LISTA DE EXERCÍCIOS 6

LUCAS BRAUNE

Os exercícios abaixo foram tirados do livro *Álgebra Linear e suas Aplicações* de Gilbert Strang (tradução da quarta edição americana).

(1) (Seção 5.2, exercício 1) Se uma matriz triangular superior 3 por 3 possui elementos diagonais 1, 2 e 7, como é possível saber se ela pode ser diagonalizada? Qual é Λ?

(2) (Seção 5.2, exercício 6) Encontre *todos* os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e apresente duas matrizes de diagonalização S diferentes.

(3) (Seção 5.3, exercício 5) Suponha que cada número de "Gibonacci" G_{k+2} seja a *média* dos dois números anteriores G_{k+1} e G_k. Então $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$, ou seja

$$\begin{aligned} G_{k+2} &= \tfrac{1}{2}G_{k+1} + \tfrac{1}{2}G_k \\ G_{k+1} &= G_{k+1}, \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}.$$

(a) Quem é a matriz A? Encontre seus autovalores e autovetores.
(b) Encontre o limite conforme $n \to \infty$ dsa matrizes $A^n = S\Lambda^n S^{-1}$.
(c) Se $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$, mostre que os números de Gibonacci tendem a $\frac{2}{3}$.

(4) (Seção 5.3, exercício 11) Empresas multinacionais nos EUA, Ásia e Europa possuem bens de US$ 4 trilhões. Inicialmente US$ estão nos EUA e US$ 2 trilhões estão na Europa. A cada ano, $\frac{1}{2}$ dinheiro nos EUA fica lá e $\frac{1}{4}$ vai para a Ásia e para a Europa. Do dinheiro na Ásia e na Europa, $\frac{1}{2}$ é mantido e $\frac{1}{2}$ é mandado para os EUA.

(a) Encontre a matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} \text{EUA} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano } k+1} = A \begin{bmatrix} \text{EUA} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano } k}$$

(b) Encontre os autovetores e autovalores de A.
(c) Encontre a distribuicão limite dos US$ 4 trilhões quando o mundo acabar.
(d) Encontre a distribuicão dos US$ 4 trilhões no ano k.

(5) (Seção 5.4, exercício 16) Por retrosubstituição ou cálculo de autovalores, resolva

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u \quad \text{com} \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6) (Seção 5.4, exercício 39) Suponha que $A^2 = A$, o que acontece por exemplo quando A é uma matriz de projeção. Mostre diretamente da série infinita que

$$e^{tA} = I + (e^t - 1)A.$$

Por exemlplo, se $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, o que é e^{tA}?