ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

• ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2°

(Ασυμπτωτικός συμβολισμός).

Άσκηση 1

Να δείξετε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του O-συμβολισμού ότι:
$1047n^2 + 52n = O(n^2)$.

Θα ήταν πιο σωστό να πούμε πως μία συνάρτηση ανήκει σε μία τάξη O πολυπλοκότητας, δηλαδή εδώ $1047n^2+52n \in O(n^2)$, αφού εν γένει λέμε πως το O αποτελεί μια "ομάδα-οικογένεια" των αλγορίθμων τέτοιας πολυπλοκότητας.

Λύση

1ος τρόπος (ορισμός)

$$1047n^2 + 52n \leq 1047n^2 + 52n^2 = 1099n^2 \text{ άρα } O(n^2).$$

2ος τρόπος (όρια)

Έστω $f(n) = 1047n^2 + 52n$ και $g(n) = n^2$ (θέλαμε να δείξουμε πολυπλοκότητα $O(g(n)) = O(n^2)$ για αυτό ορίζουμε $g(n) = n^2$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1047n^2 + 52n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1047n^2}{n^2} =$$

$$= 1047 > 0 \text{ άρα ισχύει } f(n) = O(g(n)) = O(n^2)$$

Άσκηση 2

Να δοθεί ο καλύτερος O-συμβολισμός για τις συναρτήσεις:

α) $2\log n - 4n + 3n\log n$

β) $2 + 4 + \dots + 2n$

γ) $2+4+8+\dots+2^n$

Λύση

1. $2\log n - 4n + 3n\log n \in O(n\log n)$ (επίσης $\in \Omega(n\log n)$ άρα $\in \Theta(n\log n)$)

2. $2+4+\dots+2n = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i =$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n^2+n \in O(n^2).$$

3. $2+4+8+\dots+2^n = 2^{n+1}-2 \in O(2^n).$

Άσκηση 3

Έστω $T_1(n) = O(f(n))$ και $T_2(n) = O(g(n))$ οι πολυπλοκότητες 2 τμημάτων P_1 και P_2 ενός προγράμματος P. Αν το P_2 εκτελείται αμέσως μετά το P_1, ποια είναι η πολυπλοκότητα του προγράμματος P;

Λύση

Επειδή εκτελείται μια ακολουθία βημάτων η πολυπλοκότητα του P είναι η μέγιστη από τις πολυπλοκότητες των P_1, P_2, δηλαδή:

$$T_n = O(\max\{T_1(n), T_2(n)\}) =$$
$$= \max\{O(f(n)), O(g(n))\}$$

ή αλλά ίση με το άθροισμα των 2 πολυπλοκοτήτων, δηλαδή:

$$T_n = O(f(n)) + O(g(n)).$$

Εφαρμογή: Αν $T_1(n) = O(n^2)$ και $T_2(n) = O(n\log n)$ και $T_3(n) = O(\log^2 n)$, τότε

$$T(n) = O(n^2)$$ $n^2 > n\log n > \log^2 n$

Άσκηση 4

Για f, g, h θετικές συναρτήσεις αιτιολογείστε εάν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος:

1. $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$

2. $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

3. $f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow g(n) = \Theta(h(n))$

4. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(g(n), f(n)))$

5. $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

Λύση

1. Αληθής, εξ' ορισμού:
Αφού $f(n) = \Omega(g(n))$ υπάρχουν $c, n_0 > 0$ τέτοια ώστε $f(n) \geq c \cdot g(n)$, για κάθε $n > n_0$.
Όμως $f(n) \geq c \cdot g(n) \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c} \cdot f(n)$. Θέτω $c' = \frac{1}{c}$ και η τελευταία σχέση γράφεται:
$g(n) \leq c' \cdot f(n)$, άρα υπάρχουν $c', n_0 > 0$ τέτοια ώστε $g(n) \leq c' \cdot f(n)$ για κάθε $n > n_0$ οπότε $g(n) = O(f(n))$.

2. Αληθής εξ' ορισμού:
Έχουμε: $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow$ για κάθε $c > 0$, $\exists\, n_0 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $f(n) > c \cdot g(n)$ για κάθε $n > n_0$.
Όμως $f(n) > c \cdot g(n) \Rightarrow f(n) \geq c \cdot g(n)$ άρα $\forall c > 0$, $\exists\, n_0 > 0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$ $\forall n_0 > 0$ οπότε $f(n) = \Omega(g(n))$.
Η σχέση είναι προφανές πως είναι αληθής αφού εφόσον ισχύει το αυστηρότερο κάτω φράγμα (ω) θα ισχύει πως είναι και πιο "χαλαρό" (Ω).

3. Ψευδής, αντιπαράδειγμα:

$f(n) = n^2$, $g(n) = n^3$, $h(n) = n$, έχουμε:

$f(n) = n^2 = O(n^3) = \Omega(n)$, αλλά $n^3 \neq \Theta(n)$.

4. Ψευδής. Αντιπαράδειγμα:

$f(n) = n^2$ $g(n) = 2^n$ (Θέλω να δείξω πως δεν ισχύει το minimum οπότε παίρνω μια "μικρή" και μια "μεγάλη" συνάρτηση).

Τότε: $f(n) + g(n) = n^2 + 2^n = \Theta(2^n)$,

άρα προφανώς δεν ισχύει / είναι $\Theta(n^2)$ ← μικρότερου.

5. Ψευδής. Αντιπαράδειγμα:

$f(n) = n$, $g(n) = n^2$, ισχύει $f(n) = O(n^2)$ &

$g(n) = \Omega(n)$, αλλά όχι $n = \Theta(n^2)$.

Άσκηση 5 / 2 (Ασυμπτωτικός συμβολισμός)

Αποδείξτε:

1. Αν $a > 1$ και $f(n) = O(\log_a(n))$, τότε $f(n) = O(\log n)$.
2. $\log(n!) = O(n \log n)$.
3. $3^n \neq O(2^n)$
4. Αν $f(n) = O(n)$, τότε η $2^{f(n)}$ δεν είναι $O(2^n)$

Λύση

1. Αφού ισχύει $f(n) = O(\log_a n)$ από τον ορισμό προκύπτει πως υπάρχουν c και n_0 τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $f(n) \leq c \cdot \log_a n$. Όμως $\log_a n = \frac{\log n}{\log a}$,

οπότε $f(n) \leq \frac{c}{\log a} \cdot \log n$ ή $f(n) \leq c' \cdot \log n$

με $c' = \frac{c}{\log a}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f(n) = O(\log n)$.

2. Έχουμε $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$

$\overset{\log \uparrow}{\Leftrightarrow} \log(n!) \leq \log(n^n) = n \log n$, άρα

όντως $\log(n!) = O(n \log n)$

3. Έχουμε $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, οπότε

$2^n = O(3^n)$ και $3^n = \Omega(2^n)$ και $2^n \neq \Theta(3^n)$,

άρα προφανώς $3^n \neq O(2^n)$

4. Αντιπαράδειγμα: Έστω $f(n) = 2n$. Τότε έχουμε $f(n) = O(n)$, αλλά $2^{f(n)} = 2^{2n} \neq O(2^n)$.

Άσκηση 5 / 3 (Διαίρει και Βασίλευε).

Δίνεται πίνακας n ακεραίων A με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει δείκτης i^* τέτοιος ώστε $1 \leq i^* \leq n$, τα $A[1], A[2], \ldots A[i^*]$ είναι σε αύξουσα διάταξη και τα $A[i^*], A[i^*+1], \ldots, A[n]$ είναι

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

· ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 5 ·

Ασκηση 6 / 2 (Ασυμπτωτικος Συμβολισμος)

Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντηση σας:

a. Ισχύει $2^{n+1} = O(2^n)$;

b. Ισχύει $2^{2n} = O(2^n)$;

Λύση

a. Ναι, ισχύει. Είναι $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot 2^n = O(2^n)$.

b. Όχι, δεν ισχύει.

Είναι $2^{2n} = (2^n)^2$, το οποίο για κάποια τιμή της σταθεράς c δεν είναι ασυμπτωτικά $\leq c \cdot 2^n$.

Εναλλακτικά:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \infty \text{, όχι } c \text{, άρα δεν ισχύει}$$

$$2^{2n} = O(2^n).$$

Ασκηση 7 / 2 (Ασυμπτωτικός Συμβολισμός)

Δείξτε ότι για πραγματικούς αριθμούς a, b με $b > 0$, ισχύει $(n+a)^b = \Theta(n^b)$.

Λύση

Από τον τύπο που δίνει το διώνυμο του Newton παίρνουμε

$$(n+a)^b = n^b + \binom{b}{1} n^{b-1} \cdot a^1 + \dots + \binom{b}{k} n^{b-k} \cdot a^k + \dots + a^b = \Theta(n^b).$$

Άσκηση 8 / 2 (Ασυμπτωτικός Συμβολισμός)

Λύση

Οι συναρτήσεις κατά αύξουσα σειρά και ομαδοποιημένες ανά κλάσεις είναι:

→ 10^{100}, 5^{800}

→ $\log\log n$, $\log\sqrt{\log n}$

→ $\log n$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

→ $5\sqrt{n}$, $(\sqrt{2})^{\log n}$

→ $\log n!$, $n\log n$, $\log n^n$

→ $8n^2$, $4\log n$, $\binom{n}{2}$

→ $n^{\log n}$, $2^{\log^2 n}$

→ 2^n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

→ $(n-1)!$

→ $n!$

Υπολογισμός του $\Theta(g(n))$ για επιλεγμένες $f(n)$:

- $\log\log n = \Theta(\log\sqrt{\log n})$, αφού

$$\log\sqrt{\log n} = \log(\log n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log\log n.$$

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$, αφού

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n) \text{ και}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Omega(\log n).$$

$$-H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \left(1/2 + 1/3\right) + \left(1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7\right) + \dots + 1/n \leq$$

$$1 + 2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + 8 \cdot 1/8 + \dots =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 =$$

$$= 1 + \log n, \text{ άρα } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n).$$

$$-H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \left(1/2 + 1/3\right) + \left(1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7\right) + \dots + 1/n \geq$$

$$1 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + 8 \cdot 1/16 + \dots =$$

$$= 1 + 1/2\,(1 + 1 + 1 + \dots + 1) =$$

$$= 1 + 1/2 \log n, \text{ άρα } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Omega(\log n)$$

• $\log n! = \Theta(n \log n)$, αφού ισχύει

$$\log n! = O(n \log n) \quad \text{και} \quad \log n! = \Omega(n \log n).$$

$$-n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Leftrightarrow \log n! \leq \log n^n = n \log n, \text{ άρα όντως } \log n! = O(n \log n)$$

$$-n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \dots \cdot n \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \log n! \geq \log\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$$

$$\text{άρα } \log n! = \Omega(n \log n)$$

• $2^n = \Theta\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)$, αφού από το διωνυμικό θεώρημα ισχυει:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

Για $x=y=1$ παίρνουμε $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ασκηση 9/2 (Ασυμπτωτικός Συμβολισμός)
Είναι ένας πίνακας σε αύξουσα διάταξη σωρός ελαχίστου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση
Ναι είναι. Έστω πίνακας $(a_1, a_2, \dots a_n)$ με $a_i \le a_{i+1}$ $\forall i,\ 1 \le i \le n$.
Εφαρμόζω επαγωγή στο μήκος του πίνακα.
Βάση: Για $n=1$, το στοιχείο a_1 είναι σωρός.

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω πως ισχύει για μήκος πίνακα $n=k-1$. Δηλαδή ο πίνακας $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$, είναι σωρός.

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k$.
Ο γονέας του στοιχείου a_k θα είναι το $a_{k/2}$. Ισχύει ότι $a_k \ge a_{k/2}$ (αφού ο πίνακας είναι ταξινομημένος σε αύξουσα σειρά. Επίσης, τα υπόλοιπα στοιχεία είναι σωρός (επαγωγική υπόθεση). Άρα ο πίνακας $(a_1, \dots, a_k)$ είναι σωρός.

Ασκηση 10/2 (Ασυμπτωτικός Συμβολισμός)
Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος να εμφανίζει τα k μεγαλύτερα στοιχεία, ενός μονοδιάστατου πίνακα, όπου k σταθερός

αριθμός. Τα στοιχεία στον πίνακα μπορούν να έχουν οποιαδήποτε διάταξη.

Λύση

- Κατασκευάζω ένα σωρό μεγίστου με τα στοιχεία του πίνακα.
- Καλώ τη συνάρτηση που δίνει το μέγιστο στοιχείο / κάνω εξαγωγές στοιχείων k φορές για να βγάλω τα k μεγαλύτερα.

→ Πολυπλοκότητα: Δημιουργίας σωρού: $O(n)$

Κάθε εξαγωγής: $O(\log n)$

Συνολική πολυπλοκότητα: $O(n) + O(k \cdot \log n) =$ (k εξαγωγές)

$= O(n + k\log n)$.