Teoría de campos

El oscilador armónico

Índice

Esquema 2

Ideas clave 3

7.1 Introducción y objetivos 3

7.2 La ley de Hooke 4

7.3 Ecuación del movimiento 6

7.4 Exponenciales complejas 10

7.5 Energía 11

7.6 Movimiento vibratorio amortiguado 12

7.7 El péndulo simple 18

7.8 Referencias bibliográficas 24

7.9 Cuaderno de ejercicios 25

Esquema

Ley de Hooke

$$F = -kx$$

$$U = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Ecuación del movimiento

$$F = m\ddot{x} = -kx, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

Exponenciales complejas

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Energía

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Movimiento vibratorio amortiguado

$$F = m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx$$

Movimiento oscilatorio amortiguado

$$x(t) = e^{-\beta t} A\cos(\omega t + \phi)$$

Movimiento aperiódico crítico

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$$

Movimiento sobreamortiguado

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\beta t + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t}$$

El péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ideas clave

7.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiamos la aplicación de la segunda ley de Newton a la ley de Hooke en lo que se conoce como *movimiento vibratorio armónico simple*. Veremos que dicha ley es más general y se aplica, para desplazamientos relativamente pequeños, a todo sistema en el que haya una posición de equilibrio estable. Lo demostraremos desarrollando en serie de Taylor tanto la fuerza como la energía potencial, si la hubiere. Examinaremos también el balance energético del movimiento del oscilador armónico y estudiaremos el caso de un movimiento vibratorio amortiguado por una fuerza proporcional a la velocidad. Finalmente, estudiaremos una aplicación del movimiento vibratorio armónico simple en el caso de un péndulo.

Los objetivos de este tema son:

- Conocer la **ley de Hooke** y su rango de aplicación general para movimientos en torno a un punto de **equilibrio estable** con desplazamientos suficientemente pequeños.
- Saber plantear la **ecuación del movimiento** a partir de la ley de Hooke y la **segunda ley de Newton**, así como su resolución en términos de **funciones circulares**.
- Conocer la expresión de la **energía mecánica** de un oscilador armónico, así como de la energía potencial y la energía cinética.
- Saber plantear la ecuación del movimiento para un movimiento vibratorio **amortiguado** por una **fuerza proporcional a la velocidad** y examinar los distintos tipos de soluciones.
- Saber aplicar lo aprendido para el oscilador armónico al **péndulo simple**.

7.2 La ley de Hooke

Ya estudiamos al presentar la leyes de Newton, y para justificar el concepto de fuerza, la ley de Hooke, según la cuál, para un material perfectamente elástico, como pueda ser un muelle ideal, al separarlo de su posición de equilibrio, aparece una *fuerza recuperadora* que es proporcional al desplazamiento.

Ley 1: Ley de Hooke

Para un muelle perfectamente elástico, al que hay unida una masa puntual, al realizar un desplazamiento de su posición de equilibrio, que se llama *elongación,* aparece una fuerza recuperadora que es proporcional a la elongación:

$$F = -kx\,, \tag{1}$$

donde k es la constante de recuperación o *constante elástica*, y tiene dimensiones MT^{-2}.

Enunciamos explícitamente los supuestos o hipótesis necesarios para que se cumpla la ley de Hooke:

1. El muelle ha de ser perfectamente elástico y de masa nula.
2. La masa unida al muelle se supone puntual.
3. Hay una posición de equilibrio hacia la que apunta la fuerza recuperadora.

Ya estudiamos que la ley de Hooke permitía diseñar un dispositivo para la medida de fuerzas, conocido como *dinamómetro*. Vamos a ver ahora que la ley de Hooke no es solamente una ley que cumplen los muelles ideales perfectamente elásticos con una masa puntual, sino que se puede aplicar a cualquier sistema que posea una posición de equilibrio, siempre y cuando los desplazamientos respecto de esa posición sean los suficientemente pequeños como para despreciar los términos cuadrático en el desplazamiento y de orden superior.

Así, supongamos que hay una posición de equilibrio, que tomaremos como el origen, y que la fuerza recuperadora depende solamente del desplazamiento, es decir, $F = F(x)$. Supongamos además que la fuerza es una función del desplazamiento derivable hasta un orden arbitrario. Entonces la fuerza se puede desarrollar en serie de Taylor de la siguiente manera:

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_0 x^n \,. \tag{2}$$

Como el sistema parte de una posición de equilibrio, en ella la fuerza será nula $F_0 = 0$. Y como estamos considerando desplazamientos pequeños, los términos con potencias de x superiores a uno pueden ser despreciados. Entonces podemos escribir:

$$F = -kx \,, \tag{3}$$

donde:

$$k = -\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 \,. \tag{4}$$

Como la fuerza recuperadora está dirigida hacia la posición de equilibrio, la derivada respecto de x es negativa, por lo que la constante elástica k, tal como ha sido definida en la Ecuación (4) es positiva $k > 0$.

Podemos llegar a la misma conclusión si partimos del concepto de energía potencial. En efecto, la energía potencial asociada a una fuerza que satisfaga la ley de Hooke se obtiene calculando el trabajo realizado para desplazar una masa puntual una cantidad dx:

$$dW = -F dx = kx dx \,. \tag{5}$$

Para obtener la energía potencial integramos entre 0 y x:

$$U = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \,. \tag{6}$$

Como vemos, la energía potencial de un sistema perfectamente elástico es una parábola.

En general, si suponemos que hay una posición de equilibrio, lo que tendremos es un mínimo en la energía potencial. Y es evidente que para desplazamientos pequeños de la posición de equilibrio, ese mínimo en el potencial se puede aproximar bien por una parábola, es decir, una función cuadrática en x, salvo, por supuesto una constante, que no afecta a las leyes del movimiento y que podemos poner a cero.

Veámoslo. Suponemos que la energía potencial es una función de x y tal como ocurría con la fuerza, expandimos en serie de Taylor en torno a la posición de equilibrio:

$$U(x) = U_0 + \left(\frac{dU}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nU}{dx^n}\right)_0 x^n\,. \tag{7}$$

Ahora, en la posición de equilibrio tenemos un mínimo de la energía potencial, por lo que la derivada primera es cero. Por otro lado, como se trata de un mínimo, la derivada segunda ha de ser positiva, por lo que, salvo una constante arbitraria que no afecta a las ecuaciones del movimiento, recuperamos la Ecuación (6). Así pues, hemos visto el carácter general de aplicabilidad de la ley de Hooke. Para la descripción de experimentos sencillos, tanto estáticos como dinámicos (incluso utilizando los sensores de los teléfonos inteligentes), para la determinación de la constante elástica, puedes consultar (Alonso et al., 2018).

Puedes consultar (Sanjosé López et al., 1991) para la exploración, mediante el ordenador, de movimientos con fuerzas restauradoras proporcionales al cubo de la elongación y potencias impares superiores.

7.3 Ecuación del movimiento

Aplicamos ahora la segunda ley de Newton a la ley de Hooke, con los supuestos mencionados, de que el muelle sea perfectamente elástico y de masa nula y que esté adherido a él una masa puntual. En este caso se verifica:

$$F = m\ddot{x} = -kx\,, \tag{8}$$

de donde podemos escribir:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{9}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal, de segundo orden y con coeficientes constantes. El cociente k/m tiene dimensiones $[k/m] = T^{-2}$, por lo que podemos introducir la magnitud

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,, \tag{10}$$

que tiene por dimensiones la inversa del tiempo, y es una magnitud característica del sistema $[\omega_0] = T^{-1}$, con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Esta constante se conoce como *pulsación* o *frecuencia propia de oscilación*. Así la Ecuación (9) queda

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{11}$$

Para resolver esta ecuación diferencial recordemos cómo son las derivadas de las *funciones circulares*:

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)\,,\ \frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)\,. \tag{12}$$

Por ello, las derivadas segundas son:

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) = -\omega^2\cos(\omega t)\,,\ \frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) = -\omega^2\sin(\omega t)\,. \tag{13}$$

Así pues, la solución de la Ecuación (11) son funciones circulares: senos o cosenos. Además, puesto que la ecuación es lineal, se tiene que también es solución una combinación lineal del seno y del coseno. Esta es la forma más general de la solución:

$$x(t) = A_1\cos\left(\omega_0 t\right) + A_2\sin\left(\omega_0 t\right)\,. \tag{14}$$

Ahora bien, podemos reescribir esta ecuación como:

$$x(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\sin(\omega_0 t)\right), \tag{15}$$

y definiendo el ángulo ϕ por las siguientes relaciones:

$$\cos\phi = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\,, \quad \sin\phi = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\,, \tag{16}$$

resulta:

$$x(t) = A\left(\cos\phi\cos\left(\omega_0 t\right) + \sin\phi\sin\left(\omega_0 t\right)\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)\,, \tag{17}$$

donde $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ es la amplitud y $\phi = \tan^{-1}(A_2/A_1)$ es la fase inicial. Falta determinar las dos constantes de integración: amplitud y fase inicial. Puesto que la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial de segundo orden es necesario que se especifiquen dos condiciones iniciales, que pueden ser la posición y la velocidad en el instante inicial, esto es: $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Así, yendo a la Ecuación (14) resulta:

$$x(0) = A_1\,, \tag{18}$$

y derivando la Ecuación (14):

$$\dot{x}(t) = -A_1\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + A_2\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right)\,, \tag{19}$$

por lo que:

$$\dot{x}(0) = A_2\omega_0\,. \tag{20}$$

Las soluciones, la Ecuación (14) y la Ecuación (17), en función de las condiciones iniciales, se pueden expresar entonces como:

$$x(t) = x(0)\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)\,, \tag{21}$$

y:

$$x(t) = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2}\cos\left(\omega_0 t + \tan^{-1}\left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)}\right]\right)\,. \tag{22}$$

En esta última ecuación quedan determinadas en función de las condiciones iniciales la amplitud y la fase inicial. Para una discusión y resolución de las sutilezas que entraña la determinación de la fase inicial puede consultarse (Osaba-Rodrıguez, 2019). Hemos resuelto, pues, la ecuación del movimiento del oscilador armónico, también llamado *movimiento vibratorio armónico simpl*e.

Una propiedad importante de este movimiento es su periodicidad. En efecto, existe un tiempo T, llamado *período,* tal que $x(t+T) = x(t)$. Si nos vamos a la Ecuación (22) resulta que tiene que ser $\omega_0 T = 2\pi$. De donde se deduce la relación del período con la constante elástica y la masa:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{23}$$

La frecuencia ν, que es el número de oscilaciones por unidad de tiempo, es la inversa del período, por lo que resultan las fórmulas:

$$\omega_0 = 2\pi\nu\,,\ \ \nu = \frac{1}{T}\,. \tag{24}$$

Vemos, de la Ecuación (23), que el período es independiente de la amplitud (y, por tanto, como veremos, de la energía). A los sistemas que cumplen esta condiciones se los denomina *isocronos*.

La independencia del período con la amplitud tiene como consecuencia que si tenemos un sistema oscilante, por ejemplo un reloj, y la amplitud, a causa de la pérdida de energía por rozamiento, va descendiendo con el tiempo, el período, sin embargo, permanece constante.

Veamos ahora la ecuación de la velocidad y la de la aceleración:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left(A\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)\right) = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi\right) = \pm\omega_0\sqrt{A^2 - x^2}\,, \tag{25}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(-A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi\right)\right) = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \phi\right) = -\omega_0^2 x\,. \tag{26}$$

La fuerza será entonces:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x\,. \tag{27}$$

Vemos, que la velocidad disminuye a medida que aumenta la elongación. El movimiento se anula cuando se alcanza la elongación máxima (amplitud). A partir de ese instante la masa es acelerada en sentido contrario. Cuando la masa pasa por la posición de equilibrio la aceleración es cero y la velocidad es máxima. Por inercia sigue moviéndose en ese sentido y entonces la elongación es de sentido contrario y la aceleración opuesta a ella. Para una exposición del movimiento armónico simple (MAS) con gráficas que relacionan la posición, la velocidad y la aceleración, puede consultarse (Jimenez-Carballo, 2018).

Te recomendamos también ver el siguiente vídeo sobre el oscilador armónico:

Accede al vídeo: Ecuación de movimiento del oscilador armónico.

7.4 Exponenciales complejas

Hemos visto que la solución a la ecuación de movimiento del movimiento vibratorio armónico simple es una combinación de funciones circulares: senos y cosenos, tal como muestra la Ecuación (17). Si recordamos la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,, \tag{28}$$

entenderemos que se puedan usar exponenciales complejas como solución. Las exponenciales complejas tienen las siguientes propiedades con la operación de derivación:

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}\,, \tag{29}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}\,. \tag{30}$$

Es decir, que mantienen la forma y satisfacen la Ecuación (11).

Las exponenciales complejas, al variar uniformemente con el tiempo la fase, es decir, el ángulo que el afijo forma con el eje real, describen un movimiento circular uniforme.

Para obtener la solución del oscilador armónico, en términos de funciones circulares, hay que tomar la parte real o la parte imaginaria. Por tanto, el movimiento vibratorio armónico simple se puede visualizar como la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme.

Para una ilustración sobre la relación entre el movimiento circular uniforme (llamado *fasor*) y el movimiento armónico simple, puede consultarse (Vettorel et al., 2015).

7.5 Energía

La energía de un movimiento vibratorio armónico simple se obtiene sumando la energía cinética T y la potencial U y es:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 . \tag{31}$$

Ahora empleamos la Ecuación (25) y la Ecuación (17):

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 . \tag{32}$$

En el último paso hemos empleado la Ecuación (10). Vemos que la energía es constante, es decir, se conserva, y es proporcional al cuadrado de la amplitud. El que se conserve la energía es una consecuencia de haber considerado un movimiento en el que no hay pérdidas por rozamiento. Hemos obtenido que la energía se conserva por el procedimiento de emplear las soluciones del movimiento. También podríamos demostrar la conservación de la energía ateniéndonos a que $x(t)$ ha de satisfacer la ecuación del movimiento, la Ecuación (9):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = 0 . \tag{33}$$

En el último paso hemos recurrido a la ecuación de movimiento. Por tanto, si x satisface la ecuación de movimiento, la energía se conserva.

7.6 Movimiento vibratorio amortiguado

Normalmente un movimiento vibratorio está sometido a fuerzas de rozamiento que hacen que disminuya su energía y por tanto su amplitud. El caso más importante de rozamiento lo constituye una fuerza proporcional a la velocidad, de origen viscoso. Esta fuerza tendrá la forma $-Rv$, donde R es la *constante de amortiguamiento*. De esta manera, la ley de fuerzas rezará:

$$F = m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx\,. \tag{34}$$

Así la ecuación diferencial del movimiento será:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\,, \tag{35}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia propia de oscilación y $\tau = 2m/R$ es el *tiempo de relajación*. La Ecuación (35) queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{36}$$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos\omega t\,. \tag{37}$$

En ella A_0 representa el desplazamiento en el instante inicial $t = 0$ y β y ω son constantes que hemos de determinar. Para determinarlas calculamos la primera y la segunda derivada de la Ecuación (37):

$$\frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t}\left(\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)\,, \tag{38}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_0\beta e^{-\beta t}\left(\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right) - A_0 e^{-\beta t}\left(-\beta\omega\sin\omega t + \omega^2\cos\omega t\right)\,. \tag{39}$$

Sustituimos la Ecuación (37), la Ecuación (38) y la Ecuación (39) en la Ecuación (35):

$$A_0 e^{-\beta t}\left[\cos\omega t\left(\beta^2-\omega^2-\frac{\beta R}{m}+\omega_0^2\right)+\sin\omega t\left(2\beta\omega-\frac{\omega R}{m}\right)\right]=0\,.$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones linealmente independientes, para que la anterior igualdad se cumpla para todos los tiempos, los coeficientes del seno y del coseno se han de anular. Del coeficiente del seno obtenemos:

$$\beta=\frac{R}{2m}=\frac{1}{\tau}\,. \tag{40}$$

Y del coeficiente del coseno, sustituyendo la Ecuación (40):

$$\beta^2-\omega^2-2\beta^2+\omega_0^2=0\ \Rightarrow\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,. \tag{41}$$

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el oscilador amortiguado:

Accede al vídeo: Movimiento oscilatorio amortiguado.

Vamos a estudiar ahora una forma más general de resolver la ecuación del movimiento vibratorio amortiguado. Para resolver la Ecuación (36) se hace la sustitución $x=e^{\lambda t}$, cuya primera derivada es $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$ y cuya segunda derivada es $\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$, de manera que la ecuación diferencial queda:

$$\left(\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2\right)e^{\lambda t}=0\,. \tag{42}$$

Así obtenemos el polinomio característico:

$$\left(\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2\right)=0\,, \tag{43}$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_\pm=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4\omega_0^2}}{2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,. \tag{44}$$

Podemos distinguir tres casos:

1. Que $\omega_0^2 > \beta^2$. Entonces el polinomio tiene dos raíces complejas conjugadas: $\lambda_+ = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ y $\lambda_- = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.
2. Que $\beta^2 > \omega_0^2$. Entonces tenemos dos raíces reales: $\lambda_+ = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $\lambda_- = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.
3. Que $\omega_0^2 = \beta^2$. Entonces tenemos un raíz real doble: $\lambda = -\beta$.

Estos casos dan lugar a las siguientes situaciones:

Movimiento oscilatorio amortiguado

Para el primer caso, en que tenemos dos raíces complejas conjugadas, definiendo una nueva frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, tenemos las siguientes soluciones

$$e^{-\beta t} e^{i\omega t}, \quad e^{-\beta t} e^{-i\omega t} \,. \tag{45}$$

Estas soluciones, de acuerdo a la fórmula de Euler $e^{\theta i} = \cos\theta + i \sin\theta$, son equivalentes a las soluciones:

$$e^{-\beta t} \cos\omega t, \quad e^{-\beta t} \sin\omega t \,, \tag{46}$$

y por tanto, la solución más general es una combinación lineal de ambas:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t\right) \,. \tag{47}$$

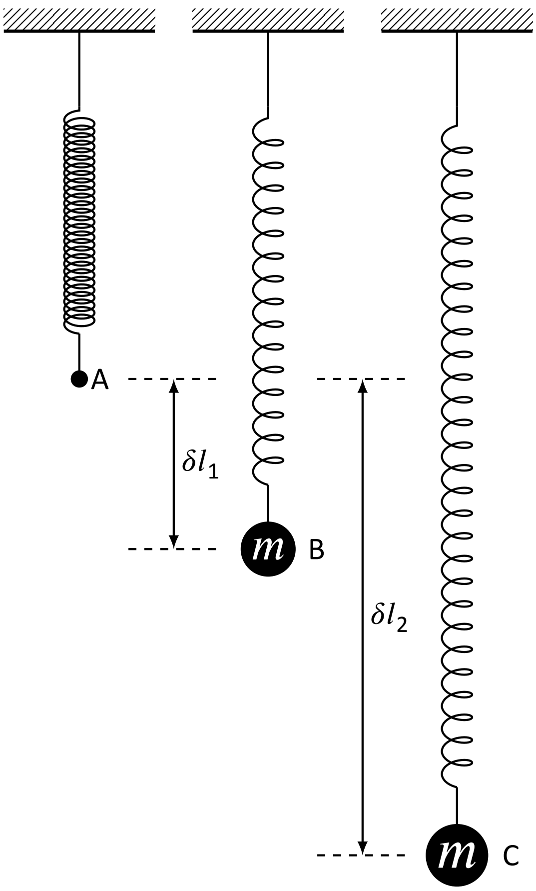

Figura 1: Movimiento oscilatorio amortiguado: oscilación cuya amplitud está modulada por exponencial evanescente.

La primera derivada es:

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t}\left[\left(\omega A_2 - \beta A_1\right)\cos\omega t - \left(\omega A_1 + \beta A_2\right)\sin\omega t\right] \,. \tag{48}$$

En términos de las condiciones iniciales determinamos las constantes A_1 y A_2:

$$x(0) = A_1\,, \tag{49}$$

$$\dot{x}(0) = \omega A_2 - \beta A_1\,, \tag{50}$$

de donde resultan:

$$A_1 = x(0)\,, \tag{51}$$

y

$$A_2 = \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega}\,, \tag{52}$$

con lo cual la Ecuación (47) se puede escribir:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega}\sin\omega t\right)\,, \tag{53}$$

o en función de una función trigonométrica:

$$x(t) = e^{-\beta t} A\cos\left(\omega t + \phi\right)\,, \tag{54}$$

donde la amplitud es:

$$A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega}\right]^2}\,, \tag{55}$$

y la fase inicial:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega x(0)}\,. \tag{56}$$

Así pues, de la Ecuación (54) vemos que se trata de un movimiento oscilatorio, cuya amplitud decrece según la exponencial $e^{-\beta t}$, véase la Figura 1. En el caso de que no hubiera amortiguamiento $\beta = 0$ recuperaríamos el movimiento oscilatorio armónico simple.

Movimiento sobreamortiguado

Si $\omega_0^2 < \beta^2$ tenemos un movimiento *sobreamortiguado*, lo que significa que ya no hay una oscilación propiamente dicha, sino un decaimiento exponencial. En este caso las soluciones son:

$$e^{-\beta t-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}},\ e^{-\beta t+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}. \tag{57}$$

La solución general será de la forma:

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\beta t+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}. \tag{58}$$

Ahora calculamos la derivada:

$$\dot{x}(t) = \left(-\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_1 e^{-\beta t-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + \left(-\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_2 e^{-\beta t+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}. \tag{59}$$

Y aplicamos las condiciones iniciales, resultando:

$$x(0) = A_1 + A_2\,, \tag{60}$$

$$\dot{x}(0) = \left(-\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_1 + \left(-\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) A_2\,. \tag{61}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, la ecuación general del movimiento, en función de las condiciones iniciales, resulta ser:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[x(0) + \frac{\dot{x}(0)+\beta x(0)}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right] e^{-\beta t+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + \frac{1}{2}\left[x(0) - \frac{\dot{x}(0)+\beta x(0)}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right] e^{-\beta t-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}. \tag{62}$$

Movimiento aperiódico crítico

Cuando $\omega_0 = \beta$, la solución del polinomio característico de la ecuación diferencial de segundo orden tiene una única solución doble. En este caso hay que abordar la resolución de la ecuación diferencial mediante otro procedimiento matemático. En ese caso se debe considerar soluciones del tipo:

$$x(t) = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-\beta t} \,. \tag{63}$$

La derivada en este caso es:

$$\dot{x}(t) = A_2 e^{-\beta t} + \left(A_1 + A_2 t\right)(-\beta) e^{-\beta t} = -\beta \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-\beta t} + A_2 e^{-\beta t} \,. \tag{64}$$

Y usando la Ecuación (63):

$$\dot{x}(t) = -\beta x(0) + A_2 e^{-\beta t} \,. \tag{65}$$

De manera que imponiendo las condiciones iniciales, la ecuación del movimiento es:

$$\dot{x}(t) = -\beta \left[x(t) + (\beta x(0) + \dot{x}(0))\right] e^{-\beta t} \,. \tag{66}$$

Vemos que el *movimiento con amortiguamiento crítico* no decae exponencialmente. Por otra parte, para entender la diferencia entre el movimiento oscilatorio amortiguado y el sobreamortiguado, debemos pensar que el sistema posee dos escalas de tiempo: la de oscilación, que viene dada por ω_0^{-1} y la de amortiguamiento, que viene dada por el llamado *tiempo de relajación* del sistema $\tau = \beta^{-1}$. De esta manera, si el tiempo característico de la oscilación es menor que el relajación $\omega_0^{-1} < \beta^{-1}$ o, lo que es equivalente, si $\omega_0 > \beta$, entonces el sistema tiene tiempo de oscilar mientras se amortigua. Mientras que en el caso $\omega_0^{-1} > \beta^{-1}$, que equivale a $\omega_0 < \beta$, el sistema no tiene tiempo de oscilar y se presenta un amortiguamiento sin oscilación.

En los tres casos estudiados, el sistema no se detiene salvo para un tiempo infinito. En una oscilación real esto no ocurre, sino que el sistema se detiene una vez transcurrido un tiempo. Esto se debe a que hemos considerado un sistema oscilatorio amortiguado ideal, omitiendo otras interacciones que hacen que el sistema se detenga para un tiempo finito. Veamos ahora qué sucede con la energía. Recurrimos a la Ecuación (33):

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = -2\beta\dot{x}^2 = -4\beta T^2 \,. \tag{67}$$

Ahora la derivada de la energía con respecto al tiempo no se anula, sino que es igual a menos cuatro veces el producto de la constante de amortiguamiento por la energía cinética. Es decir, que la energía mecánica del sistema disminuye y lo hace proporcionalmente a la energía cinética.

7.7 El péndulo simple

Hasta ahora hemos considerado el sistema ideal constituido por una masa puntual, sujeta a un muelle perfectamente elástico y sin masa. Consideremos ahora el sistema formado por un péndulo simple. Este consiste en una masa puntual m, que pende de un hilo sin masa de longitud fija l, sujeta a la fuerza de la gravedad $\vec{g}$ y sin ningún tipo de interacción que amortigüe el movimiento. Este sistema tiene un único grado de libertad, que escogeremos como el ángulo θ que forma el hilo con la dirección vertical. La posición de equilibrio corresponde a $\theta = 0$, véase la Figura 2.

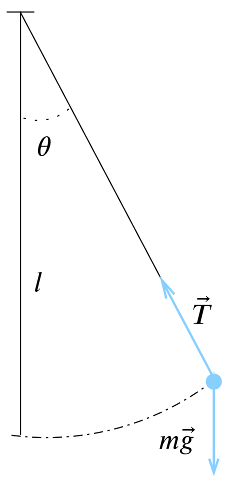

Figura 2: Péndulo simple con peso de la masa suspendida y tensión del hilo. Elaboración propia.

La ley de fuerzas es:

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}\,, \tag{68}$$

donde $\vec{T}$ es la tensión del hilo y $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$. Expresaremos las diversas magnitudes en coordenadas polares:

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r\,, \tag{69}$$

$$m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta\,. \tag{70}$$

Los vectores unitarios en coordenadas polares son:

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\,, \tag{71}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\,, \tag{72}$$

donde $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son los vectores unitarios de la base cartesiana. Las derivadas primeras de los vectores unitarios son:

$$\dot{\vec{u}}_r = \left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta\,, \tag{73}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \left(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right)\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_r\,. \tag{74}$$

Las derivadas segundas son:

$$\ddot{\vec{u}}_r = \theta\ddot{\vec{u}}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r\,, \tag{75}$$

$$\ddot{\vec{u}}_\theta = -\ddot{\theta}\vec{u}_r - \dot{\theta}^2\vec{u}_\theta\,. \tag{76}$$

Así obtenemos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\,, \tag{77}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{u}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\,. \tag{78}$$

Con esta expresión de la derivada del vector posición en coordenadas polares la ley de fuerza, la Ecuación (68) queda:

$$\vec{u}_r\left(m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + T - mg\cos\theta\right) + \vec{u}_\theta\left(m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) + mg\sin\theta\right) = \vec{0}\,. \tag{79}$$

Ahora, puesto que la longitud del hilo es constante $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, con lo que la ecuación queda:

$$\vec{u}_r\left(-ml\dot{\theta}^2 + T - mg\cos\theta\right) + \vec{u}_\theta\left(ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta\right) = \vec{0}\,. \tag{80}$$

Los coeficientes de los vectores unitarios deben ser cero, puesto que los vectores son ortogonales (y por tanto, linealmente independientes). Fijándonos en el segundo obtenemos:

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0\,. \tag{81}$$

Para pequeñas oscilaciones $\sin\theta \simeq \theta$, por lo que la ecuación de la oscilación resulta:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0\,, \tag{82}$$

que es la ecuación de un oscilador armónico simple, con frecuencia angular o pulsación $\omega_0^2 = g/l$, de donde resulta la fórmula para el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{83}$$

que, como vemos, es independiente de la amplitud y de la masa. Para más ejemplos de osciladores armónicos lineales puedes consultar (Di Rocco, 2013).

Ejemplo 1. El péndulo de Foucault

Al oscilar un péndulo, su plano de oscilación permanece invariable, para un observador inercial. Sin embargo, desde el sistema de referencia de la Tierra, que es un sistema giratorio, este plano gira, debido a la aceleración de Coriolis, lo que interpretado desde el sistema de referencia inercial, fuera de la Tierra, es debido a que la Tierra está girando.

Lo que vamos a demostrar en este ejemplo es que el plano de oscilación del péndulo gira, es decir, experimenta una *precesión,* lo que constituye una prueba objetiva, desde la propia Tierra, de su rotación.

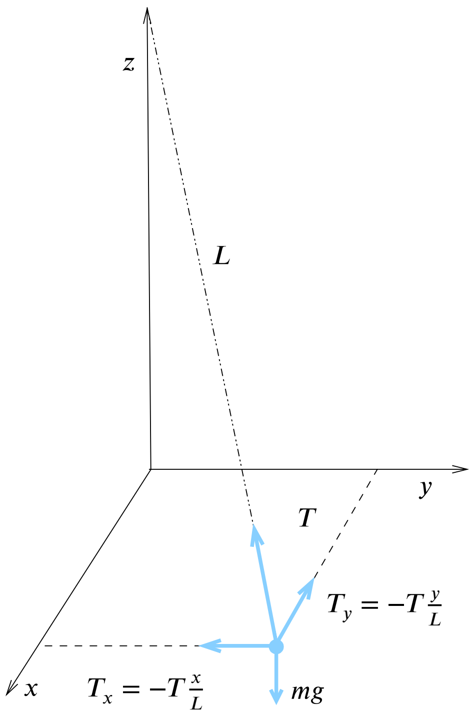

Figura 3: Péndulo de Foucault.

Vamos a considerar solamente oscilaciones de pequeña amplitud de la masa atada a la cuerda del péndulo. Utilizaremos como sistema de coordenadas uno tal que el origen coincide con la posición de equilibrio del péndulo, de longitud L, el eje z está en la vertical local y el péndulo oscila en el plano xy, ver la Figura 3. En estas condiciones, podremos despreciar la velocidad vertical $\dot{z}$ frente a las velocidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

La ecuación del movimiento, teniendo en cuenta la tensión T de la cuerda y la fuerza de Coriolis, es:

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,, \tag{84}$$

donde ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra. Las componentes de la tensión son:

$$T_x = -T\frac{x}{L}\,, \tag{85}$$

$$T_y = -T\frac{y}{L}\,, \tag{86}$$

$$T_z \simeq T\,. \tag{87}$$

La aceleración de la gravedad es $\vec{g} = (0, 0, -g)$ y las componentes de la velocidad angular, en función de la latitud λ, son $\vec{\omega} = (-\omega \cos\lambda, 0, \omega \sin\lambda)$. Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = \dot{x}\,, \tag{88}$$

$$v_y = \dot{y}\,, \tag{89}$$

$$v_z = \dot{z} \simeq 0\,. \tag{90}$$

Ahora podemos calcular el producto vectorial de $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (-\dot{y}\omega\sin\lambda, \dot{x}\omega\sin\lambda, -\dot{y}\omega\cos\lambda)\;. \tag{91}$$

Las ecuaciones del movimiento serán:

$$\ddot{x} \simeq -\frac{T}{m}\frac{x}{L} + 2\dot{y}\omega\sin\lambda\,, \tag{92}$$

$$\ddot{y} \simeq -\frac{T}{m}\frac{y}{L} - 2\dot{x}\omega\sin\lambda\,. \tag{93}$$

Para desplazamientos pequeños la tensión es aproximadamente igual al peso $T \simeq mg$. Definimos ahora las variables $\alpha^2 = T/mL \simeq g/L$ y llamamos $\omega_z = \omega \sin \lambda$, con ello las ecuaciones de arriba quedan:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x \simeq 2\omega_z \dot{y}\,, \tag{94}$$

$$\ddot{y} + \alpha^2 y \simeq -2\omega_z \dot{x}\,. \tag{95}$$

Obsérvese que la primera ecuación, en la coordenada x, posee un término con la coordenada y y que la ecuación en la coordenada y posee un término en la coordenada x. Este sistema se dice que es de ecuaciones *acopladas*. Para resolverlo sumamos a la Ecuación (94) la Ecuación (95) multiplicada por la unidad imaginaria i:

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \alpha^2 (x + iy) \simeq -2\omega_z (i\dot{x} - \dot{y}) = -2\omega_z i (\dot{x} + i\dot{y})\ . \tag{96}$$

Definimos ahora una nueva variable $q = x + iy$, con lo que la ecuación anterior queda:

$$\ddot{q} + 2\omega_z i\dot{q} + \alpha^2 q \simeq 0\,. \tag{97}$$

Esta es la misma ecuación del movimiento oscilatorio amortiguado, salvo que ahora el coeficiente de amortiguamiento es imaginario. La solución general es:

$$q(t) \simeq e^{-i\omega_z t}\left[A_1 \exp\left\{\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2 t}\right\} + A_2 \exp\left\{-\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2 t}\right\}\right]\ . \tag{98}$$

Si la Tierra no girase, entonces $\omega_z = 0$, y la Ecuación (97) se reduciría a:

$$\ddot{q}' + \alpha^2 q' = 0\,, \tag{99}$$

donde α corresponde a la frecuencia angular o pulsación propia del péndulo. Como esta pulsación es muy superior a la velocidad angular de rotación de la Tierra $\alpha \gg \omega$, la Ecuación (98) se aproxima por:

$$q(t) \simeq e^{-i\omega_z t}\left[A_1 e^{i\alpha t} + A_2 e^{-i\alpha t}\right]\ . \tag{100}$$

La solución de la Ecuación (99) es precisamente:

$$q'(t) = x'(t) + iy'(t) = A_1 e^{i\alpha t} + A_2 e^{-i\alpha t}\,, \tag{101}$$

luego la Ecuación (100) puede escribirse como:

$$q(t) \simeq q'(t) e^{-i\omega_z t}\,, \tag{102}$$

que en términos de x e y:

$$x(t) + iy(t) = \left(x'(t) + iy'(t)\right) e^{-i\omega_z t}\,. \tag{103}$$

Empleando ahora la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, resulta:

$$x(t) + iy(t) = \left(x'(t) + iy'(t)\right)\left(\cos\omega_z t - i\sin\omega_z t\right) =$$

$$\left[x'\cos\omega_z t + y'\sin\omega_z t\right] + i\left[-x'\sin\omega_z t + y'\cos\omega_z t\right]\,. \tag{104}$$

Igualamos ahora las partes reales de ambos miembros y las partes imaginarias, resultando las ecuaciones:

$$x(t) = x'\cos\omega_z t + y'\sin\omega_z t\,, \tag{105}$$

$$y(t) = -x'\sin\omega_z t + y'\cos\omega_z t\,, \tag{106}$$

que expresada en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_z t & \sin\omega_z t \\ -\sin\omega_z t & \cos\omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \tag{107}$$

que es precisamente la ecuación de una rotación, de ángulo $\theta = \omega_z t$, es decir, un ángulo que aumenta con el tiempo con una velocidad angular $\omega_z = \omega\sin\lambda$, que depende de la latitud. En el ecuador $\lambda = 0$, por lo que el plano del péndulo de Foucault no gira, mientras que en los polos, donde $\lambda = 90^\circ$ y el seno vale uno, la velocidad de rotación del plano del péndulo es igual a la velocidad de rotación de la Tierra.

El período de precesión del péndulo de Foucault, puesto que $\omega = 2\pi/T$, será:

$$T = \frac{T'}{\sin\lambda}\,. \tag{108}$$

Así, en el ecuador, donde $\sin 0 = 0$ el período es infinito, mientras que en los polos, donde $\sin 90^\circ = 1$, el período de precesión del péndulo coincide con el período de rotación de la Tierra.

Léon Foucault fue el primero en realizar este experimento, en París, en el año 1851. Puesto que la latitud de París es de $48^\circ 51'$, el período de precesión era de 31.87 horas y el péndulo barría un ángulo 11° en una hora, mientras que la Tierra gira $360/24 = 15^\circ$ en una hora.

El péndulo de Foucault, además de ser una prueba objetiva de la rotación de la Tierra, que serviría aun cuando el planeta estuviera cubierto de nubes y no se pudiera observar el firmamento, sirve también como dispositivo para determinar la latitud de un lugar.

7.8 Referencias bibliográficas

Alonso, V. et al. (2018). Ley de Hooke.

Di Rocco, H. (2013). Pequeñas oscilaciones (movimiento armónico simple, 2013).

Jimenez-Carballo, C. A. (2018). MAS.

Osaba-Rodrıguez, C. (2019). Movimiento arm onico simple: Determinando la constante de fase. *Rev. Cubana Fis*, 36, 51.

Sanjosé López, V., Hurtado Santón, E., & Arribas Garde, E. (1991). Más allá del movimiento armónico simple: un ejemplo académico sobre el uso didáctico del ordenador.

Vettorel, S., Grigioni, L., Silva, C., & Farina, J. (2015). Oscilaciones mecánicas.

7.9 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Un punto material describe una trayectoria circular, con un movimiento circular uniforme, con una frecuencia de 30 rpm. El radio de la circunferencia es de 1.5 m. Expresar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resultaría de proyectar sobre un diámetro las posiciones del punto material en los siguientes casos: a) Se comienza a contar el tiempo cuando la proyección del punto móvil es el centro de la circunferencia y el movimiento va en el sentido de las agujas del reloj. b) Se empieza a contar el tiempo cuando el radio ha girado un ángulo de 57.328°. *Solución*: a) $x = 1.5 \sin \pi t$, b) $x = 1.5 \sin(\pi t + 1)$.

Ejercicio 2. Un punto material oscila con un movimiento vibratorio armónico simple de amplitud 20 cm y frecuencia 10 Hz. Calcular la velocidad y la aceleración máximas. *Solución*: $v_{\text{max}} = 400\pi$ cm/s, $a_{\text{max}} = -8000\pi$ cm/s^2.

Ejercicio 3. Dos movimientos vibratorios armónicos tienen el mismo período, dirección y amplitud. Calcular cuál ha de ser la diferencia de fase entre ellos para que la amplitud del movimiento resultante sea la misma que la de cualquiera de ellos. *Solución*: $\phi = 120°$.

Ejercicio 4. Un punto material de 40 g de masa realiza un movimiento vibratorio armónico simple de período 0.32 s. Calcular el valor de la amplitud, sabiendo que el valor máximo de la fuerza responsable del movimiento vale 10 N. *Solución*: 65 cm.

Ejercicio 5. Un péndulo de semiperíodo 1 s tiene una longitud de 1 m. Calcular la longitud de un péndulo en el mismo lugar de la Tierra para que su período de oscilación sea de 10 s. *Solución*: 25 m.

Ejercicio 6. Se tiene un péndulo de longitud 0.5 m, del que pende una masa de 2 kg, en el interior de una nave espacial. Se pide calcular el período del péndulo si la nave acelera hacia arriba , desde la superficie de la Tierra, con una aceleración que es igual a la mitad de la aceleración de la gravedad. Calcular también el período del péndulo si la nave, una vez en movimiento, y cerca de la superficie terrestre, desacelera con la mitad de la aceleración de la gravedad. *Solución*: 1.16 s, 2.01 s.

Ejercicio 7. Un cuerpo de 6 kg de masa está unido a un muelle de constante elástica $k = 20$ N/m y a un amortiguador viscoso de coeficiente de amortiguamiento $R = 20$ N · s/m. Se desplaza de su posición de equilibrio 15 cm y se suelta. a) Determinar la frecuencia angular propia y la frecuencia angular del oscilador, indicando de qué tipo de amortiguamiento se trata. b) Calcular el valor de la elongación transcurrido un tiempo de 1 s. *Solución*: a) $\omega_0 = \sqrt{10/3}$, $\omega = \sqrt{5}/3$ b) 2.8 cm.