Ασκηση 1/13

Λυση: $A : n-1$, $B : n-3$

→ A	A
→ B A	A
→ B B A	A
B B B	B

Η πιθανοτητα να κερδισει ο A:

$\frac{7}{8} \left(= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$

→ Μπορουμε να λυσουμε το προβλημα χρησιμοποιωντας ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ.

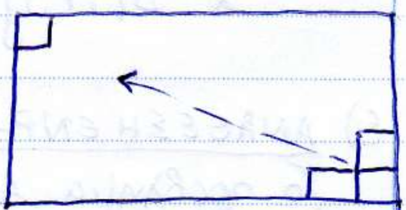
→ Οριζουμε το υποπροβλημα $A(i,j)$, για $1 \le i,j \le n$, που εκφράζει την πιθανότητα η Α να κερδίσει πρώτη n παιχνίδια δεδομένου ότι στα $i+j$ πρώτα παιχνίδια έχει κερδίσει i. Είναι δηλαδή:

$$A(i,j) = \frac{1}{2}\left(A(i,j+1) + A(i+1,j)\right) \quad ①$$

με $A(n,j) = 1$, για $j \neq n$ και $A(i,n) = 0, \forall i$.

→ Τα υποπροβλήματα λύνονται με βάση την ① με φθίνουσα σειρά του $i+j$.

<u>Ορθότητα</u>: Η ① είναι ορθή, αφού μπορούμε να υπολογίσουμε το $A(i,j)$ δεδομένου του αποτελέσματος του παιχνιδιού $i+j+1$ (καθένα από τα 2 πιθανά αποτελέσματα συμβαίνει με πιθανότητα 1/2).



- Αν κερδίσει ο Α (το $(i+j+1)$ παιχνίδι), τότε κερδίζει συνολικά το παιχνίδι με πιθανότητα $A(i+1,j)$.
- Αν κερδίσει ο Β (το $(i+j+1)$ παιχνίδι), τότε ο Α κερδίζει το παιχνίδι με πιθανότητα $A(i,j+1)$.

<u>Πολυπλοκότητα</u>: Αν θέλουμε να λύσουμε όλα τα υποπροβλήματα, θα πρέπει να λύσουμε $O(n^2)$ προβλήματα, καθένα σε $O(1)$ χρόνο, άρα $O(n^2)$ συνολικά.
Αν έχουν παίξει $i+j$ παιχνίδια, μπορούμε να σταματήσουμε τον υπολογισμό αφού λύσουμε $O((n-(i+j))^2)$ υποπροβλήματα.

Άσκηση 2/13

Γνωρίζουμε ότι για $c \neq 1$:

$$g(n) = 1 + c^1 + c^2 + \dots + c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c} = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}.$$

Λύση

α) Για $c<1$ έχουμε: $1-c < 1-c^{n+1} < 1$, οπότε

$$1 < g(n) < \frac{1}{1-c}$$

Άρα $g(n) = \Theta(1)$, δηλαδή $c_1 f(n) < g(n) < c_2 f(n)$
για $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{1-c}$
και $f(n) = 1$.

β) Για $c=1$ έχουμε: $g(n) = 1+1+\dots+1 = n+1$,
άρα $g(n) = \Theta(n)$.

γ) Για $c>1$ έχουμε: $c^n < c^{n+1}-1 < c^{n+1}$ άρα

$$\frac{1}{c-1} c^n < g(n) < \frac{1}{c-1} c^{n+1} \quad ή$$

$$\underbrace{\frac{1}{c-1}}_{c_1} \underbrace{c^n}_{f(n)} < g(n) < \underbrace{\frac{c}{c-1}}_{c_2} \underbrace{c^n}_{f(n)}$$

Άρα $g(n) = \Theta(c^n)$.

Άσκηση 3/13

α) $T(n) = 3T(n/2) + cn =$

$= 3 \cdot (3T(n/4) + cn/2) + cn =$

$= 3^2 \cdot T(n/2^2) + c(n/2) \cdot 3 + cn =$

$\rightarrow = 3^2 \cdot T(n/2^2) + cn\left(1 + \frac{3}{2}\right) =$

$= 3^2\left(3T(n/2^3) + c(n/2^2)\right) + cn\left(1+\frac{3}{2}\right) =$

$\rightarrow = 3^3 T(n/2^3) + cn\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2}\right) = \dots =$

$= 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + cn \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i =$

$$= 3^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2cn\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right).$$

Παίρνουμε λύση όταν $n=2^k$, δηλαδή $k=\log_2 n$ τότε:

$$T\left(\frac{n}{2^k}\right) = T(1) = d = O(1)$$

$$\boxed{a^{\log b} = b^{\log a}}$$

$$T(n) = 3^{\log n} d + 2cn\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1\right) =$$

$$= d\cdot n^{\log 3} + 2cn\cdot\left(\frac{n^{\log 3}}{n} - 1\right) =$$

$$= \Theta(n^{\log 3}).$$

⊛ Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και εφαρμόζοντας Master Theorem

β) $T(n) = T(n-1) + \overset{\to c}{O(1)} =$

$= T(n-2) + \underbrace{c+c}_{2c} = \dots =$

$= T(n-k) + k\cdot c$

Για $k=n$ έχουμε $T(n) = T(0) + n\cdot c = \Theta(n)$.

Άσκηση 4/13

Λύση: Το πλήθος των γραμμών που θα τυπωθούν είναι:

$$L(n) = 2L\left(\frac{n}{2}\right) + 1.$$

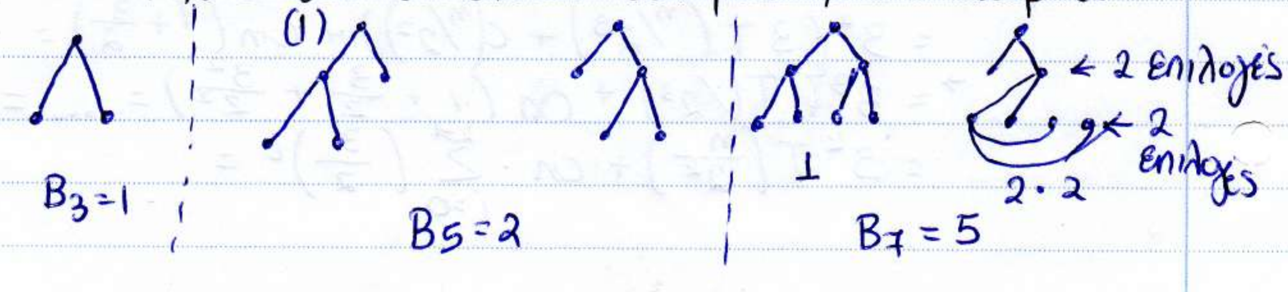
Λύνουμε με Master Theorem και βρίσκουμε λύση $L(n) = \Theta(n)$.

Αν ήταν $L(n) = L\left(\frac{n}{2}\right) + 1$, θα παίρναμε $L(n) = \Theta(\log n)$.

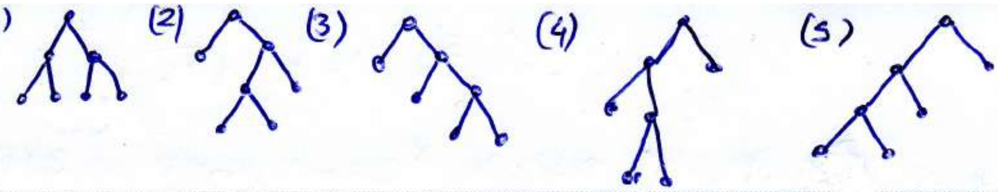
Άσκηση 5/13

B_n: το πλήθος των δυαδικών δέντρων με n κόμβους.

a)



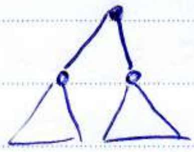
$B_7 = 5$:



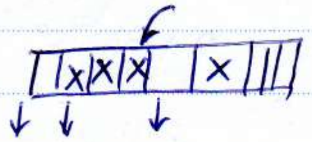
Κάθε πλήρες δυαδικό δέντρο πρέπει να έχει περιττό πλήθος κόμβων, εφόσον έχει άρτιο πλήθος κόμβων που είναι παιδιά άλλου κόμβου ΣΥΝ 1 κόμβο που είναι η ρίζα.
Άρα $B_{2k} = 0$, για κάθε k.

B_4 ×

β) $B_n = f(n)$?



Είναι $B_{n+2} = \sum_{n=1}^{n+1} B_i \cdot B_{n+1-i}$



Ταξινόμηση: $\Theta(n\log n)$
Διάβασμα: $\Theta(n)$
• Συνολικά: $\Theta(n\log n)$.