Teoría de campos

Dinámica relativista

Índice

Esquema

Intervalo espacio-temporal

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Intervalo de tiempo propio

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La fuerza relativista

$$\vec{F} - \left(\vec{F} \cdot \vec{\beta}\right)\vec{\beta} = m\gamma\vec{a}$$

La energía relativista

$$T = m\gamma c^2 - mc^2$$

$$E = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + (pc)^2}$$

Unidades naturales

$$c = 1$$

Cuadrivectores

$$x_0' = \gamma\left(x_0 - \beta x_1\right)$$

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - \beta x_0\right)$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

Cuadrivector velocidad

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v})$$

Cuadrimomento

$$p_\mu = mu_\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})$$

La masa de un sistema de partículas

$$s = E^2 - p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2$$

Ideas clave

6.1 Introducción y objetivos

En este tema continuaremos estudiando las consecuencias y las reformulaciones de la teoría de la relatividad especial, con énfasis en la parte dinámica. Empezaremos introduciendo el concepto de intervalo espacio-temporal y estudiaremos sus tres tipos. Definiremos el concepto de cuadrivector, que aplicaremos primero a la posición y el tiempo. Después construiremos un cuadrivector asociado a la velocidad. De él obtendremos el cuadrivector momento lineal. Interpretaremos su componente cero en términos de la energía, obteniendo la fórmula de la energía relativista en función de la velocidad y la importantísima relación entre masa y energía en reposo. Obtendremos una fórmula que relaciona la energía, la masa y el momento. Introduciremos las unidades naturales. Y finalmente, examinaremos el concepto de masa de un sistema de partículas.

Los objetivos de este tema son:

- Saber qué es un **intervalo espacio-temporal** y qué es un invariante Lorentz.
- Comprender el concepto de **cuadrivector** y entender que su módulo es un invariante Lorentz.
- Entender la construcción del **cuadrivector velocidad** y el significado y alcance de la **velocidad propia**.
- Comprender la construcción del **cuadrivector momento lineal**.
- Saber obtener la fórmula de la **energía relativista** en función de la velocidad.
- Comprender la relación entre la energía relativista y la **componente cero del cuadrivector momento**.

- Saber que la masa se considera un invariante Lorentz, mientras que lo que antiguamente se consideraba **masa relativista** no es sino la energía y por tanto una componente del cuadrivector momento.
- Conocer la **relación entre la energía, la masa y el momento** así como la relación entre la energía y el momento para partículas de masa nula, como el fotón.
- Saber que la masa es un invariante Lorentz y que lo que se llamaba **masa relativista** no es más que la energía.
- Entender el concepto de **unidades naturales** cuando se define unidad de longitud tal que la constante universal de la velocidad de la luz en el vacío es igual a la unidad.
- Comprender el concepto de **masa invariante** de un **sistema de partículas**.

6.2 Intervalo espacio-temporal

Hemos visto que para todos los sistemas de referencia inerciales la cantidad:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \tag{1}$$

es la misma, tal como se deduce al aplicar las transformaciones de Lorentz. Este es un primer ejemplo de lo que se conoce como *invariante Lorentz.* Lo reescribiremos, por conveniencia, llamándolo s^2 como:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\,, \tag{2}$$

También se cumple que para incrementos de tiempo y espacio obtenemos un invariante Lorentz:

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\,. \tag{3}$$

Y en forma diferencial, el invariante Lorentz quedaría:

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \,. \tag{4}$$

Pues bien, para cualquier par de sucesos el invariante Lorentz ds^2, puede dar lugar a las siguientes situaciones, según su signo:

- Intervalos de **tipo temporal**: $ds^2 > 0$ En este caso la distancia recorrida por la luz en el vacío en el intervalo de tiempo que separa ambos sucesos es mayor que la distancia entre ellos. Esto implica que podemos ir a un sistema de referencia inercial en el que estos sucesos ocurren en la misma posición. En este caso, el intervalo de tiempo que los separa coincide con el intervalo de tiempo propio, que como ya vimos en el tema anterior, es menor que el intervalo de tiempo medido en cualquier otro sistema. Como consecuencia, estos sucesos pueden estar conectados causalmente.

- Intervalos de **tipo luz**: $ds^2 = 0$. En este caso la distancia que separa ambos sucesos es igual a la distancia que recorre la luz durante el intervalo de tiempo entre ambos sucesos. Si un par de sucesos corresponden a un intervalo de tipo luz en un sistema de referencia inercial, serán también de tipo luz en cualquier otro sistema de referencia inercial. En consecuencia, estos sucesos pueden estar vinculados también por una relación causal, con una señal que se propague a la velocidad de la luz en el vacío.

- Intervalos de **tipo espacial**: $ds^2 < 0$. En este caso la distancia que separa los sucesos es mayor que la que recorre la luz en el vacío durante el intervalo de tiempo que los separa. Esto implica que estos sucesos no pueden estar conectados causalmente (pues esto requeriría de una señal que se propagase a una velocidad mayor que la de la luz en el vacío). Para este tipo de sucesos, hay un sistema de referencia en el que el intervalo de tiempo que los separa es cero, es decir, que son sucesos simultáneos. Pero lo son solamente en un sistema de referencia, no en otros, hecho que concuerda con la pérdida del carácter absoluto de la simultaneidad en la relatividad especial. El orden temporal de estos sucesos tampoco está definido. Puede haber sistemas de referencia donde uno suceda antes que el otro y otros en donde el orden temporal esté invertido.

6.3 Intervalo de tiempo propio

Recurriendo a la expresión del intervalo espacio-temporal en forma diferencial

$$ds^2 = (cdt)^2 - (d\vec{r})^2\,, \tag{5}$$

si hacemos cero la componente espacial en un sistema de referencia inercial, en él el intervalo de tiempo será el intervalo de tiempo propio, que denotaremos por $d\tau$, con lo que tendremos:

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (d\vec{r})^2 = (cdt)^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right)\,. \tag{6}$$

Y tomando la raíz cuadrada:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{7}$$

Con ello tenemos que:

$$dt = \gamma d\tau\,, \tag{8}$$

resultado, ya conocido del tema anterior, de que el intervalo de tiempo medido en un sistema de referencia inercial en el que lo sucesos ocurren en posiciones distintas es siempre mayor, por un factor de Lorentz γ al intervalo de tiempo propio. Por consiguiente, el intervalo de tiempo propio está relacionado directamente con el invariante Lorentz que es el intervalo espacio-temporal.

Te recomendamos ver el vídeo sobre los intervalos espacio-temporales:

Accede al vídeo: Intervalos espacio-temporales y tiempo propio.

6.4 Cuadrivectores

El hecho de que la cantidad dada por la Ecuación (2) sea un invariante Lorentz (es decir, la misma en todos los sistemas de referencia inerciales) da pie a definir el cuadrivector posición, como un vector que consta de una componente cero definida por $x_0 = ct$ y unas componentes espaciales, que serían $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.

Así, el intervalo espacio-temporal, que es un invariante Lorentz, podría concebirse como el módulo de un vector que queda invariante al realizar una rotación en un espacio de cuatro dimensiones, que incluye, además de las tres dimensiones espaciales, la dimensión temporal, como equivalente a una dimensión espacial. A este espacio de cuatro dimensiones se lo conoce como *espacio de Minkowski* o espacio-tiempo y será de gran relevancia para la formulación de la teoría de la Relatividad General.

Que el intervalo espacio-temporal adopte la forma dada por la Ecuación (2) o bien, equivalentemente, por la Ecuación (1), se puede conseguir de dos maneras:

- Haciendo el tiempo una magnitud imaginaria, con el producto escalar ordinario. De este modo tendríamos:$s^2 = (ict, x, y, z) \cdot (ict, x, y, x) = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.
- Redefiniendo el producto escalar, con la llamada matriz métrica, de modo que haya un signo menos relativo entre la componente temporal (que ahora será una cantidad real) y las componentes espaciales.

Este último caso se expresaría de la siguiente manera:

$$s^2 = (ct, x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_\mu g_{\mu\nu} x_\nu \, , \tag{9}$$

donde $g_{\mu\nu}$es la matriz métrica. Si por convención hacemos uso de la Ecuación (1) la matriz métrica sería:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Ambas formas son equivalentes. Solamente hay que tener presente qué convención se está usando y mantener la coherencia.

Esta última forma, la de redefinir el producto escalar con la matriz métrica del espacio de Minkowski, es la más conveniente, porque el tiempo aparece como una magnitud real, porque es la más usada en textos modernos y porque enlaza con la formulación de la Relatividad General. El espacio de Minkowski se dice que tiene una geometría *pseudoeuclídea*. En este artículo (de la Fuente Benito et al., 2020) puedes encontrar una exposición de las características del espacio de Minkowski que permite captar la esencia de la relatividad especial y explicar y demostrar sus efectos mediante gráficos, sin recurrir a fórmulas, de forma sencilla.

Hay que señalar que es habitual la convención de representar las magnitudes espaciales mediante índices latinos y los cuadrivectores mediante índices griegos.

En términos de las componentes del cuadrivector espacio-temporal las transformaciones de Lorentz rezan:

$$x'_0 = \gamma \left(x_0 - \beta x_1 \right) , \tag{11}$$

$$x'_1 = \gamma \left(x_1 - \beta x_0 \right) , \tag{12}$$

$$x'_2 = x_2 , \tag{13}$$

$$x'_3 = x_3 , \tag{14}$$

donde $\beta = v/c$ y el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. O en notación matricial, una transformación de Lorentz del cuadrivector será:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \tag{15}$$

Por último, hay que notar que si el cuadrivector espacio-temporal $x_\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$ es un cuadrivector tal que su módulo (calculado conforme a la métrica de Minkowski) es un invariante Lorentz, el diferencial $dx_\mu = (cdt, d\vec{r})$,también es un cuadrivector cuyo módulo también es un invariante Lorentz.

Para una exposición de la relación entre los cuadrivectores y el principio de relatividad o invariancia de las leyes de la Física para todos los observadores inerciales, puede consultarse (Robledo Padilla et al., 2007).

6.5 Cuadrivector velocidad

Para construir un cuadrivector asociado a la velocidad nos valdremos del hecho de que dx_μ es un cuadrivector y lo dividiremos, es decir, diferenciaremos con respecto a un invariante Lorentz, el tiempo propio. De esta manera el cuadrivector velocidad, que se representa por u_μ será:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v}), \tag{16}$$

donde hemos empleado la Ecuación (8). Interpretemos el significado de la componente espacial del cuadrivector velocidad $\gamma\vec{v}$. La velocidad $\vec{v}$ es la velocidad determinada a partir de la derivada $d\vec{r}/dt$, es decir, es el cociente entre la distancia recorrida en un sistema de referencia y el intervalo de tiempo empleado, medido también en ese sistema de referencia. Pongamos el ejemplo de una nave que parte desde la Tierra a un astro lejano. Esta velocidad sería la de la nave medida en el sistema de referencia (supuesto inercial a todos los efectos) de la Tierra. Esta velocidad no puede exceder ni ser igual a la velocidad de la luz, aunque sí aproximarse asintóticamente a ella.

En cambio, la velocidad propia, que el producto $\gamma\vec{v}$ sí puede crecer indefinidamente hasta el infinito (conforme v se aproxima a c). La velocidad propia no es otra cosa que el cociente de la distancia medida en el sistema de referencia de la Tierra (en el ejemplo anterior) dividida por el tiempo propio, es decir, el tiempo medido por el objeto, en este caso la nave, en movimiento.

De esta manera, es posible para una nave desplazarse grandes distancias cósmicas en un tiempo relativamente breve, puesto que en el sistema de referencia de partida (la Tierra) ha pasado, en cambio, un tiempo mucho mayor, consistente con que la velocidad se aproxima asintóticamente a c sin alcanzarla ni superarla.

Veamos también cuál es el módulo del cuadrivector velocidad:

$$u_\mu g_{\mu\nu} u_\nu = \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 \left(c^2 - v^2\right)}{c^2 - v^2} = c^2 \,. \tag{17}$$

El módulo del cuadrivector velocidad es pues una constante, la constante universal de la velocidad de la luz en el vacío al cuadrado.

6.6 Cuadrimomento

Definimos ahora el cuadrivector momento lineal, por analogía con la mecánica newtoniana, como el producto de la masa, que tomaremos como la masa en reposo, que es por tanto un invariante, multiplicada por el cuadrivector velocidad. El que la velocidad sea un cuadrivector y la masa un invariante nos asegura que el momento lineal así definido será también un cuadrivector, que llamaremos cuadrimomento. Este es:

$$p_\mu = m u_\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})\,. \tag{18}$$

El módulo del cuadrivector momento lineal será:

$$p_\mu g_{\mu\nu} p_\nu = m^2 c^2 \,, \tag{19}$$

que también es una constante independiente del sistema de referencia inercial. A partir de la componente espacial del cuadrimomento vamos a estudiar la fuerza y la energía relativistas. Al estudiar la energía relativista encontraremos una interpretación física para la componente temporal del cuadrimomento.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre cuadrivectores:

Accede al vídeo: Cuadrivectores.

6.7 La fuerza relativista

La ley, empleado por Einstein en 1905, $\vec{F} = m\vec{a}$ ya no es válida en el régimen relativista. Fue Planck el que se dio cuenta de que había que emplear el momento lineal relativista, dado por $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$. Con él la ecuación del movimiento se escribe:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right) = m\gamma\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \,. \tag{20}$$

El segundo término resulta ser:

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dt}\vec{v} = -m\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2v}{c^2}a\right)\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \,, \tag{21}$$

donde, como antes, $\beta = v/c$. Por tanto la Ecuación (20), resulta:

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \,. \tag{22}$$

Obsérvese que la fuerza es la suma de dos términos: uno paralelo a la aceleración y otro paralelo a la velocidad. Esto implica que la fuerza, en el régimen relativista, ya no es proporcional a la aceleración y, por tanto, la masa ya no es el cociente entre la fuerza y la aceleración, por lo que no es una medida de la inercia. Por supuesto, la definición de masa como medida de la inercia sigue siendo válida siempre que se tenga en cuenta que esto es válido para velocidades no relativistas, es decir para β«1.

Vamos a resolver ahora la Ecuación (22) para la aceleración. Para ello tomamos el producto escalar con la velocidad $\vec{\beta}$ en ambos miembros:

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^3 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma(1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{1 - \beta^2} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}, \quad (23)$$

de donde:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3}, \quad (24)$$

que sustituida en la Ecuación (22) resulta:

$$\vec{F} - \left(\vec{F} \cdot \vec{\beta}\right) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a}, \quad (25)$$

de manera que tenemos que la aceleración es la suma de dos términos: uno paralelo a la fuerza y otro paralelo a la velocidad.

Con ello tenemos que, en general, la fuerza y la aceleración tienen direcciones distintas salvo en dos casos:

- Que la fuerza y la velocidad sean paralelas, en cuyo caso tenemos: $\vec{F} - \vec{F}\beta^2 = m\gamma\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$.
- Que la fuerza y la velocidad sean perpendiculares, en cuyo caso tenemos: $\vec{F} = m\gamma\vec{a}$.

Podemos observar que en estos dos casos los coeficientes de proporcionalidad son distintos.

Para una introducción a la idea de fuerza covariante y a su uso para la obtención de la ecuación de la trayectoria, puedes consultarse (de Sans & Latorre, 2011).

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre la fuerza relativista:

Accede al vídeo: Fuerza relativista.

6.8 La energía relativista

Para calcular la energía cinética relativista calcularemos el trabajo, de la siguiente manera:

$$T = W = \int \frac{dp}{dt} dx = \int v dp , \tag{26}$$

donde hemos hecho la integral del producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Ahora, la expresión del momento lineal relativista es $p = m\gamma v$. Realizamos la siguiente derivada:

$$dp = \frac{dp}{dv} dv . \tag{27}$$

La derivada del momento respecto de la velocidad, teniendo en cuenta el factor de Lorentz γ es:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m\frac{d\gamma}{dv}v + m\gamma\frac{dv}{dv} =$$

$$mv\frac{d}{dv}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + m\gamma = mv\left[\frac{-2v}{c^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] + m\gamma =$$

$$\frac{mv^2/c^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} + \frac{m\left(1-v^2/c^2\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} = \frac{m}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} \tag{28}$$

La energía cinética será, pues:

$$T=\int_0^v \frac{mv}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}dv=\frac{mc^2}{-2}\int_0^v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2v}{c^2}\right)=$$

$$=m\frac{c^2}{-2}\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{-1/2}\right]_0^v=m\gamma c^2-mc^2= \qquad (29)$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es la que presentamos a continuación. Análogamente a lo que se hace en la mecánica newtoniana, la diferencia en energía cinética es el trabajo realizado por la fuerza:

$$\Delta E=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{v}dt\,. \qquad (30)$$

Ahora empleamos la segunda ley de Newton $\vec{F}=d\vec{p}/dt$:

$$\Delta E=\int_1^2 \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}dt=\int_1^2 \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}dt\,, \qquad (31)$$

donde en el último paso hemos utilizado la regla de la cadena. Ahora bien, tenemos que:

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\gamma}=\vec{v}\cdot\frac{d}{d\gamma}\left(m\gamma\vec{v}\right)=mv^2+m\gamma v\frac{dv}{d\gamma}\,. \qquad (32)$$

Ahora calculamos:

$$\frac{d\gamma}{dv}=\frac{d}{dv}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{-2v}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\,, \qquad (33)$$

de donde:

$$\frac{dv}{d\gamma}=\frac{c^2}{v}\frac{1}{\gamma^3}\,, \qquad (34)$$

por lo que:

$$m\gamma v\frac{dv}{d\gamma}=m\gamma\frac{c^2}{\gamma^3}=m\frac{c^2}{\gamma^2}\,. \qquad (35)$$

Volviendo a la Ecuación (32) tenemos:

$$mv^2 + m\frac{c^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 mv^2 + mc^2}{\gamma^2} = \left(\frac{mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 \,. \tag{36}$$

Así, la Ecuación (31) resulta:

$$\Delta E = mc^2 \int_1^2 \frac{d\gamma}{dt} dt = mc^2 \Delta\gamma \,. \tag{37}$$

En total, que tenemos que la energía cinética es:

$$T = m\gamma c^2 - mc^2 \,. \tag{38}$$

donde m es la masa de la partícula en reposo y se considera un invariante relativista.

La energía cinética es, pues, la diferencia entre la energía $E = m\gamma c^2$ y la energía cuando la partícula está en reposo, que es la *energía en reposo* que está asociada a la masa $E_0 = mc^2$. La deducción histórica del propio Albert Einstein la realizó en su artículo titulado «¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido en energía?» que puede consultarse, traducido al español, en (Einstein, 2005).

Ejemplo 1. Energía en reposo de una unidad atómica de masa

Vamos a calcular la energía en electronvoltios de una unidad atómica de masa (uma). Un electronvoltio se define como la energía que adquiere un electrón cuando es acelerado por una diferencia de potencial (eléctrico) de un voltio y puesto que la carga del electrón es $e = 1.603 \cdot 10^{-19}$ C, un electronvoltio (eV) valdrá: $1\ \text{eV} = 1.603 \cdot 10^{-19}$ J. Primero pasamos una uma a kg, usando el número de Avogadro $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$.

$$1\ \text{uma} = \frac{1}{6.023 \cdot 10^{23}}\, g = 1.66 \cdot 10^{-24}\ \text{g} = 1.66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \,.$$

$$E = mc^2 = 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 1.49 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}\,.$$

Ahora pasamos de julios a eV:

$$1.49 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 1.49 \cdot 10^{-10}/1.603 \cdot 10^{-19} = 9.30 \cdot 10^8\,\mathrm{eV} = 930\,\mathrm{MeV}\,,$$

donde MeV significa megaelectronvoltios, es decir, millones de eV.

6.9 Componente cero del cuadrimomento

Ahora ya estamos en disposición de interpretar la componente temporal del cuadrimomento. En efecto, vemos que se trata simplemente del cociente entre la energía y la velocidad de la luz en el vacío, pues:

$$p_0 = m\gamma c = \frac{m\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}\,. \tag{39}$$

Examinemos ahora el límite no relativista de la energía, para ello desarrollamos en serie de Taylor el factor γ, que es la función $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ para x pequeña.

- La primera derivada es:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-1)\,(1-x)^{-3/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,. \tag{40}$$

- La segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(-1)\,(1-x)^{-5/2} \;\Rightarrow\; f''(0) = \frac{3}{4}\,. \tag{41}$$

- La tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)(-1)\,(1-x)^{-7/2} \;\Rightarrow\; f'''(0) = \frac{15}{8}\,. \tag{42}$$

Con lo que $f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(0) + \ldots$. Para la energía, aplicando este desarrollo de Taylor, resulta:

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \ldots \right) =$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{5}{16}m\frac{v^6}{c^4} + \ldots \tag{43}$$

Observamos, pues, que la energía cinética, a velocidades pequeñas, coincide con la que se obtiene de la mecánica newtoniana (segundo término). Los siguientes términos son correcciones relativistas a la energía cinética. Aparece, además, un término, asociado a la masa (como invariante), que es la energía en reposo que ya habíamos mencionado. Calculemos ahora el módulo del cuadrivector momento lineal, con la nueva expresión para la componente cero

$$p_\mu^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \,. \tag{44}$$

De esta expresión obtenemos la siguiente fórmula para la energía:

$$E = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + (pc)^2} \,. \tag{45}$$

De esta fórmula podemos deducir dos consecuencias:

1. Si el momento lineal es cero, es decir, si la partícula se encuentra en reposo $\vec{p} = 0$ entonces $E = mc^2$, la energía es igual a la energía en reposo, asociada a la masa, como ya sabíamos.

2. Si tenemos partículas con masa en reposo nula, tales como los fotones $m = 0$ entonces la energía es proporcional al momento lineal $E = pc$.

Te recomendamos ver el vídeo sobre la energía relativista:

Accede al vídeo: Energía relativista.

La relación más general entre la energía, el momento y la velocidad es:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{v}\,. \tag{46}$$

Como el cuadrimomento es también un cuadrivector, entre dos sistemas de referencia inerciales se transformará conforme a las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \tag{47}$$

6.10 Acerca de la masa relativista

En este punto es conveniente advertir al lector sobre un concepto que aparece a menudo en la literatura, como es el de masa relativista, que fue desarrollado en los comienzos de la formulación de la teoría, cuando esta todavía no había sido propiamente entendida. Por masa relativista se entendía $m\gamma$. Sin embargo, lo más apropiado es reservar el nombre de masa para lo que hemos venido llamando masa en reposo, que es un invariante Lorentz; mientras que la mal llamada masa relativista es simplemente E/c^2, la energía dividida por el cuadrado de la velocidad de la luz, y que es la componente cero (o componente cuarta, en otras convenciones) del cuadrivector momento.

Se ha de notar que conforme aumenta la energía de una partícula su velocidad se acerca asintóticamente a la velocidad de la luz en el vacío $v \to c$, o, en nuestra nueva notación $\beta \to 1$, mientras que el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ tiende a infinito. El factor de Lorentz γ es una medida del carácter relativista de un sistema físico y como tal se emplea a menudo, sobre todo en Física de partículas.

Para una discusión detallada sobre las sutilezas de la relación entre la masa y la energía y de los errores en que se incurre, puede consultarse (Berenguer, 2009).

6.11 Unidades naturales

Como la velocidad de la luz en el vacío c es una constante universal, y con objeto de simplificar las fórmulas y ecuaciones, es conveniente redefinir la unidad de longitud, asignando a $c = 1$, es decir, redefiniendo la longitud como la distancia recorrida por la luz en el vacío en un segundo. Esta distancia es 299 792 458 m,que es una distancia muy grande a escala terrestre, pero muy pequeña a escala cósmica. En estas nuevas unidades, es decir, con $c = 1$, la masa, la energía y el momento tienen las mismas dimensiones, que en Física subnuclear se miden en electronvoltios eV y sus múltiplos.

Con esta convención tendremos que $E_0 = m$, para la energía en reposo, o bien que $E^2 = m^2 + p^2$ para la fórmula de la energía, o para partículas sin masa, como el fotón, $E = p$.

6.12 La masa de un sistema de partículas

La masa de un sistema de partículas se denomina *masa invariante*, o simplemente masa, puesto que la masa es siempre un invariante. Si las partículas no interactúan entre sí la expresión de la masa del sistema es sencilla:

$$m = \sqrt{E^2 - p^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2}\,. \tag{48}$$

El cuadrado de la masa del sistema es un invariante que se designa por s y es:

$$s = E^2 - p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 . \tag{49}$$

Obsérvese que s es siempre positivo o cero $s \geq 0$. Si nos situamos en el sistema de referencia del centro de masas, definido como aquel en el que la suma de momentos es cero, tenemos:

$$s = \left(\sum_{i=1}^{n} E_i^{CM}\right)^2 . \tag{50}$$

Es decir, que la masa invariante de un sistema de partículas es igual a su energía en el sistema de referencia centro de masas. Considérese ahora el sistema formado por dos partículas que no interactúan. Entonces su invariante será igual a:

$$s = \left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \,. \tag{51}$$

En términos de la velocidad $\vec{\beta} = \vec{p}/E$ obtenemos:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2\right) , \tag{52}$$

de donde se concluye que la masa de un sistema de partículas, aun si estas no interactúan, no es igual a la suma de sus masas por separado.

Pero hay más: la masa ni siquiera es una medida de la cantidad de materia, puesto que un sistema formado por dos fotones puede tener masa. En efecto, supongamos dos fotones con la misma energía E. Por no tener masa, su energía es igual a su momento (en unidades naturales) $p = E$. Su energía total será $E_{tot} = 2E$.

Si los fotones se mueven en la misma dirección y sentido entonces su momento total es $p_{tot} = 2E$. Y por tanto, su masa $m = \sqrt{E_{tot}^2 - p_{tot}^2} = 0$. Pero si los fotones se mueven en la misma dirección pero en sentidos opuestos, entonces su momento total es $p_{tot} = 0$ y su masa $m = \sqrt{E_{tot}^2 - p_{tot}^2} = 2E$.

6.13 Referencias bibliográficas

Berenguer, R. A. A. (2009). Una aproximación geométrica a la equivalencia masa-energía en relatividad. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, 3(1), 121.

de la Fuente Benito, D., Pelegrín, J. A. S., & Saiz, A. Z. (2020). Enseñando relatividad especial gráficamente. *Pensamiento Matemático*, 10(1), 4.

de Sans, P. P. & Latorre, J. I. (2011). La teoría de la relatividad especial. *Revista Española de Física*, 19(1).

Einstein, A. (2005). ¿depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía? *Teorema: Revista internacional de Filosofía*, 24(2), 121–124.

Robledo Padilla, F. Á., Menchaca Maciel, M. d. C., & Morones Ibarra, J. R. (2007). Los vectores en la física. *Ingenierías*, 10(36), 47–55.

6.14 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Un astronauta desea viajar hasta la estrella Vega, a una distancia de 26 años luz de la Tierra ¿A qué velocidad ha de viajar respecto a la Tierra para que el tiempo transcurrido en la nave sea de 5 años? ¿Qué tiempo habrá transcurrido en la Tierra durante el viaje? *Solución*: $v = 0.982c$, 26.5 años.

Ejercicio 2. Una central nuclear tiene una potencia de 2 Mw. Calcular la disminución en masa del combustible al cabo de un año. *Solución*: 0.7 g

Ejercicio 3. La energía en reposo de un electrón es igual a su energía cinética. Calcular su velocidad en m/s. *Solución*: $2.60 \cdot 10^8$ m/s.

Ejercicio 4. En un sistema de referencia se observa que una partícula posee una energía de 5 GeVy un momento de 3 GeV. Calcular a) ¿Cuál es la energía de esta partícula en un sistema de referencia en el que el momento vale 4 GeV? b) La masa de la partícula. c) ¿Cuál es la velocidad relativa entre ambos sistemas de referencia? *Solución*: a) 5.66 GeV, b) 4.29 uma,c) $0.185c$.

Ejercicio 5. Una partícula de masa m posee una energía cinética de $2mc^2$ y colisiona con una partícula en reposo de masa $2m$. Tras la colisión ambas partículas permanecen unidas. Calcular, en función de m, la masa de la partícula compuesta.

Solución: $\sqrt{17}m$.

Ejercicio 6. Supongamos un fotón de energía 200 MeV que se desplaza en una cierta dirección y en la dirección perpendicular otro fotón de energía 100 MeV. Si una partícula material tuviera la energía y el momento total del sistema descrito de los dos fotones ¿Cuál sería su masa? y ¿Cuál sería su velocidad? *Solución*: 200 MeV, $0.745c$.

Ejercicio 7. La energía en reposo de un electrón es de 0.511 MeV. Si su velocidad es $0.5c$, calcular su energía cinética. *Solución*: 79.1 keV.