

# Física para estudiantes de Ingeniería: Óptica Geométrica

# Índice

1. *Óptica geométrica*
2. *Leyes o principio fundamentales de la óptica geométrica*
3. *Algunas definiciones*
4. *Fenómeno de reflexión: espejos*
5. *Espejos planos: formación de imágenes*
6. *Campo del espejo*
7. *Reflexión en espejos esféricos*
8. *Formula de los espejos esféricos*
9. *Focos*
10. *Agrandamiento lateral*
11. *Formación de imágenes en espejos esféricos*
12. *Reflexión total ángulo limite*
13. *Fenómeno de refracción: dioptras esféricas*
14. *Formula de Descartes para las dioptras esféricas*
15. *Aumento o agrandamiento lateral*
16. *Lentes gruesas*
17. *Problema propuesto*
18. *Lentes delgadas*
19. *Ecuación del constructor de lentes*
20. *Resumen*
21. *Aumento lateral en lentes delgadas*
22. *Formación de imágenes en lentes*
23. *Potencia de las lentes delgadas*
24. *Revisando conceptos*
25. *Problema*



# ÓPTICA GEOMÉTRICA

Es la parte de la Física que estudia la luz. Denominamos luz a la pequeña porción del espectro electromagnético a la que nuestros ojos son sensibles. Nuestros ojos detectan radiaciones entre 430 y 690 nm de longitud de onda ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ). Según los modelos de estudio, podemos dividir la Óptica en dos grandes ramas: la Óptica Geométrica y la Óptica Física.

## 1\_ ÓPTICA GEOMÉTRICA

La óptica geométrica utiliza métodos para estudiar y predecir los fenómenos ópticos que se pueden describir considerando la luz como rayos emitidos por fuentes o manantiales de luz en medios isótropos (tienen las mismas propiedades físicas en todas direcciones) y homogéneos (densidad constante).

**Rayo:** es una línea en el espacio que indica la dirección del flujo de energía luminosa emitido por una fuente. Describe la trayectoria de la luz.

## 2\_ LEYES O PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

Todos los fenómenos estudiados por la óptica geométrica responden a tres leyes o principios fundamentales: 1.- la propagación rectilínea de la luz, 2.-la reflexión de la luz y 3.- la refracción de la luz.

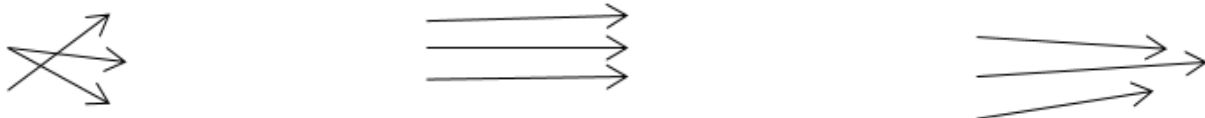
**1º Propagación rectilínea:** “La luz se propaga en línea recta.”

Para representarla, el modelo de rayo indica la dirección y sentido de su propagación.



**Figura 1**

En general de una fuente no sale un único rayo. A un conjunto de rayos lo llamamos haz. Los haces de rayos pueden ser divergentes, paralelos o convergentes (ver dibujo).



**Figura 2**



En general, cuando la luz llega a la superficie de discontinuidad de dos medios de diferente índice de refracción<sup>1</sup>, parte de la luz se refleja (vuelve al mismo medio), parte se refracta (pasa al otro medio), parte se absorbe y parte se difunde. De estos fenómenos estudiaremos sólo la reflexión y la refracción de la luz. En cada caso analizaremos el fenómeno como si sólo tuviera lugar uno sólo de ellos.

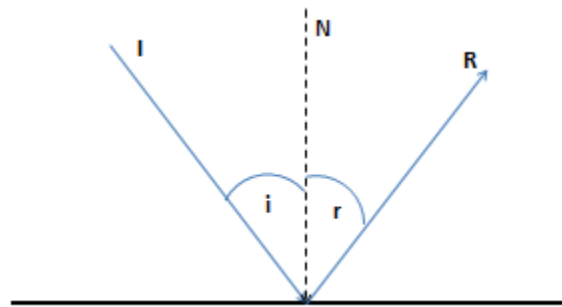
## 2º Leyes de la reflexión de la luz:

Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad, con índices de refracción distintos, parte se refleja de modo que:

**1º Ley:** “El rayo incidente **I**, la normal **N** y el rayo reflejado **R** son coplanares”

**2º Ley:** “El ángulo de incidencia **i** es igual al ángulo de reflexión **r**”

$$i = r$$

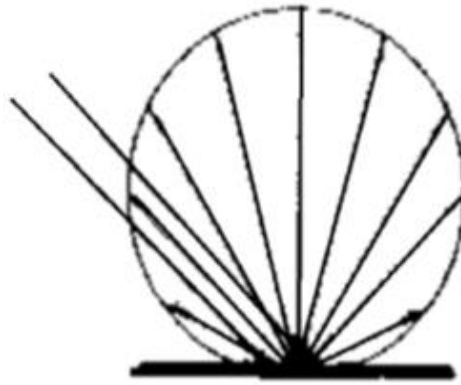


**Figura 3**

La reflexión indicada en la figura 3 vamos a llamarla reflexión especular. Hay superficies que reflejan de manera totalmente difusa (las superficies opacas y esmeriladas) y otras que si bien tienen brillo son bastantes difusas también (ver figura).

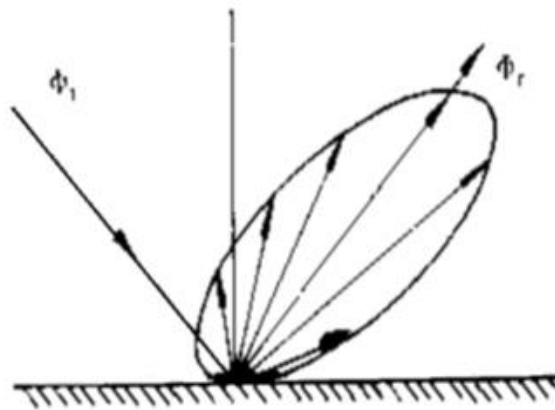
Si la superficie en la que incide la luz es rugosa, las normales a la misma en cada punto variarán aleatoriamente de dirección, por lo tanto la luz se refleja en distintas direcciones (luz difusa, difusor perfecto). Si las normales varían en cada punto, pero hay una dirección privilegiada de normal, la luz parcialmente difusa pero la resultando lo que se denomina luz difusa o parcialmente difusa.

<sup>1</sup> También llamado densidad óptica, aunque no tiene relación con la densidad de masa de la sustancia.



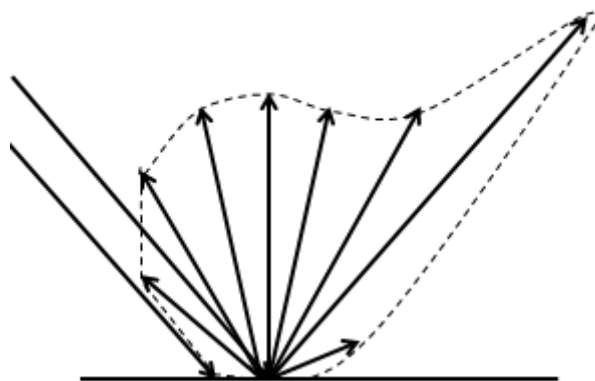
**Figura 4.** Reflexión de un difusor perfecto (mate)

4



**Figura 5.** Reflexión de un cuerpo medianamente difusor (semi mate)

Reflexión de un difusor semi mate con brillo



**Figura 6.** Reflexión de un difusor semi mate con brillo

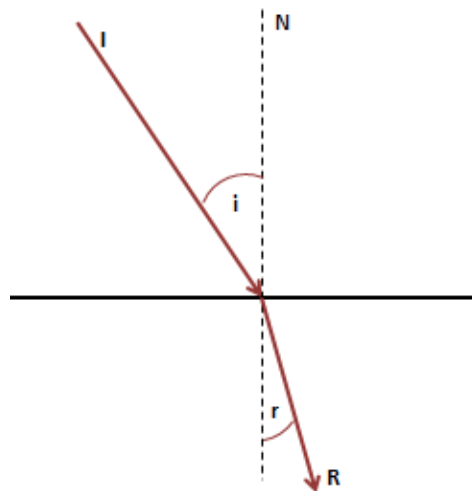


### 3º Leyes de la refracción de la luz.

Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad se refracta de modo que:

**1º Ley:** “El rayo incidente **I**, la normal **N** y el rayo refractado **R** son coplanares”

**2º Ley:**” El seno del ángulo de incidencia **i** y el seno del ángulo de refracción **r** tienen, para cada color de la luz incidente, una relación constante y positiva que se denomina índice de refracción relativo del medio al cual penetra el rayo respecto del medio del cual proviene”



**Figura 7**

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ley de Snell

El índice de refracción de un medio respecto al vacío (índice de refracción absoluto) es adimensional  $n = \frac{c}{v}$  donde  $c$  es la velocidad de propagación de la luz en el vacío y  $v$  la velocidad de propagación de la luz en un medio. Luego el índice de refracción del vacío vale 1 y como la velocidad de propagación de la luz en medios transparentes es inferior a la velocidad de propagación en el vacío, los índices de refracción resultan siempre mayores a 1. Si el medio en el que se propaga es homogéneo e isótropo el índice de refracción es constante, pero, depende de la frecuencia o longitud de onda en medios dispersivos.

Algunos valores de índices de refracción en medios isótropos y homogéneos:

$$n_{\text{aire}} = 1,0029 \approx 1; \quad n_{\text{agua}} = 1,33; \quad 1,4 \leq n_{\text{vidrio}} \leq 1,8$$

De la definición de índice de refracción absoluto surge una nueva expresión que se desprende de ella  $n_1 \cdot v_1 = n_2 \cdot v_2 = c$  y como la frecuencia de la onda en el primer medio es la misma que en el segundo medio y  $\lambda = c/f$  podemos escribir la Ley de Snell generalizada<sup>2</sup>:

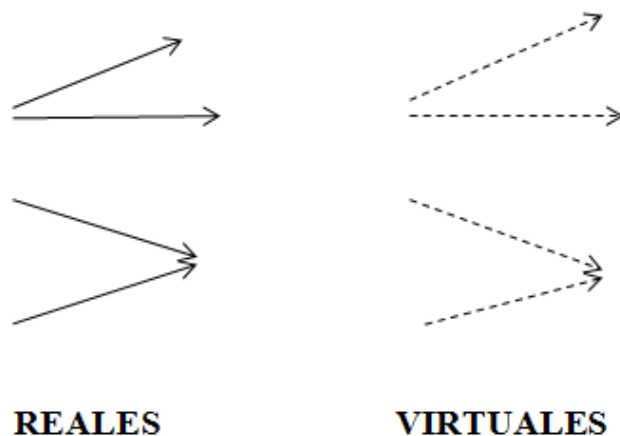
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

### 3\_ ALGUNAS DEFINICIONES

**OBJETO:** es un punto que es el centro del haz de rayos incidente en un elemento óptico (espejos, dioptras, lentes, etc.) en estudio.

**IMAGEN** (de un punto objeto): es el centro del haz de rayos que sale del elemento óptico en estudio (también se llama conjugado del punto objeto).

Si por el centro del haz pasan realmente los rayos, entonces el objeto o la imagen se llaman “reales”. En cambio si lo que pasan son las prolongaciones de los rayos, que indican la dirección del haz, la imagen o el objeto se llaman virtuales.



**Figura 8**

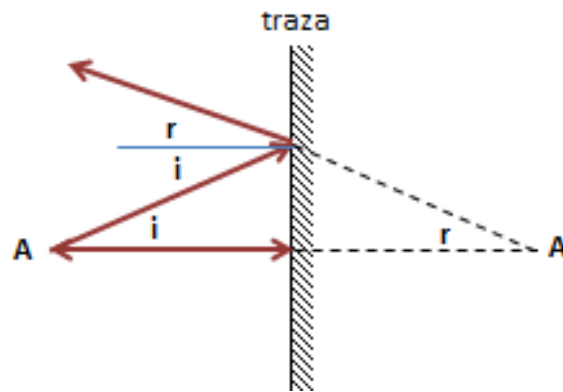
### 4\_ FENÓMENO DE REFLEXIÓN: ESPEJOS

<sup>2</sup> Impondremos condiciones a las superficies de discontinuidad de modo que las imágenes no se deformen y que entre el objeto y su imagen haya una relación biunívoca (a cada punto objeto le corresponde uno y sólo una imagen). De esta manera la imagen será nítida.

Las superficies en las cuales la luz incidente se refleja más que lo que se refracta las llamaremos espejos.

## 5\_ ESPEJOS PLANOS: FORMACIÓN DE IMÁGENES

Llamaremos traza del espejo a la intersección del espejo con la superficie de la hoja.



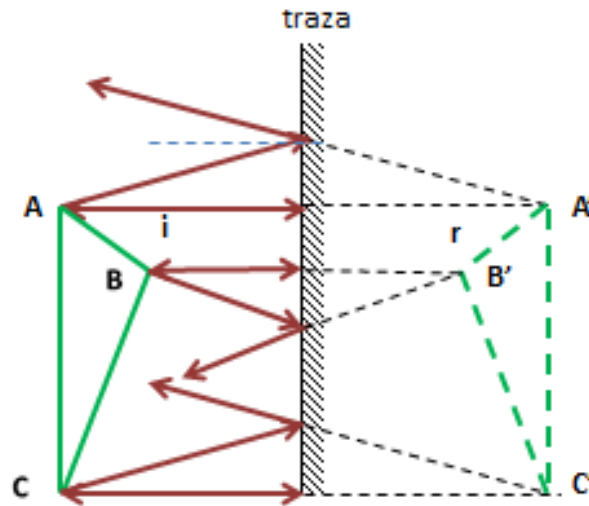
**Figura 9**

A es el centro del haz incidente, por lo tanto es el objeto. Como A emite radiación es un objeto real.

A' es el conjugado de A. Es el punto, centro del haz que sale del espejo. Decimos que A' es la imagen de A. Pero como por A' no pasan los rayos sino sus prolongaciones, entonces es una imagen virtual. Nótese que un espejo plano proporciona para todo objeto real una imagen que es siempre virtual, porque el haz reflejado en el espejo plano es divergente.

De acuerdo a la geometría de la figura podemos afirmar que la imagen es simétrica respecto del objeto para un espejo plano. Si hayamos la imagen de una figura geométrica, formada por infinitos puntos, encontramos las imágenes de los vértices.

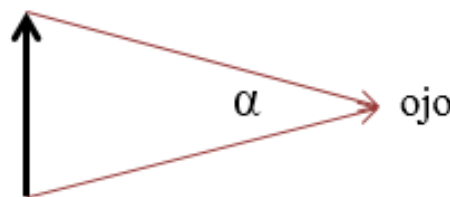


**Figura 10**

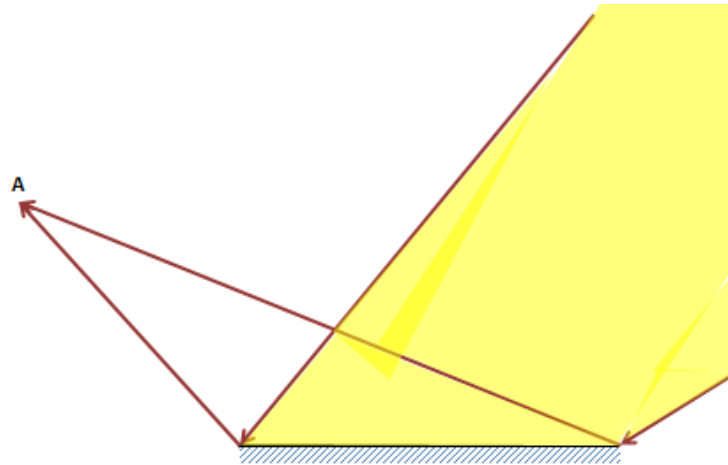
Vemos que geoméricamente es una simetría axial. El tamaño de la imagen es igual al del objeto. Lo que está arriba se mantiene arriba y lo de abajo se mantiene abajo. Los puntos más cercanos al espejo, como el punto B, tendrán un punto imagen más cercano al espejo B'.

## 6\_ CAMPO DEL ESPEJO

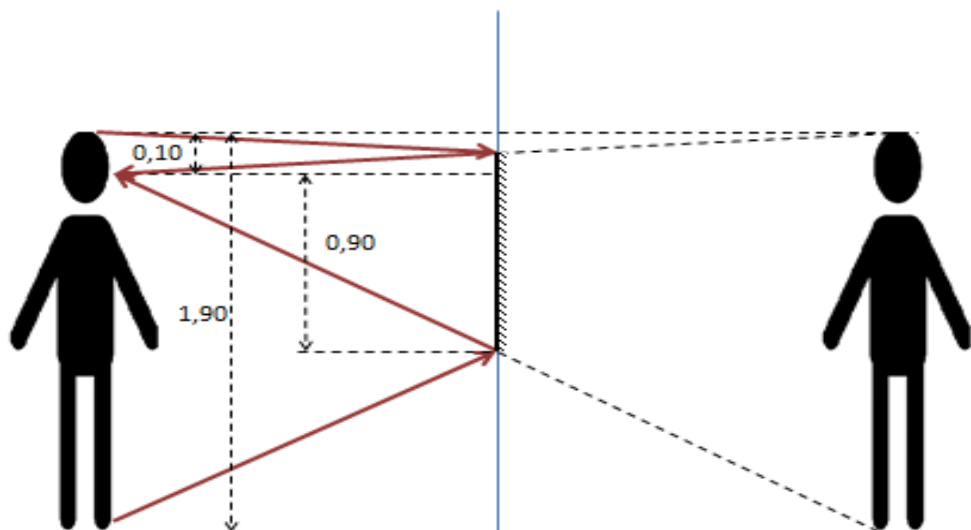
El **ángulo visual** está formado por los rayos luminosos que partiendo de los puntos extremos del objeto iluminado llegan al ojo. A medida que aumenta la distancia de nuestros ojos al objeto disminuye el ángulo visual.

**Figura 11**

Denominamos **campo del espejo respecto a un punto** a la zona del espacio frente al espejo que puede verse por reflexión desde ese punto. El campo varía para cada punto. Está limitado por el ángulo visual de la traza del espejo desde ese punto del espacio. En la figura se ha representado el campo del espejo visto desde el punto A (ver figura).

**Figura 12**

Como aplicación del campo de un espejo podemos encontrar ¿en qué posición tendremos que colgar un espejo plano y qué altura mínima debe tener para poder observar la totalidad de la imagen de un hombre de 1,80 metros de altura? (considerar que el hombre tiene los ojos a 10 cm de su cabeza) (ver dibujo). Respuesta: el espejo debe tener 0,90 m de altura y colgarse a 0,85 m del piso.

**Figura 13**

## 7\_ REFLEXIÓN EN ESPEJOS ESFÉRICOS

Convenciones que utilizaremos para que las imágenes no tengan deformaciones, es que haya una relación de biunicidad (a un punto imagen le corresponde uno y sólo un punto objeto y viceversa).

**Aproximación paraxial:** todo ángulo  $\hat{\theta}$  involucrado en la descripción de la formación de imágenes debe cumplir que  $\text{tg } \hat{\theta} \approx \text{sen } \hat{\theta} \approx \hat{\theta}$ .



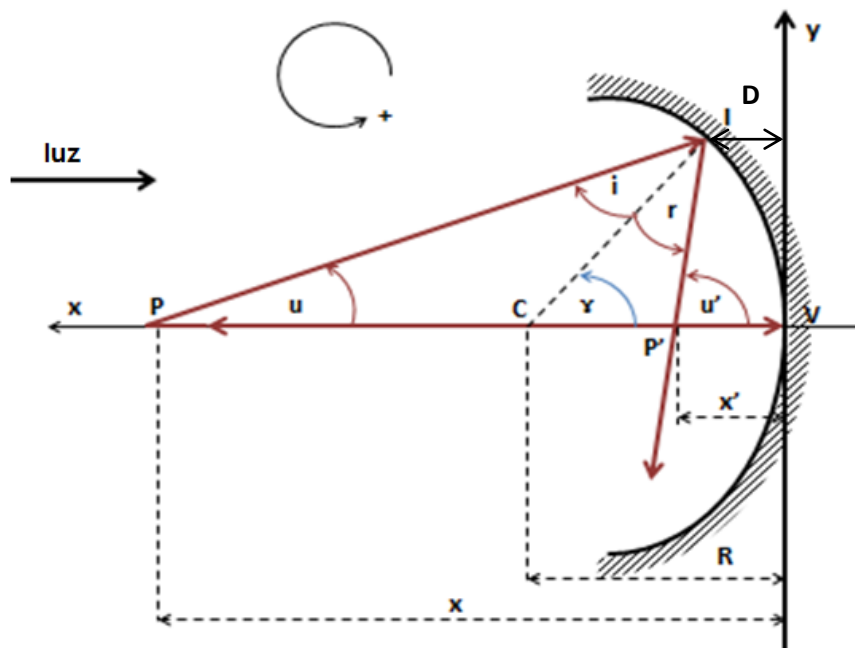
El espejo esférico será entonces un casquete de dimensiones muy pequeñas con respecto a la totalidad de la esfera de la que forma parte. Sus dimensiones serán mucho más pequeñas que su radio de curvatura. Su concavidad o convexidad casi no se verán en la realidad. Sin embargo, en los gráficos lo haremos más evidente para poder distinguir un espejo cóncavo de uno convexo.

**Convención utilizada: eje  $x$  positivo en el sentido contrario a la luz incidente**

## 8\_ FÓRMULA DE LOS ESPEJOS ESFÉRICOS

Dado un espejo cóncavo denominaremos eje principal a la recta que contiene el centro de curvatura  $C$  y al vértice  $V$  del mismo. Para encontrar la imagen de un punto  $P$  ubicado en el eje principal vamos a utilizar el punto  $V$  como centro de referencia y un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $xy$ , de modo que  $x$  tiene sentido contrario al de la luz incidente (convención) y el eje  $y$  es tangente a la esfera en el vértice. Para encontrar la imagen usaremos dos rayos que cumplan con las leyes de la reflexión especular. Uno en la dirección del eje  $x$  y otro de una dirección cualquiera. ¿Es suficiente con dos? ¿Por qué?

El rayo que incide en el espejo en dirección del eje principal se refleja sobre sí mismo ya que incide formando un ángulo de  $0^\circ$ . El segundo lo hace de modo que el ángulo  $i$  sea igual al ángulo  $r$ . El punto  $P'$  es la imagen de  $P$  y su posición es  $x'$  (notemos que todo objeto que se encuentre sobre el eje principal del espejo tendrá su imagen sobre el mismo eje).



### Figura 14

En el triángulo PIC

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{i}) = \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}$$

En el triángulo CIP'

$$\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} = \mathbf{u}' \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{u}' - \boldsymbol{\gamma}$$

Por la ley de la reflexión en el punto I)

$$-\mathbf{i} = \mathbf{r}$$

$$-(\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{u}' - \boldsymbol{\gamma})$$

Luego

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = 2\boldsymbol{\gamma} \quad (1)$$

De la figura, considerando que la distancia D es despreciable

$$u \cong \operatorname{tg} u = \frac{y_I}{x}$$

$$u' \cong \operatorname{tg} u' = \frac{y_I}{x'}$$

$$\gamma \cong \operatorname{tg} \gamma = \frac{y_I}{R}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{y_I}{x} + \frac{y_I}{x'} = 2 \frac{y_I}{R}$$

y simplificando

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}$$

### Fórmula de Descartes para espejos esféricos

**x:** es la posición (abscisa) del objeto sobre el eje principal

**x':** es la posición de la imagen sobre el eje principal.

**R:** es la posición del centro de curvatura **C**



## 9\_ FOCOS

Llamamos **F** foco principal objeto al punto del eje principal que tiene su imagen en el infinito. Distancia focal objeto **f** es la posición (abscisa) del foco principal objeto respecto al vértice del espejo.

Llamamos **F'** foco principal imagen al punto del eje principal imagen de un objeto en el infinito. Distancia focal imagen **f'** es la posición (abscisa) del foco principal imagen respecto al vértice del espejo.

Distancia focal objeto

$$x' \rightarrow \infty \Rightarrow x' = f' \Rightarrow f' = \frac{R}{2}$$

Distancia focal imagen

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow x = f' \Rightarrow f = \frac{R}{2}$$

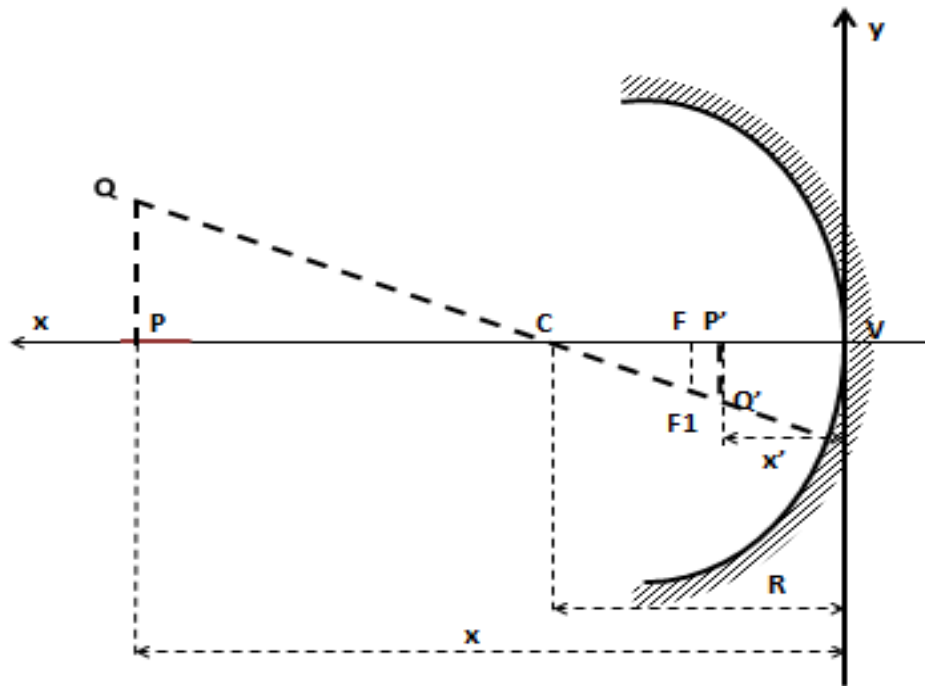
**Vemos que ambos focos coinciden en un punto cuya posición (distancia focal) está a R/2 del vértice.**

### Observaciones:

La fórmula de los espejos esféricos es independiente de la coordenada **y**. Esto significa que dentro de la aproximación paraxial los ejes que pasan por el centro de curvatura **C** como el **QQ'** son equivalentes al **PP'** y un punto de ese eje cuya abscisa sea **x**, como el **Q**, tendrá su imagen sobre el mismo eje en la abscisa **x'** como el **O'**.

Dicho de otra manera, la posición **x** está asociada a todos los puntos del segmento **PQ** (objeto) y la posición **x'** está asociada a todos los puntos del segmento **P'Q'** (imagen). (Ver figura 15)

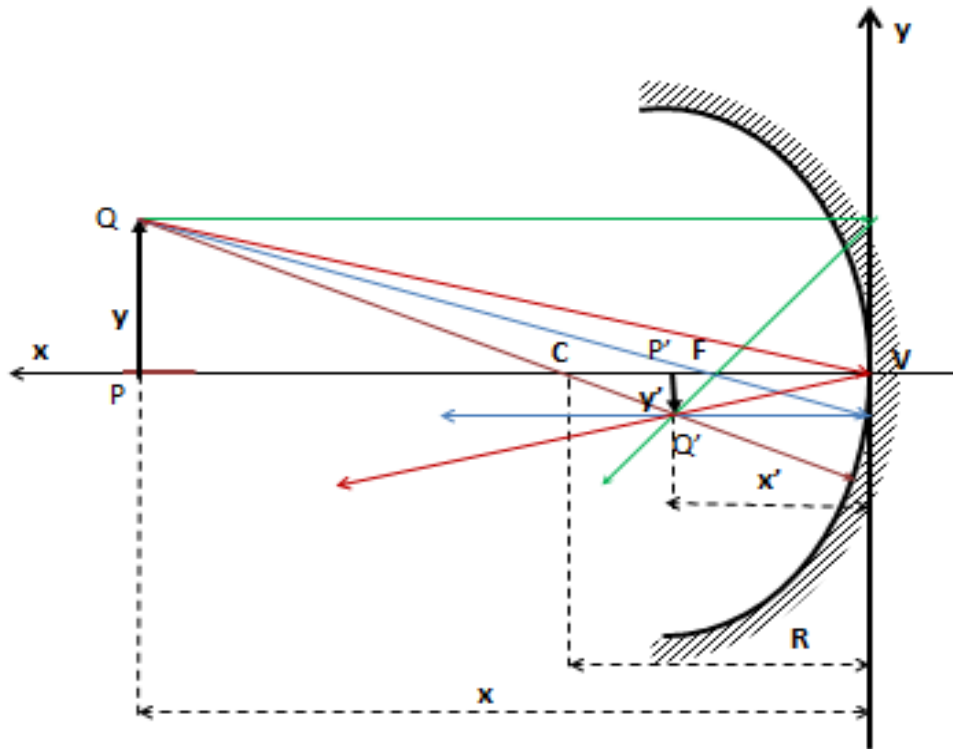



**Figura 15**

Del mismo modo en cada eje equivalente habrá un punto ubicado en la mitad del centro de curvatura como el **F1** que también será un foco. Como no está en el eje principal (no pasa por el vértice) lo llamamos **foco secundario**. Los infinitos focos secundarios objeto e imagen están ubicados en **los planos focales objeto e imagen** que en este caso coinciden.

Por estas razones utilizaremos como objetos flechas verticales con un extremo en el eje principal de modo de tener que encontrar sólo la imagen de un punto extremo del objeto.

Para encontrar la imagen de un objeto podremos usar al menos dos de los tres rayos principales (siempre paraxiales). El rayo proveniente del infinito (paralelo al eje principal) cuyo rayo reflejado (imagen) debe pasar por el foco principal, el rayo que pasa por el centro de curvatura que se refleja sobre sí mismo y el tercero por reversibilidad del camino óptico es el que incide por el foco que se refleja paralelo al eje principal.

**Figura 16**

También podemos usar el rayo que pasa por el punto Q y por el vértice. Cumpliendo con la ley de la reflexión, con el eje x como normal a la superficie en ese punto, debe reflejarse pasando por la imagen Q'.

## 10\_ AGRANDAMIENTO LATERAL

Se denomina aumento lateral o agrandamiento lateral a la razón del tamaño de la imagen ( $y'$ ) respecto del tamaño del objeto ( $y$ ). Esta razón se calcula con el valor y signo de las ordenadas, y permite conocer si la imagen es mayor, igual o menor y al mismo tiempo si es derecha o invertida respecto del objeto.

$$A = \frac{y'}{y}$$

Como nos interesa conocer estos datos para diferentes objetos, vamos a encontrar una expresión independiente de las ordenadas.

Si en la figura anterior comparamos los triángulos PQV y P'Q'V vemos que son rectángulos con un ángulo agudo iguales ya que  $i = r$  por la ley de la reflexión. Por estas razones son semejantes por lo tanto sus lados homólogos son proporcionales.

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-x'}{x}$$

El signo resulta de tomar las coordenadas con signo.

Resumiendo, las fórmulas para espejos son:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

$$f = f' = R/2$$

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-x'}{x}$$

Observemos que estas fórmulas son aplicables a espejos planos imponiendo como condición que  $R$  tienda a infinito, con lo que resulta:

$$x' = -x$$

$$A = 1$$

## 11\_FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS

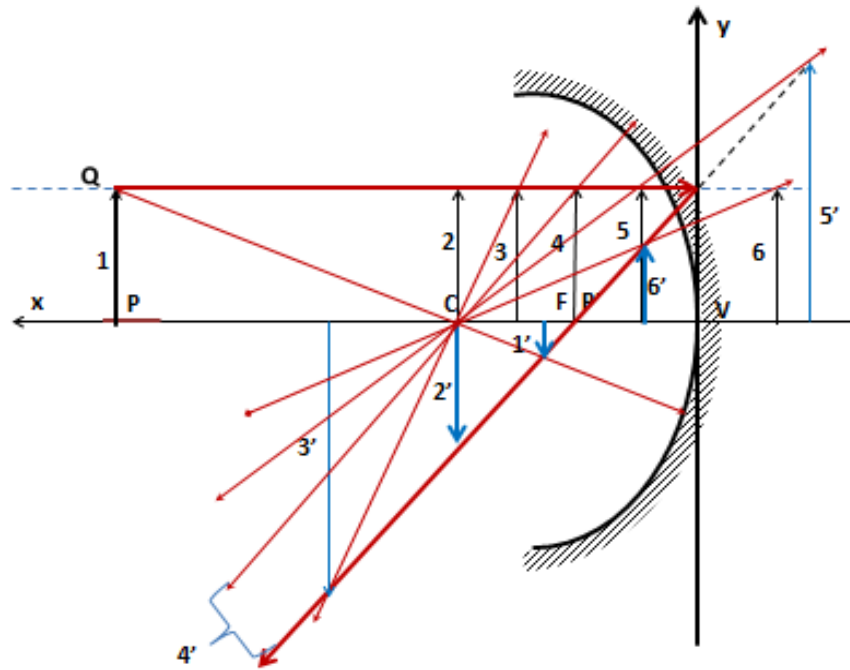
### 1.- Espejos cóncavos

Usaremos como objetos flechas perpendiculares al eje principal y con origen en el mismo ubicados de modo que  $x_1 > x_C$  ;  $x_2 = x_C$  ;  $x_C > x_3 > f$  ;  $x_4 = f$  ;  $f > x_5 > 0$  y  $x_6 < 0$  (objeto virtual). Para resumir todo en una sola figura tomamos sólo dos rayos para encontrar las imágenes. El paralelo al eje principal que se refleja pasando por el foco y el que pasa por el centro de curvatura que se refleja sobre sí mismo.

Observemos que la imagen del objeto colocado en el foco (4) está en el infinito. Además, la imagen del objeto virtual (6) es real.



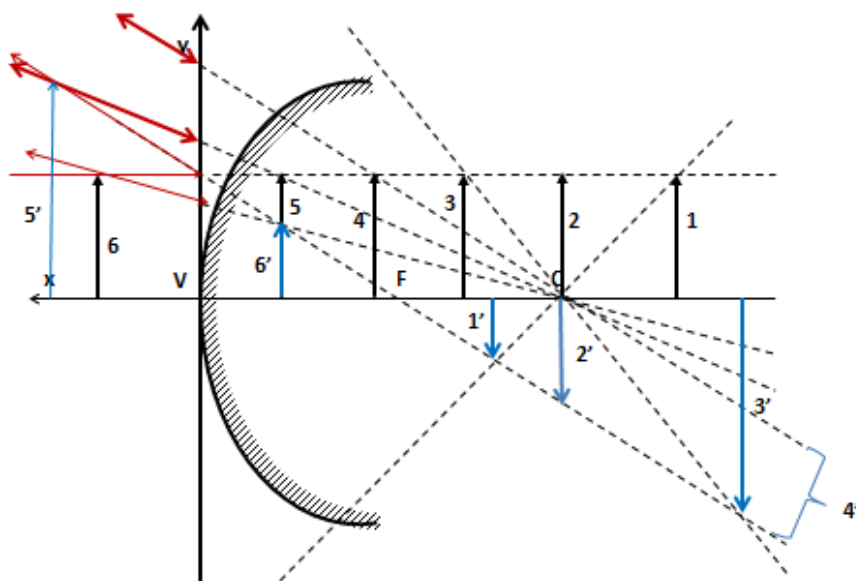


**Figura 17**

## 2.- Espejos convexos

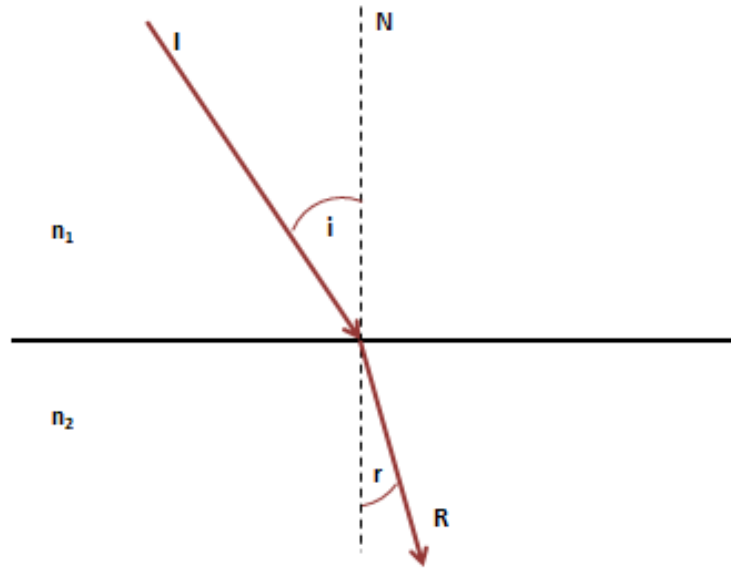
En este caso el radio de curvatura y la distancia focal son negativos porque el foco F y el centro de curvatura C son virtuales (están detrás del espejo).

Tendremos nuevamente 6 casos, pero, sólo un caso de objeto real ( $x > 0$ ) y 5 casos de objeto virtual. Utilizaremos el mismo par de rayos utilizados en el espejo cóncavo, de modo de poder dibujar todos los casos en un solo gráfico.

**Figura 18**

**Conclusión:** la imagen en un espejo cóncavo es generalmente real y en un convexo es generalmente virtual. La excepción se produce cuando el objeto está entre el foco y el espejo. El cóncavo es más usado en el caso de excepción como espejo de tocador (imagen virtual, derecha y mayor). El espejo convexo se usa como retrovisor de los autos o en las salidas de los estacionamientos para tener un mayor campo visual de los objetos reales (imagen virtual, derecha y menor).

## 12\_ REFLEXIÓN TOTAL ÁNGULO LÍMITE

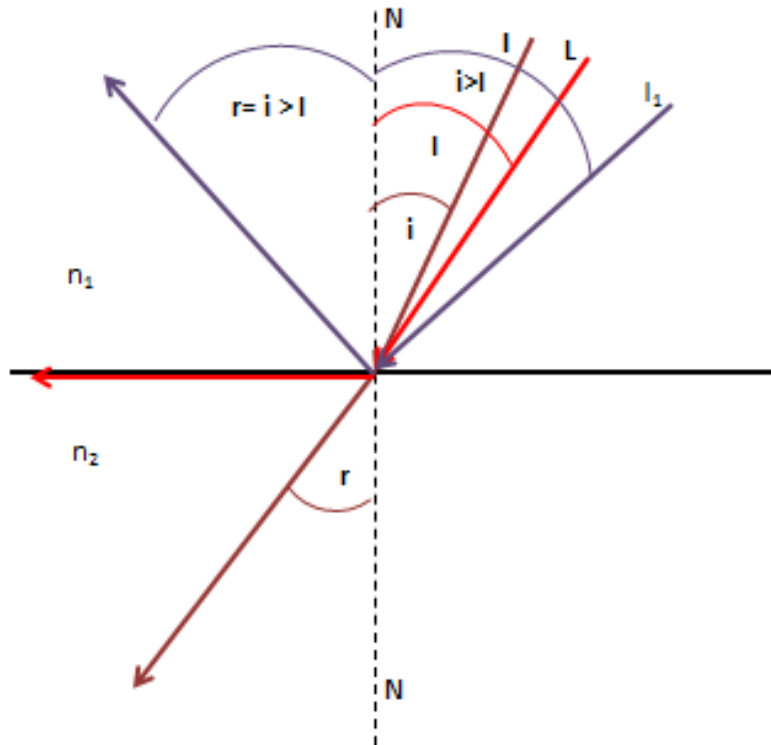


**Figura 19**

Si un rayo pasa de un medio de índice de refracción  $n_1$  a otro de índice de refracción  $n_2$  se cumple la Ley de Snell  $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ . Pueden suceder dos casos 1°  $n_2 > n_1$ , por lo que será  $i > r$ . En este caso el rayo refractado se acerca a la normal (siempre habrá refracción).

El 2° caso se produce cuando  $n_2 < n_1$ , por lo que será  $i < r$ . En este caso el rayo refractado se aleja de la normal. A medida que el ángulo de incidencia aumenta, también aumentará el de refracción. Cuando el ángulo de refracción alcanza los  $90^\circ$ , al ángulo de incidencia se lo denomina ángulo límite. Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite se produce reflexión total (no hay refracción).

Nótese que si  $n_2 > n_1$  el ángulo límite no existe (ver figura 20).

**Figura 20**

Este fenómeno de reflexión total es muy utilizado para lograr efectos de iluminación artística de fuentes de agua.

### Ejemplo

Averiguar el diámetro que debe tener una fuente de agua de 1 metro de profundidad para iluminar todo el semiespacio exterior.

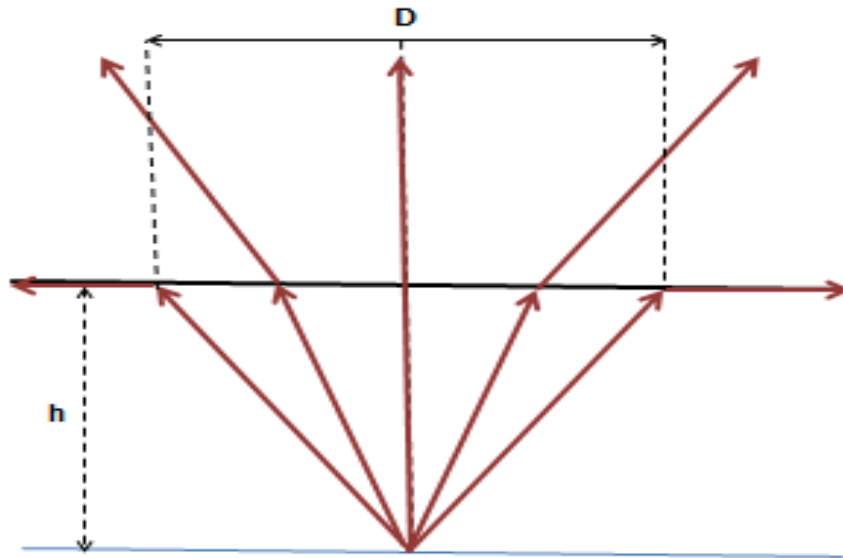
De acuerdo a lo expuesto, la fuente de luz debe colocarse dentro del agua de la fuente de manera que  $n_1$  sea el agua ( $n_1 = 1,33$ ) y  $n_2$  el aire ( $n_2 \approx 1$ ). (Ver figura 21)

De todo lo expuesto:

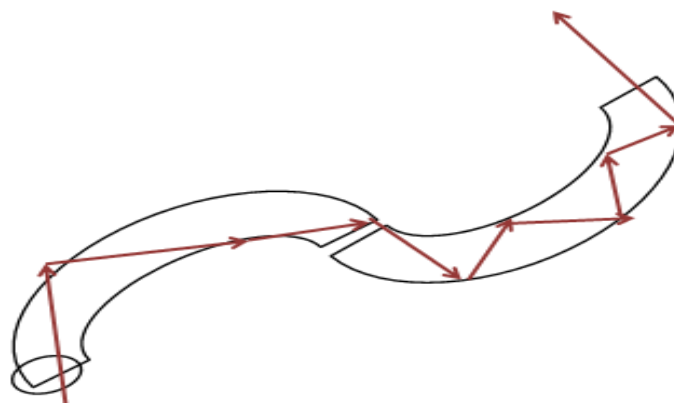
$$\sin l = 1/1,33 \quad \text{y} \quad l = 48^\circ 40'$$

El diámetro de la fuente será  $D = 2.h.\text{tg } 48^\circ 40'$

$$D = 2,30 \text{ m}$$

**Figura 21**

Otra aplicación importante de la reflexión total la constituyen las fibras ópticas. Una fibra óptica es un material transparente flexible y de pequeño diámetro en el que los rayos luminosos cercanos todos al eje de la fibra (paraxiales) se reflejan totalmente en sus paredes de forma tal que la luz realiza casi el mismo camino que el de la fibra (ver dibujo)

**Figura 22**

### 13\_ FENÓMENO DE REFRACCIÓN: DIOPTRAS ESFÉRICAS

Denominamos dioptra<sup>3</sup> a la superficie de separación de dos medios infinitos de distinta densidad óptica que distinguiremos por sus índices de refracción como  $n_1$  y  $n_2$ . En este

<sup>3</sup> Según el diccionario de la RAE la palabra DIÓPTRICA es la rama de la óptica que trata los fenómenos de refracción de la luz y que el término dioptra corresponde a un instrumento para hacer mediciones a distancia. Sin embargo esta denominación que usaremos aquí es muy común en la bibliografía. En otros textos aparece con el nombre de dioptrio, pero esta palabra no existe en el diccionario de la RAE.

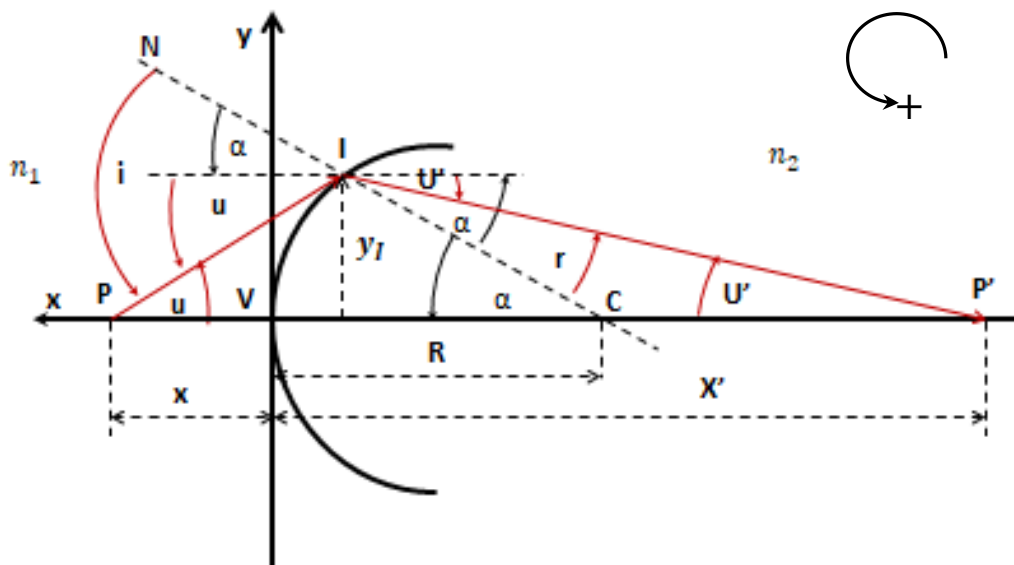
fenómeno la luz proviene del primer medio y penetra en el segundo medio. Llamaremos  $R$  al radio de curvatura de la dioptra y  $C$  al centro de curvatura de la misma.

Usaremos un sistema coordenado cartesiano con el eje de las abscisas positivo contrario a la luz incidente como en espejos, pero ahora las imágenes reales se producen en el segundo medio ( $x'$  **negativo**).

#### 14\_ FORMULA DE DESCARTES PARA LAS DIOPTRAS ESFERICAS

Para deducir la fórmula de Descartes haremos nuevamente como en espejos la aproximación paraxial. Se debe de cumplir para todo ángulo de los rayos de luz que  $\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta$ . De este modo aseguramos que la imagen no tenga deformación y que para cada punto objeto exista uno y sólo un punto imagen.

20



**Figura 23**

La Ley de Snell en el punto de incidencia **I** es:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$n_1 \sin (\alpha + u) = n_2 \sin (\alpha - (-u'))$$

Usando la aproximación paraxial

$$n_1 u - n_2 u' = (n_2 - n_1) \alpha \quad (1)$$

Esta es una expresión en términos de ángulos. Usando la aproximación paraxial podemos ponerla en función de nuestro sistema de coordenadas.

$$u \cong \operatorname{tg} u = \frac{y_I}{x}$$

$$u' \cong \operatorname{tg} u' = -\frac{y_I}{x'}$$

$$\alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_I}{R} \quad (2)$$

Nota: Obsérvese que si  $R \gg$  que la abertura de la dioptra, la  $x_I$  es despreciable y los signos se refieren al sentido positivo del ángulo o al sentido negativo del eje de abscisas.

Reemplazando (2) en (1):

$$n_1 \frac{y_I}{x} - n_2 \left( -\frac{y_I}{x'} \right) = (n_2 - n_1) \frac{y_I}{R}$$

o sea

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

### Fórmula de Descartes para las Dioptras esféricas

Foco principal imagen de la Dioptra

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow x = f'$$

y

$$x' \rightarrow \infty \Rightarrow x = f$$

Luego:

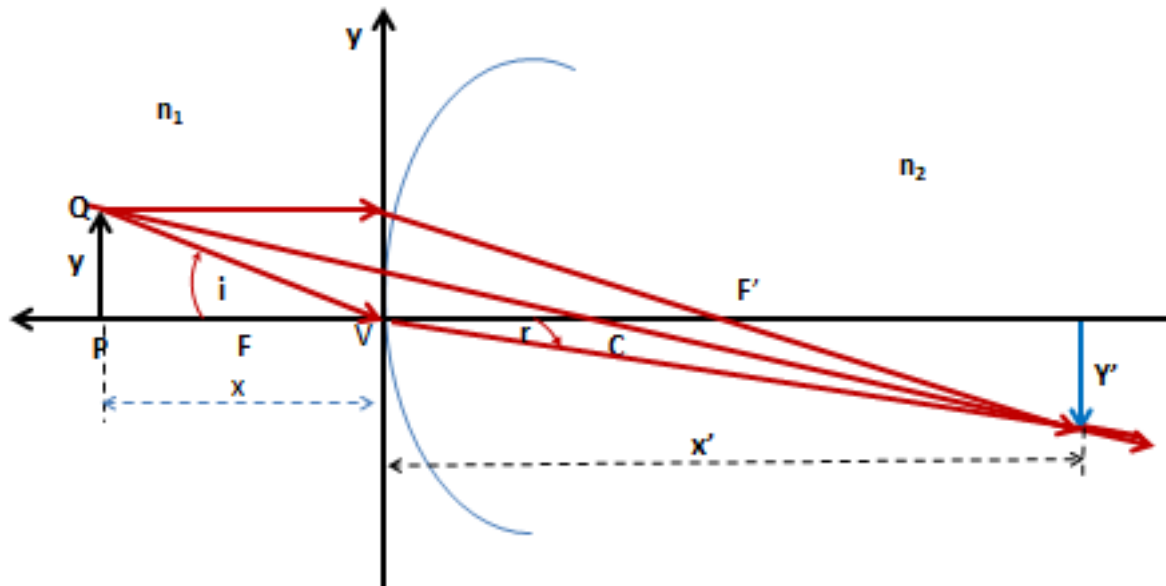
$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 R}$$

A diferencia de los espejos vemos que no solamente los focos no coinciden. Sus posiciones son diferentes y se hallan a un lado y al otro del eje de ordenadas. Además, cumplen con la condición que:

$$f + f' = R$$



**Figura 24**

En la figura 24 se muestra el trazado de rayos para un caso particular. El rayo sale de la punta del objeto que incide paralelo al eje principal, se refracta pasando por el foco imagen. El rayo que pasa por el centro de curvatura sin desviarse. En el lugar en el que se cortan los 3 rayos se forma el extremo de la imagen.

### 15\_ AUMENTO O AGRANDAMIENTO LATERAL

Como vimos la definición general es:

$$A = \frac{y'}{y}$$

Tomando un objeto de altura  $y$  encontramos su imagen de altura  $y'$  con la intersección de dos rayos: uno paralelo al eje principal que pasa por el foco principal imagen y otro que pasa por el centro de curvatura.

Una vez hallada la imagen, todo rayo paraxial que sale de  $Q$  debe pasar por su imagen. De todos ellos elegimos el que pasa por el vértice. Este determina los ángulos  $i$  y  $r$ .

Aplicando la ley de la refracción:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

Utilizando la aproximación paraxial

$$n_1 \operatorname{tg} i = n_2 \operatorname{tg} r$$

$$n_1 \frac{y}{x} = n_2 \frac{-y'}{-x'}$$

(los signos negativos se refieren a las coordenadas negativas)

Despejando:

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 x'}{n_2 x} \quad \textbf{Aumento lateral para dioptras esféricas}$$

Recordemos que las fórmulas desarrolladas de Descartes para dioptras esféricas se aplican en el caso de aproximación paraxial para dos medios infinitos separados por una dioptra esférica. Como un plano es una esfera de radio infinito, las expresiones halladas se pueden aplicar a dioptras planas.

23

**Resumiendo:**

**Dioptras esféricas**

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 x'}{n_2 x}$$

**Dioptras planas**

$$\frac{n_2}{x'} = \frac{n_1}{x}$$

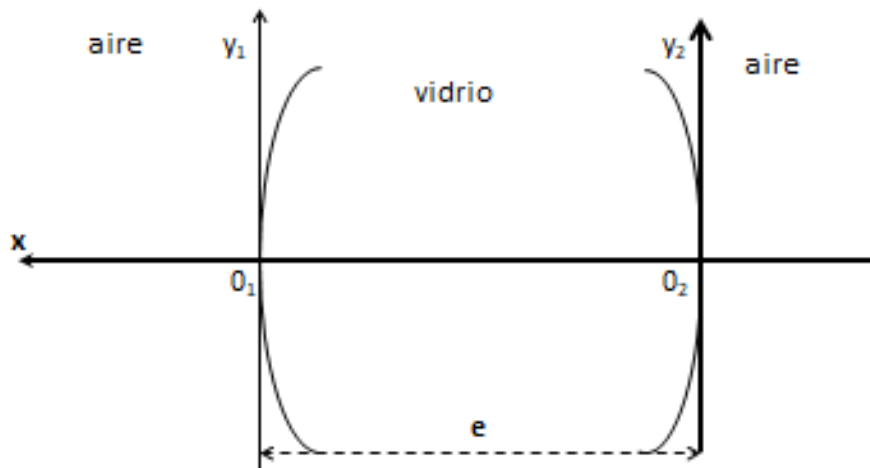
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 x'}{n_2 x}$$

## 16\_ LENTES GRUESAS

Una lente gruesa es un medio transparente limitado por dos dioptras esféricas o planas centradas (con ejes principales coincidentes – ver figura).





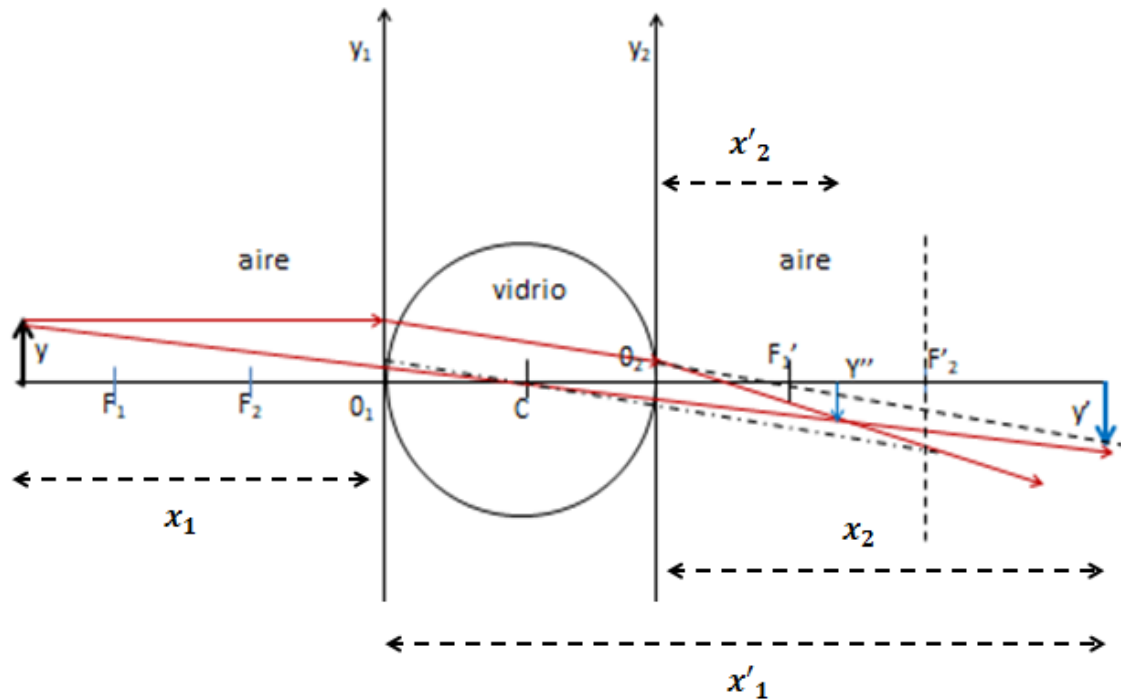
**Figura 25**

Tomamos un ejemplo de una lente de vidrio sumergida en aire<sup>4</sup>. La distancia entre los vértices de las dioptras que la delimitan se denomina espesor y es una distancia medida desde el exterior. Se ha indicado en la figura anterior los dos sistemas coordenados que debemos usar teniendo en cuenta que en el segundo caso debemos hacer una traslación del sistema de coordenadas para poder encontrar la segunda refracción de la luz. La imagen obtenida por la primera dioptra será el objeto luminoso para la segunda dioptra. De esta manera para encontrar analíticamente la imagen final de la lente, se tiene que encontrar la imagen final de la primera dioptra y ubicar su posición medida desde la segunda dioptra, como posición objeto. Con este objeto la imagen de la segunda dioptra será la imagen final de la lente.

## 17\_ PROBLEMA PROPUESTO

Encontrar la imagen final de un objeto de 1 cm de altura ubicado a 40 cm a la izquierda de una esfera de vidrio de índice de refracción 1,5 y 15 cm de radio.

<sup>4</sup> Podría estar sumergida en otro medio de índice  $n_{\text{medio}}$  e incluso podría tener un medio distinto a ambos lados de la lente.



25

Figura 26

Para encontrar la respuesta a este problema tendremos que calcular primero la imagen obtenida a través de la primera dioptra.

### 1° Dioptra:

$$n_1 = n_{medio} = 1$$

$$n_2 = n_v = 1,5$$

$$x = 40 \text{ cm}$$

$$R_1 = -15 \text{ cm}$$

$$x'_1 = ?$$

Aplicando la fórmula de las dioptras esféricas:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

1°)



$$\frac{n_v}{x'_1} - \frac{n_{medio}}{x} = \frac{(n_v - n_{medio})}{R_1}$$

Si aplicamos la fórmula para la segunda dioptra, la posición de la imagen respecto a mi segundo sistema de coordenadas es:

$$x_2 = x'_1 + e = x'_1 + 30 \text{ cm}$$

$$n_1 = n_v = 1,5$$

$$n_2 = n_{medio} = 1$$

$$R_2 = 15 \text{ cm}$$

$$x'_2 = ?$$

2°)

$$\frac{n_{medio}}{x'} - \frac{n_v}{x'_1 + e} = \frac{(n_{medio} - n_v)}{R_2}$$

Aplicando nuestros datos:

1°)

$$\frac{1,5}{x'_1} - \frac{1}{40} = \frac{(1,5 - 1)}{-15}$$

$$x'_1 = -180 \text{ cm}$$

$$x_2 = -150 \text{ cm}$$

Esta imagen, en este ejemplo, es real y está ubicada en la coordenada  $x'_1$  y su extremo tiene una coordenada vertical  $y'_1$ . Sin embargo el trazado de rayos, a partir de la segunda dioptra es punteado pues esta segunda dioptra vuelve a refractar los rayos y no dejará que se forme allí esta imagen real. Decimos entonces que es un objeto virtual para la segunda dioptra.

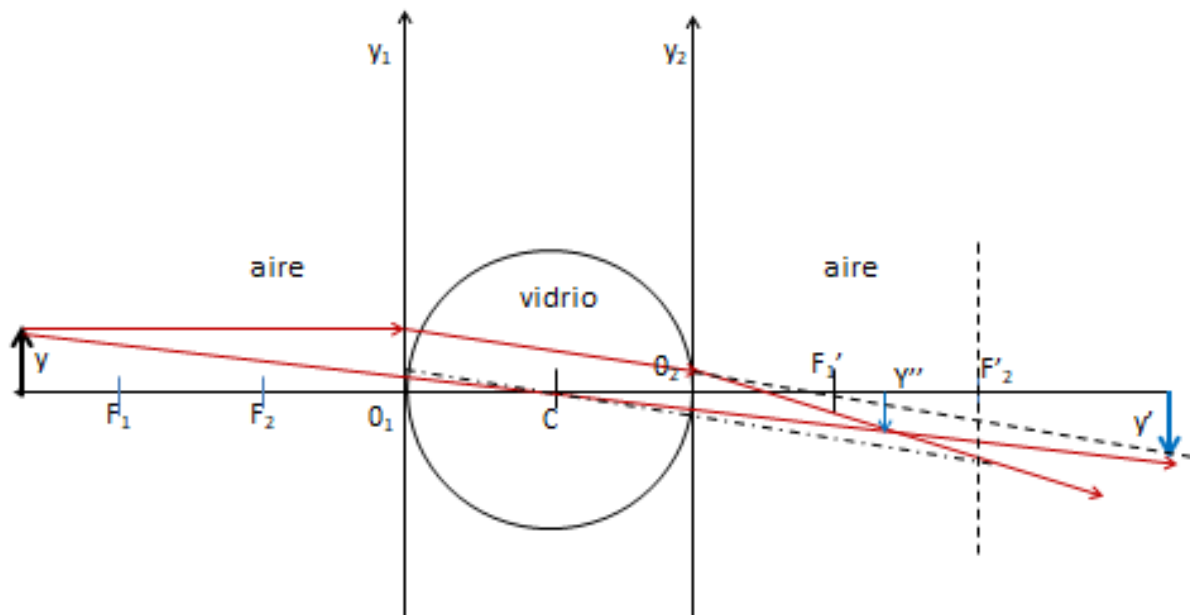
2°)

$$\frac{1}{x'} - \frac{1,5}{-150} = \frac{(1 - 1,5)}{15}$$



$$x' = -42,8 \text{ cm}$$

Esta es la posición de la imagen final respecto a la segunda dioptra.



**Figura 27**

Para completar el problema calculemos el aumento lateral de toda la lente gruesa

1°

$$A_1 = \frac{y'}{y}$$

2°

$$A_2 = \frac{y''}{y'}$$

$$A_T = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y}$$

$$A_T = A_1 \cdot A_2$$

$$A_1 = \frac{n_{medio} x'_1}{n_v x}$$

$$A_2 = \frac{n_v x'}{n_{medio} (x'_1 + e)}$$

$$A_T = \frac{x'_1}{x} \cdot \frac{x'}{(x'_1 + e)}$$

En este caso:

$$A_T = \frac{(-120)}{40} \cdot \frac{(-42,8)}{(-180 + 30)} = -0,86$$

$$A_T = -0,86$$

Para poder hacer la marcha de rayos necesitamos calcular los focos principales de las dos dioptras.

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 R}$$

Para la 1° Dioptra:

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1,5 - 1}{(-15)(1,5)}$$

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{1,5 - 1}{(-15)}$$

$$f_1 = 30 \text{ cm}$$

$$f'_1 = -45 \text{ cm}$$

Para la 2° Dioptra:

$$\frac{1}{f'_2} = \frac{1 - 1,5}{15}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1 - 1,5}{(1,5)(15)}$$

$$f_2 = 45 \text{ cm}$$

$$f'_2 = -30 \text{ cm}$$

## 18\_LENTES DELGADAS

Denominamos lente delgada a toda lente cuyo espesor es despreciable frente a las otras dimensiones de la lente. Por ejemplo una lente de un telescopio que tiene 20cm de espesor y más de 2 m de diámetro puede considerarse delgada.

Vamos cómo se modifican las ecuaciones utilizadas para la lente gruesa en este caso, en el que el exterior de la lente tiene el mismo medio de ambos lados de la lente. Copiemos las ecuaciones que encontramos para hallar la posición de la imagen de un objeto

1° Dioptra:

$$\frac{n_v}{x'_1} - \frac{n_{medio}}{x} = \frac{(n_v - n_{medio})}{R_1}$$

2° Dioptra:

$$\frac{n_{medio}}{x'} - \frac{n_v}{x'_1 + e} = \frac{(n_{medio} - n_v)}{R_2}$$

Si sumamos miembro a miembro teniendo en cuenta que  $e$  es despreciable

$$-\frac{n_{medio}}{x} + \frac{n_{medio}}{x'} = (n_v - n_{medio}) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ó

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \left( \frac{n_v}{n_{medio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

### Expresión de la Ley de Descartes para lentes delgadas<sup>5</sup>

Encontremos el agrandamiento lateral para la lente delgada. Para la lente gruesa multiplicando los agrandamientos para la primera y para la segunda dioptra:

<sup>5</sup> Que corresponde a la lente sumergida en un mismo medio



$$A_T = \frac{x'_1}{x} \frac{x'}{(x'_1 + e)}$$

Pero, como el espesor es despreciable

$$A_T = \frac{x'}{x}$$

## 19\_ECUACIÓN DEL CONSTRUCTOR DE LENTES

Usando la fórmula de Descartes para lentes delgadas y utilizando la definición de foco objeto como el lugar en el que se coloca un objeto  $x=f$ , tal que su imagen se forma en infinito ( $x'$  tiende a infinito), resulta

$$-\frac{1}{f} = \left( \frac{n_v}{n_{medio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

En forma similar obtenemos el foco imagen como la posición  $x'=f'$  en la que se forma la imagen de un objeto ubicado en infinito.

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_v}{n_{medio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = -\frac{1}{f'}$$

A esta ecuación se la denomina: **Ecuación del constructor de las lentes**

## 20\_RESUMEN

**Fórmula de Descartes para Lentes Delgadas:**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'}$$

**Fórmula del constructor de las lentes delgadas:**

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_v}{n_{medio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = -\frac{1}{f'}$$

Los focos principales equidistan de la lente y están a uno y otro lado de la misma.



## 21\_AUMENTO LATERAL EN LENTES DELGADAS

$$A_T = \frac{x'}{x}$$

Las lentes delgadas las podemos dividir en convergentes y divergentes. Un sistema óptico es convergente cuando sus focos son reales y es divergente cuando sus focos son virtuales. En nuestra convención de signos estas definiciones traen como consecuencia que para una **lente convergente** el foco objeto es positivo y el foco imagen es negativo. En cambio para una **lente divergente** el foco objeto es negativo y el imagen positivo, en esta misma convención (ver figura).

31



**Figura 28**

Si el medio exterior a la lente es aire o tiene un índice de refracción menor que el de la lente, las tres primeras son convergentes: biconvexa, plano convexa y menisco cóncavo –convexo (con los radios de curvatura indicados en la figura de la izquierda).

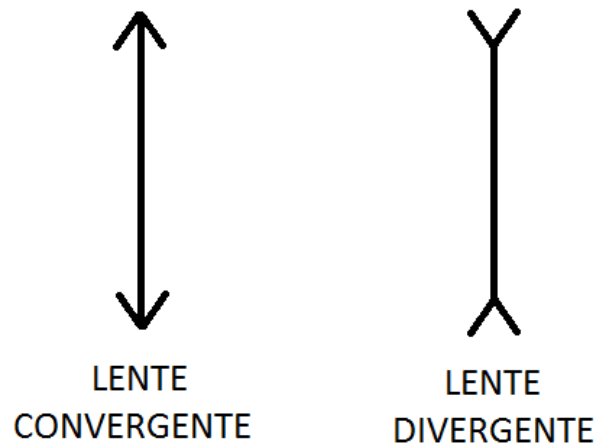
Las otras tres son divergentes: bicóncava, plano cóncavo y menisco cóncavo-convexo.

Si el medio exterior de la lente tiene un índice de refracción mayor al de la lente, entonces las geometrías indicadas en la izquierda de la figura 28 son lentes divergentes y las de la derecha convergentes. De todas maneras es común que si no se indica explícitamente espesor y/o índice de refracción del medio para una lente, asumimos que es delgada y está sumergida en aire.

Las lentes delgadas tienen espesor despreciable y por esta razón no conviene representarlas con la curvatura de sus dioptras. Las lentes convergentes, cualquiera sea su combinación de índices y radios se simbolizan con una flecha doble y las divergentes con extremos que se abren (fig. 29)



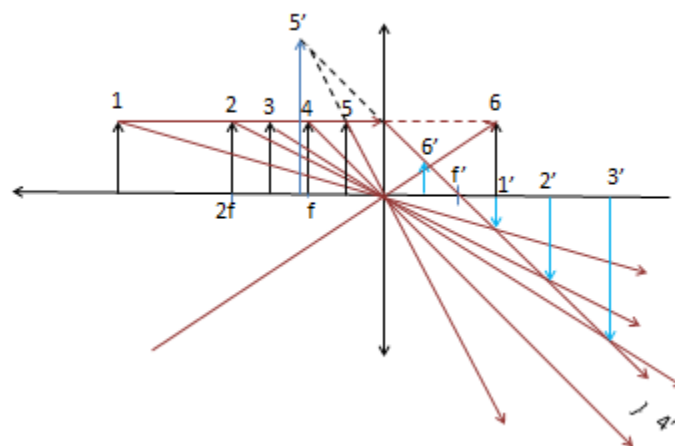


**Figura 29**

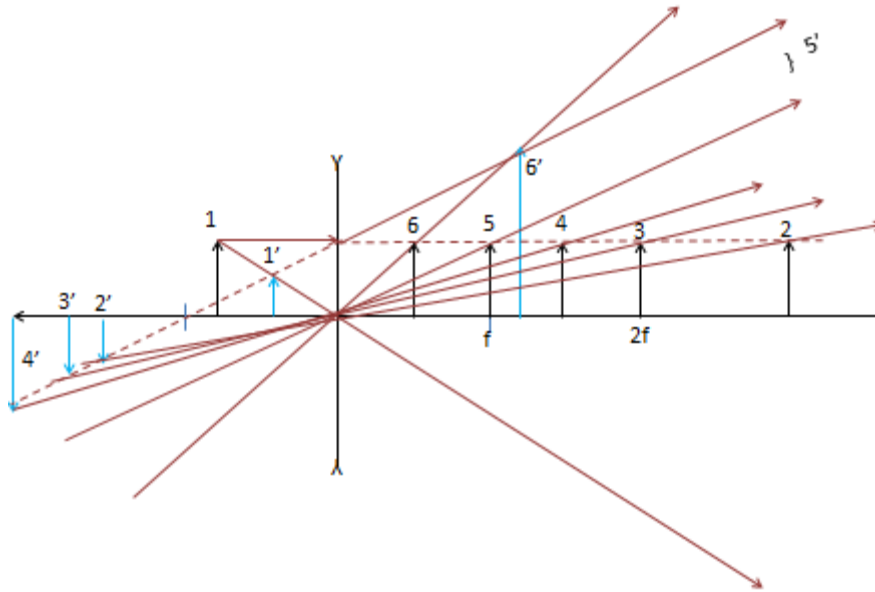
Nos falta indicar que el punto de intersección de la lente con el eje óptico, punto en el que coinciden también los vértices de las dioptras, se denomina centro óptico de la lente y tiene la característica que todos los rayos paraxiales que pasan por él no se desvían, si el medio exterior es el mismo de ambos lados de la lente. Es como si la lente no estuviera.

## 22\_FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES

### 1) Lentes Convergentes

**Figura 30**

## Lentes divergentes



**Figura 31**

## 23\_POTENCIA DE LAS LENTES DELGADAS

La potencia de una lente está asociada a su poder de desviación de los rayos luminosos. Se define en base a la distancia focal objeto.

$$P = \frac{1}{f}$$

se mide en dioptrías si la distancia focal se mide en metros.

La potencia tiene el signo de la distancia focal. Por ejemplo: una potencia de 2 dioptrías positivas corresponde a una lente convergente de 0,5 m de distancia focal y una potencia de  $-0.5$  dioptrías es una lente divergente de 2 metros de distancia focal. La potencia es el principal dato que receta el oftalmólogo para que el óptico técnico construya la lente.

## 24\_REVISANDO CONCEPTOS

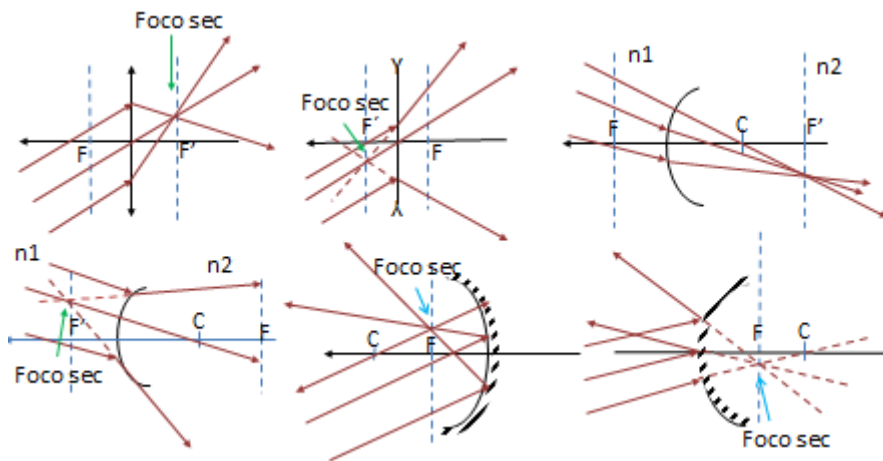
Todos los elementos ópticos utilizados (espejos, dioptras y lentes) tienen en la formación de imágenes de un tipo (real o virtual) y en todos los casos hay una excepción que siempre ocurre cuando el objeto se coloca entre el foco objeto y el elemento óptico.

Por ejemplo, la imagen de un espejo cóncavo es generalmente real, excepto cuando el objeto está entre el foco y el espejo. En este caso es virtual y derecha. En una lente

delgada divergente la imagen es generalmente virtual. Excepto cuando el objeto (virtual) está entre el foco objeto y la lente. En este caso la imagen es real

Todos los elementos ópticos desarrollados (espejos, dioptras y lentes) tienen una cantidad doblemente infinita de focos ubicados en dos planos focales perpendiculares al eje óptico y denominados plano focal objeto y plano focal imagen que en los espejos coinciden en una sola posición ubicada a  $R/2 = f$  del plano principal. Todos los haces de luz que inciden paralelos entre sí salen por un solo foco imagen y todos los haces salen paralelos entre sí incidieron por el mismo foco objeto (ver figura)

34



**Figura 32**

En cada elemento óptico se ha encontrado un foco secundario imagen correspondiente de rayos que inciden paralelos entre sí. De igual forma se puede encontrar el foco secundario objeto de un haz de rayos que salen paralelos entre sí.

Este conocimiento permite encontrar el camino de un rayo del cual no sabemos cómo sale o cómo entra al elemento óptico.

Vamos a aplicar este concepto en la resolución de un problema con dos elementos.

## 25\_PROBLEMA

Una lente plano convexa tiene su cara plana plateada. La lente tiene un índice de refracción de 1.4 y el radio de su cara convexa es de 30 cm. Supuesta la lente delgada, determinar:

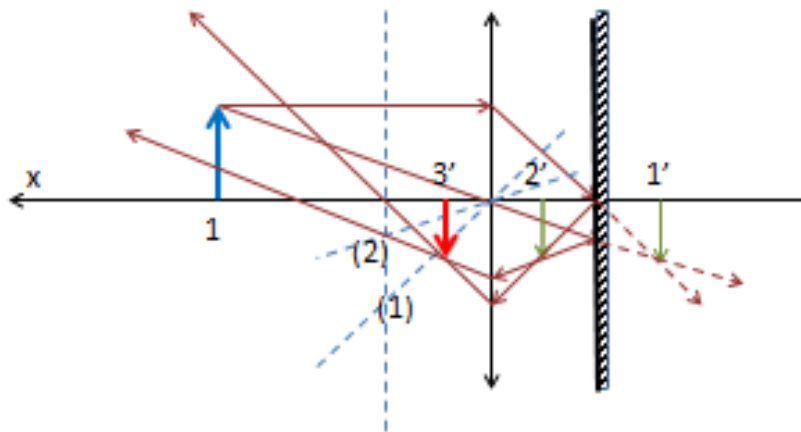
- La distancia focal de la lente y su potencia.
- La posición de la imagen de un objeto situado en el eje principal a 100 cm de la lente.
- El tamaño y la naturaleza de la imagen final dada por el sistema si el objeto tiene un tamaño de 1mm.



Justifique sus respuestas. Realice marcha de rayos.

Este parece un problema de un solo elemento óptico, la lente delgada. Pero, al tener la cara plana especulada, es como si se tratara de una lente y un espejo plano. No importa que la cara especulada forme parte de la lente. El espejo plano lo podemos considerar ubicado en cualquier punto del eje de la lente, ya que la posición de la imagen virtual del espejo no será la imagen final.

En este problema se producen tres imágenes. 1° la imagen de la lente delgada, 2° la imagen del espejo y como la luz se refleja vuelve a pasar por la lente formando entonces su imagen final(ver figura de análisis)

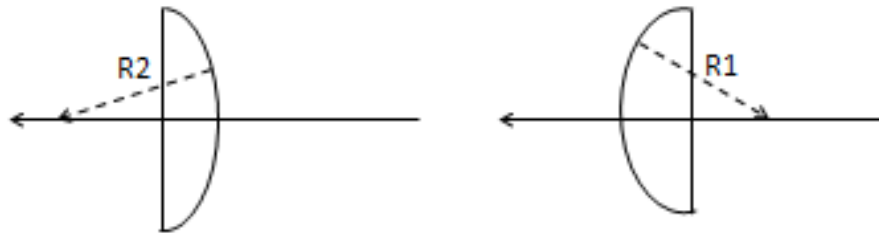


**Figura 33**

Supusimos  $x > 2f$ . La imagen 1' es la producida por la lente sale de aplicar Descartes para lentes delgadas. Supusimos objeto virtual para el espejo plano. Es decir, colocamos el espejo antes de la imagen 1' en el camino de los rayos. Al llegar al espejo los rayos se reflejan de manera que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. La imagen del espejo plano para un objeto virtual es una **imagen real** (en este caso 2'). Pero, los rayos llegan nuevamente a la lente de manera que 2' es el centro del haz incidente (objeto para la lente) produciendo la imagen final 3'. En este caso la imagen final es real, invertida y menor.

Resolvamos el problema.

- Para encontrar la distancia focal de la lente delgada utilizaremos la fórmula del constructor de lentes. Vamos además a demostrar que es indistinto en las lentes delgadas cuál es la primera dioptra a la que llega la luz. Para eso vamos a dibujar la lente plano convexa de las dos formas posibles.

**Figura 34**

Según la fórmula vista:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_v}{n_{medio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\frac{1}{f} = (1,4 - 1) \left( \frac{1}{0,30} \right)$$

$$f = 0,75 \text{ m}$$

en el primer caso y

$$\frac{1}{f} = (1,4 - 1) \left( -\frac{1}{-0,30} \right)$$

$$f = 0,75 \text{ m}$$

en el segundo caso. Teniendo en cuenta que la cara plana tiene un radio infinito

En cuanto a la potencia de la lente:

$$P = \frac{1}{f}$$

$$P \cong 1,33 \text{ dioptras}$$

- b) Si el objeto se coloca a 0.30 cm de la lente, como  $x < f$  la imagen de la lente convergente que es generalmente real, en este caso será virtual. Encontremos  $1'$  aplicando en la Ley de Descartes los datos

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{100} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{75}$$

$$x' = \frac{(100)(75)}{75 - 100}$$

$$x' \cong -300 \text{ cm}$$

**(imagen real invertida y mayor)**

La primera imagen está a 300cm a la derecha de la lente. Si colocamos el espejo plano a 100 cm delante de la imagen (a 200cm a la derecha de la lente) su imagen por simetría estará a 100 cm a la derecha de la lente (2' es una imagen real derecha con respecto a 1' y de igual tamaño)

Encontramos ahora la tercer imagen (cuidado, tengan en cuenta que el sentido de la luz es ahora de derecha a izquierda y por lo tanto  $x = +100$  cm y el foco objeto está ahora a la derecha de la lente.)

Aplicando nuevamente Descartes encontramos la imagen final las cuentas son las mismas.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

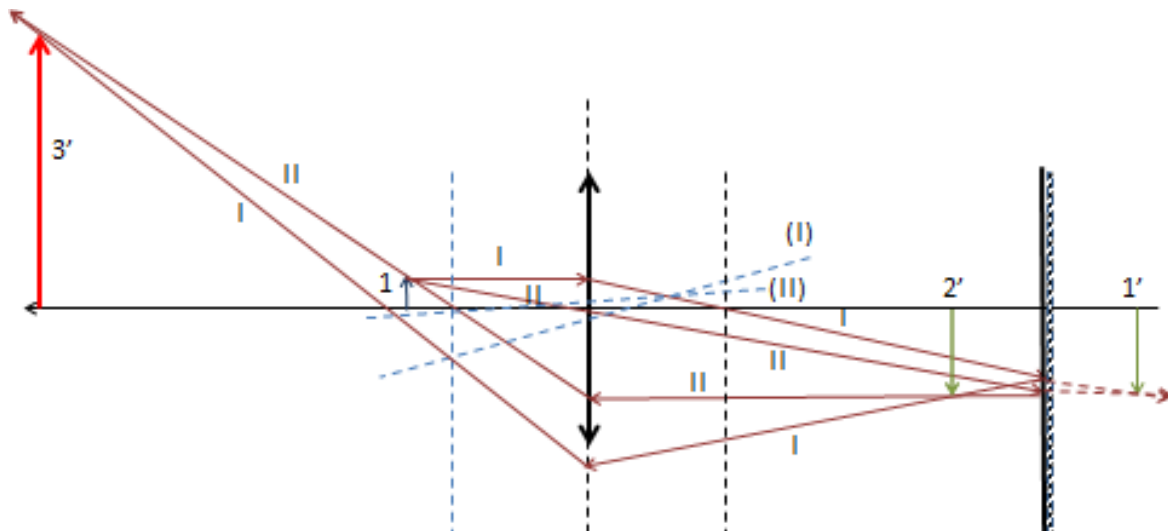
$$\frac{1}{100} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{75}$$

$$x' = \frac{(100)(75)}{75 - 100}$$

$$x' \cong -300 \text{ cm}$$

Pero la imagen final 3' es real, invertida y mayor respecto a 2' (o sea derecha respecto al objeto inicial) **(ver figura 35)**



**Figura 35**

Sólo utilizamos los rayos I y II. Las líneas punteadas (I) y (II) son los rayos auxiliares para encontrar por el foco secundario cómo salen finalmente los rayos I y II.

El texto “Física para estudiantes de Ingeniería” es una obra colectiva llevada a cabo por docentes de Física I de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA) con la coordinación de la Mg. Ema Aveleyra. Se enmarca dentro de las actividades correspondientes al PEFI (Plan Estratégico de Formación de Ingenieros) y todos los derechos se encuentran protegidos bajo licencia Creative Commons.

Apuntes de Cátedra de Física I/E. Aveleyra (coord.), E. Aveleyra (coautora.), J. Cornejo (coautor), A. Ferrini (coautor), S. Rossi (coautor), G. Gómez Toba (edición técnica)/1° edición/Buenos Aires: Facultad de Ingeniería, 2018.

ISBN (“en trámite”)

Publicación digital



La obra “Física para estudiantes de Ingeniería” está protegida bajo una licencia\_Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.