Revisão para a prova final de Álgebra Linear 2

18 de dezembro de 2016

Professor: Lucas Braune

Questões:

1. (25 pontos) Encontre a solução completa do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2. (25 pontos) Encontre a reta $y = Ct + D$ que melhor aproxima (com relação ao erro quadrático) os três pontos $(-2, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$. Em outras palavras, encontre C e D de forma a minimizar o comprimento quadrado do vetor de erro $e = b - p$, onde $b = [1, 2, 4]^{\mathrm{T}}$ e

$$p = \begin{bmatrix} C \cdot (-2) + D \\ C \cdot 0 + D \\ C \cdot 2 + D \end{bmatrix}$$

é o vetor com as alturas da reta nos tempos $t = -2, 0, 2$.

3. (25 pontos) Seja

$$A = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 3 & 13 \\ & 3 & 5 & 17 \\ 7 & 4 & 8 & 28 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule o determinante de A.

   (b) Calcule o determinante de

$$B = \begin{bmatrix} A & -A \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

   (c) Calcule o determinante de

$$C = \begin{bmatrix} A & -A \\ I & -I \end{bmatrix}.$$

4. (25 pontos) Encontre a solução $u(t)$ da equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u$$

com $u(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Soluções:

1. Primeiro escalonamos o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Os pivôs estão nas coluas 1 e 3. Assim as variáveis pivô são x_1 e x_3 e as variáveis livres são x_2 e x_4.

Se x_p é uma solução de $Ax = b$, qualquer outra solução x satisfará $A(x-x_p) = b-b = 0$, logo $x - x_p = x_n$ é uma solução de $Ax_n = 0$. Assim, queremos encontrar todas as soluções de $Ax_n = 0$ e uma solução de $Ax_p = b$. A solução geral de $Ax = b$ será $x = x_p + x_n$.

Achamos x_n por retrosubstituição. As equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

dão os valores das variáveis pivô em termos das variáveis livres. Temos

$$\begin{aligned} x_3 &= -4x_4 \\ x_1 &= -2x_2 - 4x_4, \end{aligned}$$

donde

$$x_n = \begin{bmatrix} -2x_2 - 4x_4 \\ x_2 \\ -4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para achar a solução particular x_p, colocamos as variáveis livres iguais a zero. Isto é o mesmo que descartas as colunas sem pivôs. Resolvemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por retrosubstituição. O resultado é $x_3 = -3$ e $x_1 = 7$. Assim

$$x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema é

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. O vetor com as altura p é igual a Ax, onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $x = [C, D]^{\mathrm{T}}$. Assim queremos encontrar a melhor solução do sistema impossível $Ax = b$. Esta solucão $\hat{x}$ terá o erro $e = A\hat{x} - b$ perpendicular ao espaço coluna de A. Isto quer dizer que $A^{\mathrm{T}}e = 0$, ou seja, $A^{\mathrm{T}}A\hat{x} = A^{\mathrm{T}}b$. Esta equação nós conseguimos resolver! Temos

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

A equação

$$A^{\mathrm{T}}A\hat{x} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = A^{\mathrm{T}}b$$

nos dá

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{6}{8} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Segue que a melhor reta é

$$y = \frac{3}{4}t + \frac{7}{3}.$$

3. (a) Trocando a linha 1 com a linha 4 e a linha 2 com a linha 3 temos uma matriz triangular. Estas trocas não alteram o determinante, pois ocorrem em número par. A matriz resultante das trocas é triangular, logo seu determinante é o produto dos elementos diagonais. Assim

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63.$$

(b) Fazendo as mesmas trocas com B caímos de novo em uma matriz tringular. Assim

$$\det B = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 63.$$

(c) Somando as colunas 1 e 5 da matriz C obtemos zero. Assim, as colunas não são independentes e a matriz é singular. Assim

$$\det C = 0.$$

4. A fórmula geral para a solução desta equação diferencial é análoga à que você aprendeu em Cálculo 1:

$$u(t) = e^{-t\left[\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right]}u(0).$$

Escreva $A = -\left[\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right]$. Para calcular esta exponencial de matriz, nós diagonalizamos A.

Para achar os autovetores, podemos observer que a matriz é singular, logo um dos autovaleres é $\lambda_1 = 0$ e o outro é o traço $\lambda_2 = -3$. Ou então resolvemos

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) - 2 = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3),$$

o que também dá $\lambda = 0, -3$.

Agora achamos o autovetor que corresponde a $\lambda_1 = 0$. Este é uma solução não-nula de $(A - \lambda_1 I)x = 0$. A equação

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

dá que $x_1 = -2x_2$, logo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e um autovetor é $[-2, 1]^{\mathrm{T}}$.

Falta achar o autovetor de $\lambda_2 = -3$. Da equação

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

vemos que $x_1 = x_2$, logo um autovetor é $[1, 1]^{\mathrm{T}}$.

As duas equações

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \qquad \text{e} \qquad Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

se escrevem na forma matricial $AS = S\Lambda$, onde

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz com os autovetores e $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix}0&\\&-3\end{smallmatrix}\right]$ é a matriz com os autovalores. Assim $A = S\Lambda S^{-1}$, logo

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{tA}u(0) \\
&= Se^{t\Lambda}S^{-1}u(0) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix} \frac{1}{(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} + 2 \\ e^{-3t} - 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$