UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des Sciences

Section de Mathématiques
Á rendre sur Chamilo avant le jeudi 25 octobre 2018
L'évaluation aura lieu le vendredi 26 octobre 2018

Analyse Numérique

Travaux Pratiques - Série 3

Exercice 1 : Interpolation de Lagrange - analyse de l'erreur. Le but de cet exercice est de comparer les performances de l'interpolation de Lagrange dans différents contextes. Vous pouvez réutiliser vos algorithmes du TP précédent ou utiliser ceux proposés sur Chamilo. On rappelle que l'erreur d'interpolation est bornée pour les points équidistants par

$$\max_{a\leq x\leq b} |p_n(x) - f(x)| \leq b_1(n) = \max_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1},$$

et pour les points de Chebyshev par

$$\max_{a\leq x\leq b} |p_n(x) - f(x)| \leq b_2(n) = \max_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)| \left(\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\right).$$

(a) Pour $n \leq 14$ et $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, comparer l'erreur $\max_x |p_n(x) - f(x)|$ sur $[-1, 1]$ de l'interpolation de Lagrange (formule de Lagrange et formule barycentrique) avec les bornes décrites auparavant pour les points équidistants et de Chebyshev. Ci-dessous, on peut voir le résultat pour la fonction $f(x) = \exp(x)$:

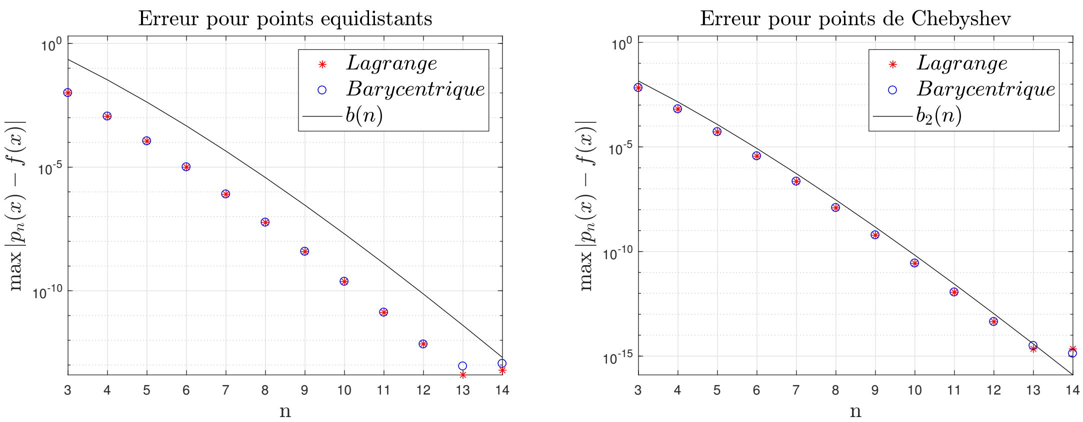

FIGURE 1 – Erreurs d'interpolation $\max_x |p_n(x) - f(x)|$ pour des n petits.

(b) À présent, itérer les calculs précédents pour des n allant jusqu'à 100. Essayer d'expliquer les deux phénomènes observés dans la figure2.

(c) Selon la régularité de la fonction interpolée, l'algorithme avec points de Chebyshev converge plus ou moins vite. Si la fonction est p fois différentiable, alors on aura

$$\max_x |p_n(x) - f(x)| \leq Cn^{-p}.$$

Dans cette question, on se propose d'observer numériquement cette propriété pour les deux fonctions $f_1(x) = |x|$ et $f_2(x) = |\sin(5x)|^3$ (combien de fois différentiable ?). Tracer deux courbes de convergence pour observer l'ordre comme sur la figure 3 en utilisant la commande `loglog`.

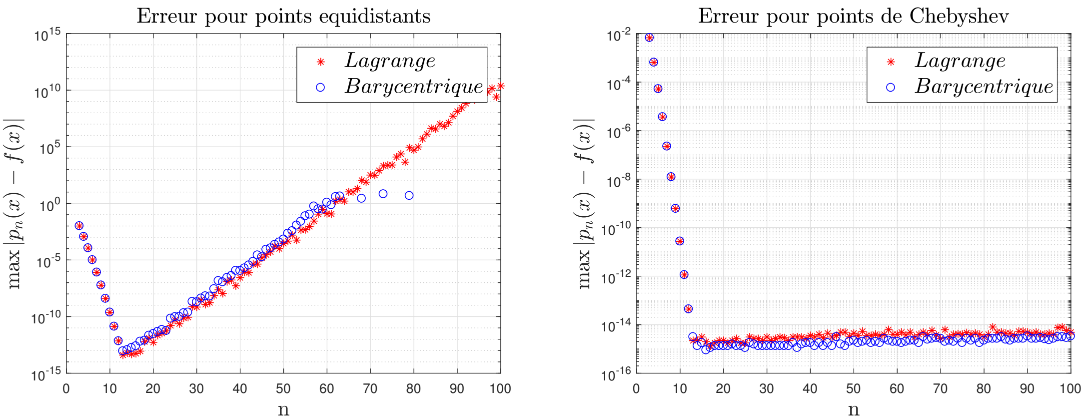

FIGURE 2 – Erreurs d'interpolation $\max_x |p_n(x) - f(x)|$ pour des n grands.

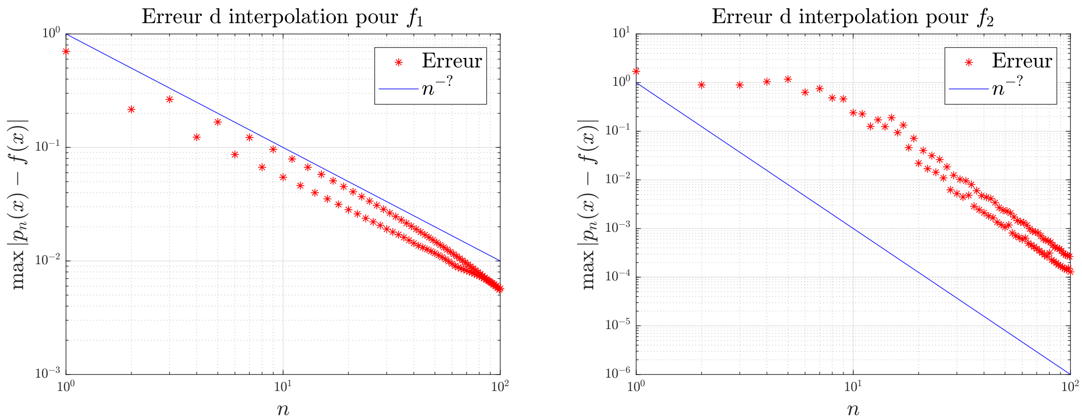

FIGURE 3 – Ordre de convergence de l'interpolation de Chebyshev.

Exercice 2 : Interpolation d'Hermite. Écrire un code qui calcule le polynôme d'interpolation de Hermite en utilisant le tableau des différences divisées modifiées.

(a) Utiliser ce code pour obtenir le polynôme qui interpole les points suivants :
- points x_i : $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- valeurs y_i : $\{0, 1, 4, 9, 16\}$
- dérivées z_i : $\{0, 0, 0, 0, 0\}$

Comparer le résultat obtenu avec les routines d'interpolation de Lagrange du TP2 (voir figure 4). Quelle est la fonction interpolée par l'interpolation de Lagrange ?

(b) Modifiez votre code pour résoudre des problèmes dont les dérivées sont données seulement dans quelques points.

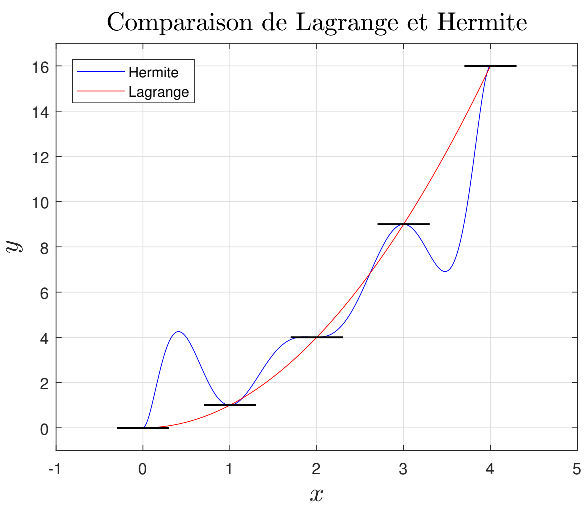

FIGURE 4 – Comparaison des interpolations de Lagrange et Hermite.