Ecuaciones diferenciales

Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

Índice

Esquema

Conceptos generales sobre ecuaciones en derivadas parciales
- Ecuaciones y curvas características
- Clasificación de EDPs lineales de segundo orden
- Problema de Cauchy y unicidad de soluciones

Principales problemas asociados a las ecuaciones clásicas
- Ecuación de ondas
    - Cuerda infinita
    - Cuerda acotada
- Ecuación del calor
    - Varilla infinita
    - Varilla acotada
- Ecuación de Laplace y de Poisson
    - Problema de Dirichlet
    - Problema de Neumann

Ideas clave

8.1 Introducción y objetivos

En los próximos capítulos vamos a estudiar las *ecuaciones en derivadas parciales* (EDPs). Recordemos que una ecuación en derivadas parciales es una ecuación en la que aparece una función de varias variables y alguna de sus derivadas parciales respecto a algunas de estas variables. Por ejemplo, para una función de dos variables $u(x, y)$ la forma general de una ecuación en derivadas parciales de orden n es:

$$f(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y) = 0\,. \tag{1}$$

Una solución de Ecuación (1) es una función $u(x, y)$ derivable n veces en un dominio de $\mathbb{R}^2$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

En este curso nos centraremos en particular en las EDPs *lineales* de *segundo orden* que son, con diferencia, las que más aparecen en física. Entre ellas se encuentran las tres ecuaciones clásicas:

- Ecuación de ondas:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0\,, \tag{2}$$
- Ecuación del calor:
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0\,, \tag{3}$$
- Ecuación de Laplace:
$$\Delta u = 0\,. \tag{4}$$

En estas ecuaciones hemos utilizado el *operador laplaciano* Δ, también escrito habitualmente como *nabla cuadrado* ∇^2, y que en tres dimensiones se define como:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,.$$

(En dos dimensiones simplemente aparecen los términos en x y en y.)

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r},t)\psi\,,$$

que es la ecuación central de la mecánica cuántica, se suele considerar como una ecuación de ondas ya que sus soluciones se propagan como tales, pero es en realidad una *ecuación de difusión* con soluciones complejas (Mita, 2021).

Las ecuaciones de ondas, del calor, y de Laplace, corresponden a los tres tipos en que se clasifican las EDPs lineales de segundo orden: *hiperbólicas*, *parabólicas*, y *elípticas*. En estos temas veremos cada una de estas ecuaciones por separado, ya que sus propiedades son muy diferentes. Este vídeo ofrece una introducción a algunas de las EDPs más relevantes en física:

Accede al vídeo: EDPs en física.

Los problemas de valores iniciales que nos planteábamos con las ecuaciones diferenciales ordinarias se resolvían hallando primero la solución general e imponiendo después una o varias condiciones (dependiendo del orden de la ecuación) en un punto x_0 dado. En aquel caso vimos los requisitos que debían cumplirse para que los problemas de valores iniciales tuvieran solución única. En las ecuaciones en derivadas parciales el problema es mucho más complicado, pudiéndose dar una mayor variedad de condiciones iniciales o de contorno.

Tal como ocurría con las EDOs, normalmente no es posible hallar la solución general de una EDP, con la posible excepción de algunas ecuaciones lineales de primer orden y la ecuación de ondas. Una EDP lineal de primer orden se puede resolver mediante un cambio de variables que la transforma en una ecuación diferencial ordinaria resoluble elementalmente. El cambio de variables necesario para ello viene dado por las curvas integrales de otra EDO, llamada *ecuación característica*, que se define a partir de los coeficientes de la EDP lineal.

Un cambio de variables similar en las EDPs lineales de *segundo orden* las llevará a su llamada *forma canónica*, que en algunos casos permite obtener la solución general en términos de dos funciones arbitrarias. En este curso omitiremos los detalles sobre la forma canónica de las EDPs, sin embargo volveremos sobre ella cuando calculemos la solución general de la ecuación de ondas en el próximo tema.

Aquí veremos los condiciones que se deben cumplir en las EDPs para que su solución sea única, y expondremos los problemas más comunes asociados a las ecuaciones clásicas. La resolución de estos problemas la dejaremos para el próximo tema en el que estudiaremos el método de separación de variables. El alumno interesado puede consultar las referencias (Jakobsen, 2019; Herman, 2014; Strauss, 2007) que tratan específicamente de las ecuaciones en derivadas parciales.

Los objetivos de este tema son:

- Familiarizarse con las principales características de las ecuaciones en derivadas parciales.
- Reconocer los problemas más comunes que aparecen en física relacionados con ecuaciones en derivadas parciales.
- Determinar la existencia y unicidad de soluciones a los problemas asociados a EDPs lineales de segundo orden.

A lo largo de los próximos temas utilizaremos la notación:

$$
\begin{gathered}
u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \\
u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
\text{etc.} \qquad .
\end{gathered}
$$

8.2 Ecuaciones y curvas características

Una ecuación en derivadas parciales lineal de *primer orden*, para una función de dos variables $u(x,y)$, tiene la forma general:

$$A(x,y)u_y + B(x,y)u_x = C(x,y)u + D(x,y)\,. \tag{5}$$

Estas ecuaciones tienen poco interés desde el punto de vista práctico, sin embargo, nos servirán para introducir algunos conceptos útiles en el estudio de las de segundo orden. Para resolver la Ecuación (5) consideramos la ecuación diferencial *ordinaria* de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}\,, \tag{6}$$

que llamamos *ecuación característica*. Si $A(x,y)$ y $B(x,y)$ son regulares y no se anulan simultáneamente en ninguna región del plano, la Ecuación (6) tiene unas curvas integrales $\xi(x,y) = k$, donde k es una constante, que llamamos *curvas características*. Las curvas características definen un cambio de variable:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = y \qquad\qquad \text{o bien } \eta = x\,, \end{cases}$$

que transforma la Ecuación (5) en una ecuación diferencial *ordinaria* resoluble elementalmente.

Ejemplo 1. Resolución de una EDP lineal de primer orden

Sea la ecuación:

$$2x\,u_y - u_x = 4xy\,. \tag{7}$$

La ecuación característica es:

$$\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow dy = -2x\,dx\,.$$

Integrando esta ecuación obtenemos las curvas características $y+x^2 = k$. Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x\, u_\xi \\ u_y = u_\xi + u_\eta \end{cases},$$

la Ecuación (7) se convierte en:

$$\begin{aligned} 2xu_\xi + 2xu_\eta - 2xu_\xi &= 4xy \Rightarrow \\ u_\eta &= 2\eta \end{aligned}$$

de la cual se deduce fácilmente que:

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + \eta^2 \\ &= f(y + x^2) + y^2 . \end{aligned}$$

8.3 Ecuaciones en derivadas parciales lineales de 2º orden

Una ecuación en derivadas parciales lineal de *segundo orden*, para una función de dos variables $u(x, y)$, tiene la forma general:

$$A(x, y)u_{yy} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{xx} + D(x, y)u_y + E(x, y)u_x + F(x, y)u = G(x, y) . \quad (8)$$

Suponemos que los coeficientes son derivables al menos dos veces, y que $A(x, y)$, $B(x, y)$, y $C(x, y)$ no se anulan simultáneamente en ninguna región del plano.

En este caso, las ecuaciones características se definen como:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right), \quad (9)$$

con curvas características:

$$\xi(x, y) = \text{cte.}$$
$$\eta(x, y) = \text{cte.}$$

Al igual que ocurría con las ecuaciones de primer orden, estas curvas características definen un cambio de variable que hace desaparecer algunos de los términos de la Ecuación (8), de esta manera se lleva la Ecuación (8) a su llamada *forma canónica*. En algunos casos, como en la ecuación de ondas que veremos en el próximo tema, a partir de la forma canónica se puede calcular la solución general, que depende de dos funciones arbitrarias.

Dependiendo de la relación entre los coeficientes de los términos de segundo orden, $A(x, y)$, $B(x, y)$, y $C(x, y)$, las EDPs lineales de segundo orden se clasifican en *hiperbólicas*, *parabólicas*, o *elípticas*.

Definición 1: Clasificación de EDPs lineales de segundo orden

Si en todos los puntos x, y de una región del plano $\mathbb{R}^2$ se cumple que:

- $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación es *hiperbólica*,
- $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es *parabólica*,
- $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación es *elíptica*,

en dicha región del plano.

Ejemplo 2. Clasificación de las ecuaciones clásicas

En la ecuación de ondas $A = 1$, $B = 0$, $C = -c^2$, luego $B^2 - 4AC = 4c^2$, por tanto la ecuación es hiperbólica, y las curvas características son: $x \pm ct = \text{cte.}$

En la ecuación del calor $A = -\alpha$, $B = 0$, $C = 0$, luego $B^2 - 4AC = 0$, por tanto la ecuación es parabólica, y las curvas características son: $t = \text{cte.}$ y $x = \text{cte.}$.

En la ecuación de Laplace $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, luego $B^2 - 4AC = -4$, por tanto la ecuación es elíptica, y las curvas características son: $x \pm iy =$ cte.

Problema de Cauchy y unicidad de soluciones.

En las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden era necesario fijar el valor de la solución y de su derivada primera en un punto dado para fijar una solución particular. En una ecuación en derivadas parciales de segundo orden es necesario fijar los valores de la solución en toda una curva del plano x, y.

¿Cómo se determina de forma única una solución de una EDP de segundo orden? Cada solución representa una superficie en el espacio (Figura 1). Generalizando el problema de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema de Cauchy para la Ecuación (8) consiste en hallar la solución $u(x, y)$ tal que $u(x, y)$ y $u_y(x, y)$ tomen unos valores dados en los puntos de una curva Γ del plano x, y. Alternativamente, se podrían fijar sobre Γ los valores de $u_x(x, y)$ o de la derivada normal $u_{\mathbf{n}}(x, y)$. En particular, si Γ es una recta $y =$ cte., por ejemplo imponiendo $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$, tendremos un problema puro de valores iniciales.

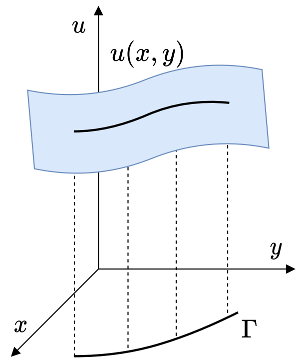

Figura 1: Representación del problema de Cauchy para una ecuación en derivadas parciales. Elaboración propia.

En el estudio de problemas reales aparecen condiciones muy variadas, en ocasiones habrá que imponer condiciones iniciales y de contorno al mismo tiempo, en otros casos solo se exigirán condiciones de contorno, etc.

El problema de Cauchy puede no tener solución única. Para que la solución sea única es necesario que se cumpla el siguiente teorema:

Teorema 1: Unicidad de problemas de Cauchy en EDPs lineales de 2º orden

Sea el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Fu = G \\ u(\Gamma) = f(x, y) \\ u_y(\Gamma) = g(x, y) \end{cases} \tag{10}$$

donde Γ es una curva en el plano x, y.

La solución de la Ecuación (10) es única al menos en las proximidades de Γ si las condiciones de Cauchy son *regulares* y la Γ *no es tangente* a las curvas características en ningún punto.

Ejemplo 3. Determinar la unicidad de la solución de un problema de Cauchy asociado a una EDP lineal de segundo orden y resolverlo si es posible

Sea el problema:

$$\begin{cases} yu_{yy} + 2y^2u_{xy} + y^3u_{xx} - u_y = 0 \\ u(x, 2) = x \\ u_y(x, 2) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

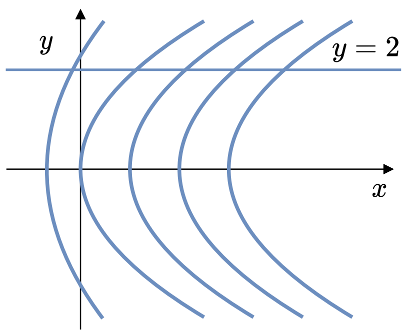

Figura 2: Curvas características de la Ecuación (11) y recta $y = 2$. Elaboración propia.

Veamos a qué tipo corresponde la ecuación,

$$B^2 - 4AC = 4y^4 - 4y^4 = 0\,,$$

luego la Ecuación (11) es parabólica en todo $\mathbb{R}$. La ecuación característica es:

$$\frac{dx}{dy} = y\,,$$

cuyas curvas características son:

$$x - \frac{y^2}{2} = \text{cte.}$$

Como los valores iniciales están definidos sobre la recta $y = 2$, que nunca es tangente a las curvas características (Figura 2), el problema de Cauchy de la Ecuación (11) tiene solución única. Haciendo el cambio:

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{y^2}{2} \\ \eta = y \end{cases}$$

y expresando las derivadas en función de las nuevas variables:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y & = -y u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x & = u_\xi \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} & = y^2 u_{\xi\xi} - 2y u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_\xi \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + u_{\xi\eta}\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} & = -y u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} & = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

transformamos la Ecuación (11) en:

$$\eta u_{\eta\eta} - u_\eta = 0\,, \tag{12}$$

y haciendo el cambio adicional $u_\eta \equiv v$ obtenemos la ecuación:

$$\eta v_\eta - v = 0\,,$$

cuya solución se puede ver inmediatamente que es $v = p\,\eta$, donde p es una función que no depende de η pero que puede depender de ξ. Por tanto $u_\eta = p(\xi)\,\eta$, de donde obtenemos:

$$u(\xi, \eta) = p(\xi)\frac{\eta^2}{2} + q(\xi)\,.$$

Deshaciendo el cambio de variables tenemos que la solución general a la Ecuación (11) es:

$$u(x, y) = p(x - \frac{y^2}{2})\frac{y^2}{2} + q(x - \frac{y^2}{2})\,. \tag{13}$$

Ahora podemos imponer los datos de Cauchy:

$$\begin{cases} u(x,2) = 2p(x-2) + q(x-2) = x \\ u_y(x,2) = 2p(x-2) - 4p'(x-2) - 2q'(x-2) = 0 \end{cases} .$$

Derivando la primera ecuación respecto a x vemos que:

$$2p'(x-2) + q'(x-2) = 1\,,$$

por tanto la segunda ecuación es:

$$2p(x-2) - 2 = 0\,,$$

es decir, $p(x-2) = 1$ y $q(x-2) = x-2$. Insertando estas funciones en la solución general (Ecuación (13)) obtenemos la solución particular de la Ecuación (11):

$$u(x,y) = x\,.$$

8.4 Problemas asociados a ecuaciones clásicas

Vamos a ver ahora los principales problemas asociados a las tres ecuaciones clásicas: la ecuación de ondas, la ecuación del calor, y la ecuación de Laplace (Poisson).

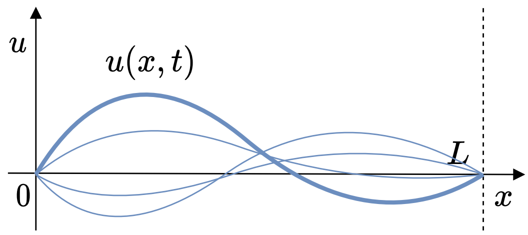

Figura 3: Cuerda vibrante con extremos fijos. Elaboración propia.

Ecuación de ondas

Los fenómenos ondulatorios son ubicuos en la naturaleza y por eso la ecuación de ondas aparece en multitud de situaciones físicas. Por simplicidad vamos a considerar aquí la ecuación de ondas en una dimensión, la cual puede describir, entre otras muchas situaciones, las vibraciones de una cuerda.

Consideramos una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en los extremos, tal como la cuerda de una guitarra (Figura 3), y suponemos que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud, es decir, no hay oscilaciones longitudinales y la fuerza que restituye la cuerda a su posición de equilibrio es proporcional a su desplazamiento vertical (régimen lineal).

En este caso, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical del punto x en el instante t, la función $u(x, t)$ satisfice la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t),$$

donde c es la llamada *velocidad de fase* de las ondas, dada en este caso por $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$; T_0 es la fuerza de tensión en los extremos de la cuerda y ρ es la densidad lineal (masa por unidad de longitud de la cuerda). $F(x, t)$ es cualquier fuerza externa por unidad de masa que actúe en la dirección vertical sobre el punto x en el instante t.

Cuerda infinita

El problema puro de valores iniciales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \qquad\qquad x, t \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \tag{14}$$

aparece al considerar una cuerda infinita, o bien una cuerda acotada antes de que las perturbaciones lleguen a sus extremos. Las condiciones fijan la posición inicial de la cuerda y la distribución inicial de velocidades verticales. Recordemos que las curvas características de la ecuación de ondas son $x \pm ct = \text{cte}$. Como los datos iniciales están fijados sobre la recta $t = 0$, la cual no es tangente en ningún punto a las curvas características, el problema de la Ecuación (14) tiene solución única.

Cuerda acotada

Para una cuerda acotada, hay que imponer unas condiciones de contorno adicionales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = h_0(t) \\ u(L,t) = h_L(t) \end{cases} \qquad x \in [0,L], t \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$

donde $h_0(t)$ y $h_L(t)$ denotan la posición vertical de los extremos en el instante t (para extremos fijos serían $h_0(t) = h_L(t) = 0$.) La solución al problema de la Ecuación (15) también es única.

Ecuación del calor

La ecuación del calor unidimensional:

$$u_t - k u_{xx} = F(x,t)\,,$$

describe la distribución de temperatura a lo largo del tiempo en una varilla delgada. En este caso la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en el punto x en el instante t. La k es una constante positiva proporcional a la conductividad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico, y $F(x,t)$ representaría una fuente de calor en el interior de la varilla.

Varilla infinita

Si la varilla es infinita, basta con fijar la distribución inicial de temperaturas:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0\,. \tag{16}$$

Nótese que $u_t(x, 0)$ no se puede fijar arbitrariamente ya que debe cumplir: $u_t(x, 0) = ku_{xx}(x, 0) + F(x, 0) = kf''(x)$. Como $t = 0$ es una curva característica de la ecuación del calor, el problema puro de valores iniciales no está bien definido.

Varilla acotada

Para una varilla acotada hay que añadir condiciones de contorno. Podemos fijar las temperaturas de los extremos a lo largo del tiempo $h_0(t)$ y $h_L(t)$:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = h_0(t) \\ u(L, t) = h_L(t) \end{cases} \qquad x \in [0, L], t > 0\,, \tag{17}$$

o bien podemos fijar el flujo de calor en los extremos:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = h_0(t) \\ u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases} \qquad x \in [0, L], t > 0\,. \tag{18}$$

En particular, si los extremos están aislados, entonces $h_0(t) = h_L(t) = 0$. Los problemas de la Ecuación (17) y la Ecuación (18) tienen solución única. Esto se puede demonstrar a partir del principio del máximo, que enunciamos a continuación:

Teorema 2: Principio del máximo para la ecuación del calor

Si $u(x, y)$ es continua en $[0, T] \times [0, L]$ y satisface $u_t - ku_{xx} = 0$ en $(0, T) \times (0, L)$, los valores máximo y mínimo de $u(x, y)$ se alcanzan en en el instante inicial $t = 0$, o bien en los extremos de la varilla, $x = 0$ o $x = L$.

El principio del máximo viene a decir que si la temperatura inicial en la varilla no supera un valor T_{Max} y la de los extremos tampoco, no se puede crear en su interior una temperatura mayor que T_{Max}.

Ecuación de Laplace (Poisson)

La ecuación de Laplace se utiliza para describir, entre otros muchos fenómenos, un campo electrostático en ausencia de cargas, en cuyo caso, la función $u(x, y, z)$ es el potencial electrostático. Cuando existen cargas libres el problema se describe mediante la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

donde ρ es la densidad de cargas libres y ε_0 es la permitividad del vacío.

En el caso bidimensional que discutiremos aquí, la ecuación:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

también puede describir la distribución estacionaria de temperaturas en una superficie. En ese caso, la función $u(x, y)$ denotaría una temperatura, y la existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una función $F(x, y)$ en el segundo miembro (Ecuación de Poisson).

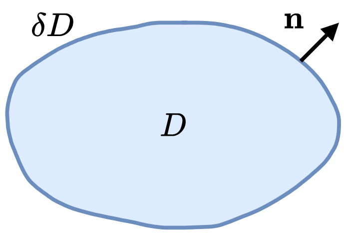

Figura 4: Dominio abierto acotado en $\mathbb{R}^2$ para los problemas de Dirichlet y Neumann. Elaboración propia.

Al contrario que las ecuaciones de ondas y del calor, que describen la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, las ecuaciones de Laplace y Poisson describen situaciones estacionarias, por tanto los problemas asociados a estas dos ecuaciones son siempre de contorno. Los dos tipos de problemas de contorno asociados a la ecuación de Laplace (o Poisson) más importantes son los siguientes:

Problema de Dirichlet

En el *problema de Dirichlet* se fija el valor de la solución sobre el contorno de un dominio D:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } D \\ u = f(x, y) & \text{en } \delta D \end{cases} \tag{19}$$

D es un dominio abierto acotado en $\mathbb{R}^2$ y δD es su frontera (Figura 4).

Problema de Neumann

En el *problema de Neumann* se fija el valor de la *derivada normal* de la solución sobre el contorno del dominio D.

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } D \\ u_{\mathbf{n}} = f(x, y) & \text{en } \delta D \end{cases}, \tag{20}$$

donde $u_{\mathbf{n}}$ es la derivada en la dirección del *vector normal unitario exterior* **n** (Figura 4) que viene dada por:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{n}} &= \nabla u \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y . \end{aligned}$$

Si la ecuación describe una distribución estacionaria de temperaturas en una superficie, entonces en el problema de la Ecuación (19) estaríamos fijando una temperatura fija en el borde, y en el problema de la Ecuación (20) estaríamos fijando el *flujo de calor* en la dirección normal al borde.

Si $F(x, y)$, $f(x, y)$ y δD son suficientemente regulares entonces el problema de Dirichlet es un problema bien planteado y tiene solución única, lo cual se puede demostrar también a partir de un principio del máximo:

Teorema 3: Principio del máximo para el problema de Dirichlet

Si $u(x, y)$ satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado D y es continua en D, entonces

$u(x, y)$ alcanza su máximo y su mínimo en el contorno δD. Es decir, la temperatura en el interior de una placa no supera en ningún punto la temperatura máxima en su borde.

Por otra parte, para que el problema de Neumann pueda tener solución, es necesario que $F(x, y)$ y $f(x, y)$ satisfagan la relación:

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \oint_{\delta D} f(x, y)\, ds\,, \tag{21}$$

es decir, se debe cumplir el teorema de la divergencia para ∇u:

$$\iint_D \nabla \cdot \nabla u\, dx\, dy = \oint_{\delta D} \nabla u \cdot d\mathbf{s}\,.$$

Además, la solución contiene una constante arbitraria, lo que es de esperar, ya que tanto la ecuación como las condiciones de contorno contienen solo derivadas. Por tanto, suponiendo que se cumple la Ecuación (21), el problema de Neumann tiene solución única salvo constante.

8.5 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Dibujar las curvas características de $(y + 1)u_y + xu_x = 0$.

Ejercicio 2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy ($x, t \in \mathbb{R}$):

- $$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(x, x) = x^2 \\ u_t(x, x) = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,x) = 0 \\ u_t(x,x) = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u_t + u_x \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Estudiar la unicidad de los problemas:

- $$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t), \qquad x \in (0,L), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) + au(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) + bu(L,t) = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \Delta u - k^2 u = F(x,y) & \text{en } D \text{ (dominio acotado en } \mathbb{R}^2) \\ u = f(x,y) & \text{en } \delta D \end{cases}$$

Ejercicio 4. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x) = 2x^2 - 3x$, $x \in [0,2]$, y la temperatura para $t > 0$ en los extremos es $h_0(t) = -\frac{t}{1+t^2}$, $h_2(t) = \frac{2\sin t}{t}$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la temperatura máxima y mínima alcanzadas en la varilla para $t \geq 0$.

8.6 Referencias bibliográficas

Herman, R. L. (2014). Introduction to partial differential equations. *UNC Wilmington, Wilmington, NC*.

Jakobsen, P. K. (2019). An introduction to partial differential equations.

Mita, K. (2021). Schrödinger's equation as a diffusion equation. *American Journal of Physics*, 89, 500–510.

Strauss, W. (2007). *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley.