Demostración

Sean x^k y $x^{i'}$ dos sistemas de coordenadas relacionados por una transformación invertible. Por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Definiendo

$$A_k^{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}, \qquad \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},$$

resulta

$$A_k^{i'}\,\tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^k}{\partial x^j}.$$

Como x^k y x^j pertenecen al mismo sistema de coordenadas, se cumple

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_k^j,$$

y por tanto

$$A_k^{i'}\,\tilde{A}_{i'}^{j} = \delta_k^j.$$

Ejemplo: coordenadas cartesianas y polares

La transformación está dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Derivando,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

De aquí

$$A_k^{i'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

El determinante es

$$\det A = \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) = r.$$

La inversa resulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Identificando $\tilde{A}_{i'}^{j} = (A^{-1})_{i',j}$, se obtiene

$$A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} + A_1^{2'}\tilde{A}_{2'}^{1} = 1, \qquad A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{2} + A_1^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} = 0,$$

$$A_2^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} + A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{1} = 0, \qquad A_2^{1'}\tilde{A}_{1'}^{2} + A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} = 1.$$

En consecuencia,

$$A_k^{i'}\,\tilde{A}_{i'}^{j} = \delta_k^j.$$

Caso especial: relación con los cosenos directores

Supóngase ahora que la transformación considerada es una rotación en $\mathbb{R}^3$. Una rotación preserva el producto escalar, es decir, para cualesquiera vectores u y v,

$$u \cdot v = (Au) \cdot (Av).$$

En términos matriciales esto equivale a

$$A^{\mathrm{T}} A = I,$$

es decir, la matriz es ortogonal. En notación indicial esto implica

$$\tilde{A}^{j}_{i'} = A^{i'}_{j},$$

pues la matriz inversa coincide con la transpuesta.
Sustituyendo en la identidad general demostrada anteriormente

$$\sum_{i'} A^{i'}_{k} \, \tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k},$$

se obtiene

$$\sum_{i'} A^{i'}_{k} A^{i'}_{j} = \delta_{kj}.$$

Tomando el caso particular $k = j$,

$$\sum_{i'} A^{i'}_{k} A^{i'}_{k} = 1.$$

Fijemos ahora k y consideremos el vector fila correspondiente de la matriz. Sus componentes son

$$A^{1'}_{k}, \quad A^{2'}_{k}, \quad A^{3'}_{k}.$$

Geométricamente, la rotación transforma la base ortonormal $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ en otra base ortonormal $\{\mathbf{e}_k\}$. Por definición,

$$A^{i'}_{k} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{i'},$$

es decir, cada elemento es el coseno del ángulo entre los ejes x^k y $x^{i'}$.
Denotando dichos ángulos por α, β, γ, resulta

$$A^{1'}_{k} = \cos\alpha, \qquad A^{2'}_{k} = \cos\beta, \qquad A^{3'}_{k} = \cos\gamma.$$

Sustituyendo en la identidad anterior,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}.$$

Transformación de vectores

Sea el vector posición en el plano

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Supóngase que se realiza un cambio de coordenadas

$$(x, y) \longmapsto (x', y') = \big(x'(x, y),\, y'(x, y)\big).$$

La matriz asociada a esta transformación se obtiene a partir de las derivadas parciales:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Diremos que las componentes del vector posición transforman como las de un vector si se cumple

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Verificaremos esta condición para cada transformación propuesta.

Transformaciones

Se consideran las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} &(1)\ (x, y) \mapsto (-y, x), \\ &(2)\ (x, y) \mapsto (x, -y), \\ &(3)\ (x, y) \mapsto (x - y,\ x + y), \\ &(4)\ (x, y) \mapsto (x + y,\ x - y). \end{aligned}$$

Caso (1): $(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$x' = -y, \qquad y' = x.$$

La matriz de derivadas parciales es

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$J_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Caso (2): $(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$x' = x, \qquad y' = -y.$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$J_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Caso (3): $(x, y) \mapsto (x - y,\ x + y)$

$$x' = x - y, \qquad y' = x + y.$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Caso (4): $(x, y) \mapsto (x + y,\ x - y)$

$$x' = x + y, \qquad y' = x - y.$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$J_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Conclusión

En los cuatro casos se cumple

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

por lo que las componentes del vector posición transforman conforme a la matriz asociada al cambio de coordenadas.