Implizite Funktionen

Einführung in die Computergrafik

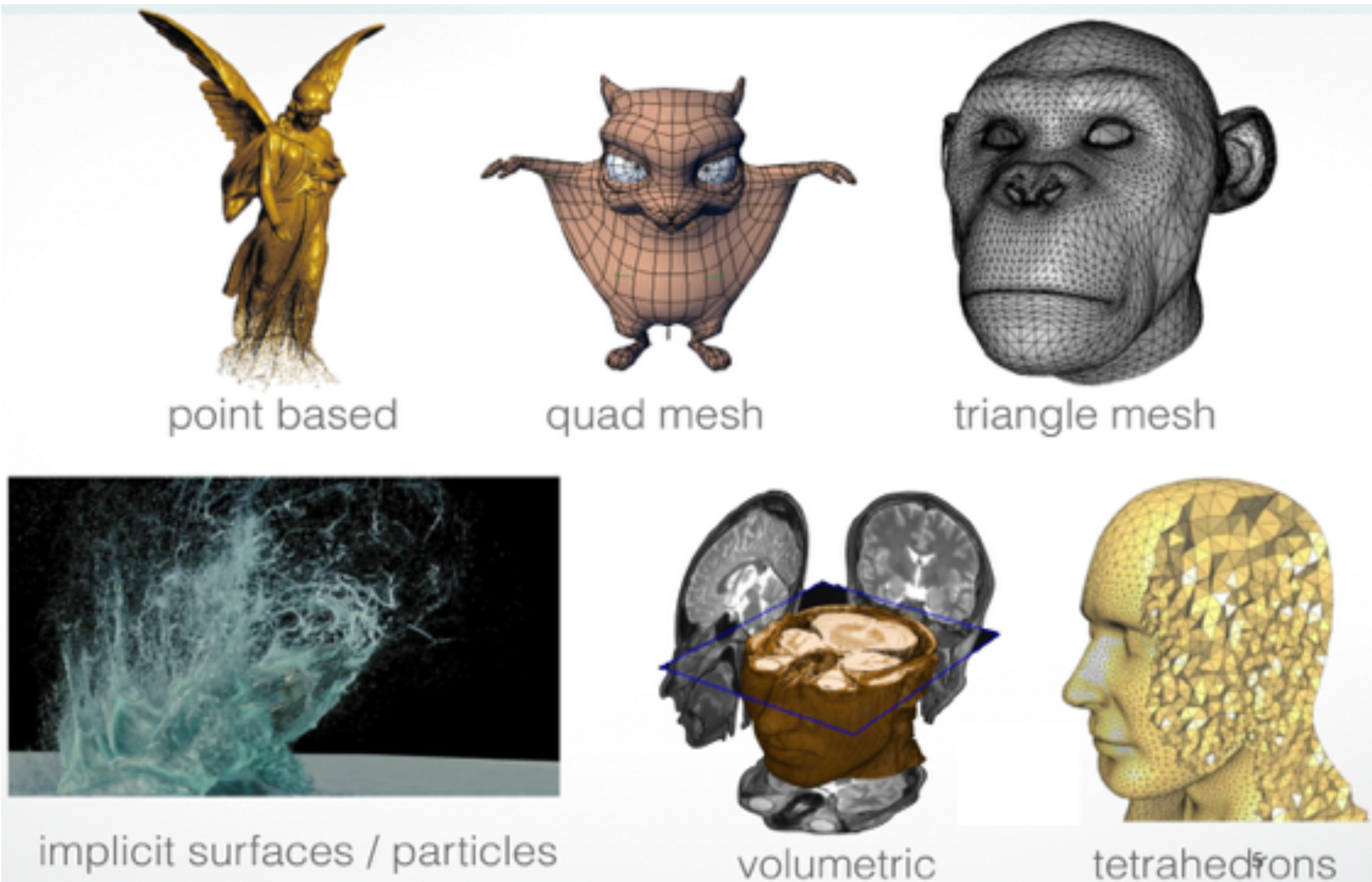
Wiederholung

- Einführung
- Lokale Beleuchtungsmodelle
- Shading
- Texturen

Ausblick

Oberflächenrepresentationen

- Es gibt viele Möglichkeiten, Oberflächen zu repräsentieren



Quelle: [1]

Agenda

- Implizite Funktionen
- Interpolation
- Oberflächen-Extraktion
    - Marching Squares (2D)
    - Marching Cubes (3D)

Implizite Funktionen

Implizite Darstellung

- Idee
  - Repräsentation der Oberfläche mit Funktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}$$

  - Oberfläche: Menge aller Punkte mit gleichem Funktionswert
  - dieser Wert heisst Isowert (τ)

$$\{\overrightarrow{v} \in R^3 | f(\overrightarrow{v}) = \tau\}$$

Beispiele

- Kugel mit Mittelpunkt m und Radius r

$$f_{Kugel}(v) = (v - m)^2 - r^2$$

- oder

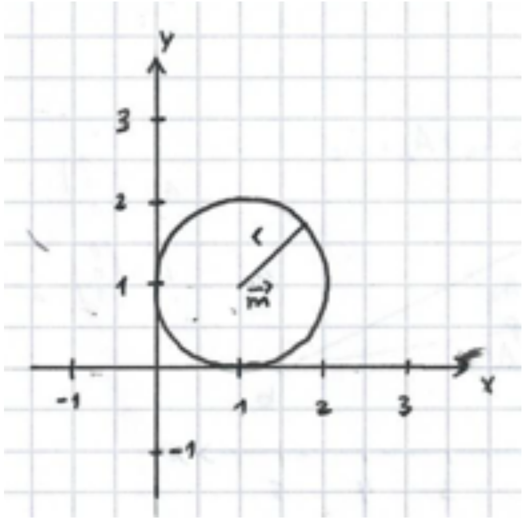
$$f_{Kugel}(v) = (v_x - m_x)^2 + (v_y - m_y)^2 + (v_z - m_z)^2 - r^2$$

- Oberfläche der Kugel für Isowert 0:

$$\{v \in \mathbb{R} | f_{Kugel}(v) = 0\}$$

- 2D-Beispiel: Kreis mit Mittelpunkt (1,1) und Radius 1

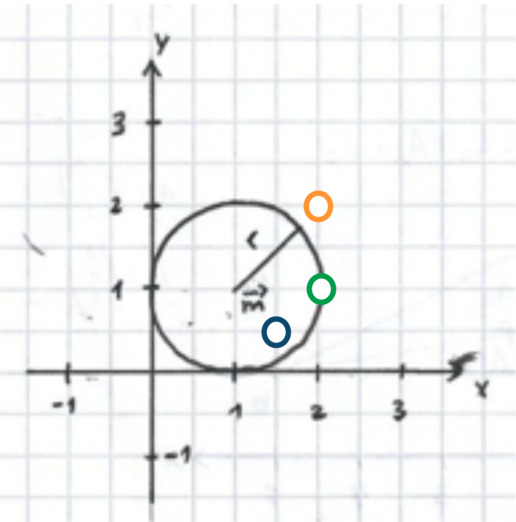
$$f_{Kreis}(v) = (v_x - 1)^2 + (v_y - 1)^2 - 1$$



Implizite Darstellung

- 2D-Beispiel: Kreis mit Mittelpunkt (1,1) und Radius 1

$$f_{Kreis}(\overrightarrow{v}) = (v_x - 1)^2 + (v_y - 1)^2 - 1$$



$$f_{Kreis}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = (2-1)^2 + (1-1)^2 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$f_{Kreis}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = (2-1)^2 + (2-1)^2 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$f_{Kreis}(\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}) = (1.5-1)^2 + (0.5-1)^2 - 1 = 0.25 + 0.25 - 1 = -0.5$$

- auf Oberfläche
- außen
- innen

Implizite Darstellung

- Unterscheidung
  - Oberfläche
    - Funktionswert = Isowert

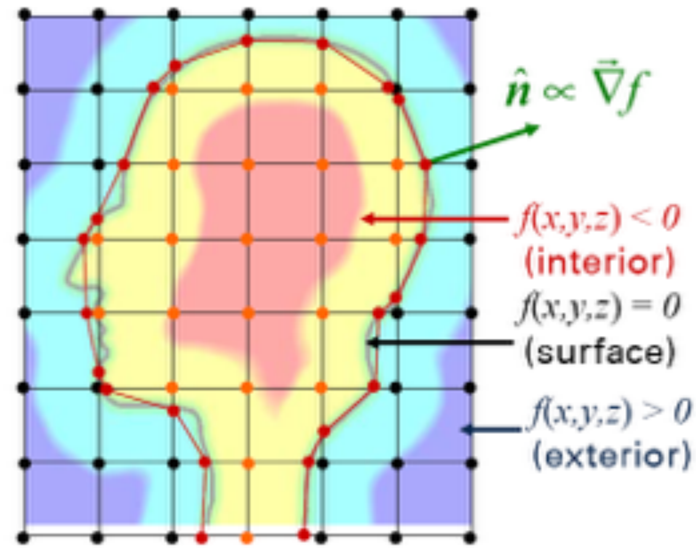
$$f(\overrightarrow{v}) = \tau$$

  - Inneres
    - Funktionswert kleiner Isowert

$$f(\overrightarrow{v}) < \tau$$

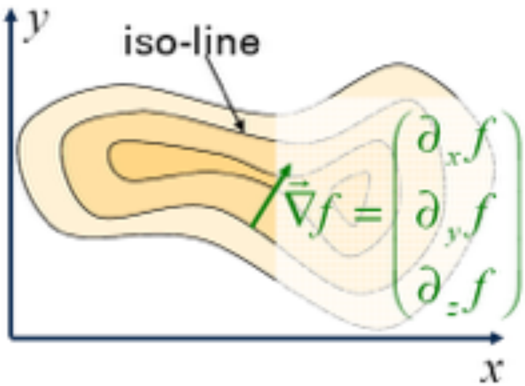
  - Äußeres
    - Funktionswert größer Isowert

$$f(\overrightarrow{v}) > \tau$$



Ausflug: Gradient

- Gradient
- zeigt in die Richtung des maximalen Anstiegs
- korrespondiert zur Normalen der impliziten Oberfläche
    - Normierung notwendig



- Berechnung über partielle Ableitungen

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

Ausflug: Gradient

- Beispiel: Berechnung des Gradienten für einen Kreis

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

$$f_{Kugel}(v) = (v_x - m_x)^2 + (v_y - m_y)^2 + (v_z - m_z)^2 - r^2$$

$$\frac{\partial f_{Kugel}}{\partial x} = 2(v_x - m_x)$$

$$\frac{\partial f_{Kugel}}{\partial y} = 2(v_y - m_y)$$

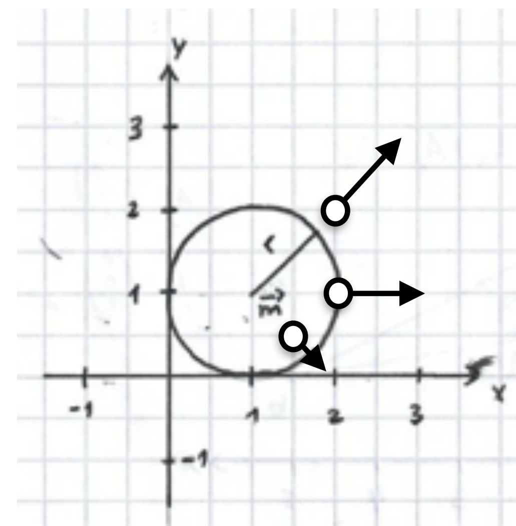
$$\frac{\partial f_{Kugel}}{\partial z} = 2(v_z - m_z)$$

$$\overrightarrow{\nabla} f = 2 \begin{pmatrix} v_x - m_x \\ v_y - m_y \\ v_z - m_z \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung

- 2D-Beispiel: Kreis mit Mittelpunkt (1,1) und Radius 1

$$f_{Kreis}(\vec{v}) = (v_x - 1)^2 + (v_y - 1)^2 - 1$$



$$\vec{\nabla} f = 2 \begin{pmatrix} v_x - m_x \\ v_y - m_y \\ v_z - m_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} v_x - 1 \\ v_y - 1 \end{pmatrix}$$

Faktor 2 vernachlässigt, weil hier nur Richtung entscheidend

$$\vec{\nabla} f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f(\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1.5-1 \\ 0.5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Übung: Ellipse

- Gegeben ist folgende implizite Funktion und deren Isowert 0.

$$f(\overrightarrow{v}) = \frac{(v_x - 2)^2}{1} + \frac{(v_y - 2)^2}{4} - 1$$

- Prüfen Sie, ob die folgenden zwei Punkte im Inneren, im Äußeren oder auf der Oberfläche liegen.
- Berechnen Sie außerdem jeweils den Gradienten.

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

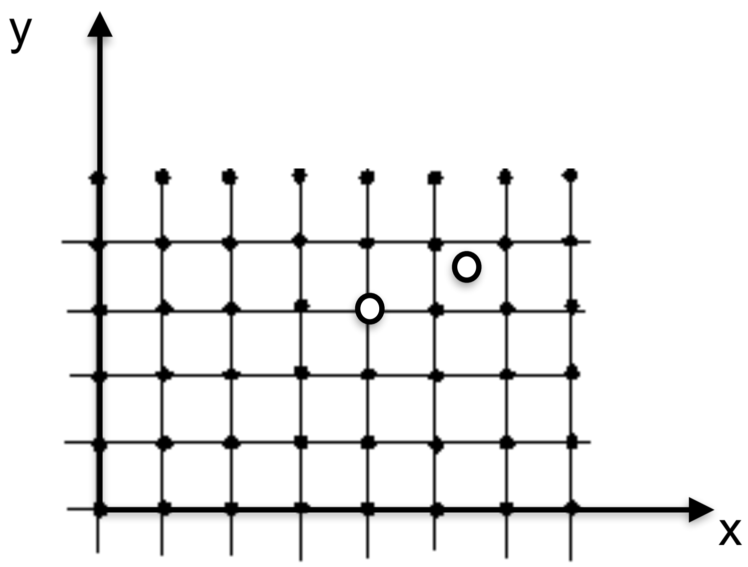
Implizite Darstellung

- verschiedene Formen von Funktionen
    - Formeln
    - Diskrete Werte (z.B. Gitter)

Interpolation

Diskrete Werte

- Funktionswerte an einzelnen Punkten im Definitionsraum gegeben
- Werte dazwischen: unbekannt
  - Lösung: Interpolation der Werte

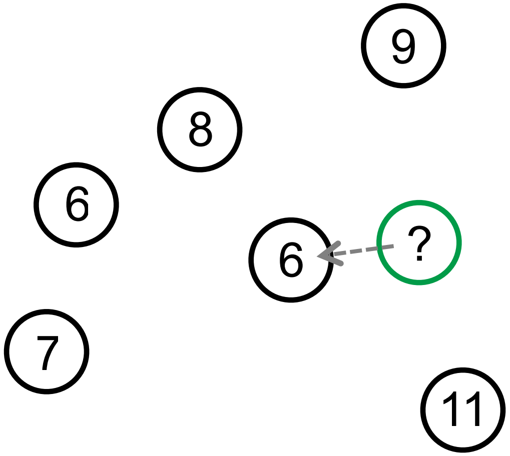


Interpolation

- generelles Problem:
    - gegeben: Datenpunkte a_i mit jeweils
        - Wert: $v(a_i)$
        - Position: $p(a_i)$
    - gesucht:
        - entweder: Wert $v(x)$ für bekannte Position $p(x)$
        - oder: Position $p(x)$ für bekannten Wert $v(x)$

Nächste-Nachbar-Interpolation

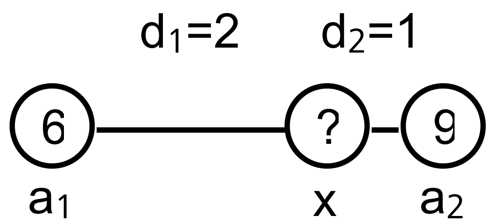
- verwende den Wert des Datenpunktes, der am nächsten liegt
  - hier: Datenpunkte in orange mit Werte im Kreisinneren
  - gesuchter Wert ? für Position in grün



Lineare Interpolation

- Interpolation auf Linie zwischen zwei Datenpunkten
  - hier: Datenpunkte a_1 und a_2
  - gesucht: Wert $v(x)$ an Position $p(x)$
  - Abstand zwischen a_1 und x: d_1
  - Abstand zwischen a_2 und x: d_2

Hinweis: gleiches Vorgehen bei
Suche nach Position für Wert
Suche nach Wert für Position



- Interpolation
  - $v(x) = (1-\alpha)v(a_1) + \alpha v(a_2)$
  - $\alpha = d_1 / (d_1+d_2)$

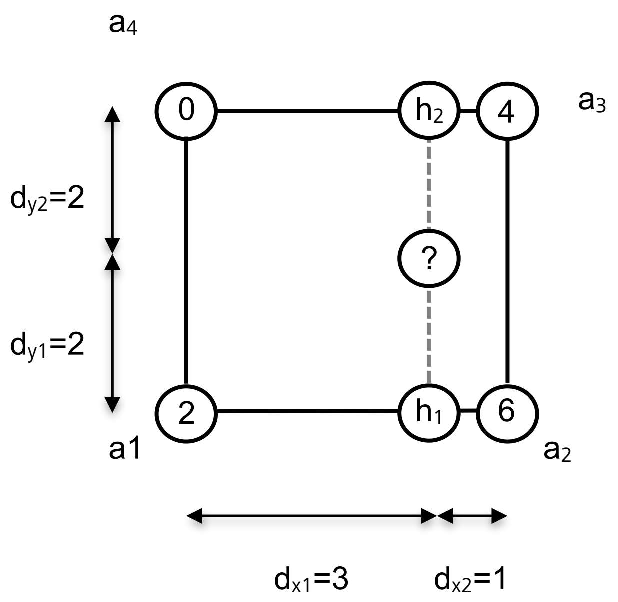
hier:

$\alpha = 2 / (2+1) = 2/3$

$v(x) = (1-2/3)*6 + (2/3)*9 = 2+6 = 8$

Bilineare Interpolation

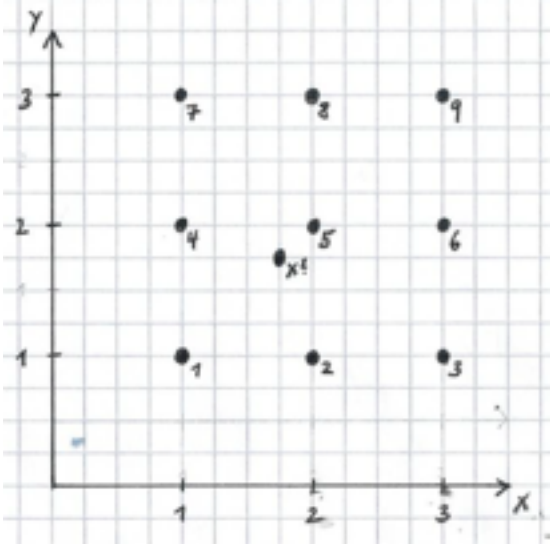
- Interpolation in Gitterzelle (zwischen 4 Datenpunkten)
    - hier: Datenpunkte a_1, a_2, a_3, a_4
    - gesucht: Wert v(x) an Position p(x)
- Idee:
    - zwei Hilfsinterpolation (linear): x-Achse
    - dann (lineare) Interpolation dazwischen
- hier
    - $\alpha = 3 / (3+1) = 0.75$ (lin. Interp. x-Achse)
    - $h_1 = 0.75*6+0.25*2 = 5$
    - $h_2 = 0.75*4+0.25*0 = 3$
    - $\beta = 2 / (2+2) = 0.5$ (lin. Interp. y-Achse)
    - $v(y) = 0.5*5+0.5*3 = 4$



Übung: Interpolation

- Gegeben ist folgende Funktion mit diskreten Werten. An den Koordinaten (2; 3) hat die Funktion z.B. den Wert 8.

- Berechnen Sie den interpolierten Funktionswert an der Stelle x = (1.75; 1.75)
    - mit Nächster-Nachbar-Interpolation
    - mit bilinearer Interpolation

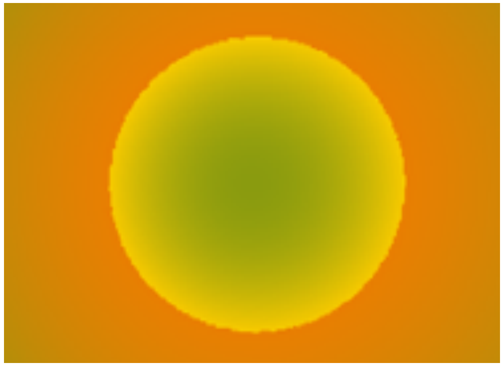


Extraktion von Oberflächen

Extraktion von Oberflächen

- Gegeben:
  - Implizite Funktion (z.B. Distanzfunktion, CT-Scan, ...)
    - 2D: $f(x,y)$, 3D: $f(x,y,z)$
  - Isowert τ

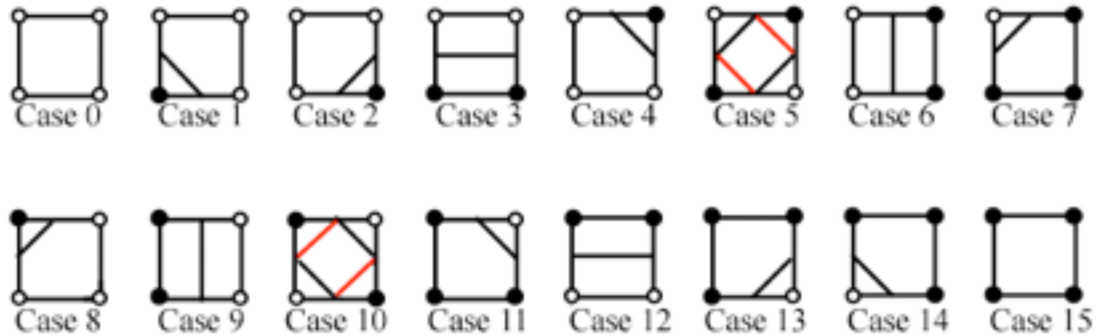
Beispiel:
Distanzfunktion für
einen Kreis



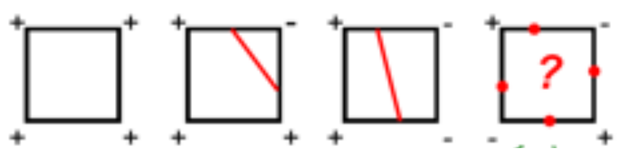
- gesucht
  - geschlossene Oberfläche = Menge aller Punkte, an denen die Funktion den Isowert annimmt
  - 2D: $f(x,y) = \tau$ (Polygonzug, Isokontur)
  - 3D: $f(x,y,z) = \tau$ (geschlossenes Dreiecksnetz, Isofläche)

Lösungsidee im 2D: Marching Squares

- basiert auf Vertex-Klassifizierung: 24 = 16 Fälle

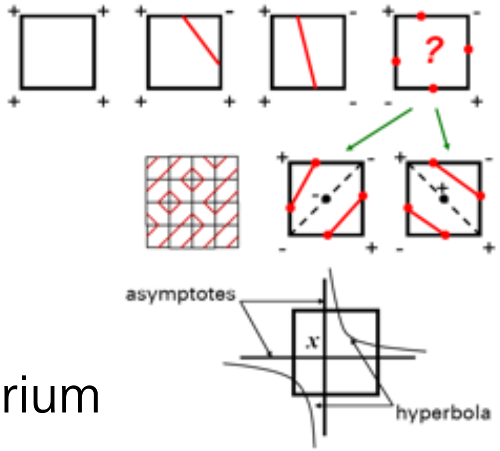


- Reduktion auf 4 Fälle durch Symmetrie, Rotation, Spiegelung



Lösungsidee im 2D: Marching Squares

- in manchen Fällen
  - zwei Möglichkeiten, die Polygonlinie zu ziehen
- bei falscher Wahl
  - Topologie kann sich ändern
- kann durch bilineare Interpolation aufgelöst werden
  - Schnitt der Asymptoten als Entscheidungskriterium
- einfacher: konsequent das gleiche Vorgehen verwenden

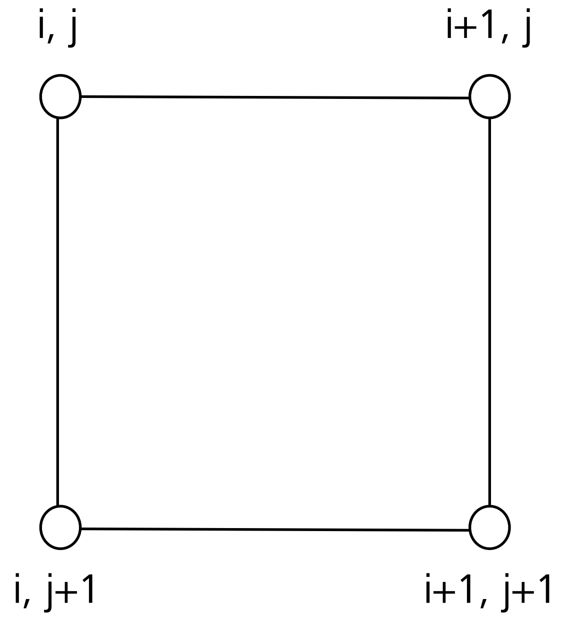


Algorithmus (2D: Marching Squares, 3D: Marching Cubes)

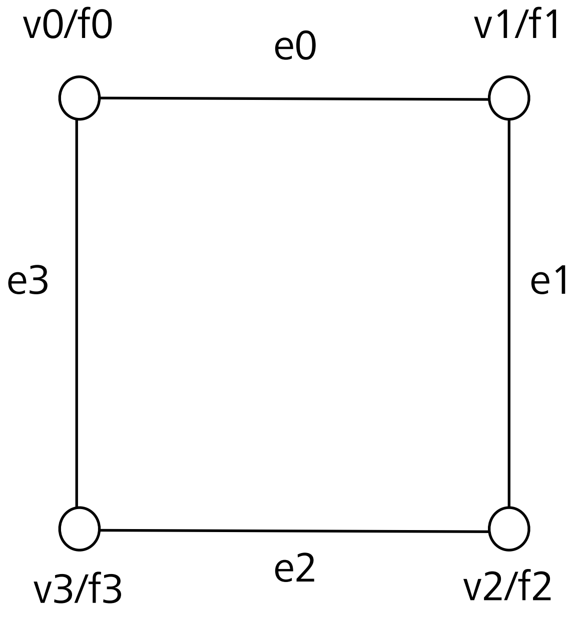
- Unterteile gesamte Szene mir regulärem Gitter
- Iteriere über alle Zellen des Gitters
    - Betrachte jede Zelle
    - Klassifiziere die 4 Vertices als innen/außen (3D: 8 Vertices)
    - Berechne 4-bit Index (3D: 8-bit Index)
    - Schlage Schnittkanten nach
    - Bestimme Schnittpunkte
    - Erstelle Segmente (3D: Dreiecke)

Betrachte jede Zelle

Zelle im Gitter:

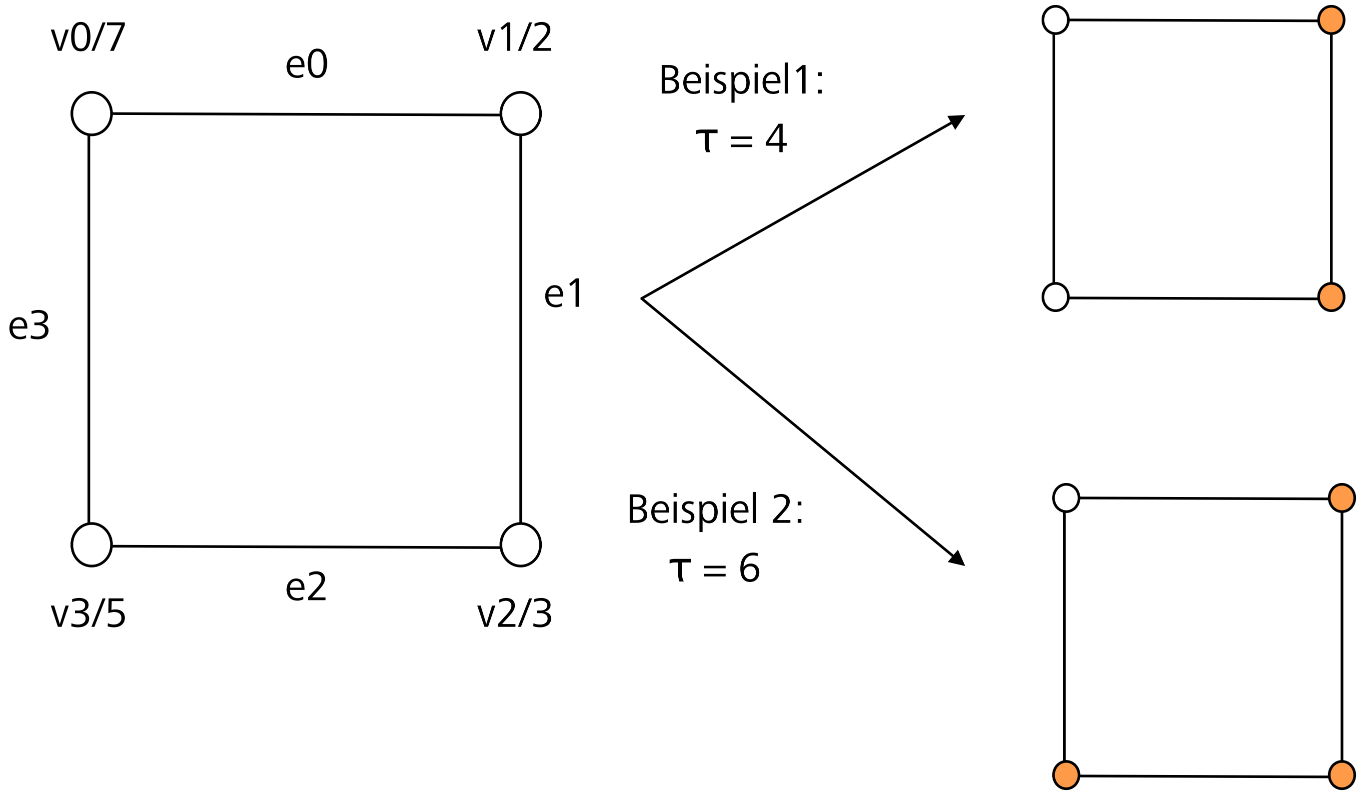


Zelle einzeln betrachtet:



f ist der Funktionswert der impliziten Funktion am Eckpunkt (Vertex)

Klassifiziere die 4 Vertices als innen/außen

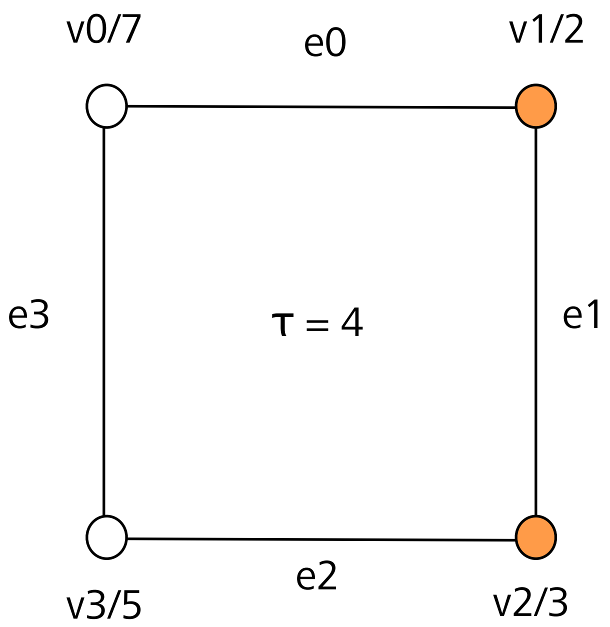


Berechne 4-bit Index

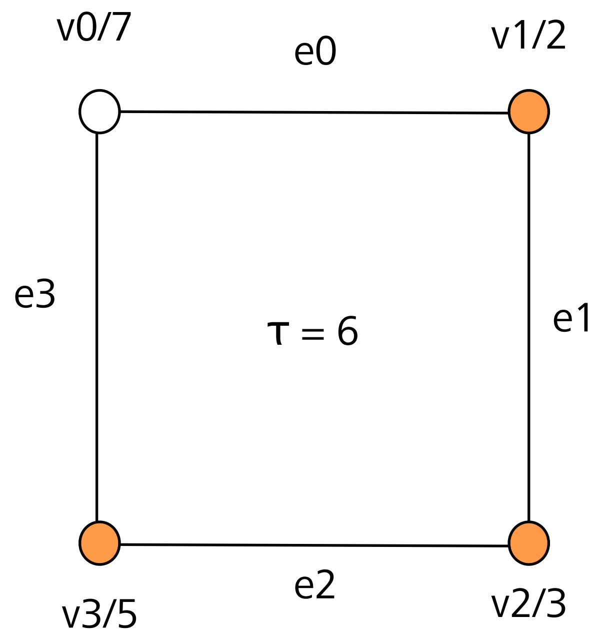
außen: 0
innen: 1

	v3/f3	v2/f2	v1/f1	v0/f0
Faktor	8	4	2	1

Beispiel 1: 0110 = 6

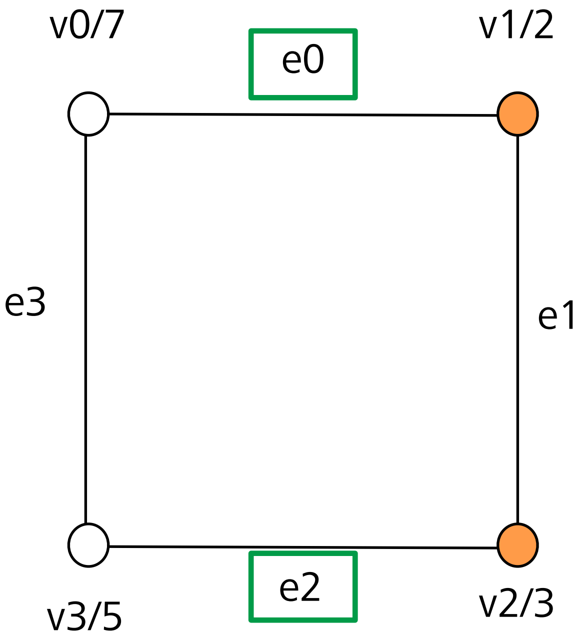


Beispiel 2: 1110 = 14



Schlage Schnittkanten in Lookup-Tabelle nach

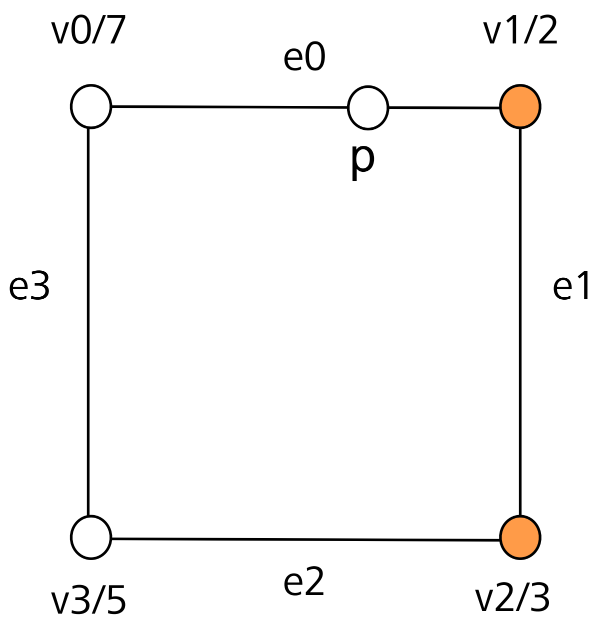
Beispiel 1: 0110 = 6



Schnitte immer an Kanten mit einem Innen-Knoten und einem Außen-Knoten

Fall	**Binär-code**	**Kanten**
0	0000	
1	0001	e0,e3
2	0010	e0,e1
3	0011	e1,e3
4	0100	e1,e2
5	0101	e0,e1,e2,e3
6	0110	e0,e2
7	0111	e2,e3
8	1000	e2,e3
9	1001	e0,e2
10	1010	e0,e3,e1,e2
11	1011	e1,e2
12	1100	e1,e3
13	1101	e0,e1
14	1110	e0,e3
15	1111	

Bestimme Schnittpunkte



Kante mit Eckpunkten vx/fx und vy/fy:

$$p = (1 - \alpha)v_x + \alpha v_y$$

$$\alpha = \frac{\tau - f_x}{f_y - f_x}$$

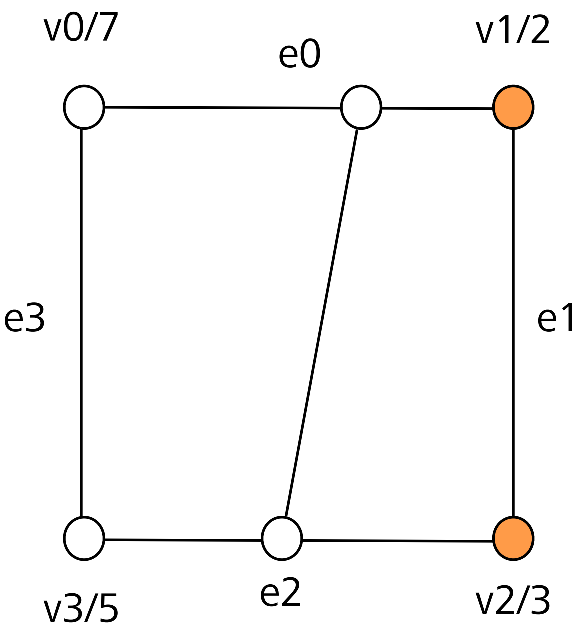
Beispiel (Kante e0):

$$\alpha = \frac{4 - 7}{2 - 7} = \frac{-3}{-5} = 0.6$$

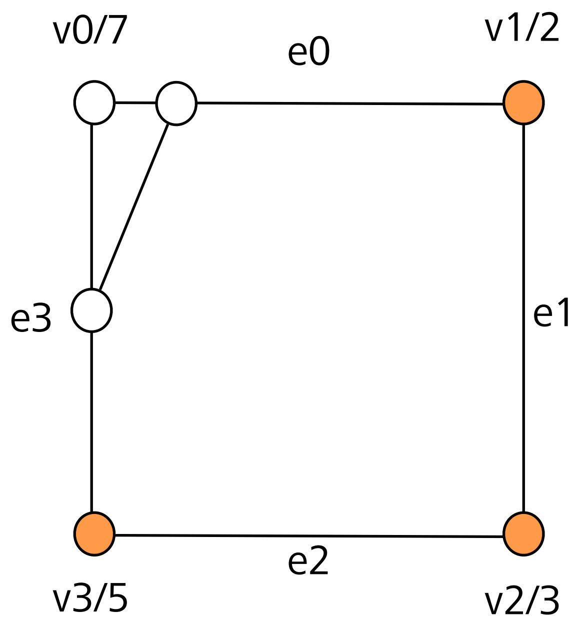
$$p = 0.4v_1 + 0.6v_2$$

Erstelle Segmente

Beispiel 1:
τ=4
Fall 0110 = 6



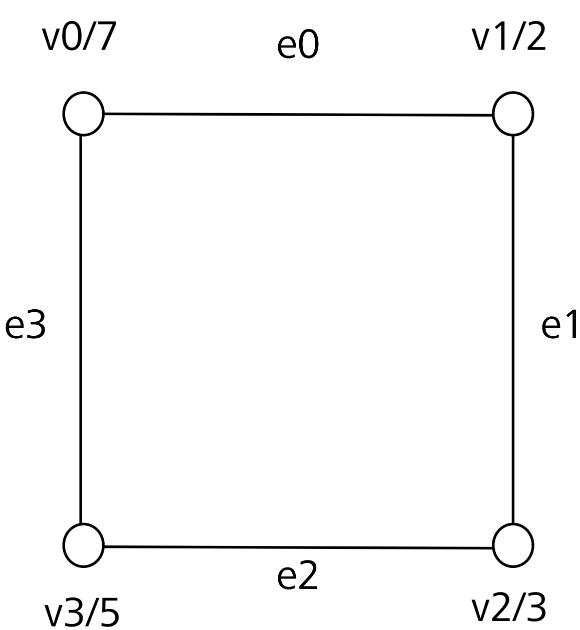
Beispiel 2:
τ=6
1110 = 14

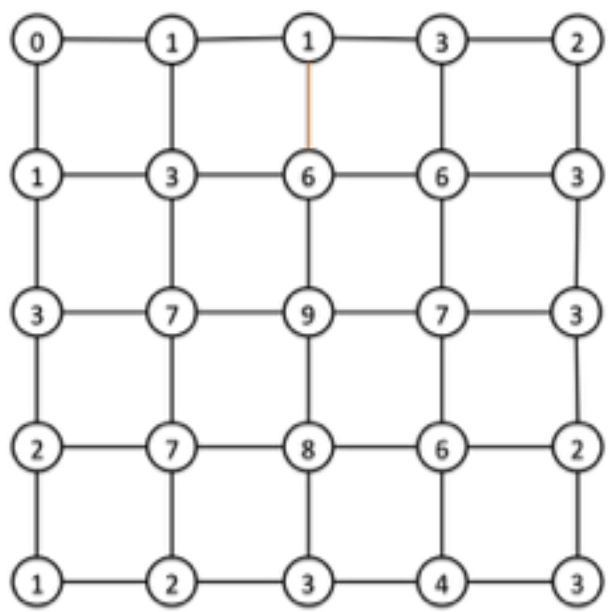


Fall	Binär-code	Kanten
0	0000	
1	0001	e0,e3
2	0010	e0,e1
3	0011	e1,e3
4	0100	e1,e2
5	0101	e0,e1,e2,e3
6	0110	e0,e2
7	0111	e2,e3
8	1000	e2,e3
9	1001	e0,e2
10	1010	e0,e3,e1,e2
11	1011	e1,e2
12	1100	e1,e3
13	1101	e0,e1
14	1110	e0,e3
15	1111	

Übung: Marching Squares

- Bilden Sie für die dargestellte Funktion die Isokontur für den Isowert 5 mit Hilfe des Marching Squares-Algorithmus.
- Berechnen Sie mindestens an der orangenen Kante den exakten interpolierten Schnittpunkt

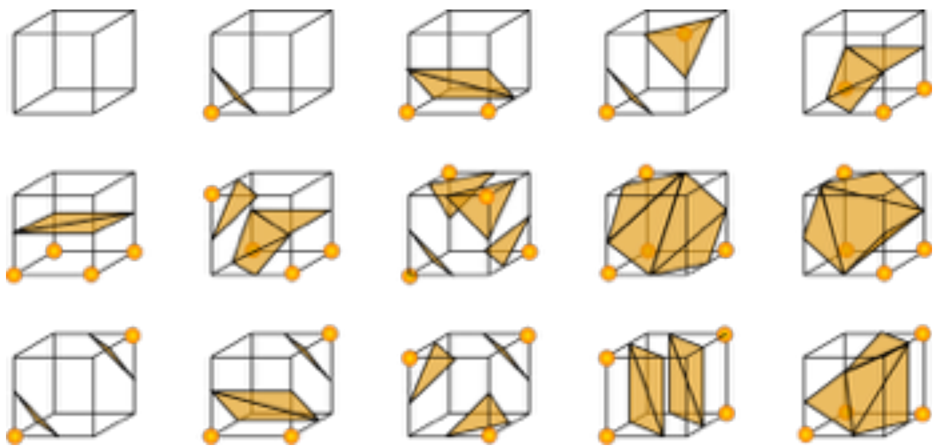




Fall	Binär-code	Kanten
0	0000	
1	0001	e0,e3
2	0010	e0,e1
3	0011	e1,e3
4	0100	e1,e2
5	0101	e0,e1,e2,e3
6	0110	e0,e2
7	0111	e2,e3
8	1000	e2,e3
9	1001	e0,e2
10	1010	e0,e3,e1,e2
11	1011	e1,e2
12	1100	e1,e3
13	1101	e0,e1
14	1110	e0,e3
15	1111	

Marching Cubes

- Variante im 3D
  - 8 Eckpunkte -> 8-bit-Index -> 256 Fälle
  - durch Symmetrie, Rotation, Spiegelung: Reduktion auf 15 Fälle:



  - Dreiecke statt Segmenten
    - also Triple statt Tupel in der Lookup-Tabelle

Zusammenfassung

- Implizite Funktionen
- Interpolation
- Oberflächen-Extraktion
    - Marching Squares (2D)
    - Marching Cubes (3D)

Quellen

- [1] Vorlesungsfolien Prof. Hao Li, CSCI 599: Digital Geometry Processing SS 2014, USC University of Southern California