

Electromagnetismo I

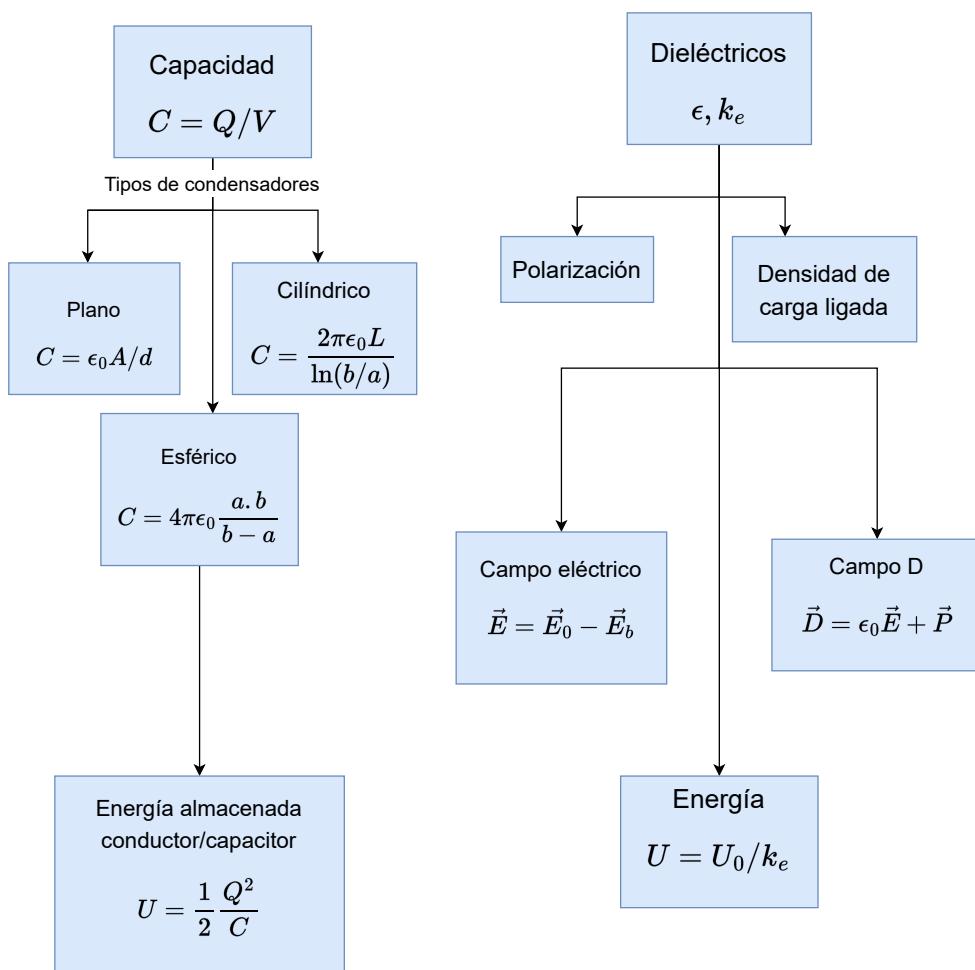
---

# Capacidad y dieléctricos

# Índice

<b>Esquema . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>Ideas clave . . . . .</b>	<b>3</b>
5.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
5.2 Capacidad . . . . .	4
5.3 Energía almacenada en conductores . . . . .	8
5.4 Polarización . . . . .	10
5.5 Densidad de cargas ligadas . . . . .	11
5.6 Campo eléctrico dentro de un dieléctrico . . . . .	13
5.7 El campo de desplazamiento o campo D . . . . .	17
5.8 Tipos de dieléctricos . . . . .	19
5.9 Capacidad en presencia de un dieléctrico . . . . .	21
5.10 Energía eléctrica en dieléctrico . . . . .	23
5.11 Cuaderno de ejercicios . . . . .	25
5.12 Referencias bibliográficas . . . . .	28

# Esquema



## 5.1 Introducción y objetivos

En este capítulo vamos a hablar de dos conceptos clave como son los *condensadores* y los *dieléctricos*. Los primeros dispositivos son de gran importancia en la vida cotidiana. Por ejemplo, se usan para eliminar las chispas en los sistema de encendido de los coches, o para sintonizar la frecuencia de los receptores de radio, o como dispositivos de almacenamiento de energía en los láseres pulsados. Lo que hace un condensador es almacenar carga. En este capítulo veremos con detalle sus propiedades fundamentales y cómo funcionan. Por otro lado, nos encontramos la materia que no es conductora, es decir, tenemos también materiales dieléctricos. Aquí introduciremos la definición de *cargas ligadas*. Veremos también cómo los dieléctricos pueden potenciar las propiedades de los conductores y en particular los condensadores.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Aprender la definición de **capacidad**, y entender cómo la geometría juega un papel importante en su valor final.
- ▶ Saber cómo se calcula la energía almacenada en un conductor o **condensador**.
- ▶ Entender qué significan las **cargas ligadas** y **polarización**.
- ▶ Comprender cómo la presencia de un **dieléctrico** afecta al valor del campo eléctrico.
- ▶ Familiarizarse con el campo  $\vec{D}$ , y que entender su relación con el campo eléctrico en presencia de un dieléctrico.
- ▶ Entender cómo la presencia de un dieléctrico cambia el **valor de la energía eléctrica**.

## 5.2 Capacidad

En la introducción hemos hablado sobre los *condensadores*. Un condensador está formado por dos conductores separados por un aislador. Veremos en este apartado que la llamada *capacidad* de un dispositivo depende de su geometría y del material que separa a los dos conductores cargados: ese material se llama *dieléctrico*.

Consideremos dos conductores separados entre ellos por el vacío. Normalmente, los dos conductores inicialmente no tienen carga neta, pero al transferir los electrones de un conductor al otro, así se carga el condensador. Al final, los dos conductores tienen una carga igual y opuesta, que llamaremos  $Q$ . Cuando se dice que un condensador tiene una carga  $Q$ , indica que uno de los conductores tiene una carga  $+Q$ , y el otro una carga  $-Q$ . Una forma simple de cargarlo es conectar el condensador a una batería hasta que se cargue y después desconectarla. Esto lo que nos indica es que la diferencia de potencial entre los conductores va a ser igual al voltaje de la batería. Consideremos que esa diferencia de potencial es  $V$ . El campo eléctrico en la región entre los dos conductores es proporcional al valor de  $Q$ . De todo esto podemos deducir que  $V$  (notar que en este capítulo vamos a referirnos a la diferencia de potencial bajo esta convención, que es lo que se suele usar para circuitos) también es proporcional al valor de  $Q$ .

Pero su cociente no cambia, es constante. Esto nos lleva a la siguiente definición:

### Definición 1: Capacidad

La *capacidad* de un condensador se define como el cociente entre la magnitud de la carga que posee cualquiera de los conductores dividido por la magnitud de la diferencia de potencial entre ellos.

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (1)$$

Notar que la definición nos indica que esta magnitud siempre es positiva. La capacidad es una medida de la capacidad de un dispositivo para almacenar carga y energía potencial eléctrica. Las unidades de  $C$  son farad (1 F), recordando que es lo mismo que coulomb por volt (1 C/V).

### Ejemplo 1. Conductor esférico aislado

Con este ejemplo queremos mostrar que la capacidad depende de la geometría del dispositivo. El conductor tiene un radio  $R$  y una carga  $Q$ . El segundo conductor lo podemos considerar como una esfera concéntrica de radio infinito. Si recordamos de lo visto anteriormente, el potencial de una esfera es  $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , y donde  $\phi = 0$  en el infinito. Entonces podemos decir que la capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2)$$

Esto nos demuestra que la capacidad de una esfera es proporcional a su tamaño, y a su vez es independiente de su carga o de la diferencia de potencial.

## Cálculo de la capacidad

Como podemos, ver el cálculo de la capacidad parece bastante sencillo una vez que sabemos la carga y la diferencia de potencial usando la [Ecuación \(1\)](#). Seguidamente, veremos el cálculo de la capacidad para tres geometrías diferentes que hemos estado usando: dos placas paralelas, dos esferas concéntricas y dos cilindros coaxiales.

### Ejemplo 2. El condensador de placas paralelas

El condensador más simple está formado por dos placas paralelas conductoras, con una área  $A$ , y separadas por una distancia  $d$ , que es pequeña en comparación a las dimensiones de la placa. Cuando lo cargamos, sabemos que el campo eléctrico se encuentra casi completamente entre las placas, y su valor lo calculamos en capítulos anteriores. Las placas tienen una distribución superficial de carga  $\sigma$ , que también se puede expresar en función de la carga total  $Q$  como  $\sigma = Q/A$ . Cabe recordar que

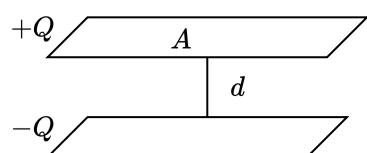


Figura 1: Condensador de placas paralelas de área  $A$  y separadas una distancia  $d$ . Al cargarse, las placas adquieren cargas iguales de signo opuesto. El campo va hacia la carga negativa.

el campo entre las placas es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A},$$

donde  $\epsilon_0$  es la *permittividad* del espacio libre. Teniendo en cuenta que  $d$  es la separación entre las placas, podemos expresar la diferencia de potencial entre las placas como:

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}.$$

Ahora, si sustituimos este valor en la [Ecuación \(1\)](#) obtenemos la capacidad en un condensador de placas paralelas en el vacío:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Fijémonos que la capacidad solo depende en este caso de la geometría.

### Ejemplo 3. El condensador esférico

Para construir un condensador esférico, usamos dos cascarones conductores esféricos concéntricos, y en este caso estamos considerando que estamos en el vacío. La esfera interior posee una carga  $+Q$  y el valor de su radio es  $a$ . La esfera exterior posee una carga  $-Q$  y su radio es  $b$ . Queremos encontrar el valor de la capacidad.

Para ello debemos usar una vez más la [Ecuación \(1\)](#). Necesitamos calcular el valor de la diferencia de potencial entre los cascarones. Para ello debemos calcular primero el campo eléctrico. Esto se puede hacer de forma sencilla recordando la ley de Gauss (recordatorio:

la ley de Gauss nos dice que el flujo eléctrico a través

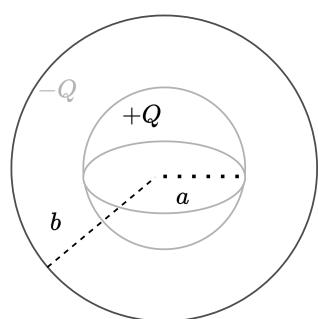


Figura 2: Condensador formado por una esfera interior de radio  $a$  rodeada por una esfera de radio  $b$ . La interior está cargada positivamente y el campo apunta radialmente hacia afuera.

de una superficie es igual a la carga total contenida dentro de la superficie y dividida entre  $\epsilon_0$ , es decir  $\oint_S \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{en}}{\epsilon_0}$ . Si nos fijamos en la simetría, el campo y el diferencial de área son paralelos en todos los puntos de la superficie, entonces nos queda:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Como vemos, el valor del campo eléctrico entre las esferas es igual al campo producido por la esfera interior. Debemos recordar aquí que la carga de una esfera conductora produce siempre un campo cero dentro de la esfera, así que no tenemos aquí ninguna contribución de la esfera exterior. El potencial producido por este campo es  $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 r$ . La diferencia de potencial entre las dos cascarones será:

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Entonces la capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{a \cdot b}{b - a}.$$

Para comparar este resultado con el de las placas paralelas, podemos decir que la distancia entre las esferas es  $d = b - a$ , y que el valor  $4\pi a \cdot b$ , que en matemáticas se define como la media geométrica de las áreas de las dos esferas, se puede representar como  $A_{mg}$ . Entonces podemos expresar la capacidad de las esferas como  $C = \epsilon_0 A_{mg}/d$ , que es la misma expresión que para las placas paralelas.

#### Ejemplo 4. El condensador cilíndrico

Para construir un condensador cilíndrico usamos dos conductores cilíndricos, coaxiales el uno con el otro, con un radio  $a$  y  $b$ , respectivamente. La longitud de los cilindros es  $L$ . Los cilindros se encuentran en el vacío, con una carga lineal  $+\lambda$  el cilindro interior, y  $-\lambda$  el cilindro exterior. Vamos a calcular el valor de la capacidad.

Para ello necesitamos saber el valor de la diferencia de potencial entre los cilindros.

dros. En el capítulo anterior habíamos encontrado que el potencial en un cilindro es

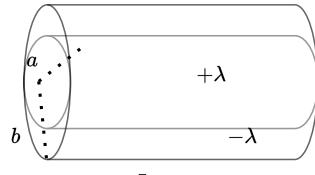
$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\rho},$$

donde  $\phi = 0$  en  $R$ . Sabemos por la ley de Gauss que la carga del cilindro exterior no contribuye al campo entre ellos. Entonces tomamos  $R = b$ , y la diferencia de potencial en las cargas del cilindro viene dado como

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Pasamos a calcular la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}.$$



Una vez mas vemos que la capacidad, en este caso de un condensador cilíndrico, solo depende de las dimensiones.

Figura 3: Condensador cilíndrico compuesto por un cilindro interior de radio  $a$ , y un segundo cilindro coaxial de radio  $b$ , ambos con una longitud  $L$ .

## 5.3 Energía almacenada en conductores

Muchas de las aplicaciones más importantes de los condensadores dependen de su capacidad para almacenar energía. Si recordamos de lo visto anteriormente calculamos la energía potencial de un sistema de cargas. En el caso de los conductores se simplifica ya que la carga de un conductor queda localizada completamente en su superficie, y por otro lado el potencial es constante sobre su superficie. Entonces al calcular la energía por medio de  $U_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma(r) \phi(r) dS$ , el potencial sale fuera de la integral. Si tenemos un sistema de  $n$  conductores, la energía de un conductor  $i$  en el sistema de conductores viene dada por:

$$U_i = \frac{1}{2} \phi \int_S \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} Q_i \phi_i,$$

donde  $Q_i$  es la cantidad de carga a la que está cargada el conductor. Para calcular la energía total del sistema, solo tenemos que sumar:

$$U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i. \quad (3)$$

### Ejemplo 5. Conductor aislado

Si tenemos un conductor, con una carga total  $Q$ , aplicando la [Ecuación \(3\)](#), donde con un solo conductor tenemos un solo término, y recordando que  $\phi = Q/C$  (notar que para un conductor aislado la diferencia de potencial es igual al potencial):

$$U = \frac{1}{2} Q \phi = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

El conductor aislado tiene una energía eléctrica que es proporcional al cuadrado de la carga que contiene. Si aplicamos este resultado a la esfera conductora de radio  $R$ , si sustituimos el valor de  $C$  dado por la [Ecuación \(2\)](#), se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

### Ejemplo 6. Condensador

Al considerar un condensador, independiente de la geometría, tenemos dos capas, con una carga igual y opuesta  $Q$ . Usando igualmente la [Ecuación \(3\)](#), y recordando la relación del potencial con la capacidad podemos decir que:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

En este caso nos fijamos que sustituimos el potencial por la diferencia de potencial que anteriormente decidimos llamar  $V = \Delta\phi$ . Esta expresión nos dice que, en general, la energía eléctrica que almacena un condensador entre sus capas es

proporcional al cuadrado de la carga a la que está cargado, o también, al cuadrado de la diferencia de potencial a la que está sometido.

## 5.4 Polarización

Como comentamos, consideramos la materia como un conjunto de cargas positivas y negativas de núcleos y electrones. Consideramos que esta materia tiene tantas cargas positivas como negativas, por lo que su carga neta es neutra. Esto nos indica que sus momentos monopolares son cero. Sabemos que en los conductores las cargas se pueden mover libremente en la presencia de un campo. Y como acabamos de ver en los apartados anteriores, los conductores pueden formar un condensador. En este apartado nos referiremos a materia no conductora, o también denominada *dieléctrica* como ya introducimos anteriormente.

Queremos entender lo que pasa dentro de la materia. Si tenemos una molécula en ausencia de un campo eléctrico, sus cargas pueden estar en equilibrio, entonces su momento dipolar será cero. Si ponemos un campo eléctrico, las cargas positivas empezarían a moverse en dirección del campo y las negativas en sentido contrario al campo. Esto provocaría una orientación diferente de las cargas en equilibrio. Entonces podríamos afirmar que el momento dipolar sería distinto de cero. Esto es lo que se llama *momento dipolar inducido* o se dice que la materia se ha *polarizado*.

Podemos tener un segundo caso donde las moléculas de la materia ya tengan una disposición de sus cargas positivas y negativas separadas, debido al tipo de enlace entre sus elementos al que deben recurrir para configurar la molécula. Es el caso de las llamadas *moléculas polares*, como por ejemplo la del agua  $H_2O$ . Aun en ausencia de un campo eléctrico, estas moléculas poseen un *momento dipolar permanente*. Aun así, como estos dipolos están orientados aleatoriamente, el momento dipolar neto de esa materia sigue siendo cero. Si quieres ver qué pasa con la polarización en los dieléctricos a nivel microscópico con detalle, te recomendamos que visualices la siguiente vídeo-píldora:



Accede al vídeo: Polarización en dieléctricos.

Una nota importante, tal como vimos en el capítulo anterior sobre los multipolos eléctricos, el momento dipolar es más importante que los de mayor orden, ya que se vio que la contribución de estos últimos al potencial y al campo decrecen muy rápidamente con la distancia. Por este motivo, solo consideraremos aquí el momento dipolar.

Seguidamente vamos a definir la polarización de una forma cuantitativa.

### Definición 2: Polarización

La polarización  $\vec{P}$  se define como el momento dipolar por unidad de volumen, tal que en un volumen infinitesimal  $dV$ ,  $d\vec{p}$  sería el momento dipolar dado por:

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV,$$

por consiguiente el momento dipolar para el volumen  $V$  sería:

$$\vec{p}_{\text{total}} = \int_V \vec{P}(\vec{r}')dV'. \quad (4)$$

Las unidades de la polarización  $\vec{P}$  son coulombs/metro<sup>2</sup>.

Notar que  $dV$  es un volumen pequeño respecto a la escala macroscópica, pero grande a nivel microscópico, en el sentido que contiene muchas moléculas. Si tenéis curiosidad de un ejemplo de uso de la polarización en materiales, podéis leer este artículo ([Tejero Andrade, Andrés and López González, Aide Esmeralda, 2013](#)).

## 5.5 Densidad de cargas ligadas

Supongamos que tenemos un objeto polarizado, y ahora queremos calcular el potencial en un punto  $A$ . Para ello debemos recordar el cálculo que hicimos sobre multipolos eléctricos que dice que el potencial debido a un dipolo es igual a:

$$d\phi_D(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}(\vec{r}') \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV'.$$

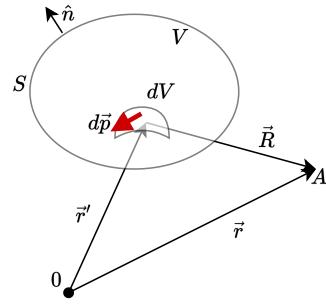


Figura 4: Vectores para cálculo de  $\phi$  en  $A$  (fuera de cuerpo polarizado).

En este caso, puesto que estamos localizando el momento dipolar  $d\vec{p}(\vec{r}')$  en un punto concreto del espacio  $\vec{r}'$ , debemos denotar la distancia relativa entre el punto  $A$  y dicho momento, con  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Para encontrar el potencial en el volumen  $V$  debemos integrar:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'.$$

Haciendo diferentes transformaciones matemáticas podemos encontrar que el potencial se puede expresar mediante dos términos, que son:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS',$$

donde  $S$  es la superficie del volumen  $V$ . Aquí es donde entra la definición de *cargas ligadas o densidades de carga de polarización*:

$$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}), \quad (5)$$

$$\sigma_b(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}. \quad (6)$$

Siendo  $\rho_b$  la que ejerce como una densidad volumétrica, y  $\sigma_b$  como una densidad superficial de carga en la superficie limitante. Cabe resaltar que estas cargas ligadas, como su nombre dice, no tienen la libertad de moverse o ser extraídas del material dieléctrico. Otro punto importante a fijarnos es que si  $\vec{P} = \text{constante}$ , es decir, si la polarización es uniforme, entonces la densidad de carga volumétrica ligada sería nula. En otras palabras, esta densidad es una medida de la no uniformidad de la polarización

dentro del material. Con esto podemos expresar el potencial de un dipolo como:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \quad (7)$$

¿Qué nos dice esto? Que en lo que se refiere a los efectos que un dipolo produce sobre el exterior, el dieléctrico ve una densidad superficial y volumétrica de carga con los valores indicados. El potencial total en un punto estará dado por este potencial producido por estas cargas ligadas, más el potencial creado por cualquier otra carga presente en el material. Vamos ahora a ilustrar lo que acabamos de explicar.

Fijémonos en la [Figura 5](#), en la que estamos representando un material donde las flechas representan dipolos, que están orientados de una forma uniforme. Debido a esta uniformidad, las cargas positivas orientadas en el final de las flechas se neutralizan con las cargas negativas del origen de las flechas adyacentes, por lo que la carga total ligada en este volumen es  $\rho_b = 0$ . Sin embargo, la carga superficial  $\sigma_b$  en el contorno de este volumen no es nula, porque en los bordes no hay otros momentos con los que neutralizarse. Al lado derecho de nuestro material tenemos un valor de  $\vec{P} \cdot \hat{n}$  distinto de cero, y lo mismo al lado izquierdo pero de signo contrario. Si consideráramos el caso en el que  $\vec{P}$  no es uniforme, habría más carga de un signo que de otro dentro del volumen, por lo que daría lugar a una carga ligada neta dentro de él.

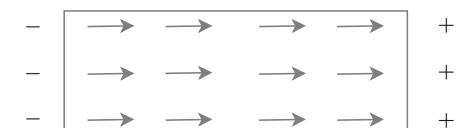


Figura 5: Las flechas representan dipolos de un material uniformemente polarizado. Las cargas positivas y negativas en los bordes representan el origen de las cargas ligadas superficiales.

## 5.6 Campo eléctrico dentro de un dieléctrico

Hasta ahora siempre hemos considerado los cálculos del campo y del potencial en el vacío. La pregunta ahora es qué pasa si introducimos un medio, de qué manera afectará al campo. Antes de hacer algo cuantitativo, revisaremos los experimentos iniciales hechos por Faraday.

Tenemos un condensador de placas paralelas que se encuentran en el vacío y los cargamos con una carga  $Q$ . Medimos la diferencia de potencial entre las placas  $V_0$ , y como vimos en apartados anteriores tenemos que:

$$C_0 = \frac{Q}{V_0}.$$

Ahora introducimos cera entre las placas, mientras se mantiene  $Q$  constante y se vuelve a medir la diferencia de potencial. Ahora tenemos que:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Se mide experimentalmente que  $V < V_0$ , lo que implica que  $C > C_0$ . Para entender esto, veamos cuál es la relación del campo eléctrico. Sabemos que  $V_0 = E_0 d$ , y que  $V = Ed$ , lo que implica que  $E < E_0$ . Ahora lo que necesitamos entender es por qué el valor del campo disminuye en presencia de un dieléctrico. Podemos ver en la [Figura 6](#) la ilustración de lo que está pasando.

Si consideramos que el dieléctrico está uniformemente polarizado, es decir  $\vec{P} = \text{constante}$ , entonces  $\rho_b = 0$ . En este caso solo tenemos una carga ligada superficial, que va a crear un campo  $\vec{E}_b$ , donde podemos ver en la figura su dirección opuesta. No debemos olvidarnos que tenemos una carga  $Q$  que está creando un campo  $\vec{E}_0$ , y siendo los campos en sentido contrario el uno del otro, el campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E} - \vec{E}_b,$$

en coincidencia con lo que se vio experimentalmente por Faraday en su experimento.

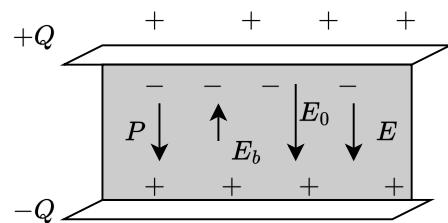


Figura 6: Condensador de placas paralelas.

#### Ejemplo 7. Esfera uniformemente polarizada

Veamos un ejemplo de cargas ligadas.

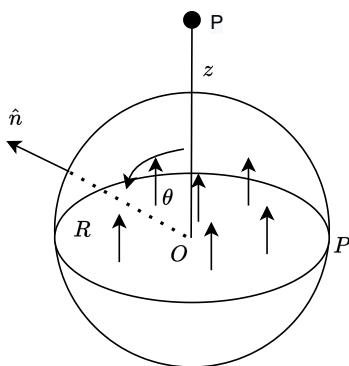


Figura 7: Esfera uniformemente polarizada en la dirección del eje  $z$  positivo. El punto  $P$  en el eje  $z$  es donde queremos calcular el valor del potencial y el campo.

Consideremos una esfera de radio  $R$ , que posee una polarización  $\vec{P}$  constante. La esfera está situada en el origen de coordenadas. Su polarización es en la dirección del eje  $z$  positivo, es decir  $\vec{P} = P\hat{z}$ . Como  $\vec{P}$  es constante, entonces  $\rho_b = 0$  según la [Ecuación \(5\)](#). Sin embargo vamos a tener una  $\sigma_b$ , la podemos calcular con la [Ecuación \(6\)](#), siendo:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{r} = P \cos \theta.$$

Lo que nos indica que la densidad superficial no es constante, sino que varía con el ángulo. En este ejemplo vamos a calcular el potencial y el campo para un punto que se encuentra en el eje  $z$  positivo. Para encontrar el potencial usamos la [Ecuación \(7\)](#), donde:

$$r = (z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta)^{1/2}.$$

Y usando coordenadas esféricas podemos expresar el potencial como:

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{(z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta)^{1/2}}.$$

Y si sustituimos  $u = \cos \theta$ , nos queda:

$$\phi(z) = \frac{PR^2}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{udu}{(z^2 + R^2 - 2zRu)^{1/2}}.$$

Para resolver esta integral, como en ocasiones anteriores, buscamos el resultado

en tablas:

$$\int \frac{udu}{(z^2 + R^2 - 2zRu)^{1/2}} = -\frac{(z^2 + R^2 + zRu)(z^2 + R^2 - 2zRu)^{1/2}}{3z^2 R^2}.$$

Aplicando el resultado de la integral nos queda:

$$\phi(z) = \frac{PR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{3z^2 a^2} ((z^2 + R^2)(|z + R| - |z - R|) - zR(|z + R| + |z - R|)). \quad (8)$$

Como estamos en una esfera, y en la expresión tenemos valores absolutos, tenemos que considerar dos casos por separado:

- ▶ Dentro de la esfera, donde  $z < R$ . Entonces  $|z - a| = a - z$  y  $|z + a| = z + a$ .

Sustituyendo en la [Ecuación \(8\)](#) el potencial dentro de la esfera es:

$$\phi_{\text{dentro}}(z) = \frac{Pz}{3\epsilon_0},$$

y el campo eléctrico en un punto P en el eje z positivo queda:

$$E_{z,\text{dentro}} = -\frac{\partial \phi_{\text{dentro}}}{\partial z} = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Vemos que el campo eléctrico es constante dentro de la esfera.

- ▶ Fuera de la esfera, donde  $z > R$ , recordando que  $z$  y  $R$  son positivos, aquí  $|z - a| = z - a$  y  $|z + a| = z + a$ . Con esto la [Ecuación \(8\)](#) queda:

$$\phi_{\text{fuera}}(z) = \frac{PR^3}{3\epsilon_0 z^2},$$

y el campo eléctrico:

$$E_{z,\text{fuera}}(z) = -\frac{\partial \phi_{\text{fuera}}}{\partial z} = \frac{2Pa^3}{3\epsilon_0 z^3}.$$

Este resultado se puede expresar en función del momento dipolar total de la esfera, que viene dado por la [Ecuación \(4\)](#), resultando su valor:

$$p_{\text{total}} = \frac{4}{3}\pi R^3 P \hat{z}.$$

De esta manera el potencial y el campo pueden escribirse como:

$$\phi_{\text{fuera}}(z) = \frac{p_{\text{total}}}{4\pi\epsilon_0 z^2}, \quad E_{z\text{fuera}}(z) = \frac{2p_{\text{total}}}{4\pi\epsilon_0 z^3}.$$

En la [Figura 8](#) podemos ver la representación del campo  $\vec{E}$ . Si comparamos estos resultados con los que obtuvimos anteriormente, podemos comprobar que este resultado que acabamos de obtener es idéntico al de un dipolo puntual con momento dipolar total  $p_{\text{total}}$ .

## 5.7 El campo de desplazamiento o campo D

Cuando definimos el campo  $\vec{E}$  en capítulos anteriores, dijimos que el campo quedaba determinado por las cargas, pero no diferenciamos en qué tipo de cargas. Ahora podemos decir que hemos encontrado dos tipos de cargas: las *cargas libres* y las *cargas ligadas*, con sus correspondientes densidades  $\rho_f$  y  $\rho_b$ . Ya explicamos qué son las cargas ligadas, y en general las cargas libres son todas las demás. Entonces podemos escribir la densidad de carga como la suma de las dos:

$$\rho_{\text{total}} = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}.$$

Recordando que anteriormente obtuvimos que  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ , que es una ecuación fundamental en los procesos electrostáticos, sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f.$$

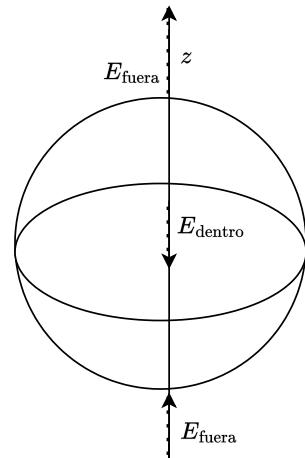


Figura 8: Campos eléctricos producidos en una esfera que está uniformemente polarizada que se encuentran en el eje  $z$ .

Viendo esta ecuación y viendo que la carga libre solo aparece en el término de la derecha, nos sugiere definir un nuevo campo  $\vec{D}$  como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (9)$$

y podemos decir que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f. \quad (10)$$

Este campo se puede llamar *campo de desplazamiento* o simplemente campo  $\vec{D}$ . Como dijimos antes, este campo solo depende del valor de la cargas libres. La ley de Gauss con este campo se puede expresar como:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f dV = q_f,$$

donde esa carga  $q_f$  es la carga contenida en el volumen  $V$ . Aunque en la [Ecuación \(10\)](#) sólo aparece la carga libre, no quiere decir que la única fuente para el campo  $\vec{D}$  sea una carga libre. Si aplicamos el rotacional a la [Ecuación \(9\)](#), tenemos que:

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}.$$

Esto nos indica que  $\vec{D}$  también puede tener su contribución de las cargas ligadas.

## Condiciones de frontera para el campo $\vec{D}$

La condición de frontera que satisface la componente normal, usando [Ecuación \(10\)](#), y las propiedades que vimos en el capítulo que hablamos sobre condiciones de frontera, podemos decir que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f.$$

La condición de frontera que satisface la componente tangencial, usando [Ecuación \(9\)](#) y que  $\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0$ , resulta:

$$\vec{D}_{2t} - \vec{D}_{1t} = \vec{P}_{2t} - \vec{P}_{1t}$$

## 5.8 Tipos de dieléctricos

Por lo que ya comentamos anteriormente, se espera que exista una relación entre la polarización y el campo eléctrico:  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ .

### Polarización permanente

En el caso de que  $\vec{E} = 0$ , estos materiales tienen un  $\vec{P}$  distinto de cero. Es decir, estos materiales poseen una *polarización permanente* y reciben el nombre de *electretos*. Aun así, los materiales que producen mas interés no son estos, ni los más comunes, sino los que se polarizan en la presencia de un campo, donde  $\vec{P}(0) = 0$ , y se llaman, en general, *dielec tricos*.

### Dieléctricos no lineales

En un dieléctrico  $\vec{P}(0) = 0$ , sin embargo la relación entre el campo externo  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  puede ser complicada. En general, esta relación no tiene por qué ser lineal. Para algunos materiales se requieren coeficientes de segundo orden o incluso superiores, de la forma:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \dots, \quad (11)$$

donde los indices  $i, j, k$  se refieren a los valores  $x, y, z$ . Estos coeficientes ( $\alpha_{ij}, \beta_{ijk} \dots$ ) son los que dictaminan la no linealidad del material, y además formulado así, la posible anisotropía al haber diferentes coeficientes para cada componente del vector polarización. Un ejemplo de estos materiales son algunas cerámicas.

### Dieléctricos lineales

Los dieléctricos lineales son en los que solo se necesita para describirlos el primer término de la [Ecuación \(11\)](#). En este caso la ecuación de la relación entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z),$$

$$P_y = \epsilon_0(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z),$$

$$P_z = \epsilon_0(\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z).$$

El término  $\chi_{ij}$  es un componente que se llama *tensor de susceptibilidad eléctrica*. El factor  $\epsilon_0$  se introduce para que  $\chi_{ij}$  no tenga dimensiones. Lo que nos indican estas ecuaciones es que  $\vec{P}$  no va a ser paralelo a  $\vec{E}$ . Tampoco  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  serán paralelos. Un ejemplo de este tipo de materiales son los cristales.

### Dieléctricos isotrópicos lineales

Cuando el dieléctrico es isotrópico, es decir, cuando las propiedades eléctricas del dieléctrico en un punto no dependan de la dirección de  $\vec{E}$ , esto implica que  $\vec{P}$  debe ser paralelo a  $\vec{E}$ . Entonces la ecuación se simplifica y se puede expresar como:

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \quad (12)$$

donde  $\chi_e$  se llama *susceptibilidad eléctrica* (recordar que no tiene dimensiones). Volviendo a la Ecuación (9), si la combinamos con la Ecuación (12), podemos decir que:

$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\epsilon_0\vec{E} = k_e\epsilon_0\vec{E},$$

y normalmente esta ecuación se expresa como:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad (13)$$

siendo  $\epsilon$  una constante para describir la propiedad dieléctrica de los materiales, llamada *permitividad* (recordad que  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío). Fijaos en que  $k_e = 1 + \chi_e$ , llamada *constante dieléctrica*, y que  $\epsilon = k_e\epsilon_0$ . Los valores de estas constantes  $\chi_e$ ,  $k_e$ ,  $\epsilon$  caracterizan las propiedades eléctricas de un material y se encuentran experimentalmente ([Lipuma, Daniel and Gastaldi, Raul and Medina, Sergio and Busnardo, Marcela, 2011](#)).

Si recordamos que  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , entonces la Ecuación (13) se puede expresar como  $\vec{D} = -\epsilon\nabla\phi$ . Sustituyendo este resultado en Ecuación (10) y usando la relación vectorial

$\nabla(uV) = V(\nabla u) + u(\nabla V)$ , obtenemos:

$$\nabla(\epsilon\nabla\phi) = \epsilon\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\epsilon = -\rho_f. \quad (14)$$

Esta ecuación no se puede simplificar ya que  $\epsilon(\vec{r})$  podría depender de la posición.

### Dieléctricos isotrópicos homogéneos lineales

Para finalizar, vayamos ahora al caso más simple. Si suponemos que las propiedades del dieléctrico son independientes de la posición, nos encontramos con los *dieléctricos isotrópicos homogéneos lineales* (i.h.l). Estos dieléctricos son los más comunes, y son los que seguiremos tratando a lo largo de las lecciones. Que el material sea eléctricamente homogéneo implica que las variables  $\chi_e$ ,  $k_e$  y  $\epsilon$  son constantes. Ahora podemos volver a la [Ecuación \(14\)](#), que como  $\epsilon = \text{constante}$ , implica que  $\nabla\epsilon = 0$  y la ecuación se simplifica en:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}.$$

Nos encontramos aquí de nuevo con lo mismo que nos encontramos en el espacio libre, la *ecuación de Poisson*. Recordar que en el espacio libre teníamos la densidad total de carga, y la permitividad del espacio libre. El valor de la polarización viene dado por [Ecuación \(12\)](#), siendo:

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \frac{\epsilon_0\chi_e\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\chi_e}{1+\chi_e}\vec{D} = \frac{(k_e-1)}{k_e}\vec{D}.$$

Este resultado nos dice que  $\vec{P}$  y  $\vec{D}$  son paralelos y también que  $|\vec{P}| < |\vec{D}|$ . Volvamos ahora y veamos qué pasa con la capacidad en medios dieléctricos.

## 5.9 Capacidad en presencia de un dieléctrico

Veamos varios ejemplos para entender cómo un dieléctrico afecta al valor de la capacidad.

### Ejemplo 8. Condensador de placas paralelas

Tenemos un condensador de placas paralelas con una carga constante  $Q_f$ .

Recordemos que el campo en el vacío era  $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$ , donde  $\sigma_f$  se puede expresar como  $\sigma_f = Q_f/A$ , y siendo  $A$  el área de la placa. En el vacío  $P = 0$ , así que el desplazamiento se puede expresar como:

$$D_0 = \epsilon_0 E_0 = \sigma_f.$$

Ahora mantenemos la carga constante e introducimos un dieléctrico entre las placas. Eso implica que  $D$  no cambia su valor, es decir:

$$D = D_0 = \sigma_f.$$

Lo que sí cambia es el campo  $E$ . Veamos su nuevo valor:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D_0}{k_e \epsilon_0} = \frac{E_0}{k_e}.$$

Esto nos indica que  $E < E_0$ . Vemos que el campo se reduce según el valor que tenga la capacidad inductiva relativa. Veamos el valor que adquiere ahora la diferencia de potencial:

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{E_0 d}{k_e} = \frac{V_0}{k_e}.$$

Esto nos indica que la diferencia de potencial en el dieléctrico es menor que en el vacío, es decir  $V < V_0$ . Por último la capacidad será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_f}{V_0} k_e = k_e C_0.$$

Esto nos dice que al poner un material entre las capas la capacidad aumenta. El valor de la polarización viene dado por [Ecuación \(12\)](#), siendo:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (k_e - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \left( \frac{k_e - 1}{k_e} \right) \vec{E}_0.$$

Este resultado se puede escribir como:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\vec{E}_0 - \vec{E}).$$

Y de esto se puede decir que:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}.$$

## 5.10 Energía eléctrica en dieléctrico

Recordemos primero el resultado de la energía de un sistema de cargas para el vacío:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV.$$

Recordar que la integral no está constreñida al volumen, pero es en todo el espacio.

La pregunta ahora es cómo extraer este resultado en presencia de un dieléctrico.

Cuando calculamos esta expresión no diferenciamos cargas libres o ligadas, pero te-

niendo en cuenta que sobre la cargas que podemos realizar un trabajo solo son las

libres, podemos decir que la energía electrostática se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho_f(\vec{r})\phi(\vec{r})dV.$$

La influencia de las cargas ligadas se encuentran en el valor del potencial en la expresión. Si usamos la [Ecuación \(10\)](#) podemos decir que:

$$U = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV.$$

No se hará el desarrollo aquí, pero similar a lo que pasó cuando expresamos la energía en función del campo eléctrico, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$U = \int \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV.$$

Podemos introducir ahora una *densidad de energía*  $u_e$ :

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E},$$

y usando [Ecuación \(13\)](#) podemos expresarlo también como:

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon}. \quad (15)$$

### Ejemplo 9. Condensador esférico

Tenemos un condensador esférico de radios  $a$  y  $b$ , con una carga  $Q$ . Entre sus placas se encuentra un dieléctrico de capacidad inductiva  $\epsilon$ . El campo  $\vec{D}$  es radial, al igual que el campo  $\vec{E}$ , y si consideramos una superficie Gaussiana,  $\vec{D}$  va a ser constante sobre esa superficie ([véase la Figura 9](#)).

Usemos entonces el teorema de Gauss para calcular el valor de  $D$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D = Q_f = Q,$$

despejando el valor, obtenemos que  $D = Q/4\pi r^2$ , y sustituyendo en la [Ecuación \(15\)](#) tenemos:

$$u_e = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon r^4}.$$

Tenemos que recordar que el campo solo es distinto de cero en la región entre las esferas donde se encuentra el dieléctrico, la densidad de energía también va a ser nula en cualquier otro lugar. Ahora, si integramos la densidad de energía,

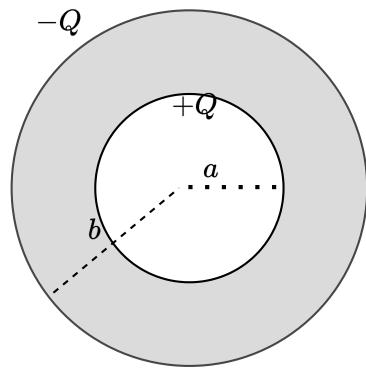


Figura 9: Condensador esférico con dieléctrico.

podremos saber la energía total:

$$U = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Queremos comparar ahora cómo se relaciona el valor de la energía con el caso en que existe vacío entre las placas. Para ello solo tendríamos que reemplazar  $\epsilon$  por  $\epsilon_0$ . Sabemos que  $k_e = \epsilon/\epsilon_0$ , entonces:

$$U = \frac{U_0}{k_e}.$$

De esto podemos decir que  $U < U_0$ , o sea, que en presencia de un dieléctrico entre las placas de un condensador se produce una disminución de su energía total. Esto sucede siempre y cuando su carga  $Q$  se mantenga constante.

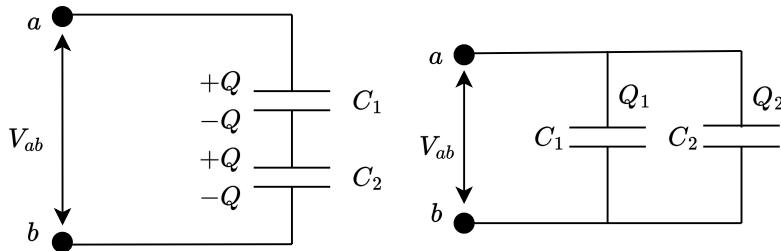
## 5.11 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Tenemos un condensador de placas paralelas en el vacío, separadas por una distancia de 4 mm, y con un área de  $3 \text{ m}^2$ . Se aplica una diferencia de potencial de 10 kV entre las placas. Cuál es el valor de:

- ▶ La capacidad.
- ▶ La carga en cada placa.
- ▶ El campo eléctrico entre las placas.

*Solución:*  $0.0066 \mu F$ ,  $66.4 \mu C$ , y  $2.5 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

**Ejercicio 2.** Tenemos dos condensadores:  $C_1$  y  $C_2$ . Primero los conectamos en paralelo, y después los conectamos en serie, como se muestra en la figura.



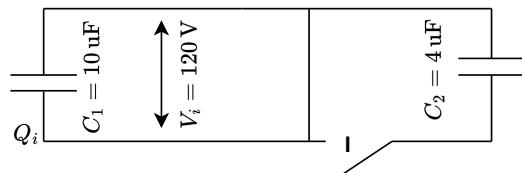
Aplicamos una diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$ . Demuestra que cuando tenemos los dos condensadores en paralelo, la capacidad equivalente a la combinación de ambos es  $C_e = C_1 + C_2$ , y cuando están en serie, la capacidad resultante es  $C_e = 1/C_1 + 1/C_2$ .

### Ejercicio

### 3.

Veamos un ejercicio sobre la transferencia de carga y de energía entre dos condensadores.

Fijémonos en la figura donde tenemos dos condensadores  $C_1 = 10 \mu F$  y  $C_2 = 4 \mu F$ . Aplicamos a  $C_1$  una diferencia de potencial de 120 V. El interruptor  $I$  que vemos en la figura, está abierto al principio. Cuando  $C_1$  se carga, desconectamos la fuente de voltaje.



Responde:

- ▶ Cuál es la carga  $Q_i$  en  $C_1$  cuando el interruptor  $I$  está abierto.
- ▶ Cuál es la energía almacenada en  $C_1$  si el interruptor  $I$  está abierto.
- ▶ Inicialmente  $C_2$  está descargado. Si cerramos el interruptor  $I$ , ¿cuál es la diferencia de potencial a través de los condensadores? ¿Y cuál es la carga en cada uno de ellos?
- ▶ ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor  $I$ ?

*Soluciones:*  $Q_i = 1200 \mu C$ ,  $U_i = 0.072 J$ ,  $V = 85.71 V$ , y  $U_{final} = 0.051 J$ .

**Ejercicio 4.** Veamos qué pasa con un condensador que inicialmente está en el vacío y después introducimos un dieléctrico. Tenemos inicialmente un condensador de placas paralelas, con un área de  $4000 \text{ cm}^2$ , una separación entre las placas de 1 cm. La diferencia de potencial entre las placas es  $V = 3 \text{ kV}$ . Desconectamos la fuente de energía e introducimos un plástico entre las placas. Observamos que el potencial baja a  $V_f = 1 \text{ kV}$ , mientras la carga permanece constante. Calcula:

- ▶ La capacidad original.
- ▶ El valor de la carga  $Q$ .
- ▶ La capacidad al introducir el plástico.
- ▶ La constante  $k$  dieléctrica y la permitividad del plástico.
- ▶ La magnitud de la carga inducida en las caras del dieléctrico.
- ▶ El campo original entre las placas.
- ▶ El campo final después de introducir el dieléctrico.

*Soluciones:*  $354 \text{ pF}$ ,  $1.06 \mu\text{C}$ ,  $1062 \text{ pF}$ ,  $k = 3$ ,  $\epsilon = 2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ,  $Q_{\text{ind}} = 0.7 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $E_0 = 3 \times 10^5 \text{ V/m}$ , y  $E_f = 1 \times 10^5 \text{ V/m}$ .

**Ejercicio 5.** Tenemos un condensador de placas paralelas separadas una distancia  $d$ . El condensador tiene un valor de la capacidad  $C_0$ . Ahora introducimos un dieléctrico entre las placas con una constante dieléctrica  $k$  y un espesor  $\frac{1}{3}d$ . ¿Cuál es el nuevo valor de la capacidad? *Solución:*  $C = \left(\frac{3k}{2k+1}\right) C_0$ .

**Ejercicio 6.** Calcula las magnitudes de  $\vec{P}$  y  $\vec{D}$ , para un material dieléctrico donde:  $E = 0.15 \text{ MV/m}$ ,  $\chi_e = 4.25$ . *Solución:*  $D = 6.96 \mu\text{C/m}^2$ ,  $P = 5.64 \mu\text{C/m}^2$ .

## 5.12 Referencias bibliográficas

- Lipuma, Daniel and Gastaldi, Raul and Medina, Sergio and Busnardo, Marcela (2011). Simplificación del método del corto circuito para la medición de la permitividad dieléctrica. *II Congreso de Microelectrónica Aplicada ( $\mu$ EA 2011) (La Plata, 7 al 9 de septiembre de 2011)*.
- Tejero Andrade, Andrés and López González, Aide Esmeralda (2013). El método de Polarización Inducida aplicado en la contaminación de suelos por hidrocarburos. *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana*, 65(1), 1–8.