

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2 Entladevorgang eines Kondensators	3
2.3 Aufladevorgang	4
2.4 Relaxationserscheinungen unter Einfluss einer periodischen Auslenkung aus der Ruhelage	4
2.5 RC-Kreis als Integrator	5
3 Durchführung	5
3.1 Bestimmung der Zeitkonstante des RC-Gliedes	5
3.2 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude	6
3.3 Messung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensator- spannung	6
3.4 Verwendung des RC-Kreises als Integrator	7
4 Auswertung	7
4.1 Bestimmung der Zeitkonstante	7
4.2 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude	9
4.3 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	11
4.4 Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensator- spannung	12
4.5 Verwendung des RC-Kreises als Integrator	13
5 Diskussion	14
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises bestimmt. Dazu wird zunächst die Zeitkonstante eines RC-Gliedes ermittelt und anschließend Amplitude und Phasenversatz betrachtet. Außerdem wird die Verwendbarkeit eines RC-Kreises als Integrator geprüft.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Relaxationserscheinungen sind zu beobachten bei Systemen, die sich außerhalb ihrer Ruhelage befinden und in diese zurückkehren, ohne dabei Schwingungsbewegungen auszuführen. Dies ist der Fall, wenn in mechanischen Systemen Trägheitskräfte gegenüber anderen Kräften vernachlässigbar klein sind.

Eine wichtige Größe ist die Änderungsgeschwindigkeit der Messgröße $\frac{d}{dt}A(t)$. Diese ist proportional zur Differenz zwischen der Größe $A(t)$ und dem Grenzwert $A(\infty)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)]$$

und durch Integration folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{ct} \quad (1)$$

mit $c < 0$, um der Beschränktheit von $A(t)$ gerecht zu werden.

Konkret wird im Folgenden die Entladung eines Kondensators über einen Widerstand als Beispiel für ein Relaxationsverhalten betrachtet.

2.2 Entladevorgang eines Kondensators

Habe ein Kondensator die Kapazität C und die Ladung Q , so lässt sich die Spannung U_C ausdrücken durch

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (2)$$

Durch das Ohmsche Gesetz kann der Strom I durch den Widerstand R nach

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (3)$$

bestimmt werden. Die Ladungsänderung auf den Platten von

$$dQ = -Idt \quad (4)$$

kann durch den Ladungsausgleich herbeigeführt werden. Eine Differentialgleichung kann aus den Gleichungen (2), (3) und (4) aufgestellt werden, diese beschreibt den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t).$$

So folgt für einen unendlichen Zeitraum die vollständige Entladung des Kondensators durch

$$Q(\infty) = 0,$$

sodass die Differentialgleichung analog zu (1) gegeben ist durch

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

2.3 Aufladevorgang

Analog zu der Vorhergehensweise beim Entladen des Kondensators kann mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0 \\ Q(\infty) &= c \cdot U_C \end{aligned}$$

die Differentialgleichung zu

$$Q(t) = C \cdot U_C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

aufgestellt werden.

Dabei bezeichnet RC die Zeitkonstante des Relaxationsvorgangs, welche angibt, nach welcher Zeit ΔT sich die Ladung auf dem Kondensator um $\frac{1}{e} \approx 36,8\%$ reduziert hat. Sie gibt also die Änderungsrate der Ladung auf dem Kondensator an.

2.4 Relaxationserscheinungen unter Einfluss einer periodischen Auslenkung aus der Ruhelage

Im Folgenden wird die Frequenzabhängigkeit des RC-Kreises betrachtet. Dieser wird mit einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ von außen angeregt. Für $\omega \ll \frac{1}{RC}$ ist die Kondensatorspannung U_C zu jeder Zeit nahezu gleich der Generatorspannung U_G . Für hohe Frequenzen ω allerdings läuft die Kondensatorspannung der Generatorspannung weit hinterher. Daraus resultiert eine Phasenverschiebung ϕ und gleichzeitig verringert sich die Amplitude A der Kondensatorspannung. Zur Beschreibung dieser Phänomene wird der Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$$

verwendet. Aus dem 2. Kirchhoffschen Gesetz folgt dann

$$\begin{aligned} U(t) &= U_R(t) + U_C(t) \\ U_0 \cos(\omega t) &= I(t)R + A(\omega) \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

und mit

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (7)$$

ergibt sich

$$U_C \cos(\omega t) = -A\omega RC \sin(\omega t + \phi) + A(\omega) \cos(\omega t + \phi). \quad (8)$$

Wird nun in (8) $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, ergibt sich unter Berücksichtigung einiger trigonometrischer Beziehungen

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (9)$$

für die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung. Daraus lässt sich erkennen, dass die Phasenverschiebung für niedrige Frequenzen gegen null und für hohe Frequenzen gegen $\frac{\pi}{2}$ läuft. Für $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich aus (6)

$$A(\omega) = -\frac{\sin \phi}{\omega RC} U_0. \quad (10)$$

Für $\sin \phi$ folgt aus (9) und $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$

$$\sin \phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Durch Einsetzen in (10) ergibt sich schlussendlich

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (11)$$

Daraus ist ersichtlich, dass $A(\omega) \rightarrow 0$ läuft für $\omega \rightarrow \infty$ und für $\omega \rightarrow 0$ $A(\omega) \rightarrow U_0$ geht.

2.5 RC-Kreis als Integrator

Es ist auch möglich, einen RC-Kreis zur Integration einer zeitlich veränderlichen Spannung $U(t)$ zu verwenden, wenn bestimmte Voraussetzungen gegeben sind. Durch Einsetzen von (7) in (6) folgt

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t).$$

Wenn nun $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt, resultieren außerdem $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Damit ergeben sich

$$\begin{aligned} U(t) &= RC \frac{dU_C}{dt} \\ \Leftrightarrow U_C(t) &= \frac{1}{RC} \int_0^t U(t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante des RC-Gliedes

Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird die in Abbildung 1 dargestellte Schaltung verwendet. Der Generator erzeugt eine Rechteckspannung, die den Kondensator auflädt. Die Kondensatorspannung $U_C(t)$ kann dabei am Oszilloskop beobachtet werden. Während die Rechteckspannung sich auf ihrem Maximalwert befindet, wird der Kondensator

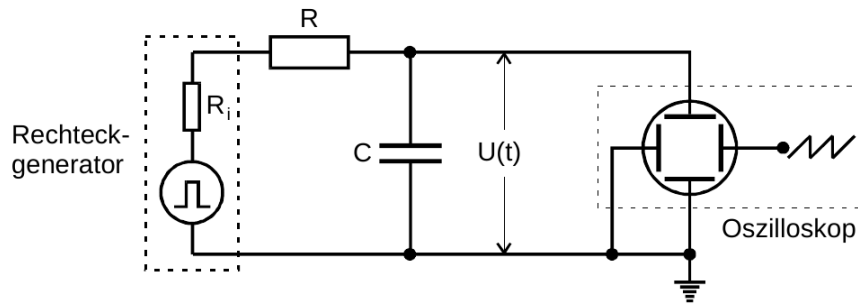


Abbildung 1: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes [1].

aufgeladen, sobald diese aber wieder auf null abfällt, beginnt die Entladung. Das bedeutet, dass die Auf- und Entladekurven auf dem Oszilloskop nur näherungsweise beobachtet werden können, da die Prozesse unendlich lang sind. Sobald eine geeignete Kurve auf dem Bildschirm des Oszilloskops sichtbar ist, wird diese gespeichert.

3.2 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Die Frequenzabhängigkeit der Amplitude wird mithilfe der in Abbildung 2 dargestellten Schaltung bestimmt werden. Dafür wird nun ein Sinusgenerator im RC-Kreis verwendet. Es wird die Amplitude der Kondensatorspannung mithilfe eines Millivoltmeters bei unterschiedlichen Frequenzen gemessen.

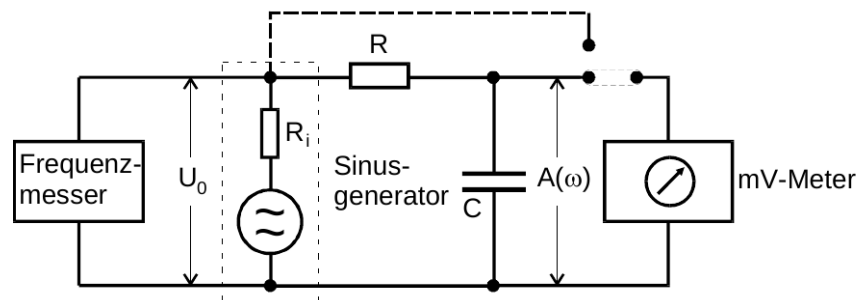


Abbildung 2: Schaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude [1].

3.3 Messung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung

Zur Messung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung wird nun ein Zweikanal-Oszilloskop verwendet. Die gesamte Schaltung ist in Abbildung 3 dargestellt.

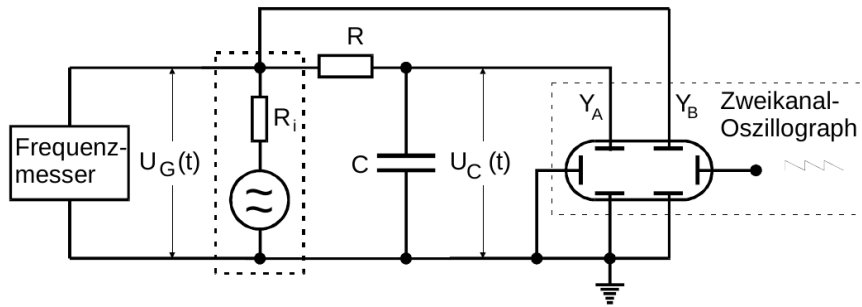


Abbildung 3: Schaltung zur Messung des Phasenversatzes [1].

Auf den Eingang Y_B des Oszilloskops wird dabei die Kondensatorspannung $U_C(t)$ und auf Eingang Y_A die Generatorspannung gegeben. Die Darstellung auf dem Bildschirm des Oszilloskops ist ähnlich der in Abbildung 4. Gemessen werden dann die aus Abbildung 4 ersichtlichen Distanzen a und b , mit deren Hilfe sich die Phasenverschiebung bestimmen lässt.

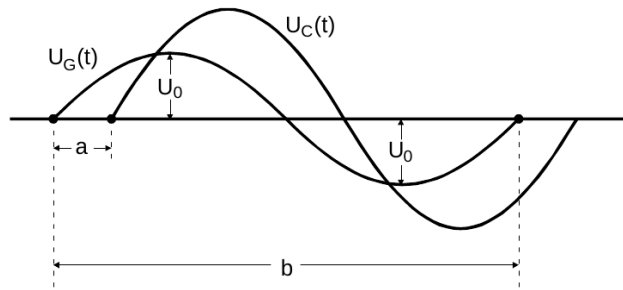


Abbildung 4: Phasenverschiebung zwischen zwei Eingangsspannungen [1].

3.4 Verwendung des RC-Kreises als Integrator

Für diesen Versuchsteil wird wiederum die Schaltung aus Abbildung 3 verwendet. Mithilfe des Generators werden nun nacheinander eine Rechteck-, Sinus-, und Dreiecksspannung auf den RC-Kreis gegeben. Auf dem Zweikanal-Oszilloskop werden dann die integrierte und zu integrierende Spannung dargestellt und als Grafik abgespeichert.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Um die Zeitkonstante zu bestimmen, wird der Entladevorgang auf einem Oszilloskop beobachtet. Aus Abbildung 5 werden dazu die in Tabelle 1 dargestellten Werte entnommen. Nun werden die Messwerte für die Kondensatorspannung U_C logarithmiert und zur Bestimmung der Zeitkonstante eine lineare Ausgleichsrechnung mithilfe von Python

durchgeführt 6. Diese hat die Form $y = mx + b$ mit Steigung m und y -Achsenabschnitt b . Die Ausgleichsrechnung ergibt

$$m = (-904,103 \pm 36,500) \frac{1}{s}$$

$$b = (10,7667 \pm 0,5022) \ln V,$$

wobei $m = \frac{-1}{RC}$ gilt. Daraus folgt für die Zeitkonstante

$$RC = (1,1061 \pm 0,0447) \text{ ms.}$$

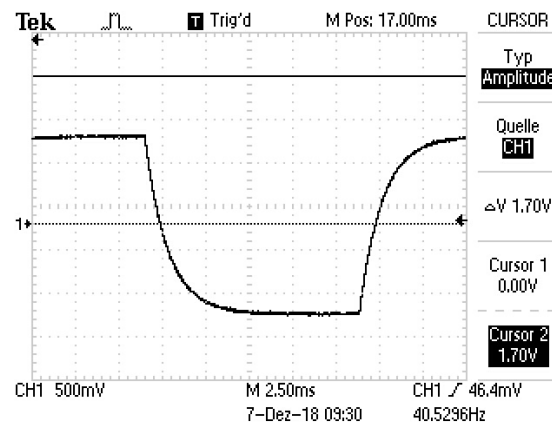


Abbildung 5: Entladekurve eines Kondensators zur Bestimmung der Zeitkonstante RC .

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Zeitkonstante RC .

t / s	U_C / V
0,0109	2,010
0,0114	1,450
0,0119	0,970
0,0124	0,650
0,0129	0,450
0,0134	0,290
0,0139	0,190
0,0144	0,130
0,0149	0,070
0,0154	0,050
0,0159	0,030
0,0164	0,010

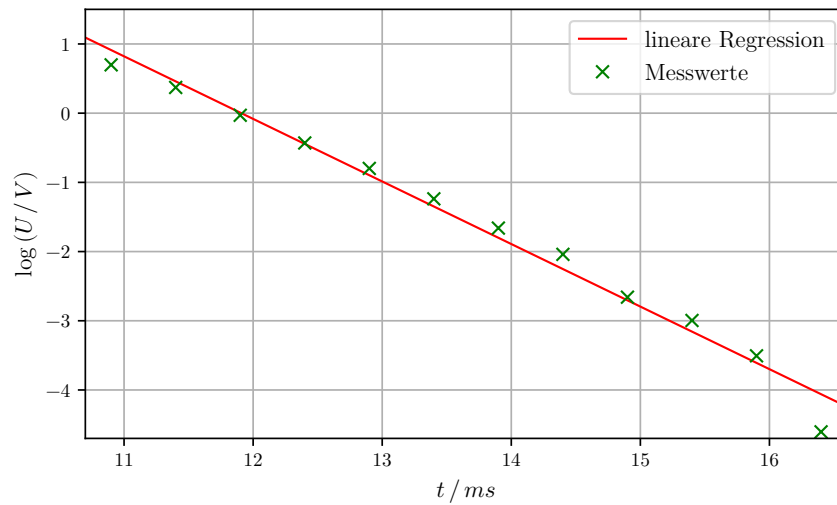


Abbildung 6: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstante.

4.2 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Für alle weiteren Berechnungen wurden die in Tabelle 2 dargestellten Messwerte aufgenommen.

Bei der Betrachtung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude ergibt sich aus (11) der Zusammenhang

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi\nu RC)^2}}$$

mit der Eingangsspannung $U_0 = 1,02 \text{ V}$. Damit und mit den entsprechenden Messdaten aus Tabelle 2 lässt sich eine Ausgleichsrechnung durchführen. Diese ist in Graph 7 dargestellt. Bei der Berechnung der Zeitkonstante mittels Python ergibt sich

$$RC = (1,436 \pm 0,036) \text{ ms.}$$

Tabelle 2: Messwerte zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phase.

ν / Hz	A/U_0	a / ms	b / ms	ϕ
10	0,765	1,620	100,000	0,102
20	0,882	1,400	50,000	0,176
30	0,912	1,360	33,333	0,256
40	0,912	1,280	25,000	0,322
50	0,882	1,280	20,000	0,402
60	0,863	1,240	16,667	0,467
70	0,833	1,200	14,286	0,528
80	0,804	1,160	12,500	0,583
90	0,784	1,130	11,111	0,639
100	0,745	1,100	10,000	0,691
200	0,510	0,810	5,000	1,018
300	0,353	0,630	3,333	1,188
400	0,275	0,500	2,500	1,257
500	0,225	0,420	2,000	1,319
600	0,186	0,360	1,667	1,357
700	0,162	0,310	1,429	1,363
800	0,142	0,280	1,250	1,407
900	0,127	0,250	1,111	1,414
1000	0,118	0,230	1,000	1,445
2000	0,059	0,110	0,500	1,382
3000	0,039	0,080	0,333	1,508
4000	0,029	0,060	0,250	1,508
5000	0,025	0,050	0,200	1,571
6000	0,010	0,042	0,167	1,583
7000	0,017	0,034	0,143	1,495
8000	0,018	0,030	0,125	1,508
9000	0,013	0,028	0,111	1,583
10 000	0,012	0,026	0,100	1,634
20 000	0,006	0,013	0,050	1,634
30 000	0,004	0,008	0,033	1,508

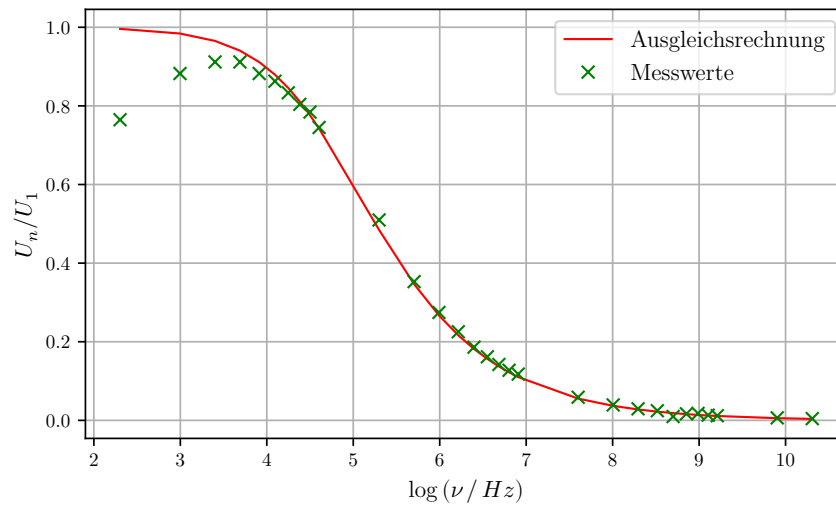


Abbildung 7: Frequenzabhängigkeit der Amplitude.

4.3 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Eine weitere Möglichkeit, die Zeitkonstante RC zu bestimmen, liegt in der Betrachtung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Die Phasenverschiebung berechnet sich nach

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi,$$

wobei a und b dem in Grafik 4 dargestellten Zusammenhang entsprechen. Die Messdaten und Ergebnisse finden sich in Tabelle 2. Auch hier lässt sich nach (9) eine Ausgleichsrechnung mit Python durchführen. Diese ergibt

$$RC = (1,299 \pm 0,036) \text{ ms}$$

als Wert für die Zeitkonstante RC .

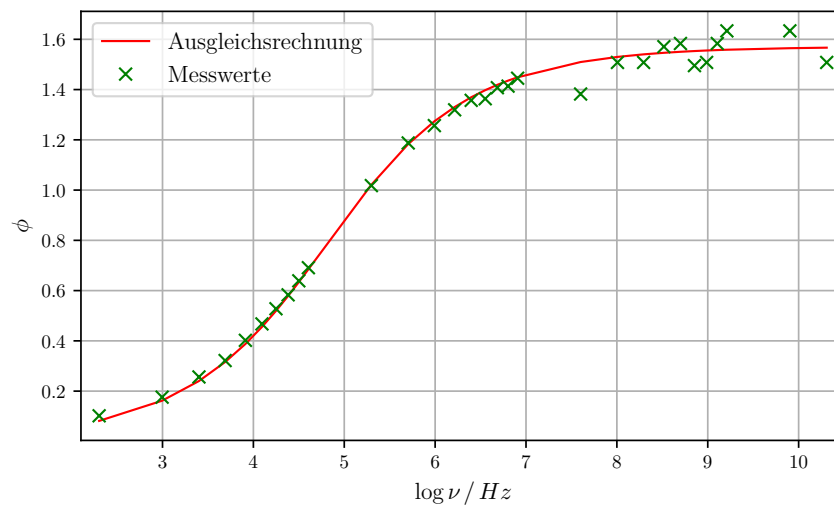


Abbildung 8: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung.

4.4 Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung

Aus den Messdaten aus Tabelle 2 lässt sich ein Polarplot erstellen. Dieser ist in Graph 9 zu sehen.

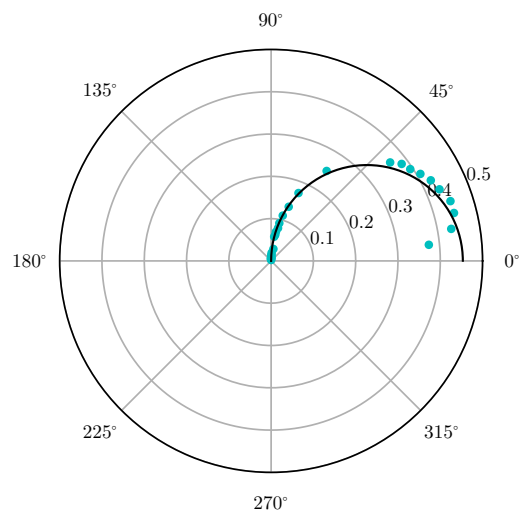


Abbildung 9: Polarplot zur Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung.

4.5 Verwendung des RC-Kreises als Integrator

Der RC-Kreis ist in der Lage, als Integrator zu arbeiten, wenn die Bedingungen $\omega \gg \frac{1}{RC}$, $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$ erfüllt sind. Dies ist beim durchgeführten Versuch gegeben. Aus Abbildung 10 ist zu erkennen, dass eine Sinusspannung bei der Integration wiederum eine Sinusspannung mit Phasenversatz ergibt. Die Rechteckspannung ergibt durch Integration annähernd eine Dreieckspannung, wie aus Abbildung 11 hervorgeht. Bei der Integration der Dreieckspannung (Abbildung 12) entsteht augenscheinlich ebenfalls ein Sinus, allerdings stellt dieser Verlauf eine Parabel dar.

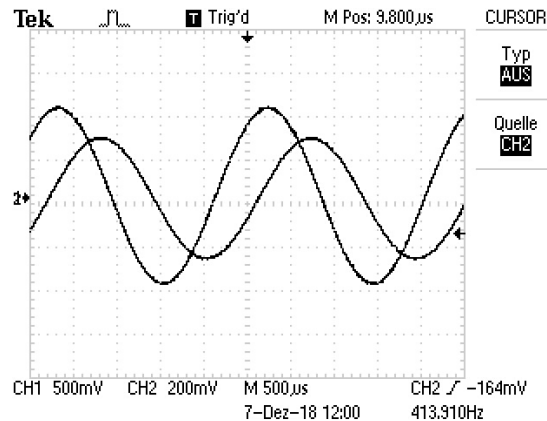


Abbildung 10: RC-Kreis als Integrator, Sinusspannung.

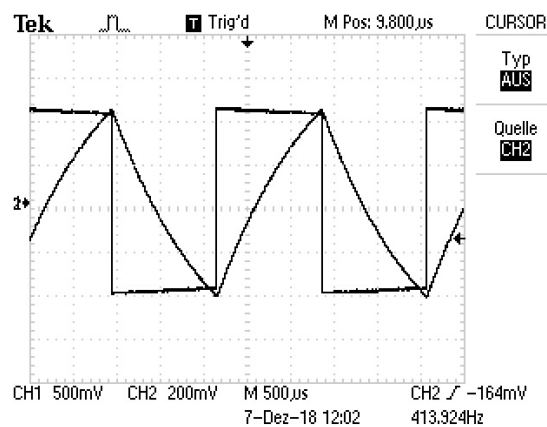


Abbildung 11: RC-Kreis als Integrator, Rechteckspannung.

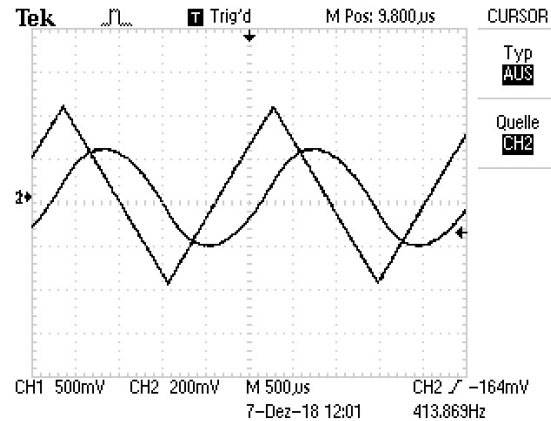


Abbildung 12: RC-Kreis als Integrator, Dreiecksspannung.

5 Diskussion

Wie aus bei der Abbildung 6 hervorgeht, liegen die ermittelten Werte der Zeitkonstanten nahe beieinander. Der letzte Wert allerdings zeigt eine große Abweichung. Dies kann daraus erschlossen werden, dass systematische Fehler aufgetreten sind. Der Innenwiderstand des Generators wurde bei allen Versuchen vernachlässigt. auch kann der exakte Wert für die Zeitkonstante nicht bestimmt werden, da die dafür benötigten Angaben über den Widerstand R des RC-Gliedes fehlen.

In der Abbildung 7 lässt sich der exponentielle Abfall bei der Entladung des Kondensators erkennen. Die ersten fünf Werte weichen von der Ausgleichsfunktion ab, jedoch ergibt sich für die restlichen Werte ein schöner Verlauf. Dieser Fehler kann durch das ablesen oder durch das Gerät entstanden sein. Es ist gut erkennbar, dass bei zunehmender Frequenz die Amplitude immer weiter abnimmt.

In der Abbildung 8 wird die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung verdeutlicht. Je größer der Quotient zwischen der Anfangsspannung und der gemessenen Spannung ist, desto ungenauer wurden die Werte. Dies kann auch Ablesefehler zur Folge haben.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V353 - Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.