Kurven und Flächen

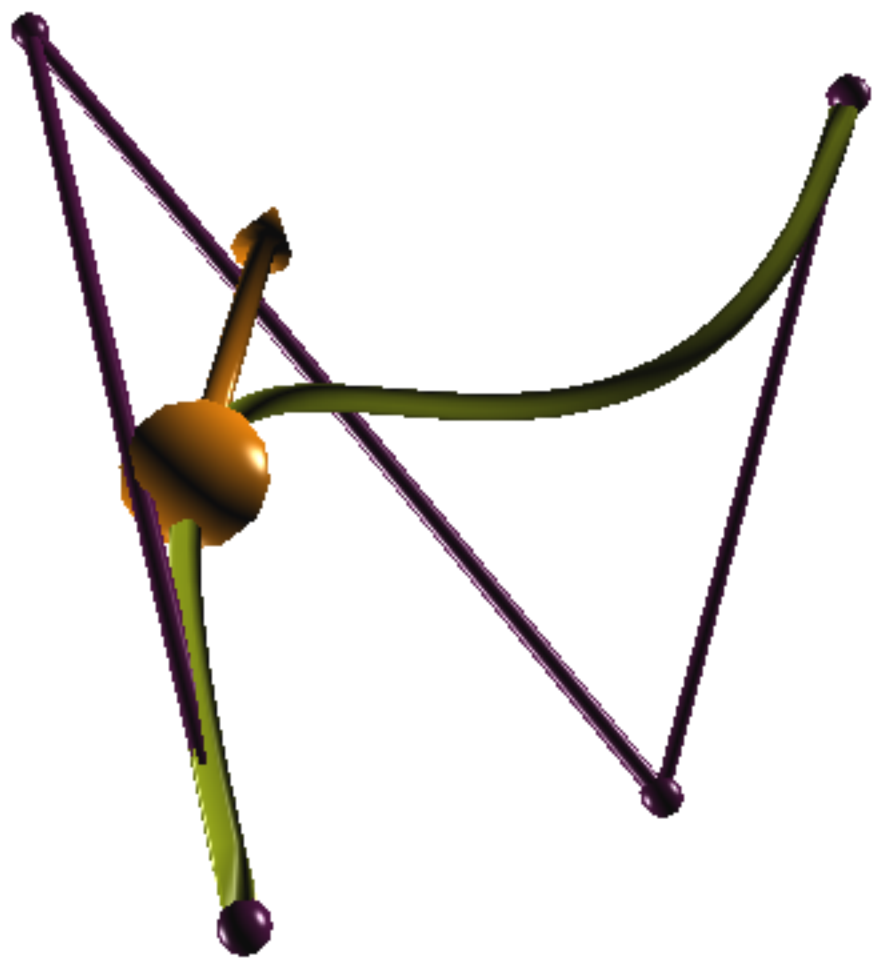
Einführung in die Computergrafik

Wiederholung

- Implizite Funktionen
- Interpolation
- Oberflächen-Extraktion
    - Marching Squares (2D)
    - Marching Cubes (3D)

Ausblick

Kurven

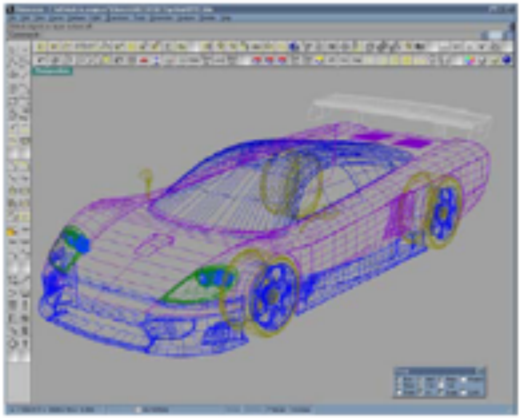


Agenda

- Polynomielle Kurven
    - Parametrisierung
    - Monom-Kurve
    - Hermite-Kurve
    - Bézier-Kurve
- Parametrisierte Flächen
- Zusammenfassung

Motivation

- Anwendungsbereich für Kurven und Flächen-Modellierungen:
    - CAD im Maschinenbau
    - Industriedesign (Auto, etc.)
    - Filmindustrie
    - Kamerapfade
    - Animation



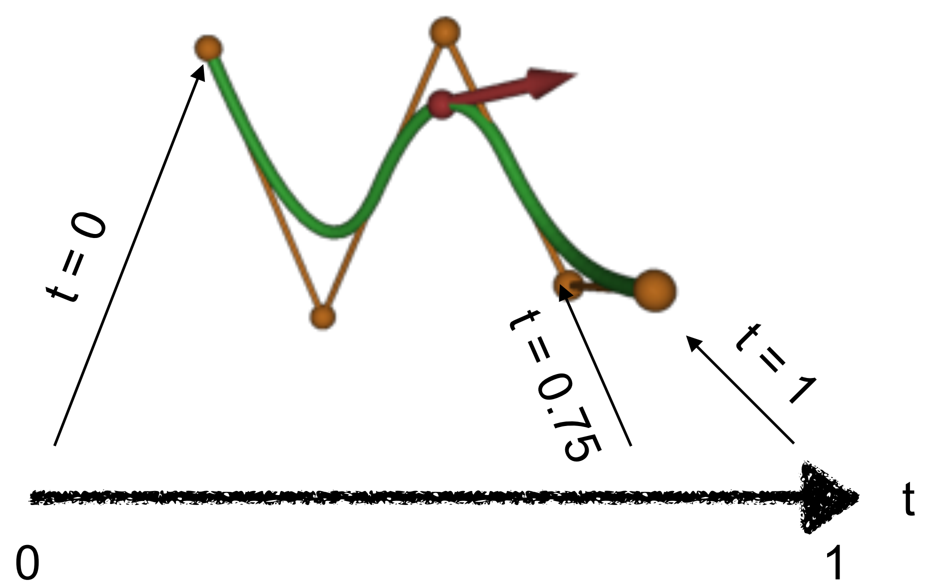
Parametrisierung

Parametrisierung

- Abbildung:

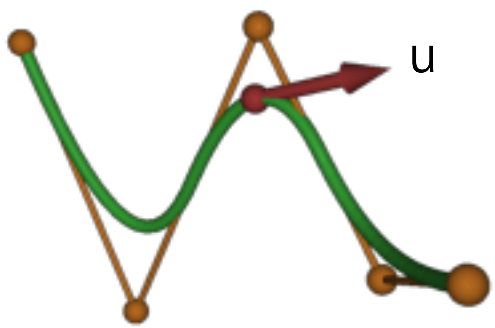
$$t \rightarrow \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

  - bei uns meist: t aus dem Intervall [0,1]
  - Interpretation: t = Schieberegler



Ableitung

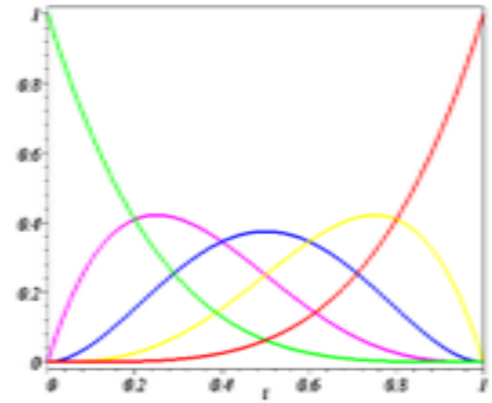
- Ableitung f´(t) von f an der Stelle t
  - Vektor u, der die Tangentenrichtung der Kurve an dieser Stelle angibt



Repräsentation von Kurven

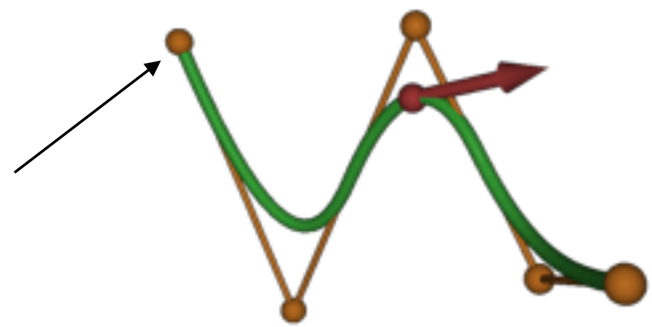
- Basisfunktionen:
  - Gewichtsfunktionen für Kontrollpunkte

$$B_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$



- Kontrollpunkte:

$$c_i \in \mathbb{R}^3$$



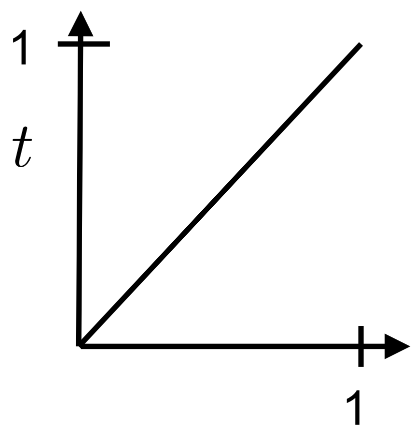
$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

Basisfunktionen

$$B_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Basisfunktion repräsentiert ein (parametrisiertes) Gewicht
- bei Kurven
    - Gewicht für Kontrollpunkt
    - jeder Kontrollpunkt hat eigene Basisfunktion
    - meist: Werte zwischen 0 (kein Einfluss) und 1 (maximaler Einfluss)
- Beispiele

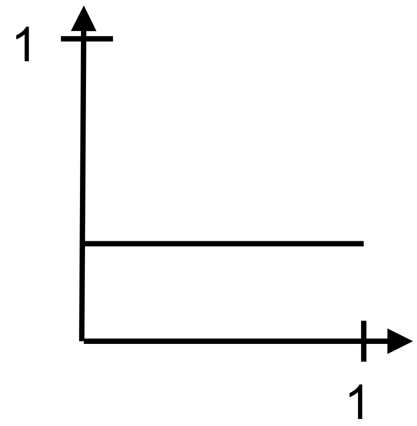
$$B(t) = t$$



kein Einfluss für t = 0,
maximaler Einfluss für t = 1

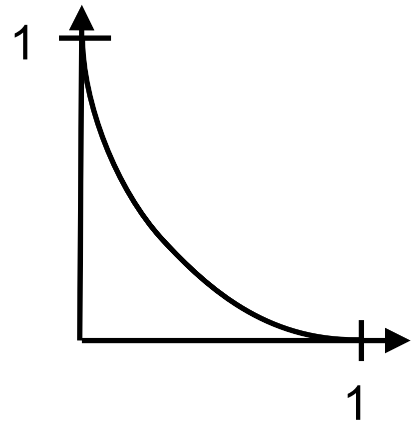
Basisfunktionen

$$B(t) = 0.3$$



Einfluss konstant 0.3
(unabhängig von t)

$$B(t) = (t-1)^2$$

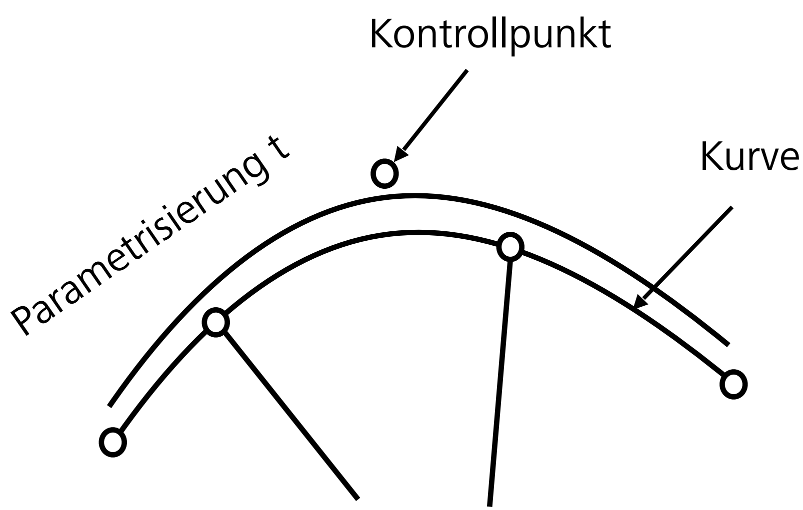


maximaler Einfluss für t=0,
kein Einfluss für t = 1,
Einfluss schwindet zu
Beginn stärker

Basisfunktionen

- lineare Interpolation
  - Spezialfall einer Kurve: zwei Kontrollpunkte, Basisfunktion
- generell bei Kurven
  - Kurvenwert ergibt sich als gewichtete Summe (durch Basisfunktionen) der Kontrollpunkte

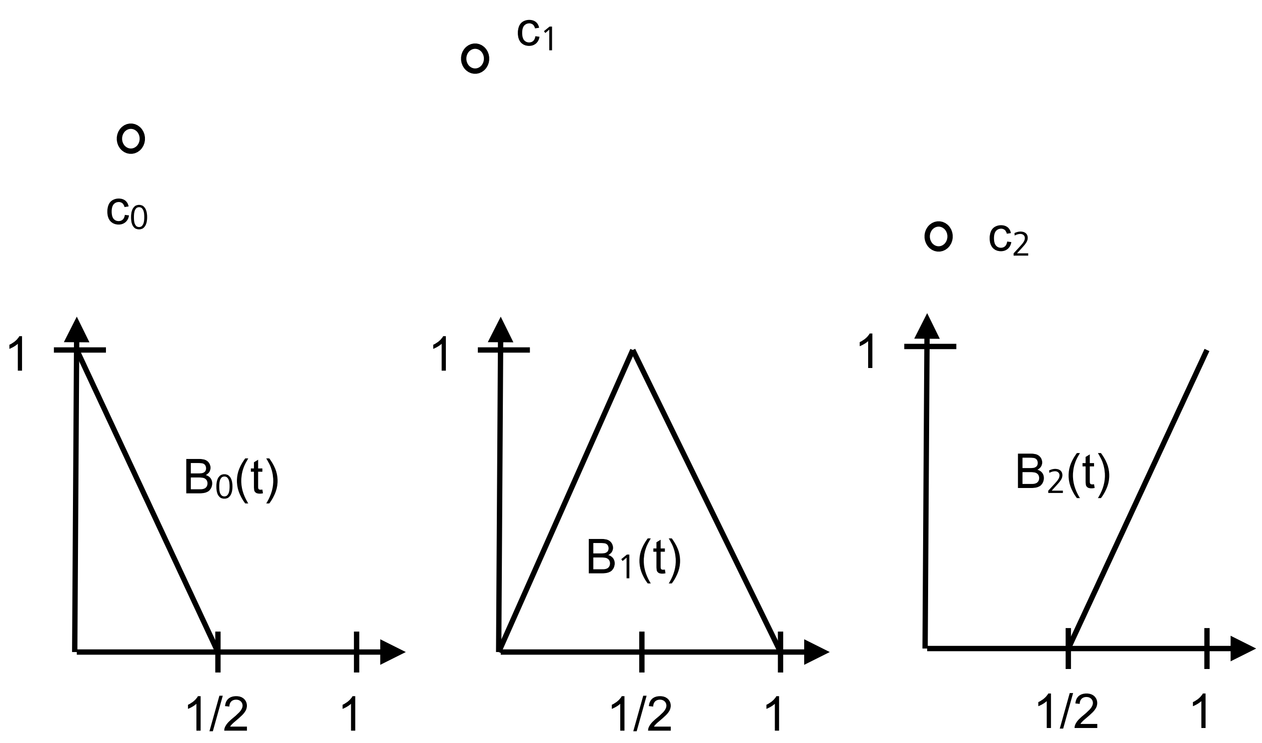
$$B_0(t) = 1 - t$$
$$B_1(t) = t$$



jeder Kurvenpunkt = Summe der gewichteten Kontrollpunkte, Gewichte durch t bestimmt

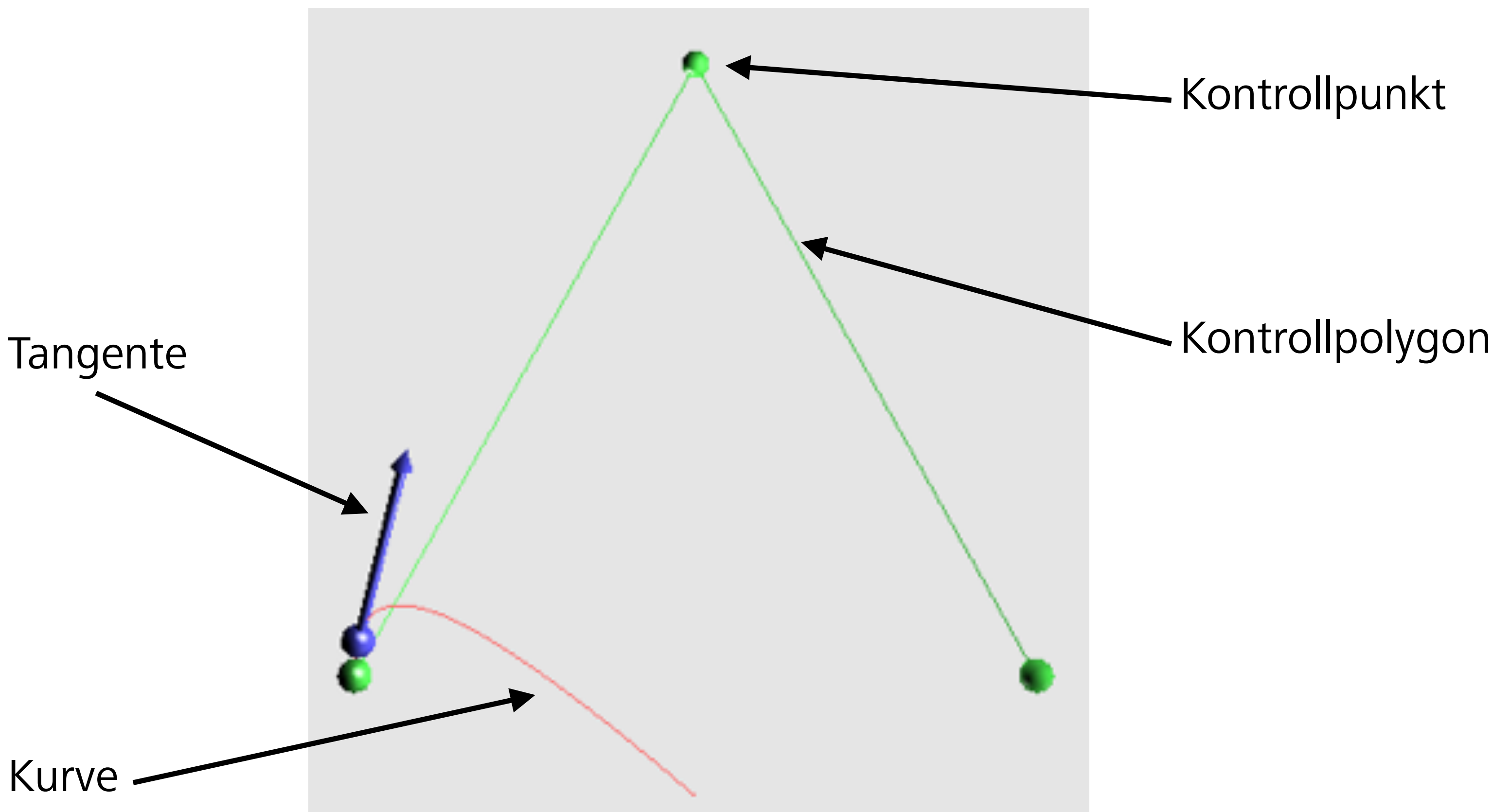
Übung: Basisfunktionen

- Gegeben sind die drei Kontrollpunkte c_0 bis c_2
- und die drei Basisfunktionen B_0 bis B_2
- Wie sieht die resultierende Kurve aus?



Monom-Kurve

Monom-Kurve



Monom-Kurve

- Monom-Kurve vom Grad n in Rn:

$$p:[a,b] \to \mathbf{R}^n,\ p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n,\ c_i \in \mathbf{R}$$

- Monome 1, t, t^2, ..., t^n bilden eine Basis

Monom-Kurve

- geometrische Bedeutung der Koeffizienten?

$$p:[a,b] \to \mathbf{R}^d, p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n, c_i \in \mathbf{R}$$

$$c_0 = p(0)$$

$$c_1 = p'(0)$$

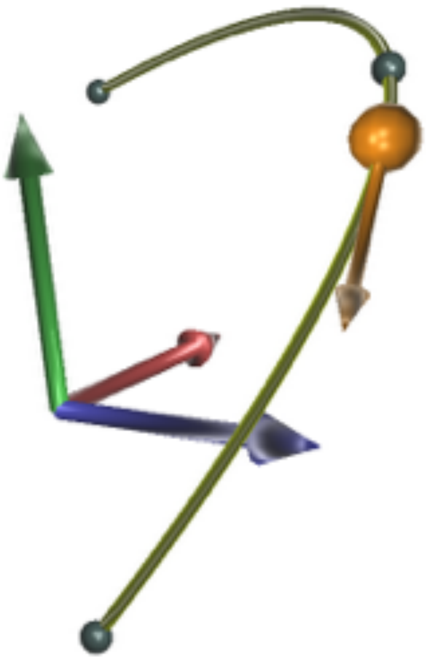
$$c_2 = \frac{1}{2} p''(0)$$

$$c_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0)$$

- Koeffizienten bestimmen Ableitungen an der Stelle 0 der Kurve
- Modellieren von Kurven ist mit Hilfe dieser Koeffizienten praktisch unmöglich

Tangente

- Richtung der Kurve in jedem Punkt
- Berechnung durch Ableitung nach Parameter t
- Tangente ist ein Vektor
    - Kontrollpunkte aus R^2 → Tangente 2D-Vektor
    - Kontrollpunkte aus R^3 → Tangente 3D-Vektor
- Beispiel: Monomkurve vom Grad 1
    - $p(t) = c_0 + c_1 * t$
    - $p'(t) = c_1$



Tangente (orange) an Kurve

Berechnung der Tangenten

- Tangente T
- Hinweis: Länge der Tangente gibt Geschwindigkeit an
  - hängt von Parametrisierung ab
  - zur Darstellung ggf. normieren

- Möglichkeit 1: Ableitung der Kurvenfunktion nach t:

$$T(t) = p'(t)$$

- Möglichkeit 2: Falls analytische Berechnung der Ableitung nicht möglich:
  - Differenzenquotienten (h klein, z.B. $h=10^{-5}$)

$$T(t) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

Interpolation

- Gegeben: Liste von Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Gesucht: Kurve vom Grad n, die die Punkte interpoliert
- Idee:
  - jedem Punkt x_i wird t-Wert zugeordnet (äquidistante Aufteilung)
  - Finden der notwendigen Kontrollpunkte c_i durch Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\Delta t = \frac{1}{n}$$

$$x_i = p(i\Delta t) = c_0 + c_1 i\Delta t + c_2 (i\Delta t)^2 + \ldots + c_n (i\Delta t)^n$$

Interpolation

- daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = c_0 \\
&x_1 = c_0 + c_1 \Delta t + c_2 (\Delta t)^2 + ... + c_n (\Delta t)^n \\
&x_2 = c_0 + c_1 2\Delta t + c_2 (2\Delta t)^2 + ... + c_n (2\Delta t)^n \\
&... \\
&x_n = c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_n
\end{aligned}
$$

- also:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & ... & 0 \\
1 & \Delta t & (\Delta t)^2 & ... & (\Delta t)^n \\
1 & 2\Delta t & (2\Delta t)^2 & ... & (2\Delta t)^n \\
\vdots & & & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & ... & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_0 \\ c_i \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
x_0 \\ x_i \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
$$

- oder:

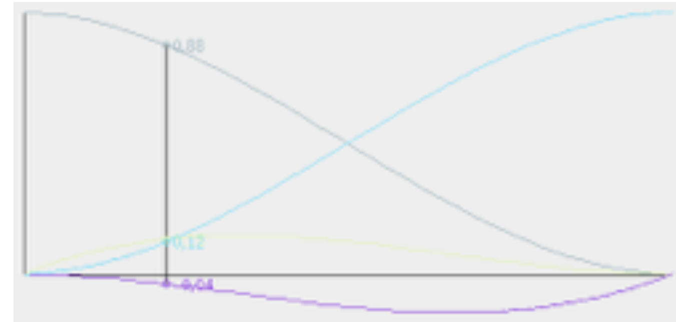
$Ac = x$ und damit $c = A^-1x$

Übung: Monom-Kurve

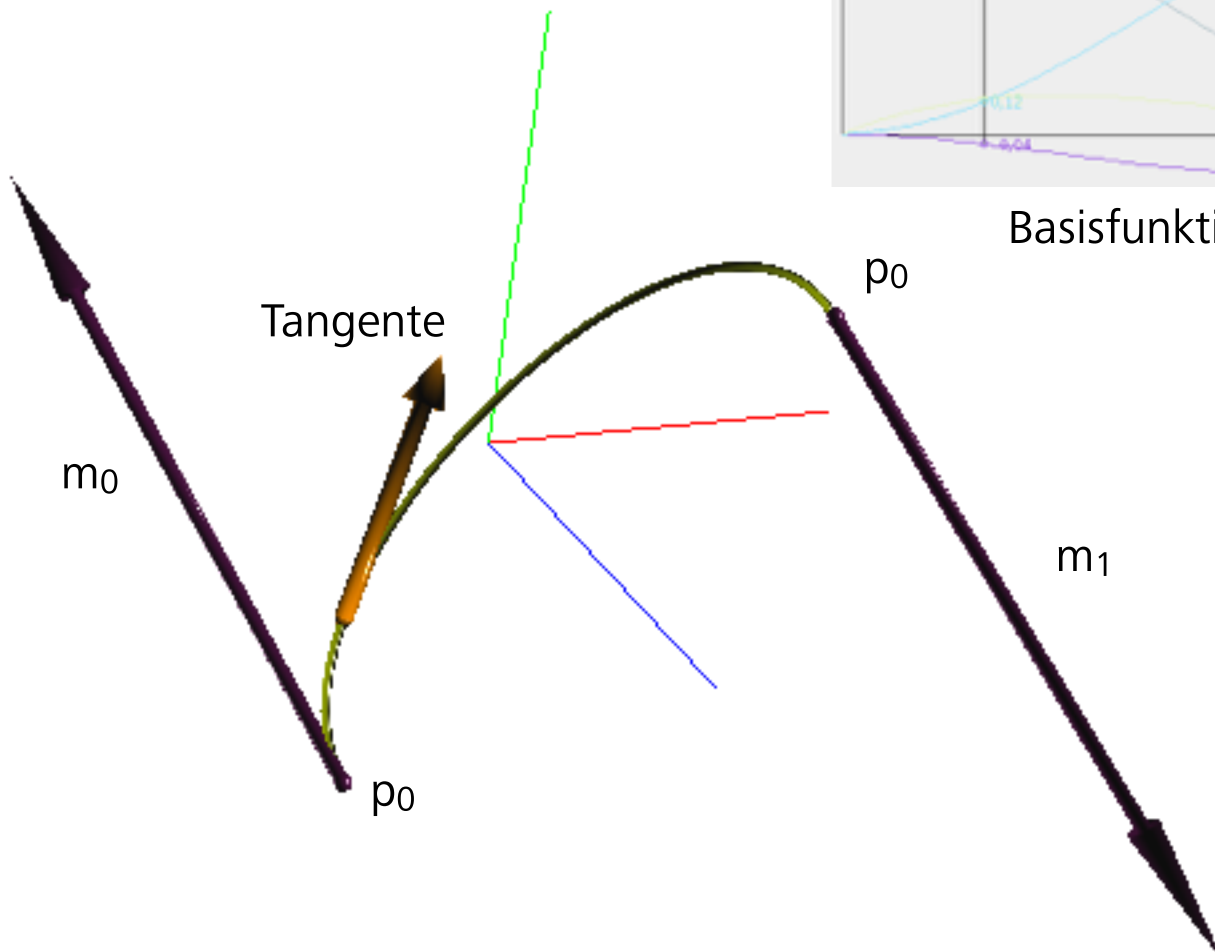
- Bestimmen Sie die Ableitung einer Monomkurve vom Grad 3 an der Parameterstelle 0.5. Die Kontrollpunkte sind mit c_i bezeichnet.
- **Hinweis**: Das Ergebnis hängt immer noch von den (variablen) Kontrollpunkten c_i ab.

Hermite-Kurve

Hermite-Kurve

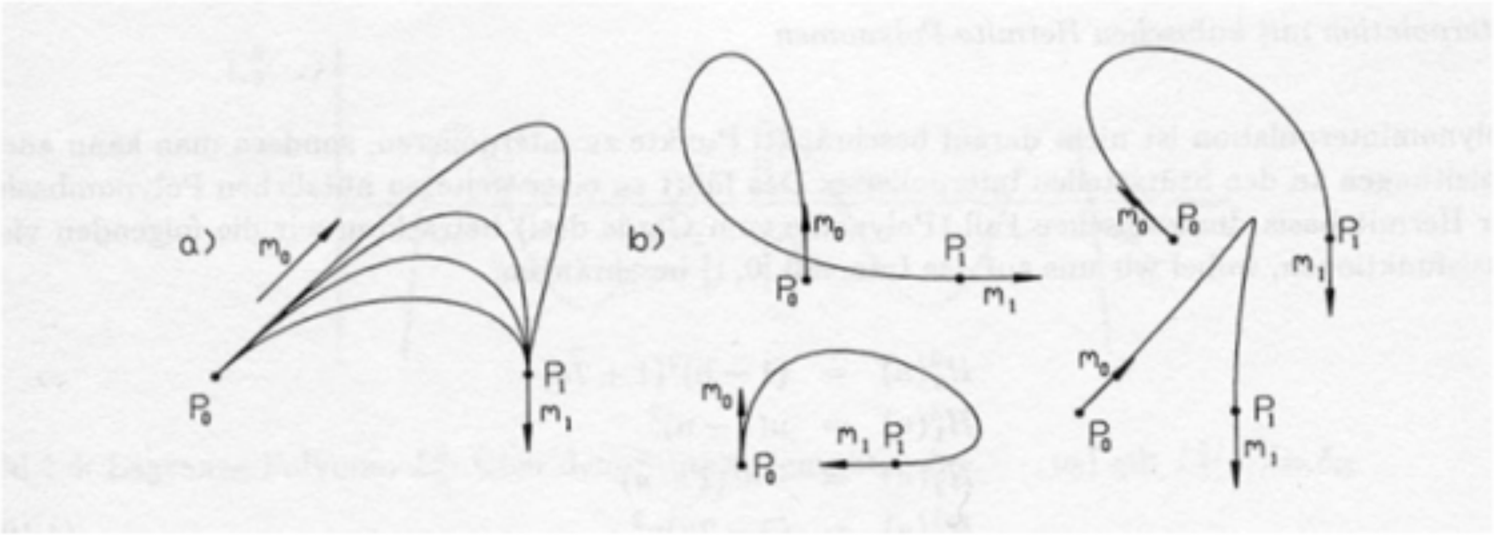


Basisfunktionen



Hermite-Kurve

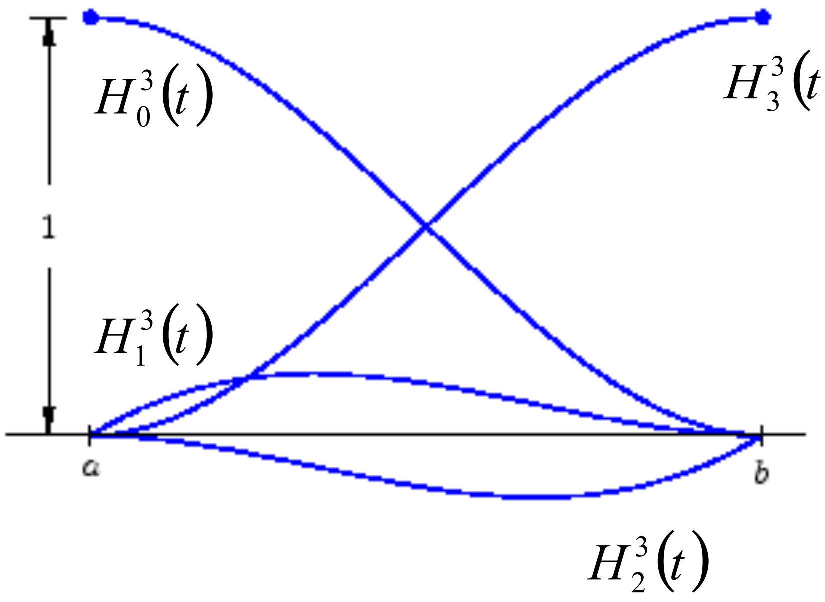
- die Kurve $p(t) = c_0 \cdot H_0^3(t) + c_1 \cdot H_1^3(t) + c_2 \cdot H_2^3(t) + c_3 \cdot H_3^3(t)$ heißt Hermite-Kurve
- alternative Notation (siehe Abbildung)
  - $c_0 = p_0$, $c_1 = m_0$, $c_2 = m_1$, $c_3 = p_1$
- die Koeffizienten 0 und 3 sind Punkte (p_0, p_1), die Koeffizienten 1 und 2 Ableitungen (m_0, m_1) in diesen Punkten



Basisfunktionen

- neben Punkten auch Ableitungen (Tangentenvektoren) interpolieren
  - Hermite-Basis
  - im kubischen Fall: vier Basisfunktionen über [0,1]:

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(1+2t)$$
$$H_1^3(t) = t(1-t)^2$$
$$H_2^3(t) = -t^2(1-t)$$
$$H_3^3(t) = (3-2t)t^2$$

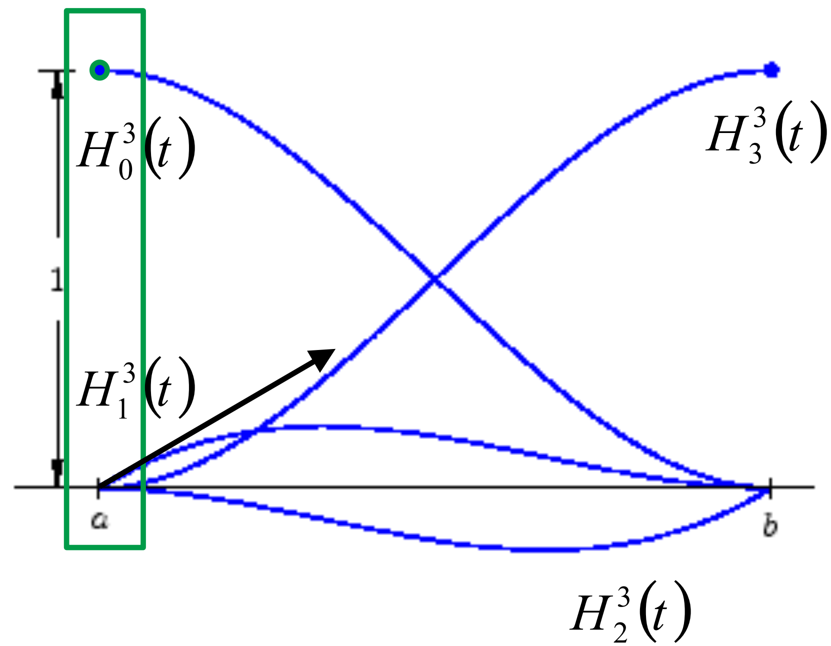


Basisfunktionen

- Betrachten wir t = 0
  - $H_0^3(t)$ hat den Wert 1, alle anderen Basisfunktionen 0

    → Interpolation von p0 (c0)
  - Ableitung $H_1^{3'}(t)$ hat den Wert 1, Ableitungen aller anderen Basisfunktionen 0

    → Ableitung entspricht m0 (c1)

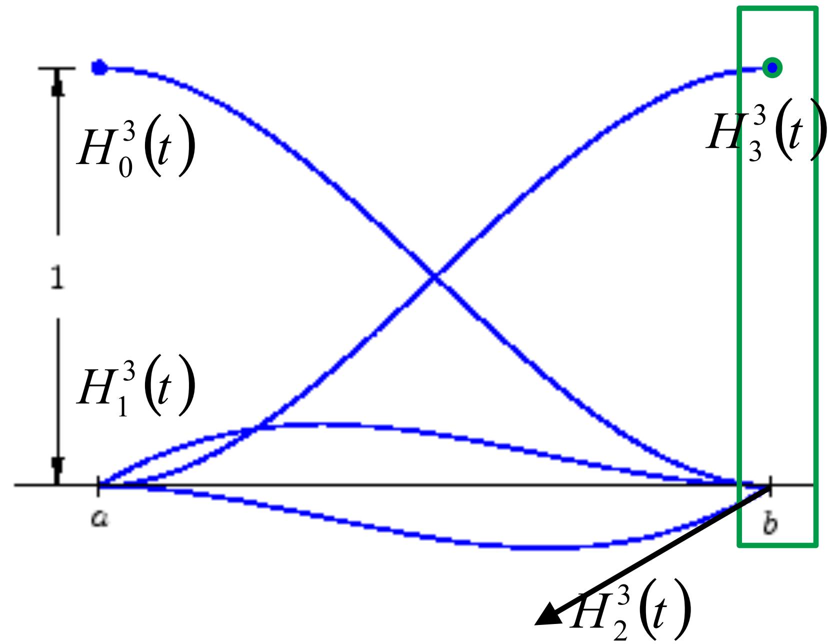


$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

Basisfunktionen

- Betrachten wir t = 1
- analoge Argumentation:
  - Interpolation p_1 (c_3) wegen $H_3^3(t)$
  - Ableitung m_1 (c_2) wegen

    $H_2^{3'}(t)$



$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

Zusammenfassung

- Hermite-Kurve

$$p(t) = c_0 \cdot H_0^3(t) + c_1 \cdot H_1^3(t) + c_2 \cdot H_2^3(t) + c_3 \cdot H_3^3(t)$$

$$p(t) = p_0 \cdot H_0^3(t) + m_0 \cdot H_1^3(t) + m_1 \cdot H_2^3(t) + p_1 \cdot H_3^3(t)$$

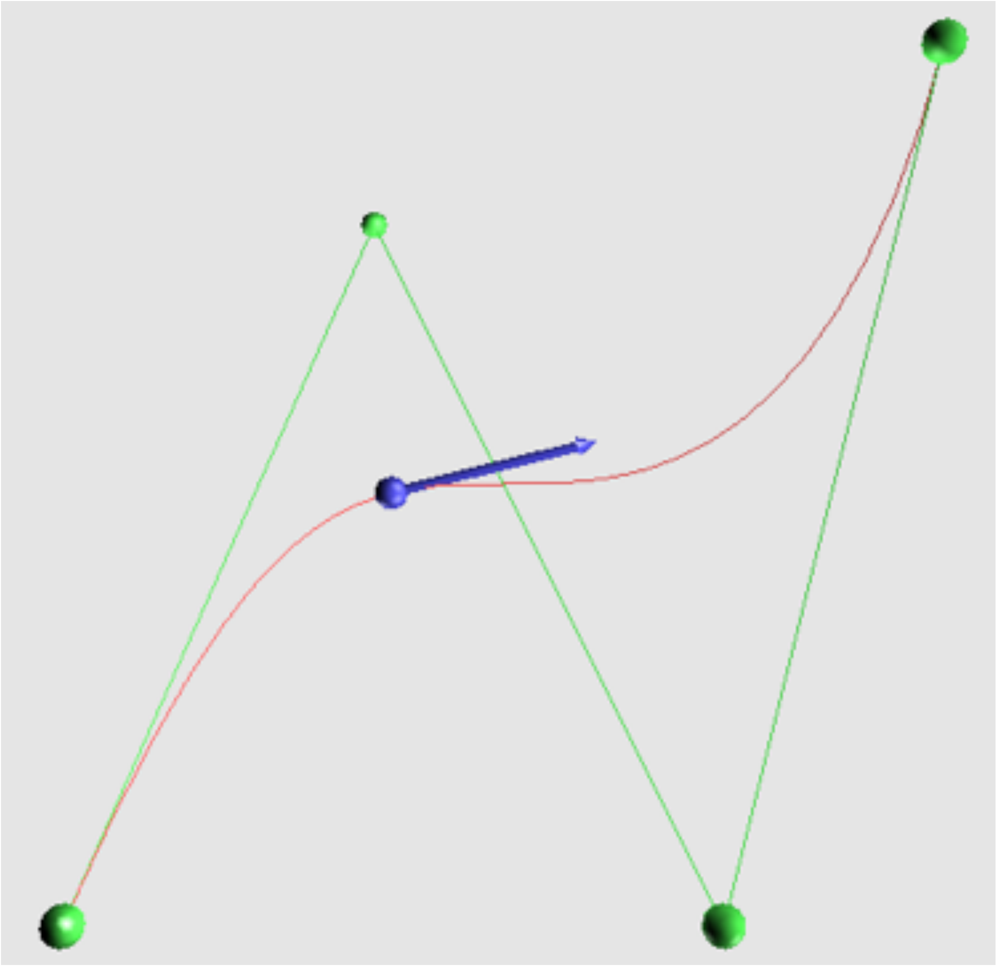
  - Startpunkt-Interpolation bei c_0
  - Endpunkt-Interpolation bei c_3
  - Tangente am Startpunkt: c_1
  - Tangente am Endpunkt: c_2

Übung: Hermite-Kurve

- Skizzieren Sie den Verlauf der Hermite-Kurve mit folgenden Kontrollpunkten
  - $p_0 = (0,0,0)$
  - $p_1 = (1,1,0)$
  - Tangente m_0 an $p_0 = (1,0,0)$
  - Tangente m_1 an $p_1 = (-1,0,0)$

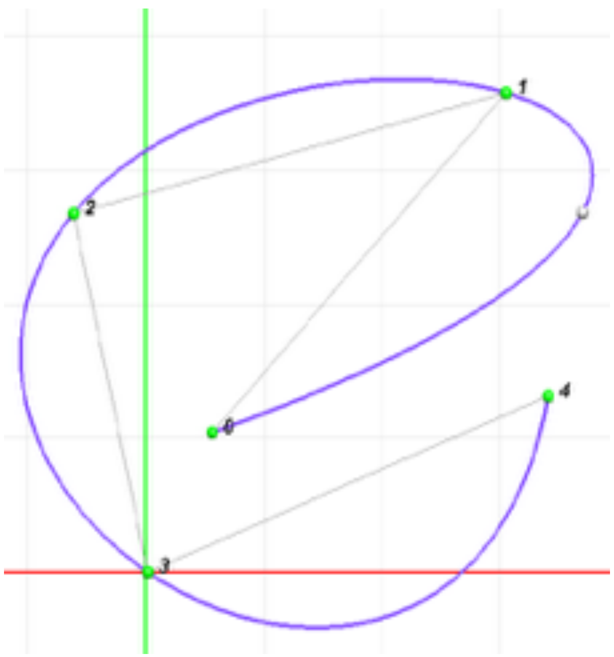
Bézier-Kurve

Bézier-Kurve

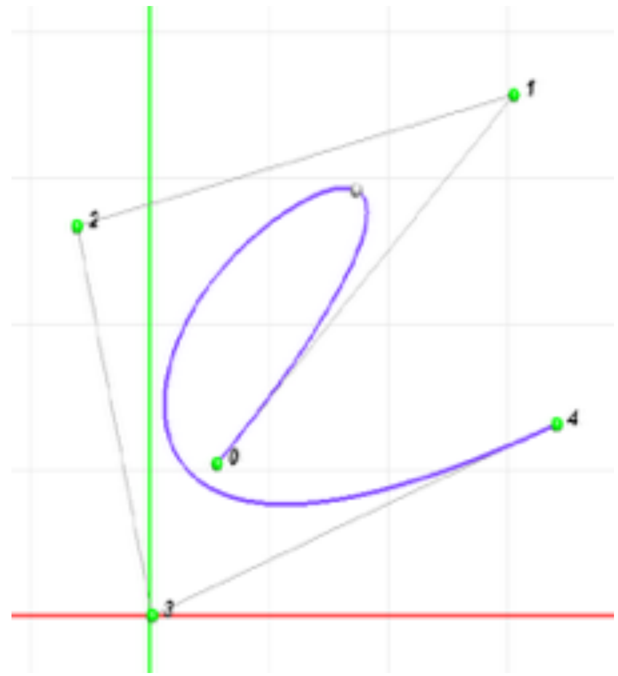


Bézier-Kurve

- Interpolation vs. Approximation



Interpolation



Approximation

Bézier-Kurve

- Basisfunktionen: $B_i^n(t)$
- Grad der Kurve: n
- Kontrollpunkte: c_i

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot B_i^n(t)$$

- Bezierkurve
  - approximiert die Kontrollpunkte 1 ... n-1
  - interpoliert die Kontrollpunkt 0 und n

Bézier-Kurve

- die Polynome

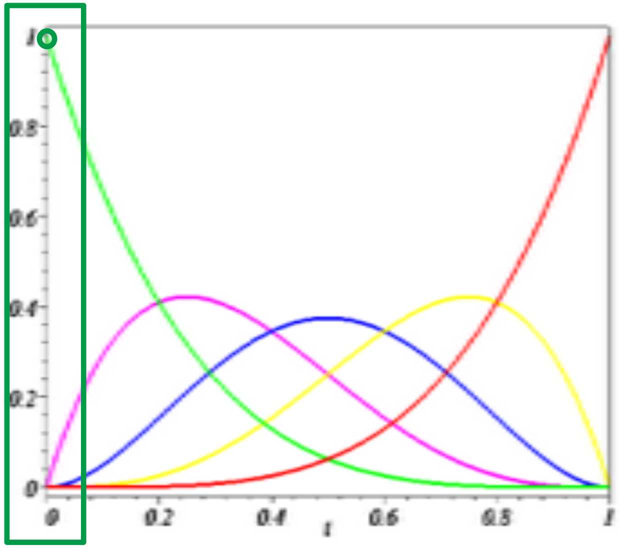
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

heißen Bernsteinpolynome über dem Intervall [0,1] vom Grad n und bilden eine Basis des (n+1)-dimensionalen Polynom-Raums

- sie können aus den binomischen Formeln entwickelt werden:

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$



$B_0^4(t)$ Basis B4(t)

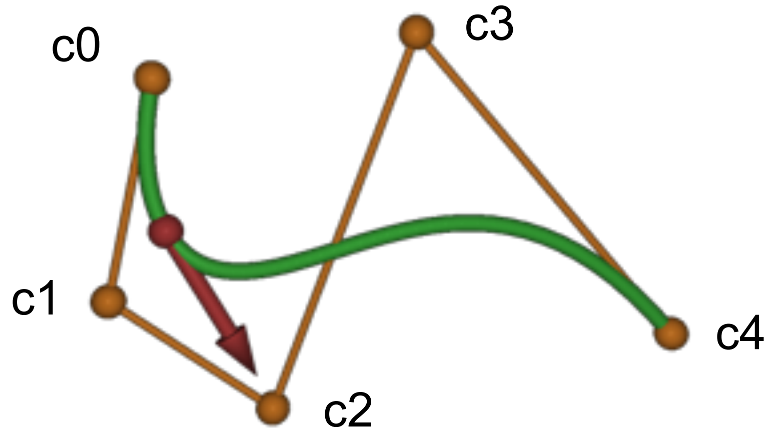
Eigenschaften

- Partition der Eins: $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- Positivität: $B_i^n(t) > 0, t \in [0,1]$
- Symmetrie: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

Bézier-Kurve

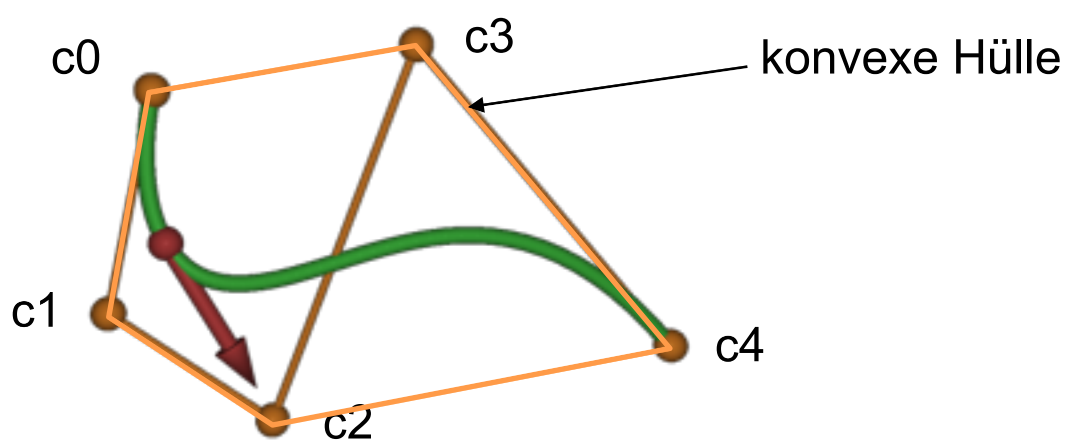
- Beispiel

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot B_i^n(t)$$



Eigenschaft: Konvexe Hülle

- Kurve liegt in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons

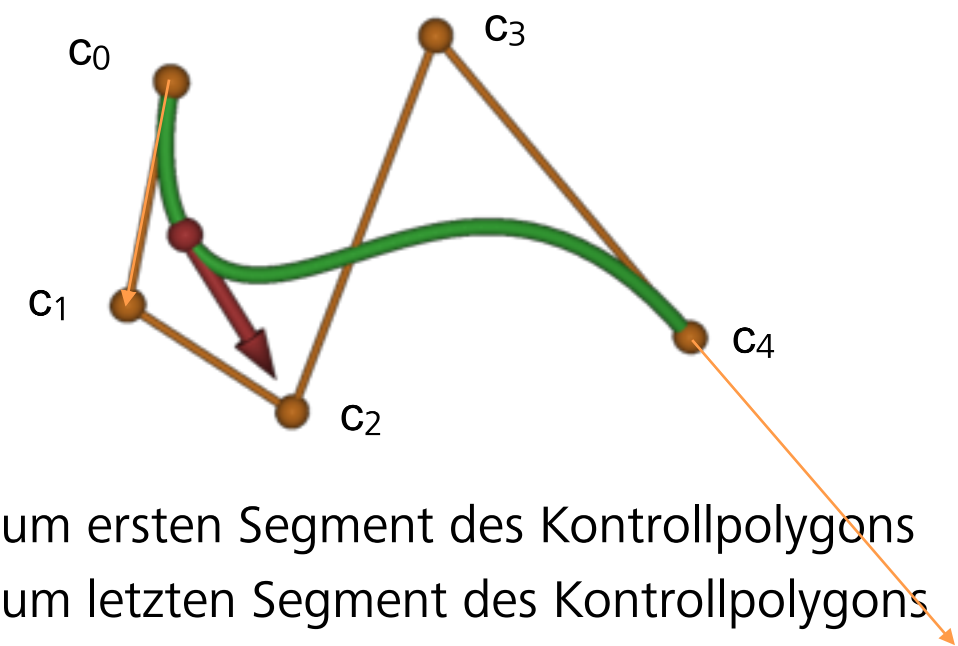


Eigenschaft: Tangente an Start- und Endpunkt

- Kurve verläuft durch Anfangs- und Endpunkt
- es gilt $t(0) = c_0$, $t(1) = c_n$

- für die Ableitungen in den Anfangs- und Endpunkten gilt

$$p'(0) = n(c_1 - c_0)$$
$$p'(1) = n(c_n - c_{n-1})$$



- d.h. Tangente
  - an c_0: parallel zum ersten Segment des Kontrollpolygons
  - an c_1: parallel zum letzten Segment des Kontrollpolygons

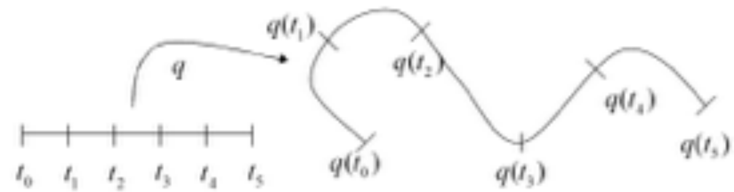
Übung: Bezier-Kurve

- Wie müssen die Kontrollpunkte einer Bezier-Kurve vom Grad 3 lauten, damit die folgenden Eigenschaften erfüllt sind?
    - Startpunkt: (0,0,0)
    - Endpunkt: (1,2,3)
    - Ableitung am Startpunkt: (1,1,0)
    - Ableitung am Endpunkt: (1,-1,-1)

nur Richtung relevant, Betrag wird vernachlässigt

Limitationen (gilt für alle Kurven)

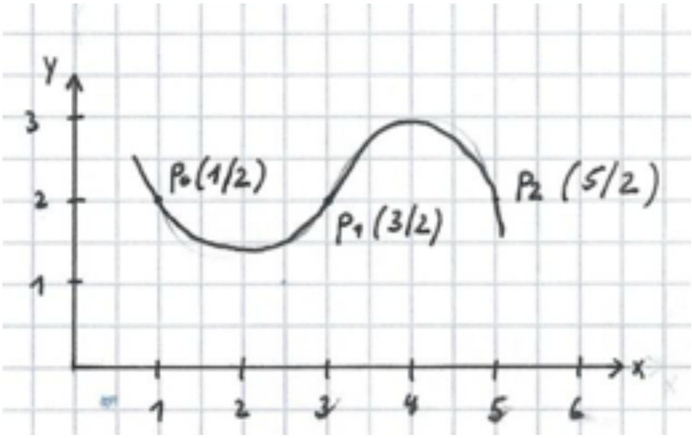
- Interpolation/Approximation von vielen Punkten
    - hoher Grad der Kurve
    - Überschwingungen
- Lösung: Splines
    - Zusammensetzen mehrere Kurven von kleinem Grad
    - Erzeugen glatter Übergänge



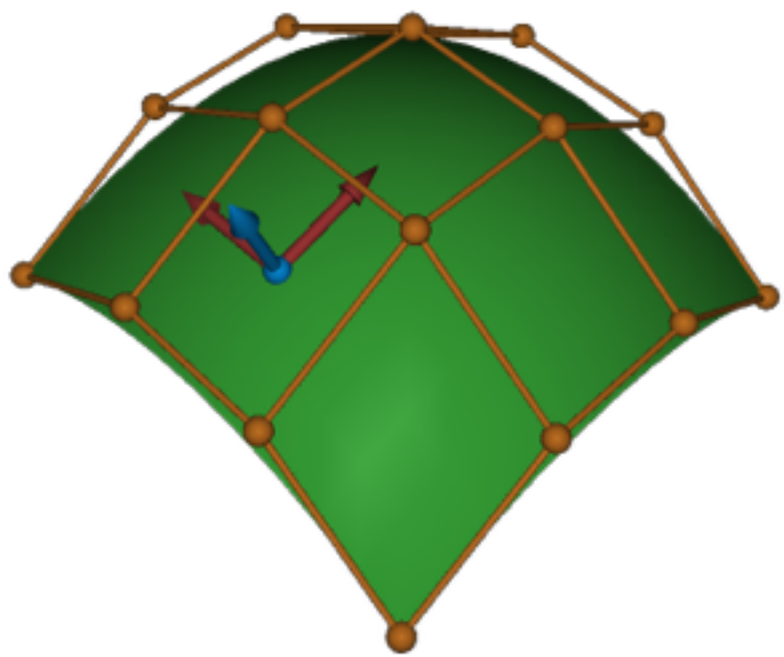
- erster Schritt: mehrere Segmente von Hermite-Kurven
    - Endpunkt Segment n = Startpunkt Segment n+1
    - Tangente Endpunkt Segment n = Tangente Startpunkt Segment n+1
- Verallgemeinerung
    - Splines mit eigenen Basisfunktionen
    - lokal wird damit nur eine Kurven niedrigen Grades verwendet
    - Splines aus Basis von Bezierkurven: B-Splines

Übung: Bezierkurve

- Gesucht ist ein Bezier-Spline vom Grad 3 mit folgenden Eigenschaften:
  - Interpolation in den Punkten $p_0 = (1,2)$, $p_1 = (3,2)$ und $p_2 = (5,2)$
  - stetiger Übergang von der ersten Bezierkurve in die zweite an p_1
  - Kurvenverlauf in etwa wie in der Skizze
- Aufgabe: Geben Sie dazu eine Liste von Kontrollpunkten an



Parametrisierte Flächen



Parametrisierte Flächen

- Abbildung

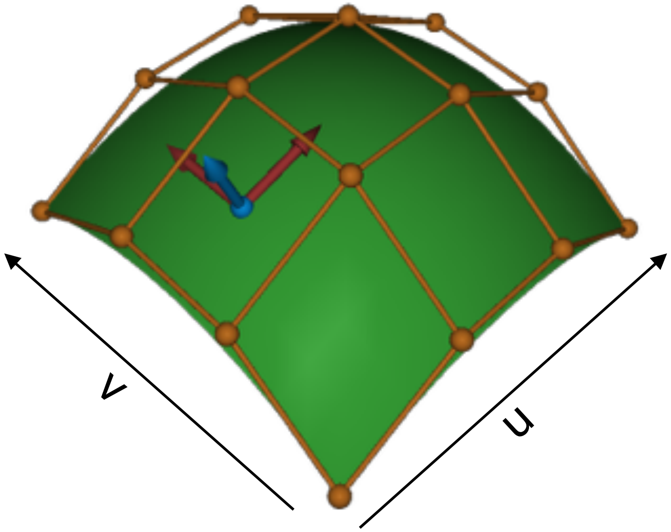
$$(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^n, (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- also: zwei Parameter anstelle von einem (t)
- Parametergebiet:

$$D = [a, b] \times [c, d] \text{ oder } D = [0, 1]^2$$

Tensorproduktflächen

- zwei verschachtelte Kurven: u-Richtung + v-Richtung
- Kontrollnetz statt Kontrollpolygon
- kombinierte Kurve:



Kontrollpunkte (i,j)

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \cdot F_i^n(u) \cdot G_j^m(v)$$

Basisfunktionen der ersten Kurve vom Grad n

Basisfunktionen der zweiten Kurve vom Grad m

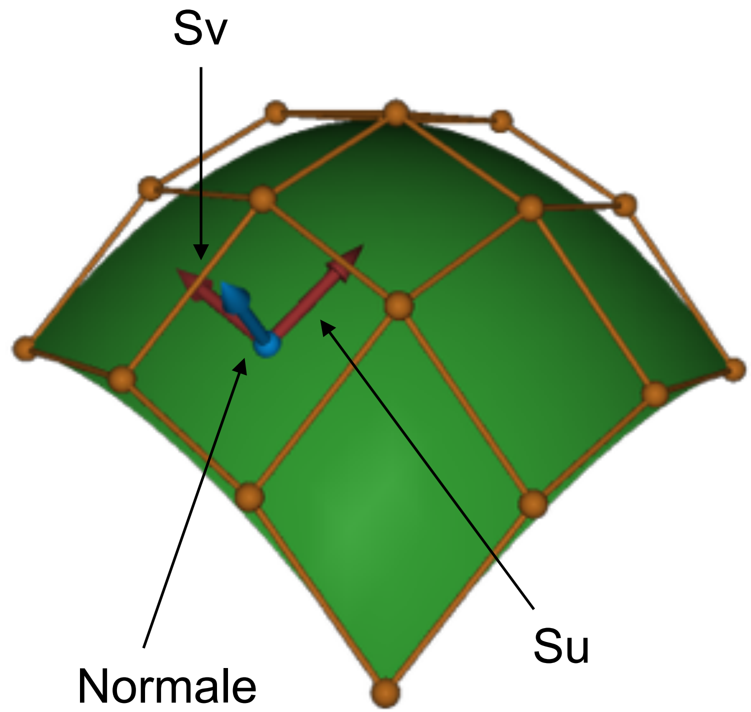
Tangenten

- an jedem Punkt S(u,v)
  - zwei Tangenten (u-Tangente und v-Tangente)
  - Berechnung durch partielle Ableitungen

$$S_v(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial v}$$

$$S_u(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial u}$$

  - Normale am Punkt S(u,v) = Kreuzprodukt aus Tangenten



Beispiel

- Monom-Basisfunktionen vom Grad 1

$$F_i^1(u) = u^i$$
$$G_j^1(v) = v^j$$

Erinnerung:

$$S_u(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} c_{ij} \cdot F_i^n(u) \cdot G_j^m(v)$$

- Fläche

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} c_{ij} \cdot u^i \cdot v^j$$

- Tangenten

$$S(u,v) = c_{00} + c_{01} \cdot v + c_{10} \cdot u + c_{11} \cdot uv$$

$$S_u(u,v) = c_{10} + c_{11} \cdot v$$
$$S_v(u,v) = c_{01} + c_{11} \cdot u$$

Zusammenfassung

- Polynomielle Kurven
    - Parametrisierung
    - Monom-Kurve
    - Hermite-Kurve
    - Bézier-Kurve
- Parametrisierte Flächen

Quellen

- Die Folien basieren auch auf Vorlesungsfolien von Prof. Dr. Stefan Gumhold (Technische Universität Dresden) und Prof. Dr. Wolfgang Straßer (Universität Tübingen, emeritiert)