Teoría de campos

Choques

Índice

Esquema

Colisiones

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2' \iff \vec{V}=\vec{V}'$$

$$Q=\Delta T=T'-T$$

Choque frontal elástico en una dimensión

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

Choque frontal inelástico en una dimensión

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)\,V$$

$$Q=-T_{\text{int}}$$

Choques parcialmente elásticos en una dimensión

$$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$$

Choques en dos dimensiones

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'\cos\phi_1+m_2v_2'\cos\phi_2$$

$$0=m_1v_1'\sin\phi_1-m_2v_2'\sin\phi_2$$

4.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiaremos los choques frontales, que por tanto suceden en una dimensión, para introducir al final los choques en dos dimensiones. Veremos en los choques una aplicación directa e instructiva de los principios de conservación del momento lineal y de la energía cinética. Examinaremos tanto los choques perfectamente elásticos, en los que, además del momento, se conserva la energía cinética, como los choques perfectamente inelásticos, en los que la energía cinética interna del sistema se disipa. Estudiaremos también el caso intermedio de los choques parcialmente elásticos e introduciremos el concepto de coeficiente de restitución.

Los objetivos de este tema son:

- Saber qué es una **colisión** y distinguir entre los diversos tipos de colisiones.
- Saber aplicar los principios de **conservación del momento lineal** y de la **energía cinética** a los choques frontales **perfectamente elásticos**.
- Entender en qué consiste el choque **perfectamente inelástico**.
- Comprender la naturaleza de los choques **parcialmente elásticos** y conocer la definición del **coeficiente de restitución**.
- Saber aplicar los conocimientos de los choques unidimensionales al caso de una pelota que **rebota** con el suelo.
- Entender el planteamiento de los choques no frontales, que por tanto suceden en **dos dimensiones**.

4.2 Colisiones

Estudiaremos el caso de dos cuerpos que interactúan entre sí, no sujetos a fuerzas externas. Se habla de colisión cuando, como consecuencia de la interacción, los cuerpos cambian su estado de movimiento, tanto su momento lineal como su energía. La interacción entre los cuerpos puede ser:

1. De contacto, como es el caso de la colisión de dos bolas de billar (sin perjuicio de que a nivel microscópico la interacción suceda en realidad mediante campos de fuerza a distancia).
2. A distancia, cuando los cuerpos interactúan mediante campos de fuerza, como es el caso, por ejemplo, de la repulsión entre dos electrones.

Lo que se pretende en una colisión es, conocidos los estados iniciales de las partículas, es decir, sus velocidades, obtener información de los estados finales, es decir, sus velocidades finales. Esto se podrá hacer unívocamente cuando se conozca la ley de fuerzas de la interacción. En el caso de que la ley de fuerzas no se conozca, o sea de difícil descripción, los teoremas de conservación del momento y de la energía mecánica, estudiados en el tema de sistemas de partículas, nos permitirán obtener información del proceso. En cuanto a qué son los estados iniciales y finales, hay que tener en cuenta que está claro a qué nos referimos cuando la interacción es de contacto, pero no así si se trata de un campo de fuerzas, pues entonces habrá que tener en cuenta que la fuerza decrece con la distancia y considerar los estados límite, al menos infinito y al más infinito, lo que se traduce en grandes distancias del centro de fuerzas, donde esta puede considerarse despreciable.

Podemos distinguir dos tipos de colisión:

1. **Dispersión**: si las partículas en el estado final son las mismas que en el estado final.
2. **Reacción**: si las partículas en el estado final son diferentes a las del estado inicial.

El que no consideremos fuerzas externas al sistema tiene como consecuencia que el momento lineal total se conserva, o lo que es lo mismo, la velocidad del centro de masas es constante.

Si llamamos $\vec{p}_1$y $\vec{p}_2$ a los momentos antes de la colisión y $\vec{V}$ a la velocidad del centro de masas antes de la colisión y $\vec{p}_1'$ y $\vec{p}_2'$ y $\vec{V}'$ a los momentos y a la velocidad del centro de masas después de la colisión, tendremos que se cumplirá:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \iff \vec{V} = \vec{V}' \, . \tag{1}$$

Por tanto, la energía cinética del centro de masas permanece constante $1/2MV^2 =$ cte. Ahora bien, puede ocurrir que las fuerzas internas de interacción sean no conservativas, en cuyo caso la energía cinética interna no se conservará (bien porque se transforma en energía elástica, por deformación de los cuerpos que colisionan, bien porque se transforma en calor). En cambio, si las fuerzas internas son conservativas la energía cinética interna también se conservará. En el caso de que la energía cinética interna T_{int} se conserve hablaremos de una colisión *elástica* y en el caso de que no se conserve estaremos ante una colisión *totalmente inelástica* o *parcialmente inelástica*. A la cantidad que mide la variación de energía cinética interna la llamaremos Q y será:

$$Q = \Delta T = T' - T \, . \tag{2}$$

Si las partículas tienen masas m_1 y m_2 esta cantidad se expresará:

$$Q = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \, . \tag{3}$$

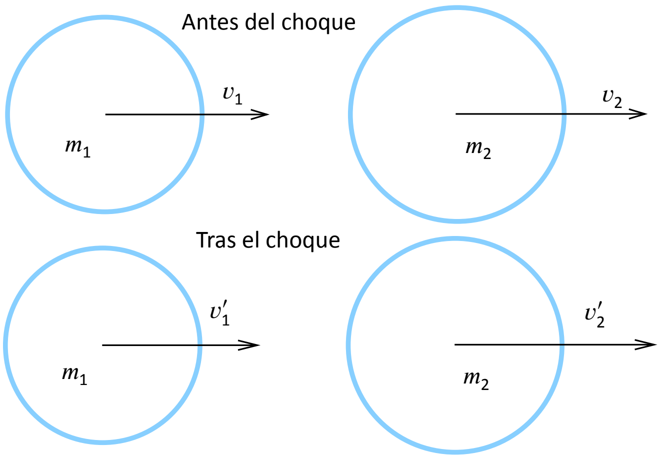
4.3 Choque frontal elástico en una dimensión

Vamos a considerar un choque de dos partículas en una dimensión. Si el choque es elástico se cumplirá $Q = 0$, es decir, que la energía cinética interna se conserva. Entonces podemos escribir una ecuación para la conservación del momento y otra ecuación para la conservación de la energía cinética. Con ello tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (las velocidades finales) que tendrá una solución única. Llamamos v_1 y v_2 a las velocidades iniciales de los cuerpos de masa m_1y m_2, respectivamente; y v_1' y v_2' a las velocidades finales, tras la colisión. Véase la **??**. Las ecuaciones de conservación son:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \,, \tag{4}$$

para el momento lineal. Y para la energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \,. \tag{5}$$



Reordenamos términos en las ecuaciones y simplificamos factores comunes con lo que nos queda:

$$m_1 \left(v_1 - v_1'\right) = m_2 \left(v_2' - v_2\right) \,, \tag{6}$$

$$m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2\right) \,. \tag{7}$$

Ahora, en la Ecuación (7) hacemos uso de que la diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia:

$$m_1 \left(v_1 + v_1'\right) \left(v_1 - v_1'\right) = m_2 \left(v_2' + v_2\right) \left(v_2' - v_2\right) \,. \tag{8}$$

Dividimos la Ecuación (8) entre la Ecuación (6), resultando:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \,, \tag{9}$$

de donde se obtiene:

$$v_1 - v_2 = -\left(v_1' - v_2'\right) \,, \tag{10}$$

lo que significa que la velocidad relativa de acercamiento de las partículas antes de la colisión es igual a la velocidad relativa de alejamiento después de la colisión. Despejamos ahora v_1' de la Ecuación (9):

$$v_1' = v_2' + v_2 - v_1 \,, \tag{11}$$

y sustituimos en la Ecuación (6):

$$m_1\left(v_1 - v_2' - v_2 + v_1\right) = m_2\left(v_2' - v_2\right)\ . \tag{12}$$

Despejamos ahora la v_2':

$$m_1\left(2v_1 - v_2\right) + m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right) v_2'\,. \tag{13}$$

de donde:

$$v_2' = 2\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} - v_2\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{14}$$

Procediendo de la misma manera para v_2' obtenemos:

$$v_1' = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 2\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{15}$$

Con la Ecuación (14) y la Ecuación (15) tenemos resuelto el problema de expresar las velocidades finales en función de las velocidades iniciales. Expresemos ahora estas fórmulas en función de la velocidad del centro de masas. La velocidad del centro de masas es:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{16}$$

Sustituyendo en la Ecuación (14) y la Ecuación (15) resulta:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - \left(m_1 + m_2\right) v_1}{m_1 + m_2} = 2V - v_1\,, \tag{17}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - \left(m_1 + m_2\right) v_2}{m_1 + m_2} = 2V - v_2\,. \tag{18}$$

Examinemos ahora qué sucede en el sistema de referencia del centro de masas. Sabemos que este sistema de referencia el momento antes y después de la colisión es cero. Llamemos u_1y u_2 a las velocidades iniciales respecto al centro de masas; y u_1' y u_2' a las velocidades finales respecto al centro de masas. Entonces se cumple:

$$v_1 = V + u_1, \quad v_2 = V + u_2\,, \tag{19}$$

$$v_1' = V + u_1', \quad v_2' = V + u_2'\,, \tag{20}$$

que llevadas a la Ecuación (17) y la Ecuación (18) dan:

$$V + u_1' = 2V - \left(V + u_1\right) \ \Rightarrow u_1' = -u_1\,, \tag{21}$$

$$V + u_2' = 2V - \left(V + u_2\right) \ \Rightarrow u_2' = -u_2\,, \tag{22}$$

lo que significa que, desde el sistema de referencia del centro de masas, las partículas cambian la dirección de sus velocidades después del choque. Podemos estudiar ahora tres casos particulares de interés:

1. Que las partículas que colisionan tengan la misma masa: $m_1 = m_2$.

2. Que una de ellas sea mucho más masiva que la otra y que esté en reposo: m_2»m_1 y $v_2 = 0$.

3. Que la partícula mucho más masiva sea la que colisiona con la partícula en reposo: m_1»m_2 y $v_2 = 0$.

En el primer caso, de masas iguales $m_1 = m_2 = m$, tenemos que la velocidad del centro de masas es:

$$V = \frac{mv_1 + mv_2}{2m} = \frac{v_1 + v_2}{2}\,, \tag{23}$$

que llevada a la Ecuación (17) y la Ecuación (18) origina:

$$v_1' = 2\frac{v_1 + v_2}{2} - v_1 = v_2\,, \tag{24}$$

$$v_2' = 2\frac{v_1 + v_2}{2} - v_2 = v_1\,, \tag{25}$$

lo que implica que en la colisión las partículas intercambian sus velocidades. Para visualizarlo, supongamos que una bola de billar se acerca por la izquierda con velocidad mayor $v_1 > v_2$ que una bola de billar idéntica que viene de la derecha. Es evidente que el centro de masas de ambas se mueve de izquierda a derecha. Tras la colisión la bola 1 saldrá rebotada hacia la izquierda con la velocidad de la 2 y la 2 hacia la derecha con la velocidad de la 1, de manera que tras la colisión el centro de masas seguirá moviéndose con la misma velocidad de izquierda a derecha.

En el caso de una partícula, la 2, mucho más masiva y con velocidad nula, es decir, en reposo, la velocidad del centro de masas será aproximadamente la velocidad de la 2, es decir, que estará aproximadamente en reposo. En efecto:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \simeq v_2 = 0\,, \tag{26}$$

puesto que al ser $m_2 \gg m_1$ el cociente $m_1/m_2 \rightarrow 0$ tiende a cero. Así pues, según la Ecuación (17) y la Ecuación (18), tendremos

$$v_1' = -v_1, \quad v_2' = 0\,. \tag{27}$$

Es decir, que la partícula menos masiva sale rebotada, cambiando de sentido su velocidad. Es lo que sucede, por ejemplo, cuando una pelota choca contra una pared, mucho más masiva, que sale rebotada.

Y, por último, el tercer caso, el de una partícula, pongamos la 1, mucho más masiva que colisiona con otra, la 2, en reposo $v_2 = 0$, tendremos que el centro de masas se mueve, aproximadamente a la velocidad de la 1, por el mismo razonamiento que en el caso anterior, es decir, que $V \simeq v_1$, de donde tenemos:

$$v_1' = 2V - v_1 \simeq 2v_1 - v_1 = v_1\,, \tag{28}$$

$$v_2' = 2V - v_2 = 2V \simeq 2v_1\,. \tag{29}$$

Es decir, que la partícula muy masiva en movimiento, continuará con una velocidad aproximadamente igual tras la colisión, mientras que la partícula poco masiva en reposo, saldrá lanzada en la dirección de la primera con el doble de velocidad que la partícula masiva.

Por último, te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el choque frontal elástico:

Accede al vídeo: Choque frontal elástico en una dimensión.

4.4 Choque perfectamente inelástico en 1D

Cuando sucede una colisión perfectamente inelástica, los cuerpos, después del choque, emergen fundidos y moviéndose a la velocidad del centro de masas. Recordemos que, por no haber fuerzas externas, la velocidad del centro de masas se conserva. De manera que, en una colisión perfectamente inelástica, la energía interna se disipa, ya sea en forma de energía potencial de deformación de los cuerpos que colisionan, ya sea en forma de calor. Por conservación del momento lineal tendremos:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right) V\,, \tag{30}$$

donde, como siempre, V representa la velocidad del centro de masas. Por tanto, las velocidades de ambos cuerpos tras la colisión serán iguales a la velocidad del centro de masas:

$$v_1' = v_2' = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{31}$$

La variación de energía será:

$$Q = \Delta T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) V^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2\,. \tag{32}$$

Pero recordemos que la energía cinética de antes de la colisión es igual a la suma de la energía cinética del centro de masas más la energía cinética interna (la energía cinética de los cuerpos respecto al centro de masas). Por tanto la variación de energía será igual a menos la energía cinética interna:

$$Q = -T_{\text{int}}\,. \tag{33}$$

En consecuencia, la energía cinética antes de la colisión es mayor que la energía cinética después de la colisión.

4.5 Choques parcialmente elásticos en 1D

Los choques parcialmente elásticos constituyen un caso intermedio entre el choque totalmente elástico y el totalmente inelástico. Los cuerpos emergen de la colisión separados, pero la energía cinética no se conserva. Para caracterizarlos puede recurrirse bien a Q, tal como ha sido definido en la Ecuación (3), bien al llamado *coeficiente de restitución*.

Definición 1: Coeficiente de restitución

Se llama coeficiente de restitución e al cociente, cambiado de signo, de las velocidades relativas después y antes del choque. Es decir:

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} . \tag{34}$$

Definido el coeficiente de restitución y puesto que se conserva el momento pero no la energía cinética, podemos plantear la siguientes dos ecuaciones:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' , \tag{35}$$

$$v_1' - v_2' = e \left(v_2 - v_1 \right) . \tag{36}$$

Despejamos ahora v_2' de la Ecuación (36):

$$v_2' = v_1' - e \left(v_2 - v_1 \right) . \tag{37}$$

y sustituimos en la Ecuación (35):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_1' = m_2 v_1' - m_2 e \left(v_2 - v_1 \right) . \tag{38}$$

Despejamos ahora v_1':

$$v_1' \left(m_1 + m_2 \right) = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2 e \left(v_2 - v_1 \right) , \tag{39}$$

de donde resulta:

$$v_1' = v_1 \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2} \,. \tag{40}$$

Despejando ahora v_1' de la Ecuación (36) y sustituyendo en la Ecuación (35) y reordenando términos, obtenemos:

$$v_2' = v_2 \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} \,. \tag{41}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones, la Ecuación (40) y la Ecuación (41), en función de la velocidad V del centro de masas de la siguiente manera:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - em_2 v_1 + em_2 v_2}{m_1 + m_2} = V + \frac{em_2 v_2 - em_2 v_1}{m_1 + m_2} =$$

$$= V + e\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = V + eV - ev_1 = (1+e)V - ev_1 \,. \tag{42}$$

Y análogamente para v_2':

$$v_2' = (1+e)V - ev_2 \,. \tag{43}$$

Pasamos ahora al sistema de referencia del centro de masas, en el que la suma de momentos, tanto iniciales como finales, es cero. Aplicamos la Ecuación (19) y la Ecuación (20), donde, recordemos, las velocidades u_1, u_2, u_1' y u_2' están referidas al centro de masas. La Ecuación (42) resulta en:

$$V + u_1' = (1+e)V - e\left(V + u_1\right) \;\Rightarrow\; u_1' = -eu_1 \,. \tag{44}$$

Igualmente de la Ecuación (43) obtenemos:

$$u_2' = -eu_2 \,. \tag{45}$$

Por tanto, respecto al centro de masas, después de la colisión parcialmente elástica, las velocidades finales son iguales que las inciales pero cambiadas de signo y multiplicadas por el coeficiente de restitución. Consideremos ahora el caso de que el cuerpo 2 sea mucho más masivo que el 1, es decir, que $m_2 \gg m_1$. En ese caso $V \simeq v_2$ y las velocidades finales resultan ser:

$$v_1' \simeq (1+e)v_2 - ev_1\,, \tag{46}$$

$$v_2' \simeq (1+e)v_2 - ev_2 = v_2\,, \tag{47}$$

y en el caso en que el cuerpo más masivo esté en reposo $v_2 = 0$, tendríamos:

$$v_1' \simeq -ev_1\,, \tag{48}$$

$$v_2' \simeq 0\,, \tag{49}$$

que sería el caso, por ejemplo, de una pelota que cae y choca contra el suelo: saldrá rebotada hacia arriba con una velocidad disminuida por el coeficiente de restitución. Obsérvese que si hacemos $e = 1$ recuperamos las fórmulas del choque perfectamente elástico y si hacemos $e = 0$ recuperamos las fórmulas del choque perfectamente inelástico.

Separando la energía cinética del estado inicial y final en energía cinética del centro de masas y energía cinética interna (que recordemos que era la energía cinética referida al centro de masas) vamos a calcular el factor Q de una colisión parcialmente elástica

$$Q = \left(\frac{1}{2}MV^2 + T'_{\text{int}}\right) - \left(\frac{1}{2}MV^2 + T_{\text{int}}\right) = T'_{\text{int}} - T_{\text{int}}\,. \tag{50}$$

puesto que la energía cinética del centro de masas es la misma antes y después de la colisión y donde $M = m_1+m_2$ es la masa total del sistema. Ahora, las energías cinéticas internas las podemos expresar en función de la masa reducida μ y de las velocidades relativas inicial $v_{12} = v_1 - v_2$ y final $v'_{12} = v'_1 - v'_2$,donde $v'_{12} = -ev_{12}$:

$$Q = \frac{1}{2}\mu v'^2_{12} - \frac{1}{2}\mu v^2_{12} = \frac{1}{2}\mu v^2_{12}\left(e^2 - 1\right)\,, \tag{51}$$

que, poniendo la expresión de la masa reducida y de la velocidad relativa, resulta en:

$$Q = \frac{e^2-1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\,, \tag{52}$$

que resulta ser $Q = 0$ si $e = 1$ en la colisión perfectamente elástica y nos da una medida de Q cuando la colisión es perfectamente inelástica $e = 0$.

Ejemplo 1. Rebotes

Supongamos que una pelota se deja caer desde una altura h y que tiene un coeficiente de restitución e. La pelota irá perdiendo energía y por tanto velocidad y altura en cada rebote. Calculemos primero la fórmula general de las alturas que va alcanzando.

- Primer rebote. La energía potencial mgh será igual a la energía cinética cuando alcance el suelo (que es el origen de la energía potencial):

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 . \tag{53}$$

Así que la velocidad será:

$$v_1 = \sqrt{2gh} . \tag{54}$$

Tras el choque el módulo de la velocidad de ascenso es: $v_1' = ev_1$. Ahora volvemos a aplicar la conservación de la energía. La pelota asciende hasta que toda su energía cinética se ha transformado en energía potencial, a la altura h_1:

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 = mgh_1 \;\Rightarrow\; h_1 = e^2 h . \tag{55}$$

- Segundo rebote. Aplicamos otra vez el principio de conservación de la energía para la pelota cayendo desde la altura h_1 y alcanzando el suelo con la velocidad v_2:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_1 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh_1} . \tag{56}$$

Después del choque la velocidad, en módulo, será: $v_2' = ev_2$. La pelota asciende con la velocidad v_2' hasta alcanzar la altura h_2. Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_2'^2 = mgh_2 \;\Rightarrow\; h_2 = e^2 h_1 = e^4 h . \tag{57}$$

Y así sucesivamente hasta el rebote enésimo, cuando la altura alcanzada h_n

será:

$$h_n = e^{2n} h\,. \tag{58}$$

- El el límite cuando $n \to \infty$, puesto que $e < 1$, la altura tiende a cero. Calculemos ahora la pérdida de energía de la pelota. En el primer choque, la pelota pierde la energía:

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \left(e^2 - 1\right) mgh\,. \tag{59}$$

- En el segundo choque, pierde la energía:

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} m v_2'^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = \left(e^2 - 1\right) mgh_1 = e^2 \left(e^2 - 1\right) mgh\,. \tag{60}$$

- En el choque enésimo pierde la energía:

$$\Delta E_n = \frac{1}{2} m v_n'^2 - \frac{1}{2} m v_n^2 = \left(e^2 - 1\right) mgh_{n-1} = e^{2(n-1)} \left(e^2 - 1\right) mgh\,. \tag{61}$$

La suma $\Delta E_1 + \Delta E_2 + \ldots + \Delta E_n$ será la pérdida de energía tras n rebotes. Si hacemos tender $n \to \infty$ obtendremos la energía total perdida, que será la energía potencial inicial mgh. Para comprobarlo, sumamos los infinitos términos de la progresión geométrica cuya razón es e^2. Recordemos que si tenemos una progresión geométrica de razón $r < 1$ la suma de los infinitos términos es $a_1/(1-r)$. En este caso $a_1 = \Delta E_1 = \left(e^2 - 1\right) mgh$. Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta E_i = \frac{\left(e^2 - 1\right) mgh}{1 - e^2} = -mgh\,. \tag{62}$$

Calculemos ahora el tiempo que la pelota tarda en detenerse. Primero calculamos el tiempo que tarda en caer, partiendo del reposo:

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 \;\Rightarrow\; t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{63}$$

- Una vez llega al suelo, la pelota rebota, asciende a la altura h_1 y vuelve a caer. El tiempo de ascenso y descenso será:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2e^2h}{g}} = 2t_0e\,. \tag{64}$$

- Tras el segundo rebote, el tiempo de ascenso y descenso será:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{\frac{2e^4h}{g}} = 2t_0e^2\,. \tag{65}$$

Y así sucesivamente. El tiempo total será la suma de t_0 y la suma de la progresión geométrica cuyo primer término es $2t_0e$ y cuya razón es e, por tanto será:

$$t = t_0 + \frac{2et_0}{1-e} = t_0\frac{1+e}{1-e} = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{66}$$

Nótese que si se trata de un choque perfectamente inelástico, con $e = 0$, el tiempo hasta la detención será solamente el tiempo de caída t_0; y si se trata de un choque perfectamente elástico, al ser $e = 1$ el tiempo será infinito, lo que significa que la pelota rebotará indefinidamente. Para la descripción de métodos experimentales de determinación del coeficiente de restitución, puedes consultar (Vargas et al., 2006) y (Sanabria & Mendoza, 2020).

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre rebotes:

Accede al vídeo: Rebotes.

4.6 Choques en dos dimensiones

Si el choque entre dos cuerpos no es frontal, no sucederá en una dimensión sino en dos, la del plano determinado por los vectores momento de ambos cuerpos y describiremos el movimiento respecto a un sistema de referencia inercial OXY.

En el caso de que el choque sea perfectamente inelástico, los cuerpos emergerán unidos con la velocidad del centro de masas, puesto que como ya vimos para el caso unidimensional, la energía interna del sistema se disipa. Si m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, $\vec{v}_1 = \left(v_{1x}, v_{1y}\right)$ y $\vec{v}_2 = \left(v_{2x}, v_{2y}\right)$ las velocidades iniciales y $\vec{v}' = \left(v'_x, v'_y\right)$ la velocidad final, tendremos, por conservación del momento las ecuaciones:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) v'_x\,, \tag{67}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = \left(m_1 + m_2\right) v'_y\,, \tag{68}$$

con lo que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (las componentes de la velocidad final, puesto que suponemos conocidas las velocidades iniciales) y el problema se puede resolver unívocamente. En el caso de que el choque sea parcialmente elástico o perfectamente elástico, tendremos cuatro incógnitas (las cuatro componentes de los dos vectores velocidad finales). La conservación del momento nos aportará dos ecuaciones, a saber:

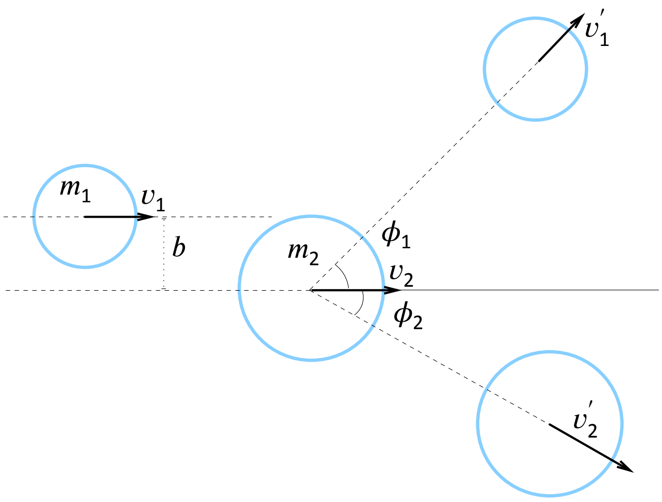


Figura 1: Colisión en 2D. El ángulo con que emergen los cuerpos depende del parámetro de impacto.

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}\,, \tag{69}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}\,, \tag{70}$$

donde $\vec{v}'_1 = \left(v'_{1x}, v'_{1y}\right)$ y $\vec{v}'_2 = \left(v'_{2x}, v'_{2y}\right)$ son los vectores velocidad finales de los cuerpos. Una tercera ecuación nos la aportará el valor de Q para un choque parcialmente elástico o la conservación de la energía cinética para un choque perfectamente elástico. Sin embargo, tendremos , en estos dos casos, tres ecuaciones para cuatro incógnitas, por lo que será necesario determinar alguna de las incógnitas finales.

Supongamos ahora que los dos cuerpos se mueven en una misma dirección y colisionan con un cierto parámetro de impacto b.

Definición 2: Parámetro de impacto

El parámetro de impacto se define como la distancia del centro de uno de los cuerpos, pongamos el de masa m_2,a la dirección de la velocidad del otro, esto es, $\vec{v}_1$, que pase por su centro.

Los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 con los que emergen los cuerpos tras la colisión dependerán del parámetro de impacto, véase la Figura 1. En función de estas nuevas variables, las ecuaciones de conservación del momento se escriben:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' \cos\phi_1 + m_2 v_2' \cos\phi_2 \, , \tag{71}$$

$$0 = m_1 v_1' \sin\phi_1 - m_2 v_2' \sin\phi_2 \, . \tag{72}$$

Nuevamente, tenemos cuatro incógnitas: los módulos de las velocidades finales v_1' y v_2' y los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 y dos ecuaciones. La tercera ecuación nos la aportará el valor de Q para el choque parcialmente elástico o la conservación de la energía cinética para el choque perfectamente elástico. Tendremos tres ecuaciones para cuatro incógnitas, por lo que será necesario, nuevamente, determinar una de las incógnitas finales, por ejemplo, uno de los ángulos.

Ejemplo 2. Choque oblicuo con una pared (ley de reflexión)

Estudiemos el caso de una colisión perfectamente elástica de una bola con una pared. La pared puede ser considerada como un cuerpo de masa infinita y en reposo. Si llamamos $\vec{v}$ a la velocidad inicial del cuerpo en movimiento y ϕ al ángulo que forma con la dirección de la pared; y $\vec{v}'$ a la velocidad después de la colisión y ϕ' al ángulo que forma con la pared tras la colisión, podremos escribir:

$$\vec{v} = (v\cos\phi, -v\sin\phi) \ , \tag{73}$$

$$\vec{v}' = \left(v'\cos\phi', v'\sin\phi'\right) \ . \tag{74}$$

Por conservación del momento lineal, la componente x permanecerá inalterada $v_x = v_x'$, mientras que, al ser la colisión perfectamente elástica, la componente y

será del mismo valor pero de signo opuesto $v_y = -v'_y$. Con ello tendremos:

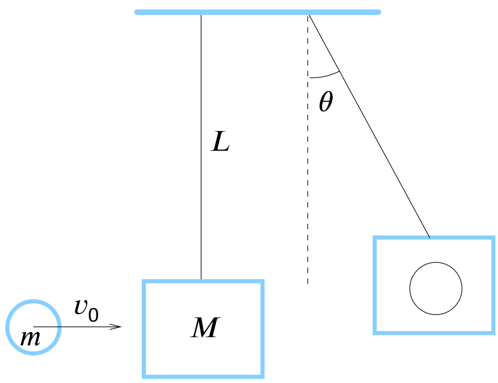
$$v \cos\phi = v' \cos\phi' \ , \tag{75}$$

$$v \sin\phi = v' \sin\phi' \ . \tag{76}$$

Y como los módulos de las velocidades son iguales $v = v'$, también serán iguales los ángulos $\phi = \phi'$. Esta es la conocida como *ley de reflexión*: Cuando un cuerpo choca elástica y oblicuamente con otro, de mucha mayor masa, emerge de la colisión con la misma velocidad y de modo tal que el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales.

4.7 El péndulo balístico

El péndulo balístico es un dispositivo que se puede utilizar para medir la velocidad de un proyectil. Consiste, primero, en una colisión perfectamente inelástica del proyectil con la masa del péndulo, en la que el proyectil queda empotrado en dicha masa, y seguidamente, en la elevación del conjunto proyectil masa hasta una cierta altura, formando el cable del péndulo un cierto ángulo.



El problema se aborda en dos partes. Primero calculamos la velocidad del conjunto v_1 después de la colisión inelástica. Para ello utilizamos el principio de conservación del momento. Llamamos v_0 a la velocidad del proyectil, de masa m y M a la masa del péndulo. Entonces:

$$mv_0 + M \cdot 0 = (M + m)\, v_1 \ \Rightarrow \ v_1 = \frac{m}{M+m} v_0 \, . \tag{77}$$

A continuación, como el péndulo se eleva hasta una altura h, igualamos la energía cinética del conjunto a la energía potencial gravitatoria (puesto que la tensión del hilo es una fuerza normal y no realiza trabajo):

$$\frac{1}{2}(M+m)\,v_1^2 = (M+m)\,gh \;\Rightarrow\; h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m^2 v_0^2}{2\,(M+m)^2\,g}\,. \tag{78}$$

En función del ángulo de giro θ tenemos:

$$h = L - L\cos\theta\,, \tag{79}$$

donde L es la longitud del péndulo. Ahora llevamos la Ecuación (79) a la Ecuación (78) y despejamos la velocidad inicial del proyectil:

$$v_0 = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \frac{2\,(M+m)\sin(\theta/2)}{m}\sqrt{gL}\,. \tag{80}$$

Con ello, midiendo el ángulo y con el conocimiento de las masas y la longitud del péndulo, podemos calcular la velocidad inicial del proyectil. Por último, te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el péndulo balístico:

Accede al vídeo: Péndulo balístico.

4.8 Referencias bibliográficas

Sanabria, A. A. T. & Mendoza, G. R. G. (2020). Validación de las ecuaciones del rebote parabólico sobre una línea recta horizontal e inclinada, por medio de experimentos controlados en el laboratorio de física. *Paradigma*, 40(1), 218–230.

Vargas, W. L., Pineda, L. M., & Murcia, J. C. (2006). Impacto inelástico de una partícula sobre una superficie. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 16(1), 80–91.

4.9 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. En un cañón sin retroceso de 70 mm la masa del proyectil con su espoleta es de 8 kg y su velocidad de salida, en un disparo, es de 720 km/h. Calcular la masa de los gases producidos en la combustión si su velocidad de salida es de 2520 km/h. *Solución*: 2.29 kg.

Ejercicio 2. Un nadador de 80 kg se lanza horizontalmente al agua, en reposo, con una velocidad de 15 m/s, desde una barca que pesa 150 kg. La resistencia del agua al avance de la barca es proporcional a la velocidad, con una constante que vale 5 kg/s. Calcular la velocidad de la barca 15 s después del lanzamiento del nadador. *Solución*: 4.85 m/s.

Ejercicio 3. Una esfera A se mueve con una velocidad de 5 m/s. Choca con una esfera B, en reposo, y esta, al salir despedida, choca con una esfera C también en reposo. La relación entre las masas de las esferas $m_A : m_B : m_c$ está en la relación $3 : 6 : 2$. Suponiendo que el choque sea frontal y perfectamente elástico, calcular la velocidad con la que sale despedida la esfera C. *Solución*: 5 m/s.

Ejercicio 4. Supongamos dos bolas, de masas m_1 y m_2 que están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud 1 m. Las bolas se tocan, sin presión, cuando los hilos están verticales. Separemos la bola 1 de su posición de equilibrio un ángulo de 60°,manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo. Si soltamos la bola 1, esta chocará con la bola 2, que está inmóvil. Calcúlese, primero la velocidad de la bola 1 cuando choca con la bola 2 y las velocidades de salida de las bolas para los siguientes dos casos: a) que $m_2 = 2m_1$ y b) $m_1 = m_2$. Aproxímese la aceleración de la gravedad por 10 m/s^2. *Solución*: $\sqrt{10}$ m/s, a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ m/s, $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ m/s b) 0 m/s, $\sqrt{10}$ m/s.

Ejercicio 5. Disparamos una bala de un fusil sobre un trozo de madera de 20 kg. Si la masa de la bala es 40 g y en el momento del impacto lleva una velocidad de 1080 km/h, calcular la velocidad que adquiere el sistema, suponiendo que la bala queda incrustada en la madera. *Solución*: 0.6 m/s.

Ejercicio 6. Empleamos un péndulo balístico para medir la velocidad de una bala de 20 g. El péndulo está constituido por un bloque de madera de 2 kg de masa, su longitud es de 1 m y al sufrir el impacto de la bala se eleva un ángulo de 60°. Calcular la velocidad de la bala. *Solución*: 316.18 m/s.

Ejercicio 7. Disparamos una bala de 40 g contra un saquito de arena de 4 kg de masa, que pende de un hilo. La bala atraviesa el saquito y recorre una distancia horizontal de 20 m antes de impactar contra el suelo. La distancia del punto de impacto de la bala en el saquito al suelo es de 1.5 m. Calcular la velocidad de la bala en el momento del impacto. *Solución*: 278.6 m/s.