

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fourier'sches Theorem	3
2.2 Fourier-Transformation	4
3 Durchführung	5
3.1 Vorbereitung	5
3.2 Fourier-Analyse und Fourier-Transformation	6
3.3 Fourier-Synthese	6
4 Auswertung	7
4.1 Fourier-Analyse	7
4.1.1 Analyse Rechteckspannung	9
4.1.2 Analyse Sägezahnspannung	9
4.1.3 Analyse Dreieckspannung	10
4.2 Fourier-Synthese	11
5 Diskussion	14
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden periodische Funktionen in ihre einzelnen Oberwellen zerlegt. In einem weiteren Schritt werden periodische Funktionen aus ihren Oberwellen zusammengesetzt. Diese Vorgänge bezeichnet man als Fourier-Analyse und Fourier-Synthese.

2 Theorie

Eine Funktion $f(x, t)$ kann periodisch in der Zeit und im Ort sein. Dann sind ihre Eigenschaften gegeben durch

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{und} \quad f(x + D) = f(x),$$

wobei D die räumliche und T die zeitliche Periodizität oder auch Periodendauer darstellen. Konkret geben diese die Strecke bzw. die Zeit an, nach der sich eine Funktion $f(x, t)$ wiederholt.

Die wichtigsten periodischen Funktionen sind der Sinus und der Cosinus. Beide sind 2π -periodische Funktionen, deren Wertebereich sich von -1 bis 1 erstreckt. Allgemein sind diese Funktionen gegeben durch

$$f(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \text{und} \quad f(t) = B \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right),$$

wobei A und B die Amplituden darstellen.

2.1 Fourier'sches Theorem

Nach dem Fourier'schen Theorem lässt sich eine zeitlich periodische Funktion $f(t)$ durch

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right) \quad (1)$$

ausdrücken, sofern die Reihe konvergiert. Für die Parameter a_n und b_n gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ &\text{mit } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aus (1) geht hervor, dass in der Funktion $f(t)$ nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T}$ auftreten. Diese werden harmonische Oberschwingungen genannt. Daraus folgt das in Abbildung 1 dargestellte Linienspektrum, das entsteht, wenn die Amplituden a_n und b_n als Funktion der Frequenz dargestellt werden. Außerdem muss gelten, dass a_n

und b_n für $n \rightarrow \infty$ gegen null gehen, da im Fourierschen Theorem (1) Konvergenz der Reihe gegeben sein muss.

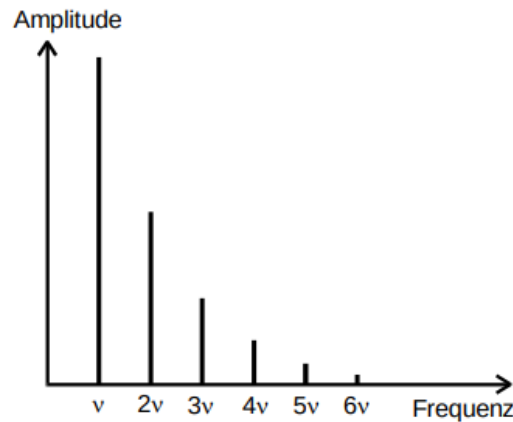


Abbildung 1: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz ν [1].

Ein weiteres Phänomen ist das Auftreten von Unter- und Überschwingern an einer Unstetigkeitsstelle t_0 der Funktion $f(t)$. Durch Fourier-Reihen können Funktionen an der Stelle t_0 nicht approximiert werden. Selbst wenn $n \rightarrow \infty$ läuft, bleibt die Größe des Überschwingers konstant. Dieses Phänomen wird auch Gibbsches Phänomen genannt.

2.2 Fourier-Transformation

Das Ziel der Fourier-Transformation ist die Bestimmung des Frequenzspektrums einer beliebigen zeitabhängigen Funktion. Die Periodizität der Funktion spielt dabei keine Rolle.

Die Fourier-Transformation einer beliebigen Funktion $f(t)$ wird durch die Gleichung

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\nu t} dt \quad (2)$$

angegeben. Ergebnis ist das Frequenzspektrum $g(\nu)$, welches im Falle der Periodizität aus einer konvergierenden Reihe von Delta-Funktionen besteht. Ansonsten geht es in ein kontinuierliches Spektrum über.

Jedoch kann nicht über einen unendlich langen Zeitraum integriert werden, sodass die Periodizität von f aufgehoben wird. Somit wird das Linienspektrum Nebenmaxima ausbilden, die jedoch im weiteren Verlauf des Versuchs ignoriert werden.

Weiterhin ist bei der Anwendung der Fourier-Transformation das Abtasttheorem zu berücksichtigen. Da für die Rekonstruktion der Funktion $f(t)$ bei dieser Methode nur in endlichen Zeitabständen diskrete Messpunkte aufgezeichnet wird, muss beachtet werden, dass genügend Messpunkte pro Periodendauer aufgenommen werden, um große Fehler in der Fourier-Transformation zu vermeiden. Es lässt sich zeigen, dass der Fehler

verschwindend gering ist, wenn für die Abtastfrequenz ν_A und die höchste im Spektrum von f auftretenden Frequenz ν_{\max} die Ungleichung

$$\nu_A > 2 \cdot \nu_{\max}$$

erfüllt ist.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung

Für diesen Versuch werden für drei Funktionen die Fourier-Koeffizienten berechnet. Hierbei werden die Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung gewählt.

Die Rechtecksspannung lässt sich durch

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & t \in [-\pi, 0, \pi] \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

ausdrücken. Daraus folgt für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos nt \right) \\ \Rightarrow b_n &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Sägezahnspannung ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

und daraus folgt für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \\ \Rightarrow b_n &= \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dreiecksspannung ist gegeben durch

$$f(t) = |t|.$$

Daraus folgt für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-4}{n^2\pi} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

3.2 Fourier-Analyse und Fourier-Transformation

Um im Folgenden die Dreieck-, Sägezahn- und Rechteckspannung zu erzeugen, wird ein Funktionengenerator verwendet. Der Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

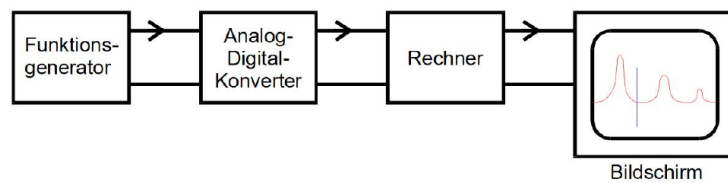


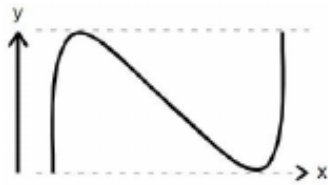
Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Fourier-Analyse [1].

Der Funktionsgenerator wird an ein Oszilloskop angeschlossen, welches 'fast fourier transforms' (kurz FFT) durchführt. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops wird nun neben der Funktion auch ihr Linienpektrum, das Ergebnis der Fourier-Transformation ist, dargestellt. Die Amplitude aller hinreichend von den umgebenden Nebenmaxima differenzierten Peaks wird ausgemessen. Die Analyse wird für alle drei Beispielfunktionen durchgeführt.

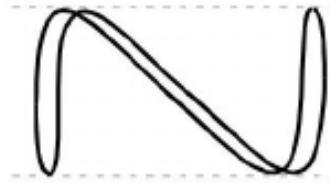
3.3 Fourier-Synthese

Ein Oberwellengenerator wird verwendet, um die Fourier-Synthese durchzuführen. Hiermit werden die Verhältnisse der Amplituden und Phasen von Grundschwingung und Oberschwingungen eingestellt. Dazu schaltet man in den X-Y-Betrieb des Oszilloskops. Dieses stellt nun die Phasenbeziehungen der eingehenden Spannungen dar. Für die Phasendifferenz muss bei Oberwellen gerader Ordnung $\Delta\phi = n \cdot \pi$ und bei Oberwellen ungerader Ordnung $\Delta\phi = n \cdot \frac{\pi}{2}$ gelten. Sie äußert sich auf dem Schirm des Oszilloskops durch Lissajous-Figuren.

Anhand der Lissajous-Figuren lassen sich nun die benötigten Phasenbeziehungen der Oberwellen einstellen. Für Oberwellen ungerader Ordnung muss die Lissajous-Figur eine Linie ohne Flächeninhalt bilden, ähnlich der in Abbildung 3a. Für Oberwellen gerader Ordnung ergibt die Lissajous-Figur eine geschlossene Kurve symmetrisch zur x -Achse. Die Amplitudenverhältnisse ergeben sich aus den Verhältnissen der Fourier-Koeffizienten. Bei der Rechteck- und Sägezahnspannung fallen die Koeffizienten mit dem Faktor $\frac{1}{n}$



(a) Oberwelle ungerader Ordnung, gleichphasige Schwingung



(b) keine Schwingung in Phase

Abbildung 3: Lissajous-Figuren im X-Y-Betrieb.

ab. Auffällig ist, dass bei der Rechteckspannung nur Oberwellen ungerader Ordnung benötigt werden. Bei der Dreieckspannung hingegen fallen die Koeffizienten mit dem Faktor $1/n^2$ ab, wobei auch hier nur Oberwellen ungerader Ordnung benötigt werden. Zur Dokumentation werden für alle drei Funktionen Aufnahmen des Bildschirms des Oszilloskops angefertigt.

4 Auswertung

Im Folgenden werden zunächst die Fourier-Analyse ausgewertet und anschließend die Ergebnisse der Fourier-Synthese dargestellt.

4.1 Fourier-Analyse

Die ermittelten Amplituden der jeweiligen Spannungen sind in der Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Fourier-Amplituden.

Oberwellenzahl	Rechteck		Sägezahn		Dreieck	
n	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U/V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	8,80	1	4,40	1	5,600	1
2	—	—	2,16	0,49	—	—
3	2,92	0,33	1,42	0,32	0,608	0,109
4	—	—	1,04	0,23	—	—
5	1,72	0,19	0,82	0,18	0,216	0,039
6	—	—	0,66	0,15	—	—
7	1,24	0,14	0,56	0,12	0,110	0,020
8	—	—	0,48	0,10	—	—
9	0,96	0,10	0,42	0,09	0,066	0,012
10	—	—	0,38	0,08	—	—
11	0,78	0,08	—	—	0,042	0,008
12	—	—	—	—	—	—
13	0,66	0,07	—	—	0,030	0,005
14	—	—	—	—	—	—
15	0,57	0,06	—	—	0,024	0,004
16	—	—	—	—	—	—
17	0,50	0,05	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—
19	0,44	0,05	—	—	—	—

Die Beziehung von Amplitudenverhältnis R und der Ordnung der Oberwelle n ist gegeben durch

$$R(n) = n^{-k},$$

beziehungsweise unter Anwendung des Logarithmus

$$\log R = -\log n \cdot k.$$

Daraus folgt für die Form der linearen Regression

$$\log R = -k \cdot \log n + b. \quad (3)$$

Dabei ist m ein Maß für die Änderung des Amplitudenverhältnisses $\frac{U_n}{U_1}$ mit steigender Ordnung der Oberwelle n . Aus Tabelle 1 geht hervor, dass für $n = 1$ das Amplitudenverhältnis $\frac{U_n}{U_1} = 1$ ist. Daher folgt in der Theorie für den y-Achsenabschnitt der linearen Regression $b = \log 1 = 0$.

4.1.1 Analyse Rechteckspannung

Unter Verwendung der Funktion (3) für die lineare Regression ergeben sich für die Rechteckspannung die Parameter

$$m = -1,044 \pm 0,0141$$

$$b = 0,016 \pm 0,031.$$

Die resultierende Ausgleichsgerade ist in Abbildung 4 zu sehen.

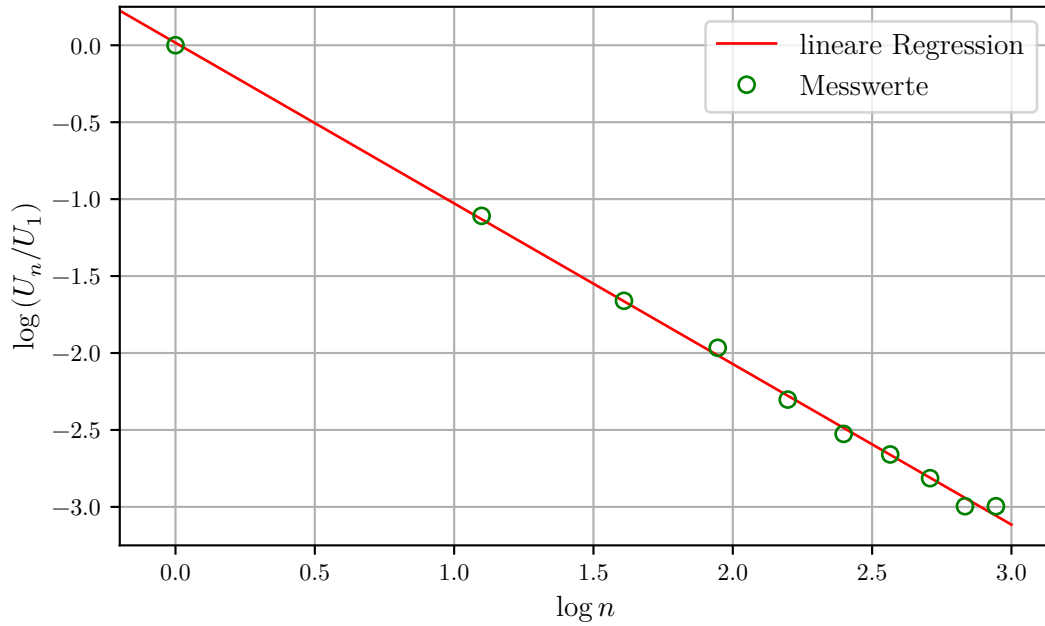


Abbildung 4: Relativer Abfall der Oberwellenamplituden in Abhängigkeit der Ordnung der Oberwellen in doppeltlogarithmischer Darstellung bei der Rechteckspannung.

4.1.2 Analyse Sägezahnspannung

Unter Verwendung der Funktion (3) für die lineare Regression ergeben sich für die Sägezahnspannung die Parameter

$$m = -1,108 \pm 0,015$$

$$b = 0,044 \pm 0,025.$$

Die resultierende Ausgleichsgerade ist in Abbildung 5 zu sehen.

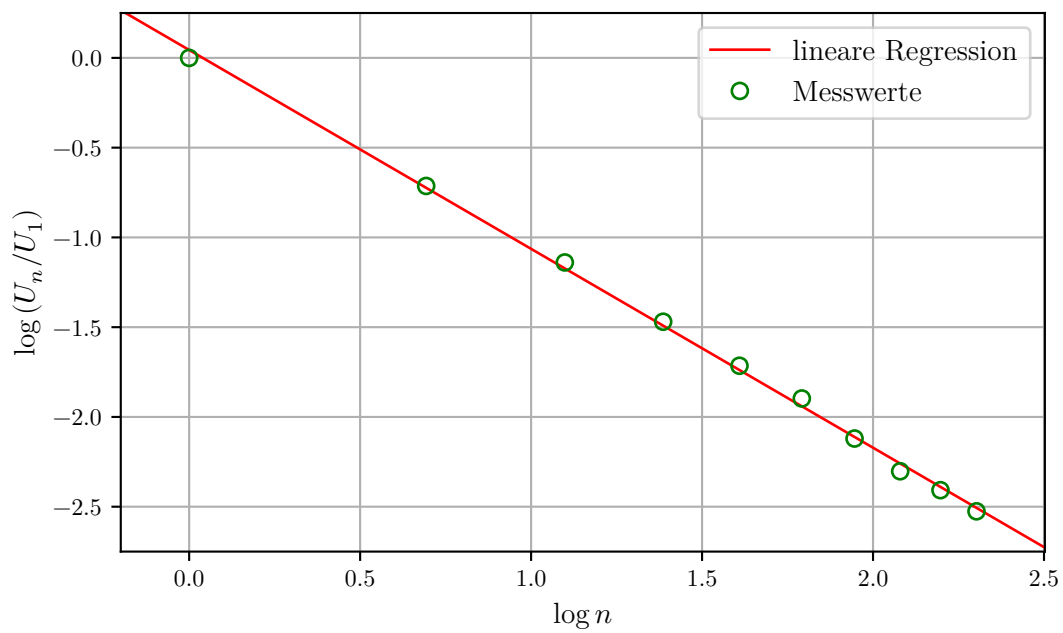


Abbildung 5: Relativer Abfall der Oberwellenamplituden in Abhängigkeit der Ordnung der Oberwellen in doppeltlogarithmischer Darstellung bei der Sägezahnspannung.

4.1.3 Analyse Dreiecksspannung

Unter Verwendung der Funktion (3) für die lineare Regression ergeben sich für die Dreiecksspannung die Parameter

$$m = -2,042 \pm 0,018$$

$$b = 0,019 \pm 0,035.$$

Die resultierende Ausgleichsgerade ist in Abbildung 6 zu sehen.

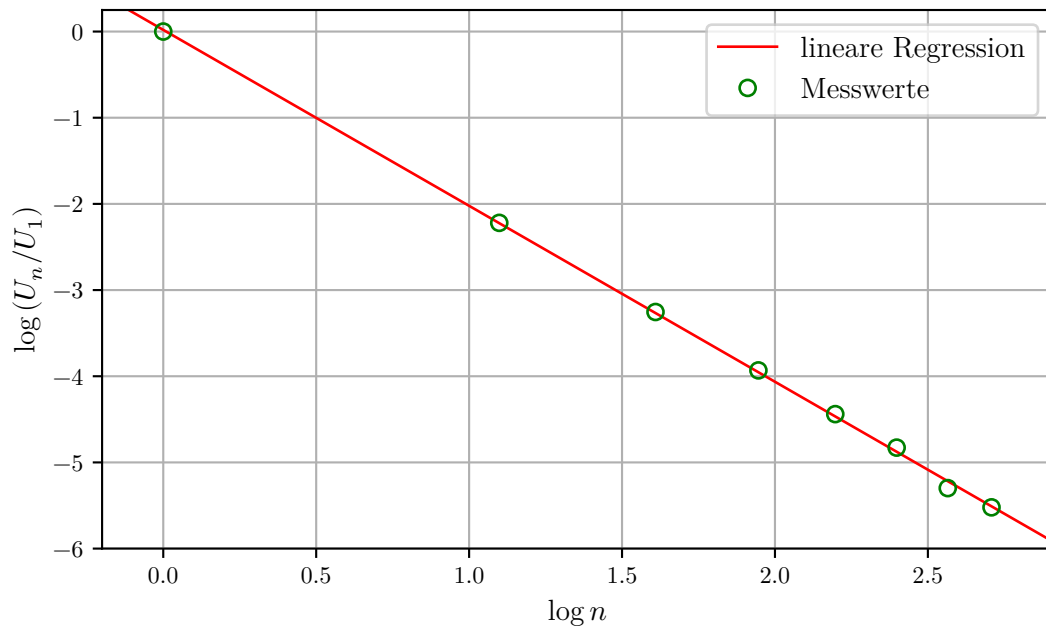


Abbildung 6: Relativer Abfall der Oberwellenamplituden in Abhängigkeit der Ordnung der Oberwellen in doppeltlogarithmischer Darstellung bei der Dreiecksspannung.

4.2 Fourier-Synthese

Die Messwerte für die synthetisierte Rechteckspannung sind in der Tabelle 2 dargestellt. Die Abbildung ist in 7 dargestellt.

Tabelle 2: Messwerte der Rechteckspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte	theoretische Werte
	V	V
1	0,577	0,577
3	0,192	0,192
5	0,115	0,115
7	0,082	0,082
9	0,064	0,064

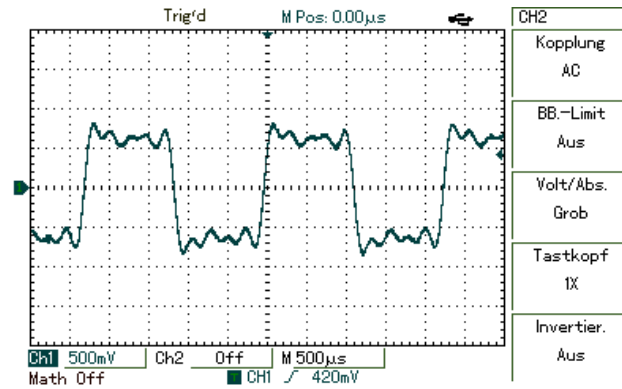


Abbildung 7: Darstellung der synthetisierten Rechtecksspannung.

Die Messwerte für die synthetisierte Sägezahnspannung sind in der Tabelle 3 dargestellt. Die Abbildung ist in 8 dargestellt.

Tabelle 3: Messwerte der Sägezahnspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte	theoretische Werte
	V	V
1	0,570	0,570
2	0,288	0,285
3	0,192	0,190
4	0,144	0,143
5	0,115	0,114
6	0,096	0,095
7	0,082	0,081
8	0,072	0,071
9	0,064	0,063
10	0,057	0,057

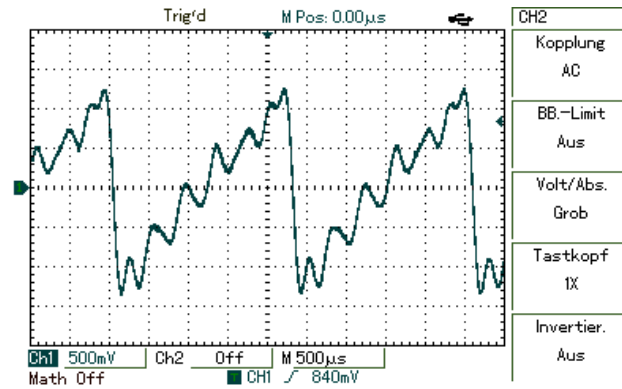


Abbildung 8: Darstellung der synthetisierten Sägezahnspannung.

Die Messwerte für die synthetisierte Dreiecksspannung sind in der Tabelle 4 dargestellt. Die Abbildung ist in 9 dargestellt.

Tabelle 4: Messwerte der Dreiecksspannung.

Oberwellenzahl	eingestellte Werte	theoretische Werte
	V	V
1	0,5771	0,5771
3	0,0643	0,0641
5	0,0232	0,0231
7	0,0116	0,0118
9	0,0070	0,0077

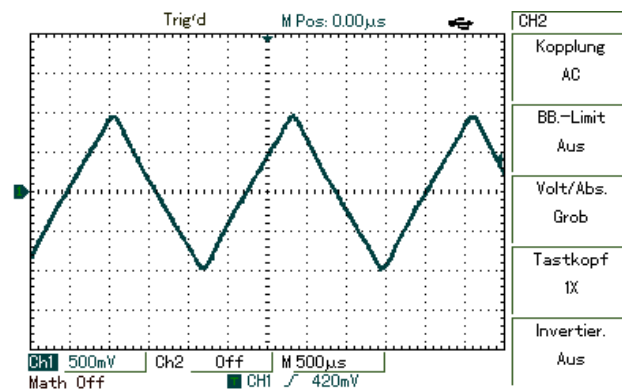


Abbildung 9: Darstellung der synthetisierten Dreiecksspannung.

5 Diskussion

Tabelle 5: Übersicht über Ergebnisse der Fourier-Analyse.

Spannung	Steigung Messkurve m	Steigung Theoriekurve a	relative Abweichung
Rechteck	$-1,044 \pm 0,016$	-1	4,4 %
Sägezahn	$-1,108 \pm 0,044$	-1	10,8 %
Dreieck	$-2,042 \pm 0,019$	-2	2,1 %

Wie aus Tabelle 5 hervorgeht, sind bei der Fourier-Analyse insgesamt recht geringe Abweichungen entstanden. Diese können dadurch zustande gekommen sein, dass die Frequenz, welche am Funktionengenerator eingestellt wurde, für ein Ablesen des Frequenzspektrums suboptimal war. Außerdem können weitere Ungenauigkeiten beim Ablesen des Bildschirms des Oszilloskops entstanden sein. Die Ergebnisse sprechen allerdings letztendlich für eine hohe Qualität der Messungen.

Auch bei der Fourier-Synthese sind Ungenauigkeiten aufgetreten. Zunächst einmal ist hier zu nennen, dass nur die ersten zehn (bzw. für Rechteck- und Dreiecksspannung die ersten fünf) Oberwellen verwendet wurden. Außerdem wurde vor dem Einstellen der konstanten Phasenbeziehung nicht auf eine einheitliche Stellung der 180°-Kippschalter geachtet. Beim Zusammenfügen der Summenspannung war daher teilweise nicht eindeutig, welchen Phasenversatz die einzelnen Oberwellen erhalten müssen.

Augenscheinlich sieht die Synthese der Dreiecksspannung (Abbildung 6) am besten aus. Dies ist sowohl durch nicht vorhandene Unstetigkeitsstellen als auch durch ein Abfallen der Fourier-Koeffizienten mit dem Faktor $\frac{1}{n^2}$ zu erklären.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V351 - Fourier-Analyse und Synthese*. 30. Nov. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOME PAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.