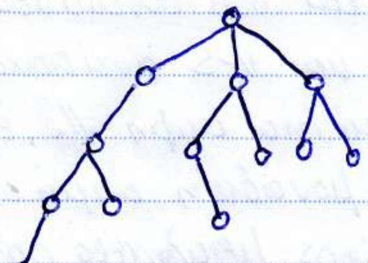
Άσκηση 1/11

Η διάμετρος ενός δέντρου $T=(V,E)$ δίνεται από τη σχέση $\max_{u,v \in V}\{\delta(u,v)\}$, δηλαδή η διάμετρος είναι το μέγιστο μήκος συντομότερου μονοπατιού στο δέντρο. Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού της διαμέτρου ενός δέντρου και αναλύστε τον χρόνο εκτέλεσής του.

Λύση

$T=(V,E)$, διάμετρος: $\max_{u,v \in V}\{\delta(u,v)\}$



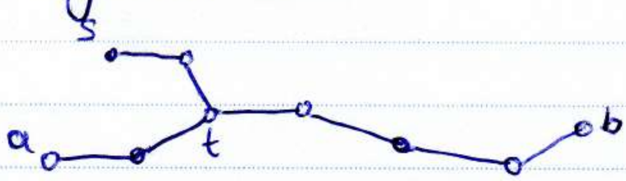
Μπορούμε να βρούμε τη διάμετρο με τη βοήθεια 2 BFS:

Αλγόριθμος: Διάμετρος (T)

- Διάλεξε τυχαίο κόμβο s.
- BFS(s). Έστω x ο τελευταίος κόμβος που επισκέφτηκες.
- BFS(x). Έστω y ο τελευταίος κόμβος που επισκέφτηκες.
- Return το μήκος του μονοπατιού μεταξύ x και y.

Πολυπλοκότητα: $O(|V|+|E|)$.

Δείχνουμε ότι ο αλγόριθμος είναι ΟΡΘΟΣ:
Έστω ότι υπάρχουν 2 κόμβοι a, b όπου $d(a,b)$ είναι η διάμετρος του δέντρου. Υποθέτουμε ότι ο πρώτος κόμβος του μονοπατιού από τον a στον b που επισκέφτεται η αναζήτηση είναι ο t.



Αν τα μονοπάτια P_1 (από τον s στον x) και P_2 (από τον a στον b) δεν έχουν κοινές ακμές, τότε το μονοπάτι

από τον t στον x περιλαμβάνει τον s. Άρα
$d(t,x) \geq d(s,x)$, $d(t,x) \geq d(s,a)$, $d(t,x) \geq d(t,a)$,
$d(b,x) \geq d(b,a)$.
Όμως ισχύει και $d(a,b) \geq d(x,b)$ οπότε ισχύει:
$d(a,b) = d(x,b)$.

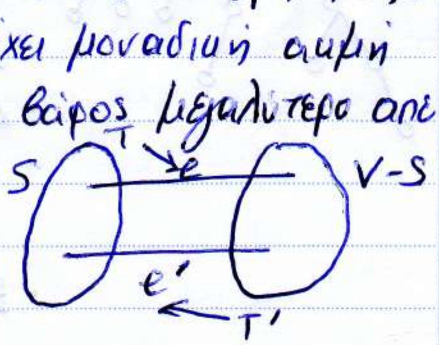
Άσκηση 2/11

Δείξτε ότι αν για κάθε πιθανή τομή ενός γράφου G υπάρχει μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους, τότε ο G έχει μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης.

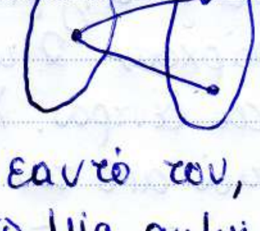
Λύση

Ευθύ: Έστω 2 ελάχιστα δέντρα επικάλυψης T και T' και έστω ακμή $e=(u,v)$ μία ακμή του T που ΔΕΝ ανήκει στο T'.

Αφαιρώντας την e από το T, δημιουργούνται δύο συνεκτικές συνιστώσες με σύνολα κορυφών έστω S και V-S αντίστοιχα. Τα S και V-S στο T' συνδέονται με κάποια ακμή $\neq e$, έστω e'. Δεδομένου ότι η τομή (S, V-S) περιέχει μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους. Αν αυτή η ακμή έχει βάρος μεγαλύτερο από την e, δηλαδή $W_{e'} > W_e$, τότε το T' δεν είναι ελάχιστο δέντρο επικάλυψης. Αντίστοιχα, αν $W_e > W_{e'}$, τότε το T δεν είναι ελάχιστο δέντρο επικάλυψης.



Αντίστροφο: Αρκεί να δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα γράφου G με μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης, στο οποίο υπάρχει τομή που δεν έχει μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους. Στο παράδειγμα αυτό ο γράφος είναι δέντρο και άρα έχει μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης τον εαυτό του, αλλά στην τομή του σχήματος δεν έχω μόνο μία ακμή ελάχιστου βάρους.



Ασκηση 3/11

Δείξτε ότι αν τα βάρη σε ένα γράφο είναι διαφορετικά ανά δύο, τότε το δέντρο επικάλυψης ελάχιστου κόστους του γράφου είναι μοναδικό.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι αν τα βάρη σε ένα γράφο είναι διαφορετικά ανά 2, τότε το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης του γράφου είναι μοναδικό. Θα δείξουμε την εξής ισοδύναμη πρόταση. Ένας γράφος έχει μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης, αν για κάθε διαμέριση των κορυφών του υπάρχει μία και μοναδική ακμή η οποία "διασχίζει" τη διαμέριση (δηλαδή έχει τα 2 άκρα της σε διαφορετικά μέρη της διαμέρισης) και έχει το ελάχιστο βάρος.

Θεωρούμε ότι οι κόμβοι που πρέπει να επισκεφτούμε μας έρχονται ταξινομημένοι σύμφωνα με το ακόλουθο κριτήριο:

Ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά ως προς το ελάχιστο βάρος ακμής που προσπίπτει σε αυτούς. Σε περιπτώσεις ισοπαλίας, το κριτήριο εφαρμόζεται αναδρομικά στην επόμενη ακμή ελάχιστου βάρους κοκ.

Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή.

- Αν ο γράφος έχει 1 ή 2 κόμβους, τότε έχει μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης (προφανές).
- Έστω ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για γράφους με $n=k$ κόμβους.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για γράφους με $n=k+1$ κόμβους.

Για $n=k+1$ κόμβους ισχύουν τα ακόλουθα:
Τους πρώτους k κόμβους που θα συναντήσουμε, μπορούμε να τους ενώσουμε με ένα μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης (από επαγωγική υπόθεση).
Μένει να δείξουμε ότι ο κόμβος $k+1$ εισάγεται στο ελάχιστο δέντρο επικάλυψης χρησιμοποιώντας ΜΙΑ ΜΟΝΟ ακμή.
Θεωρούμε τη διαμέριση των κόμβων του γράφου σε 2 σύνολα:
- Το πρώτο περιέχει τους k κόμβους που σχηματίζουν το τρέχον ελάχιστο δέντρο επικάλυψης.
- Το δεύτερο τον κόμβο $k+1$ (ο οποίος δεν είναι ακόμα μέσα στο ελάχιστο δέντρο επικάλυψης).

Όλες οι ακμές που προσπίπτουν στον $k+1$ τέμνουν τη διαμέριση και έχουν βάρη μεγαλύτερα από κάθε άλλη ακμή που υπάρχει στο τρέχον ελάχιστο δέντρο επικάλυψης (με τους k κόμβους), διαφορετικά τον κόμβο αυτό θα έπρεπε να τον έχουμε συναντήσει νωρίτερα.
Επομένως για να μην υπάρχει μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2 ελάχιστα δέντρα επικάλυψης, T_{k+1} και T'_{k+1} που να συνδέουν τον κόμβο $k+1$ με το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης των k πρώτων κόμβων.
Αν ισχύει το τελευταίο τότε τα 2 ελάχιστα δέντρα επικάλυψης θα πρέπει να έχουν το ίδιο συνολικό βάρος/κόστος, δηλαδή $W(T_{k+1}) = W(T'_{k+1})$, (όπου το $W(T)$ συμβολίζει το κόστος του δέντρου T), δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $W(T_k) + W(x, k+1) = W(T_k) + W(y, k+1)$, (όπου το $W(a, b)$ συμβολίζει το βάρος της ακμής (a,b)), οπότε θα πρέπει να υπάρχουν 2 διαφορετικές ακμές οι οποίες να προσπίπτουν στον κόμβο $k+1$ (έστω x και y τα άλλα άκρα τους, αντίστοιχα) για τις

οποίες πρέπει να ισχύει ότι $W(x,k+1) = W(y,k+1)$, δηλαδή να έχουν το ίδιο βάρος. ΑΤΟΠΟ (από υπόθεση).

Επομένως υπάρχει ένα και μοναδικό ελάχιστο δέντρο επικάλυψης.

Άσκηση 4/11 Λύση: Slides διάλεξης 22 → 3-4

Άσκηση 5/11 Λύση: Slides διάλεξης 23 → 12-13.

Άσκηση 6/11 Λύση: Slides διάλεξης 21 → 13-14.

Άσκηση 7/11 Λύση: Slides διάλεξης 21 → 16-17.