

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

V101 - Das Trägheitsmoment

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

Elcin Akay, elcin.akay@tu-dortmund.de

Robin Hegering, robin.hegering@tu-dortmund.de

DURCHFÜHRUNG AM 9. NOVEMBER 2018

ABGABE AM 16. NOVEMBER 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theoretische Grundlagen	3
2.1 Trägheitsmoment	3
2.1.1 Satz von Steiner	3
2.2 Winkelrichtgröße D	4
3 Durchführung	4
3.1 Bestimmung der Apparatekonstanten D und I_D der Drillachse	4
3.2 Bestimmung des Trägheitsmomentes zweier verschiedener Körper	4
3.3 Bestimmung des Trägheitsmomentes I_P einer Holzpuppe in verschiedenen Körperhaltungen	5
4 Auswertung	6
4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D der Drillachse	6
4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drillachse	6
4.3 Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Kugel und eines Zylinders . . .	9
4.4 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Holzpuppe in verschiedenen Körperhaltungen	10
5 Diskussion	12
Literatur	13

1 Zielsetzung

Es wird das Trägheitsmoment verschiedener Körper bestimmt und weiterhin der Steinersche Satz verifiziert.

2 Theoretische Grundlagen

In Analogie zum 2. Newtonschen Axiom für geradlinige Bewegungen werden Rotationsbewegungen durch das Drehmoment M , das Trägheitsmoment I und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ charakterisiert.

2.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment einer Punktmasse m im Abstand r zur Drehachse wird nach $I = mr^2$ berechnet. Das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers - zusammengesetzt aus N Punktmassen m_i , die mit gleicher Winkelgeschwindigkeit $\dot{\omega}$ im Abstand r_i um eine ortsfeste Achse rotieren - berechnet sich dann nach

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (1)$$

Für infinitesimale Massenelemente dm gilt analog

$$I = \int r^2 dm. \quad (2)$$

Die Berechnung des Trägheitsmomentes simpler Körper gestaltet sich daher recht leicht. Oft ist das Trägheitsmoment bestimmter Körper wie z.B. einer Kugel oder eines Zylinders bereits aus der Literatur bekannt. Die Berechnung des Trägheitsmomentes komplexerer Strukturen ist dagegen schwieriger. Dabei hilft eine Zerlegung in bzw. Approximierung durch Teilkörper, für die die Berechnung des Trägheitsmomentes einfacher ist. Somit müssen für das Gesamtträgheitsmoment die zuvor berechneten Einzelträgheitsmomente nur addiert werden, sofern sie sich auf die gleiche Achse beziehen.

Das angreifende Drehmoment auf einen Körper berechnet sich nach $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$, wobei \mathbf{F} die Kraft bezeichnet, die im Abstand \mathbf{r} von der Achse angreift. Demnach hängt das Drehmoment von der Lage der Drehachse ab. (1) und (2) gelten daher nur, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt des Rotationskörpers verläuft.

2.1.1 Satz von Steiner

Mithilfe des Steinerschen Satzes ist eine Berechnung des Trägheitsmomentes auch für eine um den Abstand a parallel zur Schwerpunktsachse verschobenen Drehachse möglich. Das Trägheitsmoment berechnet sich dann nach

$$I = I_S + m \cdot a^2 \quad (3)$$

mit I_S als Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsdrehachse und der Masse m des Körpers.

2.2 Winkelrichtgröße D

Die Auslenkung um den Winkel φ eines schwingungsfähigen Systems aus seiner Ruhelage führt zu einem rücktreibenden Drehmoment durch eine Spiralfeder. Es werden dabei harmonische Schwingungen mit Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (4)$$

ausgeführt, die sich also mithilfe der Winkelrichtgröße D und dem Trägheitsmoment I berechnen lässt. Die Winkelrichtgröße berechnet sich aus

$$M = D \cdot \varphi \Leftrightarrow D = \frac{M}{\varphi}$$

3 Durchführung

Um das Trägheitsmoment bestimmen zu können, werden zunächst die Radien und die Höhen der jeweiligen Objekte gemessen. In diesem Fall sind dies die weiße Styroporkugel, der graue Zylinder und die Puppe. Bei der Puppe werden von dem Rumpf, dem Kopf, der Arme und der Beine jeweils fünf Radien gemessen und mit Mittelwert und Standardabweichung angegeben. Dazu werden noch die Massen der jeweiligen Objekte gemessen. Bei der Puppe ergeben sich die einzelnen Körperteile durch den Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Gesamtmasse.

3.1 Bestimmung der Apparatekonstanten D und I_D der Drillachse

Um die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D zu berechnen, wird eine Spiralachse benötigt. Es wird ein Stab als masselos angenommen und auf die Apparatur geschraubt. Hierbei ist wichtig, dass die Spiralachse nicht den Winkel φ von 360° überschreitet, da ansonsten die Feder inelastische Verformungen erleiden kann.

Nun wird eine Federwaage senkrecht zum Stab eingehackt, und nach einem bestimmten Winkel ausgelenkt. Durch die resultierende Federkraft F und dem Abstand der Federwaage r zur Drillachse kann die Winkelrichtgröße berechnet werden. Dazu muss die Multiplikation von der Federkraft F und dem Abstand r noch durch den Drehwinkel φ dividiert werden. Diese Messung wird zehn mal mit Gewichten in Form von zwei Zylindern ausgeführt.

3.2 Bestimmung des Trägheitsmomentes zweier verschiedener Körper

Um die Trägheitsmomente der verschiedenen Körper zu bestimmen, wird die Periodendauer T genutzt. Eine Periodendauer beschreibt die Zeit, die ein Körper braucht um zurück in seine Ausgangslage zu gelangen. Mit einer Stoppuhr wird dann gemessen, wie die Periodendauer T bei verschiedenen Auslenkungswinkeln φ gemessen.

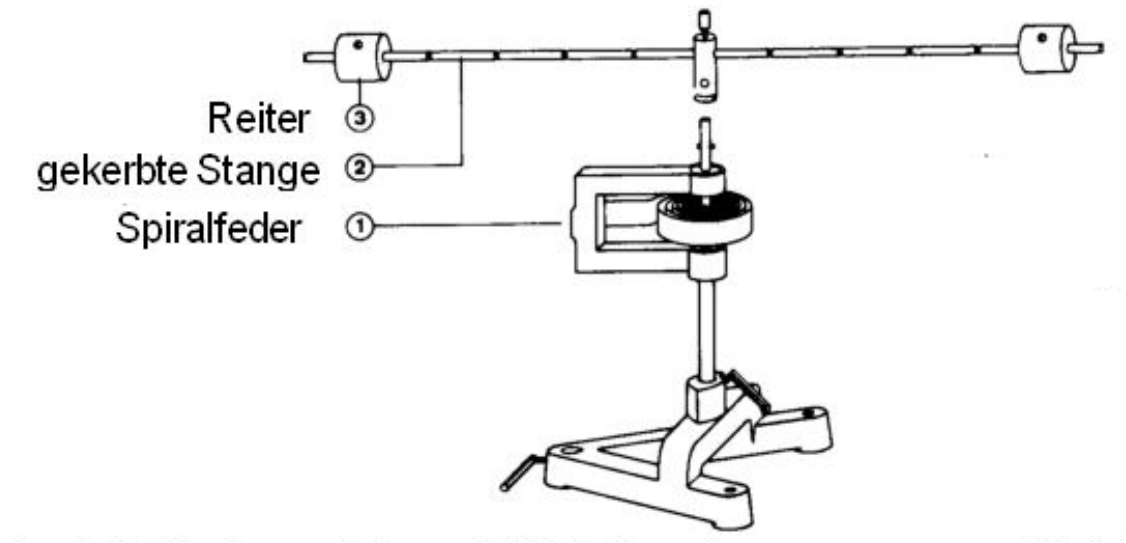


Abbildung 1: Die Spiralachse [2].

3.3 Bestimmung des Trägheitsmomentes I_P einer Holzpuppe in verschiedenen Körperhaltungen

Das Trägheitsmoment der Puppe wird in zwei Haltungen ermittelt.



(a) Haltung 1

(b) Haltung 2

Abbildung 2: Haltungen der Puppe

Dazu werden der Kopf, der Rumpf, die Arme und die Beine als Vollzylinder angenähert. Das Trägheitsmoment ergibt sich aus der Messung der Schwingdauern bei den Körperhaltungen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D der Drillachse

Die Winkelrichtgröße wird durch

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}$$

bestimmt.

Diese Rechnung wird für die gemessenen Kräfte F bei bestimmten Drehwinkeln φ ausgeführt. Diese sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D .

φ	F/N	r/m	$D / 10^{-2} \cdot \text{Nm}$
90°	0,09	0,28	1,63
110°	0,28	0,12	2,21
180°	1,16	0,06	2,08
180°	0,58	0,12	2,21
220°	1,02	0,06	1,75
270°	0,82	0,12	1,80
280°	0,74	0,14	1,59
300°	1,16	0,10	2,36
310°	1,60	0,08	2,11
320°	0,56	0,18	2,21

Mittelwert und Standardabweichung berechnen sich im Folgenden nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5)$$

und

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{T} - T_i)^2}. \quad (6)$$

Für die gemittelte Winkelrichtgröße D und ihren Fehler aus (5) und (6) ergibt sich dann

$$D = (0,0200 \pm 0,0026) \text{ Nm}.$$

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drillachse

Das Eigenträgheitsmoment setzt sich zusammen aus der Schwingungsdauer und dem Abstand der beiden Zylindermassen. Diese wiegen $m_{ID} = 0,22259 \text{ kg}$ bei einer Höhe $h_{ID} = 0,298 \text{ m}$ und einem Durchmesser $d_{ID} = 0,035 \text{ m}$. Im Folgenden wurde die Messung bei $\varphi = 90^\circ$ durchgeführt.

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoment I_D .

T/s	T^2/s^2	a/m	a^2/m^2
6,71	45,02	0,2325	0,0540
5,19	26,93	0,1825	0,0333
4,80	23,04	0,1625	0,0264
4,53	20,52	0,1425	0,0203
3,81	14,51	0,1225	0,0150
3,30	10,89	0,1025	0,0105
2,96	8,76	0,0825	0,0068
2,57	6,60	0,0625	0,0039
2,26	5,10	0,0425	0,0018
2,12	4,49	0,0225	0,0050

Um das Eigenträgheitsmoment zu bestimmen, wird T^2 gegen a^2 aufgetragen. Danach wird durch eine lineare Regression

$$f(x) = m \cdot x + b$$

der Ordinaten-Abschnitt bestimmt, wobei sich b aus einer Umformung ergibt. Somit folgt

$$b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

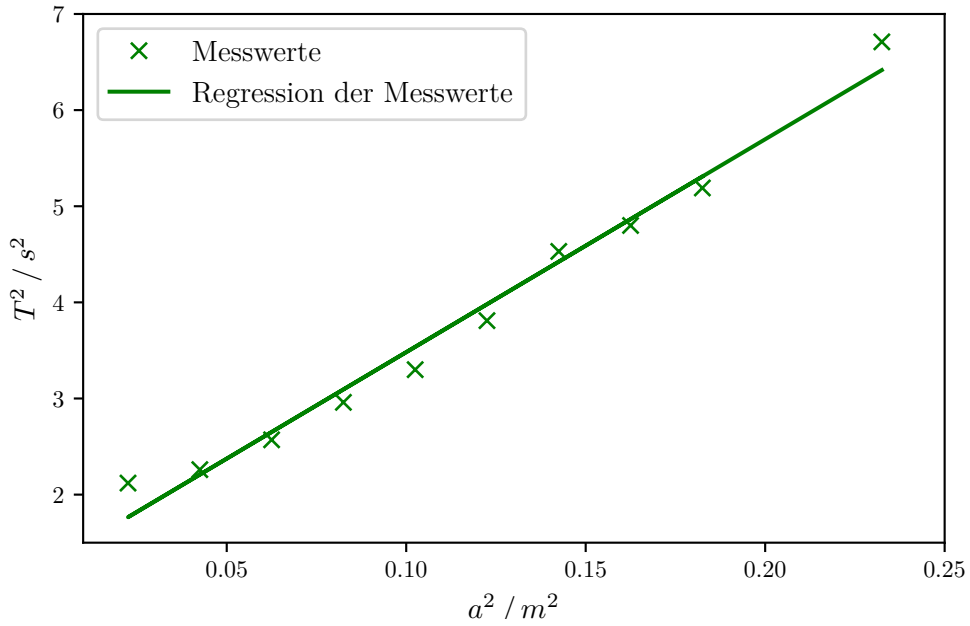


Abbildung 3: Graph zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes.

Die lineare Regression 3 liefert folgende Werte für die Parameter

$$m = (22,14 \pm 1,12) \frac{1}{\text{s}^2 \text{m}^2},$$

$$b = (1,26 \pm 0,01) \frac{1}{\text{s}^2}.$$

Aus den Formeln (2) und (3) und dem Zusammenhang aus 3 kann die Formel für I_D zu

$$I_D = \frac{b \cdot D}{4 \cdot \pi^2} - 2 \cdot m_{ID} \cdot \left(\frac{r_{ID}^2}{4} + \frac{h_{ID}^2}{12} \right)$$

aufgestellt werden.

Der Fehler wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung nach

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{b}{4 \cdot \pi^2} \right)^2 \cdot (\Delta D)^2 + \left(\frac{D}{4 \cdot \pi^2} \right)^2 \cdot (\Delta b)^2}$$

bestimmt, somit folgt für I_D

$$I_D = (-0.00187 \pm -0.00008) \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ein negatives Trägheitsmoment ergibt physikalisch keinen Sinn, daher darf davon ausgegangen werden, dass es bei den weiteren Berechnungen vernachlässigt werden kann.

4.3 Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Kugel und eines Zylinders

Das Trägheitsmoment I kann über die Periodendauer T mithilfe der Gleichung (4) berechnet werden. Deshalb ergibt sich für I_K

$$I_K = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2}. \quad (7)$$

Die Schwingungsdauer wird für beide Körper je fünfmal gemessen.

Tabelle 3: Gemessene Periodendauern T für Kugel und Zylinder.

Messung	$T_{\text{Kugel}} / \text{s}$	$T_{\text{Zylinder}} / \text{s}$
1	1,60	1,15
2	1,52	1,13
3	1,58	1,14
4	1,58	1,14
5	1,59	1,14

Mittelwert und Fehler betragen demnach

$$T_{\text{Kugel}} = (1,574 \pm 0,028) \text{ s}$$

$$T_{\text{Zylinder}} = (1,140 \pm 0,006) \text{ s},$$

wobei sich der Mittelwert nach (5) und der Fehler nach (6) berechnet.

Mit Gleichung (7) und den Ergebnissen aus 4.1 lässt sich dann das Trägheitsmoment für Kugel und Zylinder berechnen:

$$I_{\text{Kugel}} = (0,00126 \pm 0,00017) \text{ s}$$

$$I_{\text{Zylinder}} = (0,00066 \pm 0,00009) \text{ s}.$$

Der Mittelwert ergibt sich wiederum aus Gleichung (5) und die Formel für die Gaußsche Fehlerfortpflanzung lautet

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{2T \cdot D}{4\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2}. \quad (8)$$

Die theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes erfolgt für die Kugel [1, S. 1] nach

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} \cdot mR^2$$

und für den Zylinder [1, S. 1] nach

$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \cdot mR^2.$$

Dies führt zu folgenden theoretischen Trägheitsmomenten:

$$I_{\text{Kugel}} = 0,00154 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{Zylinder}} = 0,00081 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

4.4 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Holzpuppe in verschiedenen Körperhaltungen

Zur Approximation der Radien wurden folgende Messwerte verwendet:

Tabelle 4: Durchmesser der einzelnen Körperteile der Puppe.

Messung	$r_{\text{Kopf}} / \text{m}$	$r_{\text{Rumpf}} / \text{m}$	$r_{\text{Arm}} / \text{m}$	$r_{\text{Bein}} / \text{m}$
1	0.0307	0.0346	0.0172	0.0187
2	0.0278	0.0361	0.0142	0.0160
3	0.0230	0.0259	0.0162	0.0124
4	0.0153	0.0376	0.0130	0.0173
5	0.0247	0.0349	0.0118	0.0144
Höhe	0.057	0.097	0.140	0.154

Für die Radien ergeben sich daher folgende Mittelwerte und Fehler:

$$r_{\text{Kopf}} = (0,0121 \pm 0,0026) \text{ m}$$

$$r_{\text{Rumpf}} = (0,0169 \pm 0,0020) \text{ m}$$

$$r_{\text{Arm}} = (0,0072 \pm 0,0010) \text{ m}$$

$$r_{\text{Bein}} = (0,0079 \pm 0,0011) \text{ m}.$$

Mittelwert und Fehler berechnen sich nach (5) und (6).

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes wurde wiederum die Periodendauer für Haltung 1 (2a) und Haltung 2 (2b) fünfmal gemessen. Mit (5) und (6) ergeben sich daraus

Tabelle 5: Gemessene Periodendauern der Puppe.

Messung	$T_{\text{Haltung 1}} / \text{s}$	$T_{\text{Haltung 2}} / \text{s}$
1	0.87	0.62
2	1.00	0.67
3	0.79	0.63
4	0.89	0.67
5	0.87	0.67

$$T_{\text{Haltung 1}} = (0,88 \pm 0,07) \text{ s}$$

$$T_{\text{Haltung 2}} = (0,652 \pm 0,022) \text{ s}.$$

Daraus lassen sich mithilfe von Gleichung (7) und (8) die Trägheitsmomente für beide Körperhaltungen bestimmen:

$$I_{\text{Haltung 1}} = (0,00040 \pm 0,00008) \text{ Nm}^2$$

$$I_{\text{Haltung 2}} = (0,00022 \pm 0,00003) \text{ Nm}^2.$$

Für die theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes werden der Kopf, der Rumpf, die Arme und die Beine jeweils als Zylinder approximiert. Die Teilvolumina der Körperteile werden aufgrund der Annahme einer homogenen Masseverteilung nach

$$m_{\text{Teil}} = \frac{V_{\text{Teil}}}{V_{\text{gesamt}}} \cdot m_{\text{gesamt}}$$

berechnet. Daraus ergeben sich folgende Werte.

Tabelle 6: Teilvolumina und -massen der einzelnen Körperteile

Körperteil	Volumen / 10^{-5} m^3	Masse / kg
Kopf	$2,6 \pm 1,1$	$0,020 \pm 0,008$
Rumpf	$8,7 \pm 2,1$	$0,064 \pm 0,012$
Arm	$2,3 \pm 0,6$	$0,017 \pm 0,004$
Bein	$3,0 \pm 0,8$	$0,022 \pm 0,005$

Da die Drehachse für den Kopf und für den Rumpf jeweils durch den Schwerpunkt verlaufen, berechnet sich die Trägheitsmomente hierfür nach

$$I = \frac{1}{2} \cdot mr^2$$

und der Fehler durch

$$\Delta I = mr \cdot \Delta r.$$

Für Arme und Beine muss jeweils der Satz von Steiner (3) angewendet werden. Für Haltung 1 führt dies also zu folgenden Gleichungen:

$$I_{\text{Arm}} = m_{\text{Arm}} \cdot \left(\frac{r_{\text{Arm}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Arm}}^2}{12} + \left(r_{\text{Rumpf}} + \frac{h_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \right)$$

$$I_{\text{Bein}} = m_{\text{Bein}} \cdot \left(\frac{r_{\text{Bein}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Bein}}^2}{12} + h_{\text{Bein}}^2 \right)$$

mit folgenden Fehlern:

$$\Delta I_{\text{Arm}} = \left(\left(\frac{r_{\text{Arm}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Arm}}^2}{12} + \left(r_{\text{Rumpf}} + \frac{h_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot \Delta m_{\text{Arm}}^2 + \left(m_{\text{Arm}} \cdot \frac{2r_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \cdot \Delta r_{\text{Arm}}^2 + (2r_{\text{Rumpf}} + h_{\text{Arm}})^2 \cdot \Delta r_{\text{Rumpf}}^2 \right)^{1/2}$$

$$\Delta I_{\text{Bein}} = \left(\left(\frac{r_{\text{Bein}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Bein}}^2}{12} + h_{\text{Bein}}^2 \right)^2 \cdot \Delta m_{\text{Bein}}^2 + \left(\frac{mr_{\text{Bein}}}{2} \right)^2 \cdot \Delta r_{\text{Bein}}^2 + \left(m_{\text{Bein}} \cdot \left(\frac{h_{\text{Bein}}}{6} + 2h_{\text{Bein}} \right) \right)^2 \cdot \Delta h_{\text{Bein}}^2 \right)^{1/2}$$

Für Haltung 2 ändert sich die Berechnung der Arme:

$$I_{\text{Arm}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{Arm}} r_{\text{Arm}}^2 + m_{\text{Arm}} \cdot (r_{\text{Rumpf}} + r_{\text{Arm}})^2.$$

Der Fehler ergibt sich dann aus

$$\Delta I_{\text{Arm}} = \left(\left(\frac{r_{\text{Arm}}^2}{2} + (r_{\text{Rumpf}} + r_{\text{Arm}})^2 \right)^2 \cdot \Delta m_{\text{Arm}}^2 + (m_{\text{Arm}}(r_{\text{Arm}} + 2r_{\text{Rumpf}} + 2r_{\text{Arm}}))^2 \cdot \Delta r_{\text{Arm}}^2 + (m_{\text{Arm}}(2r_{\text{Rumpf}} + 2r_{\text{Arm}}))^2 \cdot \Delta r_{\text{Rumpf}}^2 \right)^{1/2}$$

Das Gesamtträgheitsmoment I_{ges} ergibt sich dann jeweils aus

$$I_{\text{ges}} = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Rumpf}} + 2 \cdot I_{\text{Arm}} + 2 \cdot I_{\text{Bein}} \quad (9)$$

und führt zu folgenden Ergebnissen:

$$I_{\text{Haltung 1}} = (0,00067 \pm 0,00009) \text{ Nm}^2$$

$$I_{\text{Haltung 2}} = (0,00038 \pm 0,00008) \text{ Nm}^2.$$

5 Diskussion

Im Folgenden werden die experimentell ermittelten mit den Theoriewerten verglichen.

Tabelle 7: Abweichung zwischen experimentellen und Theoriewerten.

Körper	$I_{\text{experimentell}} / 10^{-4} \text{ Nm}^2$	$I_{\text{Theorie}} / 10^{-4} \text{ Nm}^2$	proz. Abw.
Kugel	$12,6 \pm 1,7$	$15,4 \pm 0,0$	18,2 %
Zylinder	$6,6 \pm 0,9$	$8,1 \pm 0,0$	18,5 %
Puppe (Haltung 1)	$6,7 \pm 0,9$	$4,0 \pm 0,8$	67,5 %
Puppe (Haltung 2)	$3,8 \pm 0,8$	$2,2 \pm 0,3$	72,7 %

Es fällt auf, dass die Abweichungen für die Puppe deutlich größer sind als die Abweichungen für die Körper. Dies kommt dadurch zustande, dass in der Durchführung durch die verschiedenen Messverfahren und die komplizierte Form der Puppe deutlich mehr Unsicherheiten auftreten und mehr Möglichkeiten für Messfehler gegeben sind. Zudem führt die starke Approximation der Puppe durch Zylinder zu weiteren Messunsicherheiten. Außerdem weichen alle experimentellen Werte nach oben ab, was auf systematische Fehler zurückgeführt werden kann.

Zunächst ist hier zu erwähnen, dass ein negatives Trägheitsmoment der Drillachse berechnet worden ist. Da dies physikalisch nicht sinnvoll ist, wurde es bei den weiteren Berechnungen vernachlässigt. Daraus resultiert ein systematischer Fehler. Außerdem wurde die Stange als masselos angenommen, wodurch ein weiterer systematischer Fehler

zustande kam. Zudem lag der Stab der genutzten Objekte nicht eindeutig im Schwerpunkt. Ein weiterer systematischer Fehler ergibt sich bei der Schwingungsdauer, wo der Winkel φ als klein angenommen wird. Diese Näherung führt allerdings zu Fehlern, da deutlich größere Winkel betrachtet wurden, als in der Näherung angenommen.

Zudem kommt es durch Bewegungen und Tischstöße sowie der Reaktionsgeschwindigkeit beim Messen der Zeit zu Ungenauigkeiten bei diesem Versuch. Ebenfalls zu erwähnen ist das Vermessen der genutzten Objekte mit dem Maßband, diese Messung ist nämlich ebenfalls fehlerbehaftet.

Aufgrund der hohen Abweichungen bei den Messungen ist es nicht möglich, eine Aussage über die Gültigkeit des Steinerschen Satzes zu treffen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch V101 Das Trägheitsmoment*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/TraegheitMP.pdf>.
- [2] *Spiralfeder*. 10. Nov. 2018. URL: http://lernserver.el.haw-hamburg.de/kurs/Physikpraktikum/Physikpraktikum_Studiengang_HWI_kurs/m.09.01.00.01.html.