

Numerieke Modelling en Benadering: Practicum 1

Ellen Anthonissen Marte Biesmans

vrijdag 21 april 2016

Opgave 1

De Householder transformatiematrix

$$F = I - 2 \frac{vv^*}{v^*v}$$

heeft als eigenwaarden -1 en 1 en als eigenvectoren respectievelijk v en w met $w \perp v$. Deze resultaten zijn als volgt gekomen: De Householder transformatiematrix F is symmetrisch

$$F^* = (I - 2 \frac{vv^*}{v^*v})^* = I - 2 \frac{vv^*}{v^*v} = F$$

en unitair

$$F^*F = FF^* = (I - 2 \frac{vv^*}{v^*v})(I - 2 \frac{vv^*}{v^*v}) = I - 4 \frac{vv^*}{v^*v} + 4 \frac{v(v^*v)v^*}{(v^*v)^2} = I.$$

Omdat F unitair is, moeten de eigenwaarden van F op de complexe eenheidscirkel gelegen zijn. Omdat F reëel en symmetrisch is, zijn de eigenwaarden reële getallen. Hieruit volgt dat de eigenwaarden enkel ± 1 kunnen zijn.

Als we nu Fv uitrekenen, bekommen we

$$Fv = v - 2 \frac{vv^*}{v^*v}v = -v.$$

Hieruit volgt dat v een eigenvector is bijhorende bij de eigenwaarde -1 . Neem nu w met $w \perp v$ en we rekenen Fw uit, dan bekommen we

$$Fw = w - 2 \frac{vv^*}{v^*v}w = w,$$

want $v^*w = 0$. Hieruit volgt dat w een eigenvector is bijhorende bij de eigenwaarde 1 .

Geometrisch gezien komt dit overeen met een spiegeling over de w -as. Neem een vector a en ontbind die in een component volgens de v -as en een component volgens de w -as. De component volgens de v -as zal vermenigvuldigt worden met -1 en die volgens de w -as met 1 . Zo bekommen we een spiegeling rond de w -as.

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	0,0044	0,0022	0,0025
100	0,1883	0,1403	0,1306
1000	28,2691	27,725	27,9583

Tabel 1: De snelheid van de expliciete methode

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	0,0050	0,0015	0,0013
100	0,0115	0,0131	0,0163
1000	7,9605	7,7967	7,8586

Tabel 2: De snelheid van de impliciete methode

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	10^{-16}	10^{-13}	10^{-9}
100	10^{-15}	10^{-13}	10^{-9}
1000	10^{-14}	10^{-13}	10^{-9}

Tabel 3: De ordegraote van de relatieve fout van de expliciete methode

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	10^{-16}	10^{-13}	10^{-9}
100	10^{-15}	10^{-13}	10^{-9}
1000	10^{-14}	10^{-13}	10^{-9}

Tabel 4: De ordegraote van de relatieve fout van de impliciete methode

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	10^{-16}	10^{-13}	10^{-9}
100	10^{-15}	10^{-13}	10^{-10}
1000	10^{-15}	10^{-13}	10^{-10}

Tabel 5: De ordegraote van de verhouding van de norm van het residu op de b-vector van de expliciete methode

$n \setminus \kappa$	1	10^4	10^8
10	10^{-16}	10^{-13}	10^{-9}
100	10^{-15}	10^{-13}	10^{-10}
1000	10^{-15}	10^{-13}	10^{-10}

Tabel 6: De ordegraote van de verhouding van de norm van het residu op de b-vector van de impliciete methode

Opgave 2

EVENTUEEL MATLAB CODE

Opgave 3

Opgave 4

Neem een vector $x \in \mathbb{R}^n$. Schrijf x als lineaire combinatie van de eigenvectoren van A $q_1, q_2 \dots q_n$ met bijhorende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$:

$$x = \sum_{j=1}^n a_j q_j,$$

dan is het Rayleigh quotiënt van x :

$$r(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_j^2 q_j \lambda_j}{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

Het Rayleigh quotiënt is onafhankelijk van de schaal van x , dus stel $\|a\| = \|[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T\| = 1$, dan is $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$. Dan wordt

$$r(x) = \sum_{j=1}^n a_j^2 q_j \lambda_j.$$

Stel nu dat $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, dan is het Rayleigh quotiënt maximaal voor $a = e_1$ met de waarde λ_{max} en minimaal voor $a = e_n$ met de waarde λ_{min} . Dus het Rayleigh quotiënt bevindt zich in het interval $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$.

Ook is het Rayleigh quotiënt een continu voor $a \neq 0$, dus elke waarde tussen λ_{min} en λ_{max} wordt bereikt voor een x .

Opgave 5

Opgave 6

We maken gebruik van de ongelijkheid

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^n.$$

Voor $n = 10$ wordt dit

$$\frac{\|e_{10}\|_A}{\|e_0\|_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{10}.$$

Gebruik makende van de gegevens $\|e_0\|_A = 1$ en $\|e_{10}\|_A = 2 \times 2^{-10}$, bekomen we

$$9 \leq \kappa.$$

We vinden dus een ondergrens voor κ .

Voor $n = 20$ wordt de ongelijkheid

$$\frac{\|e_{20}\|_A}{\|e_0\|_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{20}.$$

Gebruik makende van het gegeven $\|e_0\|_A = 1$ en het berekende $9 \leq \kappa$, bekomen we

$$\|e_{20}\|_A \leq 2 \times 2^{-20}.$$

We vinden dus een bovengrens voor $\|e_{20}\|_A$.

Opgave 7

Opgave 8

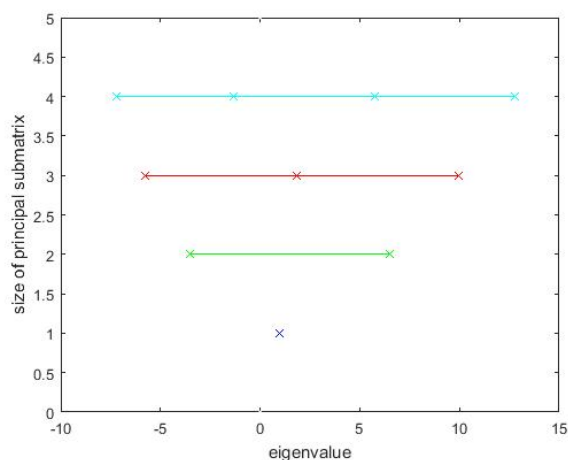
Opgave 9

De interlace eigenschap van een tridiagonale, symmetrische en reële matrix A luidt als volgt. Voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, en $A^{(1)}, A^{(2)} \dots A^{(n)}$ de principale vierkante submatrices van dimensie $1, 2 \dots n$, geldt dat de eigenwaarden van deze submatrices interlacen. Dit wil zeggen dat $\lambda_j^{(k+1)} \leq \lambda_j^{(k)} \leq \lambda_{j+1}^{(k+1)}$. Als A irreduceerbaar is (en dus geen nul heeft op een nevendagonaal), dan worden de ongelijkheden strikte ongelijkheden. Dit laatste is belangrijk voor de bisectie-methode.

Als voorbeeld nemen we de tridiagonale, symmetrische en reële matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

We zien duidelijk op figuur 1 dat de eigenwaarden van een principale submatrix tussen de eigenwaarden van de principale submatrix van een dimensie groter liggen.



Figuur 1: De eigenwaarden van de opeenvolgende principale submatrices van A

Opgave 10

Een algoritme in pseudo-code dat alle eigenwaarden van een symmetrische tri-diagonale matrix in het interval $[a,b)$ berekent tot op een bepaalde tolerantie met behulp van de bisectie-methode, is te vinden in algoritme 1.

Algorithm 1 Bisectie-methode

```

queue = [[a,b]]
while queue niet leeg do
    Haal eerste interval uit de queue
     $Sturm_{links}$  = aantal tekenwisselingen in de Sturm-rij van A-linkergrens*I
     $Sturm_{rechts}$  = aantal tekenwisselingen in de Sturm-rij van A-
    rechtergrens*I
     $\#eigenwaarden = Sturm_{rechts} - Sturm_{links}$ 
     $midden = 0.5 * (rechtergrens - linkergrens)$ 
    if  $\#eigenwaarden == 1$  then
        if  $midden < tolerantie$  then
            Voeg linkergrens+midden toe als eigenwaarde
        else
            Voeg [linkergrens,linkergrens+midden] en [linker-
            grens+midden,rechtergrens] vooraan bij in de queue
        end if
    else if  $\#eigenwaarden > 1$  then
        Voeg [linkergrens,linkergrens+midden] en [linker-
        grens+midden,rechtergrens] vooraan bij in de queue
    end if
end while

```

Als eerste voorbeeld nemen we de tridiagonale, symmetrische en reële matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Als we hieruit de eigenwaarden willen berekenen die tussen