

V47

## **Molwärme von Cu**

Jana Hohmann  
jana.hohmann@web.de

Elena Darscht  
elena.darscht@yahoo.de

Durchführung: 20.11.19

Abgabe: 29.11.19

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>3</b>
4.1	Messung der Molwärme bei konstantem Druck und Berechnung der Molwärme bei konstantem Volumen . . . . .	3
4.2	Bestimmung der Debye-Temperatur . . . . .	7
4.3	Bestimmung des Theoriewerts von der Debye-Frequenz und Debye-Temperatur.	10
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Ziel

## 2 Theorie

## 3 Durchführung

## 4 Auswertung

### 4.1 Messung der Molwärme bei konstantem Druck und Berechnung der Molwärme bei konstantem Volumen

Zunächst wurde der äußerer Probenzylinder der Apparatur, welche in der Durchführung beschrieben ist, mit flüssigem Stickstoff auf eine Temperatur von  $T_0 = -189,5^\circ\text{C}$  gekühlt, da eine tiefere Temperatur nicht erreicht werden konnte. Von da an wurde die Heizspannung  $U$ , der Heizstrom  $I$ , der Widerstand  $R$  und die Zeit  $t$  die nötig ist um eine Temperaturerhöhung um etwa 10 K zu erreichen, gemessen. Die Werte sind in Tabelle 1 dargestellt. Aus dem Widerstand in Ohm wurde mit der Formel

$$T[^\circ\text{C}] = 0,00134 \cdot (R[\Omega])^2 + 2,296 \cdot R[\Omega] - 243,02$$

die Temperatur in Grad-Celsius berechnet und die entsprechenden Werte für die Temperatur wurden in Tabelle 1 hinzugefügt. Außerdem wurde eine Umrechnung in Kelvin vorgenommen, wobei die Formel

$$T[\text{K}] = T[^\circ\text{C}] + 273,2$$

verwendet wurde. Die Näherung  $273,15 \approx 273,2$  wurde verwendet, da die Temperatur mit der vorliegenden Messmethode nicht auf zwei Nachkommastellen genau bestimmt werden kann, und durch die Umrechnung in Kelvin keine solche Genauigkeit suggeriert werden sollte. Außerdem wurde in der Tabelle 1 die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  angegeben, diese ergibt sich aus der Temperatur  $T$  zum Messzeitpunkt der Zeit  $t$ , und der Temperatur davor. Für die erste Temperaturdifferenz wurden die Anfangstemperatur  $T_0$  und  $T = -180,1^\circ\text{C}$  verwendet, für die darauf immer die gemessene Endtemperatur und die Endtemperatur aus der vorherigen Messung.

**Tabelle 1:** Messwerte für die Molwärmeberechnung und berechnete Werte einschließlich der Molwärme.

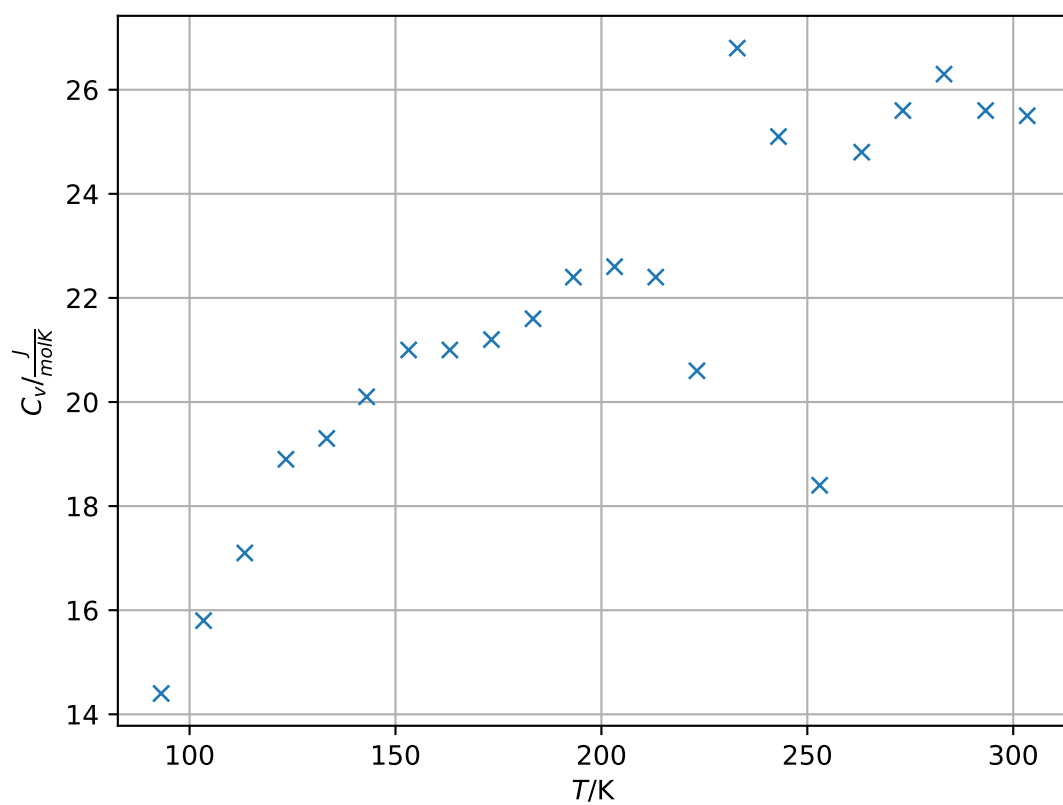
$U/V$	$I/\text{mA}$	$t/s$	$R/\Omega$	$\Delta T/K$	$T/^{\circ}\text{C}$	$T/K$	$C_p/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$	$C_v/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$
16,69	160,3	274	27,0	9,4	-180,1	93,1	14,5	14,4
16,95	161,2	320	31,3	10,2	-169,8	103,4	15,9	15,8
17,05	162,0	335	35,5	10,0	-159,8	113,4	17,1	17,1
17,15	162,8	369	39,7	10,1	-149,8	123,4	19,0	18,9
18,80	178,0	309	43,8	9,9	-139,9	133,3	19,5	19,3
18,65	176,8	329	47,9	9,9	-130,2	143,0	20,3	20,1
19,79	187,4	307	52,0	10,0	-120,0	153,2	21,2	21,0
19,86	188,0	307	56,1	10,0	-110,0	163,2	21,3	21,0
19,90	188,3	310	60,2	10,1	-99,9	173,3	21,4	21,2
19,93	188,5	317	64,3	10,1	-89,8	183,4	21,9	21,6
19,96	188,7	322	68,3	9,9	-80,0	193,2	22,9	22,4
19,98	188,9	326	72,3	9,9	-70,0	203,2	23,0	22,6
20,0	189,1	324	76,3	10,0	-60,0	213,2	22,9	22,4
20,0	189,2	300	80,3	10,0	-50,0	223,2	21,0	20,6
20,1	189,3	379	84,2	9,8	-40,2	233,0	27,3	26,8
20,0	189,4	367	88,2	10,1	-30,2	243,0	25,6	25,1
20,0	189,5	266	92,1	9,9	-20,2	253,0	19,0	18,4
20,0	189,5	367	96,1	10,2	-10,0	263,2	25,4	24,8
20,0	189,6	371	100,0	10,0	0,0	273,2	26,2	25,6
20,0	189,6	383	103,9	10,0	10,0	283,2	26,9	26,3
20,0	189,7	375	107,8	10,1	20,1	293,3	26,3	25,6
20,0	189,8	375	111,7	10,1	30,2	303,4	26,2	25,5

Durch die Formel ?? wurde die Molwärme bei konstantem Druck  $C_p$  berechnet, mit Formel ?? wird diese in Molwärme bei konstantem Volumen  $C_v$  umgerechnet. Auch diese berechneten Werte sind in Tabelle 1 zu finden. Die Werte für den linearen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ , die für die Berechnung der Molwärme bei konstantem Volumen notwendig sind, werden der Tabelle in Abbildung 1 entnommen. Dabei wird die Temperatur immer auf die nächste Zehnerpotenz abgerundet. Z.B. wird für den ersten Wert bei  $T = 93,1$  K der lineare Ausdehnungskoeffizient für den Wert von 90 K verwendet. Da die Molwärme bei konstantem Druck auf die erste Nachkommastelle gerundet wird, ist der entstehende Fehler vernachlässigbar.

Zur Veranschaulichung der Daten wird die Molwärme bei konstanten Volumen gegen die Temperatur aufgetragen. Der Graph ist in Abbildung 2 zu sehen.

<b>T [K]</b>	70	80	90	100	110	120	130	140
<b><math>\alpha [10^{-6} \text{ grad}^{-1}]</math></b>	7,00	8,50	9,75	10,70	11,50	12,10	12,65	13,15
<b>T [K]</b>	150	160	170	180	190	200	210	220
<b><math>\alpha [10^{-6} \text{ grad}^{-1}]</math></b>	13,60	13,90	14,25	14,50	14,75	14,95	15,20	15,40
<b>T [K]</b>	230	240	250	260	270	280	290	300
<b><math>\alpha [10^{-6} \text{ grad}^{-1}]</math></b>	15,60	15,75	15,90	16,10	16,25	16,35	16,50	16,65

**Abbildung 1:** Der lineare Ausdehnungskoeffizient[1].



**Abbildung 2:** Die Molwärme bei konstantem Volumen in Abhängigkeit von der Temperatur.

## 4.2 Bestimmung der Debye-Temperatur

Im Folgenden wird nur der Temperaturbereich bis 170 K betrachtet. D.h. der Bereich der Molwärme bei konstantem Volumen der hier betrachtet wird ist derjenige von  $(14,4 - 21,0) \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ . Mithilfe der Tabelle in Abbildung 3, lässt sich zu manchen Werten der Molwärme bei konstantem Volumen der Quotient  $Q = \frac{\Theta_D}{T}$  ablesen. Die Debye-Temperatur wird dabei als  $\Theta_D$  bezeichnet. Mithilfe dieser Tabelle wird die Funktion der Molwärme in Abhängigkeit von dem Quotienten gefittet. Hierfür werden nur im relevanten Bereich der Molwärme die entsprechenden Wertepaare der Tabelle in einen Graphen eingetragen und eine lineare Regression der Form

$$Q = a \cdot C_v + b$$

durchgeführt. Daraus ergibt sich für die Steigung  $a$  und den Achsenabschnitt  $b$

$$a = (-0,2454 \pm 0,0015) \frac{\text{molK}}{\text{J}}$$
$$b = 7,053 \pm 0,028.$$

Nun wurden die entsprechenden Werte für den Quotienten mithilfe der Formel

$$Q = -0,2454 \frac{\text{molK}}{\text{J}} \cdot C_v + 7,053$$

berechnet. Der Fehler ergibt sich durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung aus

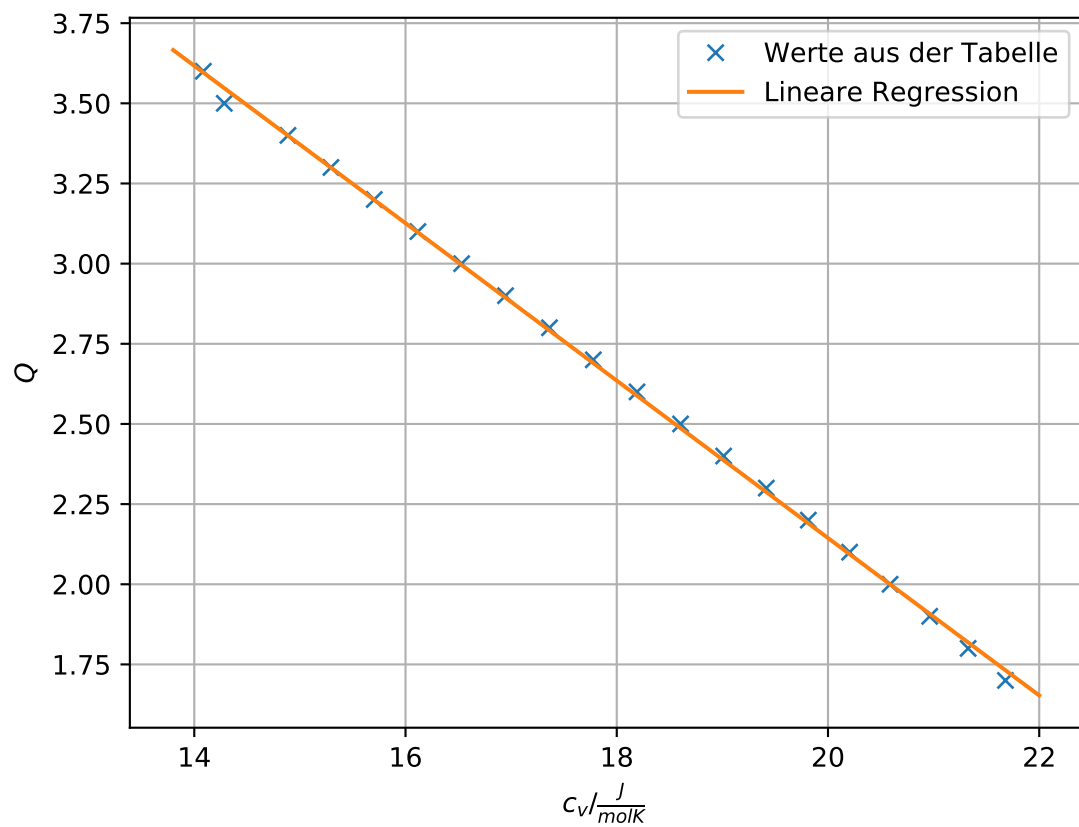
$$\Delta Q = \sqrt{C_v^2 \Delta a^2 + \Delta b^2}.$$

Die Wertepaare sind in Tabelle 2 aufgelistet, die lineare Regression ist in Abbildung 4 zu sehen.

$\theta_b/T$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24,9430	24,9310	24,8930	24,8310	24,7450	24,6340	24,5000	24,3430	24,1630	23,9610
1	23,7390	23,4970	23,2360	22,9560	22,6600	22,3480	22,0210	21,6800	21,3270	20,9630
2	20,5880	20,2050	19,8140	19,4160	19,0120	18,6040	18,1920	17,7780	17,3630	16,9470
3	16,5310	16,1170	15,7040	15,2940	14,8870	14,4840	14,0860	13,6930	13,3050	12,9230
4	12,5480	12,1790	11,8170	11,4620	11,1150	10,7750	10,4440	10,1190	9,8030	9,4950
5	9,1950	8,9030	8,6190	8,3420	8,0740	7,8140	7,5610	7,3160	7,0780	6,8480
6	6,6250	6,4090	6,2000	5,9980	5,8030	5,6140	5,4310	5,2550	5,0840	4,9195
7	4,7606	4,6071	4,4590	4,3160	4,1781	4,0450	3,9166	3,7927	3,6732	3,5580
8	3,4468	3,3396	3,2362	3,1365	3,0403	2,9476	2,8581	2,7718	2,6886	2,6083
9	2,5309	2,4562	2,3841	2,3146	2,2475	2,1828	2,1203	2,0599	2,0017	1,9455
10	1,8912	1,8388	1,7882	1,7393	1,6920	1,6464	1,6022	1,5596	1,5184	1,4785
11	1,4400	1,4027	1,3667	1,3318	1,2980	1,2654	1,2337	1,2031	1,1735	1,1448
12	1,1170	1,0900	1,0639	1,0386	1,0141	0,9903	0,9672	0,9449	0,9232	0,9021
13	0,8817	0,8618	0,8426	0,8239	0,8058	0,7881	0,7710	0,7544	0,7382	0,7225
14	0,7072	0,6923	0,6779	0,6638	0,6502	0,6368	0,6239	0,6113	0,5990	0,5871
15	0,5755	0,5641	0,5531	0,5424	0,5319	0,5210	0,5117	0,5020	0,4926	0,4834

**Abbildung 3:** Zahlenwerte der Debye-Funktion[1].





**Abbildung 4:** lineare Regression zur Bestimmung des Quotienten.

**Tabelle 2:** Werte zur Bestimmung des Quotienten, und der berechnete Quotient sowie die daraus ermittelte Debye-Temperatur.

$T/\text{K}$	$C_v/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$	$Q$	$\Theta_D/\text{K}$
93,1	14,4	$3,52 \pm 0,04$	325,9 pm 3,7
103,4	15,8	$3,18 \pm 0,04$	330,9 pm 4,1
113,4	17,1	$2,86 \pm 0,04$	328,9 pm 4,5
123,4	18,9	$2,41 \pm 0,04$	296,2 pm 4,9
133,3	19,3	$2,32 \pm 0,04$	306,6 pm 5,3
143,0	20,1	$2,12 \pm 0,04$	300,3 pm 5,7
153,2	21,0	$1,90 \pm 0,04$	291,1 pm 6,1
163,2	21,0	$1,90 \pm 0,04$	310,2 pm 6,5

Um die Debye-Temperatur zu ermitteln, wird der Quotient  $Q = \frac{\Theta_D}{T}$  verwendet. Dabei wird die Gleichung des Quotienten zu

$$\Theta_D = Q \cdot T$$

umgeformt. Der Fehler ist berechnet mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\Theta_{siD} = T \cdot \Delta Q. \quad (1)$$

Die so berechneten Debye-Temperatur sind auch in Tabelle 2 eingetragen. Der Mittelwert von der Debye-Temperatur ergibt sich aus

$$\overline{\Theta_D} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Theta_{Di}) = 311,2 \text{ K},$$

wobei  $N = 8$  die Anzahl der Messwerte ist. Der Fehler ergibt sich durch den Mittelwert des Fehlers zu

$$\Delta\Theta_D = 5,1 \text{ K},$$

### 4.3 Bestimmung des Theoriewerts von der Debye-Frequenz und Debye-Temperatur.

Aus der Formel ?? lässt sich die Debye-Frequenz  $\omega_D$  zu

$$\omega_D = 4,349 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{s}}$$

berechnen, wobei  $v_l = 4,7 \text{ km/s}$  und  $v_t = 2,26 \text{ km/s}$  ist.

Mithilfe von Formel ?? lässt sich nun aus der Debye-Frequenz der theoretische Wert der Debye-Temperatur  $\Theta_{D, \text{theo}}$  bestimmen:

$$\Theta_{D, \text{theo}} = 332,19 \text{ K}.$$

Um den Theoretischen Wert der Debye-Temperatur mit dem praktisch Ermittelten zu vergleichen, wird die Abweichung  $u$  der Werte mithilfe der Formel

$$u = \left| 1 - \left( \frac{\Theta_D}{\Theta_{D, \text{theo}}} \right) \right| = 6,3\%$$

bestimmt. Die Temperaturen weichen somit um ca. 6,3% voneinander ab.

## 5 Diskussion

Die großen Schwankungen vor Allem in den höheren Temperaturen im Graphen der Abbildung 2, lassen größere Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Molwärme vermuten. Da diese vor allem kurzzeitig für die höheren Temperaturen auftreten, könnte es an einem Mangel von flüssigem Stickstoff begründet liegen, der ungefähr zu diesen Temperaturen bemerkt wurde und anschließend behoben wurde. Die kleineren Schwankungen in den tieferen Temperaturen bedeuten etwas genauere Werte für den Bereich, der im Verlauf des Protokolls näher untersucht wurde. Die aus den Werten der tieferen Temperaturen berechnete Debye-Temperatur beträgt  $\Theta_D = (311,2 \pm 5,5) \text{ K}$ . Der prozentuale Fehler  $f$  der bestimmten Debye-Temperatur ist also

$$f = \frac{\overline{\Theta_D}}{\Delta\Theta_D} = 1,8\%,$$

dies ist ein relativ kleiner Fehler und bestätigt die einheitlicheren Messergebnisse bei den tieferen Temperaturen, die zur Bestimmung des Wertes verwendet wurden. Also alle Temperaturen unter 170 K.

Die Abweichung  $u$  zum berechneten Theoriewert  $\Theta_{D, \text{theo}} = 332,19 \text{ K}$  sind jedoch größer:  $u = 6,3\%$ . Eine Abweichung in diesem Bereich ist durch Messungenauigkeiten zu erklären. Mögliche Fehlerquellen der Messung sind die Umrechnung des Widerstandswertes in die Temperatur und die Messungenauigkeit der Messgeräte (sowohl für die Widerstandsmessung, als auch für die Messung der Heizspannung und dem Heizstrom). Vor Allem bei der Messung der Heizspannung, die einmal direkt durch das Spannungsgerät und einmal durch ein äußeres Messgerät bestimmt wurde, zeigte sich, dass das Spannungsgerät keine guten Werte für die Spannung lieferte. Die Stromstärke wurde jedoch einfach von der Messanzeige des Spannungsgeräts übernommen und nicht weiter überprüft. Weitere Fehler entstanden dadurch, dass die Zeit händisch gestoppt wurde, wenn das Ohmmeter den gewünschten Widerstand erreicht hatte. Dabei fließt die Varianz der Reaktionszeit mit ein.

Vor Allem wurde vernachlässigt, dass die Energie aus der Heizspannung und dem Heizstrom gegebenenfalls nicht vollständig in Wärmeenergie umgewandelt wurde. Auch ist eine vollständige Wärmeisolation eines realen Versuchs nicht möglich.

Alles in allem ist trotz vieler möglicher Fehlerquellen der Fehler der berechneten Debye-Temperatur recht klein, und die Abweichung zum Theoriewert ist auch in einem vertretbaren Bereich.

## 6 Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*