Teoría de campos

# Las leyes de Newton

# Índice

# Esquema

Inercia

Sistemas de referencia

Fuerzas

$\vec{F}$

Sistemas de referencia inerciales

Ley de Hooke

$F = -kx$

Leyes de Newton

Primera ley de Newton

$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cte}$

Segunda ley de Newton

$\vec{F} = m\vec{a}$

Tercera ley de Newton

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Momento lineal

$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Impulso y trabajo

$\vec{F}dt = d\vec{p}, dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Principio de relatividad de Galileo

$x' = x - Vt, v' = v - V, a' = a$

El peso

$m_i\vec{a} = m_g\vec{g}$

$m_i = m_g \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

La energía

$W = \Delta \dfrac{1}{2}mv^2$

Momento angular

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{N} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Aplicaciones de las leyes de Newton

Aceleración normal y tangencial

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_N$

Caída libre

$\dfrac{d^2z}{dt^2} = -g$

Fuerza de resistencia proporcional a la velocidad

$\vec{F}_r = -k\vec{v}$

Sistemas de referencia no inerciales

$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{\alpha} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

$F = -kv^2$

# Ideas clave

## 2.1 Introducción y objetivos

En este tema, tras presentar las definiciones de inercia, fuerza y sistema de referencia, expondremos las tres importantísimas leyes de Newton, que dieron forma a la teoría de la mecánica. Tras ellas explicaremos el principio de relatividad de Galileo y la naturaleza del peso, que es tal, que la masa inercial y la masa pesante son iguales para todos los cuerpos. Después definiremos los conceptos de impulso y trabajo y derivaremos el concepto de energía y el principio de conservación de la energía mecánica. También habrá lugar para presentar el concepto de momento angular. Examinaremos algunas de las aplicaciones de la segunda ley de Newton. Descompondremos la aceleración en sus componentes tangencial y normal, explicando qué es la aceleración centrípeta y con ello la aceleración centrífuga. Y finalizaremos estudiando la dinámica de los sistemas de referencia no inerciales.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Asimilar las definiciones de **inercia, fuerza y sistema de referencia**, en particular, de sistema de referencia inercial.
- Conocer detalladamente las tres **leyes de Newton** y su gran relevancia en la teoría mecánica.
- Entender el alcance del **principio de relatividad de Galileo**.
- Comprender la naturaleza del **peso** y las implicaciones de la igualdad de las magnitudes de **masa inercial** y **masa pesante**.
- Conocer las definiciones de **impulso y trabajo**.
- Comprender la naturaleza de la idea mecánica de **energía**, así como del **principio de conservación de la energía mecánica**.

- Entender el concepto de **momento angular**.
- Saber aplicar la **segunda ley de Newton** para algunos casos de leyes de fuerza.
- Saber descomponer la **aceleración** en sus componentes **tangencial y normal** y entender el significado de la **aceleración centrípeta y de la centrífuga.**
- Conocer la dinámica de los **sistemas de referencia no inerciales** y entender el concepto de **fuerzas de inercia**.

## 2.2 Concepto de inercia

En la Antigüedad se pensaba que el movimiento natural de los cuerpos, por observación de los astros, era el circular. Y la Física de Aristóteles suponía que un cuerpo se movía cuando actuaba un agente externo sobre él y se detenía cuando el agente dejaba de actuar.

No fue hasta Galileo cuando estas ideas fueron revisadas y corregidas, llegándose a la idea de *inercia*. El paradigma cambió totalmente. El movimiento natural de los cuerpos se descubrió que era el movimiento rectilíneo uniforme, de manera que, si un agente actuaba sobre un cuerpo, por ejemplo empujándolo, en ausencia de agentes externos, el cuerpo continuaría con el movimiento que le hubiera imprimido el agente externo, indefinidamente, en línea recta y a velocidad constante.

**Definición 1: Inercia**

La inercia es el estado de movimiento de los cuerpos sobre los que no actúan agentes externos y está caracterizado por ser un movimiento rectilíneo uniforme.

No era fácil llegar a la idea de inercia. Aunque el movimiento es un fenómeno normal a nuestro alrededor, hay un agente que enmascara la inercia y es precisamente la fricción o rozamiento.

Así, cuando empujamos un cuerpo sobre una superficie, una vez el empuje ha cesado, el cuerpo recorre cierta distancia hasta detenerse. Lo que Galileo observó es que este tramo recorrido hasta detenerse el objeto, se hacía cada vez mayor conforme más lisa se hacía la superficie sobre la que se movía. En el límite en el que el rozamiento fuera nulo, el cuerpo no se detendría y continuaría su movimiento indefinidamente, en línea recta y a velocidad constante.

La inercia se manifiesta también en *movimientos compuestos*, como por ejemplo en el tiro parabólico, en el movimiento rectilíneo uniforme en la dirección horizontal o en la vertical si el cuerpo ha sido lanzado con cierto ángulo. Se manifiesta también en la aparición de las fuerzas de inercia, de las que hablaremos más adelante. Ahora bien, es bien sabido que el movimiento es relativo. Pero, ¿relativo a qué? Aquí es donde surge la necesidad de la definición del *sistema de referencia*.

## 2.3 Sistemas de referencia

La teoría de Newton, como veremos, postulaba la existencia de un espacio absoluto. Pero esa noción fue superada por el paradigma de la teoría de la relatividad especial. De manera que para definir un sistema de referencia necesitaremos recurrir al concurso de otros cuerpos.

**Definición 2: Sistema de referencia**

Un sistema de referencia es un conjunto de ejes coordenados en el espacio definido por uno o más cuerpos.

Sabemos que un cuerpo puede estar moviéndose respecto a un sistema de referencia y a la vez estar en reposo respecto de un sistema de referencia que se mueva con él, es decir, un *sistema comóvil*. Así pues, en ausencia de un espacio absoluto, el movimiento y el reposo son términos relativos, relativos al sistema de referencia.

Entre los sistemas de referencia existe una subclase de singular importancia: son los sistemas de referencia inerciales.

**Definición 3: Sistemas de referencia inerciales**

Los sistemas de referencia inerciales son en los que se manifiesta la inercia.

Es imposible definir un sistema de referencia inercial sin caer en la circularidad de la definición. Pues, en efecto, si un sistema de referencia inercial es aquel en el que se manifiesta la inercia, igualmente podemos decir que la inercia se manifiesta en los sistemas de referencia inerciales, y solo en ellos. Esta es una cuestión altamente no trivial, una endeblez de la teoría, podríamos decir, que ocupó las deliberaciones de Einstein fructíferamente en la formulación de su teoría de la Relatividad General. Pospondremos las ideas de Einstein a cuando hayamos introducido el campo gravitatorio. De momento podemos afirmar lo siguiente: existen sistemas de referencia inerciales. Dado un sistema de referencia inercial, cualquier otro que se mueva con respecto a él a velocidad constante es también un sistema de referencia inercial.

## 2.4 El concepto de fuerza

Antes de exponer las leyes de Newton y para comprender su alcance, hemos de dar forma a lo que antes hemos llamado acción de agentes en el movimiento. Las acciones en el movimiento de los cuerpos se realizan mediante lo que se denomina fuerza. Pero, *¿qué es una fuerza?*

Indudablemente el concepto de fuerza tiene su origen en la sensación fisiológica de fuerza muscular, así como en la Termodinámica el concepto de calor, previa definición termodinámica rigurosa, también tiene un correlato originario en los sentidos. La fuerza es todo aquello capaz de alterar el estado de movimiento de un cuerpo. Se observa experimentalmente que las fuerzas tienen carácter vectorial.

**Definición 4: Fuerza**

Una fuerza es toda aquella acción de unos cuerpos sobre otros, con carácter vectorial, que es capaz de alterar el estado de movimiento de los cuerpos.

En la Física moderna se habla de interacciones. Las fuerzas, pues, son las responsables de las interacciones. Las podemos catalogar en dos tipos:

- Fuerzas de contacto: son aquellas que requieren de la acción local de unos cuerpos sobre otros. Ejemplos de fuerzas de contacto son las fuerzas debidas a los choques, las fuerzas de rozamiento.
- Fuerzas a distancia: son aquellas que se manifiestan entre cuerpos separados por cierta distancia de forma instantánea. Ejemplos de fuerzas a distancia son la fuerza de la gravedad, la fuerza electrostática, la fuerza magnetostática.

El concepto de fuerza a distancia es tal que perturbó a los físicos desde su misma concepción, porque parecía difícil admitir que unos cuerpos actuasen sobre otros, a distancias arbitrariamente grandes, instantáneamente. El problema empezó a desvanecerse cuando, al estudiar el electromagnetismo, fundamentalmente Faraday, se introdujeron los conceptos de líneas de fuerza y de campo, porque ahora se podía concebir que existía un ente, el campo, que llenaba el espacio, y que era el medio a través del cual unos cuerpos actuaban sobre otros, recuperándose el principio de localidad.

Como se verá, las fuerzas o acciones de unos cuerpos sobre otros ya no se realizan de forma instantánea, sino que se propagan a una velocidad finita, bien definida. Esto es uno de los núcleos de la teoría de la relatividad, que está contenido en la teoría del electromagnetismo de forma natural. Hemos afirmado el carácter vectorial de las fuerzas. Ahora es necesario darles un carácter cuantitativo. Para ello es necesario introducir al menos un método de medida. El método de medida se basa en un aparato llamado *dinamómetro*, cuyo fundamento es la *ley de Hooke*.

**Ley 1: La ley de Hooke**

La ley de Hooke afirma que para alargamientos pequeños (elongación) de un muelle o resorte, la fuerza es proporcional a la elongación:

$$F = -kx \,, \tag{1}$$

donde $F$ representa la fuerza, $x$ la elongación y $k$ es la constante elástica. En el sistema internacional la fuerza se mide en newton (N) y si la elongación se mide en metros (m), la constante elástica vendrá dada por la unidades N/m.

Esta ley, a pesar de haberla restringido a muelles, tiene un carácter mucho más general, como veremos cuando estudiemos el concepto de fuerzas conservativas, que es lo que son, en última instancia, las fuerzas fundamentales de la Naturaleza. Otro aspecto que hay que destacar es que, de hecho, es posible hallar leyes de fuerza, que son independientes de la cinemática (cuestión fundamental cuando estudiemos la segunda ley de Newton) tales como la ley de gravitación universal, que solamente depende de la distancia entre los cuerpos. No obstante, no puede esperarse una definición rigurosa, previa a la propia teoría de Newton, de la idea de fuerza, sino que su operatividad emerge del conjunto de la propia teoría.

Pues bien, con este interludio, habiendo introducido el concepto de inercia, el de sistema de referencia inercial y el de fuerza, podemos exponer en todo su esplendor las tres leyes de Newton de la mecánica clásica.

## 2.5 Leyes de Newton

La primera ley no es más que una constatación de la existencia de la inercia.

**Ley 2: Primera ley de Newton**

Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la suma de todas las fuerzas es cero, el cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

Por descontado esta ley, como las otras leyes de Newton, se cumple solamente en los sistemas de referencia inerciales. Reaparece el problema de fijar un sistema de referencia inercial.

Pues bien, con la hipótesis de que las leyes de fuerza de las fuerzas a distancia son tales que decrecen con la distancia, en particular, como veremos, la ley de gravitación universal decrece con el cuadrado de la distancia, entonces a distancias grandes, es decir, para cuerpos suficientemente alejados unos de otros, tenemos, con muy buena aproximación, un sistema de referencia inercial. Esta es la razón por la que la primera ley de Newton ha sido formulada como sigue: a distancias suficientemente grandes de otros cuerpos (en el límite, a distancias infinitas) un cuerpo permanecerá en reposo o se moverá a velocidad constante.

El gran hallazgo de Einstein fue el darse cuenta de que un cuerpo en caída libre también está en un sistema de referencia inercial, debido a que la gravedad deja de actuar (por estar ya actuando). No obstante, esto es así solo localmente, es decir, para distancias y tiempos cortos. La razón de ello es que el campo gravitatorio no es uniforme y por tanto aparecen fuerzas de marea, que estudiaremos más adelante. Imaginemos el siguiente experimento mental: un ascensor en caída libre. Tenemos un objeto en la mano. Si lo soltamos no caerá, sino que permanecerá en la misma posición junto a nosotros. Si por el contrario le imprimimos cierto movimiento, se moverá en esa dirección con velocidad constante.

La primera ley de Newton, o ley de inercia, no puede ser demostrada directamente mediante experimentos, sino solo por sus consecuencias o indirectamente, haciendo un proceso de idealización. Para más detalles y para la exposición de algunos experimentos sencillos que muestren la ley de inercia recomendamos el artículo (Vila & Sierra, 2008).

Ahora presentamos la segunda ley de Newton, que constituye el corazón de la dinámica newtoniana.

**Ley 3: Segunda ley de Newton**

La fuerza o suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo $\vec{F}_i$ es proporcional a la aceleración $\vec{a}$, siendo la constante de proporcionalidad la masa $m$:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}\,. \tag{2}$$

Vemos que la fuerza o la resultante de la suma de fuerzas, que tiene carácter vectorial, está en la misma dirección y sentido que la aceleración, que por supuesto también tiene carácter vectorial. La fuerza $\vec{F}$ (por simplicidad omitiremos en adelante suma de fuerzas, aunque queda sobreentendido) es, por tanto, proporcional a la segunda derivada de la posición respecto del tiempo:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \tag{3}$$

Es decir, es proporcional a la segunda derivada y solamente a la segunda derivada. Esto nos hace pensar que esta segunda ley de Newton es importante no solamente por lo que afirma explícitamente sino también por lo que afirma implícitamente, es decir, que la fuerza no está relacionada con la primera derivada (en cuyo caso tendríamos una suerte de mecánica aristotélica) pero tampoco con la tercera derivada o la cuarta o derivadas superiores o cualquier combinación de ellas. Se trata además de una ley matemática que constituye una ecuación diferencial de segundo orden. Dadas las condiciones iniciales, que tienen que ser dos, por aparecer una derivada de segundo orden, y que son la posición y la velocidad iniciales, esta ley permite deducir la trayectoria del cuerpo o partícula para tiempos posteriores, pero también para tiempos anteriores.

El tiempo, además, es un parámetro real (es decir, un número real), continuo, que en la teoría de Newton se consideraba absoluto (es decir, el mismo, universalmente, para todos los sistemas de referencia), cosa que, en principio, parece concordar con nuestra noción intuitiva del tiempo. No obstante, esta concepción absoluta del tiempo fue revisada y superada también por la Teoría de la Relatividad especial. En ella el tiempo (el intervalo de tiempo medido entre dos sucesos) depende del sistema de referencia u observador.

La masa es una propiedad de un cuerpo que, conforme a la segunda ley, da una medida de su inercia (no de la cantidad de materia, que tiene su propia dimensión), es decir, de la resistencia que opone el cuerpo a cambiar su estado de movimiento. Con estado de movimiento nos referimos a su velocidad.

**Definición 5: Masa**

La masa es una propiedad de un cuerpo que determina su resistencia a cambiar su estado de movimiento, es decir, su velocidad, tanto en magnitud como en dirección y sentido.

Como veremos en la teoría de la Relatividad, la fuerza deja de ser proporcional a la aceleración, salvo en dos casos particulares, a saber: el movimiento rectilíneo y el movimiento circular. Esto nos hace pensar en la masa como en una propiedad dinámica de los cuerpos independiente de la definición dada anteriormente en términos de medida de la inercia. Sin embargo, puesto que la teoría de Newton sigue siendo válida como límite de la teoría de la Relatividad especial para velocidades bajas (en relación a la velocidad de la luz) podemos mantener la definición en términos de la inercia.

La potencia de la segunda ley de Newton se demuestra en la resolución de dos problemas que se pueden resolver de forma exacta:

- El oscilador armónico o movimiento vibratorio armónico simple.
- El problema de los dos cuerpos (en un campo gravitatorio).

En ambos casos se conoce la ley de fuerzas: la ley de Hooke en el primer caso y la ley de gravitación universal en el segundo. Se aplica la Ecuación (3) para encontrar la ecuación del movimiento, es decir, la posición en función del tiempo. Estos dos problemas son de tal importancia que se les dedicará un capítulo aparte a cada uno de ellos.

Como prueba de la consistencia de la teoría podemos comprobar que se recupera la primera ley en el caso de que la fuerza (o la resultante de la suma de fuerzas) sea cero, pues en ese caso:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0\,, \tag{4}$$

donde hemos escrito la aceleración como derivada de la velocidad. En este caso la velocidad es constante $\vec{v} =$ cte y recuperamos el movimiento rectilíneo uniforme.

Las simetrías son muy importantes en Física porque conducen a leyes de conservación de ciertas magnitudes.

En particular, la simetría de homogeneidad del espacio implica la conservación de lo que se conoce como cantidad de movimiento o momento lineal $\vec{p}$, que es el producto de la masa por la velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{5}$$

**Definición 6: Momento lineal o cantidad de movimiento**

Se llama *momento lineal* o *cantidad de movimiento* de un cuerpo al producto de su masa por su velocidad.

Ocurre que también puede haber una fuerza en el caso en que haya una variación en la masa, por lo que la segunda ley de Newton adquiere la forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \tag{6}$$

Esta es la expresión más general de la segunda ley de Newton. En cuanto a las dimensiones de la fuerza, podemos comprobar, a partir de la Ecuación (2) que sus dimensiones son el producto de la dimensión de la masa, que se representa por $M$, por las dimensiones de la aceleración, que son, en términos de las dimensiones elementales de longitud y tiempo $[a] = LT^{-2}$. Así pues las dimensiones de la fuerza son $[F] = MLT^{-2}$. En términos de las unidades del sistema internacional el newton es entonces $\mathrm{N} = \mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Hay otros sistemas de unidades, como el sistema cegesimal, en el que la masa se expresa en gramos, la longitud en centímetros y el tiempo también en segundos. La unidad de fuerza en este sistema es la *dina* y en función de las dimensiones elementales será, por tanto, $\mathrm{dyn} = \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. La relación entre los newton y las dinas se puede deducir fácilmente:

$$1\,\mathrm{N} = 1000\,\mathrm{g} \cdot 100\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2} = 10^5\,\mathrm{dyn}.$$

Veamos ahora la tercera ley:

**Ley 4: Tercera ley de Newton**

A toda acción se opone una reacción igual y contraria.

El significado de esta ley es que, si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejerce también una fuerza sobre el primero, igual y de sentido opuesto. Ahora bien, puede ocurrir que las fuerzas, iguales y opuestas, estén en la la misma dirección o no:

- En caso de que las direcciones no coincidan hablamos de hipótesis débil de la tercera ley.
- En caso de que las fuerzas, iguales y opuestas, estén además en la misma dirección hablamos de hipótesis fuerte de la tercera ley.

Esta distinción tendrá su importancia cuando estudiemos los sistemas de partículas.

Algunos experimentos sencillos que ilustran la tercera ley de Newton y aclaran algunas confusiones extendidas sobre ella pueden encontrarse en (Espinosa, 2015).

Hasta ahora hemos estudiado la formulación clásica y más común de las tres leyes de Newton. Existen, no obstante, otras formulaciones alternativas, que disciernen, de entre las tres leyes, lo que son principios o axiomas de la teoría y lo que son teoremas o corolarios. Para una de ellas recomendamos (Garde & López, 1992).

## 2.6 Principio de relatividad de Galileo

El principio de relatividad es una característica fundamental de la teoría de la relatividad especial, en su forma más general (que todas las leyes de la Física son invariantes, independientemente del sistema de referencia inercial). Sin embargo, en tiempos de Galileo y Newton (siglos XVII y XVIII) ya era conocido un principio de relatividad que se aplicaba a las leyes mecánicas, que eran las conocidas entonces (puesto que el electromagnetismo fue desarrollado y entendido posteriormente, en el siglo XIX).

Si tenemos un sistema de referencia inercial que se está moviendo con respecto a otro (como por ejemplo un tren en movimiento respecto a sus alrededores) y realizamos todo tipo de experimentos mecánicos (como lanzar bolas, empujar objetos, etc.) observaremos que su comportamiento no difiere en absoluto de lo que sucede en el sistema de referencia inercial en reposo. La implicación de este principio es que es imposible discernir el reposo del movimiento rectilíneo uniforme mediante la ejecución de experimentos mecánicos, sean estos cualesquiera.

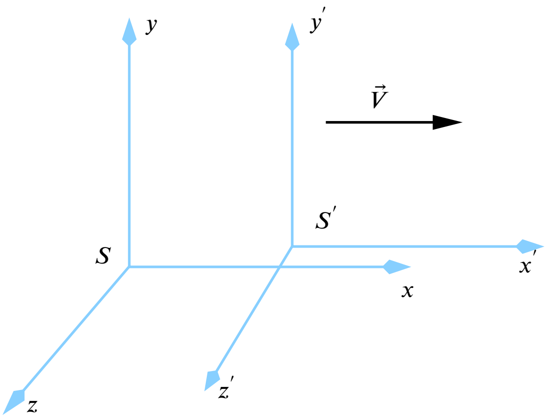


Figura 1: El sistema $S'$ es un sistema de referencia inercial que se mueve con respecto al sistema $S$ a una velocidad $\vec{V}$ a lo largo del eje $x$. Fuente: elaboración propia.

Del mismo modo, si tenemos, por ejemplo, dos trenes en paralelo, y uno de ellos comienza a moverse, omitiendo el breve período de la aceleración (que supondremos muy pequeña) es imposible saber si es un tren el que se está moviendo o, por el contrario, es el otro tren el que se está moviendo en sentido contrario. Por razones históricas y didácticas vamos a presentar ahora las conocidas como transformaciones de Galileo. Las transformaciones de Galileo fueron superadas a principios del siglo XX por la teoría de la relatividad especial, con las conocidas como transformaciones de Lorentz, que implican una revisión radical de nuestros conceptos intuitivos de espacio y tiempo. Sin embargo, las transformaciones de Galileo reaparecen como un caso límite de las verdaderas transformaciones de Lorentz para velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz en el vacío. Veremos que con las transformaciones de Galileo y las leyes de Newton emerge de forma natural el principio de relatividad (de Galileo).

**Definición 7: Transformaciones de Galileo**

Las transformaciones de Galileo son las ecuaciones que relacionan las posiciones y velocidades entre dos sistemas de referencia inerciales en la mecánica clásica *prerrelativista* (o como caso límite, mencionado anteriormente).

Supongamos un sistema de referencia inercial $S'$ que se mueve con respecto a otro $S$ a una velocidad $\vec{V}$. Supongamos que los orígenes de ambos sistemas coinciden en el instante que tomamos como inicial y que se mueve uno respecto al otro según la dirección del eje $x$ (sin pérdida de generalidad, puesto que siempre podríamos girar los ejes y hacer coincidir uno de los ejes coordenados con la dirección del movimiento relativo), véase la Figura 1. En este caso, las ecuaciones del movimiento de ambos sistemas están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Estas ecuaciones nos dicen simplemente (de forma intuitiva y evidente) que la posición de un cuerpo en el sistema de referencia inercial en movimiento $S'$ es igual a su posición en el sistema en reposo $S$ menos el producto de la velocidad relativa $V$ por el tiempo que ha transcurrido $t$. Hasta aquí todo evidente, de sentido común.

Ahora bien, hay una ecuación más que está implícita en esta teoría y es que ambos observadores miden el mismo tiempo, es decir, que el tiempo es absoluto. Esto lo expresaríamos matemáticamente como:

$$t' = t\,. \tag{8}$$

Pues bien, nos preguntamos ahora cómo se transforman las velocidades. Supongamos que un cuerpo se está moviendo con velocidad $v'$ en $S'$ y que $S$ observa la velocidad $v$. Para relacionarlas basta tomar la derivada temporal (respecto al mismo tiempo absoluto) de las transformaciones de Galileo para las coordenadas, la Ecuación (7), resultando:

$$v' = v - V\,. \tag{9}$$

Es decir, que las velocidades simplemente se suman o se restan, conforme dicta el sentido común. Pues bien, si el cuerpo en consideración está acelerado, cuál será la relación entre las aceleraciones determinadas en ambos sistemas de referencia inerciales. La respuesta se obtiene derivando respecto al tiempo la Ecuación (9)

$$a' = a \,. \tag{10}$$

Es decir que las aceleraciones son iguales, puesto que la velocidad relativa de los sistemas de referencia es una constante, y por tanto su derivada es cero. Este resultado es asombroso. Lo que nos dice es que la aceleración de un cuerpo es invariante en los sistemas de referencia inerciales. Y puesto que la segunda ley de Newton, la Ecuación (2), depende solamente de la aceleración, la invariancia de la aceleración implica la invariancia de las fuerzas. Nótese que estamos suponiendo que la masa es también un invariante, independiente del observador inercial. Con este resultado, la invariancia de las fuerzas respecto a los sistemas de referencia inerciales, hemos demostrado el principio de relatividad de Galileo.

## 2.7 El peso

La grandeza y potencia de la teoría de Newton se manifiesta en su éxito en múltiples aplicaciones, que van desde el lanzamiento de proyectiles en la Tierra al movimiento planetario y de satélites, pasando por otras muchas ramas de la Física. Estudiemos ahora el caso de una fuerza a la que está sometido todo cuerpo sobre la superficie de la Tierra: el *peso*.

Cuando estudiemos el campo gravitatorio veremos que la fuerza de la gravedad es igual al producto de la masa por la intensidad del campo. Sin embargo hay que tener en cuenta que esta masa no es la que hemos definido anteriormente, la masa inercial (la resistencia al cambio en el estado de movimiento), y que representaremos por $m_i$, sino la llamada *masa pesante*, que representaremos por $m_g$.

De esta manera el peso de un *grave* (un cuerpo que pesa) es el producto de la masa pensante por la intensidad del campo gravitatorio que se representa por $\vec{g}$, y que es una magnitud vectorial dirigida verticalmente hacia abajo (en realidad hacia el centro de la Tierra, en primera aproximación). Así el peso es:

**Definición 8: Peso**

El peso es igual al producto de la masa pesante $m_g$ por la intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ y su fórmula es

$$\vec{P} = m_g \vec{g}\,. \tag{11}$$

Pues bien, apliquemos al peso la segunda ley de Newton

$$\vec{P} = m_g \vec{g} = m_i \vec{a}\,. \tag{12}$$

Ahora sucede algo extraordinario y es que se observa que para todos los cuerpos la masa pesante y la masa inercial (o masa inerte), en principio conceptos totalmente distintos, son siempre iguales, independientemente de la naturaleza del material del que estén constituidos. Esto ha sido demostrado experimentalmente, con un altísimo grado de precisión por el experimento de Eötvos, y otros experimentos análogos y tiene consecuencias de largo alcance, tal como se percató Einstein y que le llevó a formular su pieza clave de la teoría de la relatividad: el principio de equivalencia. Ahora, puesto que $m_g = m_i$, obtenemos de la Ecuación (12):

$$\vec{g} = \vec{a}\,. \tag{13}$$

Lo que esto significa es que todos los cuerpos, independientemente de su masa, en un campo gravitatorio, caen con la misma aceleración $g$, que es conocida como la aceleración de la gravedad, y cuyo valor, en la superficie de la Tierra (y a nivel del mar y a 45º de latitud) es $g = 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$.

Este hecho, que todos lo cuerpos caigan con la misma aceleración, puede parecer que se viola en algunos casos. Pensemos por ejemplo en el caso de una piedra y una pluma. Es evidente que no caen con la misma aceleración. Sin embargo esto se debe a los efectos del aire sobre la pluma, que son despreciables para la piedra. Sin embargo, en el vacío, ambos cuerpos sí caerían con la misma aceleración, la aceleración de la gravedad, y esto lo probó Newton con un experimento que consistía en poner un objeto consistente y una pluma en un tubo cilíndrico en el que se había hecho el vacío, con ambos objetos en la parte inferior. Se le daba la vuelva rápidamente y se observaba que ambos cuerpos caían al mismo ritmo. Vamos a introducir ahora una serie de conceptos de gran trascendencia: el impulso, el trabajo, la energía y el momento angular.

## 2.8 El impulso y el trabajo

Si en la Ecuación (6) reordenamos los factores, obtenemos:

$$\vec{F} dt = d\vec{p} \,. \tag{14}$$

Al primer miembro se lo conoce como *impulso* (en su forma diferencial) y vemos que es igual a la variación (infinitesimal) de momento lineal. Si ahora integramos (y suponiendo que la fuerza pueda depender del tiempo) tenemos:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F} dt \,. \tag{15}$$

Así pues, el impulso, que es la integral temporal de la fuerza, es igual a la variación de momento lineal.

**Definición 9: Impulso**

El impulso es la integral temporal de la fuerza y es igual a la variación de momento.

Si la fuerza es constante tendríamos:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \,. \tag{16}$$

Una fuerza pequeña actuando durante mucho tiempo puede producir el mismo efecto en el cambio de la cantidad de movimiento que una gran fuerza actuando durante un breve lapso de tiempo, por ejemplo. Ahora bien, en el concepto de impulso aparece la dimensión temporal ¿Qué ocurriría si la sustituyéramos por las dimensiones espaciales? Pues que tendríamos el utilísimo concepto de trabajo $W$, que se define como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. En su forma diferencial

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{17}$$

**Definición 10: Trabajo**

El trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento causado por dicha fuerza.

En forma integral, el trabajo se puede expresar como:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{18}$$

Para entender el concepto de trabajo, consideremos algunos ejemplos. Si empujamos una pared, ejerciendo una fuerza, no estaremos realizando un trabajo, puesto que la pared no se desplaza. Si realizamos una fuerza en cierta dirección sobre un cuerpo (una dirección con componente horizontal y vertical) y el cuerpo se desplaza horizontalmente, véase la Figura 2, solamente realiza trabajo la componente horizontal de la fuerza. Del concepto de trabajo surge el concepto físico de *energía*.

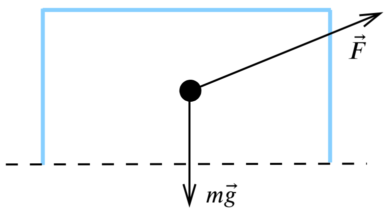

Figura 2: Trabajo realizado por una fuerza. Fuente: elaboración propia.

## 2.9 La energía

Si ahora sustituimos en la Ecuación (18) la segunda ley de Newton, la Ecuación (2), obtenemos:

$$W = \int_1^2 m\vec{a}d\vec{r}. \tag{19}$$

Ahora sustituimos la aceleración por la derivada de la velocidad respecto del tiempo y expresamos el diferencial del desplazamiento como $d\vec{r} = \vec{v}dt$:

$$W = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \int_1^2 m\vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \,. \tag{20}$$

Vemos, pues, que el trabajo realizado entre los estados inicial 1 y final 2 es igual a la variación de una cantidad que es igual a un medio del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad y que se conoce como energía cinética, puesto que es una energía asociada al movimiento.

**Definición 11: Energía cinética**

La energía cinética de un cuerpo, que representaremos por $T$, es igual a un medio del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

El trabajo y la energía tienen por dimensiones el producto de las dimensiones de la fuerza por una longitud, es decir, $[\mathrm{W}] = [\mathrm{T}] = [\mathrm{F}][\mathrm{L}] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$ y en el sistema internacional se mide en *joules* $J$ (que en español, a menudo, se nombra *julio*). Así, pues, un joule (o julio) es el *trabajo necesario para desplazar un metro un cuerpo con una fuerza de un newton*.

Si ahora elevamos un cuerpo de peso $mg$ en el seno de un campo gravitatorio a una altura $h_2$ (no demasiado grande, para que la aceleración de la gravedad permanezca constante), desde una altura $h_1$, entonces el trabajo realizado será evidentemente

$$W = mgh_2 - mgh_1 \,. \tag{21}$$

Ahora bien, en la altura este cuerpo no tiene movimiento, por lo que pareciera como si su energía hubiera quedado latente, hecho que se manifiesta al soltar el cuerpo, puesto que este caerá aumentando su velocidad, y con ello ganando energía cinética. A esta energía que está como latente se la conoce como energía potencial y se la representa por $V$.

Si ahora combinamos la Ecuación (20) con la Ecuación (21) resulta:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 - mgh_1\,. \tag{22}$$

Reagrupando términos obtenemos:¡

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2\,. \tag{23}$$

Es decir, que la suma de la energía cinética más la potencial, que se conoce como *energía mecánica*, es constante. Así si lanzamos un cuerpo hacia arriba, este comienza por tener energía cinética, que se va transformando paulatinamente en energía potencial, hasta que al alcanzar la altura máxima toda su energía cinética se ha transformado en energía potencial. Cuando el cuerpo caiga sucederá el proceso contrario: la conversión paulatina de energía potencial en cinética.

La conservación de la energía mecánica, así como la conservación del momento lineal (en ausencia de fuerzas), convierte a estos conceptos en sumamente importantes, puesto que pueden caracterizar un sistema, independientemente del tiempo.

Para ver la descripción y resultados de un experimento que demuestra la conservación de la energía mecánica (suma de energía cinética y potencial) de un cuerpo en caída libre puede consultarse (Franco et al., 2007).

## 2.10 El momento angular

Vamos a estudiar ahora el equivalente a las leyes de Newton para los sistemas que presentan algún tipo de rotación. Para ello definimos el concepto de *momento de una fuerza*.

**Definición 12: Momento de una fuerza**

Se define el momento de una fuerza $\vec{N}$ como el producto vectorial del vector posición, respecto de un punto, por la fuerza. Su expresión matemática es:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \,. \tag{24}$$

Vamos a definir ahora un concepto muy importante en Física: el *momento angular*.

**Definición 13: Momento angular**

El momento angular $\vec{L}$ respecto de un punto es el producto vectorial del vector posición, respecto dicho punto, por el momento lineal o *cantidad de movimiento*:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \,. \tag{25}$$

Derivemos ahora el momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \,, \tag{26}$$

donde simplemente hemos aplicado la *regla de la derivada del producto* a cantidades vectoriales. Obsérvese ahora que el primer término del segundo miembro es cero, puesto que la derivada de la posición es la velocidad y el producto vectorial de dos vectores paralelos en cero. En conclusión nos queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{27}$$

donde hemos aplicado que la derivada del momento lineal respecto del tiempo es precisamente la fuerza, conforme a la segunda ley de Newton. Lo que obtenemos es que el momento de una fuerza es igual a la derivada respecto del tiempo del momento angular. Esta ecuación es la análoga a la segunda ley de Newton.

## 2.11 Aplicaciones de las leyes de Newton

Estudiaremos ahora algunas aplicaciones de las leyes de Newton, con algunas leyes de fuerza. Pospondremos el estudio del movimiento vibratorio armónico simple y el problema de los dos cuerpos en un campo gravitatorio a capítulos aparte, dada su importancia y complejidad.

## Caída libre

A distancias cortas, relativas al observador, la Tierra la podemos suponer plana y el campo gravitatorio o aceleración de la gravedad constante. Estudiaremos la caída de un objeto desde cierta altura, y el tiro parabólico, cuando al móvil se le imprime cierta velocidad con componentes tanto horizontales como verticales. Supondremos, en una primera aproximación, que no hay aire o que su resistencia es despreciable. En ese caso, el de la caída libre, la única fuerza que actúa es la fuerza de la gravedad. La fuerza es por tanto:

$$\vec{F} = -m\vec{g}\,. \tag{28}$$

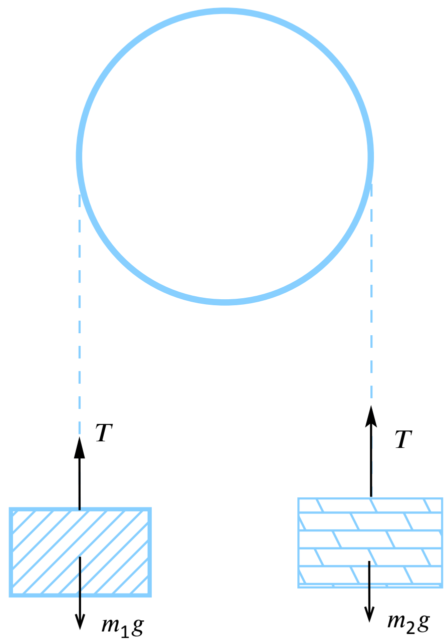

Figura 3: Máquina de Atwood. Fuente: elaboración propia.

El signo menos se debe a que la fuerza está dirigida hacia abajo. Ya sabemos que la masa pesante es igual a la masa inercial, por lo que el problema de caída libre se reduce a un problema de cinemática, hecho que nos permite repasar conceptos cinemáticos tal como el de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\,, \tag{29}$$

donde $z$ es la coordenada espacial vertical. La ecuación se puede reescribir:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,, \tag{30}$$

donde $v$ es la velocidad. Esta ecuación integrada arroja:

$$v = v_0 - g(t - t_0)\,, \tag{31}$$

donde $v_0$ es la velocidad inicial y $t_0$ es el tiempo inicial. La velocidad de caída es negativa, por estar dirigida hacia abajo, y crece en módulo. La Ecuación (31) la podemos reescribir como:

$$\frac{dz}{dt} = v_0 - g(t - t_0)\,, \tag{32}$$

que integrada arroja:

$$z = z_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\,, \tag{33}$$

donde $z_0$ representa la altura inicial.

**Ejemplo 1.**

La máquina de Atwood consiste en una polea, que se supone de masa nula y sin resistencia, de la que penden dos masas $m_1$ y $m_2$ unidas por una cuerda, también de masa nula. Se pide calcular la aceleración con la que cae la masa mayor, que supondremos que es $m_1 > m_2$, véase la Figura 3.

Descomponemos el sistema en dos subsistemas: el de cada cuerpo con la cuerda y planteamos la segunda ley de Newton para cada uno de ellos teniendo en cuenta la tensión de la cuerda $T$, escogiendo, arbitrariamente, como sentido positivo el del movimiento, que es el de caída de la masa mayor, en este caso $m_1$:

$$T - m_2 g = m_2 a\,, \tag{34}$$

$$m_1 g - T = m_1 a\,. \tag{35}$$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$\left(m_1 g - T\right) + \left(T - m_2 g\right) = \left(m_1 + m_2\right) a\,. \tag{36}$$

La tensiones, por ser iguales, se cancelan, y resulta:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \,. \tag{37}$$

Estudiemos ahora los casos límite:

- Si $m_1 \gg m_2$ entonces:

$$a \simeq \frac{m_1}{m_1} g = g. \tag{38}$$

  donde hemos despreciado la masa $m_2$ frente a la masa $m_1$, que es mucho mayor. El resultado es que el cuerpo más masivo cae con aproximadamente la aceleración de la gravedad, como era de esperar.

- Por otro lado si las masas son iguales $m_1 = m_2$, entonces $a = 0$ y el sistema permanece en reposo. Una vez conocida la aceleración del sistema, podrían utilizarse las ecuaciones de cualquiera de los dos subsistemas para obtener el valor de la tensión de la cuerda.

## Resistencia proporcional a la velocidad

Si ahora admitimos el caso realista de que el aire presenta una resistencia al movimiento la ley de Newton quedaría en la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{F}_r \,, \tag{39}$$

donde $\vec{F}_r$ es la fuerza de resistencia. Esta fuerza de resistencia, en general, es complicada y para tenerla en cuenta en los cálculos de balística (por ejemplo, en el lanzamiento de proyectiles en artillería) se usan tablas correspondientes a un cierto proyectil. Sin embargo se puede hacer la aproximación de que esta fuerza es una función de una potencia de la velocidad. Esta aproximación ha revelado ser buena y tiene la virtud de que se pueden realizar cálculos analíticos. En caso contrario, suponiendo otras formas funcionales, habría que recurrir a cálculo numérico. Pues bien, las dos principales aproximaciones son:

- Que la fuerza es proporcional a la velocidad, lo que se conoce como *ley de re-*

*sistencia de Stokes*.

- Que la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad, lo que se conoce como *ley de resistencia de Newton*.

Aquí nos atendremos al primer caso, el de la resistencia proporcional a la velocidad, que tiene un rango de validez para velocidades pequeñas, muy inferiores a la velocidad del sonido. Estudiamos ahora el caso de un movimiento horizontal sometido a una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad. La ley de Newton se escribirá:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -kmv\,, \tag{40}$$

donde la constante $k$ da una medida de la intensidad de la resistencia. Integramos la ecuación:

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt\,, \tag{41}$$

lo que devuelve:

$$\ln v = -kt + C_1\,. \tag{42}$$

Suponemos que la partícula posee una velocidad inicial $v(t = 0) = v_0$, con ello podemos obtener la constante de integración, resultando, al tomar *antilogaritmos*:

$$v = v_0 e^{-kt}\,. \tag{43}$$

Obsérvese que la velocidad decrece exponencialmente. En el caso de que $k = 0$, recuperamos la ecuación $v = v_0$ de un movimiento rectilíneo uniforme. Integramos la Ecuación (43) para obtener la posición en función del tiempo y con ello tener resuelto el problema de la ecuación del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}\,, \tag{44}$$

$$\int dx = v_0 \int e^{-kt}\,, \tag{45}$$

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2\,. \tag{46}$$

La constante de integración la obtenemos suponiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en el origen, es decir, $x(t=0)=0$. Con ello resulta:

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) . \tag{47}$$

En el caso de que el tiempo tienda a infinito $t \to \infty$ (lo que en Física significa para tiempos suficientemente grandes) la distancia recorrida será $v_0/k$. En el caso límite de que la constante de resistencia tienda a cero $k \to 0$ podemos desarrollar la exponencial en serie de Taylor, quedándonos con el término lineal y despreciando los términos cuadráticos y superiores en $k$ (puesto que $k$ es pequeña). Empleamos la aproximación $e^x \simeq 1 + x$ y obtenemos:

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - (1 - kt)\right) = v_0 t \, . \tag{48}$$

En este caso, como se observa, volvemos a obtener la ecuación de movimiento rectilíneo uniforme. Si ahora queremos obtener la velocidad en función de la oposición podemos usar el siguiente truco, basado en la regla de la cadena:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} \, . \tag{49}$$

Ahora, empleando la segunda ley de Newton:

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -kv \, . \tag{50}$$

Ecuación que integrada, para una velocidad inicial $v_0$ resulta:

$$v = v_0 - kx \, . \tag{51}$$

Ecuación que nos dice que la velocidad, en un medio resistente con una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, disminuye proporcionalmente con la distancia. Nuevamente, en el caso límite de que $k$ sea cero o tienda a cero, $v = v_0$, es decir, que el movimiento es rectilíneo y uniforme.

Por último, te recomendamos que visualices el vídeo sobre la proporcionalidad entre resistencia y velocidad.

Accede al vídeo: Fuerza de resistencia proporcional a la velocidad.

Estudiamos ahora el caso de un movimiento de caída vertical con fuerza de resistencia proporcional a la velocidad. La ecuación del movimiento será:

$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv\,. \tag{52}$$

Obsérvese que la fuerza de resistencia va dirigida hacia arriba, puesto que la velocidad (hacia abajo) es negativa $v < 0$, entonces $-kmv > 0$. Reordenando términos:

$$\frac{dv}{kv + g} = -dt\,. \tag{53}$$

Ahora integramos la ecuación, con una integral definida, suponiendo que la velocidad en el instante inicial $v(t = 0) = v_0$:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{kv + g} = -\int_0^t dt\,, \tag{54}$$

de donde obtenemos, aplicando la *regla de Barrow:*

$$\frac{1}{k}\left[\ln(kv + g) - \ln(kv_0 + g)\right] = \frac{1}{k}\ln\frac{kv + g}{kv_0 + g} = -t\,. \tag{55}$$

Aplicamos ahora antilogaritmos a ambos miembros y despejamos la velocidad, resultando:

$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k}e^{-kt}\,. \tag{56}$$

Estudiamos ahora los casos límite. Si $t \to \infty$ (es decir, para tiempos suficientemente grandes) el segundo término del miembro derecho se hace cero y la velocidad tiende a lo que se conoce como velocidad límite, es decir, el cuerpo cae con velocidad constante, que es $v_l = -g/k$. Si por el contrario hacemos $k \to 0$ la exponencial es

$e^{-kt} \simeq 1 - kt$, de donde se obtiene:

$$v = v_0 - gt\,, \tag{57}$$

que es la ecuación, para la velocidad, de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tal como cabría esperar. Realizamos ahora la integración de la Ecuación (56) suponiendo que el cuerpo cae desde la altura inicial $z(t = 0) = h$:

$$\int_0^h dz = \int_0^t \left(-\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k}e^{-kt}\right) dt\,, \tag{58}$$

resultando:

$$z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2}(1 - e^{-kt})\,. \tag{59}$$

Estudiemos ahora los casos límite. Si $k \to \infty$ la exponencial es igual a cero y el tercer término del segundo miembro se anula, quedando la ecuación de un movimiento rectilíneo uniforme de caída con la velocidad límite.

$$z(k \to \infty) \simeq h - \frac{g}{k}t\,. \tag{60}$$

Si ahora hacemos tender la resistencia a cero $k \to 0$ podemos emplear la aproximación $e^{-kt} \simeq 1 - kt + 1/2k^2t^2$, resultando:

$$z = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{61}$$

que es la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de caída libre, con la aceleración de la gravedad, tal como era de esperar.

Por último, te recomendamos que visualices el vídeo sobre el movimiento de caída:

Accede al vídeo: Movimiento de caída con fuerza de resistencia proporcional a la velocidad.

## Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

Supongamos ahora un movimiento de caída con una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Supongamos que se trata de un paracaidista que cae en caída libre hasta alcanzar una velocidad $v_0$ y en ese instante abre el paracaídas, obrando sobre él la fuerza de resistencia. La ecuación de movimiento será:

$$ma = -mg + kv^2 \,. \tag{62}$$

Cuando la fuerza de resistencia iguala al peso se alcanza la *velocidad límite* $v_L$ que valdrá:

$$-mg + kv_L^2 = 0 \;\Rightarrow\; v_L = \sqrt{\frac{mg}{k}} \,. \tag{63}$$

La ecuación de movimiento es:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{k}{m}v^2 \,. \tag{64}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-g + \frac{k}{m}v^2} = \int_{t_0}^{t} dt \,. \tag{65}$$

Para integrar hacemos el cambio de variables $v = z \cdot v_L$:

$$\frac{dv}{-g + \frac{k}{m}v^2} = \frac{v_L dz}{-g + \frac{k}{m}\frac{mg}{k}z^2} = \frac{v_L}{g}\frac{dz}{z^2 - 1} \tag{66}$$

$$\frac{v_L}{g}\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{v_L}{2g}\left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z - 1} - \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z + 1}\right) = \frac{v_L}{2g}\left([\ln(z-1)]_{z_0}^{z} - [\ln(z+1)]_{z_0}^{z}\right) =$$

$$= \frac{v_L}{2g} \ln \frac{(z-1)\left(z_0+1\right)}{\left(z_0-1\right)(z+1)} \,. \tag{67}$$

Tomando antilogaritmos resulta:

$$\frac{(z-1)\left(z_0+1\right)}{\left(z_0-1\right)(z+1)} = \exp\left\{\frac{2g}{v_L}\left(t - t_0\right)\right\} \,. \tag{68}$$

Llamando $a$ a la exponencial del segundo miembro y despejando $z$ resulta:

$$(z-1)\left(z_0+1\right) = a\left(z_0-1\right)(z+1)\,, \tag{69}$$

$$z\left(z_0+1-az_0+a\right) = a\left(z_0-1\right)+\left(z_0+1\right)\,, \tag{70}$$

$$z = \frac{\exp\left\{\frac{2g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}\left(z_0-1\right)+\left(z_0+1\right)}{\left(z_0+1\right)-\exp\left\{\frac{2g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}\left(z_0-1\right)}\,. \tag{71}$$

Multiplicando numerador y denominador por la exponencial negativa $\exp\left\{-g/v_L\left(t-t_0\right)\right\}$ y deshaciendo el cambio de variable $z=v/v_L$ obtenemos:

$$v = -v_L\frac{\left(v_0-v_L\right)\exp\left\{\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}+\left(v_0+v_L\right)\exp\left\{-\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}}{\left(v_0-v_L\right)\exp\left\{\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}-\left(v_0+v_L\right)\exp\left\{-\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}}\,. \tag{72}$$

Estudiemos ahora los casos límite.

- Si $t=t_0$ las exponenciales son todas la unidad y obtenemos:

$$v = -v_L\frac{v_0-v_L+v_0+v_L}{\left(v_0-v_L\right)-\left(v_0+v_L\right)} = v_0\,. \tag{73}$$

- Si $t\to\infty$ las exponenciales negativas se anulan y obtenemos:

$$v = -v_L\frac{\left(v_0-v_L\right)\exp\left\{\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}}{\left(v_0-v_L\right)\exp\left\{\frac{g}{v_L}\left(t-t_0\right)\right\}} = -v_L\,. \tag{74}$$

Para obtener la expresión de la posición en función de la velocidad empleamos el cambio de variable:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}\,. \tag{75}$$

La ecuación del movimiento se transforma en:

$$v\frac{dv}{dt} = -g+\frac{k}{m}v^2\,. \tag{76}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{-g+\frac{k}{m}v^2} = \int_{x_0}^{x} dx\,, \tag{77}$$

$$\frac{m}{2k}\left[\ln\left(\frac{k}{m}v^2-g\right)\right]_{v_0}^{v} = x-x_0\,, \tag{78}$$

$$x-x_0 = \frac{v_L^2}{2g}\ln\frac{\frac{g}{v_L^2}v^2-g}{\frac{g}{v_L^2}v_0^2-g} = \frac{v_L^2}{2g}\ln\frac{v^2-v_L^2}{v_0^2-v_L^2}\,. \tag{79}$$

Tomando antilogaritmos y despejando $v$ obtenemos:

$$v^2 = v_L^2 + \left(v_0^2-v_L^2\right)\exp\left\{\frac{2g}{v_L^2}\left(x-x_0\right)\right\}\,. \tag{80}$$

## Tiro parabólico

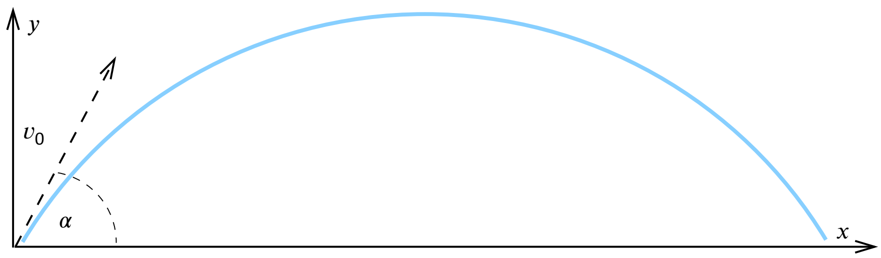


Figura 4: Trayectoria del movimiento parabólico. Fuente: elaboración propia.

Hemos visto que la masa pesante y la masa inercial son iguales, lo que reduce ciertos problemas de dinámica, en que la masa está presente, a meros problemas de cinemática. Vamos a repasar el movimiento de un proyectil en el seno de un campo gravitatorio, que como veremos describe una trayectoria parabólica (en realidad, se trata del tramo de una trayectoria elíptica, cuando se tiene en cuenta, para movimientos a gran escala, la variación de la aceleración de la gravedad con la altura y la esfericidad de la Tierra, pero para movimientos a pequeña escala, la parabólica es una excelente aproximación).

Pues bien, supongamos que desde el origen de coordenadas de un sistema de referencia descrito por la coordenada $x$ en el eje horizontal, coincidente con la superficie de la Tierra, y el eje $y$ vertical, se lanza un proyectil con velocidad inicial $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal, véase la Figura 4. Sabemos, por cinemática, que los movimientos ortogonales son independientes, lo que se conoce como ley de composición de movimiento. Así pues escribiremos las ecuaciones del movimiento para el eje $x$ y para el eje $y$. Estas son:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t\,, \tag{81}$$

que como se ve es simplemente la ecuación de un movimiento rectilíneo uniforme, conforme a la ley de inercia. La otra ecuación es:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{82}$$

Nótese que hemos empleado en la Ecuación (81) y en la Ecuación (82), las proyecciones de la velocidad inicial en sendos ejes de coordenadas. Nótese también que la ecuación para $y$ consta de un movimiento rectilíneo uniforme (de ascenso) y de un movimiento uniformemente acelerado (de descenso en el campo gravitatorio). Para encontrar la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de la Ecuación (81):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}\,, \tag{83}$$

y sustituimos en la Ecuación (82):

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2\,. \tag{84}$$

Simplificando obtenemos:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\,, \tag{85}$$

que es, evidentemente, la ecuación de una parábola. Estudiemos ahora cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil. En ese punto sabemos que la velocidad vertical es igual a cero, por lo que derivamos la Ecuación (82) e igualamos a cero:

$$v_0\sin\alpha - gt_m = 0\,. \tag{86}$$

Despejamos el tiempo de esta ecuación y la sustituimos en la Ecuación (82):

$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,, \tag{87}$$

$$y_m = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,, \tag{88}$$

en donde el subíndice $m$ representa *máxima*. Para hallar el alcance tenemos que hacer cero la $y$ en la Ecuación (82):

$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\,. \tag{89}$$

Esta ecuación reexpresada como:

$$\left(v_0 \sin\alpha \cdot - \frac{1}{2} g t\right) t = 0\,, \tag{90}$$

tiene dos soluciones. La primera es la solución trivial $t = 0$, cuyo significado físico es simplemente la posición del proyectil cuando es lanzado desde el origen. La segunda solución nos dará el tiempo de vuelo hasta llegar al alcance máximo y es:

$$t_a = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\,, \tag{91}$$

en donde el subíndice $a$ en el tiempo representa el tiempo correspondiente al alcance. Ahora sustituimos la Ecuación (91) en la Ecuación (81) y obtenemos la fórmula del alcance:

$$x_a = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}\,, \tag{92}$$

donde hemos empleado la fórmula trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$. Puesto que el seno de ángulos suplementarios (ángulos que suman $\pi$) es igual tenemos que el alcance será igual para ángulos tales que $2(\alpha + \beta) = \pi$, de donde se deduce que el alcance será igual para ángulos tales que $\beta = \pi/2 - \alpha$. Es decir, que el alcance es igual para ángulos complementarios (que suman $\pi/2$). Cuando el ángulo es inferior a $\pi/4$ se habla de tiro rasante y cuando el superior a $\pi/4$ se habla de tiro por elevación.

## 2.12 Aceleración normal y tangencial

Examinemos ahora las componentes esenciales de la aceleración. La aceleración es la derivada respecto del tiempo del vector velocidad, pero el vector velocidad está compuesto por el módulo $v$ y por un vector unitario en su dirección y sentido $\vec{u}_T$ (el subíndice $T$ significa que el vector unitario es tangencial a la trayectoria, como lo es la velocidad), por lo que la aceleración será:

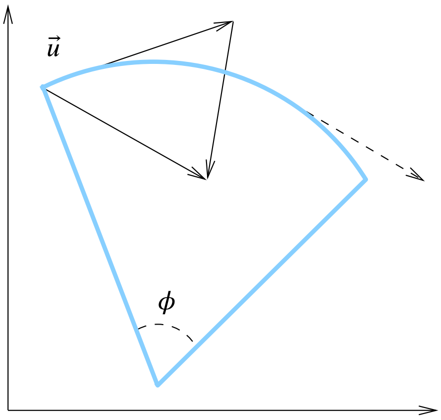


Figura 5: Esquema de la variación del vector unitario de la velocidad en una trayectoria con curvatura. Fuente: elaboración propia.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}\,. \qquad (93)$$

Es decir, que la aceleración es igual a una primera componente, que es igual a la derivada del módulo de la velocidad y que está en la dirección y sentido de la velocidad, tangencial a la trayectoria. Esto es lo que se llama *aceleración tangencial*, una segunda componente que implica la derivada de la dirección de la velocidad (pues hay aceleración no solamente cuando la velocidad cambia de módulo, sino también cuando cambia de dirección y sentido). Esta última es la *aceleración normal o centrípeta.* Vamos a ver cuál es su forma matemática.

Inspeccionemos la Figura 5. En ella podemos ver los vectores unitarios a una trayectoria en la que cambia de dirección la velocidad y que forma un arco de circunferencia, infinitesimal, de ángulo $\phi$.

Transportamos el vector unitario posterior al origen del anterior. La diferencia de ambos vectores unitarios será un vector dirigido hacia el centro del arco de circunferencia, es decir, un vector unitario normal $d\vec{u} = d\phi\vec{u}_N$. El ángulo es igual al cociente entre el arco de circunferencia $ds$ y el radio $R$: $d\phi = ds/R$, por lo que:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\vec{u}_N = \frac{v}{R}\vec{u}_N\,. \qquad (94)$$

Llevando esta ecuación a la Ecuación (93) resulta:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\,, \tag{95}$$

con lo que tenemos la aceleración descompuesta en su componente tangencial (debida a la variación del módulo de la velocidad) y su componente normal o centrípeta (debida a la variación de la dirección de la velocidad). La velocidad angular $\omega$ se define como la derivada del ángulo $\phi$ con respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}\,. \tag{96}$$

Como el arco $s$ (que es una distancia) es igual al producto del ángulo por el radio $s = \phi R$, entonces la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular será:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt}R = \omega R\,. \tag{97}$$

Llevando esta fórmula a la expresión de la aceleración centrípeta, tenemos que esta se puede escribir también como:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R\,. \tag{98}$$

La aceleración centrípeta desempeñó un papel crucial en la historia de la formulación y descubrimiento de las leyes de la mecánica y de la gravitación. Para un reseña histórica sobre ella puede consultarse (Rivera-Juárez et al., 2020).

## 2.13 Sistemas de referencia no inerciales

Examinaremos ahora los fenómenos que se manifiestan cuando nos situamos en un sistema de referencia no inercial. Supongamos que tenemos un sistema de referencia inercial, que denotaremos por $O$ y que llamaremos sistema fijo, y que tenemos otro sistema de referencia $O'$ que está girando respecto del sistema de referencia fijo con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Supongamos que tenemos una base de vectores unitarios ortogonales en el sistema giratorio $\{u_x, u_y, u_z\}$. Los vectores de esta base están en movimiento giratorio con respecto al sistema fijo (Figura 6).

Sea un vector cualquiera $\vec{b}$. En la base del sistema giratorio se expresará:

$$\vec{b} = b_x u_x + b_y u_y + b_z u_z \,. \qquad (99)$$

Derivamos ahora el vector $\vec{b}$. Hay que tener en cuenta que como los vectores de la base no son fijos también tendrán derivada. Por tanto:

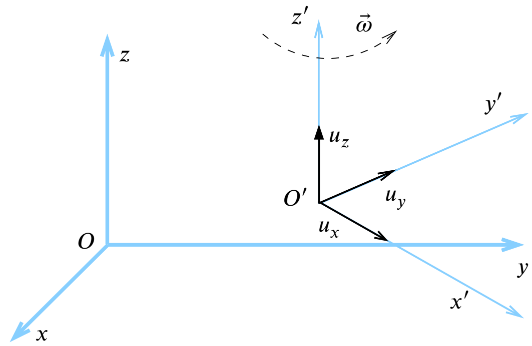

Figura 6: Sistema fijo $O$ y giratorio $O'$ (con velocidad angular $\vec{\omega}$). Elaboración propia.

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_O = \frac{db_x}{dt}u_x + \frac{db_y}{dt}u_y + \frac{db_z}{dt}u_z + b_x\frac{du_x}{dt} + b_y\frac{du_y}{dt} + b_z\frac{du_z}{dt} \,. \qquad (100)$$

Los tres primeros términos, que involucran las derivadas de las componentes de $\vec{b}$ en la base giratoria, son la derivada del vector $\vec{b}$ en el sistema giratorio $O'$. Por otro lado, la derivada temporal de uno de los vectores de la base móvil vendrá dada por $du_i/dt = \vec{\omega} \times u_i$, es decir, será igual al producto vectorial de la velocidad angular por el vector de la base. De esta manera, la Ecuación (100) queda:

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{b} \,. \qquad (101)$$

Así obtenemos el operador que relaciona la derivada temporal en $O$ con la derivada temporal en $O'$ de un vector arbitrario:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_O = \left(\frac{d}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \qquad (102)$$

Si aplicamos este operador al vector posición $\vec{r}$ obtenemos:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r} \,, \qquad (103)$$

que se traduce en:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \tag{104}$$

cuya interpretación es que la velocidad de la partícula material observada desde el sistema fijo $O$ es igual a la velocidad observada en el sistema giratorio $O'$ más la velocidad debida a la rotación. Ahora aplicamos el operador de la Ecuación (102) a la velocidad $\vec{v}_O$:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,. \tag{105}$$

Sustituimos la Ecuación (104):

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\,. \tag{106}$$

En ella reconocemos la aceleración observada en el sistema giratorio $\vec{a}' = (d\vec{v}'/dt)_{O'}$, la aceleración angular $\alpha = d\vec{\omega}/dt$, y en el tercer término del segundo miembro la velocidad en el sistema $O'$. Con todo ello obtenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\,. \tag{107}$$

Antes de interpretar los términos que aparecen, supongamos que queremos aplicar la ley de Newton (que por su puesto se cumple en el sistema fijo por tratarse de un sistema de referencia inercial) al sistema giratorio, no inercial. En ese caso podríamos escribir:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{\alpha} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'\,. \tag{108}$$

El primer término del segundo miembro es la fuerza efectiva $\vec{F} = m\vec{a}$, esto es, la fuerza real, mientras que los otros términos representan las llamadas *fuerzas no inerciale*s o *fuerzas de inercia*. No son fuerzas reales, sino manifestaciones del principio de inercia, pero al querer aplicar al ley de Newton al sistema de referencia no inercial se sienten como si fueran fuerzas.

El segundo término del segundo miembro de la Ecuación (108) representa simplemente la fuerza debida a la aceleración angular $\vec{\alpha} \times \vec{r}$. El tercer término es fácil de interpretar si suponemos que la velocidad angular es perpendicular a la velocidad en el sistema giratorio, pues entonces se reduce a $m\omega^2 r$, que reconocemos como la *fuer-*

*za centrífuga.* La fuerza centrífuga es de sentido opuesto a la fuerza real centrípeta que podría aparecer en el sistema fijo. En cuanto al último término se conoce como *fuerza de Coriolis,* que pasamos a explicar a continuación.

Para entender intuitivamente la fuerza de Coriolis, supongamos que nos encontramos en el centro de una plataforma giratoria. La velocidad lineal de los puntos de la plataforma crece linealmente con el radio, es simplemente $v = \omega r$. Ahora bien, si un observador se halla en el centro y avanza hacia afuera de la plataforma, mantendrá la velocidad que tenía en el punto inicial; sin embargo, el suelo bajo sus pies habrá aumentado de velocidad, por lo que le parecerá que hay una fuerza que lo empuja lateralmente. Esta es la fuerza de Coriolis. Se manifiesta, por ejemplo, en el planeta Tierra, que es un sistema giratorio, al desplazarse las masas de aire de unas latitudes a otras, generándose movimientos circulares que constituyen los ciclones y los anticiclones.

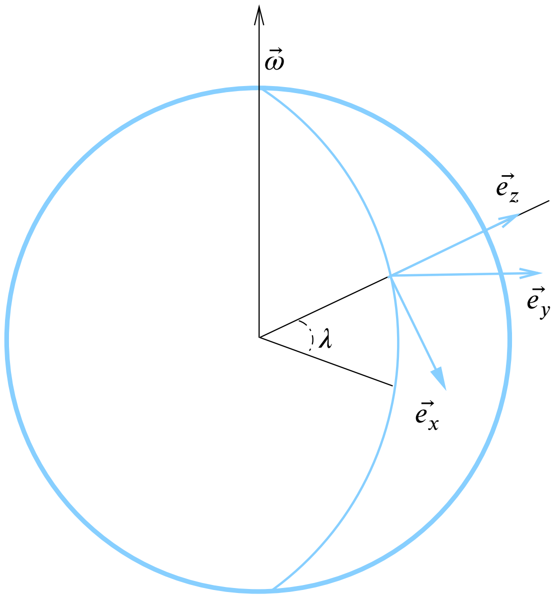

Figura 7: Sistemas de coordenadas en un punto de latitud $\lambda$ sobre la superficie de la Tierra. Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 2. Desviación de Coriolis en una caída**

Supongamos que una partícula cae desde una altura $h$. Vamos a calcular la desviación debida a la fuerza de Coriolis. Para ello calculamos primero la velocidad angular de rotación de la Tierra (que da una vuelta sobre sí misma en 24 horas):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.27 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}\,. \tag{109}$$

Como $\omega$ es una cantidad muy pequeña podemos despreciar los efectos debidos a la aceleración centrífuga, que van con $\omega^2 \sim 10^{-10}$.

La aceleración de la partícula será la suma de la aceleración de la gravedad y la de

Coriolis:

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,. \tag{110}$$

Tomemos ahora, en un punto de la superficie de latitud $\lambda$ como eje $z$ el de la vertical, como eje $x$ el que va dirigido hacia el sur y como eje $y$ el que va dirigido hacia el este, ver la Figura 7. Con este convenio de ejes el vector velocidad angular se descompondrá en:

$$\omega_x = -\omega \cos\lambda\,, \tag{111}$$

$$\omega_y = 0\,, \tag{112}$$

$$\omega_z = \omega \sin\lambda\,. \tag{113}$$

La aceleración de Coriolis originará componentes de la velocidad en las direcciones $x$ e $y$, sin embargo, por ser el valor de esta fuerza pequeño podemos despreciarlas frente a la velocidad debida a la aceleración de la gravedad, por lo que las componentes de la velocidad, con buena aproximación, serán:

$$\dot{x} \simeq 0\,, \tag{114}$$

$$\dot{y} \simeq 0\,, \tag{115}$$

$$\dot{z} \simeq -gt\,, \tag{116}$$

donde se ha supuesto una caída desde el reposo. Calculamos ahora el producto vectorial del vector velocidad angular y el vector velocidad:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} \simeq \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} \simeq -\omega g t \cos\lambda \vec{e}_z\,. \tag{117}$$

Las componentes de la aceleración de la gravedad, despreciando la fuerza centrífuga que va con $\omega^2$, son $(0, 0, -g)$. Por lo que la aceleración será:

$$a_x = \ddot{x} \simeq 0\,, \tag{118}$$

$$a_y = \ddot{y} \simeq 2\omega g t \cos\lambda\,, \tag{119}$$

$$a_z = \ddot{z} \simeq -g\,. \tag{120}$$

Integramos ahora la Ecuación (119) para obtener la velocidad:

$$\dot{y} \simeq \omega g t^2 \cos\lambda\,. \tag{121}$$

Integramos otra vez para obtener la posición:

$$y \simeq \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda\,, \tag{122}$$

donde se ha supuesto que $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ para $t = 0$. Integramos ahora dos veces la Ecuación (120) para obtener el tiempo de caída:

$$z \simeq h - \frac{1}{2} g t^2\,. \tag{123}$$

El tiempo será igual al tiempo de caída $t_h$ cuando $z = 0$.

$$t_h \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \tag{124}$$

y sustituimos este tiempo en la Ecuación (122), lo que nos dará la desviación $d$:

$$d \simeq \frac{1}{3}\omega \cos\lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,. \tag{125}$$

Luego la desviación será en el sentido positivo del eje $y$, es decir, hacia el este. Calculemos ahora su valor para una altura de $h = 100$ m a una latitud de 45°:

$$d \simeq \frac{1}{3} 7.27 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{8 \cdot 100^3}{9.8}} = 0.022\,\text{m}\,.$$

Es decir, una desviación hacia el este de 2.2 cm.

Por último, te recomendamos que visualices el vídeo sobre sistemas de referencia no inerciales:

Accede al vídeo: Sistemas de referencia no inerciales.

## 2.14 Referencias bibliográficas


Espinosa, P. C. (2015). Dispositivos y experiencias sencillas para explicar el principio de acción y reacción. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 12(2), 375–380.

Franco, J. E. C., Diaz, J. A. A., & Rodríguez, K. L. S. (2007). Principio de la conservación de la energía mecánica en caída libre. *Scientia Et Technica*, 13(34), 513–518.

Garde, E. A. & López, V. S. (1992). La estructura de las leyes de Newton: un enfoque alternativo. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (6), 221–226.

Rivera-Juárez, J., Cabrera-Muruato, E., Vargas, Y. R., & Olague, L. F. (2020). Evolución histórica del concepto fuerza centrípeta. *Latin-American Journal of Physics Education*, 14(1), 4.

Vila, J. & Sierra, C. (2008). Explicación con experimentos sencillos y al alcance de todos de la primera ley de Newton (la ley de la inercia), así como la diferencia entre inercia e inercialidad. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(3), 16.

## 2.15 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Calcular la cantidad de movimiento o momento lineal de un automóvil de 1 t de peso que circula a una velocidad de 144 km/h. Si frena bruscamente, deteniéndose en 100 m, calcular la fuerza de frenado. *Solución:* $4{\cdot}10^4$ $\text{kgms}^{-1}$, 8000 N.

**Ejercicio 2.** El momento lineal de una partícula cuya masa es de 30 kg es de 150 N · s. Si se le aplica una fuerza de 60 N en sentido contrario a su movimiento, calcular el tiempo que tardará en pararse. *Solución*: 2.5 s.

**Ejercicio 3.** Un bombardero vuela a una velocidad de 972 km/h a una altura de 1 km. Calcular desde qué distancia ha de soltar una carga explosiva para que alcance un objetivo en tierra. *Solución*: 3.857 m.

**Ejercicio 4.** Las masas que penden de la cuerda de una máquina de Atwood (supuesta inextensible y sin peso) son 505 g y 495 g. Se supone que la polea tiene masa despreciable. Calcular la velocidad de la masa mayor al haber efectuado un recorrido de 1 m. *Solución*: 0.44 m/s.

**Ejercicio 5.** Suponiendo la Tierra esférica y sin relieve, calcular la velocidad a la que debe ser lanzado un proyectil, horizontalmente y desde la cercanía de la superficie, para ponerlo en órbita, es decir, para que dé vueltas en torno a la Tierra. Dato: radio terrestre $R_0 = 6370$ km. *Solución*: 28444 km/h.

**Ejercicio 6.** Calcular la aceleración centrífuga debido a la rotación de la Tierra en torno a su eje en un punto del ecuador, suponiendo que el radio de la Tierra sea $R_T = 6370$ km y calcular la aceleración centrífuga debido al movimiento de rotación de la Tierra en torno al Sol, suponiendo que la órbita sea circular y de radio $R = 1.5 \cdot 10^8$ km. *Solución*: 0.0337 m/s$^2$ y 0.0060 m/s$^2$.

**Ejercicio 7.** Sea un avión que vuela a 800 km/h en dirección este, a lo largo de un paralelo, a 45°de latitud. Calcular, en módulo, la aceleración lateral que experimentará. *Solución*: 0.023 $m/s^2$