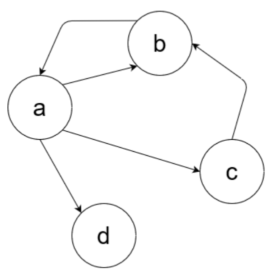
Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 9 αλγορίθμων

Εαρινό 2020

Άσκηση 1

Θεωρούμε λίστα γειτνίασης υλοποιημένη με γραμμικούς πίνακες. Παράδειγμα: (Σε κατευθυνόμενους γράφους αποθηκεύω τις εξερχόμενες ακμές)



HEAD				
a	b	c	d	τέλος SUCCESSOR
1	4	5	0	6

SUCCESSOR					
b	c	d	a	b	0

α΄ Οι εσωτερικοί βαθμοί των κόμβων του παραδείγματος είναι:

$$a \to 1, b \to 2, c \to 1, d \to 1$$

Για να υπολογίσω τους εσωτερικούς βαθμούς των κόμβων, τους αρχικοποιώ όλους σε $\emptyset$ ($\Theta(|V|)$). Διατρέχω μία φορά τον πίνακα SUCCESSOR, ο οποίος περιέχει τους κόμβους προς τους οποίους υπάρχει εισερχόμενη γραμμή ($\Theta(|E|)$). Άρα συνολικά απαιτείται χρόνος ($\Theta(|V| + |E|)$).

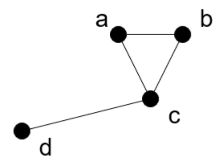
β΄ Οι εξωτερικοί βαθμοί των κόμβων του παραδείγματος είναι:

$$a \to 3, b \to 1, c \to 1, d \to 0$$

Για να υπολογίσω τους εξωτερικούς βαθμούς των κόμβων αρκεί να διαβάσω μία φορά τον HEAD. Έχουμε για έναν κόμβο i:
. Εξωτερικός βαθμός $i = HEAD[i+1] - HEAD[i]$
Αν $HEAD[i+1] = 0$, τότε χρησιμοποιώ το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο που βρίσκω δεξιά του $HEAD[i+1]$, οπότε απαιτείται χρόνος ($\Theta(|V|)$).

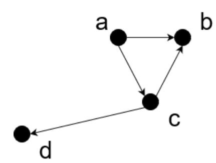
Άσκηση 2

α΄ Σε έναν μη κατευθυνόμενο γράφο με m ακμές το άθροισμα όλων των βαθμών των κόμβων είναι $2m$, αφού κάθε ακμή συνεισφέρει στο άθροισμα 1 βαθμό για κάθε έναν από τους κόμβους στους οποίους προσπίπτει. Άρα όλες οι ακμές συνεισφέρουν συνολικά $2m$.



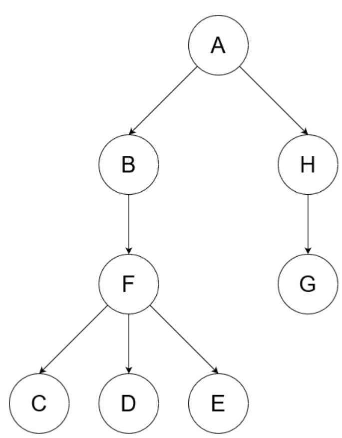
$$m = 4, 2 + 2 + 3 + 1 = 8 = 2m$$

β΄ Το άθροισμα των εξωτερικών βαθμών όλων των κόμβων ενός κατευθυνόμενου γράφου με m ακμές είναι m, αφού κάθε κατευθυνόμενη ακμή συνεισφέρει στο άθροισμα κατά 1 μόνο βαθμό, άρα όλς οι ακμές συνολικά συνεισφέρουν m.

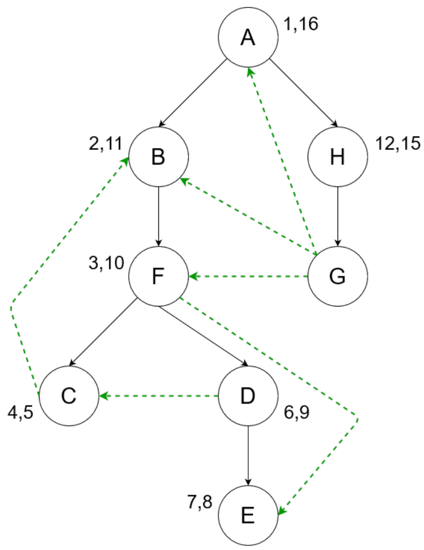


$$m = 4, 2 + 0 + 2 + 0 = 4 = m$$

Άσκηση 3



α΄

β′ 

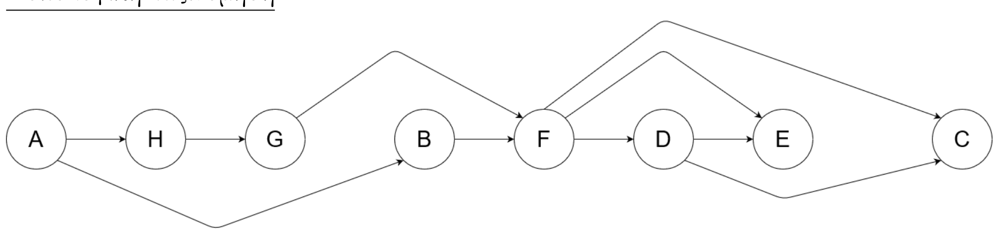
γ′ Back - ακμές: $(G, A), (C, B)$

δ′ Αν διαγράψουμε τις back - ακμές προκύπτει άκυκλος γράφος.

Απόδειξη

Έστω ότι διαγράφοντας τις back - ακμές, προκύπτει γράφος που περιέχει κύκλο. Τότε θα υπάρχουν κόμβοι $x, y \in V$ με $x \neq y$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y και ακμή (y, x) από τον y στον x. Έστω ότι ανακαλύπτω πρώτα τον x, τότε ο y θα είναι απόγονος του x στο δέντρο αναζήτησης. Άρα, η (y, x) θα είναι back - ακμή. ΑΤΟΠΟ, γιατί είχαμε διαγράψει τις back - ακμές. Αντίστροφα, αν ανακαλύψουμε πρώτα τον y ο x θα είναι απόγονός τους, άρα υπάρχει μονοπάτι από τον y στον x και έστω (z, x) η τελευταία του ακμή. Ο z είναι απόγονος του x (άρα και του y και είναι back - ακμή. ΑΤΟΠΟ

Τοπολογική ταξινόμηση

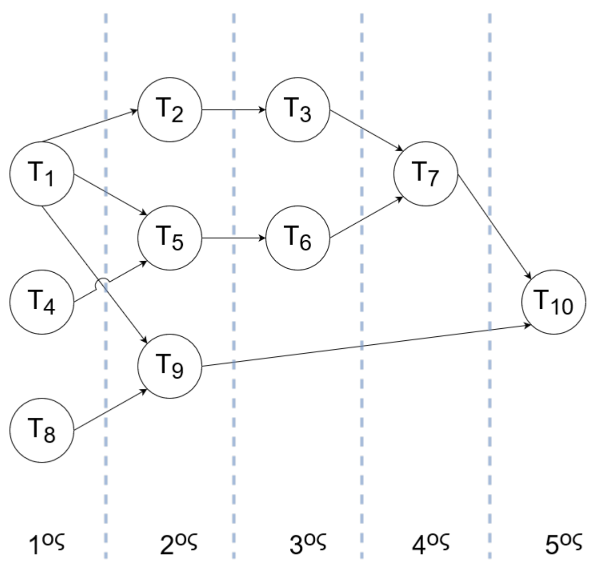


Άσκηση 4

Γνωρίζουμε ότι αν ο γράφος αναπαρίσταται με λίστες γειτνίασης η BFS χρειάζεται χρόνο $O(|V| + |E|)$. Αν ο γράφος αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης ο χρόνος εύρεσης όλων των γειτόνων μπορεί να αυξηθεί στο $O(|V|^2)$. Άρα ο χρόνος εκτέλεσης της BFS εδώ θα είναι:

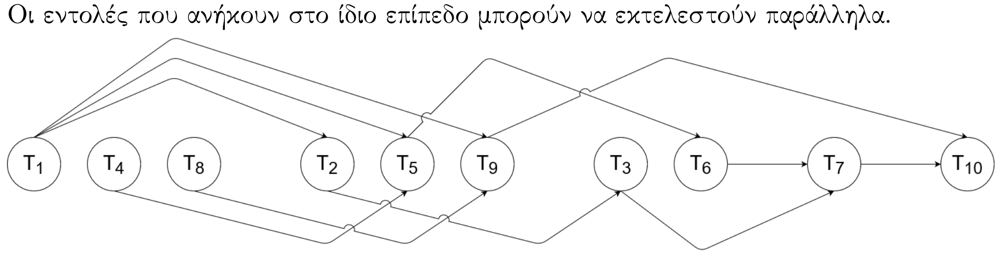
$$O(|V| + |V|^2) \to O(|V|^2).$$

Άσκηση 5



Το ελάχιστο πλήθος κύκλων που απαιτούνται είναι 5. Δε μπορούμε να κάνουμε Dijkstra (πχ το T_{10} πρέπει να περιμένει και τα υπόλοιπα επίπεδα). Τοπολογική ταξινόμηση, θα επιλέξουμε με τη σειρά τα εξής επίπεδα:
$\{T_1, T_4, T_8\}, \{T_2, T_5, T_9\}, \{T_3, T_6\}, \{T_7\}, \{T_{10}\}$.

Οι εντολές που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα.



Πρέπει όλες οι ακμές να κοιτάνε από αριστερά δεξία. Χωρίζω τα επίπεδα με κριτήριο ποιες εντολές μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα. Οι T_1, T_4, T_8 αν αλλάξουν θέσεις δε θα γίνει κάτι, αλλά αν μπει η T_2 κάπου ενδιάμεσα τους χαλάει η σειρά. Όμοια για τα υπόλοιπα επίπεδα.

Άσκηση 6

Δεδομένου του G κατασκευάζω τον G^R, δηλαδή ένα γράφο με τους ίδιους κόμβους με τον G και ακμές τις αντίστροφες των ακμών του Γ.
Εφαρμόζω αλγόριθμο Dijkstra στον G με αρχή τον v_0 και ξανά αλγόριθμο Dijkstra στον G^R με αρχή τον v_0. Για κάθε ζεύγος κόμβων (a, b) θέλω το ελάχιστο μονοπάτι από τον a στον b. Από τα αποτελέσματα του Dijkstra έχει βρει το ελάχιστο μονοπάτι από τον v_0 στον a στον G^R (οπότε ατνιστρέφοντας τις ακμές θα είναι το ελάχιστο μονοπάτι από τον a στον v_0) καθώς και το ελάχιστο μονοπάτι από τον v_0 στον b στο γράφο G. Άρα κόστος $(a \to v_0 +$ κόστος $(v_0 \to b) =$ κόστος ελάχιστου μονοπατιού από τον a στον b μέσω του v_0.
Πολυπλοκότητα: $O(|V|^2)$.

Άσκηση 7

Έστω γράφος $G' = (V, E')$ με $E' = E - \{e\}$. Εκτελώ τον αλγόριθμο Dijkstra στον G' με αρχή τον κόμβο u και βρίσκω το συντομότερο μονοπάτι από τον u στον v. Το κόστος του ελάχιστου κύκλου (που διέρχεται από την e) ισούται με το κόστος του συντομότερου μονοπατιού από τον u στον v συν το κόστος της ακμής e.