Άσκηση 1/4 (Διαίρει και Βασίλευε - Απλασιοι).

Δίνεται ακολουθία σημείων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ σε μια ευθεία.

a. Δώστε επαναληπτικό αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n\log n)$ που επιστρέφει το ζευγάρι των πλησιέστερων σημείων.

β. Δώστε αλγόριθμο διαίρει-και-βασίλευε για το ίδιο πρόβλημα. Θεωρήστε ότι $n = 2^k$.

Λύση

a. Ταξινομώ τα $x_i$ σε $O(n\log n)$.
Διαβάζω μία φορά τον πίνακα και υπολογίζω τη διαφορά κάθε στοιχείου από το επόμενό του.
Κρατάω την ελάχιστη διαφορά που υπολόγισα και στο τέλος επιστρέφω τα σημεία που αντιστοιχούν σε αυτήν την απόσταση.

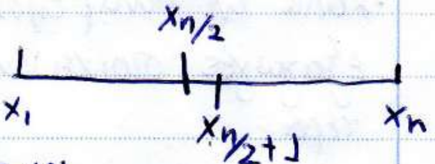
β. Ταξινομώ τα $x_i$ σε $O(n\log n)$.
Χωρίζω τον πίνακα στη μέση.
Λύνω το πρόβλημα αναδρομικά για τους δύο υποπίνακες με τις κλήσεις mindiFF$[x_1 \ldots x_{n/2}] \Rightarrow a$

$mindiff[x_{n/2+1} \ldots x_n] \Rightarrow b$ (όπου $a, b$ τα αποτελέσματα των κλήσεων που δείχνουν την ελάχιστη διαφορά σε κάθε υποπίνακα).

Η λύση είναι το ζεύγος που αντιστοιχεί στο ελάχιστο εκ των:

$$a,\ b,\ \underbrace{|x_{n/2} - x_{n/2+1}|}$$

δε ξεχνάμε πως τα όρια στους δύο υποπίνακες κάθε φορά αποτελούν επίσης ζεύγος διαδοχικών σημείων για τα οποία πρέπει να ελεγχθεί η διαφορά




Πολυπλοκότητα:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1) \Rightarrow T(n) = O(n).$$

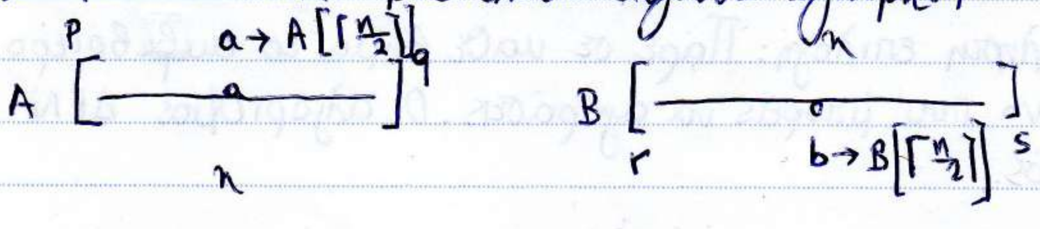
Άρα συνολική πολυπλοκότητα: $O(n\log n) + O(n) =$
$= O(n\log n)$

## Άσκηση 2/4 (Διαίρει και Βασίλευε).

Δίνονται δυο ταξινομημένοι πίνακες ακεραίων A, B με $n$ στοιχεία ο καθένας, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Να σχεδιάσετε αλγόριθμο διαίρει-και-βασίλευε που να βρίσκει το μεσαίο στοιχείο, δηλαδή τη διάμεσο (median) της ένωσης όλων των στοιχείων σε χρόνο $O(\log n)$.

### Λύση

Έστω πως οι πίνακες μας έχουν αύξουσα ταξινόμηση



Η διάμεσος (median) ενός πίνακα n στοιχείων είναι:
- Το στοιχείο στην θέση $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, αν n περιττός.
- Το στοιχείο στην θέση $\frac{n}{2}$, αν n άρτιος.

→ Αν $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} < b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, τότε το $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ είναι μικρότερο από $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil$ στοιχεία του A και $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ στοιχεία του B. Άρα είναι μικρότερο από τουλάχιστον $2n - 2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ στοιχεία. Αντίστοιχα το $b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ είναι μεγαλύτερο κατά τουλάχιστον $\frac{2n}{2}$ στοιχεία. Άρα το μεσαίο στοιχείο θα βρίσκεται ανάμεσα στα $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ και $b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

→ Αν $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, τότε με όμοιο σκεπτικό με την προηγούμενη περίπτωση προκύπτει ότι η διάμεσος βρίσκεται ανάμεσα στα $b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ και $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

→ Αν $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, τότε έχω βρει τη διάμεσο.

Αλγόριθμος

αρχή & τέλος A, αρχή & τέλος B

```
Median (A, p, q, B, r, s)
    if q = p then
        return min{ A[p], B[r] }
    if A[(q+p)/2] < B[(s+r)/2] then
        return Median(A, ⌊(q+p)/2⌋, q, B, r, ⌊(s+r)/2⌋+1)
    else if A[(q+p)/2] > B[(s+r)/2] then
        return Median(A, p, ⌊(q+p)/2⌋, B, ⌊(s+r)/2⌋, s)
```

```
else
  return A[(q+p)/2]
```

Πολυπλοκότητα : $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) \rightarrow O(\log n)$.

→ Οι ασκήσεις 3, 4, 5 του Φ4 (Διαίρει και Βασίλευε, Άπληστοι Αλγόριθμοι) έχουν λύσεις στο pdf "Slides διάλεξης 09".
Συγκεκριμένα η: 3 βρίσκεται στα slides 3-4
4 βρίσκεται στα slides 5-7
5 βρίσκεται στα slides 8-9