

Coq でソートを実装

実装したソート

<https://arxiv.org/abs/2110.01111>

[Wikipedia](#)には "I Can't Believe It Can Sort" として載っている。

```
def sort(A):  
    for i in range(len(A)):  
        for j in range(len(A)):  
            if A[i] < A[j]:  
                A[i], A[j] = A[j], A[i]
```

```
A = [1, 5, 6, 2, 7, 3, 4]  
sort(A)  
print(A) # [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

仕組み

- 外側のループが i 周した時点で、左から i 個は整列済み。
- 1周目のループで最大値が $A[0]$ に入る。
- 内側のループ(slide)は整列済みの部分列に $A[i]$ を挿入する。
 - たとえば $[1, 5, 7] + [2]$ を $[1, 2, 5] + [7]$ にする。
 - $[7]$ は最大値なので後半部分とは入れ替わらない。

$[1, 5, 6, 2, 7, 3, 4] \rightarrow [7, \wedge 1, 5, 2, 6, 3, 4]$
-> $[1, 7, \wedge 5, 2, 6, 3, 4] \rightarrow [1, 5, 7, \wedge 2, 6, 3, 4]$
-> $[1, 2, 5, 7, \wedge 6, 3, 4] \rightarrow [1, 2, 5, 6, 7, \wedge 3, 4]$
-> $[1, 2, 3, 5, 6, 7, \wedge 4] \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

関数型言語での実装が面倒（あるいは自分の実装が下手）

挿入ソートなどとは違い、毎回リスト全体を触らないといけない

→ 対象となるリストを小さくしていくことが難しい。帰納的な実装に工夫がいる。

完成物

ソースコード

jsCoqなどで実行すると無事ソートであることが証明できる。

Coq のリストについて

```
Inductive list (A : Type) : Type :=  
  | nil : list A  
  | cons : A -> list A -> list A.
```

- 要素を1つ先頭に追加するときは `x :: xs`
- リストを連結するときは `l1 ++ l2`
- 空リストは `[]`, 1つの要素を持つリストは `[x]`

整列済み判定

```
Inductive sorted : list nat -> Prop :=  
  | sorted_nil : sorted []  
  | sorted_1 : forall x, sorted [x]  
  | sorted_cons : forall {x y l},  
    x <= y -> sorted (y :: l) -> sorted (x :: y :: l).
```

- 空リストは整列済み。
- 1つの要素を持つリストも整列済み。
- 先頭の要素以下の要素を付け加えたリストも整列済み。

置換判定

公式ライブラリのものを利用した。

```
Inductive Permutation : list A -> list A -> Prop :=  
| perm_nil: Permutation [] []  
| perm_skip x l l' : Permutation l l' -> Permutation (x::l) (x::l')  
| perm_swap x y l : Permutation (y::x::l) (x::y::l)  
| perm_trans l l' l'' :  
  Permutation l l' -> Permutation l' l'' -> Permutation l l''.
```

- 空リストは空リストの置換。
- 先頭に同じ値を付け加えても置換。先頭2つ入れ替えても置換。
- 置換の置換は置換。

実装の工夫

- `i` の前半と後半で分割して2つのリストを持つようにした。
- `slide` 関数が内側のループを表す。
先の例は `slide 2 [1;5;7]` を計算すると `(7, [1;2;5])` が帰ってくることに対応する（前後が逆で分かりにくい...）。
- `sort_kernel` 関数が実質全体のソートを表す。余計なものがくっついていたりするが、`sort_kernel (11, 12)` によって `11++12` のソート結果が（分割されて）返ってくる。
- `naivesort 1` が `sort_kernel (1, [])` に対応する。

実装の工夫その2

`sort_kernel` 関数が停止することを追加で証明する必要があるが、その結果内部でCoqによる証明が勝手に追加され、扱いが面倒になる。

→ `Program` コマンドを利用して定義と同時に性質を証明するようにした（そのせいで受け渡す値に余計な証明がくっついている）。

抽出

このコードは（なぜか警告が出るが）Ocamlに抽出できる。
[抽出したもの](#)

感想

この上なくめんどくさいソートアルゴリズム。