

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

V351 - Fourier-Analyse und Synthese

Elçin Akay, elcin.akay@tu-dortmund.de

Robin Hegering, robin.hegering@tu-dortmund.de

DURCHFÜHRUNG AM 30. NOVEMBER 2018

ABGABE AM 7. DEZEMBER 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fourier'sches Theorem	3
2.2 Fourier-Transformation	5
3 Durchführung	6
3.1 Vorbereitung	6
3.2 Fourier-Analyse und Fourier-Transformation	6
3.3 Fourier-Synthese	7
4 Auswertung	9
4.1 Fourier-Analyse	9
4.1.1 Analyse Rechteckspannung	10
4.1.2 Analyse Sägezahnspannung	10
4.1.3 Analyse Dreieckspannung	11
4.2 Fourier-Synthese	12
5 Diskussion	15
Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden periodische Funktionen in ihre einzelnen Oberwellen zerlegt. In einem weiteren Schritt werden periodische Funktionen aus ihren Oberwellen modelliert. Diese Vorgänge bezeichnet man als Fourier-Analyse und Fourier-Synthese.

2 Theorie

Periodische Funktionen sind gekennzeichnet durch wiederholende (oder auch periodische) Phänomene. Ihre Eigenschaften sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \\ \text{und} \\ f(x+D) &= f(x), \end{aligned}$$

wobei D die räumliche und T die zeitliche Periodizität oder auch Periodendauer darstellen. Konkret geben diese die Strecke bzw. die Zeit an, nach der sich eine Funktion wiederholt. Die wichtigsten periodischen Funktionen sind der Sinus und der Cosinus. Beide sind 2π -periodische Funktionen, deren Wertebereich sich von -1 bis 1 erstreckt. Allgemein sind diese Funktionen gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \text{und} \\ f(t) &= B \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \end{aligned}$$

wobei A und B die Amplituden darstellen.

2.1 Fourier'sches Theorem

Nach dem Fourier'schen Theorem lässt sich eine Funktion $f(t)$ durch

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + a_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (1)$$

modellieren, sofern die Reihe konvergiert. Außerdem muss die Periodizität von $f(t)$ erfüllt sein. Für die Parameter a_n und b_n gilt somit

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

Es ist gut erkennbar, dass nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ν möglich sind. Diese Schwingungen werden auch harmonische Oberschwingungen genannt. Die Abbildung 1 stellt ein Linienspektrum dar, welches entsteht, wenn die Amplituden a_n und b_n als Funktion der Frequenz dargestellt werden. Daraus ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

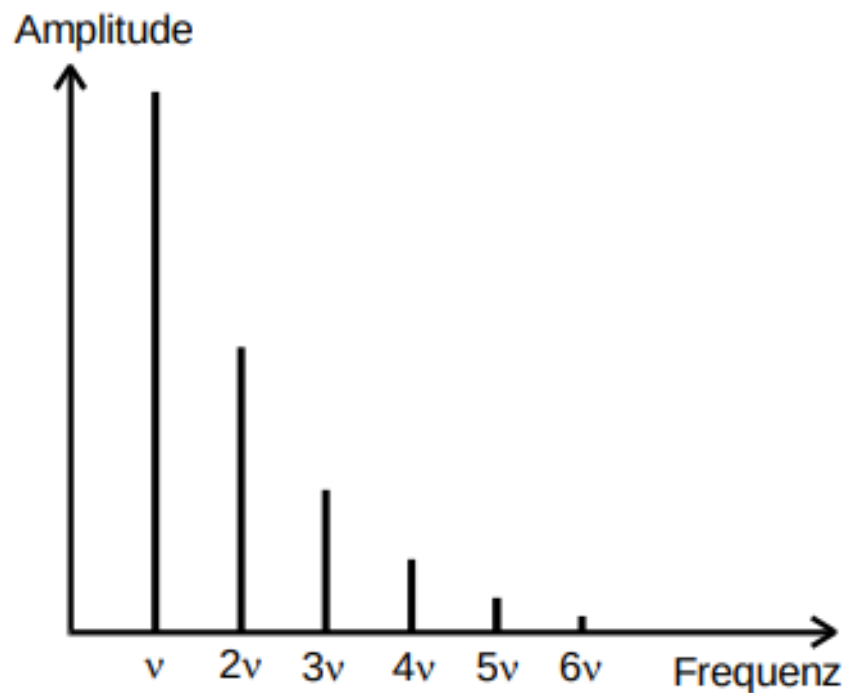


Abbildung 1: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz ν [1].

Unterschwinger und Überschwinger entstehen, wenn Funktionen an einer Stelle t_0 unstetig sind. Durch Fourier-Reihen können Funktionen an der Stelle t_0 nicht approximiert werden. Selbst wenn $n \rightarrow \infty$ läuft, bleibt die Größe des Überschwingers konstant. Dieses Phänomen wird auch Gibbsches Phänomen genannt.

2.2 Fourier-Transformation

Das Ziel der Fourier-Transformation ist die Bestimmung des Frequenzspektrums einer beliebigen zeitabhängigen Funktion. Die Periodizität der Funktion spielt dabei keine Rolle.

Die Fourier-Transformation wird durch die Form

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\nu t} dt \quad (2)$$

angegeben. Ergebnis ist das Frequenzspektrum $g(\nu)$, welches im Falle der Periodizität aus einer konvergierenden Reihe von Delta-Funktionen besteht. Ansonsten geht es in ein kontinuierliches Spektrum über.

Jedoch kann nicht über einen unendlich langen Zeitraum integriert werden, sodass die Periodizität von f aufgehoben wird. Somit wird das Linienspektrum Nebenmaxima ausbilden, die jedoch im weiteren Verlauf des Versuchs ignoriert werden.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung

Für diesen Versuch werden für drei Funktionen die Fourier-Koeffizienten berechnet. Hierbei werden die Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung gewählt.

Die Koeffizienten der Rechteckspannung sind gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & t \in [-\pi, 0, \pi] \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

mit $b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos(nt) \right)$, somit gilt für

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{ungerade} \end{cases}$$

Die Koeffizienten der Sägezahnspannung sind gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

mit $b_n = \frac{2}{n} - 1^{n+1}$

Die Funktion und ihre jeweiligen Koeffizienten der Dreiecksspannung sind gegeben durch

$$f(t) = |t|$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \right),$$

somit gilt für

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{gerade} \\ \frac{-4}{n^2\pi} & \text{ungerade} \end{cases}$$

3.2 Fourier-Analyse und Fourier-Transformation

Um im folgenden die Dreieck-, Sägezahn- und Rechteckspannung darzustellen, wird ein Funktionengenerator verwendet. Der Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

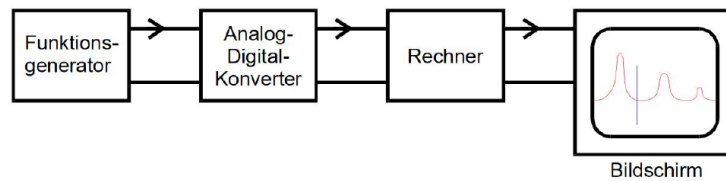


Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Fourier-Analyse [1].

Der Funktionsgenerator wird an ein Oszilloskop angeschlossen, welches 'fast fourier transformations' (kurz FFT) durchführt. Die Abtastfrequenz wird festgelegt, sodass das sogenannte Abtasttheorem

$$\nu > 2 \cdot \nu_{\max}$$

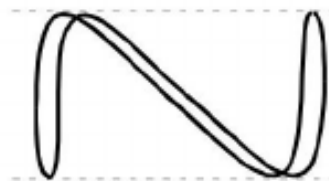
erfüllt ist. Dies ist notwendig aufgrund des verwendeten Messverfahrens. Die Funktion wird dabei aus in regelmäßigen Abständen aufgenommenen Messpunkten rekonstruiert, allerdings treten große Fehler bei der Rekonstruktion auf, sollten nicht genug Messpunkte vorliegen. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops wird nun neben der Funktion auch ihr Linienspektrum, das Ergebnis der Fourier-Transformation ist, dargestellt. Die Amplitude aller hinreichend von den umgebenden Nebenmaxima differenzierten Peaks wird ausgemessen. Die Analyse wird für alle drei Beispielfunktionen durchgeführt.

3.3 Fourier-Synthese

Ein Oberwellengenerator wird verwendet, um die Fourier-Synthese durchzuführen. Hiermit werden die Verhältnisse der Amplituden und Phasen von Grundschwingung und Oberschwingungen eingestellt. Dazu schaltet man in den X-Y-Betrieb des Oszilloskops. Dieser stellt nun die Phasenbeziehungen der eingehenden Spannungen auf. Für die Phasendifferenz muss bei Oberwellen gerader Ordnung $\Delta\phi = n \cdot \pi$ und bei Oberwellen ungerader Ordnung $\Delta\phi = n \cdot \frac{\pi}{2}$ gelten. Sie äußert sich auf dem Schirm des Oszilloskops durch Lissajous-Figuren.



(a) Oberwelle ungerader Ordnung, gleichphasige Schwingung



(b) keine Schwingung in Phase

Abbildung 3: Lissajous-Figuren im X-Y-Betrieb.

Mithilfe des Oberwellengenerators werden die benötigten Oberwellen nun in Phase gebracht. Für Oberwellen ungerader Ordnung muss die Lissajous-Figur eine Linie ohne

Flächeninhalt bilden, ähnlich der in Grafik 3a. Für Oberwellen gerader Ordnung ergibt die Lissajous-Figur eine Lemniskate, die eine liegende Achtauf der x -Achse darstellt. Die Amplitudenverhältnisse ergeben sich aus den Verhältnissen der Fourier-Koeffizienten. Bei der Rechteck- und Sägezahnspannung fallen die Koeffizienten mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ ab. Auffällig ist, dass bei der Rechteckspannung nur Oberwellen ungerader Ordnung benötigt werden. Bei der Dreieckspannung hingegen fallen die Koeffizienten mit dem Faktor $1/n^2$ ab, wobei auch hier nur Oberwellen ungerader Ordnung benötigt werden. Zur Dokumentation werden für alle drei Funktionen Aufnahmen des Bildschirms des Oszilloskops angefertigt.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse

Die ermittelten Amplituden der jeweiligen Spannungen sind in der Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Fourier-Amplituden.

Oberwellenzahl	Rechteck		Sägezahn		Dreieck	
n	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	8,80	1	4,40	1	5,600	1
2			2,16	0,49		
3	2,92	0,33	1,42	0,32	0,608	0,109
4			1,04	0,23		
5	1,72	0,19	0,82	0,18	0,216	0,039
6			0,66	0,15		
7	1,24	0,14	0,56	0,12	0,110	0,020
8			0,48	0,10		
9	0,96	0,10	0,42	0,09	0,066	0,012
10			0,38	0,08		
11	0,78	0,08			0,042	0,008
12						
13	0,66	0,07			0,030	0,005
14						
15	0,57	0,06			0,024	0,004
16						
17	0,50	0,05				
18						
19	0,44	0,05				

Die linearen Regressionen, die in den Graphen genutzt wurden, haben die Form

$$f(\log n) = m \cdot \log(n) + b. \quad (3)$$

Die Theoriekurven haben die Form

$$g(\log n) = a \cdot \log(n) + c. \quad (4)$$

Die Regressionskurven sind linear, somit kann eine relative Abweichung von den Messwerten zu der Theoriekurve bestimmt werden. Dies erfolgt anhand der Steigung der Musskurve und der Steigung der Theoriekurve.

4.1.1 Analyse Rechteckspannung

Für die Steigung des Graphen und dem Parameter a ergeben sich folgende Werte.

Tabelle 2: Rechteckspannung.

Steigung Messkurve m	Steigung Theoriekurve a	relative Abweichung
$-1,044 \pm 0,016$	-1	4,4 %

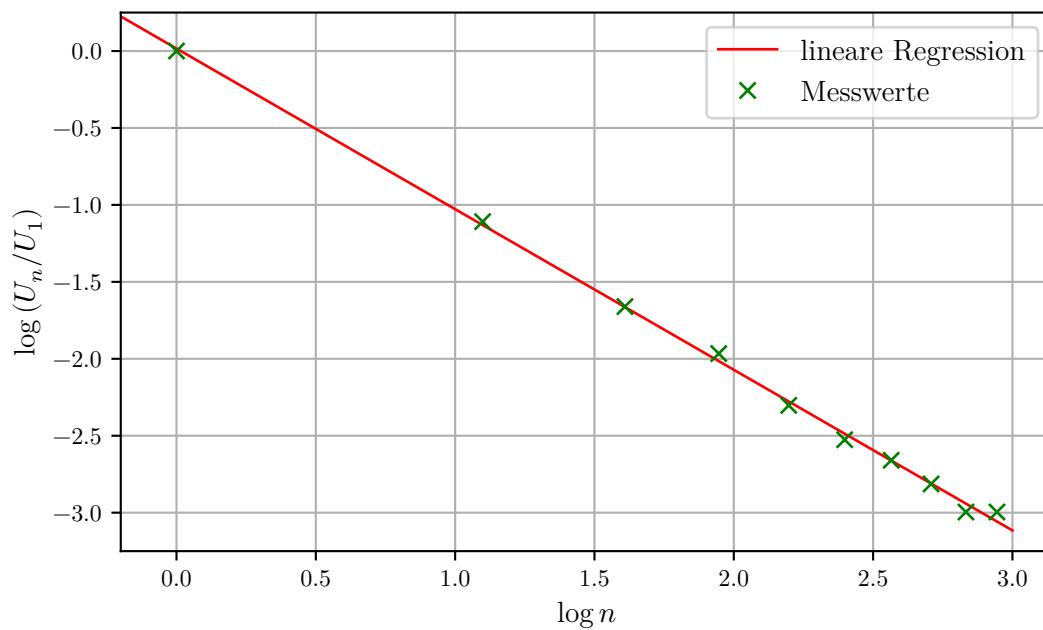


Abbildung 4: Rechtecksspannung.

4.1.2 Analyse Sägezahnspannung

Für die Steigung des Graphen und dem Parameter a ergeben sich folgende Werte.

Tabelle 3: Sägezahnspannung.

Steigung Messkurve m	Steigung Theoriekurve a	relative Abweichung
$-1,108 \pm 0,044$	-1	10,8 %

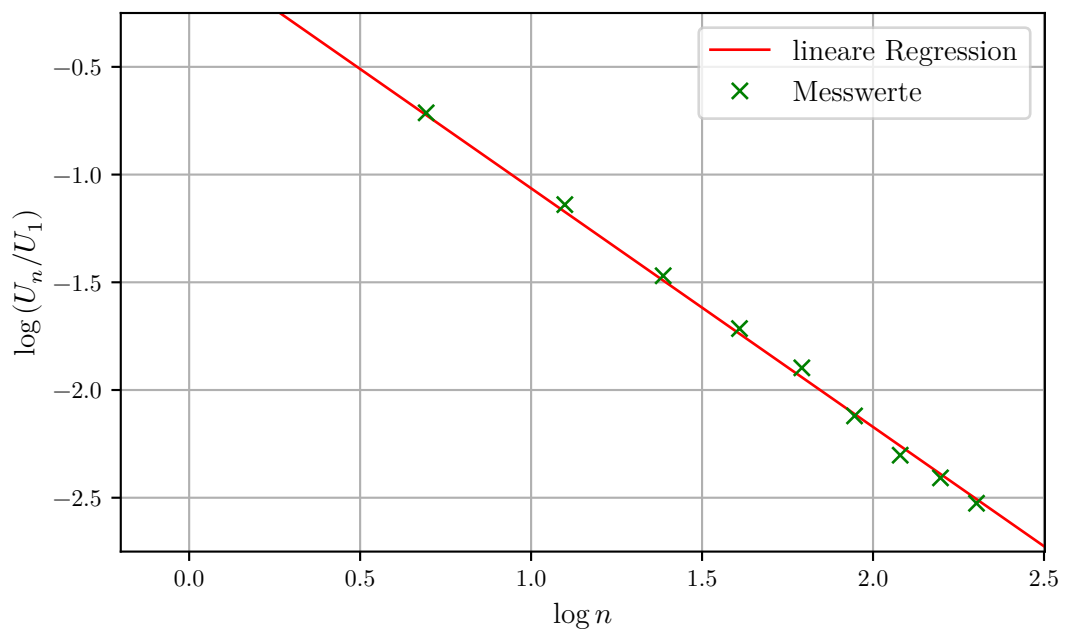


Abbildung 5: Sägezahnspannung.

4.1.3 Analyse Dreieckspannung

Für die Steigung des Graphen und dem Parameter a ergeben sich folgende Werte.

Tabelle 4: Dreieckspannung.

Steigung Messkurve m	Steigung Theoriekurve a	relative Abweichung
$-2,042 \pm 0,019$	-2	2,1 %

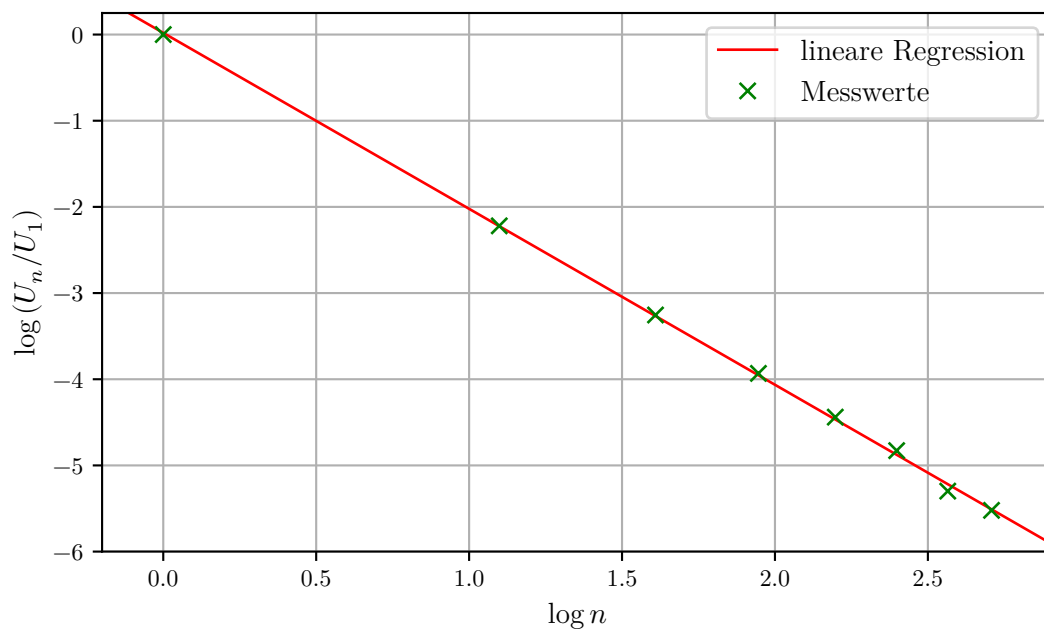


Abbildung 6: Dreiecksspannung.

4.2 Fourier-Synthese

Die Messwerte für die synthetisierte Rechteckspannung sind in der Tabelle 5 dargestellt. Die Abbildung ist in 7 dargestellt.

Tabelle 5: Messwerte der Rechteckspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte V	theoretische Werte V
1	0,577	0,577
3	0,192	0,192
5	0,115	0,115
7	0,082	0,082
9	0,064	0,064

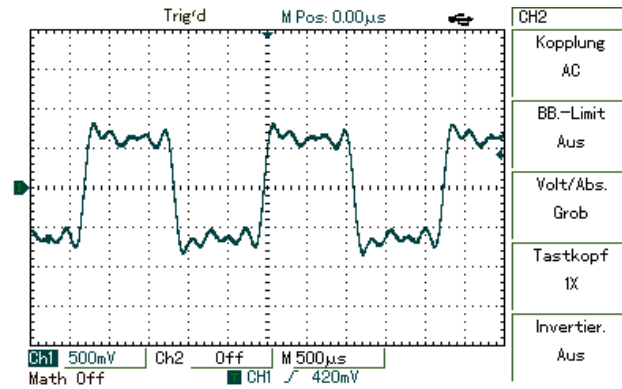


Abbildung 7: Darstellung der synthetisierten Rechtecksspannung.

Die Messwerte für die synthetisierte Sägezahnspannung sind in der Tabelle 6 dargestellt. Die Abbildung ist in 8 dargestellt.

Tabelle 6: Messwerte der Sägezahnspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte	theoretische Werte
	V	V
1	0,570	0,570
2	0,288	0,285
3	0,192	0,190
4	0,144	0,143
5	0,115	0,114
6	0,096	0,095
7	0,082	0,081
8	0,072	0,071
9	0,064	0,063
10	0,057	0,057

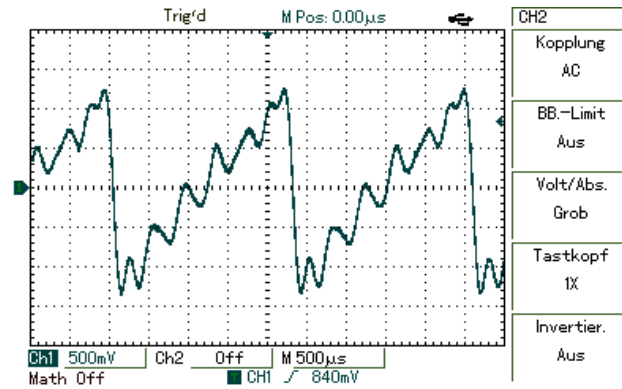


Abbildung 8: Darstellung der synthetisierten Sägezahnspannung.

Die Messwerte für die synthetisierte Dreiecksspannung sind in der Tabelle 7 dargestellt. Die Abbildung ist in 9 dargestellt.

Tabelle 7: Messwerte der Dreiecksspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte	theoretische Werte
	V	V
1	0,5771	0,5771
3	0,0643	0,0641
5	0,0232	0,0231
7	0,0116	0,0118
9	0,0070	0,0077

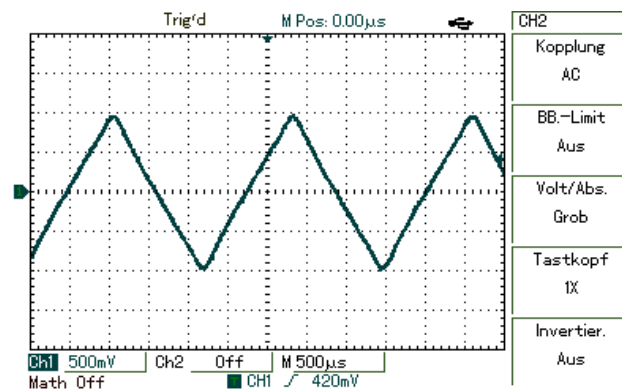


Abbildung 9: Darstellung der synthetisierten Dreiecksspannung.

5 Diskussion

Bei der Fourier-Analyse sind insgesamt recht geringe Abweichungen ermittelt worden. Diese können dadurch zustande gekommen sein, dass die Frequenz, welche am Funktionsgenerator eingestellt wurde, für ein Ablesen des Frequenzspektrums suboptimal war. Außerdem können weitere Ungenauigkeiten beim Ablesen des Bildschirms des Oszilloskops entstanden sein. Die Ergebnisse sprechen allerdings letztendlich für eine hohe Qualität der Messungen.

Auch bei der Fourier-Synthese sind Ungenauigkeiten aufgetreten. Zunächst einmal ist hier zu nennen, dass nur die ersten zehn (bzw. für Rechteck- und Dreiecksspannung die ersten fünf) Oberwellen verwendet wurden. Außerdem wurde vor dem Einstellen der konstanten Phasenbeziehung nicht auf eine einheitliche Stellung der 180°-Kippschalter geachtet. Beim Zusammenfügen der Summenspannung war daher teilweise nicht eindeutig, welchen Phasenversatz die einzelnen Oberwellen erhalten müssen.

Augenscheinlich sieht die Synthese der Dreiecksspannung am besten aus. Dies ist sowohl durch nicht vorhandene Unstetigkeitsstellen als auch durch ein Abfallen der Fourier-Koeffizienten mit dem Faktor $\frac{1}{n^2}$ zu erklären.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V351 - Fourier-Analyse und Synthese*. 30. Nov. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.