

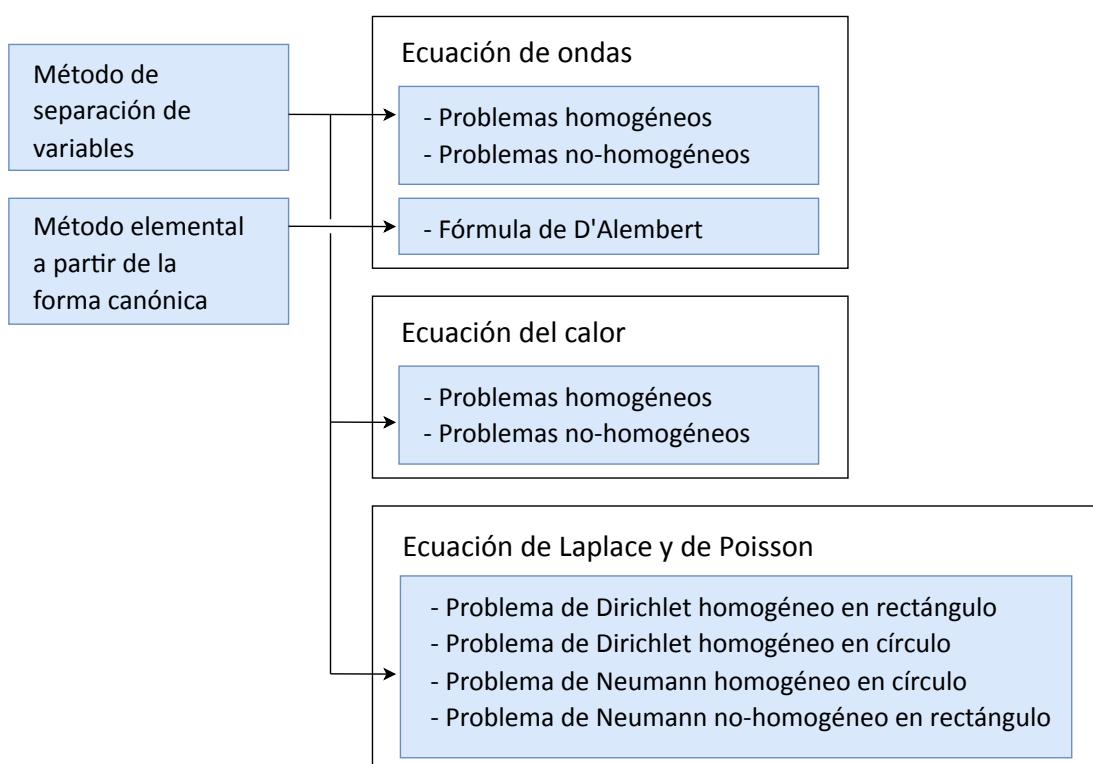
Ecuaciones diferenciales

Resolución de ecuaciones en derivadas parciales

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
9.1 Introducción y objetivos	3
9.2 Ecuación de ondas	5
9.3 Ecuación del calor.	16
9.4 Ecuaciones de Laplace y de Poisson.	21
9.5 Cuaderno de ejercicios	28
9.6 Referencias bibliográficas	31

Esquema



9.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos descrito algunas propiedades de las ecuaciones en derivadas parciales y hemos expuesto algunos de los problemas más comunes asociados a las tres ecuaciones clásicas con diferentes tipos de condiciones iniciales y de contorno. En este tema vamos a ver cómo resolverlos.

El método más práctico para resolver EDPs es el de *separación de variables*, que nos permitirá encontrar una solución a los problemas planteados en el tema anterior en forma de serie de Fourier. Esto es posible porque las ecuaciones y los dominios que consideramos son sencillos, pero hay que tener en cuenta que muchos problemas de EDPs no son resolubles por este método.

Los problemas que resolveremos consisten en una EDP lineal de segundo orden con unas condiciones iniciales (por lo general no-homogéneas) y unas condiciones de contorno homogéneas (si son no-homogéneas tendremos que homogeneizarlas mediante un cambio de variable). El método de separación de variables para consiste en buscar soluciones de la ecuación que sean productos de funciones de cada variable [por ejemplo, $u(x, y) = X(x)Y(y)$] y que cumplan las condiciones de contorno. Probando estas soluciones obtenemos, para una de las funciones, un problema de Sturm-Liouville cuyos autovalores utilizamos para formar una ecuación diferencia ordinaria en la otra función.

Con las infinitas soluciones de estas dos ecuaciones (que cumplen las condiciones de contorno) construimos una serie del tipo:

$$u(x, y) = \sum c_n X_n(x)Y_n(y),$$

cuyos coeficientes c_n se determinan imponiendo las condiciones iniciales no-homogéneas

[por ejemplo, $u(x, 0) = f(x)$]. Entonces veremos que los c_n son los coeficientes del desarrollo de la función $f(x)$ en serie de las autofunciones del problema de Sturm-Liouville antes citado. Aquí asumiremos que las series convergen, pero siendo rigurosos sería necesario comprobar su convergencia.

Para resolver EDPs lineales *no-homogéneas* dividiremos el problema en dos: uno homogéneo con condiciones iniciales no-homogéneas y otro no-homogéneo con condiciones iniciales homogéneas. Este último se resuelve probando en la ecuación una serie de autofunciones del problema homogéneo cuyos coeficientes son funciones a determinar de la otra variable. Esto da lugar a una familia infinita de EDOs lineales no-homogéneas que debemos resolver imponiendo las condiciones iniciales homogéneas.

En el caso de la ecuación de ondas veremos también cómo se puede resolver de manera elemental a partir de su forma canónica. Ésta da lugar a la *fórmula de D'Alembert*, la cual expresa de manera exacta la solución general de la ecuación de ondas en función de sus condiciones iniciales.

Los objetivos de este tema son:

- ▶ Aprender a resolver los principales problemas asociados a las tres ecuaciones clásicas utilizando el método de separación de variables, con diferentes tipos de condiciones iniciales y de contorno.
- ▶ Utilizar la fórmula de d'Alembert para resolver diversos problemas de la ecuación de ondas.

En los siguientes artículos puedes ver algunos ejemplos de las ecuaciones que veremos en este tema aplicadas a problemas reales, como la observación experimental de las vibraciones de una cuerda de guitarra ([Perov et al., 2016](#); [Whitfield & Flesch, 2014](#)) y de una cuerda vibrando de manera no-lineal ([Hassan et al., 2012](#)); la conducción de calor en las aletas de un radiador ([Brody & Brown, 2017](#)); el análisis de Fourier aplicado a la propagación de ondas térmicas en una varilla ([Sabieh Anwar et al., 2014](#)); la transferencia de calor en un cristal líquido ([Nolasco et al., 2020](#)); el cálculo del campo eléctrico en la interfaz entre dos regiones del espacio ([McNees & Gangopadhyaya,](#)

2014); y la determinación del campo magnético de una estrella (Gregory, 2011).

9.2 Ecuación de ondas

Comenzamos aplicando el método de separación de variables a la ecuación de ondas. Los ejemplos homogéneos y no-homogéneos que veremos en esta sección servirán para mostrar la pauta a seguir en el resto de ecuaciones que resolveremos después.

Problemas homogéneos

Consideraremos el problema de la cuerda acotada sin fuerzas externas:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in [0, L], t \in \mathbb{R} . \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

El método de separación de variables consiste en probar soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Introduciendo esta solución en la Ecuación (1), obtenemos:

$$XT'' - c^2 TX'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} .$$

Como el primer miembro es función solamente de x y el segundo lo es solo de t , ambos deben ser iguales a una constante que por conveniencia llamamos $-\lambda$ (la constante en principio puede ser positiva, negativa, o cero):

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda .$$

De aquí obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para $X(x)$ y otra para $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (2)$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \quad (3)$$

El producto de una solución de la Ecuación (2) por una solución de la Ecuación (3) para cualquier valor de λ será solución de la ecuación completa. Sin embargo, nos interesan solamente las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0. \end{cases}$$

La función $T(t)$ tiene que ser distinta de cero, de lo contrario $u(x, t)$ sería también cero y no se cumpliría la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, por tanto se tienen que cumplir las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$. El problema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

es un problema clásico de Sturm-Liouville que ya resolvimos en el tema sobre problemas de contorno. Entonces vimos que la Ecuación (4) tiene soluciones no triviales para:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

y las soluciones (autofunciones) asociadas a cada uno de estos autovalores son:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Llevando estos valores de λ a la Ecuación (3) obtenemos:

$$T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0,$$

cuya solución general ya vimos que es una combinación lineal de senos y cosenos:

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi c t}{L}.$$

Por tanto la solución *general* de la [Ecuación \(1\)](#) que satisface las condiciones de contorno es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi c t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5)$$

Las constantes a_n y b_n se determinan imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \end{cases}$$

Vemos que a_n y $\frac{n\pi c}{L} b_n$ son los coeficientes del desarrollo en senos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, por tanto:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la serie de la [Ecuación \(5\)](#) con estos coeficientes converge si $f(x)$ y $g(x)$ son lo suficientemente regulares.

En la [Ecuación \(5\)](#) podemos ver que la solución general de la [Ecuación \(1\)](#) es una superposición infinita de *modos normales de vibración* $X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$, cada uno de los cuales vibra con una frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, y estas *frecuencias normales* están determinadas por la longitud de la cuerda ([Figura 1](#)).

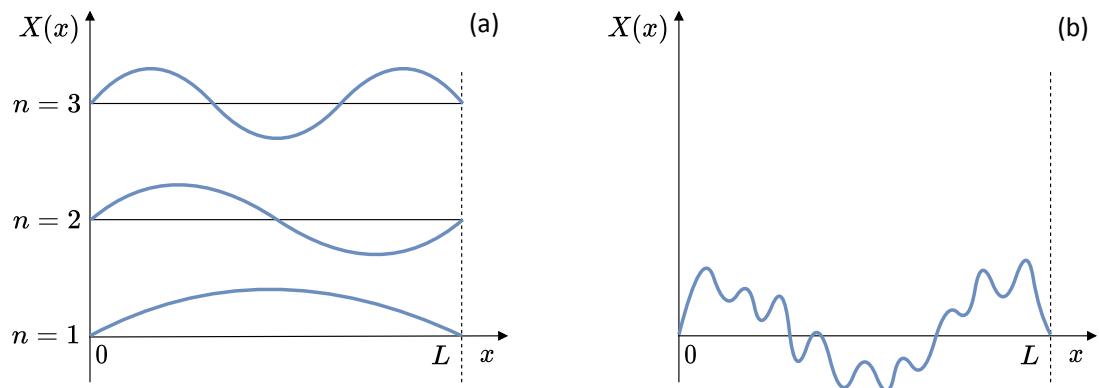


Figura 1: (a) Modos normales de vibración X_n ($n = 1, 2, 3$), cada uno de ellos vibra con una frecuencia $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$. (b) Una solución genérica de la [Ecuación \(1\)](#). La solución se puede descomponer en una superposición lineal de modos normales, cada uno de ellos con un «peso» y una fase dados por $a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L}$. Elaboración propia.

El modo $n = 1$, con frecuencia $\omega = \frac{\pi c}{L}$, se llama *modo fundamental* y en términos acústicos da el *tono* de una nota. Los modos $n = 2, 3, \dots$ con frecuencias múltiplo de la fundamental, se llaman armónicos (segundo, tercero, etc.) y caracterizan el *timbre* del sonido.

En el siguiente video puedes ver una demostración de la superposición de modos en una cuerda vibrante:



Accede al vídeo: Superposición de modos en una cuerda vibrante.

Problemas no-homogéneos

Consideramos ahora el problema no-homogéneo:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

El procedimiento a seguir consiste en descomponer el problema en dos, uno homogéneo ($F(x, t) = 0$), resuelto en la sección anterior, y otro no-homogéneo con condiciones iniciales homogéneas ($f(x) = g(x) = 0$). La solución al problema completo será la suma de las soluciones de los dos sub-problemas, gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones iniciales.

Para resolver el problema no-homogéneo probamos una solución en forma de serie de las autofunciones del problema homogéneo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

donde $T_n(t)$ son funciones a determinar. Introduciendo esta solución, que ya satisface las condiciones de contorno, en la ecuación no-homogénea obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 T_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = F(x, t), \quad (7)$$

donde $T_n(t)$ son funciones a determinar. En la Ecuación (7) se puede ver que $T_n'' + \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 T_n$ es igual a los coeficientes de la expansión de $F(x, t)$ en senos, es decir:

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 T_n(t) \equiv c_n(t), \quad (8)$$

donde

$$c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

La Ecuación (8) es una ecuación diferencial ordinaria no-homogénea que ya sabemos resolver. Su solución general es:

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + \left(\frac{L}{n\pi c} \right)^2 c_n(t).$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} T_n(0) = a_n + \left(\frac{L}{n\pi c} \right)^2 c_n(0) = 0, \\ T'_n(0) = b_n \frac{n\pi c}{L} + \left(\frac{L}{n\pi c} \right) c_n(0) = 0, \end{cases}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\frac{L}{n\pi c}\right)^2 c_n(0), & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= -\frac{L}{n\pi c} c_n(0). & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al problema *completo* ([Ecuación \(6\)](#)) es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + m_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + \left(\frac{L}{n\pi c}\right)^2 c_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

donde los coeficientes

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \left(\frac{L}{n\pi c}\right)^2 c_n(0), & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{L}{n\pi c} c_n(0), & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

combinan las soluciones de la ecuación homogénea con condiciones de contorno no-homogéneas y la ecuación no-homogénea con condiciones de contorno homogéneas.

Fórmula de d'Alembert

La ecuación de ondas también se puede resolver de manera elemental reduciéndola a su forma canónica mediante el cambio de variables definido por sus curvas características:

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct. \end{cases}$$

Las derivadas parciales en función de las nuevas variables son:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{tt} &= c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

En estas variables la ecuación de ondas se transforma en:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta} \Rightarrow \\ u_{\xi\eta} = 0, \quad (9)$$

que es la forma canónica de la ecuación de ondas, la cual se puede integrar directamente. La [Ecuación \(9\)](#) significa que la derivada de u_ξ respecto a η es cero, es decir u_ξ no depende de η por tanto es una función únicamente de ξ que llamamos $p'(\xi)$:

$$u_\xi = p'(\xi).$$

Integrando esta función respecto a ξ obtenemos otra función de ξ que llamamos $p(\xi)$ más una «constante» de integración que puede incluir la dependencia en la otra variable:

$$u = p(\xi) + q(\eta),$$

y deshaciendo el cambio de variable:

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct),$$

donde p y q son funciones arbitrarias doblemente derivables. Estas funciones se determinan imponiendo las condiciones iniciales y de contorno. Por ejemplo, consideramos el problema puro de valores iniciales, o cuerda infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x, t \in \mathbb{R}. \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (10)$$

Las condiciones iniciales llevan a:

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) + q(x) = f(x), \\ u_t(x, 0) = cp'(x) + cq'(x) = g(x). \end{cases}$$

Derivando la primera obtenemos:

$$p'(x) + q'(x) = f'(x).$$

Combinando los términos de estas ecuaciones llegamos a:

$$\begin{aligned} 2p'(x) &= f'(x) + \frac{1}{c}g(x), \\ 2q'(x) &= f'(x) - \frac{1}{c}g(x), \end{aligned}$$

e integrándolas obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k, \\ q(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos escribir la solución $u(x, t)$ de manera única en términos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, \quad (11)$$

expresión que se conoce como *fórmula de d'Alembert*.

La fórmula de d'Alembert da la solución del problema de la [Ecuación \(10\)](#) como la suma de dos funciones (ondas) que viajan a la velocidad c , una hacia las x crecientes y la otra hacia las x decrecientes.

Podemos obtener una expresión similar a la [Ecuación \(11\)](#) para el problema no-homogéneo:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

dándonos cuenta de que:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau,$$

satisface el problema no-homogéneo con condiciones iniciales homogéneas. Por tanto, la solución de la Ecuación (12) es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau. \quad (13)$$

Para aplicar la fórmula de d'Alembert al problema de la cuerda acotada y fija en los extremos de la Ecuación (1) que repetimos a continuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in [0, L], t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

es necesario definir los datos iniciales para todo x . Para ello extendemos $f(x)$ y $g(x)$ al intervalo $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0, y luego de forma $2L$ -periódica a todo \mathbb{R} (Figura 2), es decir, si llamamos $f^*(x)$ y $g^*(x)$ a estas extensiones tenemos que:

$$\begin{aligned} f^*(-x) &= -f^*(x) & f^*(x + 2L) &= f^*(x), \\ g^*(-x) &= -g^*(x) & g^*(x + 2L) &= g^*(x). \end{aligned}$$

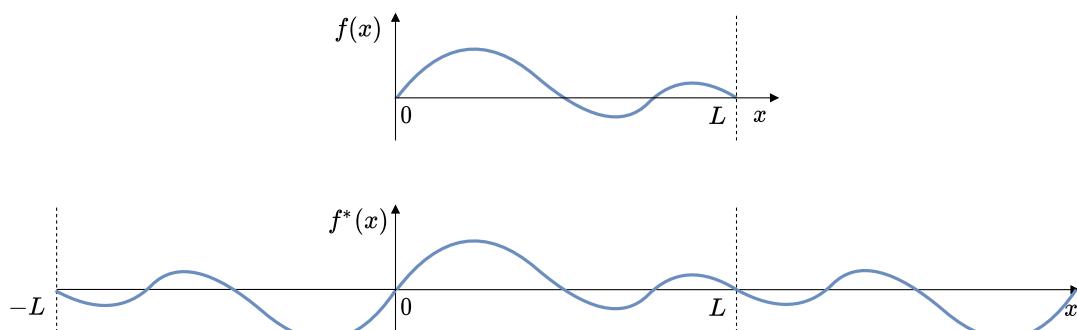


Figura 2: Extensión de $f(x)$ a todo \mathbb{R} .

Observamos que las funciones originales deben anularse en los extremos:

$$f(0) = f(L) = 0,$$

$$g(0) = g(L) = 0.$$

La solución al problema de la [Ecuación \(14\)](#) por tanto viene dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f^*(x + ct) + f^*(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds,$$

que cumple las condiciones iniciales para $x \in [0, L]$ y también las condiciones de contorno.

Para terminar con la ecuación de ondas, vamos a considerar el caso más general en el que tanto la ecuación como las condiciones iniciales y de contorno son no-homogéneas. Este problema describiría una cuerda acotada con fuerzas externas y extremos móviles:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in [0, L], t \in \mathbb{R}. \\ u(0, t) = h_0(t) \\ u(L, t) = h_L(t) \end{cases} \quad (15)$$

Para empezar, hay que homogeneizar las condiciones de contorno. Para ello buscamos una función $v(x, t)$ que las satisfaga y hacemos el cambio de variable $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. La ecuación resultante en $w(x, t)$ es:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = F(x, t) - v_{tt} + c^2 v_{xx} \\ w(x, 0) = f(x) - v(x, 0) \\ w_t(x, 0) = g(x) - v_t(x, 0) & x \in [0, L], t \in \mathbb{R}. \\ w(0, t) = 0 \\ w(L, t) = 0 \end{cases}$$

Si llamamos:

$$F(x, t) \equiv F(x, t) - v_{tt} + c^2 v_{xx},$$

$$f(x) \equiv f(x) - v(x, 0),$$

$$g(x) \equiv g(x) - v_t(x, 0),$$

y a sus extensiones impares $2L$ -periódicas las llamamos $F^*(x, t)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$, la solución del problema en $w(x, t)$ se encuentra aplicando la [Ecuación \(13\)](#), esto es:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (f^*(x + ct) + f^*(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F^*(s, \tau) ds d\tau.$$

Problema general no-homogéneo

Por lo general, cuando un problema está formado por una ecuación lineal no-homogénea $\mathcal{L}u(x, t) = F(x, t)$ y unas condiciones iniciales o de contorno también lineales y no-homogéneas, el problema se puede descomponer en una serie de sub-problemas más sencillos en los que la ecuación o alguna de las condiciones son homogéneas. Por ejemplo, el problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t) \\ u(L, t) = h_L(t) \end{cases}, \quad (16)$$

se puede descomponer en:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = F(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} + \begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} + \begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = h_0(t) \\ u(L, t) = h_L(t) \end{cases}.$$

Si $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ y $u_3(x, t)$ son soluciones de cada uno de estos sub-problemas, está claro por la linealidad de la ecuación y de las condiciones, que $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t)$ será solución del problema completo ([Ecuación \(16\)](#)).

9.3 Ecuación del calor

Ahora vamos a resolver la ecuación del calor mediante separación de variables siguiendo un proceso análogo al de la ecuación de ondas.

Problemas homogéneos

Comenzamos con el problema de la varilla acotada sin fuentes de calor externas y fijando los extremos a temperatura 0:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t > 0. \quad (17)$$

Una solución del tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$ nos lleva a las ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (18)$$

$$T' + \lambda k T = 0. \quad (19)$$

Las soluciones no triviales de la [Ecuación \(18\)](#) con condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$ son:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

con autovalores:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Llevando estos valores de λ a la Ecuación (19) tenemos:

$$T' = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 kT,$$

cuyas soluciones son:

$$T_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Por tanto, la solución general de la Ecuación (17) tendrá la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (20)$$

suponiendo que la serie converge. Imponiendo la condición inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

vemos que a_n son los coeficientes de la expansión de la función $f(x)$ en senos, es decir:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Tenemos ahora una solución (Ecuación (20)) cuya parte espacial es una superposición de modos similares a los de la solución de la ecuación de ondas, pero cuya parte temporal son exponenciales decrecientes. La solución por tanto tiende a cero cuando t tiende a infinito, lo cual era de esperar dadas las condiciones de contorno. Si los extremos de la varilla están a cero grados, en ausencia de fuentes de calor la temperatura de la varilla tenderá a cero.

Ahora veamos el caso en que las condiciones de contorno son no-homogéneas, esto es, una varilla acotada con los extremos a una temperatura fija distinta de cero:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, L], t > 0, \\ u(0, t) = T_1 \\ u(L, t) = T_2 \end{cases} \quad (21)$$

Comenzamos convirtiendo el problema en uno con condiciones de contorno homo-

génreas mediante un cambio de variable. Una función que satisface las condiciones de contorno es:

$$v(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L},$$

por tanto, el cambio de variable $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ nos lleva a:

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = 0 \\ w(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t > 0, \quad (22)$$

cuya solución viene dada por la [Ecuación \(20\)](#), por tanto:

$$u(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

con:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - T_1 - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Como $w(x, t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, entonces $u(x, t)$ tiende hacia $v(x)$. Por tanto $v(x)$ se puede interpretar como la *distribución estacionaria* de temperaturas hacia la que tiende la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

Vamos a resolver ahora el problema de la varilla con extremos aislados (el flujo de calor en los extremos es cero):

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = 0 \\ u_x(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t > 0. \quad (23)$$

La separación de variables nos lleva a la ecuación:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

cuyas autofunciones son:

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

con autovalores:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La parte temporal de la solución sigue dada por las funciones $T_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ pero ahora incluyen $T_0 = 1$, ya que $\lambda = 0$ es autovalor de la Ecuación (24). La solución general es:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (25)$$

Imponiendo la condición inicial tenemos:

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Por tanto los a_n son los coeficientes de la expansión de $f(x)$ en cosenos:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La solución (Ecuación (25)) se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria $a_0/2$ y una distribución transitoria que tiende a cero cuando t tiende a infinito, lo cual es de esperar. Si los extremos están aislados, toda la varilla tiende a una misma temperatura y la temperatura final es precisamente el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Problemas no-homogéneos

El problema no-homogéneo (varilla acotada con fuente de calor externa y extremos a cero grados):

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t > 0, \quad (26)$$

se puede resolver de manera semejante a la ecuación de ondas no-homogénea, dividiéndolo en dos sub-problemas, uno con $F(x, t) = 0$ (ya resuelto), y otro con $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, L], t > 0. \quad (27)$$

Probamos en la Ecuación (27) la solución en forma de serie que ya satisface las condiciones de contorno:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (28)$$

donde $T_n(t)$ son funciones a determinar. (Nótese que si $T_n(t) = a_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$, la Ecuación (28) sería solución de la Ecuación (26) con $F(x, t) = 0$.) Suponiendo que los términos de la serie son derivables, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = F(x, t).$$

Por tanto,

$$T'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \equiv c_n(t), \quad (29)$$

donde $c_n(t)$ son los coeficientes de la expansión de $F(x, t)$ en senos:

$$c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

La condición inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L} = 0,$$

nos dice que $T_n(0) = 0$. Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria ([Ecuación \(29\)](#)) con la condición inicial $T_n(0) = 0$ (podemos utilizar la fórmula de variación de las constantes) llegamos a la solución del problema no-homogéneo ([Ecuación \(27\)](#)):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (t-\tau)} c_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (30)$$

Como siempre, habrá que comprobar que la serie converge. La solución al problema completo ([Ecuación \(26\)](#)) será la [Ecuación \(30\)](#) más la [Ecuación \(20\)](#).

9.4 Ecuaciones de Laplace y de Poisson

Vamos a resolver ahora algunos problemas relativos a la ecuación de Laplace y a su versión no-homogénea, la ecuación de Poisson, utilizando el método de separación de variables. Ilustraremos el procedimiento con varios ejemplos simples.

Problema de Dirichlet homogéneo en un rectángulo

Comenzamos con el problema de Dirichlet homogéneo en un rectángulo $(0, a) \times (0, b)$ ([Figura 3](#)):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_0(y) \\ u(a, y) = g_a(y) \end{cases} \quad (31)$$

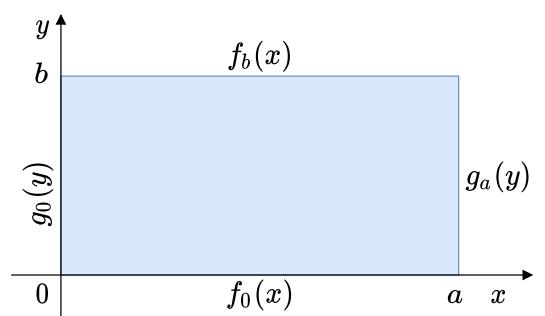


Figura 3: Problema de Dirichlet en un rectángulo. Elaboración propia.

Como vimos anteriormente, podemos dividir el problema en cuatro sub-problemas con tres de

las condiciones de contorno igual a cero:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(a, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = 0 \\ u(a, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = g_0(y) \\ u(a, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$

Resolvamos, por ejemplo, el primero de ellos. Probando $u(x, y) = X(x)Y(y)$, obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (32)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad (33)$$

Las condiciones de contorno imponen $X(0) = X(b) = 0$. Como ya sabemos, con estas condiciones de contorno la Ecuación (32) tiene soluciones no triviales:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

para:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Con estos valores de λ la solución de la Ecuación (33) es:

$$Y_n(y) = c_1 e^{\frac{n\pi y}{a}} + c_2 e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

La condición de contorno homogénea que queda, $u(x, b) = 0$, impone que $Y_n(b) = 0$, es decir:

$$c_2 e^{-\frac{n\pi b}{a}} = -c_1 e^{\frac{n\pi b}{a}},$$

luego

$$Y_n(y) = c_1 e^{\frac{n\pi b}{a}} \left(e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - e^{-\frac{n\pi(y-b)}{a}} \right).$$

El término entre paréntesis es un seno hiperbólico, por tanto las funciones $Y_n(y)$ son

de la forma:

$$Y_n(y) \sim \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right),$$

y la solución general es:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right).$$

Los coeficientes a_n se hallan imponiendo la condición de contorno que falta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = f_0(x),$$

por tanto:

$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Los otros tres sub-problemas se resolverían de forma análoga y la solución al problema completo ([Ecuación \(31\)](#)) es la suma de las soluciones de los cuatro sub-problemas.

En las ecuaciones de ondas y del calor, la parte espacial con condiciones de contorno proporcionaba las autofunciones, y la parte temporal con condiciones iniciales determinaba los coeficientes de la serie. En la ecuación de Laplace en un rectángulo estos papeles son intercambiables entre las variables x e y .

Problema de Dirichlet homogéneo en un círculo

Dependiendo de la geometría del problema, a veces resulta más sencillo expresarlo en un sistema de coordenadas diferente. Por ejemplo, para resolver el problema de Dirichlet en un círculo ([Figura 4](#)) conviene expresarlo en coordenadas polares ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < R, \theta \in [0, 2\pi), \\ u(R, \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad (34)$$

donde el laplaciano en polares es:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

La separación de variables $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ nos lleva a:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \Rightarrow \\ \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ambos lados de la ecuación deben ser iguales a una constante λ , luego:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad (35)$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \quad (36)$$

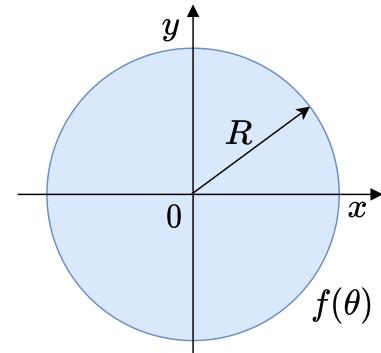


Figura 4: Problema de Dirichlet en un círculo. Elaboración propia.

Como la ecuación de Θ es más sencilla utilizaremos esta, con sus condiciones de contorno, para obtener los autovaleores λ . Las condiciones de contorno para Θ vienen impuestas por la periodicidad de las soluciones:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi),$$

$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

Este problema tiene como autovalores $\lambda_n = n^2$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). La autofunción asociada a $\lambda = 0$ es $\Theta_0(\theta) = 1$, y cada autovalor λ_n con $n \geq 1$ tiene dos autofunciones $\Theta_n(\theta) = \cos n\theta$ y $\Theta_n(\theta) = \sin n\theta$.

La ecuación radial:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0,$$

es la ecuación de Euler que ya vimos en el tema sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Las soluciones son:

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r,$$

$$R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Es lógico suponer que en un problema físico las soluciones están acotadas cuando

$r \rightarrow 0$, por tanto c_2 debe ser cero. Entonces la solución general tiene la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (37)$$

Imponiendo la condición de frontera:

$$u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

vemos que $R^n a_n$ y $R^n b_n$ son los coeficientes de la expansión de $f(\theta)$ en cosenos y senos respectivamente, por tanto:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta. & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Introduciendo estos coeficientes en la [Ecuación \(37\)](#) y operando formalmente se puede llegar a una expresión de la solución:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) \, d\phi.$$

que se conoce como *fórmula integral de Poisson*.

Problema de Neumann homogéneo en un círculo

Para el problema de Neumann en un círculo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_r(R, \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad r < R, \theta \in [0, 2\pi), \quad (38)$$

tenemos la misma solución general que antes:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

pero ahora la condición en la frontera es:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Por tanto, los coeficientes a_n y b_n son:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta. & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Nótese que a_0 sería infinito si $\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$ fuera distinto de cero, ya que para $n = 0$ el denominador se anula. Por tanto para que exista solución es necesario que:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 0.$$

Esto confirma lo que ya habíamos adelantado en el tema anterior sobre el problema de Neumann, que debe cumplir:

$$\oint_{\delta D} f(x, y) \, ds = \iint_D F(x, y) \, dx \, dy,$$

(que en este caso es cero por ser $F(x, y) = 0$), y cuya solución es única salvo constante (la constante a_0 queda indeterminada).

Problema de Neumann no-homogéneo en un rectángulo

Para terminar, vamos a ver un ejemplo de la ecuación de Laplace no-homogénea, o ecuación de Poisson, resolviendo el problema de Neumann no-homogéneo sobre el rectángulo $(0, \pi) \times (0, \pi)$:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y) \\ u_y(x, 0) = 0 \\ u_y(x, \pi) = 0 \\ u_x(0, y) = 0 \\ u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}. \quad (39)$$

Ya hemos visto que la separación de variables en la ecuación homogénea lleva a las ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (40)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad (41)$$

En este caso las condiciones de contorno son $X'(0) = X'(\pi) = 0$ y $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Ambas ecuaciones nos proporcionan una familia de autofunciones sobre las que podemos construir la solución general del problema. Por ejemplo, la primera nos da:

$$X_n(x) = \cos nx. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Por tanto, la solución general que buscamos es de la forma:

$$u(x, y) = Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos nx. \quad (42)$$

Si calculáramos las $Y_n(y)$ a partir de la Ecuación (41) con los autovalores de la Ecuación (40) obtendríamos la solución de la ecuación homogénea. Como estamos tratando con un problema no-homogéneo tenemos que dar más libertad a las funciones $Y_n(y)$ de manera que la Ecuación (42) satisfaga la Ecuación (39):

$$\Delta u = Y_0''(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n''(y) - n^2 Y_n(y)) \cos nx = F(x, y).$$

Si expandimos la función $F(x, y)$ en cosenos de la variable x :

$$F(x, y) = \frac{1}{2} c_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \cos nx,$$

donde los coeficientes de la expansión vienen dados por:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

vemos que:

$$Y_0''(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(x, y) dx, \quad (43)$$

$$Y_n''(y) - n^2 Y_n(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x, y) \cos nx dx. \quad n \geq 1 \quad (44)$$

La solución al problema de Neumann no-homogéneo sobre el rectángulo ([Ecuación \(39\)](#)) queda determinada resolviendo las infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias [Ecuación \(43\)](#) y [Ecuación \(44\)](#) con las condiciones de contorno $Y_n'(0) = Y_n'(\pi) = 0$. Las soluciones de la [Ecuación \(44\)](#) son únicas porque su versión homogénea solo tiene la solución trivial, sin embargo $Y_0''(y) = 0$ con $Y_0'(0) = Y_0'(\pi) = 0$ tiene soluciones no-triviales (por ejemplo $Y_0(y) = 1$). Por tanto, la [Ecuación \(43\)](#) tiene solución solamente si:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) dx dy = 0,$$

y en ese caso tiene infinitas soluciones que difieren en una constante, lo cual confirma las propiedades que ya habíamos enunciado sobre los problemas de Neumann.

9.5 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Resolver:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x^2 \\ u_t(x, 0) = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sea:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

Calcular $u(0, t)$ para todo t .

Ejercicio 3. Resolver por separación de variables los siguientes problemas:

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin 2x \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = \cos \theta, & 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = 0 \\ u_r(2, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$$

Ejercicio 4. Resolver:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

y determinar la distribución estacionaria si $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ y $F(t) = e^{-t}$.

Ejercicio 5. Sea:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) - u(1, t) = 1 \end{cases}$$

Hallar su solución y comprobar que tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Ejercicio 6. Sea:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \sin \omega t \\ u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de ω para los que la solución no está acotada.

Ejercicio 7. Sea el problema en el plano:

$$\begin{cases} \Delta u = \pi, & r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(r, 0) = 0 \\ u(r, \pi) = 0 \\ u(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

Resolverlo y justificar si $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ es mayor o menor que cero.

9.6 Referencias bibliográficas

Brody, J. & Brown, M. (2017). Transient heat conduction in a heat fin. *American Journal of Physics*, 85(8), 582–586.

Gregory, S. G. (2011). Equation of the field lines of an axisymmetric multipole with a source surface. *American Journal of Physics*, 79(5), 461–469.

Hassan, U., Usman, Z., & Sabieh Anwar, M. (2012). Video-based spatial portraits of a nonlinear vibrating string. *American Journal of Physics*, 80(10), 862–869.

McNees, R. A. & Gangopadhyaya, A. (2014). The electric field at the chargeless interface between two regions of space. *American Journal of Physics*, 82(6), 597–601.

Nolasco, C., Burgos, B. M. V., & Morales, J. J. C. (2020). Mathematical model of physical process of heat transfer in liquid crystal. *Journal of Physics: Conference Series*, 1587(1), 012013.

Perov, P., Johnson, W., & Perova-Mello, N. (2016). The physics of guitar string vibrations. *American Journal of Physics*, 84(1), 38–43.

Sabieh Anwar, M., Alam, J., Wasif, M., Ullah, R., Shamim, S., & Zia, W. (2014). Fourier

analysis of thermal diffusive waves. *American Journal of Physics*, 82(10), 928–933.

Whitfield, S. B. & Flesch, K. B. (2014). An experimental analysis of a vibrating guitar string using high-speed photography. *American Journal of Physics*, 82(2), 102–109.