

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$ . . . . .	4
2.2	Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Schwingungsdauer $T$ . . . . .	4
2.3	Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Präzession	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Bestimmung Apparatkonstante . . . . .	6
3.2	Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation	6
3.3	Bestimmung des magnetischen Momentes durch die Schwingdauer . . . .	6
3.4	Bestimmung des magnetischen Momentes über Präzession . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation	7
4.2	Bestimmung des magnetischen Momentes durch die Schwingungsdauer . .	9
4.3	Bestimmung des magnetischen Momentes über Präzession . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das magnetische Moment eines Permanentmagneten mithilfe von drei verschiedenen Messverfahren bestimmt.

## 2 Theorie

Im Gegensatz zur Elektrodynamik existieren unter natürlichen Bedingungen keine magnetischen Monopole. Daher sind Magnetfeldlinien immer geschlossen. Es gibt keine Quellen oder Senken eines Magnetfeldes. Die kleinste Einheit ist ein magnetischer Dipol, in größeren Dimensionen entspricht dieser einem Permanentmagneten. Eine weitere Möglichkeit, einen magnetischen Dipol zu erzeugen, ist eine stromdurchflossene Leiterschleife. Aufgrund der Lenzschen Regel wird durch den Stromfluss ein Magnetfeld um die Leiterschleife induziert. Charakterisiert wird ein Magnetfeld u. a. durch das magnetische Moment

$$\boldsymbol{\mu} = I \cdot \boldsymbol{A} \quad (1)$$

mit dem Strom  $I$  durch die Leiterschleife mit Querschnittsfläche  $A$ . Allerdings ist die Berechnung für einen Permanentmagneten komplizierter, daher kann man hier das magnetische Moment einfacher experimentell bestimmen. Dazu wird das Drehmoment

$$\boldsymbol{D}_B = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \quad (2)$$

verwendet. Danach wirkt so lange ein Drehmoment auf den Dipol, bis das magnetische Moment  $\boldsymbol{\mu}$  parallel zum Magnetfeld  $\boldsymbol{B}$  ist.

Um ein nahezu homogenes Magnetfeld zu erzeugen, wird meist ein Helmholtz-Spulenpaar verwendet. Dieses besteht aus zwei in gleicher Richtung von einem Strom  $I$  durchflossenen kreisförmigen Spulen. Sie sind so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte auf einer Achse senkrecht zum Radialvektor liegen. Außerdem entspricht der Abstand  $d$  zwischen ihnen ungefähr dem Spulenradius  $R$ . Daher kann das Magnetfeld auf der Symmetrieachse durch die Kreismittelpunkte als homogen angenommen werden. Es berechnet sich nach dem Biot-Savart-Gesetz

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \quad (3)$$

und für eine Windung ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \boldsymbol{e}_r \cdot N.$$

Das Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaars ergibt sich daher zu

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2 N}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4)$$

## 2.1 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Gravitationskraft $F_G$

Bei dieses Verfahren wird die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_G = m \cdot \mathbf{g} \quad (5)$$

zur Bestimmung des magnetischen Momentes verwendet. Die Masse  $m$  im Abstand  $\mathbf{r}$  wirkt dabei ein Drehmoment

$$\mathbf{D}_G = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) \quad (6)$$

auf einen Körper aus. Analog zu (2) wird dieses minimal für  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{g}$ . Diesem Drehmoment wirkt das Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaars entgegen, sodass ein Gleichgewichtszustand zwischen  $\mathbf{D}_G$  und  $\mathbf{D}_B$  nur bei einer spezifischen Magnetfeldstärke auftritt.

## 2.2 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Schwingungsdauer $T$

Zur Bestimmung des magnetischen Momentes mithilfe der Schwingungsdauer wird ein Körper in Schwingungen versetzt, sodass er im Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaars einem harmonischen Oszillator entspricht. Dessen Bewegung lässt sich mithilfe von

$$-|\boldsymbol{\mu}_{\text{Dipol}} \times \mathbf{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

beschreiben und wird durch die Schwingungsdauer  $T$  gelöst. Mithilfe von

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{\text{Dipol}} B} \frac{1}{B} \quad (7)$$

lässt sich also das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  über das Trägheitsmoment  $J_K$  des Körpers und die Magnetfeldstärke  $B$  bestimmen.

## 2.3 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Verwendung der Präzession

Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der Präzessionsbewegung eines Magneten zur Bestimmung des magnetischen Momentes. Dazu wird ein Körper in Rotation versetzt und anschließend die Figurenachse durch eine äußere Kraft um einen kleinen Winkel von der Drehimpulsachse  $\mathbf{L}$  weg ausgelenkt. Anschließend bewegt sich die Figurenachse auf einem Kegelmantel. Dies wird als Präzession bezeichnet. Die Bewegung des Körpers wird dann durch die Differentialgleichung

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{Dipol}} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{L}_K}{dt}$$

beschrieben. Diese wird durch

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|} \quad (8)$$

gelöst, wobei  $\Omega_p$  die Präzessionsfrequenz ist. Damit ergibt sich für die Umlaufdauer  $T_p$

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\mu_{\text{Dipol}}}{2\pi L_K} \cdot B. \quad (9)$$

### 3 Durchführung

Um das magnetische Moment zu bestimmen, wird folgender Aufbau benötigt

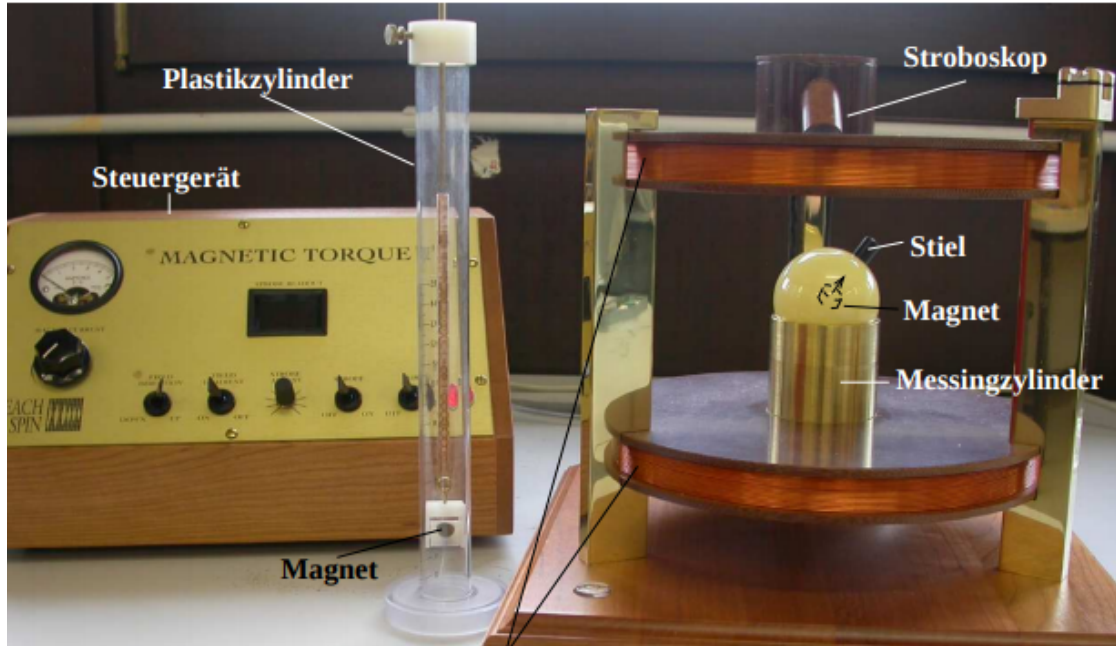


Abbildung 1: Versuchsaufbau Helmholtz Spulenpaar [1].

Auf dem Messingzylinder, welcher zwischen dem Spulenpaar platziert ist, liegt eine Billardkugel. Diese wird aufgrund ihrer Lagerung auf einem Luftkissen als reibungsfrei angenommen. Die Kugel beinhaltet einen Permanentmagneten. Das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  ist dabei in Richtung des Stieles gerichtet. Dieser Stiel befindet sich ebenfalls auf der Billardkugel. Das jeweilige Spulenpaar erzeugt das äußere Magnetfeld. Die Helmholtz-Spulen sind mit jeweils  $N = 195$  Windungen ausgestattet. Diese haben einen Abstand von  $d = 0,138 \text{ m}$  zueinander und ihr Radius beträgt  $r_{\text{Spule}} = 0,109 \text{ m}$ .

Um nun die Drehbewegung ermitteln zu können, befindet sich ein Stroboskop an der oberen Helmholtz-Spule. Durch das Steuergerät können das externe Magnetfeld, der Spulenstrom, das Stroboskop und das Luftkissen gesteuert werden. Somit wird während des Versuches die Richtung der Feldlinien, der Gradient des Feldes, der Strom der Spulen und das Stroboskop eingestellt und angepasst.

Wenn das externe Magnetfeld nicht genutzt wird, sollte der Spulenstrom nicht belastet werden. Dies hat den Grund, dass die Belastung die Temperatur und damit den Wider-

stand des Drahtes erhöht. Das Magnetfeld kann folglich seine maximale Leistung und Stärke nicht erreichen.

### 3.1 Bestimmung Apparatkonstante

Zu Beginn werden die gegebenen Abmessungen der Helmholtz-Spulen überprüft. Außerdem wird der Radius  $r_{\text{Kugel}}$  der Billardkugel sowie die Masse  $m_{\text{Kugel}}$  aufgenommen, um das Trägheitsmoment berechnen zu können. Zur Erleichterung der Rechnung wird die Billardkugel als Vollkugel angenähert. Letzlich wird die Länge des Stieles bestimmt.

### 3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation

Auf eine Aluminiumstange wird eine verschiebbare Masse  $m$  gesteckt. Diese Stange wird wiederum in den Stiel der Billardkugel besetzt. Durch den Abstand  $r_{\text{Masse}}$  von der aufgesetzten Masse zum Anfang des Stieles wird das Drehmoment bestimmt. Nun wird das Magnetfeld so eingestellt, dass es dem Strom entgegen wirkt. Somit steht die Aluminiumstange genau senkrecht im System, also befindet sich das System im Gleichgewicht. In zehn verschiedenen Messungen werden variierende Werte von  $r_{\text{Masse}}$  zum eingestellten Magnetfeld aufgetragen. Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Aluminiumstange als Punktmasse angenommen.

### 3.3 Bestimmung des magnetischen Momentes durch die Schwingdauer

Um die Schwingdauer zu ermitteln, muss die Billardkugel in eine harmonische Schwingung versetzt werden. Die Stromstärke wird somit auf einen konstanten Wert eingestellt und die Billardkugel wird auf dem Luftkissen platziert. Um nun eine Kleinwinkelnäherung nutzen zu können, wird der Stiel der Billardkugel um kleine Winkel ausgelenkt. Nun kann die Schwingungsdauer gemessen werden. Diese Messung wird neun mal wiederholt, um ein genaues Ergebnis über die Periodendauer  $T$  zu ermitteln. Im Folgenden wird die Periodendauer  $T$  zusätzlich für zehn verschiedene Stromstärken notiert.

### 3.4 Bestimmung des magnetischen Momentes über Präzession

Um die Präzession der rotierenden Billardkugel zu bestimmen, wird diese auf dem Luftkissen platziert. Das Stroboskop wird auf eine konstante Frequenz eingestellt. Nun wird die Billardkugel in eine Rotationsbewegung versetzt. Um ellipsenformige Bewegungen zu vermeiden, wird versucht, die Billardkugel durch äußere Hilfe, wie zum Beispiel einem Stift, zu stabilisieren. Die Billardkugel wird aus ihrer senkrechten Position ausgelenkt. Erscheint die Markierung auf der Billardkugel unter dem Licht des Stroboskops an einem stationären Punkt, wird nun das Magnetfeld eingeschaltet und die Umlaufzeit  $T_{\text{umlauf}}$  kann entsprechend gemessen werden. Bei zehn Magnetfeldstärken wird diese Messung jeweils drei mal durchgeführt.

## 4 Auswertung

Spezifische Daten des verwendeten Helmholtz-Spulenpaares sind

$$\begin{aligned}\text{Windungen} \quad N &= 195 \\ \text{Abstand Spulen} \quad D &= 0,138\text{m} \\ \text{Radius} \quad r_s &= 0,109\text{m} \\ \text{Masse} \quad m_m &= 0,00139\text{kg}.\end{aligned}$$

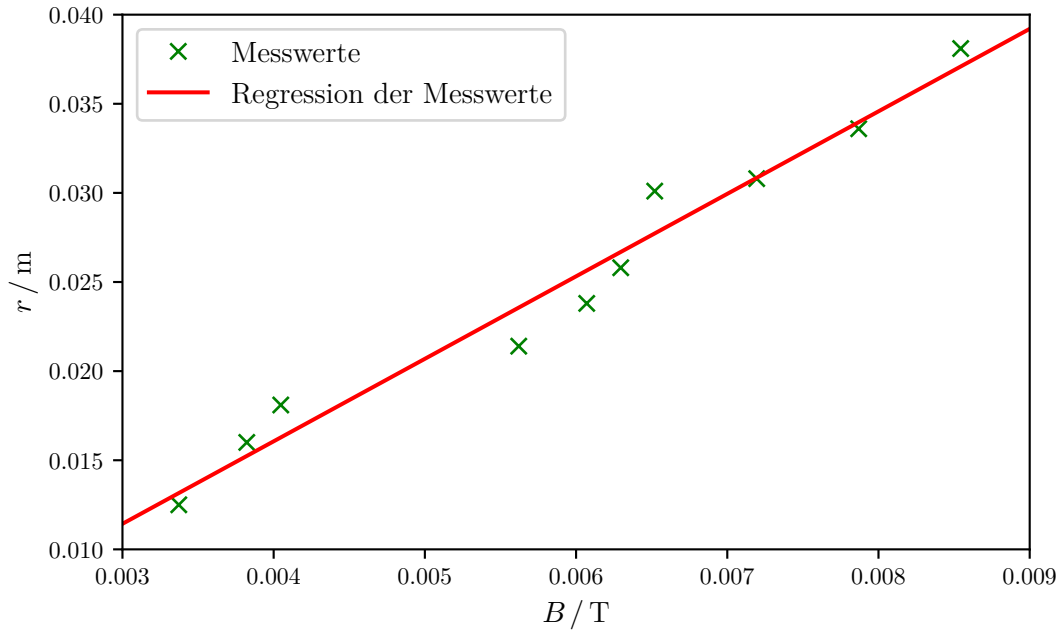
### 4.1 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation

Im ersten Teil des Versuches wird das Magnetfeld  $B$  zu einer bestimmten Stromstärke  $I$  ermittelt. Dazu wird Formel (4) genutzt, wobei sich  $x$  aus  $x = \frac{D}{2}$  ergibt. Die ermittelten Werte sind aus 1 zu entnehmen.

**Tabelle 1:** Berechnete Magnetfelder.

Stromstärke $I$	Radius $r$	Magnetfeld $B$
A	m	T
1,5	0,0125	0,00337
1,7	0,0160	0,00382
1,8	0,0214	0,00404
2,5	0,0181	0,00562
2,7	0,0238	0,00607
2,8	0,0258	0,00629
2,9	0,0391	0,00652
3,2	0,0308	0,00719
3,5	0,0336	0,00789
3,8	0,0381	0,00845

Der Radius  $r_s$  wird gegen das Magnetfeld  $B$  aufgetragen und wird in Graph 2 dargestellt.



**Abbildung 2:** Magnetfeld  $B$  in Abhängigkeit des Radius  $r_s$ .

Die lineare Regression wurde mittels Python berechnet. Somit ergibt sich für die Parameter

$$m = (4,628 \pm 0,091) \frac{\text{m}}{\text{T}}$$

$$b = (-0,002 \pm 0,000) \text{m}$$

wobei der Fehler bei dem Parameter  $b$  vernachlässigbar klein ist.

Das magnetische Moment ergibt sich aus Umformung der Formel (1), und zwar

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{m \cdot r \cdot g}{B}. \quad (10)$$

Hierbei stellt  $m$  die Masse dar,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $\frac{r}{B}$  die Steigung aus dem Graphen.

Mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{mrg}{B^2}\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{mg}{B}\sigma_r\right)^2} \quad (11)$$

ergibt sich für das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  und seinen Fehler

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,0631 \pm 0,0012) \text{Am}^2$$

## 4.2 Bestimmung des magnetischen Momentes durch die Schwingungsdauer

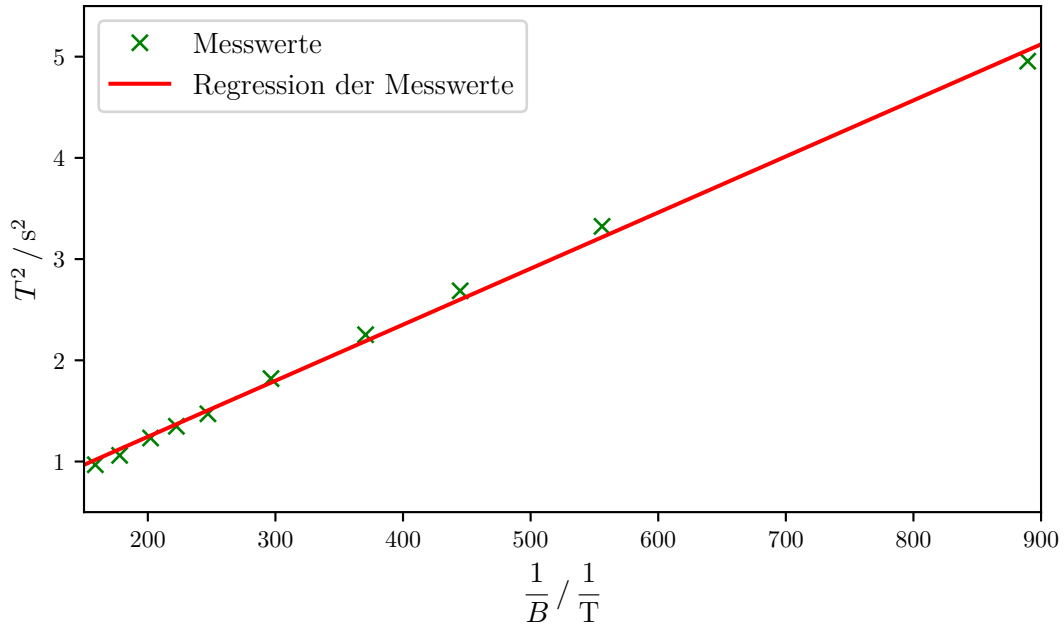
Das Magnetfeld wird mittels dem Biot-Savart Gesetz (3) und der Stromstärke errechnet. Die gemittelte Schwingungsdauer  $T$  wird in Tabelle 2 dargestellt

**Tabelle 2:** Berechnete Magnetfelder.

Stromstärke $I$	Magnetfeld $B$	Schwingungsdauer $T$
A	$10^{-3}\text{T}$	s
0,5	0,00112	2,226
0,8	0,00179	1,823
1,0	0,00224	1,639
1,2	0,00269	1,501
1,5	0,00337	1,349
1,8	0,00404	1,213
2,0	0,00449	1,161
2,2	0,00494	1,110
2,5	0,00562	1,030
2,8	0,00629	0,984

Die quadrierte Schwingungsdauer  $T^2$  wird gegen den Kehrwert des Magnetfeldes  $B$  aufgetragen, und in Graph 3 dargestellt.





**Abbildung 3:** Quadrierte Schwingungsdauer  $T^2$  in Abhängigkeit des Kehrwertes des Magnetfeld  $B$ .

Die lineare Regression wurde mittels Python berechnet. Somit ergibt sich für die Parameter

$$m = (0,005 \pm 0,000) \frac{\text{m}}{\text{T}}$$

$$b = (0,136 \pm 0,002) \text{m}$$

wobei der Fehler bei dem Parameter  $m$  vernachlässigbar klein ist.

Das magnetische Moment ergibt sich aus Umformung der Formel (7), und zwar

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{4\pi^2 J_K}{T^2 B}. \quad (12)$$

Hierbei stellt  $J_K$  das Trägheitsmoment der Kugel dar. Dieses wird durch die Formel

$$J_K = \frac{2}{5} m r^2$$

errechnet, und ergibt somit

$$J_K = 4.078 \cdot 10^{-5} \text{kgm}^2$$

Mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  und seinen Fehler

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,221 \pm 0,160) \text{Am}^2$$

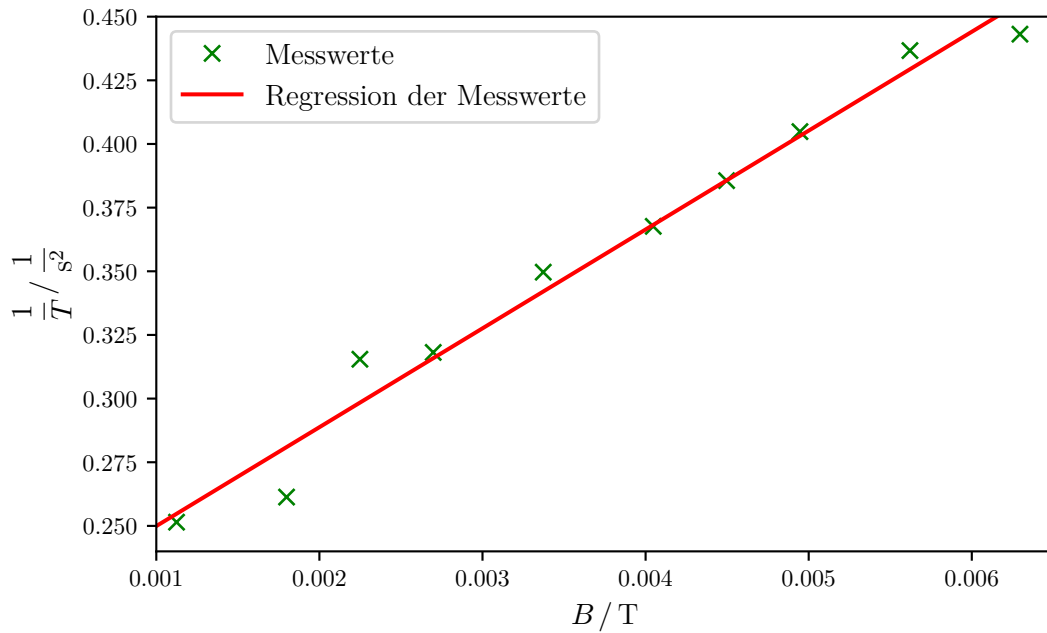
### 4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über Präzession

Analog zum ersten Teil und zweiten Teil des Versuches wird das Magnetfeld  $B$  zu einer bestimmten Stromstärke  $I$  ermittelt. Dazu wird Formel (4) genutzt. Die ermittelten Werte sind aus 3 zu entnehmen. Bei dieser Messung wurde die Schwingungsdauer drei mal notiert, der Mittelwert und die Standardabweichung wurden mittels Gauß berechnet und sind ebenfalls aus der Tabelle zu entnehmen.

**Tabelle 3:** Berechnete Magnetfelder.

Stromstärke $I$	Magnetfeld $B$	Schwingungsdauer $T$
A	T	s
0,5	0,00112	$3,976 \pm 0,082$
0,8	0,00179	$3,826 \pm 0,199$
1,0	0,00224	$3,170 \pm 0,037$
1,2	0,00269	$3,143 \pm 0,068$
1,5	0,00337	$2,859 \pm 0,045$
1,8	0,00404	$2,720 \pm 0,089$
2,0	0,00449	$2,593 \pm 0,232$
2,2	0,00494	$2,470 \pm 0,145$
2,5	0,00562	$2,290 \pm 0,134$
2,8	0,00629	$2,256 \pm 0,082$

Im Folgenden wird der Kehrwert des Mittelwertes von der Periodendauer gegen das Magnetfeld aufgetragen.



**Abbildung 4:** Kehrwert der Schwingungsdauer  $1/T$  in Abhängigkeit des Magnetfeldes  $B$ .

Die lineare Regression wurde mittels Python berechnet. Somit ergibt sich für die Parameter

$$m = (38,826 \pm 4,584) \frac{\text{m}}{\text{T}}$$

$$b = (0,211 \pm 0,000) \text{m}$$

wobei der Fehler bei dem Parameter  $b$  vernachlässigbar klein ist.

Das magnetische Moment ergibt sich aus Umformung der Formel (9), und zwar

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{2\pi L_k}{BT_p}. \quad (13)$$

Mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für das magnetische Moment  $\mu_{\text{Dipol}}$  und seinen Fehler

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,202 \pm 0,101) \text{Am}^2$$

## 5 Diskussion

Abschließend werden die Ergebnisse der drei verschiedenen Messmethoden verglichen. Diese werden nachfolgender Tabelle dargestellt.

**Tabelle 4:** Ergebnisse der drei Messverfahren.

Methode	magnetisches Moment $\text{Am}^2$
Gravitation	$0,0631 \pm 0,0012$
Schwingungsdauer	$0,221 \pm 0,160$
Präzession	$0,202 \pm 0,101$
Verglichene Methoden	prozentuale Abweichung
Gravitation / Schwingungsd.	71,45 %
Gravitation / Präzession	68,76 %
Schwingungsd. / Präzession	9,41 %

Auffällig ist die starke Abweichung der Gravitationsmethode von den Ergebnissen der anderen beiden Messmethoden. Diese kann daher rühren, dass einerseits die Messung des Abstandes der Masse von der Billardkugel aufgrund der Geometrie nicht exakt möglich war. Andererseits konnte während der Messung der Zeitpunkt, ab dem sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat, nicht genau bestimmt werden. Eventuell wurde daher die Stromstärke bei allen Messungen der Gravitationsmethode zu hoch eingestellt, sodass das angenommene Magnetfeld größer als notwendig gewesen ist. Da die Stärke des Magnetfeldes antiproportional eingeht, kommt dadurch eine systematische Abweichung nach unten zustande.

Bei der Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer ging die Schwingungsbewegung teilweise in eine Präzessionsbewegung über. Außerdem ist fraglich, ob bei den verwendeten Auslenkwinkeln noch eine Kleinwinkelnäherung zulässig ist. Allerdings ist aus Graph 3 ersichtlich, dass die Messwerte recht gut mit der linearen Regression übereinstimmen, sodass davon ausgegangen werden kann, dass diese Methode recht genau ist.

Bei der Bestimmung mithilfe der Präzessionsbewegung sind aus 4 Abweichungen sowohl nach oben als auch nach unten zu erkennen. Die Messung wurde zwar mehrfach neu durchgeführt, allerdings war es selbst für zehn Rotationen noch sehr schwierig, diese genau zu verfolgen und die Zeit exakt zu stoppen, sodass die Messung sehr große Unsicherheiten aufweist.

Es lässt sich also sagen, dass die Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer vermutlich die besten Ergebnisse liefert, da sie die geringsten Messunsicherheiten aufweist.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V105 - Das magnetische Moment*. 22. Nov. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/MagneticToMP.pdf>.