Analyse Numérique

Travaux Pratiques - Série 5

Exercice 1 : Quadrature de Gauss

a) Utiliser la fonction `nodes_weights_gauss_formula`, disponible sur Chamilo, qui calcule les poids et les nœuds d'une formule de Gauss–Legendre de degré s sur l'intervalle $[-1, 1]$, pour écrire une fonction qui calcule les poids et les nœuds d'une formule de Gauss–Legendre du même degré mais pour l'intervalle $[a, b]$ donnés. Donc, vous devriez écrire la fonction suivante

```
function [ci, bi] = nodes_weights_gauss_general(s, a, b)
% Computes the s nodes and weights for Gauss-Legendre quadrature for the
% interval (a,b).
```

En utilisant votre fonction, calculer les intégrales suivantes

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\mathrm{erf}(1), \qquad \mathcal{I}_2 = \int_{-3}^{2} |x|\, dx = \frac{13}{2},$$
$$\mathcal{I}_3 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2}\, dx = \frac{2\arctan(5)}{5}.$$

avec une formule de Gauss–Legendre tout en augmentant le degré s. En utilisant l'échelle loglog, tracer l'erreur de l'intégration en fonction de s pour toutes les fonctions d'en haut. Qu'est-ce que vous observez ?

Indice : Utilisez des fonctions anonymes comme `f = @(x)(sin(x))`.

b) Mettre en œuvre une méthode de Gauss–Legendre composée avec s fixé : étant donné une fonction f et un nombre d'intervalles N, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\, dx.$$

est approchée en utilisant la formule de Gauss–Legendre de degré fixe s pour chacune des intégrales sur la droite. Vous devez écrire une fonction avec l'en-tête suivant

```
function Int_value = integrate_composite_Gauss(N,s,a,b,f)
% Integrate function f on the interval (a,b) with N intervals and degree s
% using the nodes and weights from the function NODES_WEIGHTS_GAUSS_GENERAL
```

Intégrer les fonctions de a), mais maintenant pour $s = 4$ et $N \to \infty$. Tracer les erreurs comme fait dans la Figure 1. Pouvez-vous prédire l'ordre de l'erreur ? Tracer les pentes pour N^{-p} pour voir le taux de convergence pour certaines valeurs bien choisies de p.

Exercice 2 : Formules composées Pour approcher l'intégral $\int_a^b f(x)dx$ on va introduire trois formules différentes. D'abord on divise l'intervalle $[a, b]$ aux n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}],\ i = 1, \ldots, n$, avec pac $h = \frac{b-a}{n}$. On considère maintenant les formules suivantes pour approcher $\int_a^b f(x)dx$:

— La formule de trapèze

$$T_n := \tfrac{1}{2}h(f(a)+f(b)) + h\sum_{i=2}^{n} f(x_i).$$

— La formule du point milieu

$$M_n := h\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

— La formule de Simpson :

$$S_n := \frac{T_n + 2M_n}{3}.$$

(a) Écrire deux fonctions MATLAB `Tn = trap(f,a,b,n)` et `Mn = mid(f,a,b,n)` où les `Tn` et `Mn` sont les approximations de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant les formules de trapèze et du point milieu respectivement, pour n sous-intervalles.
Utiliser vos functions pour evaluer les 3 intégrales de la partie a) de l'exercice 1, et tracer l'erreur en fonction de h (voir figure 2). En outre, tracer sur la même figure l'erreur théorique.

(b) Écrire une fonction MATLAB `Sn = simpeq(f,a,b,n)` où l'output `Sn` est l'approximation de l'intégral $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de Simpson, pour n sous-intervalles.
Tester votre nouvelle fonction pour les trois intégrals et tracer les erreurs en fonction de h. Tracer sur la même figure l'erreur théorique.

(c) Utiliser la fonction de la partie (b) pour approximer l'intégral $\int_a^b Ax^3 + Bx^2 + Cx + Ddx$ en prenant des valeurs différentes pour les constantes A, B, C, et D. Qu'est-ce-qu'on peut déduire ?.

Exercice 3 : Integration de fonctions périodiques. La règle du trapèze composée donne des résultats étonnamment bons quand on l'applique aux fonctions périodiques (i.e., $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b)$, pour $k = 0, 1, \ldots.$), bien meilleures que l'estimation d'erreur vue en cours pour des fonctions générales .

a) Intégrer la fonction périodique

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \exp\left(x^2(1-x)^2\right)dx$$

en utilisant la règle du trapèze composée (avec des nœuds équidistants $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$).
Tracer l'erreur d'intégration comme fonction du nombre de nœuds $n = 2:2:52$ (voir Fig. 3), où vous pouvez utiliser la fonction de MATLAB `integral` pour calculer I 'exactement'. Comparer les résultats avec les intégrales obtenues par la méthode de Simpson composée.
Répéter l'expérience pour la fonction non périodique $\int_0^1 \exp(-x^2)dx$ pour voir la différence.

b) Expliquer (non rigoureusement) pourquoi la règle du trapèze fonctionne aussi bien.
Indice : (1) La règle du trapèze est exacte pour les fonctions trigonométriques $\sin(2k\pi x)$ et $\cos(2k\pi x)$ sur $x \in [0,1]$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Vérifier cela numériquement pour quelques valeurs k.
(2) Les fonctions périodiques admettent une extension en séries de Fourier.

Exercice 4 : Résolution d'équations intégrales. Résolvons les équations intégrales en utilisant l'idée de l'intégration numérique.

Considérons la dite *équation intégrale de Fredholm du second type*

$$x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt + f(s), \quad a \leq s \leq b, \tag{1}$$

où $K(s,t)$ et $f(s)$ sont les fonctions connues et la fonction $x(t)$ est à déterminer. Pour résoudre $x(t)$ numériquement, on doit discrétiser la partie intégrale avec une formule de quadrature

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} w_i K(s,t_i)x(t_i), \tag{2}$$

où $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ sont les nœuds de quadrature et w_i, pour $i = 0, \ldots, n$, sont les poids correspondants.

Par cette approximation, on obtient une équation discrétisée de (1) :

$$\widehat{x}(s) = \sum_{i=0}^{n} w_i K(s,t_i)\widehat{x}(t_i) + f(s). \tag{3}$$

Évaluer cette relation aux nœuds $s = t_j$ mène au système linéaire d'équations

$$\widehat{x}(t_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i K(t_j,t_i)\widehat{x}(t_i) + f(t_j), \qquad \text{for} \quad j = 0, \ldots, n.$$

En forme matricielle, cela est équivalent à

$$\underbrace{\left(I_{n+1} - \begin{bmatrix} K(t_0,t_0)w_0 & K(t_0,t_1)w_1 & \ldots & K(t_0,t_n)w_n \\ K(t_1,t_0)w_0 & K(t_1,t_1)w_1 & \ldots & K(t_1,t_n)w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_n,t_0)w_0 & K(t_n,t_1)w_1 & \ldots & K(t_n,t_n)w_n \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{x}(t_0) \\ \widehat{x}(t_1) \\ \vdots \\ \widehat{x}(t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}.$$

Après avoir résolu l'équation linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ pour $\mathbf{x}$, on obtient les valeurs de la fonctions $\widehat{x}(t_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. Insérez les dans la formule (3). On obtient la solution générale $\widehat{x}(s)$ pour tous les autres points $s \in [a,b]$.

Indice : Le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ peut être résolu avec MATLAB avec x = A \ f où \ est le symbole backslash .

(a) Résolvez l'équation de Fredholm intégrale

$$x(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{0.3x(t)}{1 - 0.64\cos^2(\frac{1}{2}(s+t))}dt + f(s), \quad -\pi \leq s \leq \pi, , \tag{a}$$

où $f(s) = 25 - 16\sin^2(s)$. Vous pouvez utiliser la méthode de Simpson composée avec des nœuds de quadrature équidistants t_i pour la quadrature (2). Tracer la solution calculée $\widehat{x}(s)$ et comparer la avec la solution exacte $x(s) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17}\cos(2s)$. Voir, e.g., Fig. 4 pour un nombre de nœuds $n = 2, 6, 10$.

(b) Répéter l'expérience ci-dessus avec l'équation intégrale

$$x(s) = \int_0^1 |s-t|x(t)dt + f(s), \quad 0 \leq s \leq 1, , \tag{b}$$

où $f(s) = -(2s^3 - 9s + 2)/6$. Cette équation a pour solution exacte $x(s) = s$.

(c) Tracer l'erreur d'approximation pour $\widehat{x}$, calculée avec

$$\operatorname{err}(x,\widehat{x}) := \max_{i=0}^{n} |\widehat{x}(t_i) - x(t_i)|,$$

comme fonction du nombre de nœuds de quadrature avec $n = 2 : 2 : 52$. Voir, e.g., la figure à gauche in Fig. (5). Pouvez-vous expliquer pourquoi l'algorithme semble converger plus lentement pour l'équation (b) que pour l'équation (a) ?

(d) Ensuite, utiliser la règle du trapèze composée pour la quadrature (2) pour calculer $\widehat{x}$. Répétez l'expérience (c), voir, e.g., la figure à droite dans Fig. (5). Pour l'équation intégrale (a), la règle du trapèze semble meilleure que la méthode de Simpson (Figure à droite). Savez-vous pourquoi ?

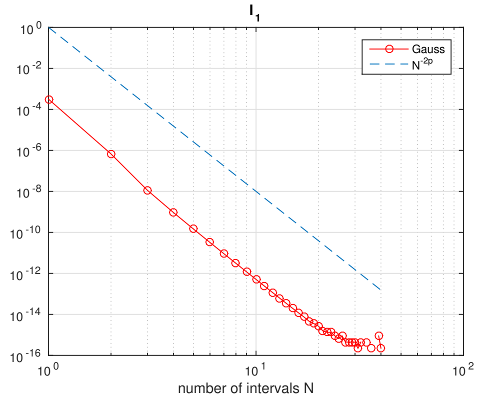

FIGURE 1 – Graphique de l'exercice 1b) pour $\mathcal{I}_1$

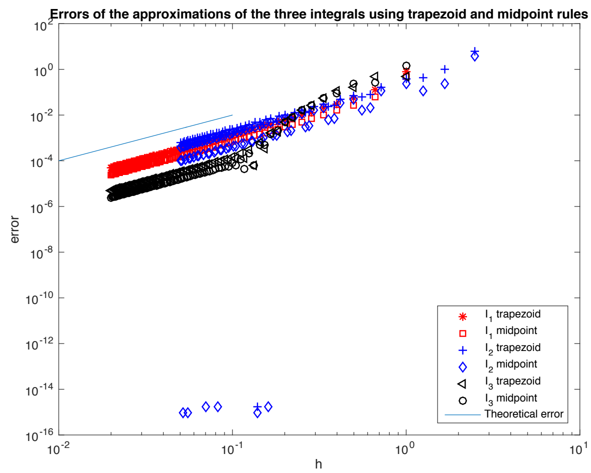

FIGURE 2 – Graphique de l'exercice 2a)

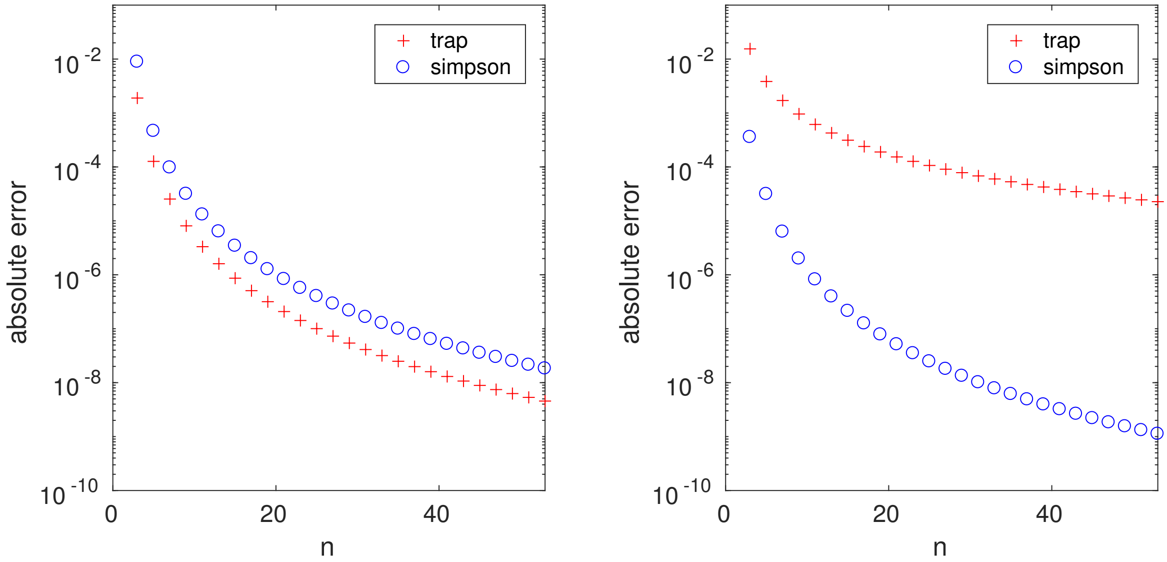

FIGURE 3 – Graphique de l'exercice 3 : (Gauche) $f(x) = \exp(x^2(1-x)^2)$; (Droite) $f(x) = \exp(-x^2)$.

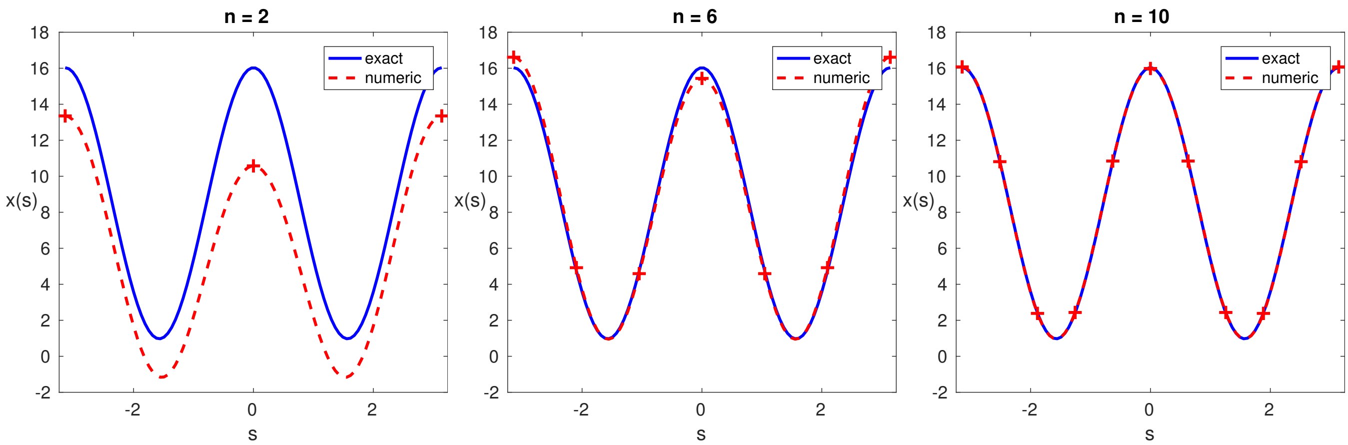

FIGURE 4 – Graphique de l'exercice 4

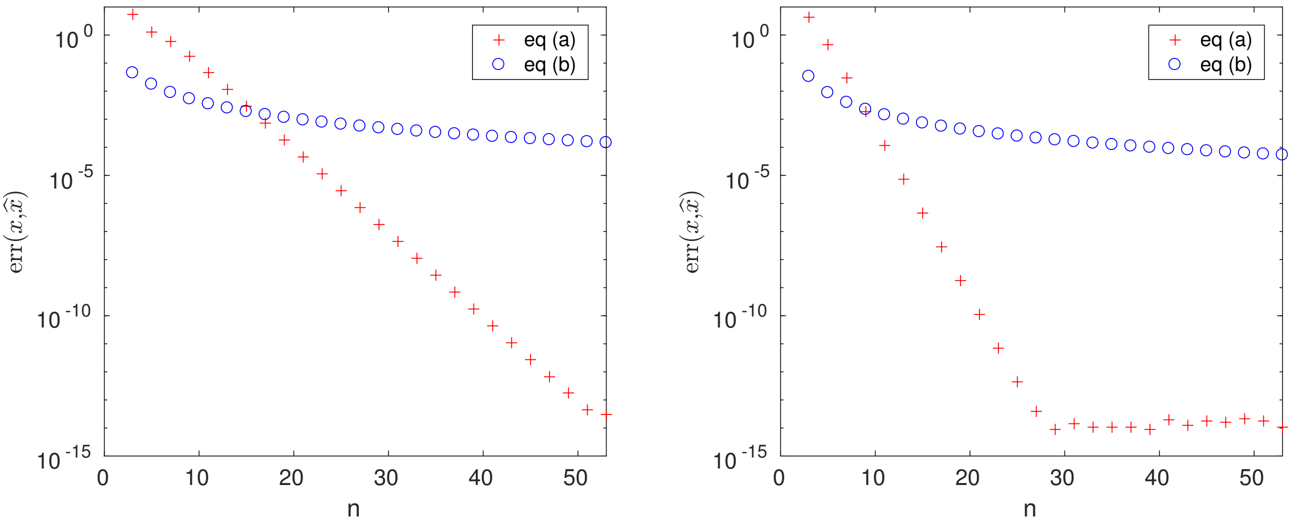

FIGURE 5 – Graphique de l'exercice 4 : (Gauche) Méthode de Simpson ; (Droite) Règle du Trapèze.