



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

V46 - Der Faraday-Effekt



DURCHFÜHRUNG AM 27. NOVEMBER 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Effektive Masse der Leitungselektronen	3
2.2	Zirkulare Doppelbrechung	4
2.3	Rotationswinkel des Faraday-Effekts	5
3	Durchführung	5
4	Auswertung	7
4.1	Bestimmung der maximalen Kraffflussdichte	7
4.2	Die Faraday Rotation	8
4.3	Bestimmung der effektiven Masse	8
5	Diskussion	11
	Literatur	12

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung der effektiven Masse der Leitungselektronen verschiedener Medien mithilfe des Faraday-Effektes. Der Faraday-Effekt beschreibt die Drehung der Polarisationsebene von Lichtwellen bei Durchgang durch ein Medium, wobei parallel zur Ausbreitungsrichtung ein Magnetfeld anliegt. Konkret wird hier mit Licht im infraroten Bereich gearbeitet, mit dem die effektive Masse der Leitungselektronen eines Halbleiters untersucht wird.

2 Theorie

Zunächst wird der Begriff der effektiven Masse erklärt. Danach wird die Drehung der Polarisationsebene aufgrund der sogenannten zirkularen Doppelbrechung phänomenologisch begründet, um dann abschließend eine Formel für den Rotationswinkel in Abhängigkeit verschiedener Größen herzuleiten.

2.1 Effektive Masse der Leitungselektronen

Zur Beschreibung der elektrischen Struktur von Materialien wird das sogenannte Bändermodell verwendet. Darin besitzt jeder Körper ein Valenzband, dessen Zustände jeweils voll mit Elektronen besetzt sind. Energetisch darüber liegt das sogenannte Leitungsband. Dabei entscheidet die Besetzung des Leitungsbandes sowie die Energiedifferenz der beiden Bänder, die sogenannte Bandlücke, über die elektrische Leitfähigkeit des Materials. Es werden drei Formen unterschieden: Im Metall (Leiter) verschwindet die Bandlücke und das Leitungsband ist ebenfalls mit Elektronen besetzt. Beim Isolator (Nichtleiter) ist die Bandlücke größer als 4,4 eV und das Leitungsband ist nicht besetzt. Die dritte Form, der Halbleiter ist am absoluten Temperaturnullpunkt ebenfalls nicht leitfähig, da er auch eine Bandlücke besitzt, die allerdings nur ca. 0,1 – 4,1 eV beträgt. Er besitzt aber aufgrund seiner sogenannten Dotierung, das Einbringen von fünf- oder dreiwertigen Fremdatomen, entweder zusätzliche Elektronen (n-Dotierung) oder Elektronenfehlstellen (p-Dotierung). Schematisch sind diese Verhältnisse in Abbildung 1 dargestellt. Im Weiteren wird nur die

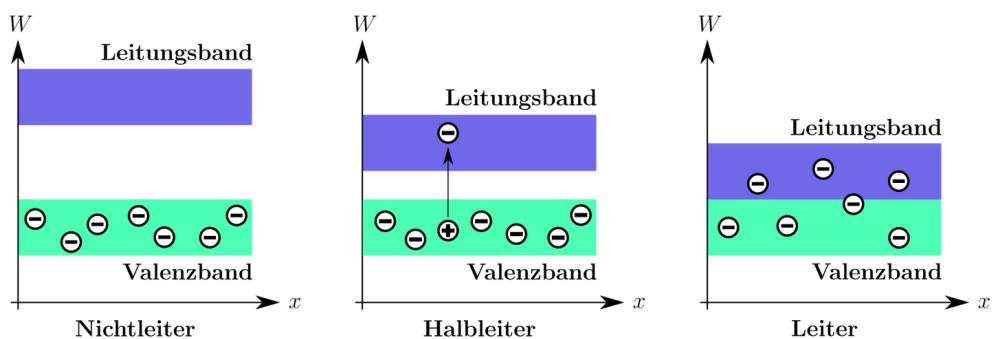


Abbildung 1: Schematische Darstellung der elektrischen Eigenschaften von Nichtleiter, Halbleiter und Isolator im Bändermodell [3].

für den Versuch relevante n-Dotierung behandelt. Wichtig für die elektrischen Eigenschaften ist dabei, dass die Position der zusätzlichen Elektronen innerhalb der Bandlücke an der Grenze zum Leitungsband liegt. Das bedeutet, dass diese Elektronen bei Hinzugabe von thermischer Energie $E = k_B T$ in das Leitungsband springen können. Da sie sich aber weiterhin im Kernpotential bewegen, wird die sogenannte effektive Masse betrachtet. Dazu wird der Wellenvektor \mathbf{k} im Minimum bei $k = 0$ betrachtet. Dort kann die Elektronenenergie $\varepsilon(\mathbf{k})$ in einer Taylor-Reihe

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial k_i^2} \right)_{k=0} k_i^2 + \dots$$

entwickelt werden. Aus dem Vergleich mit dem bekannten Term als Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

ergibt sich ein Ausdruck für die effektive Masse zu

$$m_i^* = \frac{\hbar^2}{\left(\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial k_i^2} \right)_{k=0}}.$$

2.2 Zirkulare Doppelbrechung

Zur Beschreibung der zirkularen Doppelbrechung in einem Material wird das eintretende linear polarisierte Licht als Überlagerung zweier gegengleich zirkular polarisierter Lichtstrahlen

$$E(z) = \frac{1}{2}(E_R(z) + E_L(z))$$

beschrieben. Aufgrund der Materialstruktur sind dabei die Phasengeschwindigkeiten der links- und rechtszirkular polarisierten Welle unterschiedlich. Durch Einsetzen eines Wellenansatzes sowie der Abkürzung $\theta = \frac{1}{2}(k_R - k_L)$ ergibt sich mit den entsprechenden Phasengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{L\omega}{2} \left(\frac{1}{v_{\text{Ph},R}} - \frac{1}{v_{\text{Ph},L}} \right) \\ &\xrightarrow{n=\frac{c}{v_{\text{Ph}}}} \theta = \frac{L\omega}{2c} (n_R - n_L), \end{aligned}$$

wobei L die Länge des durchstrahlten Materials und ω die Frequenz der einfallenden Lichtwelle sind. Diese verschiedenen Brechungsindizes entstehen aufgrund der Induktion von elektrischen Dipolen durch das externe Magnetfeld. Daher muss die elektrische Suszeptibilität χ nun als Tensor mit nicht verschwindenden Nebendiagonalelementen definiert werden. Derartige Materialien werden anisotrop genannt und sind doppelbrechend. Wird der Brechungsindex dann über die Tensorelemente der Suszeptibilität ausgedrückt, ergibt sich

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2c^2} v_{\text{Ph}} \chi_{xy} = \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy}. \quad (1)$$

2.3 Rotationswinkel des Faraday-Effekts

Durch das Anlegen eines externen Magnetfelds kommt der Faraday-Effekt auch bei optisch inaktiver Materie zum Tragen. Zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Magnetfeld \mathbf{B} und Elektron mit Masse m und Ladung e_0 lässt sich die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + K\mathbf{r} = -e_0 \mathbf{E}(r) - e_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}$$

aufstellen, wobei \mathbf{r} die Auslenkung des Elektrons aus der Ruhelage, K eine Bindungskonstante des Elektrons bezüglich der Umgebung und \mathbf{E} die Feldstärke des einfallenden Lichts beschreiben. Mit einem Lösungsansatz für ebene Wellen und der Relation $\mathbf{P} = -Ne_0\mathbf{r}$ ergibt sich

$$-m\omega^2 \mathbf{P} + K\mathbf{P} = +e_0^2 N\mathbf{E} + ie_0\omega\mathbf{P} \times \mathbf{B}.$$

Wird nun über die Polarisation $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ die elektrische Suszeptibilität in die Rechnung eingebracht und dabei die Tensorgestalt berücksichtigt, folgt bei einem Magnetfeld in z -Richtung für die Komponente

$$\chi_{xy} = \frac{Ne_0^3\omega B}{\varepsilon_0 ((-m\omega^2 + K)^2 - (e_0\omega B)^2)}$$

und damit für den Rotationswinkel θ

$$\theta = \frac{e_0^3}{2\varepsilon_0 cm^2} \frac{\omega}{\left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right)^2 - (e_0 m B \omega^2)^2} \frac{NBL}{n}.$$

Dabei lässt sich $\sqrt{\frac{K}{m}}$ als Resonanzfrequenz ω_0 der gebundenen Ladungsträger und $\frac{Be_0}{m}$ als Zyklotron-Frequenz ω_C identifizieren. Mit den Annahmen, dass die Messfrequenz deutlich kleiner als ω_0 ist und $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \omega^2 \omega_C^2$, ergibt sich unter Berücksichtigung der Wellenlänge λ

$$\theta(\lambda) \approx \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\varepsilon_0 m^2} \frac{1}{\lambda^2 \omega_0^4} \frac{NBL}{n}.$$

Für den Fall quasifreier Ladungsträger geht $\omega_0 \rightarrow 0$. Es ist außerdem notwendig, die Masse m durch die sogenannte effektive Masse m^* zu ersetzen, die aus der Bewegung im Kernpotential herrührt. Damit folgt also

$$\theta_{\text{frei}} = \frac{e_0^3}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 (m^*)^2} \lambda^2 \frac{NB}{n}. \quad (2)$$

3 Durchführung

In Abbildung 2 ist der schematische Versuchsaufbau zu sehen. Die Lichtquelle ist eine Halogenlampe mit überwiegend infrarotem Emissionsspektrum. Das Licht fällt zunächst durch eine Linse, die möglichst parallele Lichtstrahlen erzeugt. Anschließend folgt ein

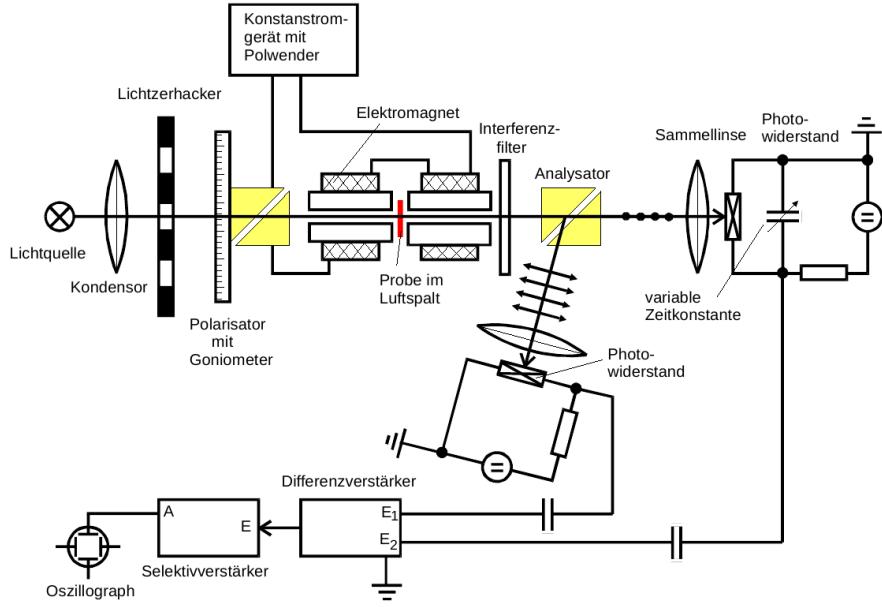


Abbildung 2: Schematische Darstellung des verwendeten Versuchsaufbaus [1].

Lichtzerhacker, der das Licht in Impulse zerlegt und somit eine Modulationsfrequenz initiiert. Als nächstes trifft das Licht auf das erste Glan-Thompson-Prisma, das das Licht linear polarisiert. Daran befindet sich außerdem ein Goniometer zur Winkelmessung. Dann folgt der Eintritt zwischen die Elektromagneten und der Durchtritt durch die Probe, die sich in einem Luftspalt in den Elektromagneten befindet. Darauf passiert das Licht einen Interferenzfilter, der eine bestimmte Wellenlänge herausfiltert. Das nun monochromatische Licht wird dann in einem weiteren Glan-Thompson-Prisma in zwei zueinander senkrecht polarisierte Komponenten zerlegt. Diese werden wiederum über Sammellinsen auf Photowiderstände gelenkt, die die Intensität messbar machen. Die dabei entstehenden Signale werden dann auf einen Differenzverstärker gegeben, dessen Ausgangsspannung proportional zur Differenz der beiden Eingangsspannungen ist. Der darauf folgende Selektivverstärker wird auf die durch das Zerhackerrad erzeugte Modulationsfrequenz abgestimmt, sodass Störfrequenzen bestmöglich herausgefiltert werden.

Nach der Justierung dieses optischen Apparats kann mit der Messung begonnen werden. Es wird mit einer n-dotierten Galliumarsenid-Probe mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ begonnen. Dazu werden nacheinander insgesamt neun Interferenzfilter verschiedener Wellenlängen eingesetzt. Dann wird bei eingeschaltetem Magnetfeld das erste Glan-Thompson-Prisma mithilfe des Goniometers so eingestellt, dass die auf dem Oszilloskop angezeigte Ausgangsspannung des Selektivverstärkers minimal wird. Anschließend wird das Magnetfeld umgepolzt und die Ausgangsspannung wiederum auf ein Minimum eingepegelt. Dieses Verfahren wird für alle neun Filter durchgeführt. Der gesamte Messprozess wird im Anschluss außerdem für eine n-dotierte Galliumarsenid-Probe mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$

sowie eine hochreine Probe wiederholt.

Abschließend wird noch das Magnetfeld an mehreren Stellen in der Nähe der Probenposition mittels Hall-Sonde ermittelt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der maximalen Kraftflussdichte

Das angelegte Magnetfeld ist ortsabhängig, und wird mit Hilfe einer Hallsonde bestimmt. Die aufgenommenen Messwerte sind in der Tabelle 1 aufgelistet, und in Abbildung 3 graphisch dargestellt.

Tabelle 1: Aufgenommene Messdaten zur Bestimmung der magnetischen Flussdichte an verschiedenen Orten.

x in mm	B in mT
125	411
126	417
127	423
128	427
129	429
130	429
131	426
132	422
133	417
134	408

Folgend nutzt man eine Ausgleichsfunktion, die gegeben ist als

$$B(z) = az^2 + bz + c , \quad (3)$$

Diese liefert die folgenden Parameter

$$\begin{aligned} a &= (-0,962 \pm 0,002) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^2} \\ b &= (2,480 \pm 0,664) \frac{\text{mT}}{\text{mm}} \\ c &= (-1567,706 \pm 429,905) \text{ mT} \end{aligned}$$

Bei einer Entfernung von $x = 129$ mm hat die magnetische Flussdichte ihr Maximum mit $B = 429$ mT. Diese Position entspricht ungefähr der Position der eingeführten Proben und wird für die späteren Berechnungen genutzt.

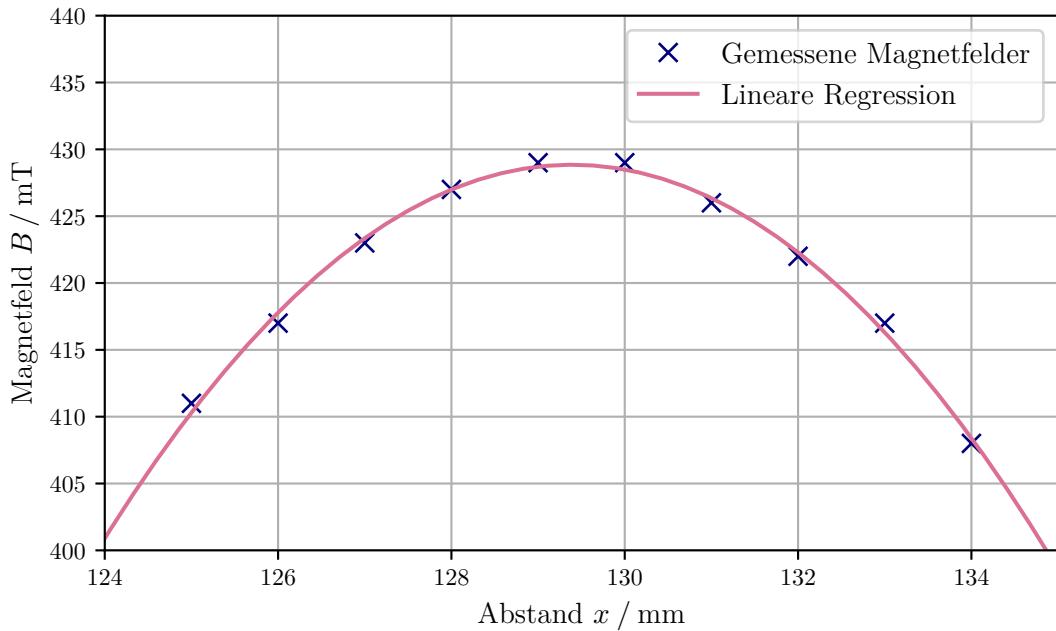


Abbildung 3: Grafische Darstellung der Ortsabhängigkeit der Magnetischen Flussdichte.

4.2 Die Faraday Rotation

Im folgenden Versuchsteil wird die Faraday-Rotation für drei unterschiedliche Proben des Materials Galliumarsenid untersucht. Diese unterscheiden sich in ihren Eigenschaften der Dotierung und Dicke.

$$\begin{aligned} d_{\text{hochrein}} &= 0,00511 \text{ m} \\ d_{N=1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}} &= 0,00136 \text{ m} \\ d_{N=2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}} &= 0,001296 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Messwerte sind in der Tabelle 2 einzusehen.

Dieser normierte Drehwinkel wird nun quadratisch gegen die Wellenlänge aufgetragen, und kann in der Grafik 4 eingesehen werden.

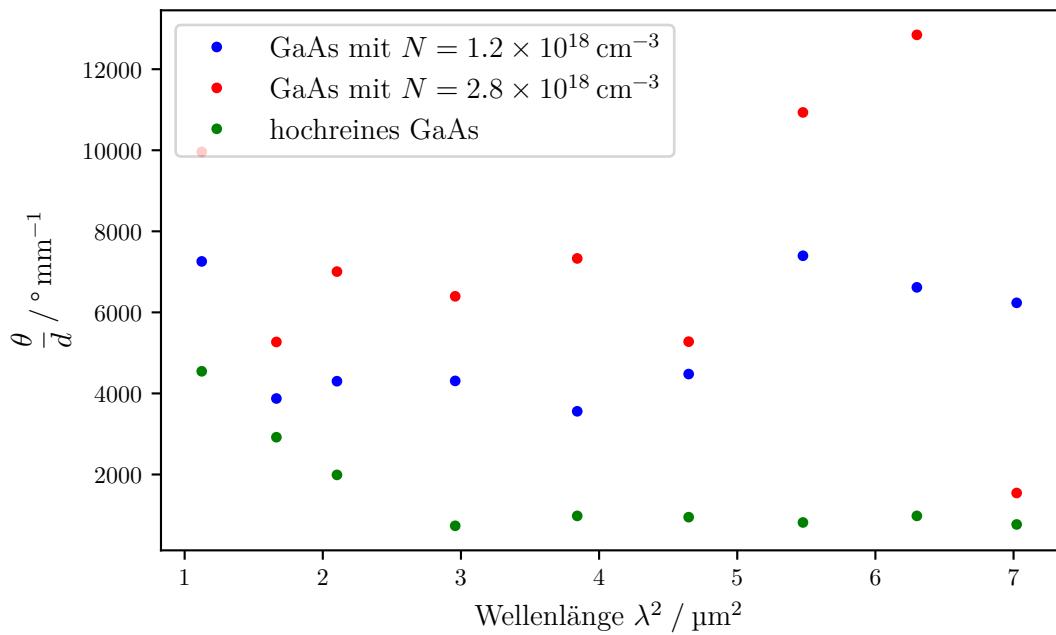
4.3 Bestimmung der effektiven Masse

Nun werden für Wellenlängen, welche im nahen Infrarotbereich liegen, Drehwinkel aufgenommen. Hierbei werden pro Probe jeweils zwei Winkel notiert. Diese unterscheiden sich im Vorzeichen des angelegten Magnetfeldes. Der gesamte Drehwinkel der Faraday-Rotation wird dann foglich über

$$\theta_{KR} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2d}$$

Tabelle 2: Aufgenommene Messdaten zur Bestimmung der Faraday-Rotation.

λ μm	$N_1 = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$		$N_1 = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$	Hochrein	
			Grad		
1,060	74,15	84,02	85,33	72,42	69,10 92,33
1,290	256,75	262,02	82,08	75,25	88,08 73,16
1,450	78,23	84,08	84,16	75,08	74,08 84,25
1,720	82,52	76,66	74,21	82,50	84,08 80,33
1,960	73,58	78,42	77,58	68,08	69,16 74,16
2,156	76,25	70,16	65,66	72,50	76,42 71,58
2,340	44,06	54,12	54,42	40,25	63,33 59,16
2,510	36,08	27,08	9,10	25,75	35,08 30,08
2,650	61,10	69,58	71,08	69,08	62,33 66,25

**Abbildung 4:** Die normierten Drehwinkel der Faraday-Rotation in Abhängigkeit zur quadratischen Wellenlänge.

bestimmt.

Um die Faraday-Rotation der Leitungselektronen zu bekommen, werden die Differenzen zwischen den Messwerten der dotierten und der hochreinen Probe gebildet und jeweils eine lineare Regression der Form

$$f(\lambda^2) = a\lambda^2 + b \quad (4)$$

berechnet. Die Regression zur Probe mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ergibt

$$a = (3,224 \pm 0,764) \text{ m}^{-3}$$

und die Regression zur Probe mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ergibt

$$a = (1,833 \pm 2,626) \text{ m}^{-3}$$

Die Differenzen der Messwerte und die Regressionen sind in den Abbildungen 5 und 6 dargestellt. Dabei wurden die Winkel in Bogenmaß umgerechnet.

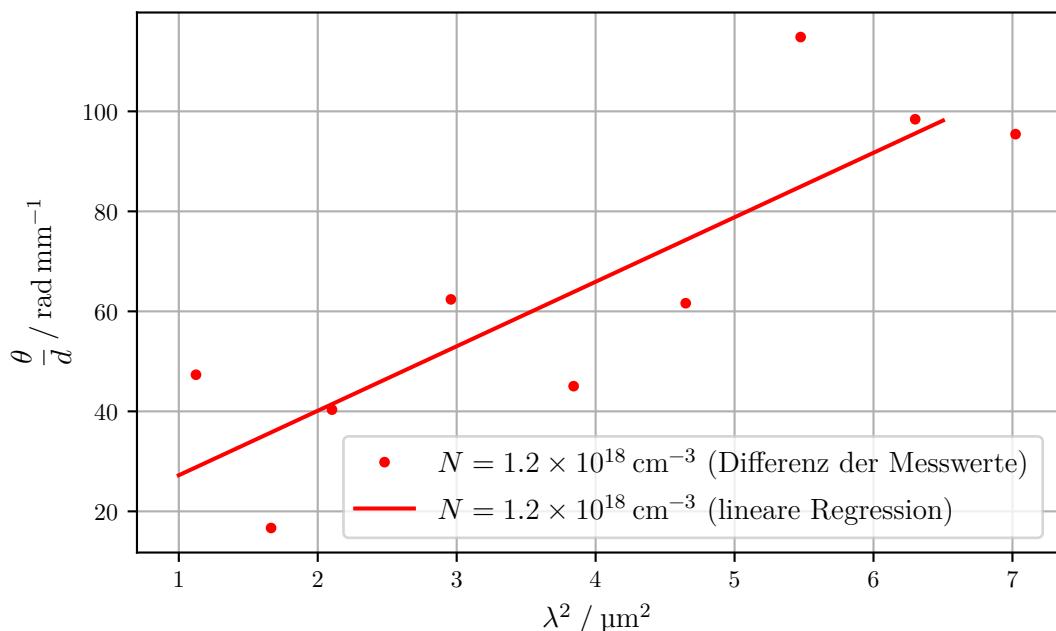


Abbildung 5: Lineare Regression zur Bestimmung der effektiven Elektronenmasse als Differenz der beiden Proben.

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich für die effektive Masse der Leitungselektronen

$$m^* = \sqrt{\frac{e_0^3}{8\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{NB}{n} \frac{1}{a}} , \quad (5)$$

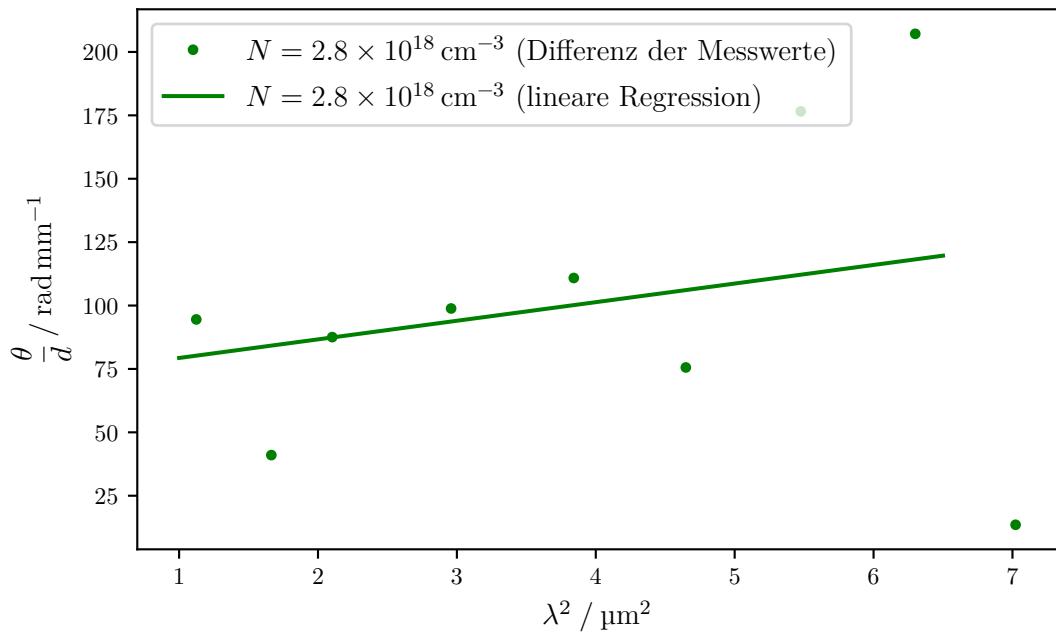


Abbildung 6: Lineare Regression zur Bestimmung der effektiven Elektronenmasse als Differenz der beiden Proben

wobei a der Parameter der Regression ist. Für den Brechungsindex für Galliumarsenid wurde $n = 3,57$ angenommen [2].

Damit ergeben sich die folgenden Werte für die effektiven Massen:

$$N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: m^* = (1,509 \pm 0,018) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: m^* = (1,310 \pm 0,093) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

5 Diskussion

Abweichungen werden wie folgt bestimmt

$$f = \frac{F}{x_r} = \frac{x_a - x_r}{x_r} \cdot 100 \, \%$$

Hierbei stellt x_r den bekannten Wert der Messgröße und x_a den bestimmten Wert der Messgröße dar.

Zunächst ist anzumerken, dass die Justierung des Versuchsaufbaus nicht gut funktioniert hat. Auffällig war, dass die Lichtintensitäten dem einen Photodetektor nie ganz verschwunden ist, wohingegen die Intensität am anderen Detektor verschwand, wenn der Winkel des ersten Prismas entsprechend eingestellt war. Es konnte dadurch keine optimale Nulllinie am Oszilloskop erzeugt werden. Das bedeutet, dass während der Durchführung

Ablesefehler entstanden sind, welche sehr groß sind. Dies zeigt sich in der nahezu wahllosen Verteilung einzelnen Messwerte, wie in Abbildungen 4 zu erkennen ist. In Anbetracht dieser großen systematischen Fehler ist es verwunderlich, dass die Ergebnisse für die effektive Masse wenig vom Literaturwert $m_{\text{lit}}^* = 0,067m_e$ [4] abweichen. Die ermittelten Werte lauten

$$N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: \Delta m_{\text{exp}}^* = (0,1657 \pm 0,0001)$$
$$N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: \Delta m_{\text{exp}}^* = (0,1438 \pm 0,0102)$$

und ergeben für die relativen Fehler

$$N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: \Delta m^* = 47,31 \%$$
$$N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}: \Delta m^* = 14,62 \%.$$

Schlussendlich lässt sich jedoch sagen, dass die Messung erfolgreich war. Das Prinzip des Faraday-Effekts wurde verstanden, und die Messwerte schließen auf eine zufriedengebende Verifizierung des Effektes.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V46*. 28. Nov. 2019. URL: <https://moodle.tu-dortmund.de/mod/folder/view.php?id=471135>.
- [2] Chemie online. *Chemische Eigenschaften von GaAs*. 28. Nov. 2019. URL: https://m.chemicalbook.com/ChemicalProductProperty_DE_cb7249244.htm.
- [3] Wikipedia. *Bändermodell*. 29. Nov. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%A4ndermodell>.
- [4] Bart J. Van Zeghbroeck. *Effective mass in semiconductors*. URL: <https://ecee.colorado.edu/~bart/book/effmass.htm> (besucht am 30.11.2019).