



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

**V354 - Gedämpfte und erzwungene
Schwingungen**

Elçin Akay, elcin.akay@tu-dortmund.de

Robin Hegering, robin.hegering@tu-dortmund.de

DURCHFÜHRUNG AM 14. DEZEMBER 2018
ABGABE AM 21. DEZEMBER 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Gedämpfte Schwingungen	3
2.2 Erzwungene Schwingungen	4
3 Durchführung	5
3.1 Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}	5
3.2 Dämpfungswiderstand R_{ap}	5
3.3 Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phase	6
4 Auswertung	7
4.1 Bestimmung Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}	7
4.2 Bestimmung der Güte und Resonanzkurve	10
4.3 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase	12
4.4 Aperiodischer Grenzfall	15
5 Diskussion	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden gedämpfte elektrische Schwingungen und insbesondere das Zeitgesetz untersucht. Außerdem wird der Einfluss einer äußeren Anregung auf das schwingfähige System untersucht.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen

In einem RLC-Kreis sind, im Unterschied zum RC-Kreis, zwei statt nur einem Energiespeicher vorhanden. Dies führt dazu, dass eine dem System zugeführte Energie zeitlich periodisch zwischen den beiden Energiespeichern, der Induktivität und der Kapazität, schwingt. Ist in dem System kein Element vorhanden, das elektrische Energie in Joulesche Wärme umwandelt, bleibt die Gesamtenergie zeitlich erhalten. Dies bezeichnet man als ungedämpfte Schwingung. Ist allerdings, wie im betrachteten Fall, ein ohmscher Widerstand R vorhanden, setzt dieser die elektrische Energie um. Daraus folgt, dass die Amplituden von Spannung und Strom mit der Zeit abnehmen, sodass man nun von einer gedämpften Schwingung spricht.

Die Gesamtspannung des RLC-Kreises lässt sich nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz durch

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

beschreiben. Mit $U_R(t) = RI(t)$, $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ und $U_L(t) = L\frac{dI}{dt}$ folgt mithilfe von $I = \frac{dQ}{dt}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0. \quad (2)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung führt auf

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t}(U_1 e^{i2\pi\tilde{\nu}t} + U_2 e^{-i2\pi\tilde{\nu}t}) \quad (3)$$

mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} 2\pi\mu &= \frac{R}{2L} \\ 2\pi\tilde{\nu} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass die Lösung nun davon abhängt, ob $\tilde{\nu}$ reell oder komplex ist. Zunächst wird nun der Fall

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow \tilde{\nu} \text{ reell}$$

betrachtet. Daraus ergibt sich mit Gleichung (3)

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta).$$

Dieser Fall beschreibt eine gedämpfte harmonische Schwingung. Das bedeutet, dass ihre Amplitude mit der Zeit exponentiell gegen null geht. Charakteristisch ist dabei die sogenannte Abklingdauer T_{ex} . Diese beschreibt die Zeit, nach der die Amplitude sich um den Faktor $\frac{1}{e}$ verringert hat und berechnet sich nach

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (5)$$

Der zweite zu betrachtende Fall ist

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow \tilde{\nu} \text{ imaginär.}$$

Aus Gleichung (3) ergibt sich dann

$$I(t) = e^{-(2\pi\mu - 2i\pi\tilde{\nu})t}.$$

Ein weiterer wichtiger Fall ist der sogenannte aperiodische Grenzfall. Dieser wird beschrieben durch

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2} \Rightarrow \tilde{\nu} = 0,$$

wobei R_{ap} den charakteristischen Grenzwiderstand darstellt, bei dem der aperiodische Grenzfall auftritt.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Im Folgenden wird ein Schwingkreis betrachtet, der einer äußeren Kraft, also konkret einer sinusförmigen Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ unterworfen ist. Dabei bezeichnet ω die Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit und U_0 die Amplitude der Erregerspannung. Dann erweitert sich die ursprüngliche Differentialgleichung zu

$$LC \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$U = \frac{U_0 \cdot (1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Kondensatorspannung beträgt Differentialgleichung

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}. \quad (6)$$

Es ergibt sich daraus für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Diese wird als Resonanzkurve bezeichnet. Es fällt auf, dass U_C für $\omega \rightarrow 0$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen U_0 läuft. Weiterhin gibt es eine endliche Frequenz, für die U_C ein Maximum größer als U_0 erreicht, welche als Resonanzfrequenz bezeichnet wird. Diese lässt sich durch

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (7)$$

berechnen. Besonders interessant ist hier der Fall $\frac{R^2}{2L^2} << \frac{1}{LC}$, welcher als schwache Dämpfung bezeichnet wird. Dabei nähert sich die Resonanzfrequenz ω_{res} der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an. Für $R \rightarrow 0$ kann $U_{C,\text{max}} \rightarrow \infty$ laufen. Dieser Fall wird als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Die Kondensatorspannung U_C übersteigt die Erregerspannung U_0 im Allgemeinen um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, welcher Resonanzüberhöhung oder Güte q eines Schwingkreises genannt wird. Sie ergibt sich aus der Halbwertsbreite b der Resonanzkurve. Diese wird charakterisiert durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- , bei denen U_C auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Maximalwertes gesunken ist und berechnet sich aus

$$b = \omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (8)$$

Daraus ergibt sich für die Resonanzüberhöhung

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}.$$

Wird nun die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung betrachtet, ergibt sich für eine Phasenverschiebung von $\phi = \frac{\pi}{2}$ eine Frequenz von $\omega_0 = \frac{1}{LC}$. Außerdem ergeben sich aus Gleichung (6) für $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ die Frequenzen

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (9)$$

3 Durchführung

3.1 Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}

Zur Bestimmung des Effektivwiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} wird der kleinere der beiden Festwiderstände der Schaltung verwendet. Die verwendete Schaltung ist in Abbildung 1 zu sehen.

Mithilfe des Impulsgenerators wird eine Rechteckspannung erzeugt, sodass eine gedämpfte Schwingung ausgeführt wird. Diese wird auf dem Bildschirm des Oszilloskops angezeigt. Mit dem Cursor werden dann die Spannungsmaxima der Kurve ausgelesen.

3.2 Dämpfungswiderstand R_{ap}

Der Dämpfungswiderstand wird mithilfe eines regelbaren Widerstandes in der Schaltung aus Abbildung 1 bestimmt. Dazu wird dieser auf seinen Maximalwert gedreht und anschließend langsam heruntergeregelt, bis ein Überschwinger auftritt. Nun wird der Widerstand wieder so weit erhöht, bis kein Überschwinger mehr auftritt.

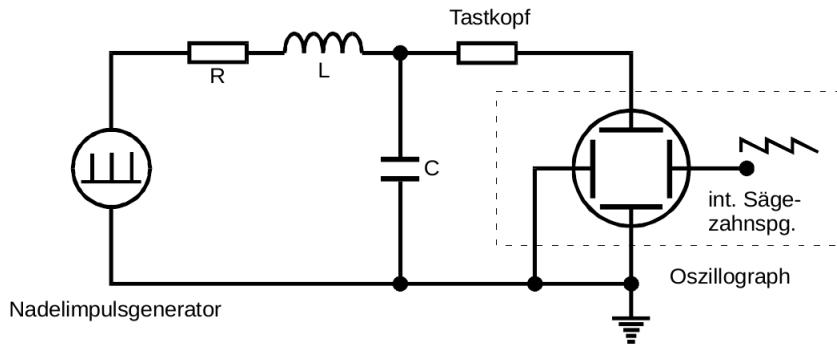


Abbildung 1: Messschaltung zur Bestimmung des Effektivwiderstandes und der Abklingdauer [2].

3.3 Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phase

Die Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phase wird mithilfe der Schaltung in Abbildung 2 bestimmt. Dazu wird mithilfe des Sinusgenerators schrittweise die Fre-

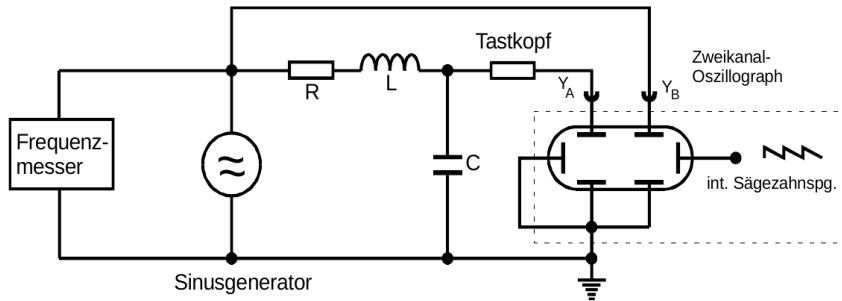


Abbildung 2: Messschaltung zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phase [2].

quenz erhöht und die resultierende Ein- und Ausgangsspannung mithilfe des Zweikanal-Oszilloskops angezeigt. Es lassen sich dann mit dem Cursor die Amplitude U_{pp} und die Distanz a (siehe Abbildung 3) ermitteln.

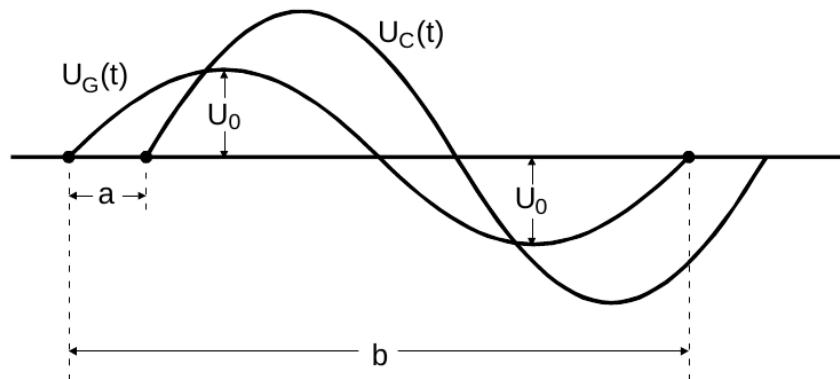


Abbildung 3: Phasenverschiebung zwischen zwei Eingangsspannungen [1].

4 Auswertung

Die zum Versuch genutzten spezifischen Daten lauten

$$\begin{aligned}
 L &= 10,11 \pm 0,03 \text{ mH} \\
 C &= 2,098 \pm 0,006 \text{ nF} \\
 R_1 &= 48,1 \pm 0,1 \Omega \\
 R_2 &= 509,5 \pm 0,5 \Omega.
 \end{aligned}$$

4.1 Bestimmung Effektivwiderstand R_{eff} und Abklingdauer T_{ex}

Zur Auswertung werden die in Tabelle 1 aufgelisteten Messwerte genutzt.

Tabelle 1: Gemessene Spannungsmaxima U_{max} und zeitlicher Abstand Δt der Schwingung.

Spannung U_{max} V	Zeit Δt μs
12,80	12
11,40	41
10,40	71
9,44	101
8,72	131
8,00	161
7,40	192
6,96	222
6,56	252
6,20	282
5,92	311
5,68	341
5,52	371
5,36	401
5,16	431

Da in der Messung nur maximale Amplituden genutzt wurden, müssen keine Beträge genommen werden. Dadurch, dass eine gedämpfte Schwingung beobachtet wird, ergibt sich eine Einhüllende, die sich mit $U(t) \propto I(t)$ zu

$$A = A_0 e^{2 \pi \mu t}$$

ergibt.

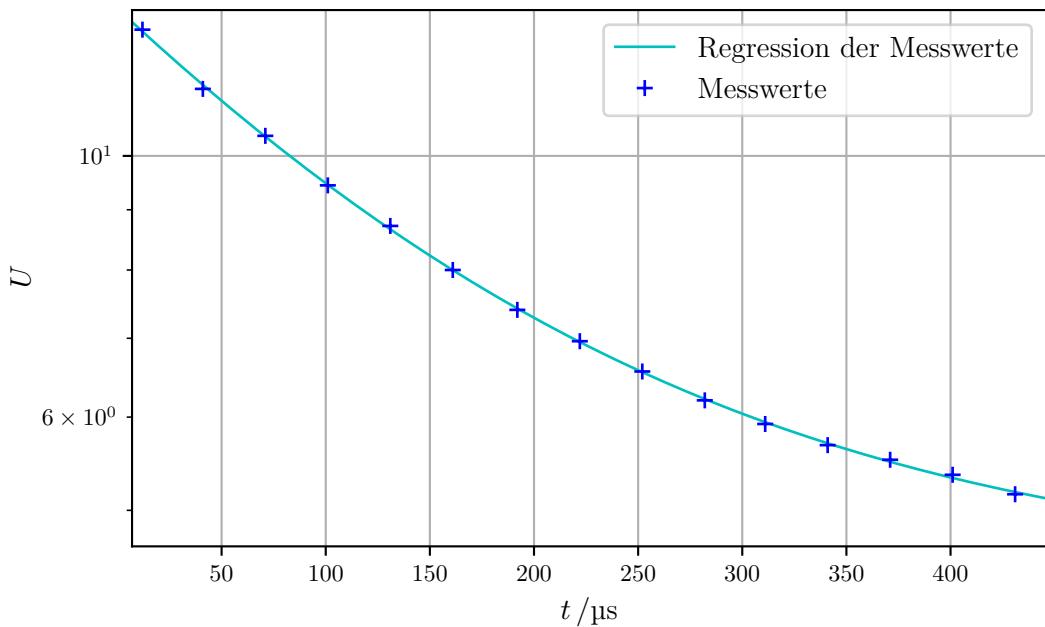


Abbildung 4: Gemessene Spannung U_{max} halblogarithmisch zur Zeit t .

Mit **python** werden die Parameter A_0 und μ ausgerechnet, und lauten wie folgt

$$A_0 = 8,934 \pm 0,04 \text{ V}$$

$$\mu = 899,534 \pm 13,87 \frac{1}{\text{sec}}$$

Eingesetzt in die Formeln (4) und (5) ergeben sich für die zu ermittelnden Werte

$$R_{\text{eff}} = (114,3 \pm 1,8) \Omega$$

$$T_{\text{ex}} = (176,9 \pm 2,7) \text{ ms},$$

wobei der Gauß'sche Fehler berechnet wurde durch

$$\Delta R_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \mu}\right)^2 \cdot (\Delta \mu)^2}$$

$$\Delta T_{\text{exp}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)^2 \cdot (\Delta \mu)^2}.$$

Der theoretische Wert und der Fehler für die Abklingdauer ergibt sich durch die Formel (...)

$$\Delta T_{\text{theo}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial R}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2}.$$

somit ist der theoretische Wert für

$$T_{\text{theo}} = (4,204 \pm 0,015) \cdot 10^{-4} \text{s}.$$

4.2 Bestimmung der Güte und Resonanzkurve

Um die Güte q sowie die Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$ zu berechnen werden Daten genutzt, welche in Tabelle 2 dargestellt sind. Der Quotient $\frac{U_c}{U}$ ergibt sich aus der gemessenen Spannung und der Generatorspannung U von 4,8 V.

Tabelle 2: Gemessene U_c und ν der Resonanzkurve.

Frequenz ν kHz	Spannung U_c V	Quotient $\frac{U_c}{U}$
15	11,84	1,23
20	14,24	1,48
25	19,60	2,04
30	30,60	3,19
31	32,80	3,42
32	34,00	3,54
33	35,20	3,67
34	34,00	3,54
35	31,40	3,27
36	28,00	2,91
37	25,20	2,63
38	22,40	2,33
39	19,60	2,04
40	17,60	1,83
45	10,48	1,09
50	7,20	0,75
55	5,28	0,55

Abbildung 5 zeigt den halblogarithmischen Verlauf von $\frac{U_c}{U}$ in Abhängigkeit der Frequenz ν , Abbildung 6 zeigt den Verlauf linear.

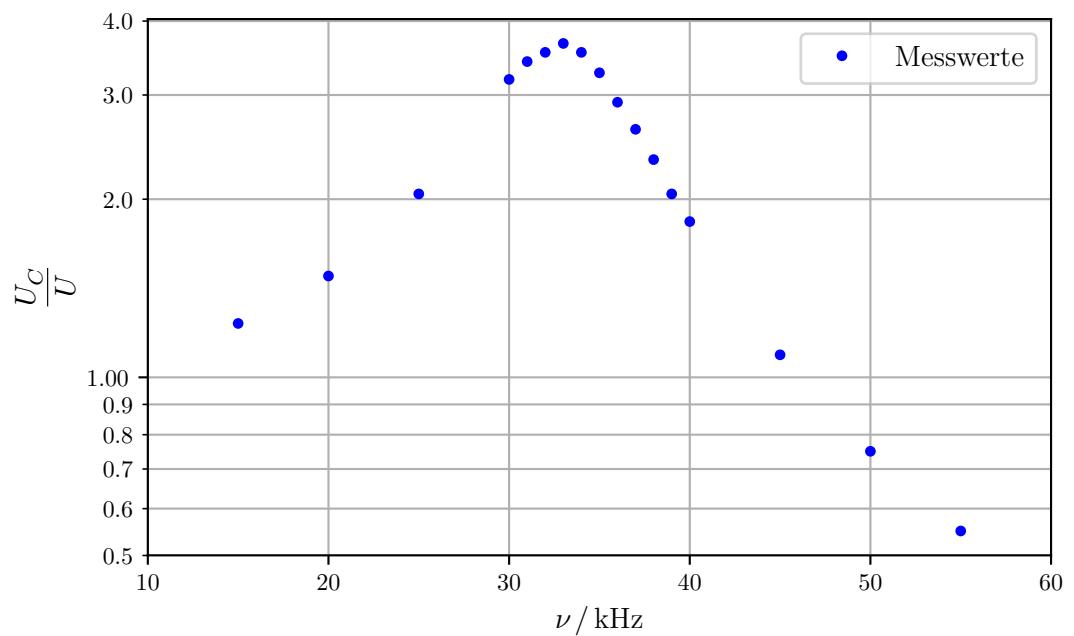


Abbildung 5: Logarithmische Darstellung.

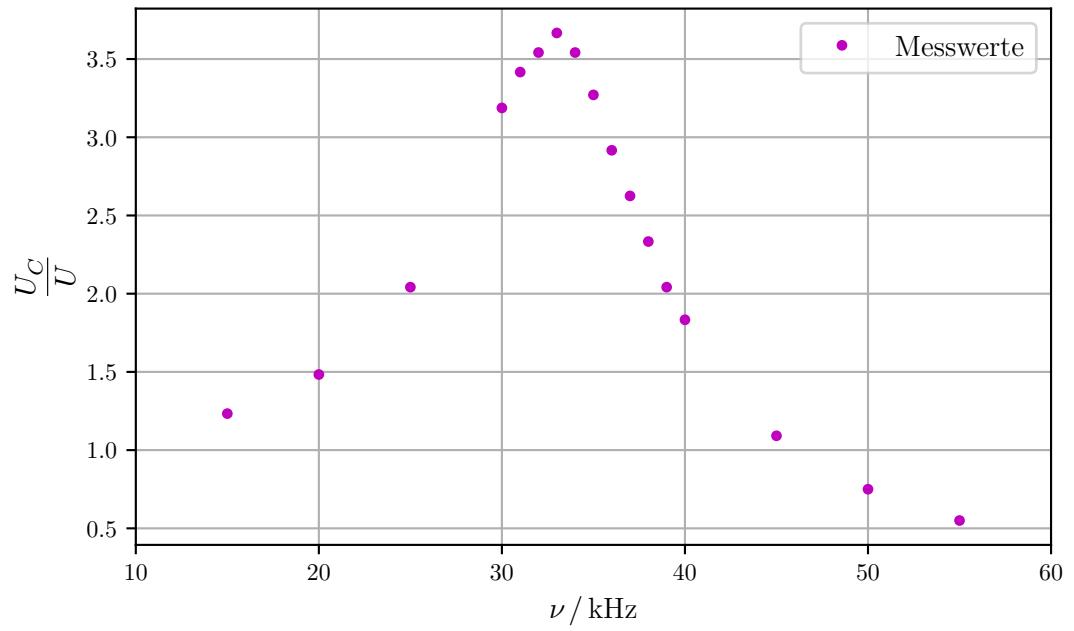


Abbildung 6: Lineare Darstellung.

Um die Resonanzfrequenz sowie die obere und untere Grenzfrequenz ausrechnen zu können, werden die Gleichung (7) und (9) genutzt. Daraus ergibt sich

$$\text{Resonanzfrequenz } \omega_{\text{res}} = 21,420 \text{ kHz}$$

$$\text{Untere Grenze } \omega_1 = 19,340 \text{ kHz}$$

$$\text{Obere Grenze } \omega_2 = 24,380 \text{ kHz}$$

Die Resonanzfrequenz ν_{res} sowie die obere und untere Grenzfrequenz berechnen sich aus der Gleichung $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\text{Resonanzfrequenz } \nu_{\text{res}} = 34,089 \text{ kHz}$$

$$\text{Untere Grenze } \nu_1 = 30,779 \text{ kHz}$$

$$\text{Obere Grenze } \nu_2 = 38,798 \text{ kHz}$$

Um nun die Güte q zu bestimmen, wird der Maximalwert aus 5 entnommen

$$q_{\max} = 3,67$$

Der theoretische Wert wird durch $q_{\text{th}} = \frac{\omega_{\text{res}}}{\omega_2 - \omega_1}$ ermittelt, so ergibt sich

$$q_{\text{th}} = 4,25. \quad (10)$$

Nach der Formel (8) berechnet sich die Breite der Resonanz zu

$$\omega_+ - \omega_- = (5,039 \pm 0,016) \cdot 10^3 \text{ Hz},$$

wobei sich der Fehler aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt mit

$$\Delta\omega_+ - \omega_- = \sqrt{\left(\frac{\partial(\omega_+ - \omega_-)}{\partial R_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2)^2 + \left(\frac{\partial(\omega_+ - \omega_-)}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2}$$

4.3 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase

Um im Folgenden die Frequenzabhängigkeit der Phase bestimmen zu können, wird die Phase φ gegen die Frequenz ν halblogarithmisch aufgetragen. Alle zur Messung verwendeten Messwerte sind in Tabelle 3 abgebildet.

Tabelle 3: Gemessene Kondensatorspannung U_c und Phasenverschiebung ν der Resonanzkurve.

ν kHz	Δt μs	φ rad
15	1	1,64
20	1	2,19
25	3	2,04
30	5	3,19
31	5	3,42
32	6	3,54
33	8	3,67
34	8	3,54
35	9	3,27
36	9	2,91
37	10	2,63
38	10	2,33
39	10	2,04
40	10	1,83
45	10	1,09
50	9	0,75
55	9	0,55

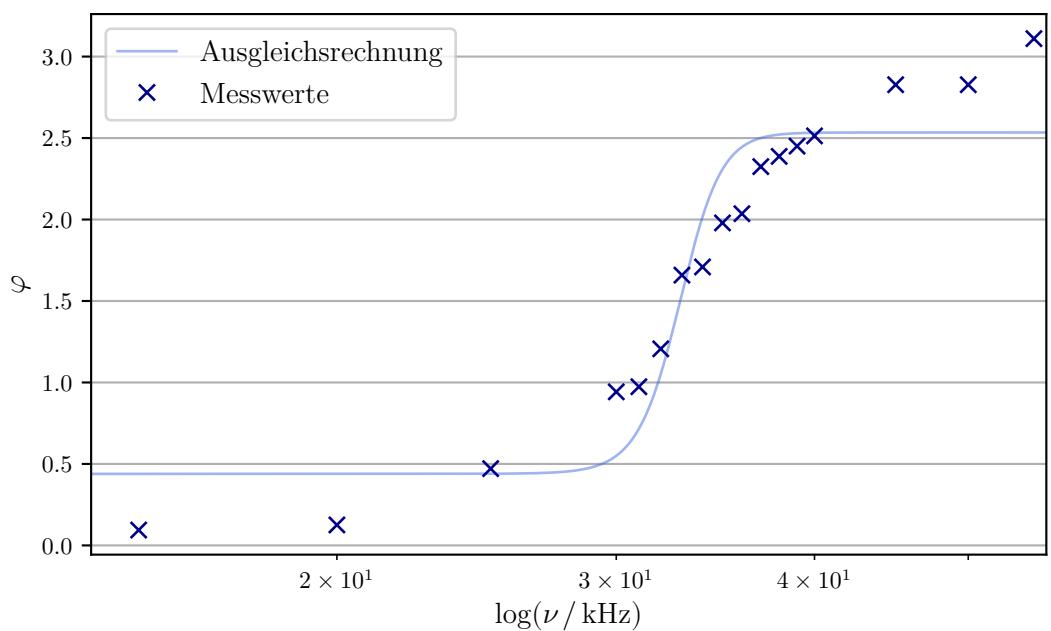


Abbildung 7: Halblogarithmische Darstellung.

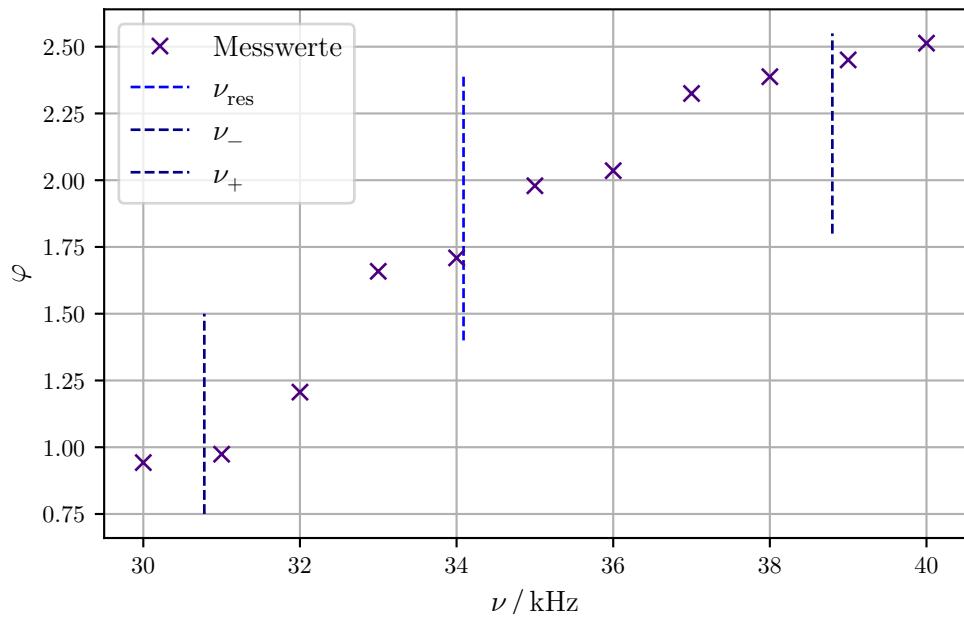


Abbildung 8: Lineare Darstellung.

4.4 Aperiodischer Grenzfall

Um den Widerstand im Falle eines aperiodischen Grenzfalles zu berechnen, wird die Gleichung $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ genutzt. Für den Theoriewert ergibt sich somit

$$R_{\text{th}} = (4390 \pm 9) \Omega. \quad (11)$$

Anhand der durchgeführten Messung ergibt sich für den Wert des Widerstandes

$$R_{\text{ap}} = 3350 \Omega,$$

wobei sich der Fehler aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt

$$\Delta R_{\text{ap}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{\text{ap}}}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial R_{\text{ap}}}{\partial C}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}$$

5 Diskussion

Um die relativen Abweichungen zu den Theoriewerten angeben zu können, wird die Gleichung

$$\text{Abweichung} = \frac{x_{\text{theo}} - x_{\text{real}}}{x_{\text{theo}}}$$

Tabelle 4: Relative Abweichungen die aus den Auswertungen folgen.

Güte q	Widerstand R_{eff}	Widerstand R
13%	137%	23%

Bei dem ersten Versuchsteil wurde die Messung zur Bestimmung der Abklingdauer und des Dämpfungswiderstandes durchgeführt. Der errechnete Widerstand weicht um 137% ab, also ist eine recht hohe Abweichung entstanden. Diese kann einerseits durch einen Generatorinnenwiderstand oder durch Messungenauigkeiten entstanden sein. Jedoch ist die Einhüllende in der Grafik klar erkennbar und zeigt einen charakteristischen Verlauf.

Bei der Berechnung der Güte ist eine Abweichung von 13 Prozent errechnet worden. Dies lässt sich auf Nichtbeachtung der Innenwiderstände zurück führen. Hier liegen am ehesten systematische Fehler vor.

Zur Auswertung der Frequenzabhängigkeit lässt sich sagen, dass der Graph einen zu erwartenden Verlauf eingenommen hat. Im Wertebereich von $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ liegt die Resonanzfrequenz.

Die Abweichung beim aperiodischen Grenzfall ist durch die zusätzlichen Widerstände, aber auch durch Ablesefehler beim Oszilloskop bedingt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V353 - Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 3. Dez. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOME PAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 13. Dez. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOME PAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.