



# Álgebra linear e suas aplicações

Tradução da 4ª edição norte-americana

**Gilbert Strang**

Massachusetts Institute of Technology

Tradução

**All Tasks**

Revisão Técnica

**Germano Abud de Rezende**

Mestre em Matemática pelo IMECC/Unicamp.  
Professor Assistente da UFU.





# Sumário

---

## ■ Capítulo 1 **MATRIZES E ELIMINAÇÃO DE GAUSS** 1

- 1.1 Introdução 1
- 1.2 Geometria das equações lineares 3
- 1.3 Exemplo de eliminação de Gauss 11
- 1.4 Notação matricial e multiplicação de matrizes 19
- 1.5 Fatores triangulares e trocas de linhas 32
- 1.6 Inversas e transpostas 45
- 1.7 Matrizes especiais e aplicações 59
- Exercícios de revisão 65

---

## ■ Capítulo 2 **ESPAÇOS VETORIAIS** 69

- 2.1 Espaços vetoriais e subespaços 69
- 2.2 Resolução de  $Ax = 0$  e  $Ax = b$  77
- 2.3 Independência linear, base e dimensão 92
- 2.4 Os quatro subespaços fundamentais 103
- 2.5 Grafos e redes 114
- 2.6 Transformações lineares 125
- Exercícios de revisão 137

---

## ■ Capítulo 3 **ORTOGONALIDADE** 141

- 3.1 Vetores e subespaços ortogonais 141
- 3.2 Cossenos e projeções em retas 152
- 3.3 Projeções e mínimos quadrados 160
- 3.4 Bases ortogonais e Gram-Schmidt 174
- 3.5 Transformada rápida de Fourier 188
- Exercícios de revisão 198

---

## ■ Capítulo 4 **DETERMINANTES** 201

- 4.1 Introdução 201
- 4.2 Propriedades dos determinantes 203
- 4.3 Fórmulas para os determinantes 210
- 4.4 Aplicações dos determinantes 220
- Exercícios de revisão 230

---

■ **Capítulo 5 AUTOVALORES E AUTOVETORES 233**

- 5.1 Introdução 233
- 5.2 Diagonalização de uma matriz 245
- 5.3 Equações das diferenças e potências  $A^k$  254
- 5.4 Equações diferenciais e  $e^{At}$  266
- 5.5 Matrizes complexas 280
- 5.6 Transformações de semelhança 293
- Exercícios de revisão 307

---

■ **Capítulo 6 MATRIZES DEFINIDAS POSITIVAS 311**

- 6.1 Mínimos, máximos e pontos de sela 311
- 6.2 Testes para a definição positiva 318
- 6.3 Decomposição de valor singular 331
- 6.4 Princípios mínimos 339
- 6.5 Método dos elementos finitos 346

---

■ **Capítulo 7 CÁLCULOS COM MATRIZES 351**

- 7.1 Introdução 351
- 7.2 Norma da matriz e número de condição 352
- 7.3 Cálculo de autovalores 359
- 7.4 Métodos iterativos para  $Ax = b$  367

---

■ **Capítulo 8 PROGRAMAÇÃO LINEAR E TEORIA DOS JOGOS 377**

- 8.1 Desigualdades lineares 377
- 8.2 Método simplex 382
- 8.3 Problema dual 392
- 8.4 Modelos de rede 401
- 8.5 Teoria dos jogos 407

---

■ **Apêndice A INTERSEÇÃO, SOMA E PRODUTO DOS ESPAÇOS 415**

■ **Apêndice B A FORMA DE JORDAN 423**

- Fatoração de matrizes* 429
- Glossário: um dicionário de álgebra linear* 431
- Códigos do MATLAB* 437
- Índice remissivo* 439
- Álgebra linear em poucas palavras* 445

---

\* As soluções para os exercícios selecionados estão disponíveis na página do livro no site da Editora Cengage Learning ([www.cengage.com.br](http://www.cengage.com.br)).



# Prefácio

A revisão deste livro foi um desafio especial por um motivo muito agradável. Muitas pessoas leram esta obra, ensinaram com ela e até mesmo se apaixonaram por ela. O espírito do livro não poderia mudar nunca. Este texto foi escrito para ajudar o ensino de álgebra linear a se manter à altura da enorme importância da disciplina – que continua crescendo.

Um passo adiante certamente era possível e desejável – *adicionar novos problemas*. O ensino em todos esses anos exigiu centenas de novas questões de estudo (especialmente de desafios lançados na internet). Acredito que você aprovará a escolha dos problemas adicionados. As questões são uma mistura de *explicação* e *cálculo* – duas abordagens complementares no aprendizado desta bela disciplina.

Acredito, pessoalmente, que muitas pessoas precisem mais de álgebra linear do que de cálculo. Isaac Newton poderia não concordar! Mas ele não ensina matemática no século XXI (e talvez Newton não fosse um grande professor, mas lhe daremos o benefício da dúvida). Certamente, as leis da física são bem expressas por equações diferenciais. Newton precisava do cálculo – muito bem! Mas o escopo da Ciência, da Engenharia e da Administração (e da vida) é hoje muito mais amplo e a álgebra linear assumiu o lugar central.

Permita-me dizer um pouco mais, pois muitas universidades ainda não encontraram o equilíbrio em relação à álgebra linear. Ao trabalhar com linhas e superfícies curvas, o primeiro passo é sempre *linearizar*. Substitua a curva por sua reta tangente ou adapte a superfície com um plano, e o problema se torna linear. O poder desta disciplina aparece quando você tem dez ou mil variáveis em vez de duas.

Você pode estar pensando que eu exagero ao utilizar a palavra “bela” para um curso básico de matemática. De modo algum. Esta disciplina começa com dois vetores  $v$  e  $w$  apontando para direções diferentes. O passo fundamental é *obter suas combinações lineares*. Multiplicamos para obter  $3v$  e  $4w$  e somamos para obter a combinação particular  $3v + 4w$ . Esse novo vetor está no *mesmo plano* que  $v$  e  $w$ . Quando obtivermos todas as combinações, teremos preenchido todo o plano. Se você posicionar  $v$  e  $w$  sobre esta página, suas combinações  $cv + dw$  a preencherão (e além), mas elas *não virão para cima* da página.

Na linguagem das equações lineares, podemos resolver  $cv + dw = b$  quando o vetor  $b$  se localiza no mesmo plano que  $v$  e  $w$ .

## Matrizes

Vou avançar um pouco mais para converter combinações de vetores tridimensionais em álgebra linear. Se os vetores são  $v = (1, 2, 3)$  e  $w = (1, 3, 4)$ , posicione-os nas **colunas de uma matriz**.

$$\text{matriz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar as combinações dessas colunas, “multiplique” a matriz por um vetor  $(c, d)$ :

$$\text{Combinações lineares } cv + dw \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Essas combinações preenchem um *espaço vetorial*. Chamamos este espaço de **espaço-coluna** da matriz (para essas duas colunas, o espaço é um plano). Para constatar se  $b = (2, 5, 7)$  se encontra nesse plano, temos três componentes que precisam ser verificados. Assim, devemos resolver três equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{implica} \quad \begin{aligned} c + d &= 2 \\ 2c + 3d &= 5 \\ 3c + 4d &= 7. \end{aligned}$$

Deixo a solução para você. O vetor  $b = (2, 5, 7)$  realmente se localiza no plano de  $v$  e  $w$ . Se o 7 mudasse para qualquer outro número, então  $b$  não se localizaria nesse plano – ele *não* seria uma combinação de  $v$  e  $w$  e as três equações não teriam solução.

Agora posso descrever a primeira parte do livro, sobre equações lineares  $Ax = b$ . A matriz  $A$  possui  $n$  colunas e  $m$  linhas. *A álgebra linear aponta diretamente para  $n$  vetores em um espaço de  $m$  dimensões*. Nós ainda queremos combinações das colunas (no espaço-coluna). Ainda obtemos  $m$  equações para produzir  $b$  (uma para cada linha). Essas equações podem ou não ter uma solução. Todas sempre terão uma solução de mínimos quadrados.

A interação entre linhas e colunas é o coração da álgebra linear. Ela não é tão fácil, mas também não é muito difícil. A seguir estão quatro das ideias centrais:

1. O **espaço-coluna** (todas as combinações das colunas);
2. O **espaço-linha** (todas as combinações das linhas);
3. O **posto** (o número de colunas, ou linhas independentes);
4. **Eliminação** (um bom modo de encontrar o posto de uma matriz).

Vou parar por aqui para que você possa começar o curso.

#### Páginas da internet\*

Talvez seja útil indicar as páginas da internet relacionadas a este livro. Recebo muitas mensagens com sugestões e incentivos, e espero que utilize livremente os recursos mencionados a seguir. Você pode acessar o *site* <http://web.mit.edu/18.06>, que é atualizado constantemente com informações sobre o curso que ministro todo semestre. A álgebra linear também está no *site* do OpenCourseWare do MIT, no endereço <http://ocw.mit.edu>, em que o curso 18.06 se tornou excepcional com a inclusão dos vídeos das aulas (os quais você definitivamente não precisa assistir...). A lista abaixo relaciona parte das informações disponíveis na internet:

1. Cronograma de aulas, tarefas e provas recentes com soluções.
2. Objetivos do curso e questões conceituais.
3. Demonstrações interativas em Java (foi incluído áudio para autovalores).
4. Códigos de ensino de álgebra linear e problemas de MATLAB.
5. Vídeos do curso completo (ministrado para uma classe real).

\* Este material, em inglês, encontra-se nos endereços indicados, podendo ser retirado dos *sites* sem aviso-prévio; não sendo, portanto, responsabilidade da Cengage Learning Edições Ltda. (NE)

A página do curso se tornou uma ferramenta valiosa para as turmas e um recurso para os estudantes. Estou muito otimista em relação ao potencial dos recursos gráficos com som.

A banda necessária para transmissão de voz é baixa e o FlashPlayer está disponível para *download* gratuito. Esse recurso oferece uma *rápida revisão* (com experimentos ativos), e é possível fazer o *download* das aulas completas. Espero que professores e estudantes em todo o mundo achem proveitosas essas páginas. Meu objetivo é tornar este livro o mais útil possível, para isso incluirei nele todo o material de curso relevante.

## Estrutura do curso

Os dois problemas fundamentais são  $Ax = b$  e  $Ax = \lambda x$  em matrizes quadradas  $A$ . O primeiro problema  $Ax = b$  tem solução quando  $A$  possui *colunas independentes*. O segundo problema  $Ax = \lambda x$  busca *autovetores independentes*. Uma parte crucial do curso é compreender o que significa “independência”.

Acredito que a maioria de nós começa a aprender a partir de exemplos. Você pode ver que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{não possui colunas independentes.}$$

A soma da coluna 1 com a coluna 2 é igual à coluna 3. Um notável teorema da álgebra linear diz que as três linhas também não são independentes. A terceira linha localiza-se necessariamente no mesmo plano que as duas primeiras. Alguma combinação das linhas 1 e 2 produz a linha 3. Você provavelmente é capaz de encontrar essa combinação de forma rápida (eu não). Por fim, tive de utilizar eliminação para descobrir que a combinação certa utiliza duas vezes a coluna 2 menos a coluna 1.

A eliminação é o modo simples e natural de compreender uma matriz, produzindo vários elementos nulos. Portanto, o curso começa aí. Mas não fica muito tempo neste ponto! Você tem de passar das combinações de linhas para a independência de linha, para a “dimensão do espaço-linha”. Esse é o objetivo principal – ver todos os espaços de vetores: o **espaço-linha**, o **espaço-coluna** e o **espaço nulo**.

O próximo objetivo é compreender como a matriz se *comporta*. Quando  $A$  multiplica  $x$ , ela produz um novo vetor  $Ax$ . Todo o espaço de vetores se movimenta – ele é “transformado” por  $A$ . As transformações especiais partem de matrizes particulares, e estas são as pedras fundamentais da álgebra linear: matrizes diagonais, matrizes ortogonais, matrizes triangulares, matrizes simétricas.

Os autovalores dessas matrizes também são especiais. Acredito que matrizes 2 por 2 forneçam exemplos impressionantes de informações que os autovalores  $\lambda$  podem dar. Vale a pena ler com atenção as Seções 5.1 e 5.2 para ver como  $Ax = \lambda x$  é útil. Trata-se de um caso em que pequenas matrizes permitem percepções extraordinárias.

Em geral, a beleza da álgebra linear é percebida de modos muito diferentes:

1. **Visualização.** Combinações de vetores. Espaços de vetores. Rotação, reflexão e projeção de vetores. Vetores perpendiculares. Quatro subespaços fundamentais.
2. **Abstração.** Independência de vetores. Base e dimensão de um espaço vetorial. Transformações lineares. Decomposição de valor singular e melhor base.
3. **Computação.** Eliminação para produzir elementos nulos. Processo de Gram-Schmidt para produzir vetores ortogonais. Autovalores para resolver equações das diferenças e diferenciais.

**4. Aplicações.** Solução de mínimos quadrados quando  $Ax = b$  possui muitas equações. Equações das diferenças para aproximação de equações diferenciais. Matrizes de probabilidade de Markov (a base do Google!). Autovetores ortogonais como eixos principais (e mais...).

Para avançar nessas aplicações, permita-me mencionar os livros publicados pela Wellesley-Cambridge Press. São todos de álgebra linear disfarçada, aplicada ao processamento de sinais, equações diferenciais parciais e computação científica (até mesmo GPS). Se você der uma olhada no *site* <http://www.wellesleycambridge.com>, verá parte do motivo de a álgebra linear ser utilizada de modo tão amplo.

Após este prefácio, o livro falará por si. Você perceberá o espírito logo de cara. A ênfase é na compreensão – *eu tentei explicar mais do que deduzir*. Este é um livro sobre matemática real, não um aprofundamento sem fim. Em classe, trabalho constantemente com exemplos para ensinar o que os alunos precisam.

### Agradecimentos

Tive prazer em escrever este livro e certamente espero que você tenha prazer em lê-lo. Boa parte da satisfação decorre de se trabalhar com amigos. Contei com a maravilhosa ajuda de Brett Coonley, Cordula Robinson e Erin Maneri. Foram os responsáveis pela criação dos arquivos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e também desenharam todas as figuras. Sem o apoio contínuo de Brett, eu nunca teria conseguido concluir esta nova edição.

Anteriormente, com os códigos de ensino, tive a ajuda de Steven Lee e Cleve Moler. Eles seguiram os passos descritos no livro; o MATLAB, o Maple e o Mathematica são mais rápidos para matrizes maiores. Todos podem ser (*opcionalmente*) utilizados neste curso. Poderia ter adicionado a “Fatoração” à esta lista como o principal caminho para a compreensão de matrizes:

$[L, U, P] = \text{lu}(A)$	para equações lineares
$[Q, R] = \text{qr}(A)$	para tornar as colunas ortogonais
$[S, E] = \text{eig}(A)$	para encontrar autovetores e autovalores

Nos agradecimentos, nunca me esqueço da primeira dedicatória deste livro, escrita anos atrás. Foi uma oportunidade especial para agradecer a meus pais por tantos anos de dedicação generosa. O exemplo deles é uma inspiração para minha vida.

E agradeço também ao leitor, esperando que goste deste livro.

*Gilbert Strang*

# 1

# Matrizes e eliminação de Gauss

## 1.1 INTRODUÇÃO

Este livro começa com o problema central da álgebra linear: *resolver equações lineares*. O caso mais importante, e o mais simples, é aquele em que os números de incógnitas e de equações são iguais. Temos  *$n$  equações de  $n$  incógnitas* começando com  $n = 2$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Duas equações} & 1x + 2y = 3 \\ \text{Duas incógnitas} & 4x + 5y = 6. \end{array} \quad (1)$$

As incógnitas são  $x$  e  $y$ . Descrevemos aqui dois modos de resolver essas equações: por *substituição* e por *determinantes*. Certamente,  $x$  e  $y$  são determinados pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6. O problema é: como usar esses seis números para resolver o sistema.

**1. Substituição** Subtraia 4 vezes a primeira equação da segunda. Isso elimina  $x$  da segunda equação e deixa uma equação em  $y$ :

$$(\text{equação 2}) - 4(\text{equação 1}) \quad -3y = -6. \quad (2)$$

Sabemos, imediatamente, que  $y = 2$ . Então, obtemos  $x$  a partir da primeira equação  $1x + 2y = 3$ :

$$\text{Retrossubstituição} \quad 1x + 2(2) = 3 \quad \text{fornece} \quad x = -1. \quad (3)$$

Prosseguindo com cuidado, verificamos que  $x$  e  $y$  também resolvem a segunda equação. Isso deveria funcionar, e de fato funciona: 4 vezes ( $x = -1$ ) mais 5 vezes ( $y = 2$ ) é igual a 6.

**2. Determinantes** A solução  $y = 2$  depende completamente daqueles seis números nas equações. Deve haver uma fórmula para obter  $y$  (e também  $x$ ). É uma “razão de determinantes”, vamos apresentá-la diretamente:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 4}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{-6}{-3} = 2. \quad (4)$$



Isso pode parecer um tanto obscuro, a menos que você já conheça os determinantes 2 por 2. Eles deram a mesma resposta,  $y = 2$ , a partir da mesma razão de  $-6$  e  $-3$ . Se continuarmos nos determinantes (o que não planejamos fazer), haverá uma fórmula similar para calcular a outra incógnita  $x$ :

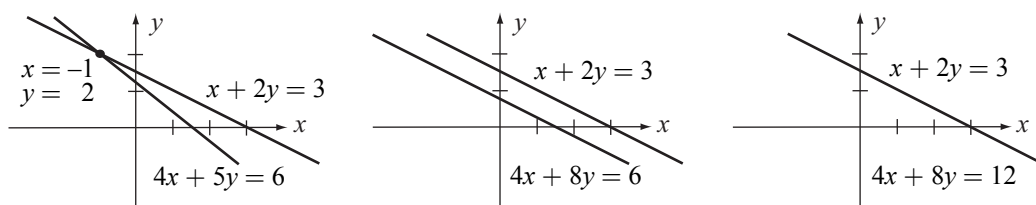
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{3}{-3} = -1. \quad (5)$$

Comparemos essas duas abordagens, considerando futuros problemas reais em que  $n$  é muito maior ( $n = 1.000$  é um número bastante moderado em cálculo científico). A verdade é que o uso direto da fórmula de determinantes para 1.000 equações seria um desastre completo; utilizaria os milhões de números à esquerda de modo correto, mas ineficiente. Encontraremos essa fórmula (regra de Cramer) no Capítulo 4, mas queremos um bom método para resolver 1.000 equações já no Capítulo 1.

Este método é a **Eliminação de Gauss**. Trata-se do algoritmo utilizado constantemente para resolver grandes sistemas de equações. Nos exemplos deste livro ( $n = 3$  já estará bem próximo do limite da paciência do autor e do leitor), você não verá muitas diferenças. As equações (2) e (4) utilizaram basicamente os mesmos passos para encontrar  $y = 2$ . Certamente obtivemos  $x$  mais rapidamente pela retrossubstituição na equação (3) do que pela razão da equação (5). Para valores maiores de  $n$ , não há absolutamente dúvida alguma. A eliminação vence (este ainda é o melhor modo de calcular determinantes).

A ideia da eliminação é decididamente mais simples – você a dominará após alguns poucos exemplos. Ela será a base de metade deste livro, simplificando matrizes de modo que possamos compreendê-las. Com os mecanismos do algoritmo, explicaremos agora quatro aspectos fundamentais deste capítulo:

1. Equações lineares levam à **geometria dos planos**. Não é fácil visualizar um plano de nove dimensões em um espaço de dez. É ainda mais difícil visualizar dez desses planos com interseção na solução de dez equações – às vezes, isso é quase possível. Nosso exemplo apresenta duas retas na Figura 1.1, encontrando-se no ponto  $(x, y) = (-1, 2)$ . A álgebra linear pode levar essa imagem para dez dimensões; caberá à intuição imaginar a geometria (e de modo correto).
2. Passemos para a **notação matricial**, escrevendo as  $n$  incógnitas como um vetor  $x$  e as  $n$  equações como  $Ax = b$ . Multiplicamos  $A$  por “matrizes de eliminação” para obter uma matriz triangular superior  $U$ . Esses passos fatoram  $A$  em  $L$  vezes  $U$ , em que  $L$  é uma matriz triangular inferior. Escreveremos  $A$  e seus fatores para nosso exemplo e os explicaremos no momento oportuno:



Uma solução  $(x, y) = (-1, 2)$

Paralelas: sem solução

Reta infinita de soluções

Figura 1.1 O exemplo apresenta uma solução. Casos singulares podem ter nenhuma ou infinitas soluções.

$$\text{Fatoração} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{L \text{ vezes } U.} \quad (6)$$

Primeiro, temos de introduzir matrizes e vetores e as regras de multiplicação. Toda matriz possui uma **transposta**  $A^T$ . Essa matriz possui uma **inversa**  $A^{-1}$ .

3. Na maioria dos casos, a eliminação funciona sem dificuldades. A matriz possui uma inversa e o sistema  $Ax = b$  possui uma solução. Em casos excepcionais, o método *falha* – ou as equações foram escritas na ordem incorreta (o que pode ser facilmente corrigido por meio de sua substituição) ou as equações não têm uma solução única.

Esse **caso singular** aparecerá se substituirmos 5 por 8 em nosso exemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Caso singular} & 1x + 2y = 3 \\ \text{Duas retas paralelas} & 4x + 8y = 6. \end{array} \quad (7)$$

A eliminação ainda pode subtrair ingenuamente 4 vezes a primeira equação da segunda. Mas veja o resultado!

$$(\text{equação 2}) - 4(\text{equação 1}) \quad 0 = -6.$$

Esse caso singular **não possui solução**. Outros casos possuem **infinitas soluções**. (Troque 6 por 12 no exemplo e a eliminação levará a  $0 = 0$ . Nesse caso,  $y$  pode possuir *qualquer valor*.) Quando a eliminação falha, desejamos encontrar todas as soluções possíveis.

4. Precisamos de uma contagem básica do **número de etapas de eliminação** necessário para resolver um sistema de dimensão  $n$ . O custo de cálculo frequentemente determina a precisão do modelo. Uma centena de equações exige mais de trezentas mil etapas (multiplicações e subtrações). O computador pode executá-las rapidamente, mas não se forem vários trilhões. E acima de um milhão de etapas o erro de arredondamento pode ser significativo. (Alguns problemas são sensíveis a isso; outros não.) Sem entrar em todos os detalhes, veremos grandes sistemas que surgem na prática e como eles são, de fato, resolvidos.

O resultado final deste capítulo será um algoritmo de eliminação que deve ser o mais eficiente possível. Trata-se, essencialmente, do algoritmo utilizado de maneira constante em uma gigantesca variedade de aplicações. E, ao mesmo tempo, sua compreensão em termos de *matrizes* – a matriz de coeficientes  $A$ , a matriz de eliminação  $E$  e a matriz de troca de linhas  $P$ , além dos fatores finais  $L$  e  $U$  – constitui um fundamento teórico essencial. Espero que você aproveite este livro e este curso.

## 1.2 GEOMETRIA DAS EQUAÇÕES LINEARES

O modo de compreender este assunto é por meio de exemplos. Vamos começar com duas equações extremamente simples, provando que você é capaz de resolvê-las sem um curso de álgebra linear, mas esperando que você dê uma chance a Gauss:

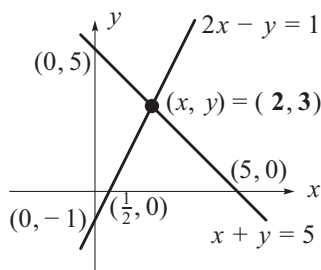
$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ x + y & = & 5. \end{array}$$

Podemos considerar o sistema *por linhas ou por colunas*. Veremos ambos os modos.

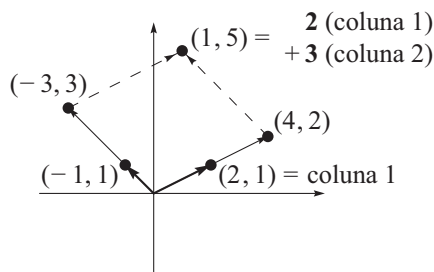
A primeira abordagem foca as equações separadas (as **linhas**). É a mais habitual e, em duas dimensões, podemos executá-la rapidamente. A equação  $2x - y = 1$  é representada por uma li-

*nha reta* no plano  $xy$ . A linha passa pelos pontos  $x = 1, y = 1$  e  $x = \frac{1}{2}, y = 0$  (também por  $(2, 3)$  e todos os pontos intermediários). A segunda equação  $x + y = 5$  produz a segunda reta (Figura 1.2a). Sua inclinação é  $dy/dx = -1$  e ela intersecta a primeira reta da solução.

O ponto de interseção situa-se nas duas retas. É a única solução para ambas as equações. Esse ponto  $x = 2$  e  $y = 3$  logo será encontrado por “eliminação”.



(a) As retas se cruzam em  $x = 2, y = 3$



(b) Combinação de vetores-coluna

Figura 1.2 Interpretação por linhas (duas retas) e interpretação por colunas (combinação de colunas).

A segunda abordagem trata das **colunas** do sistema linear. As duas equações separadas são, na verdade, **uma equação vetorial**:

$$\text{Forma de colunas} \quad x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

O problema é **descobrir a combinação dos vetores-coluna do lado esquerdo que produz o vetor do lado direito**. Esses vetores  $(2, 1)$  e  $(-1, 1)$  são representados pelas retas em negrito na Figura 1.2b. As incógnitas são os números  $x$  e  $y$  que multiplicam os vetores-coluna. Toda a ideia pode ser visualizada nessa figura, em que 2 vezes a coluna 1 é somada a 3 vezes a coluna 2. Geometricamente, isso produz um famoso paralelogramo. Algebricamente, produz o vetor correto  $(1, 5)$  no lado direito de nossas equações. A interpretação por colunas confirma que  $x = 2$  e  $y = 3$ .

Poderíamos passar mais tempo nesse exemplo, mas vamos avançar para  $n = 3$ . Três equações ainda são manipuláveis e possuem muito mais variedade:

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ \text{Três planos} \quad 4u - 6v &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

Novamente, podemos estudar as linhas ou as colunas; então, começaremos pelas linhas. Cada equação descreve um **plano** de três dimensões. O primeiro plano é  $2u + v + w = 5$  e está esboçado na Figura 1.3. Ele contém os pontos  $(\frac{5}{2}, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$  e  $(0, 0, 5)$ . Esse plano é determinado por quaisquer de seus três pontos, contanto que eles não se localizem em uma mesma reta.

Mudando o 5 para 10, o plano  $2u + v + w = 10$  seria paralelo ao primeiro. Ele conteria os pontos  $(5, 0, 0)$ ,  $(0, 10, 0)$  e  $(0, 0, 10)$ , e estaria duas vezes mais distante da origem – que é o ponto central  $u = 0, v = 0, w = 0$ . Mudando-se o lado direito, o plano move-se para um plano paralelo, e o plano  $2u + v + w = 0$  passa pela origem.

O segundo plano é  $4u - 6v = -2$ . Ele é desenhado verticalmente, pois  $w$  pode assumir qualquer valor. O coeficiente de  $w$  é zero, mas o plano continua no espaço tridimensional.

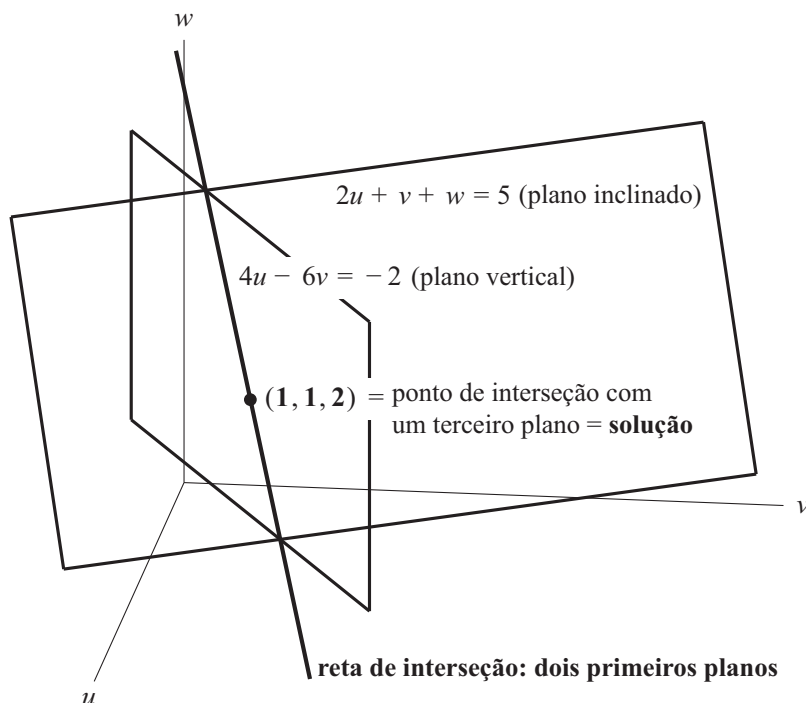


Figura 1.3 Interpretação por linhas: interseção de três planos a partir de três equações lineares.

(A equação  $4u = 3$ , ou mesmo o caso extremo  $u = 0$ , ainda descreveria um plano.) A figura mostra a interseção do segundo plano com o primeiro. Essa interseção é uma reta. *Em três dimensões, uma reta exige duas equações*; em  $n$  dimensões, ela exigirá  $n - 1$ .

Por fim, o terceiro plano intercepta essa linha em um ponto. Esse plano (não esboçado) representa a terceira equação  $-2u + 7v + 2w = 9$  e intersecta a reta em  $u = 1$ ,  $v = 1$ ,  $w = 2$ . Esse ponto de interseção triplo  $(1; 1; 2)$  é a solução do sistema linear.

Como essa interpretação por linhas pode ser estendida para  $n$  dimensões? As  $n$  equações conterão  $n$  incógnitas. A primeira equação ainda determina um “plano”. Não se trata mais de um plano bidimensional no espaço 3; de algum modo, ele possui “dimensão”  $n - 1$ . Ele deve ser plano e extremamente fino dentro de um espaço  $n$ -dimensional, mas parecerá sólido para nós.

Se o tempo é a quarta dimensão, o plano  $t = 0$  corta o espaço quadridimensional e produz o universo tridimensional em que vivemos (ou melhor, o universo, já que ele estava em  $t = 0$ ). Outro plano é  $z = 0$ , que também é tridimensional; trata-se do plano  $xy$  tomado em toda a extensão do tempo. Esses planos tridimensionais se interceptarão! Eles compartilham o plano  $xy$  em  $t = 0$ . Estamos duas dimensões abaixo e o plano seguinte deixa uma reta. Por fim, um quarto plano deixa um único ponto. É o ponto de interseção dos quatro planos em quatro dimensões, que resolve as quatro equações subjacentes.

Teríamos problemas em avançar nesse exemplo de relatividade. A questão é que a álgebra linear é capaz de operar com qualquer número de equações. A primeira equação produz um plano  $(n - 1)$ -dimensional, em  $n$  dimensões. O segundo plano intercepta o primeiro (assim esperamos) em um conjunto menor de “dimensão  $n - 2$ ”. Pressupondo-se que tudo corra bem, cada novo plano (cada nova equação) reduz a dimensão em uma unidade. No fim, quando todos os  $n$  planos tiverem sido contados, a interseção terá dimensão zero. É um *ponto* que se localiza em todos os planos e cujas coordenadas satisfazem todas as  $n$  equações. Trata-se da solução!

## Vetores-coluna e combinações lineares

Voltemos às colunas. Desta vez, a equação vetorial (a mesma equação de (1)) é

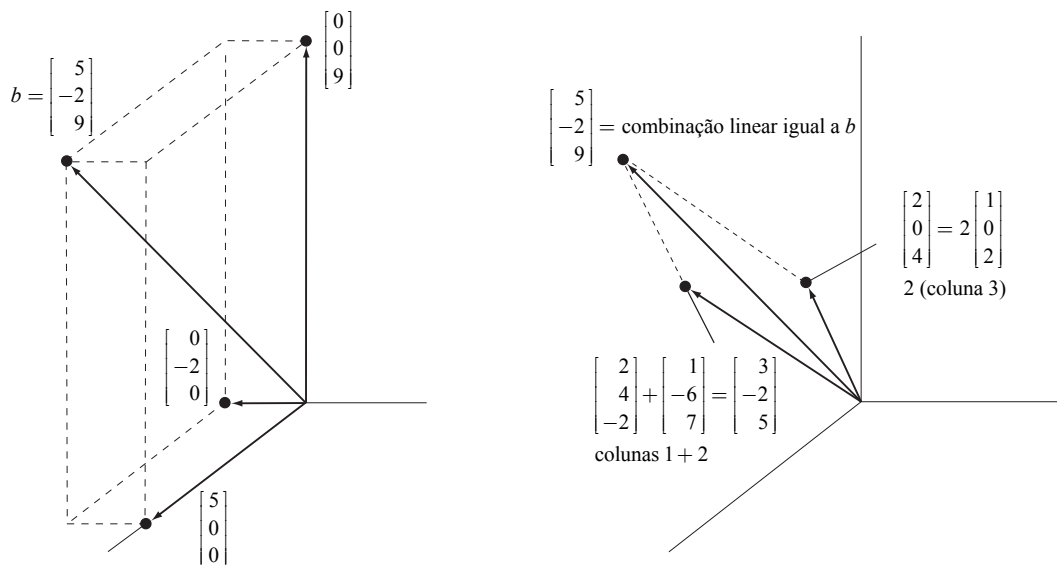
$$\text{Forma de colunas} \quad u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = b. \quad (2)$$

Trata-se de *vetores-coluna tridimensionais*. **O vetor  $b$  é identificado com o ponto cujas coordenadas são 5, -2, 9.** Cada ponto no espaço tridimensional é identificado a um vetor e vice-versa. Essa foi a ideia de Descartes, que transformou a geometria em álgebra trabalhando com as coordenadas do ponto. Podemos escrever o vetor em uma coluna, listar suas componentes, como em  $b = (5, -2, 9)$ , ou representá-lo geometricamente por uma seta a partir da origem. Você pode escolher a seta, o ponto ou os três números. Em seis dimensões, provavelmente, será mais fácil escolher os seis números.

Utilizamos parênteses e vírgulas quando as componentes são relacionadas horizontalmente e colchetes (sem vírgulas) quando escrevemos um vetor-coluna. O que realmente importa é a **adição de vetores** e a **multiplicação de vetores por um escalar** (um número). Na Figura 1.4a você pode ver uma adição vetorial, componente por componente:

Adição vetorial

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$



(a) Adição de vetores ao longo dos eixos

(b) Adição de colunas 1 + 2 + (3 + 3)

Figura 1.4 Interpretação por colunas: combinação linear de colunas é igual a  $b$ .

Na figura da direita, há uma multiplicação por 2 (e, se fosse por -2, o vetor teria direção oposta):

$$\text{Multiplicação por escalares} \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Também na figura da direita, encontra-se uma das ideias centrais da álgebra linear. Ela utiliza *ambas* as operações básicas; os vetores são *multiplicados por números e somados*. O resultado é chamado **combinação linear**, e esta combinação resolve nossa equação:

$$\text{Combinação linear} \quad 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

A equação (2) procurava os multiplicadores  $u$ ,  $v$ ,  $w$  que produziam o lado direito  $b$ . Esses números são  $u = 1$ ,  $v = 1$ ,  $w = 2$ . Eles fornecem a combinação correta das colunas e também determinam o ponto  $(1, 1, 2)$  da interpretação por linhas (em que os três planos se interceptam).

Nossa meta é olhar para além de duas ou três dimensões; para  $n$  dimensões. Com  $n$  equações de  $n$  incógnitas, há  $n$  planos na interpretação por linhas. Há  $n$  vetores na interpretação por colunas mais um vetor  $b$  no lado direito. As equações procuram uma **combinação linear das  $n$  colunas que seja igual a  $b$** . Para algumas equações, isso será impossível. Paradoxalmente, o modo para compreender o caso exemplar é estudar a exceção. Portanto, olhemos para a geometria exatamente onde ela falha, no **caso singular**.

**Interpretação por linhas:** interseção de planos

**Interpretação por colunas:** combinação de colunas

### O caso singular

Suponha que estejamos de novo em três dimensões e que os três planos na interpretação por linhas *não se intersectam*. O que pode dar errado? Uma possibilidade é que dois planos sejam paralelos. As equações  $2u + v + w = 5$  e  $4u + 2v + 2w = 11$  são inconsistentes – e planos paralelos não determinam nenhuma solução (a Figura 1.5a mostra uma perspectiva de nível). Em duas dimensões, as retas paralelas são as únicas possibilidades de falha. Mas três planos em três dimensões podem ser problemáticos mesmo que não sejam paralelos.

A dificuldade mais comum é mostrada na Figura 1.5b. Na perspectiva de nível, os planos formam um triângulo. Cada par de planos se intersecta em uma reta e essas retas são paralelas. O terceiro plano não é paralelo aos outros planos, mas é paralelo em relação a suas retas de interseção. Isso corresponde a um sistema singular com  $b = (2, 5, 6)$ :

$$\begin{array}{rcl} & u & + v + w = 2 \\ \text{Sem solução, como na Figura 1.5b} & 2u & + 3w = 5 \\ & 3u & + v + 4w = 6. \end{array} \quad (3)$$

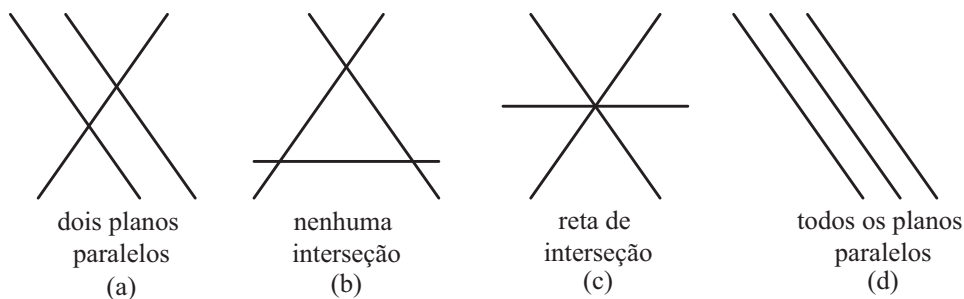


Figura 1.5 Casos singulares: sem solução em (a), (b) ou (d), e infinitas soluções em (c).

A soma dos lados esquerdos das duas primeiras equações é igual ao lado esquerdo da terceira. No lado direito, a soma falha:  $2 + 5 \neq 6$ . A equação 1 mais a equação 2 menos a equação 3 resulta na afirmação impossível  $0 = 1$ . Assim, as equações são **inconsistentes**, conforme a eliminação de Gauss apontará de modo sistemático.

Outro sistema singular, parecido com esse, possui **infinitas soluções**. Quando o 6 da última equação torna-se 7, a combinação das três equações fornece  $0 = 0$ . Agora, a terceira equação é a soma das duas primeiras. Nesse caso, os três planos possuem uma *reta inteira em comum* (Figura 1.5c). A mudança nos lados direitos moverá os planos, paralelos entre si na Figura 1.5b, e, se  $b = (2, 5, 7)$ , a figura será radicalmente diferente. O plano mais baixo se eleva para encontrar os demais, e há uma reta de soluções. A questão da Figura 1.5c ainda é singular, mas agora o problema é haver **soluções demais**, em vez de soluções de menos.

O caso extremo são os três planos paralelos. Para a maioria dos lados direitos, não há solução (Figura 1.5d). Para lados direitos especiais (como  $b = (0, 0, 0)$ !) há um plano inteiro de soluções – pois os três planos paralelos se movem de modo a se tornar o mesmo plano.

O que acontece com a **interpretação por colunas** quando o sistema é singular? Ele tem de dar errado; a questão é: como? Ainda há três colunas do lado esquerdo das equações e tentamos combiná-las para produzir  $b$ . Continuemos com a equação (3):

**Caso singular: composição de colunas**

**Três colunas no mesmo plano**

**Passível de solução apenas para  $b$  nesse plano**

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = b. \quad (4)$$

Para  $b = (2, 5, 7)$  isso era possível; para  $b = (2, 5, 6)$  não era. O motivo é que **essas três colunas se localizam em um plano**. Assim, cada combinação também está em um plano (que passa pela origem). Se o vetor  $b$  não estiver nesse plano, não haverá solução possível (Figura 1.6). Esse é, na maioria dos casos, o evento mais provável; um sistema singular geralmente não tem solução. Mas há uma chance de  $b$  se localizar no plano das colunas. Nesse caso, há soluções demais; as três colunas podem ser combinadas de *infinitos modos* para produzir  $b$ . Essa interpretação por colunas da Figura 1.6b corresponde à interpretação por linhas da Figura 1.5c.

Como sabemos se as três colunas se localizam no mesmo plano? Uma solução é encontrar uma combinação de colunas que some zero. Após alguns cálculos, obtemos  $u = 3, v = -1, w = -2$ .

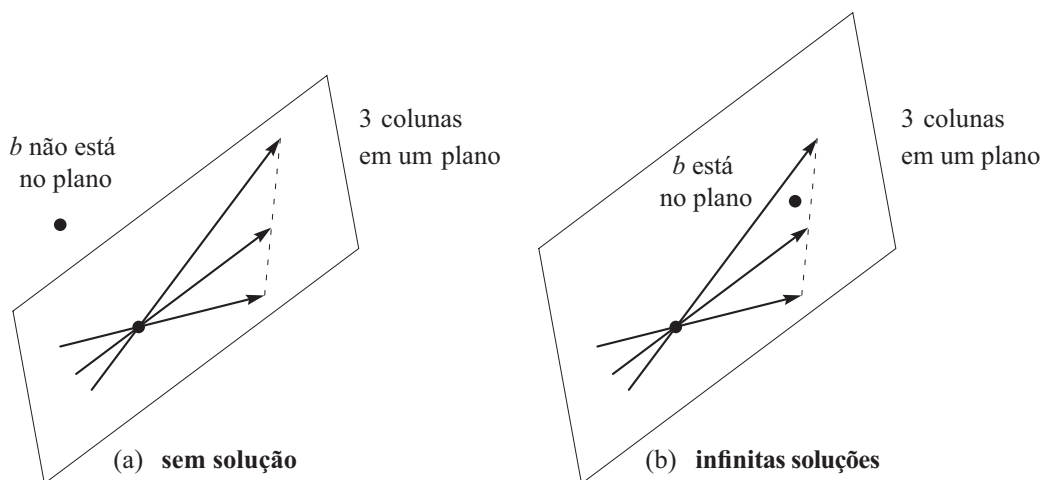


Figura 1.6 Casos singulares:  $b$  fora ou dentro do plano com todas as três colunas.

Três vezes a coluna 1 é igual à coluna 2, mais duas vezes a coluna 3. A coluna 1 está no plano das colunas 2 e 3. Apenas duas colunas são independentes.

O vetor  $b = (2, 5, 7)$  está nesse plano das colunas – é a coluna 1 mais a coluna 3 –, então,  $(1, 0, 1)$  é uma solução. *Podemos adicionar qualquer múltiplo da combinação  $(3, -1, -2)$  para obter  $b = 0$ .* Assim, há uma reta inteira de soluções – conforme tomamos conhecimento a partir da interpretação por linhas.

A verdade é que *sabíamos* que a combinação das colunas daria zero, pois as linhas deram zero. Trata-se de um fato matemático, não de cálculo – e ele permanece verdadeiro em dimensão  $n$ . ***Se os  $n$  planos não possuem nenhum ponto em comum ou possuem infinitos pontos em comum, então os  $n$  vetores-coluna se localizam no mesmo plano.***

Se a interpretação por linhas falhar, a interpretação por colunas também falhará. Isso mostra a diferença entre os Capítulos 1 e 2. Este capítulo estuda o problema mais importante – o caso *não singular* – em que há uma única solução e ela precisa ser encontrada. O Capítulo 2 estuda o caso geral, em que pode haver muitas soluções ou nenhuma. Em ambos os casos, não podemos continuar sem uma notação conveniente (*notação matricial*) e um algoritmo conveniente (*eliminação*). Após os exercícios, começaremos com a eliminação.

## Conjunto de problemas 1.2

1. Resolva as equações abaixo para encontrar a combinação de colunas que seja igual a  $b$ :

$$\begin{array}{lcl} \text{Sistema triangular} & u - v - w = & b_1 \\ & v + w = & b_2 \\ & w = & b_3. \end{array}$$

2. Esboce as três retas abaixo. As equações podem ser resolvidas?

$$\begin{array}{lcl} \text{Sistema 3 por 2} & x + 2y = & 2 \\ & x - y = & 2 \\ & y = & 1. \end{array}$$

O que acontece se todos os elementos do lado direito forem zero? Há alguma opção diferente de zero para o lado direito que permita que as três linhas se interceptem no mesmo ponto?

3. Para as equações  $x + y = 4$ ,  $2x - 2y = 4$ , a interpretação por (duas retas que se interceptam) e o método de colunas (combinação de duas colunas igual ao vetor-coluna  $(4, 4)$  do lado direito).
4. Encontre dois pontos sobre a linha de interseção dos três planos  $t = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + y + z + t = 1$  em um espaço quadridimensional.
5. (Recomendado) Descreva a interseção dos três planos  $u + v + w + z = 6$  e  $u + w + z = 4$  e  $u + w = 2$  (todos em espaço quadridimensional). É uma reta, um ponto ou um conjunto vazio? Como será a interseção se um quarto plano  $u = -1$  for adicionado? Encontre uma quarta equação que deixe o sistema sem solução.
6. Essas equações certamente têm a solução  $x = y = 0$ . Para quais valores de  $a$  há uma reta inteira de soluções?

$$\begin{array}{l} ax + 2y = 0 \\ 2x + ay = 0 \end{array}$$