LISTA DE EXERCÍCIOS 3

LUCAS BRAUNE

Entregue suas soluções para os exercícios abaixo até as 22:00 da terça-feira, dia 11 de Outubro de 2016.

Alguns exercícios abaixo foram tirados do livro *Álgebra Linear e suas Aplicações* de Gilbert Strang (tradução da quarta edição americana). O exercício (1) foi tirado da página de Ari Stern da Universidade de Washington em St. Louis:

`http://www.math.wustl.edu/~astern/450s15/hw5.pdf`

(1) (a) O pacote `scipy.linalg` contém a função `solve` que resolve um sistema linear invertível $Ax = b$. Para ter acesso a ela, entre o seguinte comando no terminal iPython:
`from scipy.linalg import solve`
Para A a matriz quadrada com $n = 1000$ linhas e colunas

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e b o vetor com todas as entradas iguais a 1, resolva o sistema usando o comando `x = solve(A,b)`. Você pode criar o vetor b usando o comando `b = ones(1000)`. Para criar a matriz A, uma forma é começar com
```
A = zeros(1000 * 1000)
A.shape = (1000,1000)
```
e preencher as entradas não-nulas de cada linha usando um loop `for`. Tanto `ones` quanto `zeros` são funções do pacote NumPy que podem ser incluidas com o seguinte comando:
`from numpy import *`
Imprima na tela as dez primeiras entradas do vetor x escrevendo `print(x[0:10])`.

(b) Uma matriz tridiagonal simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{999} \\ & & & b_{999} & a_{999} \end{bmatrix}$$

com 1000 linhas e colunas pode ser mais economicamente guardada em uma tabela com 2000 (em vez de 1.000.000) entradas como, por exemplo, na matriz

$$A_b = \begin{bmatrix} * & b_1 & b_2 & \cdots & b_{999} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{999} \end{bmatrix},$$

onde a entrada $*$ pode tomar qualquer valor. A função `solveh_banded`, também do pacote `scipy.linalg`, resolve $Ax = b$ supondo que a matriz A tem banda e é simétrica e positiva definida. Para usá-la, faça um `import` como no item (a) acima. Resolva o sistema linear $Ax = b$ do item anterior (no qual $n = 1000$) usando `x = solveh_banded(Ab,b)`, onde A_b tem dimensões $2 \times n$ e corresponde a A como acima. Imprima na tela as dez primeiras entradas de x. Repita o problema usando outros valores para n (por exemplo, $n = 10.000$). Compare os tempos de `solve` e `solveh_banded` usando os "comandos mágicos"[1] abaixo.

```
% timeit x = solve(A,b)
% timeit x = solveh_banded(Ab,b)
```

(c) Usando o método das diferenças finitas, calcule uma solução aproximada para o problema de valor de contorno

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

primeiro quando a função f é dada por $f(x) = 1$ para todo x, e depois quando ela é dada pelas fórmulas $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sin(100x)$. Comandos que podem ser úteis:

```
h = 0.01
x = arange(0,1,h)
f = x * x
g = sin(x)
```

Se `x` é um vetor NumPy com subdivisões do intervalo (por exemplo, $(0.01, 0.02, 0.03, \cdots, 0.99)$) e `u` é sua aproximação para os valores de u nestas subdivisões, faça para cada f um gráfico de u contra x usando o comando `plot(x,u)`. A função `plot` deve ser importada da seguinte forma:

```
from matplotlib.pyplot import plot
% matplotlib inline
```

O comando mágico é opcional para quem está trabalhando localmente, mas me parece necessário para quem trabalha no Math Sage Cloud.

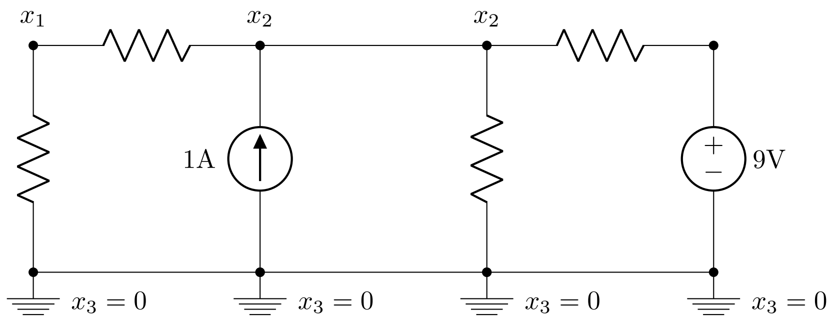
(2) (Seção 2.5, exercício 5) Desenhe um grafo com arestas numeradas e direcionadas (e nós numerados) cuja matriz de incidência seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

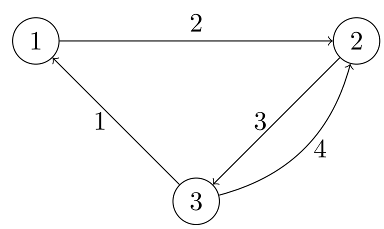
Este grafo é uma árvore? As linhas de A são independentes? Mostre que a remoção da última aresta produz uma árvore geradora. As linhas que sobram são uma base do espaço linha.

[1] Um comando mágico do terminal IPython é precedido por %; ele não será válido em um terminal Python comum.

(3) Neste exercício calcularemos os potenciais x_1, x_2 e x_3 nos nós 1, 2 e 3 no circuito abaixo. As resistências são todas de 1 Ω.



Considere o mesmo circuito com as fontes desligadas. A fonte de corrente se torna um circuito aberto por onde passam 0 amperes. A bateria por outro lado se torna um curto (como se fosse um fio ideal sem resistência) gerando uma diferença de potencial de 0 volts. Assim, o circuito com as fontes desligadas pode ser descrito pelo grafo abaixo, cujas quatro arestas correspondem aos quatro resistores do circuito. A orientação e numeração das arestas são arbitrárias, assim como a numeração dos vértices.



A matriz de adjacência deste grafo é

$$A = \begin{bmatrix} +1 & & -1 \\ -1 & +1 & \\ & -1 & +1 \\ & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que as linhas descrevem as arestas do grafo, tendo entradas $+1$ e -1 nas colunas correspondendo aos vértices alvo e origem de cada aresta.

(a) Seja $y \in \mathbb{R}^4$ o vetor com as correntes pelos quatro resistores. Mostre que $A^{\mathrm{T}}y$ calcula a corrente líquida que entra em cada nó, sem contar fontes externas. A *Lei das Corresntes de Kirchhoff* expressa conservação de carga na forma

$$A^{\mathrm{T}}y + f = 0,$$

onde f é um vetor com a corrente externa que entra em cada nó. No caso do circuito acima,

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Let $x \in \mathbb{R}^3$ o vetor com os potenciais elétricos nos quatro nós. Mostre que Ax calcula as diferenças de potencial na extremidades de cada resistor. A *Lei de Ohm* é a expressão familiar $V = RI$ que relaciona a corrente I que atravassa um resistor de resistência R cujas extremidades estão com uma diferença de potencial V. A corrente vai na direção do maior potencial para o menor. Seja b o vetor com a diferença de potencial gerada pela bateria em cada aresta do grafo. Assim, no caso acima, entendendo que a bateria está na aresta 4, temos

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Note que tivéssemos escolhido a outra orientação para a aresta 4, a última coordenada deste vetor seria -9 em vez de 9: o sinal da diferença de pontencial depende de um sentido. Seja R a matriz com as resistências de cada aresta[2]; no caso em questão $R = I$. Mostre que a equação

$$Ax + Ry = b$$

encapsula a lei de Ohm dos quatro resistores.

(c) Resolva as equações

$$\begin{aligned} Ax + Ry &= b \\ A^{\mathrm{T}} y &= -f \end{aligned}$$

para os potenciais x e as correntes y. Você pode usar eliminação, ou então fazer o seguinte. Ponha $C = R^{-1}$. (No caso presente, $C = R = I$, mas é bom distinguir entre R e C no caso geral.) Multiplique a primeira equação por $A^{\mathrm{T}} C$ e substitua a segunda equação. O resultado é

$$A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b + f.$$

Resolva esta equação para x, lembrando que o nó 3 foi aterrado ($x_3 = 0$).

(4) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que reflete o plano na reta que passa pela origem fazendo ângulo θ com o eixo x. Em aula nós vimos que T é dada por multiplição pela matriz

$$H = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

O exercício abaixo (tirado do livro) parece sugerir que a matriz de T é na verdade

$$H' = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Usando as fórmulas para o cosseno e o seno do dobro de um ângulo, mostre que $H = H'$.

[2] Para descrever arestas sem resistências, você deve tomar a entrada correspondente na matriz diagonal R sendo zero. Neste caso, R deixa de ser invertível e uma pequena parte da discussão do livro sobre circutios deixa de se aplicar. A saber, $C = R^{-1}$ deixa de fazer sentido. A lei das correntes de Kirchhoff e a lei de Ohm descritas nesse problema continuam válidas e você sempre pode resolver estas equações através de eliminação.

(5) (Seção 2.6, exercício 41) Mostre que o produto ST de duas reflexões é uma rotação. Multiplique essas matrizes de reflexão para encontrar o ângulo de rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

(6) (Seção 2.6, exercício 36)
   (a) Que matriz transforma $(1,0)$ em $(2,5)$ e $(0,1)$ em $(1,3)$?
   (b) Que matriz transforma $(2,5)$ em $(1,0)$ e $(1,3)$ em $(0,1)$?
   (c) Por que nenhuma matriz transforma $(2,6)$ em $(1,0)$ e $(1,3)$ em $(0,1)$?

(7) (Seção 3.1, exercício 27) Desenhe os quatro subespaços fundamentais das matrizes e explique a ação das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, desenhe a figura 3.4 do livro para estas duas matrizes.

(8) (Seção 3.1, exercício 34) O piso e a parede não são subespaços ortognais, uma vez que compartilham um vetor não nulo (o vetor que gera a reta onde eles se encontram). Dois planos em $\mathbb{R}^3$ não podem ser ortogonais! Encontre um vetor nos espaços coluna $C(A)$ e $C(B)$ quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este será um vetor da forma Ax e também da forma $B\hat{x}$. Pense na matriz com 3 linhas e 4 colunas $[A\ B]$.

(9) (Seção 3.2, exercício 7) Explique por que a desigualdade de Schwarz

$$\left|a^{\mathrm{T}} b\right| = \|a\| \cdot \|b\|$$

se torna uma igualdade se, e somente se, a e b estão na mesma reta que passa pela origem. O que aconteceria se eles estiverem em lados opostos da origem?

(10) (Seção 3.2, exercício 21) Calcule as matrizes de projeção $aa^{\mathrm{T}}/a^{\mathrm{T}}a$ sobre as retas que passam por $a_1 = (-1,2,2)$ e $a_2 = (2,2,-1)$. Multiplique essas matrizes de projeção e explique a razão de ser de seu produto P_1P_2.