerza que llamaremos* ***fuerza ficticia,*** *opuesta a la aceleración del sistema de referencia no inercial respecto a Tierra, y cuyo módulo es el producto de la masa del cuerpo puntual multiplicada por el módulo de dicha aceleración.* ***Fuerza ficticia se puede entender como sinónimo de fuerza de inercia o pseudofuerza*** *en la bibliografía.*

Observemos que si en el camión de nuestro ejemplo, hay dos barras de hielo de masas distintas, las fuerzas de inercia o fuerzas ficticias son distintas en cada barra de hielo, ya que dependen de la masa de cada partícula.

***Pregunta 1:*** ¿Un sistema de referencia fijo a Tierra es realmente un sistema inercial (SI)?

***Respuesta 1:*** No, porque la Tierra está acelerada al girar sobre su propio eje y en torno al Sol.

***Pregunta 2:*** Entonces, ¿por qué en el problema anterior tomamos el sistema fijo a Tierra como si fuese inercial?

***Respuesta 2:*** Porque para ambos movimientos la aceleración de la Tierra es muy pequeña (como para tener un orden de magnitud, un cuerpo en la superficie de la Tierra que se encuentre a la latitud del ecuador tendría una fuerza ficticia de módulo aproximadamente del 0,3% de su peso)

**Veamos otros ejemplos:**

**a) Caso de un péndulo ideal:**

Sea un péndulo ideal que se aparta de su posición de equilibrio estático un ángulo α y se lo deja oscilar. Vamos a encontrar la aceleración de la lenteja del péndulo cuando pasa por una posición intermedia de abertura angular β. Posición que denominamos 2 en la figura.

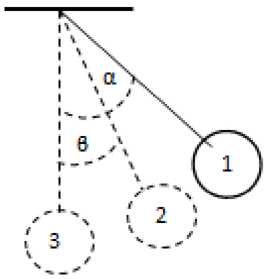


**Figura 4**



Analicemos la aceleración del péndulo cuando pasa por esta posición desde un sistema de referencia inercial, pero, intrínseco. El eje normal coincide con la dirección radial del hilo y, el eje tangencial tiene la dirección y el sentido del vector velocidad.

Las únicas interacciones del péndulo son el peso y la tensión del hilo. Escribimos la segunda ley de Newton:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\,\vec{a}$$

y la aplicamos a nuestro DCL

$n)\ T - P\cos\beta = m\,a_n$

Donde $a_n = \frac{V^2}{L}$

(v es la velocidad en este instante y L la longitud del hilo supuesta la lenteja puntual)

$t)\ P\,\mathrm{sen}\,\beta = m\,a_t$

Donde $a_t = \gamma\,L$

($\gamma$ es la aceleración angular)

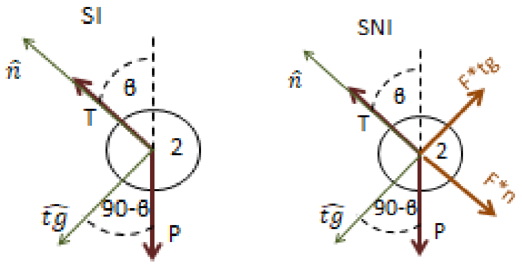


**Figura 5**

Si ahora queremos plantear el problema desde un sistema no inercial fijo a la lenteja del péndulo el sistema tendrá dos componentes de aceleración conocidas: una componente normal y una componente tangencial. Por esta razón vamos a tener que agregar dos fuerzas ficticias una que denominamos $F_n^*$ en la dirección radial opuesta a la aceleración normal, de módulo $m\,a_n$, y otra opuesta a la aceleración tangencial del sistema de referencia denominada $F_t^*$ y cuyo módulo será $m\,a_t$.



Las ecuaciones en este caso resultan:

$n)\; T - P\cos\beta - F_n^* = 0$

y en la dirección tangencial:

$t)\; P\,\mathrm{sen}\,\beta - F_t^* = 0$

El significado de estas ecuaciones es que el péndulo se encuentra en reposo para este sistema móvil colocado sobre él. Si comparamos ambos sistemas vemos que encontraremos los mismos resultados.

**Observación:** *cuando se plantean las ecuaciones desde un sistema inercial (SI)) y desde un sistema no inercial (SNI) el sistema de ecuaciones obtenido es finalmente el mismo, a menos de algunos pasajes de términos. Surge entonces la pregunta de qué sentido tiene haber desarrollado el concepto de SNI, si finalmente, con un planteo más complejo, se llega al mismo sistema de ecuaciones que desde el SI. La respuesta es que existen numerosas situaciones, por ejemplo las vinculadas a la física de la atmósfera, en donde no puede despreciarse la rotación de la tierra, y es mucho más sencillo trabajar con un sistema de referencia fijo a la tierra, y que es por lo tanto un SNI. Los ingenieros que trabajan en comunicaciones satelitales, por ejemplo, tienen que hacer eso.*

## b) Péndulo en el techo de un carrito:

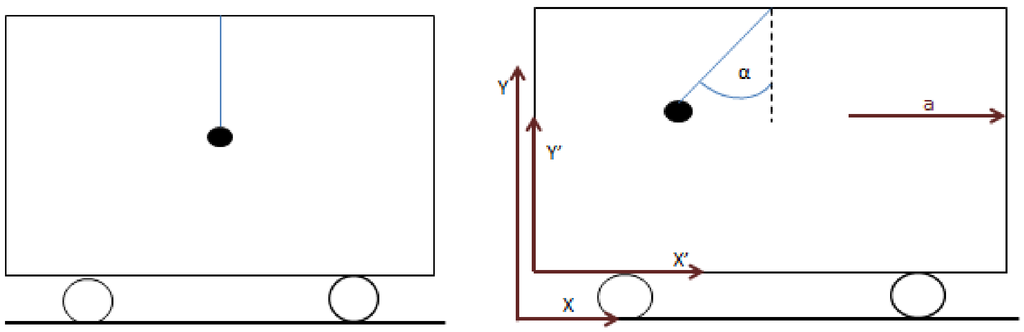

**Figura 6**

Si el carrito está en reposo o se mueve a velocidad constante, el péndulo permanece en su posición de equilibrio estable. En cambio, si el carrito se acelera con aceleración a constante hacia la derecha, el péndulo permanece en reposo respecto del carrito. El hilo se mantiene formando un ángulo α con la vertical como se indica en la figura 6.

Analicemos la justificación de esta situación desde un sistema XY (SI) fijo a Tierra y luego desde un sistema X'Y' (SNI) fijo al carrito.



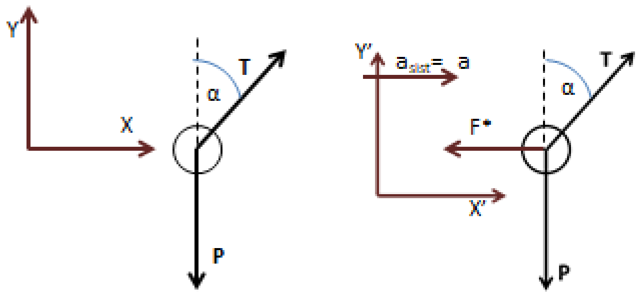


**Figura 7**

En el Sistema Inercial (SI) fijo a Tierra escribimos:

$x)\ T\ sen\ \alpha = m\ a$

$y)\ T\ cos\ \alpha - P = 0$

Esto significa que la lenteja del péndulo se acelera sólo en la dirección horizontal con una aceleración igual a la del carrito (se mueve solidaria con el carrito).

En el Sistema No Inercial (SNI) fijo al carrito escribimos:

$x')\ T\ sen\ \alpha - \ F^{*} = 0$

$y')\ T\ cos\ \alpha - P = 0$

Esto significa que la lenteja del péndulo permanece en reposo respecto al carrito.

Tenemos entonces dos maneras distintas de plantear el mismo problema. Tengamos en cuenta que en los sistemas acelerados agregamos las fuerzas ficticias (también llamadas de inercia) y la aceleración que medimos es la "relativa" en esos sistemas.

Sugerimos que intente despejar el ángulo α desde las ecuaciones de ambos sistemas de referencia, y necesariamente se dará cuenta que en ambos casos llega a la misma solución.

Situación problemática: a) pensemos qué observaría un señor que plantea el problema de la lenteja del péndulo desde un SI si se cortase el hilo. Nos daremos cuenta que la lenteja en el lapso que comienza cuando se corta el hilo realiza un tiro horizontal y este observador ve que realiza una trayectoria parabólica, ¿puede escribir las ecuaciones horarias de este movimiento para el SI?
b) pensemos ahora qué observaría un señor que plantea el problema de la lenteja del péndulo desde el SNI indicado si se cortase el hilo. Nos daremos cuenta que la lenteja en el lapso que comienza cuando se corta el hilo realiza un tiro horizontal, ahora el movimiento horizontal está acelerado, pues hay una aceleración relativa respecto del SNI que tiene una componente horizontal y otra vertical, y este observador ve que realiza una trayectoria rectilínea, ¿puede escribir las ecuaciones horarias de este movimiento para el SNI?



**Veamos otro ejemplo:**

**c) <u>Un carrito con un sistema de cuerpos en su techo como muestra la figura 8:</u>**

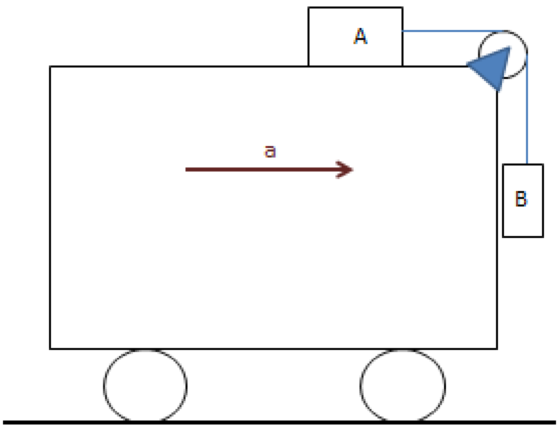


**Figura 8**

Dadas las masas de A y de B**, s**abiendo que en las superficies hay una rugosidad uniforme de coeficientes de rozamiento estático y dinámico $\mu_o$ y $\mu_d$ respectivamente. La polea es de masa despreciable y el hilo es inextensible y de masa despreciable. Encontrar:

**a)** el rango de aceleraciones del carrito $a_{\min}$ y $a_{\max}$ dentro de los cuales el sistema A, B se mueve solidario al mismo,

**b)** si ahora la aceleración del carrito es igual a $a_{\min}/2$ ó $2\,a_{\max}$ encontrar las aceleraciones de A y de B respecto a Tierra en ambos casos.

En la primera parte del problema, como los cuerpos A y B se mueven solidarios con el carrito, se puede resolver indistintamente y con la misma dificultad desde un sistema fijo a Tierra o desde un SNI fijo al carrito. Vamos a plantearlo desde ambos sistemas a efectos de asentar los conceptos.



Si la aceleración del carrito es pequeña, el sistema tenderá a moverse como cuando el carrito está quieto. El cuerpo A tiende a moverse hacia la derecha respecto del carrito y el cuerpo B tiende a caer. Por eso la fuerza de rozamiento puesta en evidencia sobre el cuerpo A es hacia la izquierda y sobre el cuerpo B hacia arriba. Como queremos encontrar la aceleración mínima estamos en un caso límite y las fuerzas de rozamiento son las estáticas máximas. Los DCL para un sistema fijo a Tierra son entonces:

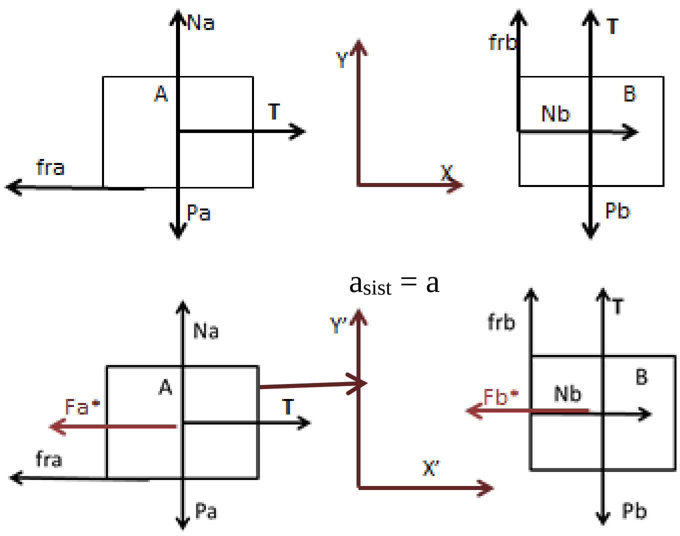


**Figura 9**

Escribamos entonces la segunda ley de Newton $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m.\vec{a}$

Las ecuaciones escalares que surgen de la proyección de las fuerzas en el SI XY son:

$x)\ T - fr_a = m_a\, a$

$N_b = m_b\, a$

$y)\ N_a - P_a = 0$

$T + fr_b - P_b = 0$

que aplicadas al caso de la $a_{\min}$:

$x)\ T - \mu_0\, P_a = m_a\, a_{min}$

$N_b = m_b\, a_{min}$

$y)\ N_a = P_a$

$T + \mu_0\, m_b a_{min} - P_b = 0$

Ecuaciones en las cuales queda de manifiesto que ambos cuerpos se mueven horizontalmente con la misma aceleración que el carrito.

De todo lo anterior resulta que:

$$\vec{a}_{min} = \frac{(m_b - \mu_0 m_a)\, g}{m_a + \mu_0\, m_b}\ \hat{\imath}$$

Para el planteo de las ecuaciones desde un SNI agregamos en ambos cuerpos las fuerzas ficticias $F_a^*$ en módulo igual a $|F_a^*| = m_a\, a_{min}$ y $F_b^*$ en módulo igual a $|F_b^*| = m_b\, a_{min}$, pero, los resultados numéricos no cambian:

$\boldsymbol{x'})\ T - fr_a - F_a^* = 0$

$N_b - F_b^* = 0$

$y')\ N_a - P_a = 0$

$T + fr_b - P_b = 0$

El cambio conceptual es que en este caso respecto del carrito ambos cuerpos permanecen en reposo. Justamente las aceleraciones que se miden en ambos sistemas no son las mismas.

Si el carrito aumenta su aceleración, el sistema constituido por los cuerpos A y B comienza a deslizar sobre el carrito. En realidad lo que sucede es que la fuerza de rozamiento estática no es suficiente para que los cuerpos se muevan solidarios con el carrito. En el caso límite se obtiene la $a_{\max}$.

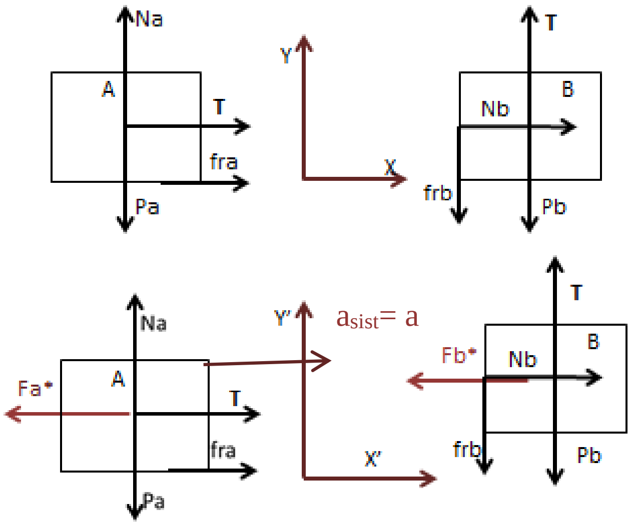


**Figura 10**

Las únicas fuerzas que cambian de sentido y por eso de signo son las fuerzas de rozamiento estático máximo.

Si obramos igual que antes obtenemos:

$$\vec{a}_{max} = \frac{(m_b + \mu_0\, m_a)\, g}{m_a - \mu_0\, m_b}\ \hat{\imath}$$

Si la aceleración del carrito es mayor o menor al rango de aceleraciones en las que los cuerpos A y B se mueven solidarios con él, hay un movimiento relativo de ese sistema respecto del carrito. Es en estos casos cuando se hace conveniente utilizar un SNI para asegurarnos de proceder correctamente. En este caso no estamos seguros de cuál es la aceleración de A o la aceleración de B respecto de Tierra. Pero, estamos seguros que relativo al carrito el sistema se mueve con la misma aceleración relativa en módulo impuesta por el vínculo. Si la aceleración del carrito es menor a la mínima, A se acelerará hacia la derecha y B hacia abajo. De manera similar a cuando el carrito estaba en reposo. Pero, si el carrito acelera con valor mayor a la máxima, el cuerpo A se acelerará a la izquierda y el cuerpo B subirá aceleradamente respecto al carrito.

Tomaremos este último caso como para mostrar la solución desde el SIN.

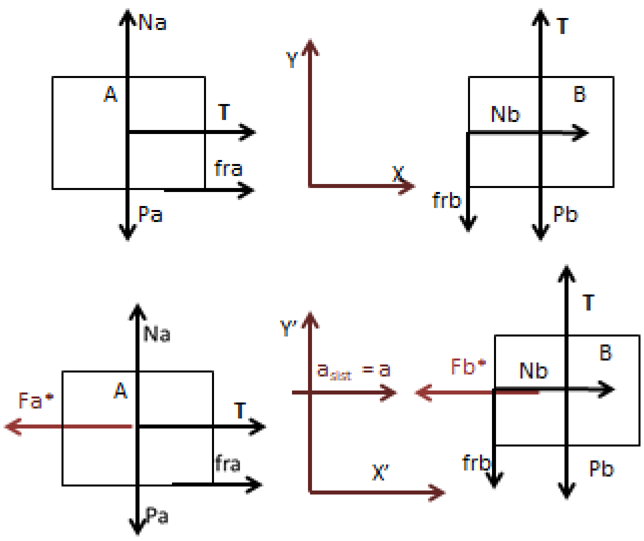


**Figura 11**



Los DCL son los mismos que para $a_{max}$ ya que las interacciones son las mismas pero en este caso el sistema A y B "trepa" sobre el carrito. La diferencia ahora es la condición de movimiento porque tenemos un movimiento relativo al SNI. Ahora nuestras ecuaciones son:

$$\boldsymbol{x'})\ F_a^* - T - fr_a = -m_a\, a'$$

$$F_b^* - N_b = 0$$

$$\boldsymbol{y'})\ N_a - P_a = 0$$

$$T - fr_b - P_b = -m_b\, a'$$

Donde $a$' es la aceleración relativa al carrito y $a$ la aceleración del carrito. Reemplazando en este caso:

$$a = 2\, a_{max}$$

$$fr_a = \mu_0 m_a\, g$$

$$fr_b = \mu_0\, (F_b^* - m_b\, a)$$

$$F_a^* = m_a 2\, a_{max}$$

$$F_b^* = m_b 2\, a_{max}$$

Según las ecuaciones planteadas, respecto a un sistema de coordenadas fijo al carrito, el cuerpo A se mueve aceleradamente en la dirección horizontal hacia la izquierda con aceleración relativa de módulo a’ y el cuerpo B se mueve hacia arriba con el mismo módulo a’ hacia arriba.

Operando con las ecuaciones planteadas encontramos:

$$a' = \frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a+m_b}$$

Como la aceleración de arrastre del carrito es:



$$\vec{a} = 2\,\frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a-\mu_0 m_b}\,\hat{\imath}$$

Entonces, la aceleración del cuerpo A respecto de Tierra es:

$$\vec{a}_A = \left[2\,\frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a-\mu_0 m_b} - \frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a+m_b}\right]\hat{\imath}$$

El cuerpo B en cambio tiene dos componentes. Tiene la aceleración de arrastre en la horizontal y la relativa hacia arriba en la vertical:

$$\vec{a}_B = 2\,\frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a-\mu_0 m_b}\,\hat{\imath} - \frac{(m_b+\mu_0 m_a)g}{m_a+m_b}\,\hat{\jmath}$$

Les proponemos que calculen las aceleraciones de A y B cuando el carrito tiene una aceleración igual a la mitad de la mínima:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\frac{(m_b - \mu_0\, m_a)\, g}{m_a + \mu_0\, m_b}\,\hat{\imath}$$

**Observación:** vamos a unir lo visto en SNI con la adición de aceleraciones que vimos antes. Vimos que siempre y cuando el sistema móvil sólo se traslade respecto del sistema fijo a Tierra: $\vec{a} = \vec{a}_a + \overrightarrow{a'}$

Donde:

$\overrightarrow{a}$: aceleración respecto a Tierra.

$\vec{a}_a$: aceleración del sistema móvil respecto de Tierra.

$\overrightarrow{a'}$: aceleración relativa al sistema móvil.

Si pasamos de término:

$$\vec{a} - \vec{a}_a = \overrightarrow{a'}$$

Si esta igualdad la multiplicamos por la masa del cuerpo:

$m\,\vec{a} - m\,\vec{a}_a = m\,\overrightarrow{a'}$

Pero $m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$ corresponde al Principio de Masa.

Análogamente $m\,\vec{a}_a = \sum \overrightarrow{f^*}$ es la suma de las fuerzas inerciales que debemos agregar en los sistemas acelerados.



Podemos entonces expresar una ecuación "equivalente" al Principio de Masa para todo sistema de coordenadas:

$$\sum \vec{F} + \sum \overrightarrow{f^*} = m\,\overrightarrow{a'}$$

**Observación:** *como las fuerzas ficticias no tienen par de interacción, no podemos decir que los Principios de Newton se generalizan para un SNI.*

*Recordemos que* $\boldsymbol{a}'$ *es el vector aceleración relativa del punto material que puede ser diferente para cada SNI que decidamos utilizar.*

El texto “Física para estudiantes de Ingeniería”, es una obra colectiva llevada a cabo por docentes de Física I de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA). Se enmarca dentro de las actividades correspondientes al PEFI (Plan Estratégico de Formación de Ingenieros) y todos los derechos se encuentran protegidos bajo licencia Creative Commons.

Física para estudiantes de Ingeniería- Ema E. Aveleyra (coord. y coautora), Jorge Cornejo (coautor), Adrián Ferrini (coautor), María Cristina Menikheim (coautora), Sergio Rossi (coautor), Gonzalo Gómez Toba (edición técnica)/1° edición/Buenos Aires: Facultad de Ingeniería, 2018.

ISBN (“en trámite”)

Publicación digital.