

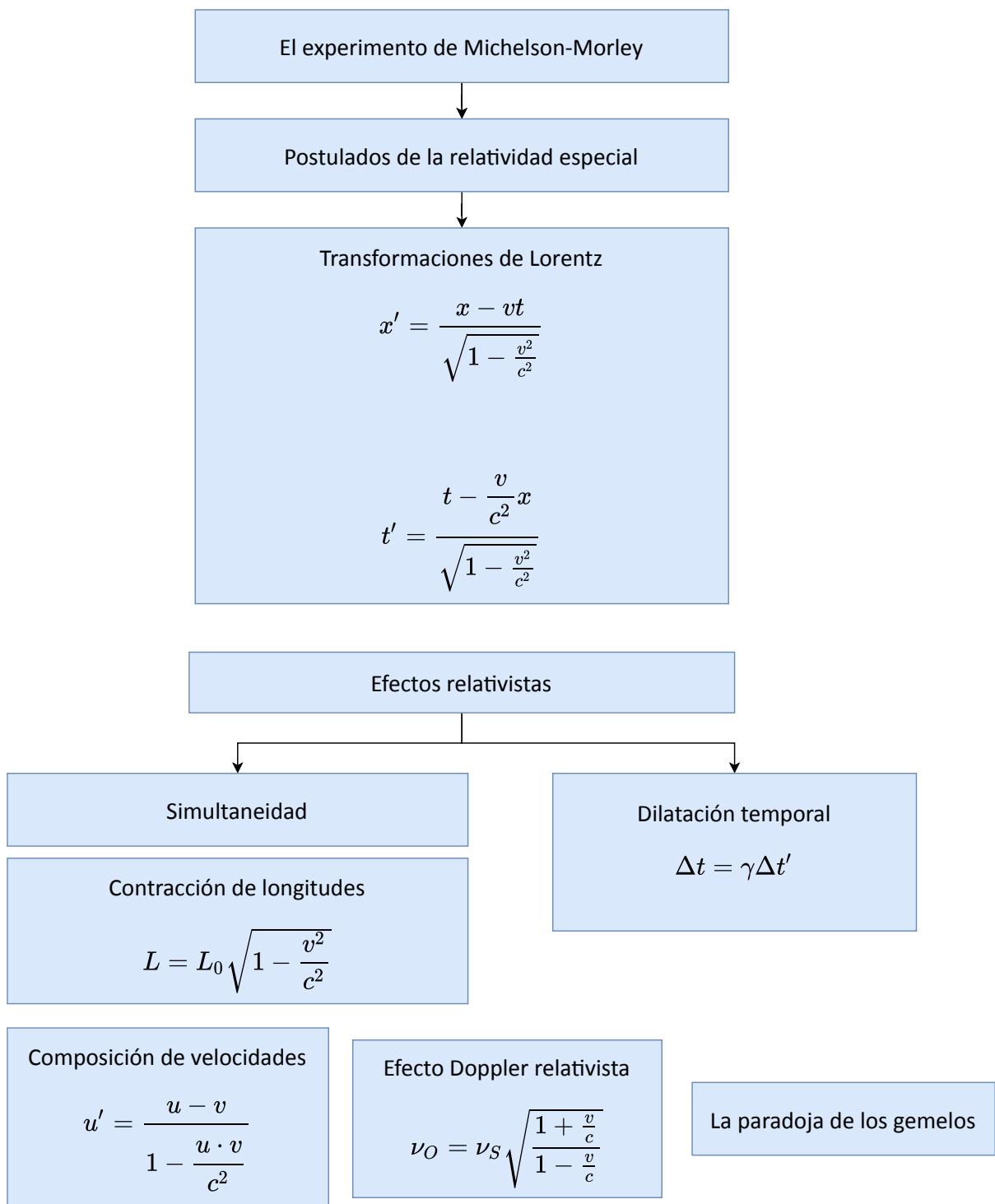
Teoría de campos

Teoría de la relatividad especial

Índice

Esquema	2
Ideas clave	3
5.1 Introducción y objetivos	3
5.2 El experimento de Michelson-Morley	4
5.3 Los postulados de la relatividad especial	6
5.4 Las transformaciones de Lorentz	9
5.5 Efectos relativistas.	18
5.6 Composición de velocidades.	22
5.7 El efecto Doppler relativista	24
5.8 La paradoja de los gemelos	26
5.9 Sobre la velocidad de la luz	28
5.10 Referencias bibliográficas	28
5.11 Cuaderno de ejercicios	29

Esquema



5.1 Introducción y objetivos

En este tema expondremos los dos postulados sobre los que se fundamenta la teoría de la relatividad especial, tras una breve discusión del importantísimo experimento de Michelson-Morley. Seguidamente, deduciremos de ellos las transformaciones de Lorentz, que deduciremos también a partir de argumentos de simetría del espacio y del tiempo y del carácter matemático de grupo de las susodichas transformaciones. Examinaremos los efectos relativistas que atañen a la pérdida del carácter absoluto de la simultaneidad, a la dilatación temporal y a la contracción de longitudes. Finalmente, deduciremos, a partir de las transformaciones de Lorentz, las leyes de composición de velocidades.

- ▶ Conocer los fundamentos del **experimento del Michelson-Morley** así como sus consecuencias teóricas.
- ▶ Comprender los dos **postulados** básicos de la teoría de la relatividad especial: el principio de relatividad de Einstein y el postulado de **invariancia de la velocidad de la luz** en el vacío.
- ▶ Saber deducir las **transformaciones de Lorentz** a partir de los dos **postulados** de la teoría.
- ▶ Saber deducir las **transformaciones de Lorentz** a partir de argumentos de **simetría del espacio y del tiempo** y del carácter de **grupo** de las transformaciones.
- ▶ Comprender las consecuencias de las transformaciones de Lorentz: la pérdida del carácter absoluto de la **simultaneidad**, la **dilatación de los intervalos temporales** y la **contracción de longitudes**.
- ▶ Saber obtener a partir de las transformaciones de Lorentz las **leyes de composición de velocidades**.

- ▶ Conocer el **efecto Doppler** relativista.

5.2 El experimento de Michelson-Morley

Durante el siglo XIX se hicieron progresos concluyentes sobre las leyes del electromagnetismo y la formulación de la teoría del campo electromagnético, que alcanzó su culmen con el establecimiento de las leyes de Maxwell y la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas, de las que la luz era un caso particular.

Surgió entonces la cuestión de en qué medio se propagaba la luz, puesto que hasta donde se conocía todos los fenómenos ondulatorios se propagaban en medios materiales.

Para resolver esta cuestión se postuló la existencia del *éter*, un medio de características un tanto contradictorias: debía ser de densidad nula, perfectamente elástico y totalmente transparente.

Puesto que la Tierra, en su movimiento de rotación en torno al Sol, se desplaza a una velocidad de unos 30 km/s se pensó que podría comprobarse la existencia del éter midiendo la velocidad de la luz c en el sentido de movimiento de la Tierra, de velocidad v , que sería $c+v$, según las leyes de composición de velocidades de Galileo; y midiéndola en sentido contrario, que sería $c-v$.

En 1887 Michelson y Morley diseñaron un experimento para medir este cambio en la velocidad de la luz. En lugar de medirla en sentidos opuestos, diseñaron su experimento para que la luz se propagase en direcciones perpendiculares: a lo largo de un brazo horizontal y a lo largo de un brazo perpendicular a la Tierra.

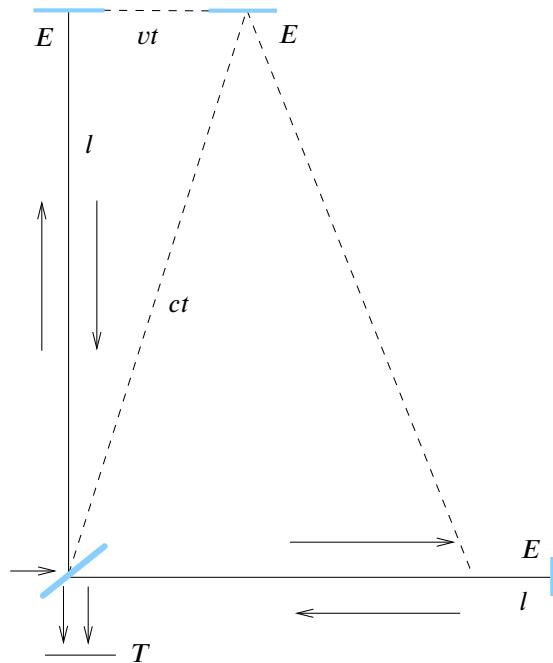


Figura 1: Experimento de Michelson-Morley.

Se emitía un rayo de luz que incidía en un espejo semitransparente. Parte de la luz continuaba por un brazo de longitud l hasta incidir con un espejo E_1 y regresaba al espejo semitransparente para ir a parar a un telescopio. La otra parte de la luz se propagaba hacia arriba, por un brazo de la misma longitud que el anterior, hasta alcanzar un espejo E_2 y volvía, recorriendo el mismo camino, para ir a parar al telescopio T , véase un esquema en la [Figura 1](#).

Calculemos el tiempo que empleaba la luz en propagarse por el brazo horizontal t_1 :

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1)$$

Durante el tiempo de propagación de este haz horizontal, el rayo moviéndose verticalmente habría descrito un triángulo, por lo que el tiempo empleado en recorrerlo t sería

$$v^2 t^2 + l^2 = c^2 t^2. \quad (2)$$

Despejamos t :

$$t = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Y como el tiempo total t_2 , de ida y vuelta, sería el doble que el de ascenso resulta:

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

La diferencia de tiempos sería:

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \simeq \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \right) \simeq \frac{lv^2}{c^3}, \quad (5)$$

donde hemos desarrollado los términos entre paréntesis en serie de Taylor y hemos despreciado potencias superiores a v^2/c^2 , puesto que $v/c \simeq 30/300000 = 10^{-4}$ (ya que la velocidad de la luz en el vacío es de $c \simeq 300000$ km/s).

Pues bien, el resultado que obtuvieron Michelson y Morley en este experimento y en otro posterior mejorado fue negativo. La luz se propagaba con la misma velocidad en

ambas direcciones.

Tras este descubrimiento se propuso la hipótesis de que tal vez la Tierra arrastraba con su movimiento al éter. Sin embargo, esta hipótesis fue descartada porque estaba en contradicción con otros fenómenos, como el de aberración de las estrellas, y otros experimentos de propagación de la luz en medios materiales.

Los físicos entonces se decantaron por abandonar el postulado del éter. Otra hipótesis que se formuló fue la conocida como la hipótesis de contracción de FitzGerald-Lorentz, según la cual los cuerpos experimentan una contracción en la dirección de movimiento por un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Esta contracción no podría ser medida, puesto que los instrumentos de medida experimentarían la misma contracción y además porque, para la velocidad de la Tierra, es inapreciable, del orden de $5 \cdot 10^{-12}$ m por metro. Lorentz intentó explicar esta contracción en función de modificaciones de las fuerzas eléctricas y magnéticas interatómicas, pero todos los esfuerzos por comprobarla fueron vanos.

Finalmente, se descartó la existencia del éter y se aceptó que las leyes del electromagnetismo son válidas en todos los sistemas de referencia iniciales y que la velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento de la fuente o del observador.

Para más detalles sobre el experimento de Michelson y Morley y la teoría del éter puedes consultar ([Fowler, 1996](#)) y ([Yuste Llandres & Carreras Béjar, 2001](#)).

Te recomendamos ver el siguiente el vídeo sobre de Michelson-Morley:



Accede al vídeo: Experimento de Michelson-Morley.

5.3 Los postulados de la relatividad especial

Algunos de los resultados de la teoría de la relatividad especial habían sido ya anticipados antes de su formulación por Einstein en 1905. Personalidades como Poincaré o Lorentz habían obtenido resultados fragmentarios de ella, pero basados en múltiples

supuestos y en interpretaciones erróneas.

El mérito de Einstein fue el recoger todo aquel bagaje, tanto teórico como experimental, y formular una teoría revolucionaria en sus consecuencias a partir de dos postulados tan profundos como sencillos. Los dos postulados son los siguientes:

Postulado 1: Principio de relatividad

Todas las leyes físicas (no solamente las dinámicas) son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales y se expresan mediante leyes análogas.

Este primer postulado constituye el Principio de relatividad de Einstein. Por descontado, ya existía un principio de relatividad, el de Galileo, que afirmaba que las leyes mecánicas eran las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, de modo que solamente mediante el concurso de experimentos mecánicos era imposible discernir si un sistema de referencia inercial se hallaba en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme.

Sin embargo, todavía subsistía la idea de que debía existir un espacio absoluto. Esta idea se mantuvo durante el desarrollo de la teoría electromagnética con la hipótesis del éter. El éter sería un medio por el que se transmitirían las ondas electromagnéticas y en general los fenómenos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, la hipótesis del éter fue desechada por dos razones: una primera teórica, puesto que había que suponer a ese medio propiedades contradictorias, tales como que fuera imponderable (es decir, que no tuviera peso), que fuera perfectamente elástico, etc. Y otra experimental, puesto que los experimentos que se habían llevado a cabo para determinar la velocidad de la luz en el éter, con la Tierra en movimiento en él, habían dado resultados negativos, tal como el experimento de Michelson-Morley.

Además, el desarrollo de la teoría del electromagnetismo, que alcanzó su culmen con la formulación de las conocidas como ecuaciones de Maxwell durante el siglo XIX, había puesto de manifiesto dos cosas: que estas ecuaciones fundamentales eran incompatibles con las leyes de transformación entre sistemas de referencia inerciales de Galileo; y que los fenómenos que describían, como por ejemplo la propagación de la luz en el vacío, eran independientes del observador.

De esta manera, Einstein se encontró con que todos los fenómenos físicos conocidos en su época obedecían un principio de relatividad más general, de suerte que el movimiento rectilíneo uniforme, propio de los sistemas de referencia inerciales, no solo era indistinguible mediante experimentos mecánicos sino mediante cualquier otro tipo de experimento físico. La idea de espacio absoluto quedaba descartada y en su lugar lo que parecía tener relevancia física era el movimiento relativo.

El segundo postulado rezaba:

Postulado 2: Constancia de la velocidad de la luz

En cualquier sistema de referencia inercial la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal que es independiente del movimiento relativo entre la fuente y el observador.

Esta vez se elevaba a la categoría de postulado la observación experimental de que la velocidad de la luz, medida, por ejemplo, en el famoso experimento de Michelson-Morley, en la dirección de movimiento de rotación de la Tierra en torno al sol y en dirección perpendicular era exactamente la misma. Einstein simplemente aceptó como una verdad absoluta un hecho avalado por la experimentación y se dispuso a deducir las consecuencias que tenía para nuestra concepción del espacio y del tiempo.

Había otra señal que apuntaba en la dirección de la universalidad y constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Se trataba de que de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético se obtenía como solución la ecuación de ondas, de ondas electromagnéticas, de las que la luz era un caso particular (las ondas electromagnéticas visibles por el ojo humano). En esa ecuación de ondas aparecía una velocidad, la de propagación. La pregunta era: propagación con respecto a qué. Esa velocidad no estaba definida para ningún observador particular, mucho menos para un espacio absoluto, por lo que debía tratarse de una constante universal, una velocidad que sería igual para cada observador inercial fuere este el que fuere.

5.4 Las transformaciones de Lorentz

Vamos a presentar la derivación de las transformaciones de Lorentz, de las que deduciremos todas las consecuencias que suponen una cambio total de paradigma en cuanto a nuestros conceptos de espacio, tiempo y simultaneidad. Y las vamos a derivar de dos maneras:

1. A partir de los postulados de la teoría de la relatividad especial, tal como fue hecho por el propio Einstein.
2. A partir de las simetrías del espacio y el tiempo, en concreto, la homogeneidad del espacio tiempo y la isotropía del espacio y el carácter de grupo de las transformaciones de Lorentz.

Derivación a partir de los postulados

Supongamos dos sistemas de referencia iniciales S y S' , tal que el sistema de referencia S' se mueve con respecto a S a una velocidad v a lo largo del eje de abscisas, ver la Figura 2. Podríamos suponer un movimiento a lo largo de cualquier dirección, pero hacemos coincidir los ejes de los sistemas de referencia, por simplicidad, y sin pérdida de generalidad. Supongamos también que los orígenes de los sistemas de referencia coinciden en el origen de tiempos de ambos sistemas $t = t' = 0$.

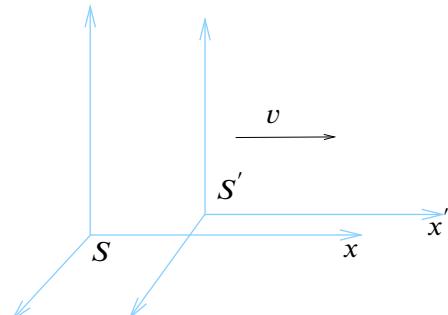


Figura 2: Sistemas de referencia iniciales en movimiento relativo.

Conforme al segundo postulado, la velocidad de la luz será la misma medida desde ambos sistemas de referencia, por lo que podemos suponer que en el instante inicial se emite desde el origen de coordenadas un pulso luminoso. Este pulso luminoso se desplaza en el sentido positivo del eje X del sistema de referencia S de acuerdo con la ecuación:

$$x = ct, \quad (6)$$

que podemos reescribir:

$$x - ct = 0. \quad (7)$$

Puesto que la señal luminosa se propagará en el sistema de referencia S' con la misma velocidad c , por el segundo postulado, se cumplirá la ecuación:

$$x' - ct' = 0 \quad (8)$$

Nótese que estamos empleando coordenadas primadas para referirnos a las coordenadas espaciotemporales del sistema S' . Para que se cumplan simultáneamente la Ecuación (7) y la Ecuación (8) se ha de verificar:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct), \quad (9)$$

donde λ es una constante. Esta relación asegura que ambos miembros se anulan a la vez, en concordancia con el segundo postulado. Supongamos ahora que el pulso de luz se propaga en el sentido negativo del eje X . Entonces se ha de cumplir:

$$x' + ct' = \mu(x + ct), \quad (10)$$

con otra constante μ . Si sumamos ahora la Ecuación (9) y la Ecuación (10) queda:

$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2}x - \frac{\lambda - \mu}{2}ct. \quad (11)$$

Si las restamos resulta:

$$ct' = \frac{\lambda + \mu}{2}ct - \frac{\lambda - \mu}{2}x. \quad (12)$$

Ahora renombramos las constantes

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad (13)$$

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}. \quad (14)$$

Así que la Ecuación (11) y la Ecuación (12) rezan

$$x' = ax - bct, \quad (15)$$

$$ct' = act - bx . \quad (16)$$

Ahora, para resolver el problema, tenemos que determinar las constantes a y b . Primero hacemos uso del hecho de que en el sistema de referencia S' el origen tiene coordenada $x' = 0$. Llevamos esto a la [Ecuación \(15\)](#):

$$ax = bct \Rightarrow \frac{x}{t} = v = \frac{bc}{a}, \quad (17)$$

puesto que el origen de S' se mueve a la velocidad v respecto del sistema S . Seguidamente hacemos uso del primer postulado. Según este postulado una regla de medir en S medida por S' debe ser igual a la medida por S de esa misma regla en S' . Para medir una regla unitaria en S' desde S se hace una fotografía instantánea, es decir, se hace la medida en un mismo tiempo, pongamos $t = 0$. Por tanto la [Ecuación \(15\)](#) nos dice:

$$x' = ax . \quad (18)$$

Si $x' = 1$, entonces la longitud medida por S es

$$\Delta x = \frac{1}{a} . \quad (19)$$

Ahora hacemos una fotografía instantánea desde S' en $t' = 0$ de una regla unitaria en S . De la [Ecuación \(16\)](#) despejamos la t :

$$t = \frac{bx}{ac}, \quad (20)$$

y sustituimos en la [Ecuación \(15\)](#):

$$x' = ax - \frac{b^2}{a}x = a \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) x, \quad (21)$$

Ahora empleamos la [Ecuación \(17\)](#):

$$x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x, \quad (22)$$

resultando para $x = 1$:

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (23)$$

Puesto que ambas medidas, por el primer postulado, tienen que ser iguales, resulta:

$$\frac{1}{a} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (24)$$

A este factor se le denomina γ en la literatura científica. Con él las ecuaciones de transformación, la [Ecuación \(15\)](#) y la [Ecuación \(16\)](#) queda

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (25)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (26)$$

Te recomendamos que veas el siguiente vídeo sobre las transformaciones de Lorentz:



Accede al vídeo: Transformaciones de Lorentz y su deducción.

Así hemos obtenido las transformaciones de Lorentz para sucesos situados en el eje X . Comprobemos que para ellos se cumple la condición:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2. \quad (27)$$

En efecto, empleando las transformaciones de Lorentz, la [Ecuación \(25\)](#) y la [Ecuación \(26\)](#):

$$\begin{aligned} x'^2 - c^2 t'^2 &= \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - c^2 \frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(x^2 + v^2 t^2 - 2vtx - c^2 t^2 - \frac{v^2}{c^2} x^2 + 2vxt \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v^2} \left[x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = x^2 - c^2 t^2. \quad (28)$$

$1 - \frac{v^2}{c^2}$

Así pues, se cumple que:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2, \quad (29)$$

para sucesos que ocurren en el eje X . Esta cantidad, que es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales, es lo que se conoce como un *invariante Lorentz* y es lo que nos permitirá en el próximo capítulo definir los *cuadrvectores*.

Te recomendamos que veas el vídeo sobre el invariante Lorentz:



Accede al vídeo: Invaritante Lorentz en coordenadas espaciotemporales.

Vamos a ver ahora que las coordenadas transversales y y z quedan invariantes en la transformación (cuando los sistemas de referencia inerciales se mueven uno con respecto al otro a lo largo del eje X). Es decir:

$$y' = y, \quad (30)$$

$$z' = z. \quad (31)$$

Para ello supongamos que se emite un pulso de luz. De acuerdo al postulado de invariancia de la velocidad de la luz, en el sistema de referencia inercial S se cumplirá

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct, \quad (32)$$

que elevada al cuadrado es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (33)$$

Igualmente, para el sistema de referencia inercial S' , y por el segundo postulado:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (34)$$

Por tanto, se ha de satisfacer:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \sigma (x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) . \quad (35)$$

Pero como esta relación se ha de cumplir para los sucesos situados en el eje X , es decir, ha de satisfacer la Ecuación (29), entonces $\sigma = 1$. Y con ello la Ecuación (35) se cumplirá si se cumplen la Ecuación (25), la Ecuación (26), la Ecuación (30) y la Ecuación (31). Con lo que quedan demostradas las transformaciones de Lorentz.

Derivación a partir de las simetrías del espacio y el tiempo

Partiremos igualmente de la suposición de dos sistemas de referencia inerciales S y S' que se mueven uno con respecto al otro a la velocidad v a lo largo del eje X . Partimos también del conocimiento de que las coordenadas transversales y y z permanecen invariantes. Por tanto, lo que buscamos son las transformaciones que relacionan x' y t' con x y t . De acuerdo con la *simetría translacional* en el espacio y el tiempo, las transformaciones de coordenadas tienen que ser lineales. Por tanto, buscamos unas transformaciones del tipo:

$$x' = Ax + Bt , \quad (36)$$

$$t' = Cx + Dt , \quad (37)$$

que en notación matricial se escriben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} , \quad (38)$$

donde A , B , C y D son funciones de la velocidad v . Ahora usamos el hecho de que el origen de S' , cuya coordenada en este sistema es $x' = 0$, se mueve a una velocidad v respecto de S , por lo que $x = vt$. Sustituyendo en la Ecuación (36) obtenemos:

$$0 = Avt + Bt \Rightarrow B = -Av . \quad (39)$$

Así, la Ecuación (36) queda:

$$x' = A(x - vt), \quad (40)$$

por lo que resta determinar las funciones A , C y D en función de v . Ahora usamos el hecho de que el origen de S , cuya coordenada en este sistema de referencia es $x = 0$, tiene en S' la coordenada $x' = -vt'$, puesto que si S' se mueve con respecto a S a la velocidad v entonces S se mueve con respecto a S' a la velocidad opuesta $-v$. Sustituyendo estas coordenadas en la Ecuación (40) tenemos

$$-vt' = -Avt, \quad (41)$$

y sustituyendo en la Ecuación (37) obtenemos:

$$t' = Dt. \quad (42)$$

De la Ecuación (41) y la Ecuación (42) se deduce $A = D$. La Ecuación (37) queda:

$$t' = Cx + At = A(Fx + t), \quad (43)$$

donde hemos definido la función $F = C/A$. Renombramos ahora la constante $A = \gamma$, puesto que es la notación más común. Con ello las ecuaciones de transformación resultan ser:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (44)$$

$$t' = \gamma(Fx + t), \quad (45)$$

que en notación matricial son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Para determinar la función F se consideran dos transformaciones de Lorentz: una de un sistema de referencia S' que se mueve con respecto a S a la velocidad v_1 y otra de un sistema de referencia S'' que se mueve con respecto a S' a la velocidad v_2 . Las

transformaciones en notación matricial serán:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2} \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ F_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ F_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \quad (47)$$

La transformación compuesta, de S a S' y de S' a S'' será

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} &= \gamma_{v_2} \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ F_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ F_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \\ &= \gamma_{v_2} \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 - F_{v_1} v_2 & -v_1 - v_2 \\ F_{v_1} + F_{v_2} & 1 - F_{v_2} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Ahora bien, dos transformaciones de Lorentz sucesivas deben ser equivalentes a una sola transformación de Lorentz. Para ello los coeficientes diagonales deben ser iguales, de donde se deduce

$$1 - F_{v_1} v_2 = 1 - F_{v_2} v_1 \Rightarrow \frac{v_2}{F_{v_2}} = \frac{v_1}{F_{v_1}}. \quad (49)$$

En esta última ecuación el primer miembro depende solamente de v_2 mientras que el segundo miembro depende únicamente de v_1 . Para que esto se satisfaga el cociente v/F ha de ser igual a una constante k independiente de la velocidad. Por tanto:

$$F = \frac{v}{k}. \quad (50)$$

Así pues, una transformación de Lorentz quedará en la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Ahora nos queda por determinar el coeficiente γ . Para ello hagamos una transformación del sistema S al S' y después una transformación inversa del sistema de referencia S' al S . En notación matricial tendremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Y combinándolas ambas tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &= \gamma_{-v}\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \\ &= \gamma_{-v}\gamma_v \begin{pmatrix} 1 + v^2/k & 0 \\ 0 & 1 + v^2/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

Como esta ecuación se ha de cumplir para todo x y t se habrá de verificar:

$$\gamma_{-v}\gamma_v = \frac{1}{1 + v^2/k}. \quad (54)$$

Ahora, por simetría espacial tenemos que γ solamente puede depender del valor absoluto de la velocidad, por lo que $\gamma_{-v} = \gamma_v$. De aquí resulta:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/k}}. \quad (55)$$

Y así, la transformación más general entre sistemas de referencia inerciales queda:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/k}}, \quad (56)$$

$$t' = \frac{xv/k + t}{\sqrt{1 + v^2/k}}. \quad (57)$$

Veamos ahora tres casos:

- ▶ Que $k < 0$ entonces podemos escribir esta constante como $k = -c^2$ y obtenemos las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (58)$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (59)$$

En este caso se cumple que la transformación de Lorentz deja invariante el in-

tervalo espacio-temporal:

$$(x')^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2 . \quad (60)$$

- ▶ Que $k = \infty$ entonces las transformaciones entre los sistemas de referencia inerciales se reducen a las transformaciones de Galileo.

$$x' = x - vt , \quad (61)$$

$$t' = t . \quad (62)$$

- ▶ Que $k > 0$ entonces se puede escribir $k = \sigma^2$. Se puede demostrar que en este caso las transformaciones violan el principio de causalidad.

Toda esta demostración implica, que basándonos en las simetrías del espacio y el tiempo y el principio de causalidad, solo queda margen para dos tipos de transformaciones de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales: las transformaciones de Lorentz y las transformaciones de Galileo.

Hemos visto también que las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo en el caso de que la velocidad de la luz c , que es una constante universal, sea infinita. O equivalentemente, en el caso de que operemos con velocidades pequeñas en comparación a la velocidad de la luz.

5.5 Efectos relativistas

Vamos a estudiar ahora algunas de las consecuencias más importantes de la teoría de la relatividad. Estas son:

- ▶ La pérdida del carácter absoluto de la simultaneidad.
- ▶ La dilatación de los intervalos de tiempo.
- ▶ La contracción de longitudes.

Simultaneidad

Hagamos el siguiente experimento mental. Supongamos que en el vagón de un tren en movimiento hay situado un foco de luz en el techo justo en la mitad del vagón. En ambos extremos del vagón supongamos que hay sendas puertas con un mecanismo de apertura tal que se activa al recibir un pulso de luz. Pues bien, para un observador situado en el vagón y moviéndose, por tanto, con él, al encenderse el foco de luz, esta alcanzará ambas puertas al mismo tiempo, por lo que ambas se abrirán simultáneamente.

Preguntémonos ahora qué ocurriría para un observador situado en reposo en el andén en el momento de pasar el vagón del tren. Por el postulado de constancia de la velocidad de la luz, este observador verá que la luz persigue a la puerta anterior, que se aleja de ella, mientras que va al encuentro de la puerta posterior, acercándose. Por tanto, este observador afirmará, dado que la luz se mueve para él con la misma velocidad en todas las direcciones, que la puerta posterior se abre antes que la anterior.

Vemos, pues, que dos sucesos, la apertura de las puertas, que en un sistema de referencia inercial eran simultáneos, dejan de serlo en otro sistema de referencia inercial.

Incluso podríamos imaginar un sistema de referencia inercial que se moviera en sentido opuesto al tren, de tal manera que en él ambos sucesos tampoco serían simultáneos pero, además, tendrían un orden temporal invertido con respecto al observador del andén.

Por supuesto, el hecho de que este fenómeno no sea observado cotidianamente se debe a que las velocidades usuales a nuestro alrededor son muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz en el vacío. Pero este efecto se haría apreciable tan pronto como las velocidades se acercaran a la de la luz.

Vamos a ver cómo se manifiesta este hecho a partir de las transformaciones de Lorentz. Supongamos un sistema de referencia móvil S en el que dos sucesos ocurren en posiciones distintas x_1 y x_2 y que son simultáneos, es decir, que $t_1 = t_2$. Entonces, en un sistema de referencia inercial S' que se mueve con respecto a S a velocidad v

aplicaremos la Ecuación (59):

$$t'_2 - t'_1 = \gamma (t_2 - x_2 v/c^2) - \gamma (t_1 - x_1 v/c^2) = \gamma \frac{x_1 - x_2}{c^2} v \neq 0. \quad (63)$$

Es decir, que en el sistema de referencia S' los sucesos ya no son simultáneos. Fijémonos en que los sucesos dejarán de ser simultáneos en cualquier otro sistema de referencia inercial que se mueva a una cierta velocidad, a menos que los sucesos simultáneos ocurran también en la misma posición.

Dilatación de los intervalos de tiempo

Supongamos un sistema de referencia inercial S' , que llamaremos sistema móvil, que se mueve, a lo largo del eje X , a velocidad v con respecto a un sistema de referencia inercial S , que llamaremos sistema en reposo.

Ahora, supongamos que el observador del sistema móvil mide el intervalo de tiempo $t'_2 - t'_1$ entre dos sucesos que en ese sistema ocurren en la misma posición $x'_1 = x'_2$. A este intervalo de tiempo se le conoce como *intervalo de tiempo propio*, que denotaremos como $\Delta t'$. Veamos ahora qué intervalo de tiempo Δt entre esos dos sucesos mide el observador solidario del sistema en reposo S , aplicando la transformación de Lorentz:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2 \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'. \quad (64)$$

Como $\gamma > 0$ tenemos que el intervalo de tiempo medido por el sistema en reposo es mayor que intervalo de tiempo propio $\Delta t > \Delta t'$. Es decir, que el intervalo de tiempo propio, que es el intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia en el que los sucesos ocurren en la misma posición, es menor que el intervalo de tiempo medido en cualquier otro sistema de referencia inercial en el que estos sucesos ocurran en posiciones distintas. Si los sucesos ocurren en un cuerpo, el intervalo de tiempo medido por un sistema de referencia en el que el cuerpo esté en reposo es siempre menor que el intervalo de tiempo medido en cualquier otro sistema de referencia inercial en

el que el cuerpo esté en movimiento.

Esto es lo que se conoce como dilatación del intervalo de tiempo. Y significa que el tiempo dilata cuando un cuerpo está en movimiento. O lo que es lo mismo, los relojes en movimiento avanzan más lentamente, retrasan.

Contracción de longitudes

La longitud de una barra, por ejemplo, es la distancia entre sus extremos. Supongamos que tenemos una barra en reposo en el sistema móvil S' , su longitud L_0 vendrá dada por:

$$L_0 = x'_2 - x'_1. \quad (65)$$

Ahora se mide esa misma longitud desde el sistema de referencia inercial S , para el cual la barra está en movimiento. La medida se hace de tal forma que las coordenadas de los extremos x_1 y x_2 se determinan en el mismo instante de tiempo, es decir, que $t_1 = t_2$. Aplicamos ahora la transformación de Lorentz:

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma (x_2 - vt_2) - \gamma (x_1 - vt_1) = \gamma (x_2 - x_1) = \gamma L, \quad (66)$$

donde L es la longitud medida desde el sistema de referencia para el que la barra está en movimiento. Por tanto, se deduce que:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (67)$$

y puesto que el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ tenemos que una longitud de un cuerpo en movimiento es menor que la longitud medida si el cuerpo se encuentra en reposo relativo. En otras palabras, con el movimiento las longitudes se contraen. Las longitudes, al igual que la simultaneidad de sucesos o el intervalo de tiempo entre sucesos, tampoco es absoluta y depende del observador inercial. Esta contracción de longitudes coincide con la de la hipótesis de Fitzgerald-Lorentz, sin embargo, mientras que estos supusieron que se trataba de algún tipo de mecanismo físico de contracción, en la teoría de la relatividad especial de Einstein surge como consecuencia del método de medición.

Hay que añadir que las longitudes en las direcciones transversales al movimiento no sufren esta contracción, ya que en las transformaciones de Lorentz $y' = y$ y $z' = z$.

Para una deducción de los efectos relativistas mediante el uso de los postulados, sin recurrir a las transformaciones de Lorentz, así como una breve exposición de toda la teoría, incluida la formulación relativista del electromagnetismo, puede consultarse ([Janssen, 2017](#)).

Puede consultarse ([López, 2018](#)) para una exposición filosófica sobre el alcance ontológico de la nueva concepción del espacio-tiempo de la teoría de la relatividad especial, en contraste con la de la mecánica clásica newtoniana.

5.6 Composición de velocidades

Una consecuencia importantísima de la teoría de la relatividad, que se deduce de las transformaciones de Lorentz, es que no puede haber velocidades que sean superiores a la velocidad de la luz en el vacío, la constante universal c . Esto se desprende del factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que aparece en las transformaciones de Lorentz. Pues si una velocidad fuera mayor que la de la luz $v > c$, el radicando sería negativo y la raíz cuadrada un número imaginario, de manera que las coordenadas espaciotemporales del sistema de referencia S' que se moviera a esa velocidad respecto de S serían imaginarias y por tanto el observador en S observaría fenómenos en S' que no serían reales.

Veamos ahora cuáles son las leyes de composición para las velocidades. Para ello suponemos un punto material que se mueve en el sistema S con velocidad:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}, \quad (68)$$

y en el sistema S' con velocidad dada por las componentes:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt}. \quad (69)$$

Para hallar las leyes de composición diferenciamos la Ecuación (25), la Ecuación (26), la Ecuación (30) y la Ecuación (31):

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (70)$$

$$dy' = dy, \quad (71)$$

$$dz' = dz, \quad (72)$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (73)$$

Dividimos ahora la Ecuación (70), la Ecuación (71) y la Ecuación (72) por la Ecuación (73):

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u_x - v}{c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad (74)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u_y}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad (75)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dz}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u_z}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}. \quad (76)$$

Si las velocidades \vec{u} y \vec{v} , del punto material en S y de los sistemas de referencia S y S'

entre sí, respectivamente, tienen la misma dirección y sentido se cumple que:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}. \quad (77)$$

Así, en el caso de que ambas velocidades sean pequeñas en comparación con la de la luz en el vacío $u \cdot v/c^2 \rightarrow 0$ se recupera la ley de composición galileana $u' = u - v$. Si la velocidad de una partícula en el sistema de referencia S es c , la medida por el observador de S' será

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{c \cdot v}{c^2}} = \frac{c(c - v)}{c - v} = c. \quad (78)$$

Es decir, que la velocidad en el otro sistema de referencia será también c , siendo esto consistente con el postulado de la relatividad de la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío. Hay que notar, sin embargo, que la ley de composición de velocidades galileana se sigue cumpliendo dentro de un mismo sistema de referencia inercial. Así, es posible que dos partículas, en un sistema de referencia inercial, tengan entre sí una velocidad relativa mayor que c . No obstante, desde el sistema de referencia de una de ellas, la otra habrá de tener una velocidad inferior a c .

5.7 El efecto Doppler relativista

Es sabido, y conocido como efecto Doppler, que si una onda, por ejemplo el sonido, es emitida por una fuente en movimiento o percibida por un observador en movimiento su frecuencia varía. Las fórmulas que dan cuenta de esa variación son distintas para el caso de movimiento de la fuente y para el caso de movimiento del observador.

Sin embargo, según la teoría de la relatividad, este fenómeno, para la luz, no puede depender de que se mueva uno u otro, sino solamente del movimiento relativo. Puesto que esto es así, podemos escoger como sistema de referencia el que más nos conven-

ga. Sea este aquel en el que el observador se encuentra en reposo y es la fuente de luz la que se acerca a él.

Supongamos que en el instante $t = 0$ la fuente se encuentra en S_1 y emite una onda hacia el observador, a la distancia r_1 . El tiempo que tardará la onda en alcanzar al observador será r_1/c . En el instante $t = \Delta t_S$ la fuente, que se encuentra en S_2 , emite otra onda hacia el observador, ahora a una distancia r_2 , por lo que el tiempo empleado por la luz en alcanzarlo será $t = \Delta t_S + r_2/c$. Véase la [Figura 3](#).

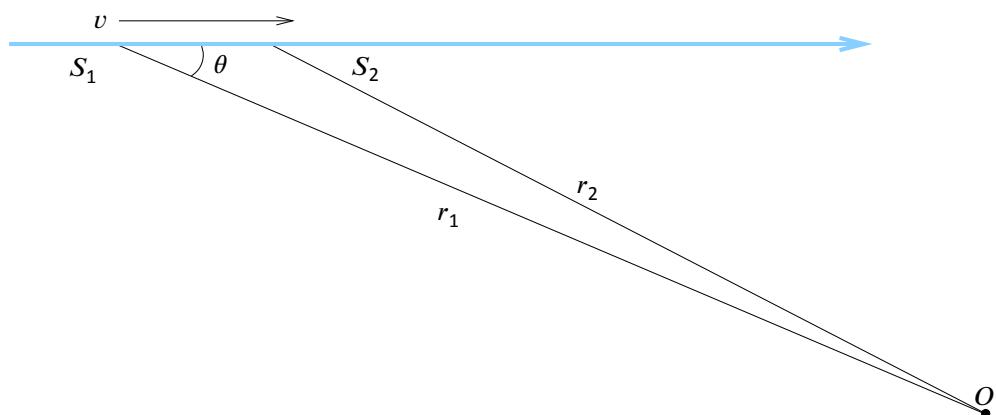


Figura 3: Efecto Doppler. Emisión de ondas desde una fuente en movimiento.

El tiempo transcurrido entre la recepción de ambas ondas será $\Delta t_0 = \Delta t_S + r_2/c - r_1/c$. Ahora, si la fuente se halla muy alejada del observador se tendrá que:

$$r_1 - r_2 = d(S_1, S_2) \cos \theta, \quad (79)$$

y por tanto:

$$\Delta t_0 = \Delta t_S - \frac{d(S_1, S_2)}{c} \cos \theta, \quad (80)$$

pero la fuente se mueve a una velocidad v , por lo que $d(S_1, S_2) = v\Delta t_S$, resultando:

$$\Delta t_0 = \Delta t_S \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right). \quad (81)$$

Hasta aquí los cálculos son exactamente iguales que los que se realizarían en la mecánica prerrelativista, puesto que los hemos hecho desde el sistema de referencia del observador en reposo. Relacionemos ahora el tiempo Δt_S , que es el tiempo entre dos

ondas que mide el observador en reposo, con la frecuencia de la fuente ν_S . Desde el sistema de referencia de la fuente el tiempo transcurrido entre la emisión de dos ondas será la inversa de la frecuencia $1/\nu_S$. Este último tiempo es un intervalo de tiempo propio (puesto que sucede en la misma posición en el sistema de referencia de la fuente). Por tanto, la relación entre Δt_S y $1/\nu_S$ será:

$$\Delta t_S = \gamma \frac{1}{\nu_S} \Rightarrow \frac{1}{\nu_S} = \Delta t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (82)$$

que sustituida en la [Ecuación \(81\)](#) origina:

$$\Delta t_0 = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\nu_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (83)$$

Puesto que la frecuencia detectada por el observador es $1/\Delta t_0$ resultará:

$$\nu_O = \nu_S \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (84)$$

Si la fuente se acerca frontalmente al observador, caso $\theta = 0$, tendremos:

$$\nu_O = \nu_S \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \quad (85)$$

En la [Ecuación \(84\)](#) el denominador es el que se obtendría para un cálculo no relativista, mientras que el numerador aparece debido a la dilatación relativista del tiempo. La observación de este factor en la variación de la frecuencia de la luz emitida por átomos en movimiento fue la primera comprobación experimental de la dilatación relativista del tiempo.

5.8 La paradoja de los gemelos

Hemos aprendido que una de las consecuencias de los postulados de la relatividad especial es que el intervalo de tiempo medido en un sistema de referencia inercial

en el que los sucesos ocurren en la misma posición, lo que se conoce como intervalo de tiempo propio, es siempre menor que el intervalo de tiempo entre esos mismos sucesos medido desde cualquier otro sistema de referencia inercial. Lo que normalmente se expresa diciendo que para un sistema en movimiento el tiempo transcurre más despacio.

Imaginemos ahora la situación de dos gemelos que se encuentran en la Tierra, que para todos los efectos supondremos que es un sistema de referencia inercial, y que uno de ellos hace un viaje espacial con una nave a una velocidad cercana a la de la luz. El gemelo que permanezca en la Tierra, puesto que el otro está viajando a una velocidad cuasilumínica, observará que el tiempo transcurrido para el gemelo viajero es menor, por lo que a su regreso será más joven. No obstante, podría pensarse que con igual legitimidad física, el gemelo viajero es el que ve retrasarse a los relojes en la Tierra, ya que para él es la Tierra la que está moviéndose respecto a su sistema de referencia.

Esto es lo que se conoce como *paradoja de los gemelos* y tuvo en vilo al propio Einstein durante mucho tiempo. Einstein encontró la solución a la paradoja una vez formuló su teoría general de la relatividad, sin embargo, la paradoja también admite una solución en la propia teoría de la relatividad especial.

La clave está en que la nave del gemelo viajero no constituye un sistema de referencia inercial, dado que experimenta una aceleración al alejarse, un cambio de dirección para emprender la vuelta y una deceleración cuando aterriza en la Tierra. Los movimientos de ambos gemelos no son, pues, simétricos. Y la presencia de aceleraciones y cambios de dirección en el sistema de referencia de la nave espacial hace que el retraso en el tiempo para el gemelo viajero sea absoluto.

La paradoja de los gemelos, cuando fue enunciada, suscitó críticas y revisiones de la teoría de la relatividad especial, formulándose otras teorías con diferentes postulados. Un ejemplo de ello es la teoría de Julio Palacios, que abandonaba el postulado de la relatividad de Einstein e introducía un tercer postulado de invariancia en la medida de los intervalos temporales. Para más información puede consultarse ([García, 1984](#)).

5.9 Sobre la velocidad de la luz

La teoría de la relatividad especial nos enseña que la velocidad de la luz en el vacío es una velocidad máxima, puesto que el factor de Lorentz γ tiende a infinito cuando la velocidad $v \rightarrow c$ (o lo que es lo mismo, cuando $\beta = v/c \rightarrow 1$). Esto implica, además, por el principio de relatividad, que la velocidad de la luz en el vacío es absoluta. Se trata pues de una constante universal de la Naturaleza. Pero uno podría preguntarse qué hay de especial con la luz. La respuesta es que nada, salvo que la luz, en realidad las ondas electromagnéticas, está compuesta por cuantos, los llamados fotones, de masa nula, y como veremos, cualquier partícula de masa nula se mueve a la velocidad de la luz. Es decir, que la luz (las ondas electromagnéticas) se mueve a la velocidad c porque cualquier objeto sin masa se mueve a la velocidad c , que es una constante universal.

Aunque la luz fuera, históricamente, lo que llevó al descubrimiento de esa constante universal c , el hecho es que la luz se mueve a esa velocidad porque esa es la velocidad máxima y absoluta que involucra a la misma naturaleza del espacio-tiempo. Esa constante universal c es también la velocidad máxima a la que se puede propagar cualquier señal.

Recientemente, en 2015, se han detectado (en el experimento LIGO) las ondas gravitacionales, que fueron una predicción de la teoría de la relatividad general de Einstein. Se ha podido determinar que su velocidad de propagación, como se esperaba, es c .

5.10 Referencias bibliográficas

Fowler, M. (1996). Experimento de michelson-morley.

García, M. S. (1984). La Teoría de la Relatividad de Julio Palacios. In *Actas II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias: Jaca, 27 de septiembre-1 de octubre, 1982* (pp. 437–452).: Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de

las Técnicas, SEHCYT.

Janssen, B. (2017). Breve repaso de la Relatividad Especial. *Universidad de Granada*.

López, C. (2018). De la mecánica newtoniana a la teoría especial de la relatividad: consideraciones ontológicas acerca del espacio y el tiempo. In *I Jornadas de Estudiantes del Departamento de Filosofía*.

Yuste Llandres, M. & Carreras Béjar, C. (2001). Experimento histórico: el experimento de Michelson-Morley de 1887. *100cias*, 4, 99–105.

5.11 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Un astronauta de 25 años realiza un viaje interestelar a una velocidad de $1.8 \cdot 10^8$ m/s. Cuando regresa en la Tierra han transcurrido 50 años. ¿Qué edad tiene el viajero? *Solución:* 65 años.

Ejercicio 2. ¿Qué velocidad ha de tener una varilla para que su longitud sea la tercera parte de la medida cuando está en reposo? *Solución:* $0.94c$.

Ejercicio 3. Un rectángulo, cuyos lados en reposo miden 0.50 m y 0.75 m, se mueve, paralelamente a su lado mayor, a una velocidad de $1/2c$. Calcular el área que medirá un observador en reposo ¿A qué velocidad ha de moverse para que al observador en reposo le parezca un cuadrado? *Solución:* 0.325 m^2 , $0.745c$.

Ejercicio 4. La vida media de un muón es de 2 microsegundos (μs). Si viaja a una velocidad de $0.99c$ calcular la vida media en el sistema de referencia terrestre. Calcular también la distancia que recorrerá, antes de desintegrarse, en el sistema de referencia terrestre y en el sistema de referencia del muón. *Solución:* $14.18 \mu\text{s}$,

4211.5 m, 594 m.

Ejercicio 5. Un objeto se mueve con respecto a Tierra a una velocidad de $3/4c$, y otro objeto se mueve con respecto del primer objeto, en el mismo sentido, a una velocidad de $3/5c$ ¿Cuál es la velocidad resultante? ¿Cuál sería la velocidad resultante si el segundo objeto se moviera en sentido opuesto al primero? *Solución:* $27/29c$, $3/11c$.

Ejercicio 6. Desde la proa de una nave espacial que se aleja de la Tierra a una velocidad $0.6c$, se lanza un cohete a una velocidad $0.9c$ ¿Qué velocidad tiene el cohete respecto a la Tierra? *Solución:* $0.97c$.

Ejercicio 7. Un avión que viaja a la velocidad del sonido, de 1224 km/h, realiza un viaje que dura 48 horas, tiempo medido desde la Tierra. Si abordo lleva un reloj atómico, capaz de medir diferencias de tiempo de nanosegundos ($1\text{ ns} = 10^{-9}\text{ s}$). Determinar en nanosegundos cuánto habrá retrasado el reloj situado en el avión con respecto a los relojes en Tierra, una vez transcurrido el viaje. *Solución:* 112 ns.