technische universität
dortmund

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

V103 - Biegung elastischer Stäbe

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

Elçin Akay, elcin.akay@tu-dortmund.de

Robin Hegering, robin.hegering@tu-dortmund.de

DURCHFÜHRUNG AM 16. NOVEMBER 2018
ABGABE AM 23. NOVEMBER 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch geht es um den Elastizitätsmodul von verschiedenen Metallen und Legierungen. Diese werden bestimmt, um anschließend mit Literaturwerten verglichen zu werden.

2 Theorie

Kräfte, welche sich auf eine Flächeninhalt beziehen, nennt man Spannung. Diese wird in zwei Komponenten aufgeteilt, die orthogonale und die parallele Komponente. Die orthogonale Komponente wird auch die Normalspannung σ genannt, die parallele Komponente jedoch ist die Tangentialspannung. Dabei entsteht eine relative Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$, welche proportional zur Kraft ist. Diese stellt dabei den Elastizitätsmodul als Proportionalitätsfaktor dar. Dieser Zusammenhang bildet das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Hierbei ist E der materialspezifische Elastizitätsmodul. Sollte die Längenänderung ΔL exakt messbar ein, so kann der Elastizitäsmodul E aus einer Dehnung oder einer Stauchung der jeweils genutzen Probe bestimmmt werden. Da diese Messung jedoch für Schwierigkeiten sorgt, wird die Biegung D genutzt. Diese entsteht schon bei kleineren Kräften und kann deutlich angenehmer vermessen werden.

2.1 Durchbiegung bei einseitig eingespannter homogener Probe

Bei einer Biegung sind die Längenänderungen über den Querschnitt des Stabes nicht konstant, daher wird die Verschiebung des jeweiligen Oberflächenpunktes an der Stelle x bei belastetem und unbelastetem Zustand gemessen. Um nun den Elastizitätsmodul E zu bestimmen, wird die Funktion $D(x)$ genutzt. Ein äußeres Drehmoment M_F wird durch die angewandte Kraft erzeugt. Sie wirkt auf die Unterseite des Stabes. Dadurch entsteht eine Stauchung. Es ergibt sich für das Drehmoment

$$M_F = F \cdot (L - x), \tag{2}$$

wobei F die Kraft ist, welche sich am Hebenarm $L - x$ äußert.

Die sogenannte **neutrale Faser** beschreibt den Bereich des Stabes, wo der spannungsfreie Bereich existiert. Dadurch, dass der Stab an der Oberseite und an der Unterseite unter Zugspannung steht, zeigen diese Schichten in unterschiedliche Richtungen. Die neutrale Faser ändert ihre Länge während des Vorgangs der Durchbiegung nicht. Das kommt daher zustande, dass sich im inneren des Stabes ein weiteres Drehmoment M_n erzeugt. Dieses kann durch die Integration über den Querschnitt des Stabes berechnet werden.

$$M = \int_Q y \sigma_y \, \mathrm{d}\sigma \tag{3}$$

wobei y den Abstand des Flächenelements $d\sigma$ der neutralen Faser angibt.

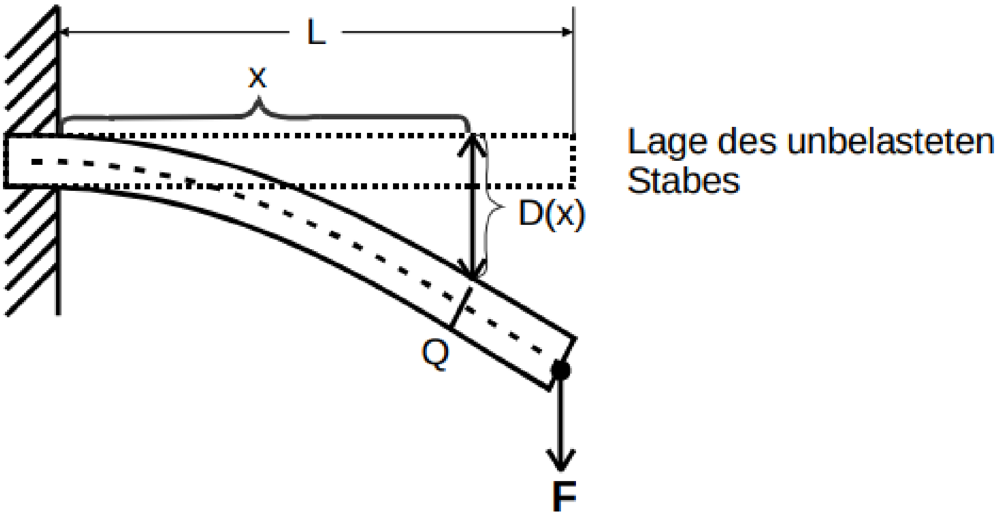

Abbildung 1: Einseitig eingespannte Probe [3].

Wenn die Drehmomente

$$M_F = M_n \tag{4}$$

im Gleichgewicht stehen, stellt sich die Deformation der Probe ein.

Um im Folgenden das Elastizitätsmodul E berechnen zu können, wird die Relation von E zur Normalspannung σ benötigt. Diese ergibt sich aus

$$\sigma(y) = E_y \frac{d^2 D}{dx^2}. \tag{5}$$

Bei einer statischen Biegung stehen die Drehmomente (2) und (3) in einem Gleichgewicht, mit der Beziehung in (5) folgt

$$E\frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y \, \mathrm{d}q = F(L - x),$$

wobei das Flächenträgheitsmoment I wie folgt definiert ist

$$I = \int_Q y \, \mathrm{d}q. \tag{6}$$

Die Durchbiegung $D(x)$ bei einer einseitigen Einspannung an der Stelle x kann dann mit

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot (Lx^2 - \frac{x^3}{3}), \quad x \in [0, \mathrm{L}]. \tag{7}$$

berechnet werden.

2.2 Biegung bei beidseitig eingespannter homogener Probe

Bei der beidseitig eingespannten homogenen Probe ergibt sich für einen neuen Hebelarm x ein neues Drehmoment.

$$
\begin{aligned}
M_F &= -\frac{F}{2}x, \qquad x \in [0, \frac{L}{2}] \\
M_F &= -\frac{F}{2}x, \qquad x \in [\frac{L}{2}, L]
\end{aligned}
$$

Analog zu (7) stellt sich ebenfalls ein Gleichgewicht des äußeren und inneren Drehmomentes ein. Somit ergibt sich fur die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot (3L^2x - 4x^3), \qquad x \in [0, \frac{L}{2}]. \tag{8}$$

3 Aufbau und Durchführung

Um den Elastizitätsmodul der Probekörper zu bestimmen, werden zwei Messverfahren sowohl für einen runden als auch für einen eckigen Stab unbekannter Materialbeschaffenheit durchgeführt. Vor Beginn der Messungen werden für spätere Berechnungen die Maße der verwendeten Stäbe aufgenommen. In beiden Fällen wird zunächst mithilfe einer Messuhr eine Nullmessung, d.h. eine Messung ohne Gewichte, aufgenommen, da nicht von einer gleichmäßigen Beschaffenheit und relativen Höhe der Stäbe zur Messapparatur ausgegangen werden kann. Die relative Höhe zur Apparatur $D_0(x)$ wird dabei in gleichmäßigen Abständen x gemessen.

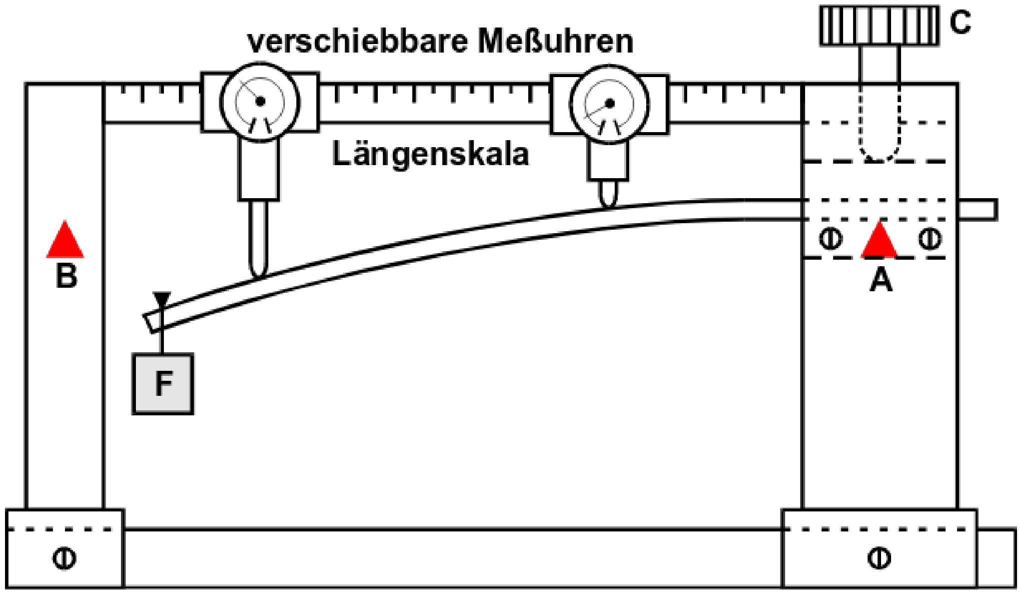

Abbildung 2: Versuchsaufbau (einseitige Einspannung) [3].

3.1 Einseitige Einspannung

Bei der einseitigen Einspannung der Stäbe wird, wie in Abbildung 2 dargestellt, am losen Ende des Stabs eine zuvor bestimmte Masse m angehängt, sodass die Höhendifferenz zum Nullniveau zwischen 3 und 7 mm beträgt. Nun wird wiederum mithilfe einer Messuhr die relative Höhe des Stabes zur Messapparatur in gleichbleibenden Abständen von $x = 5\,\mathrm{cm}$ an 10 Stellen aufgenommen.

3.2 Beidseitige Einspannung

Für die zweite Messreihe wird der Stab wie zuvor an der in Abbildung 2 mit **A** markierten Stelle eingespannt und zusätzlich an der mit **B** markierten Stelle aufgelegt. Die Masse m, die nun in der Mitte angehängt wird, wird so angepasst, dass die Abweichung vom Nullniveau wiederum zwischen 3 und 7 mm beträgt. Wie zuvor wird mit einer Messuhr die Abweichung zum Nullniveau an den gleichen Messpunkten x gemessen.

4 Auswertung

4.1 Einseitige Einspannung

4.1.1 Eckiger Stab

Die zur Messung genutzen Daten werden in Tabelle 1 dargestellt. Die probespezifischen Daten sind die Abmessungen

Länge	$L = 0{,}591\,\mathrm{m}$
Höhe/Breite	$h = 0{,}010\,\mathrm{m}$
Gewicht	$m_p = 0{,}1642\,\mathrm{kg}$
Masse	$M_M = 0{,}5339\,\mathrm{kg}$,

wobei M_M die Masse des angehangenen Gewichtes und m_p die Masse des Probestabes darstellt.

Um nun den Elastizitäsmodul E mit

$$E = \frac{Mg}{2Ia} \tag{9}$$

ausrechnen zu können, wird $D(x)$ in Abhängigkeit von $Lx^2 - \frac{1}{3}x^3$ dargestellt. Die berechnete lineare Regression wird in 3 dargestellt.

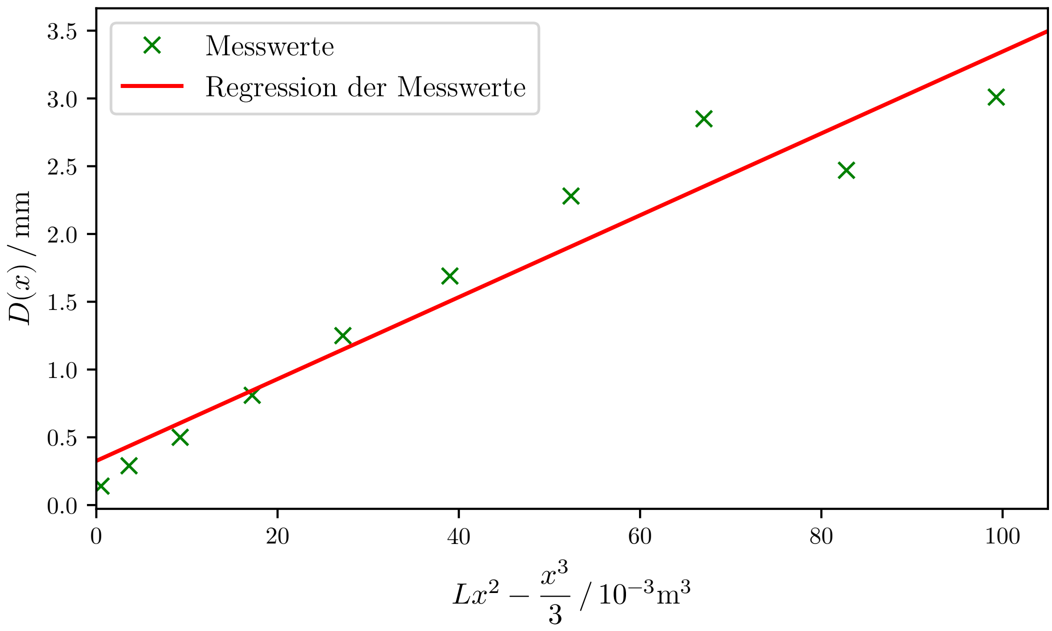

Abbildung 3: Einseitige Einspannung des eckigen Stabes.

Die Parameter wurden mit Python berechnet und lauten

$$a = (0{,}0302 \pm 0{,}0000)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$b = (0{,}3260 \pm 0{,}0227)\,\mathrm{mm},$$

wobei der Fehler bei a vernachlässigbar klein ist.

I beschreibt das Flächenträgheitsmoment, und wird mittels der Formel 6 berechnet. Mit

$$I = \frac{h^4}{12} = (8,33 \cdot 10^{-6})\mathrm{m}^4$$

ergibt sich für das Elastizitätsmodul E aus (9)

$$E_{\text{eckig}} = (1,0405 \pm 0,0003) \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2},$$

wobei der Fehler mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt wird. Diese ergibt sich aus

$$\Delta E = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{4I_x^2a^4} + \frac{\sigma_{I_x}^2}{4I_x^4a^2}}. \tag{10}$$

Tabelle 1: Messdaten eckiger Stab mit einseitiger Einspannung.

Messpunkt x mm	Biegung D mm	Biegung D_0 mm	Regression $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ $10^{-3}\mathrm{m}^3$
30	10,26	10,40	0,5229
80	10,23	10,52	3,6117
130	10,09	10,59	9,2556
180	9,78	10,59	17,2044
230	9,32	10,57	27,2082
280	8,90	10,59	39,0171
330	8,29	10,57	52,3809
380	7,70	10,55	67,0497
430	7,98	10,45	82,7736
480	7,28	10,29	99,3024

4.1.2 Runder Stab

Nun wird der Elastizitäsmodul eines runden Stabes bestimmt. Die zur Messung genutzen Daten werden in Tabelle 2 dargestellt. Die probespezifischen Daten sind die Abmessungen

Länge	$L = 0,600\,\mathrm{m}$
Höhe/Breite	$h = 0,010\,\mathrm{m}$
Gewicht	$m_p = 0,3944\,\mathrm{kg}$
Masse	$M_M = 0,5340\,\mathrm{kg},$

wobei M_M die Masse des angehangenen Gewichtes und m_p die Masse des Probestabes darstellt.

Analog zum eckigen Stab wird eine lineare Regression ausgeführt, dessen Parameter nach Python

$$a = (0,0493 \pm 0,0000)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$b = (0,0579 \pm 0,0010)\,\mathrm{mm}$$

lauten.

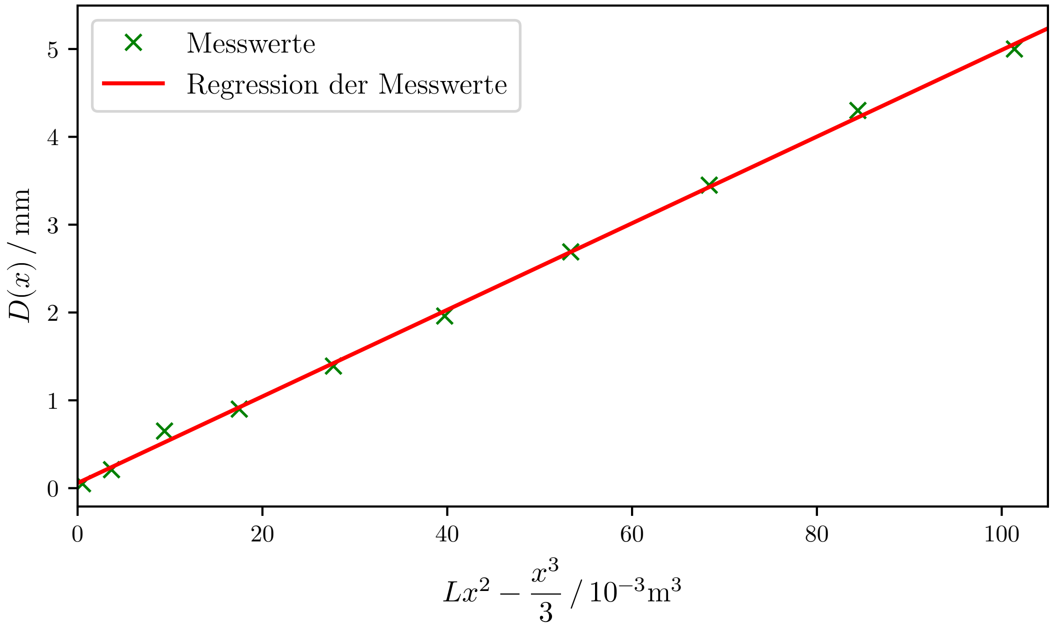

Abbildung 4: Einseitige Einspannung des runden Stabes.

Für diesen Zylinder lautet das Flächenträgheitsmoment

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot r^4 = 4,908 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4,$$

und daraus der Elastizitätsmodul E

$$E_{\mathrm{rund}} = (1,0821 \pm 0,0000) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Der Fehler ergibt sich analog durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (10).

Tabelle 2: Messdaten runder Stab mit einseitger Einspannung.

Messpunkt x mm	Biegung D mm	Biegung D_0 mm	Regression $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ 10^{-3}m^3
30	10,01	10,33	0,5310
80	9,61	10,33	3,6693
130	9,18	10,28	9,4077
180	8,73	10,12	17,4960
230	8,32	10,02	27,6843
280	8,21	9,93	39,7227
330	8,22	9,86	53,3610
380	8,39	9,79	68,3493
430	8,61	9,73	84,4377
480	8,86	9,63	101,3760

4.2 Beidseitige Einspannung

4.2.1 Eckiger Stab

Die Berechnung für den Elastizitäsmodul für einen beidseitig eingespannten Stab erfolgt analog. Dazu wird Formel (7) genutzt. Die Abmessungen sind

$$
\begin{aligned}
&\text{Länge} && L = 0,591\,\text{m} \\
&\text{Höhe/Breite} && h = 0,010\,\text{m} \\
&\text{Gewicht} && m_p = 0,1642\,\text{kg} \\
&\text{Masse} && M_M = 4,7039\,\text{kg},
\end{aligned}
$$

wobei M_M die Masse des angehangenen Gewichtes und m_p die Masse des Probestabes darstellt.

In 3 wird die Abhängigkeit von D(x) in einem Diagramm gegen $3Lx^2$-$4x^3$ dargestellt.

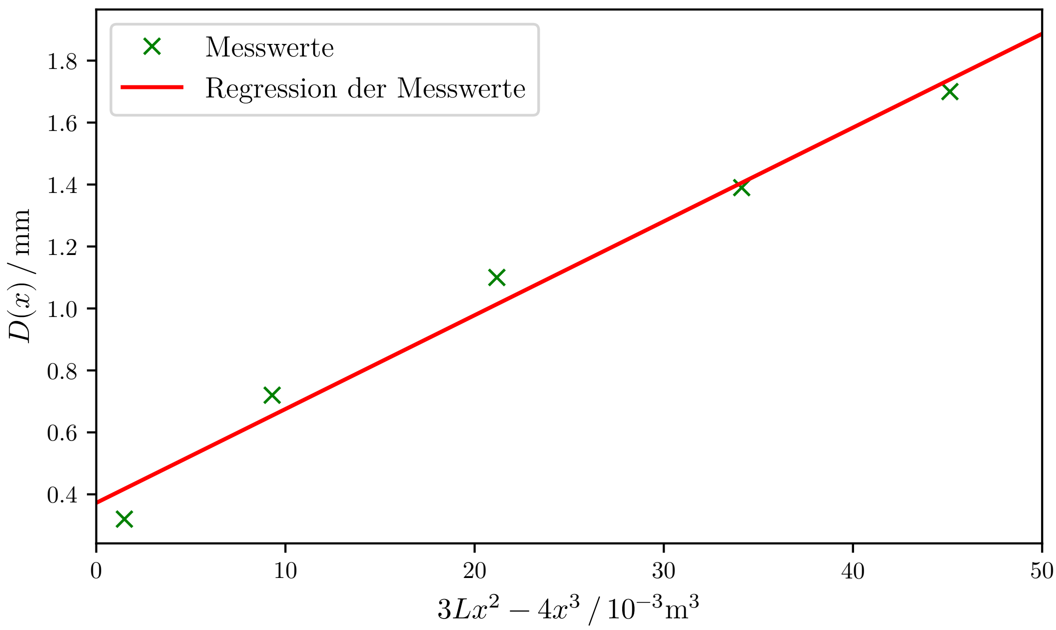

Abbildung 5: Beidseitige Einspannung des eckigen Stabes.

Die Parameter der Ausgleichsgerade werden mit Python berechnet und ergeben

$$a = (0,0303 \pm 0,0000)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$

$$b = (0,3725 \pm 0,0045)\,\mathrm{mm}$$

Für den Elastizitäsmodul nach (8) ergibt sich somit

$$E_{\text{eckig}} = \frac{Mg}{38Ia} = (3,8093 \pm\ 0,0008) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}. \tag{11}$$

Der Fehler ergibt sich analog durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (10).

Tabelle 3: Messdaten eckiger Stab mit beidseitiger Einspannung.

Messpunkt x mm	Biegung D mm	Biegung D_0 mm	Differenz $D(x)$ mm	$3Lx^2 - 4x^3$ 10^{-3}m^3
30	10,01	10,33	-0,32	1,4877
80	9,61	10,33	-0,72	9,2992
130	9,18	10,28	1,10	21,1757
180	8,73	10,12	-1,39	34,1172
230	8,32	10,02	-1,70	45,1237

4.2.2 Runder Stab

Analog zu dem rechteckigen Stab wurde nochmal selbe Messung ausgeführt. Die Probespezifischen Daten sind die Abmessungen

Länge	$L = 0,600\,\mathrm{m}$
Höhe/Breite	$h = 0,010\,\mathrm{m}$
Gewicht	$m_p = 0,3944\,\mathrm{kg}$
Masse	$M_M = 3,5335\,\mathrm{kg},$

wobei M_M die Masse des angehangenen Gewichtes und m_p die Masse des Probestabes darstellt.

In 4 wird die Abhängigkeit von $D(x)$ in einem Diagramm gegen $3Lx^2 - 4x^3$ dargestellt.

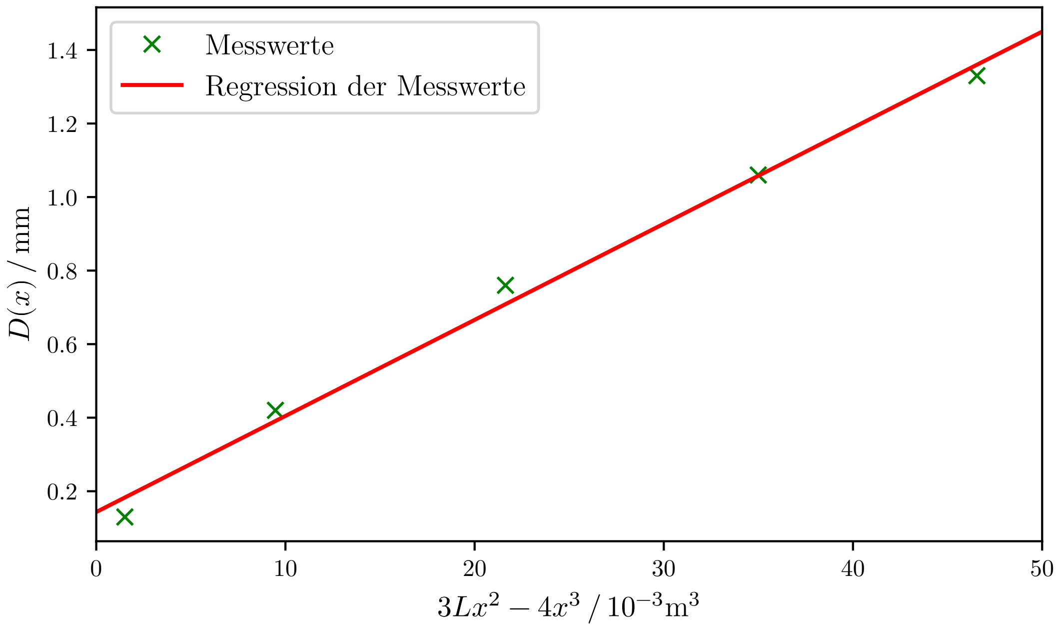

Abbildung 6: Beidseitige Einspannung des runden Stabes.

Die Parameter der Ausgleichsgerade werden mit Python berechnet, und ergeben

$$a = (0,0261 \pm 0,0000)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$

$$b = (0,1434 \pm 0,0014)\,\mathrm{mm}$$

Für den Elastizitäsmodul nach (8) ergibt sich somit

$$\mathrm{E}_{\mathrm{rund}} = \frac{Mg}{38Ia} = (5,6305 \pm 0,0004) \cdot 10^{10}\,\frac{N}{m^2}. \tag{12}$$

Der Fehler ergibt sich analog durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (10).

Tabelle 4: Messdaten runder Stab mit beidseitiger Einspannung.

Messpunkt x mm	Biegung D mm	Biegung D_0 mm	Differenz $D(x)$ mm	$3Lx^2 - 4x^3$ $10^{-3}\mathrm{m}^3$
30	10,19	10,06	0,13	1,5120
80	9,87	9,45	0,42	9,4720
130	9,69	8,93	0,76	21,6320
180	9,56	8,50	1,06	34,9920
230	9,44	8,11	1,33	46,5520

4.3 Vergleich mit Literaturwerten

Unter Berücksichtigung der silbergrauen Farbe und relativ geringen Masse des eckigen Stabes lässt sich darauf schließen, dass es sich um Aluminium handelt. Aluminium [1] hat gemäß der Literatur einen Elastizitäsmodul von ungefähr

$$E_{\text{Lit, Alu}} \approx 78\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} = 7,8 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Aufgrund der braun-rötliche Farbe des runden Stabes kann davon ausgegangen werden, dass es sich um eine Messing-Legierung handelt. Messing-Legierungen [2] haben einen Elastizitäsmodul von ungefähr

$$E_{\text{Lit, CuZn40}} \approx 123\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} = 12,3 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

5 Diskussion

Nun werden die experimentell ermittelten Werte mit den Literaturwerten verglichen.

Tabelle 5: Vergleich zwischen Mess- und Literaturwerten.

Stab	Literaturwert	einseitig		beidseitig	
	$E_{\mathrm{Lit}}\,/\,10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$E\,/\,10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	proz. Abw.	$E\,/\,10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	proz. Abw.
Aluminium	7,8	10,4050 $\pm$ 0,0029	33,3%	3,8093 $\pm$ 0,0008	51,3%
Messing	12,3	10,8214 $\pm$ 0,0000	12,0%	5,6305 $\pm$ 0,0004	54,2%

Auffällig ist der ähnliche Literaturwert für beide Stäbe und jeweils ähnliche Wertebereiche für die beiden Messungen mit einseitiger Einspannung und die beiden Messungen mit beidseitiger Einspannung. Daher war eine eindeutige Bestimmung der verwendeten Materialien nur unter Berücksichtigung der Farbe und Beschaffenheit der Stäbe möglich.

Die starke Abweichung nach unten für die Messung bei beidseitiger Einspannung kann durch systematische Fehler erklärt werden. Zu nennen sind dabei in erster Linie die fehlende Kalibrierung der Messuhren und mögliche Ungenauigkeiten oder Fehler beim Ablesen. Außerdem sind bei beidseitiger Einspannung jeweils nur fünf statt zehn Messwerten aufgenommen worden, die für die lineare Regression verwendet werden können. Zusätzlich lag die Auslenkung der Stäbe nicht, wie ursprünglich vorgegeben, zwischen 3 und 7 mm, sondern nur bei ca. 2 mm und die angehängte Masse war größer als 3 kg. Dies war notwendig, um überhaupt eine Auslenkung beobachten zu können, könnte aber zu weiteren Messungenauigkeiten geführt haben.

Literatur

[1] *Aluminium*. 20. Nov. 2018. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Aluminium`.

[2] *Messing*. 20. Nov. 2018. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Messing`.

[3] *Versuchsanleitung*. 16. Nov. 2018. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf`.