LISTA DE EXERCÍCIOS 5

LUCAS BRAUNE

Os exercícios abaixo foram tirados do livro *Álgebra Linear e suas Aplicações* de Gilbert Strang (tradução da quarta edição americana).

(1) (Seção 3.5, exercício 1) Marque no plano complexo as todas as raízes sextas de 1. Qual é a raiz primitiva w? (Encontre suas partes real e imaginária.) Qual potência de w é igual a $1/w$? Encontre o valor da seguinte soma:

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^5$$

(2) (Seção 3.5, exercício 16) Encontre c_0, c_1, c_2 e c_3 de forma que

$$c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix} = \begin{cases} 2 & \text{quando } x = 0 \\ 0 & \text{quando } x = \pi/2 \\ -2 & \text{quando } x = \pi \\ 0 & \text{quando } x = 3\pi/2. \end{cases}$$

Em outras palavras, resolva o sistema $F_4 c = y$, onde

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Fourier 4 por 4 e $y = [2, 0, -2, 0]^{\mathrm{T}}$. (Lembre que $F\overline{F} = 4I$, de forma que $F^{-1} = \overline{F}/4$.)

(3) (Seção 4.2, exercício 5) Encontre os determinantes das seguintes matrizes.

(a) A matriz de posto um

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) A matriz triangular inferior U^{T}.

(d) A matriz inversa U^{-1}.

(e) A matriz "triangular inversa" (que resulta de trocas de linhas)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

(4) (Seção 4.3, exercício 3) Suponha que F_n seja o determinante da matriz tridiagonal n por n

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Expandindo em cofatores ao longo do linha 1, mostre que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Isto resulta na *sequência de Fibonacci*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

para os determinantes.

(5) (Seção 4.2, exercício 28) Aplicando operações de linha para produzir uma matriz triangular superior U, calcule

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(6) (Seção 4.3, exercício 41) Todas as **matrizes de pascal** possuem determinante 1. Se subtrairmos 1 da entrada (n, n), por que o determinante se torna zero? Utilize a regra 3 ou uma expansão em cofatores.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & \mathbf{20} \end{bmatrix} = 1 \text{ (conhecido)}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & \mathbf{19} \end{bmatrix} = 0 \text{ (explique)}$$

(7) (Seção 5.1, exercício 1) Encontre os autovetores e os autovalores da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Verifique que o traço é igual à soma dos autovalores e o determinante é igual ao seu produto.

(8) (Seção 5.1, exercício 2) Com a mesma matriz A, resolva a equação diferencial $du/dt = Au$ com a condição inicial $u(0) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$. Quais são as duas soluções exponenciais puras?