ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

• ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 1 •

(Ασκήσεις υποβάθρου)

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Λύση

1ο βήμα: Βρίσκουμε έναν αριθμό για τον οποίο ισχύει η ισότητα (βάση επαγωγής).

Βάση επαγωγής $n=1$

Έχουμε: $\underbrace{1\cdot 1! = 1}_{\alpha'\ \mu\acute{\epsilon}\lambda o\varsigma}$ και $\underbrace{(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1}_{\beta'\ \mu\acute{\epsilon}\lambda o\varsigma}$

άρα η σχέση ισχύει για $n=1$.

2ο βήμα: Επαγωγική υπόθεση

Έστω ότι η σχέση ισχύει για $n=k$, δηλαδή έχουμε:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + k\cdot k! = (k+1)! - 1 \quad ①$$

3ο βήμα: Θέλω να αποδείξω πως η σχέση ισχύει και για $n=k+1$. Έχουμε:

$$\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + k\cdot k!} + (k+1)\cdot(k+1)! \overset{①}{=}$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! =$$

$$= (k+1)!\cdot(k+1+1) - 1 =$$

$$= [(k+1)+1]! - 1$$, δηλαδή ισχύει η σχέση και για $k+1$ άρα αποδείχθηκε.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση χρησιμοποιώντας την αρχή της μαθηματικής επαγωγής:

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση

1) Βάση επαγωγής $n=1$, έχουμε:

$\underbrace{2^1 = 2}_{\alpha' \text{ μέλος}}$ και $\underbrace{2^{1+1} - 2 = 4 - 2 = 2}_{\beta' \text{ μέλος}}$, άρα η σχέση ισχύει για $n=1$.

2) Επαγωγική υπόθεση: Έστω πως ισχύει για $n=k$, δηλαδή έχουμε:

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2 \quad (1)$$

3) Θα δείξουμε πως ισχύει για $n=k+1$, έχουμε:

$$\underbrace{2^1 + 2^2 + \dots + 2^k} + 2^{k+1} \overset{(1)}{=}$$

$$= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} =$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 2 =$$

$$= 2^{(k+1)+1} - 2$$, άρα ισχύει.

Άσκηση 3

Να λυθεί η $\overbrace{T(n) = T(n-1) + 2}^{\text{αναδρομική εξίσωση}}$ για $n \geq 1$ και $\overbrace{T(1) = 1}^{\text{βάση της αναδρομής}}$.

Όταν λέμε λύση αναδρομικής εξίσωσης εννοούμε να βρούμε την $T(n)$ χωρίς να είναι πια αναδρομική, δηλαδή να είναι απλώς συνάρτηση του n και όχι κάποιου $T(n + \text{κάτι})$.

Λύση

$T(n) = T(n-1) + 2$
$T(n-1) = T(n-2) + 2$
$T(n-2) = T(n-3) + 2$
$T(n-3) = T(n-4) + 2$
$\vdots$
$T(3)$
$T(3) = T(2) + 2$
$+\ T(2) = T(1) + 2$
$T(n) = T(1) + 2\cdot(n-1)$

"Βρίσκουμε" τις τιμές της T για κάθε αριθμό-βήμα αναδρομής (n, $n-1$, $n-2$ ...) μέχρι να φτάσουμε σε σχέση η οποία περιέχει την βάση της αναδρομής (γνωστή τιμή της σχέσης για ένα n, εδώ $n=1 \rightarrow T(1)=1$)

Μετά αθροίζουμε κατά μέλη όλες τις σχέσεις (και απαλείφουμε τους όρους που μπορούμε).

Έμεινε:

παραπάνω προσθέσαμε το 2 (n-1) φορές, όσες και οι σχέσεις

Άρα $T(n) = 1 + 2n - 2 \Rightarrow \boxed{T(n) = 2n-1}$

Άσκηση 4 (παραλλαγή της 3)
Να λυθεί η $T(n) = 2\,T(n-1) + 2$ για $n \geq 1$ και $T(1)=1$.

Λύση

$T(n) = 2\,T(n-1) + 2$ ①
$T(n-1) = 2\,T(n-2) + 2$ ②
$T(n-2) = 2\,T(n-3) + 2$
$\vdots$
$T(3) = 2\,T(2) + 2$
$T(2) = 2\,T(1) + 2$
$\Downarrow$
$T(n) = 2\,T(n-1) + 2$
$2 \times T(n-1) = 2^2\,T(n-2) + 2^2$
$T(n-2) = 2\,T(n-3) + 2$ ③

Τα βήματα είναι ίδια με τα παραπάνω ωστόσο η απαλειφή, σε αυτήν την μορφή έστω, δε μπορεί να γίνει γιατί έχουμε πχ στην ① $2\,T(n-1)$ ενώ στην ② $T(n-1)$, για αυτό τον λόγο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την ① με 2 και στα 2 μέλη, ώστε τώρα βλέπουμε

$$\text{Πολλ/σμος με:}\quad T(n) = 2\,T(n-1) + 2$$
$$2^1 \rightarrow\quad 2\cdot T(n-1) = 2^2 T(n-2) + 2^2$$
$$2^2 \rightarrow\quad 2^2\cdot T(n-2) = 2^3 T(n-3) + 2^3$$
$$\vdots$$
$$2^{n-3} \rightarrow\quad 2^{n-3} T(3) = 2^{n-2} T(2) + 2^{n-2}$$
$$2^{n-2} \rightarrow\quad 2^{n-2} T(2) = 2^{n-1} T(1) + 2^{n-1}$$

πως έχαμε πάλι θέμα μεταξύ απαλοιφών $2^{ης}$ και $3^{ης}$ (η 2 πλέον έχει $2^2\,T(n-2)$ και η 3 απλά $T(n-2)$) οπότε απλά πολλαπλασιάζουμε πάλι αντίστοιχα. (εδώ με το $4 = 2^2$ κοκ.

Για τις τελευταίες σχέσεις παρατηρούμε πως το με τι θα πολλαπλασιάσουμε εξαρτάται από την ποσότητα που υπολογίζουμε. δηλαδή για $T(n-\underline{1})$ πολλαπλασιάσαμε με $2^1=2$, για $T(n-2)$ με $2^2=4$, άρα για $T(3) = T(n-\underline{(n-3)})$ θα πολλαπλασιάσουμε με 2^{n-3}.

Πλέον μπορούμε να προσθέσουμε και να απαλείψουμε όπως πριν, και θα μείνουμε με:

$$T(n) = 2^{n-1}\cdot T(1) + \overbrace{2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}}^{\text{από Άσκηση 2 αυτό } = 2^n - 2} =$$
$$= 2^{n-1}\cdot 1 + 2^n - 2 =$$
$$= 2^{n-1}(1+2) - 2$$

Άρα $\boxed{T(n) = 3\cdot 2^{n-1} - 2}$

<u>Άσκηση 5</u>

Να δείξετε ότι η λύση της $T(n) = \begin{cases} 2, & n=2 \\ 2\,T(\frac{n}{2}) + n, & n=2^k,\ k>1 \end{cases}$ είναι η $T(n) = n\log(n)$ με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής

<u>Λύση</u>

Για ευκολία θεωρούμε πως το n είναι δύναμη του 2, δηλαδή

$n = 2^k$, $k > 1$, και θα εφαρμόσουμε μαθηματική επαγωγή στο k (δηλαδή έμμεση επαγωγή στο n τυπικά).

Παίρνουμε βάση επαγωγής $k = 1$ $(n = 2)$ άρα έχουμε
$T(2^1) = 2^1 \cdot \log 2^1 = 2$, άρα ισχύει η σχέση.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω πως η πρόταση μας ισχύει για $k = m$ $(n = 2^m)$, δηλαδή ..

$$\overbrace{2T\left(\frac{2^m}{2}\right) + 2^m}^{\text{η σχέση που είναι γνωστή}} = \overbrace{2^m \cdot \log 2^m}^{\text{θέλουμε να αποδείξουμε πως είναι ίση αυτής.}} \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $k = m+1$, δηλαδή έχουμε:

$$2T\left(\frac{2^{m+1}}{2}\right) + 2^{m+1} =$$

$$= 2\,\underbrace{T(2^m)}_{\leftrightarrow} + 2^{m+1} =$$

εξ' ορισμού της σχέσης έχουμε $T(n) = T(2^m) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$.

$$= 2 \cdot \left(\underbrace{2T\left(\frac{2^m}{2}\right) + 2^m}_{1}\right) + 2^{m+1} \overset{(1)}{=}$$

$$= 2 \cdot (2^m \cdot \log 2^m) + 2^{m+1} =$$

$$= 2^{m+1} \cdot \log 2^m + 2^{m+1} =$$

$$= 2^{m+1} (\log 2^m + 1) =$$

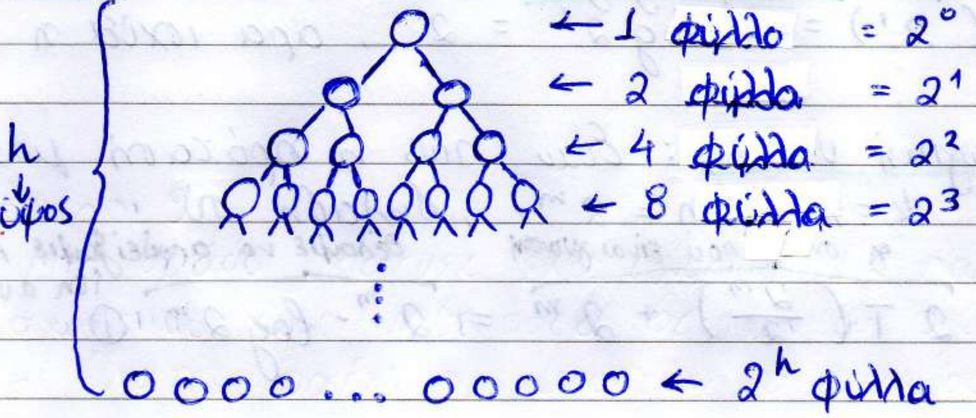
$$= 2^{m+1} (\log 2^m + \log 2) =$$

$$= 2^{m+1} \cdot \log 2^{m+1}$$, άρα ισχύει.

Άσκηση 6

Δείξτε ότι ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με n κόμβους έχει ύψος $O(\log n)$.

Λύση



Παρατηρούμε πως ο αριθμός των φύλλων ενός πλήρους δυαδικού δέντρου σχετίζεται με το ύψος του (ύψος h = η απόσταση της ρίζας από τα φύλλα του δέντρου), όταν έχουμε τη ρίζα μόνο το ύψος είναι $h=0$, και έχουμε μόνο 1 "φύλλο", όταν το ύψος είναι 1 έχουμε 2 φύλλα, κοκ, οπότε για ύψος h θα έχουμε 2^h φύλλα.

Οι κόμβοι μας προφανώς θα ισούνται με:

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h$$

(Από την άσκηση 2 έχουμε $2^0 + 2^1 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$)

Άρα $n = 2^{h+1} - 1$, λύνουμε ως προς h για να βρούμε τη πολυπλοκότητα του ύψους για n κόμβους.

$$\Leftrightarrow 2^{h+1} = n+1$$

$$\Leftrightarrow 2^h = \frac{n+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log 2^h = \log\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow h = \log\left(\frac{n+1}{2}\right)$$, άρα ονtως $h = O(\log n)$.

Άσκηση 7

Έχουμε έναν πίνακα A μεγέθους n, ψάχνουμε το 2ο μεγαλύτερο στοιχείο του πίνακα. Να περιγραφεί αλγόριθμος που να κάνει το παραπάνω και να βρεθεί η πολυπλοκότητά του.

Λύση

1) Θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τον πίνακα, αλγόριθμος τάξεως $O(n\log n)$ και να επιστρέψουμε το 2ο στοιχείο του φθίνοντα πίνακα, οπότε συνολικά η πολυπλοκότητα παραμένει και πάλι $O(n\log n)$.

2) Θα μπορούσαμε να διατρέξουμε τον πίνακα μία φορά επαναληπτικά, να βρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο και να το αφαιρέσουμε → επανάληψη για n στοιχεία άρα τάξη $O(n)$, και στη συνέχεια να επαναδιατρέξουμε τον πίνακα με τα n-1 πλέον στοιχεία και να βρούμε το μεγαλύτερο που θα αποτελεί το 2ο προφανώς του αρχικού → επανάληψη για n-1 στοιχεία άρα τάξη $O(n)$. Οπότε συνολικά και αυτός ο αλγόριθμος είναι βέλτιστος και τάξεως $O(n)$.

Άσκηση 8

Δίνεται ο παρακάτω αλγόριθμος, να βρεθεί η πολυπλοκότητά του:

for $i=1$ to n do
  for $j=1$ to $\frac{i+1}{2}$ do
    $x=x+1$

Λύση

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\frac{i+1}{2}} 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} =$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

$$= 2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n\right) =$$

$$= O(n^2).$$

Άσκηση 9

Μια ομάδα μπάσκετ έχει συνολικά 12 παίκτες και στον αγωνιστικό χώρο κάθε φορά βρίσκονται 5. Πόσες είναι οι δυνατές 5άδες που μπορούμε να φτιάξουμε;

Λύση

Ο ζητούμενος αριθμός είναι οι συνδυασμοί των 12 ανά 5, δηλαδή

$$\#5\text{άδων} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = \frac{12\cdot 11\cdot \overset{2}{\cancel{10}}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} =$$

$$= 12\cdot 11\cdot 6 = 792$$