Άσκηση 1/12Β

n, k $\quad p_i \in [0,1]$: πιθανότητα να ρίξουμε το νόμισμα i και να έρθει κεφαλή (κορώνα), $i = 1, \dots, n$ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ.

Πιθανότητα να έρθει ακριβώς $k < n$:

παράδειγμα: $n = 3 \quad k = 2$ (2 φορές κορώνα)

$$P_r[\text{2 φορές κορώνα με 3 νομίσματα}] = p_3 \cdot P_r\left[\begin{smallmatrix}\text{1 φορά κορώνα}\\ \text{με 2 νομίσματα}\end{smallmatrix}\right] + (1-p_3) \cdot P_r\left[\begin{smallmatrix}\text{2 φορές κορώνα}\\ \text{με 2 νομίσματα}\end{smallmatrix}\right]$$

Λύση:

Έστω $x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i\text{-οστό κέρμα είναι κορώνα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad i = 1 \dots n$

$$p_i = P_r[x_i = 1] \;\Big|\; P_r\left[\sum_{i=1}^{n} x_i = k\right] = P_r[x_n = 1] \cdot P_r\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i = k-1\right] + (1 - P_r[x_n = 1]) \cdot P_r\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i = k\right]$$

← ξόδεψα το n-οστό νόμισμα

• Υποπρόβλημα:
$D(i,j)$ = πιθανότητα για j επιτυχίες με κέρματα $1, \dots, i$

• Λύση: $\boxed{D(n,k)}$

• Αναδρομική εξίσωση:

$$D(i,j) = \begin{cases} p_i \cdot D(i-1, j-1) + (1-p_i) \cdot D(i-1, j), & j \geq 1 \\ (1-p_i) \cdot D(i-1, 0), & j = 0 \end{cases}$$

$$D(0,j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \text{ 0 επιτυχίες, τα κατάφερες} \\ 0, & \text{else θες πάνω από 0 επιτυχίες.} \end{cases}$$

> Πολυπλοκότητα: $O(n \cdot k)$ $\quad n \times k$ πίνακας 2 διαστάσεων.

Άσκηση 2/12Β

• Partition (Διαμέριση)

Είσοδος: $S=\{a_1,\dots,a_n\}$ ακέραιοι

> Υπάρχει διαμέριση του S σε 2 υποσύνολα: X & $S\setminus X$ τέτοια ώστε $\sum_{i\in X} a_i = \sum_{i\in S\setminus X} a_i$;

πχ $S=\{1,2,3,6,2,2,4\}$ $X=\{1,3,6\}$ και $S\setminus X=\{2,2,2,4\}$

• Subset Sum

Είσοδος: $S'=\{a_1,\dots,a_n\}$ ακέραιοι και ακέραιος k.

> Υπάρχει $U\subseteq S'$ τέτοιο ώστε $\sum_{i\in U} a_i = k$;

πχ $S'=\{1,2,6\}$ $k=7$, Υπάρχει $(\{1,6\})$.

a) Αναγωγή Partition στο Subset Sum

β) Αναγωγή SubsetSum στο Partition.

Λύση

Και τα 2 προβλήματα είναι NP-complete.

a) ΑΝΑΓΩΓΗ_Partition_σε_SS(S) ← είσοδος σύνολο $\mathbb{Z}$

$S' := S$

$k := \left(\sum_{i\in S} a_i\right)/2$

• Αν υπάρχει Partition: $\exists X\subseteq S: \sum_{i\in X} a_i = \sum_{i\in S\setminus X} a_i \Rightarrow$

$\sum_{i\in X} a_i = \left(\sum_{i\in S} a_i\right)/2$, αφού $2\cdot\sum_{i\in X} a_i = \sum_{i\in X} a_i + \sum_{i\in S\setminus X} a_i = \sum_{i\in S} a_i$

ΥΠΑΡΧΕΙ SUBSET SUM

• Αν υπάρχει SUBSET SM: $\exists\, U\subseteq S'=S : \sum_{i\in U} a_i = k =$

$= \left(\sum_{i\in S} a_i\right)/2$

ΥΠΑΡΧΕΙ PAPTITON.

β) ΑΝΑΓΩΓΗ - SubsetSum - Partition(S', k):

$S = S' \cup \{\sum_{i \in S'} a_i - 2k\}$ (όλα μας τα στοιχεία και ένας αριθμός επιπλέον).

• Αν υπάρχει Subset Sum: $\exists\, U \subseteq S' : \sum_{i \in U} a_i = k \Leftrightarrow$

$$\sum_{i \in S'} a_i - 2k = \sum_{i \in U} a_i + \sum_{i \in S' \setminus U} a_i - 2k =$$

$$= \sum_{i \in U} a_i + \sum_{i \in S' \setminus U} a_i - k - k \xlongequal{k = \sum_{i \in U} a_i}$$

$$= \sum_{i \in S' \setminus U} a_i - k \Rightarrow \sum_{i \in S' \setminus U} a_i = \sum_{i \in U} a_i$$

<u>ΥΠΑΡΧΕΙ PARTITION</u>.

• Αν υπάρχει Partition: $\exists\, X \subseteq S : \sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \in S \setminus X} a_i$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το

$(\sum_{i \in S'} a_i - 2k) \in X$.

$$\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \in X \setminus \{\sum_{i \in S'} a_i - 2k\}} a_i + \sum_{i \in S'} a_i - 2k \xlongequal{\text{Partition}} \sum_{i \in S \setminus X} a_i \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i \in X} a_i = k$$

<u>ΥΠΑΡΧΕΙ SUBSET SUM</u>.

Άσκηση 3/12 B

Έστω $M=\{1,\dots,m\}$ σύνολο αντικειμένων

$N=\{1,\dots,n\}$ σύνολο πλειοδοτών,

$\forall i\in N \quad S_i \subseteq M$

- $V_i>0$ αν πάρει το S_i
- αν δεν πάρει κάτι από το S_i, θα έχει αξία 0.

Λύση

ALLOCATION (Ανάθεση) ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Είσοδος: $N=\{1,\dots,n\}$, $M=\{1,\dots,m\}$ $k(V_i, S_i)$ (αξία, υποσύνολο)

Ερώτηση: Υπάρχει $W\subseteq N$: $\sum_{i\in W} V_i \geq k$

και $\forall i,j\in N$ $S_i \cap S_j=\emptyset$,

(δεν δίνουμε τα ίδια αντικείμενα σε 2 άτομα).

INDEPENTED-SET (Ανεξάρτητο Σύνολο) NP-COMPETE

Είσοδος: $G(V,E)$, K' ακέραιος

Ερώτημα: Υπάρχει $V'\subseteq V$: να μην υπάρχει ακμή ανάμεσα σε μέλη του και $|V'|\geq K'$

α) Αναγωγή "Ανεξάρτητο Σύνολο" σε "Ανάθεση" (I-SET ≤ Allocation)

Αλγόριθμος:

ΑΝΑΓΩΓΗ $(G(V,E), k')$:

$N=V$ (κόμβοι) σύνολο πλειοδοτών

$M=E$ (ακμές) σύνολο αντικειμένων.

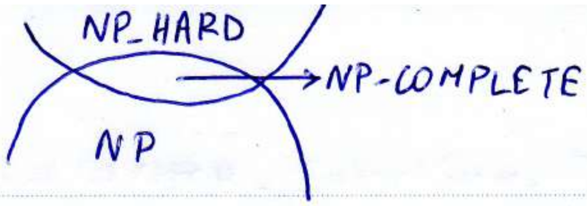
$V_i=1$ $\forall i\in V$ βάρος για τους παίκτες (I-Set με βάρη όλα ίσα με 1)

$S_i=\{e\in E: i\in e\}$ $\forall i\in V$

$K=K'$

β) Είναι η ΑΝΑΘΕΣΗ NP-hard, γιατί;

Ναι, γιατί κάναμε αναγωγή πολυωνυμική από γνωστό NP-COMPLETE πρόβλημα (το Indepented-Set).



Στην NP-HARD όλα τα προβλήματα που είναι τόσο δύσκολα όσο αυτά της NP.
Στην NP είναι ένα πρόβλημα εάν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την απάντησή του.

γ) <u>ΑΝΑΘΕΣΗ (Allocation) $\in$ NP;</u>

SOS Ναι, γιατί μπορούμε να επιβεβαιώσουμε μία θετική απάντηση πολυωνυμικά.

Θα ελέγξουμε αν για το $W \subseteq N$:

1. $\sum_{i \in W} v_i \geq k$ $O(n)$

2. $S_i \cap S_j = \phi \quad \forall i,j \in N$ $O(n^2)$.

δ) <u>ΑΝΑΘΕΣΗ $\in$ NP-COMPLETE, γιατί;</u>

Το πρόβλημα Allocation είναι NP_complete γιατί:

1) Είναι NP_hard <u>και</u>

2) είναι NP.