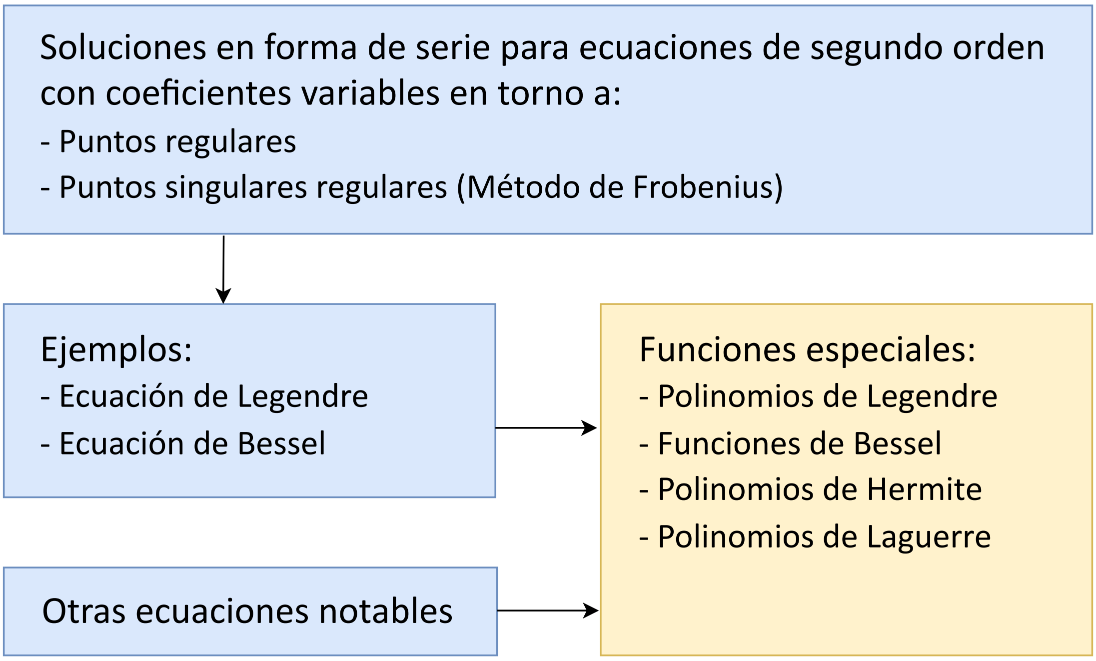
Ecuaciones diferenciales

Soluciones por medio de series y funciones especiales

Índice

Esquema


Soluciones en forma de serie para ecuaciones de segundo orden con coeficientes variables en torno a:
- Puntos regulares
- Puntos singulares regulares (Método de Frobenius)
Ejemplos:
- Ecuación de Legendre
- Ecuación de Bessel
Otras ecuaciones notables
Funciones especiales:
- Polinomios de Legendre
- Funciones de Bessel
- Polinomios de Hermite
- Polinomios de Laguerre

Ideas clave

5.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos podido resolver sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones lineales de orden n siempre que sus coeficientes fueran constantes. El único caso en el que pudimos resolver elementalmente una ecuación de segundo orden con coeficientes variables fue en el de las ecuaciones de Euler, y solamente porque un afortunado cambio de variable podía transformarla en una ecuación con coeficientes constantes.

En este tema vamos a ver una forma de atacar ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables. Es decir, ecuaciones del tipo:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0\,. \tag{1}$$

Si $a(x)$ y $b(x)$ son analíticas en un cierto intervalo, podemos esperar que la solución también lo sea. De hecho, un teorema nos dirá que se pueden encontrar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie. El método para resolver la Ecuación (1) consiste pues en suponer una solución en forma de serie:

$$y(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k\,,$$

y llevar la solución a la Ecuación (1) para obtener los coeficientes c_k de la serie. De ese modo encontraremos una *regla de recurrencia* que nos dará todos los coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1, que son son las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución de cualquier ecuación de segundo orden. Estas series convergen al menos en el mismo intervalo que $a(x)$ y $b(x)$.

Para ciertos puntos en que $a(x)$ y $b(x)$ no son analíticas se puede aplicar el llamado *método de Frobenius*. Esta técnica también nos permite obtener unas soluciones en forma de series que daremos en un teorema sin demostración.

El cálculo de los coeficientes c_k es muy tedioso. Sin embargo, ecuaciones del tipo Ecuación (1) aparecen en muchos problemas de física. Algunas de estas ecuaciones tienen nombre propio, como la ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre, etc. que definen una serie de funciones, llamadas *funciones especiales*. Las funciones especiales tienen gran importancia en las matemáticas puras y aplicadas y existen libros enteros dedicados a ellas (Berry, 2001). La definición y propiedades de las funciones más comunes se pueden encontrar en cualquier libro de fórmulas y tablas, por ejemplo en (M.R. Spigel, 2005). Este artículo (González & Manotas, 2016) contiene una interesante discusión sobre las funciones especiales que veremos en este tema, y otras adicionales, incluyendo su origen, propiedades, contexto histórico, y aplicaciones.

Los objetivos de este tema son:

- Identificar los puntos regulares, singulares y singulares-regulares en una ecuación lineal de segundo orden.
- Aprender a resolver ecuaciones lineales de segundo orden por medio de series, cuando eso es posible.
- Reconocer las ecuaciones lineales más importantes en física y conocer algunas propiedades de las funciones especiales que definen.

5.2 Puntos regulares

Consideremos la ecuación:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0\,. \tag{2}$$

En principio, una ecuación de este tipo no admite soluciones en forma de serie en todo $x \in \mathbb{R}$, sino que lo hace solamente aquellos intervalos en que las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son *analíticas*. Recordemos que una función $f(x)$ es analítica en un punto x_0 si se puede expresar como una serie de potencias (serie de Taylor) en torno a dicho punto:

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} (x - x_0)^n \,.$$

Para ello la función debe ser derivable infinitas veces en x_0, y la serie debe ser convergente en un entorno de x_0 de radio R, llamado *radio de convergencia*.

Definición 1: Puntos regulares y singulares

Un punto x_0 es un *punto regular* de la Ecuación (2) si $a(x)$ y $b(x)$ son analíticas en dicho punto. En el caso contrario se dice que x_0 es un *punto singular* de la Ecuación (2).

Si x_0 es un punto regular de Ecuación (2) entonces $a(x)$ y $b(x)$ se pueden escribir como series de potencias:

$$a(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$
$$b(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \,,$$

y es de esperar que cualquier solución de Ecuación (2) también tenga esta forma. De hecho podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1

Si x_0 es un punto regular de $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, su solución general es:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \\ &= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias y $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación que admiten desarrollos en serie convergentes al menos en el intervalo $x \in (-R, R)$, donde R es el menor de los dos radios de convergencia de $a(x)$ y $b(x)$. Además, los coeficientes c_k para $k \geq 2$ se pueden determinar de forma única en función de c_0 y $c_1$llevando la serie Ecuación (3) a la Ecuación (2) con los coeficientes $a(x)$ y $b(x)$ desarrollados.

De esta manera obtenemos dos soluciones de la forma:

$$y_1(x) = 1 + \Sigma\,,$$
$$y_2(x) = (x - x_0) + \Sigma\,,$$

donde los sumatorios Σ contienen las potencias de x mayores o iguales que 2. Estas soluciones satisfacen las condiciones iniciales $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, por tanto su wronskiano en x_0 es no-nulo y las dos soluciones son linealmente independientes. Sabemos que la soluciones particulares existen y son únicas, por ser a y b analíticas, y los valores iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ determinan las constantes $c_0 = y_0$ y $c_1 = y_0'$.

5.3 Puntos singulares y método de Frobenius

Si x_0 es un punto singular de la Ecuación (2), es decir, si $a(x)$ y $b(x)$ no son analíticas en x_0, entonces no se puede aplicar el Teorema 1 para encontrar una solución en dicho punto. Sin embargo en muchas ocasiones es precisamente en las proximidades de los puntos singulares donde nos interesa conocer las soluciones de la ecuación. Afortunadamente existe un método para obtener las soluciones de la Ecuación (2) en una clase de puntos singulares llamados *puntos singulares regulares*.

Definición 2: Puntos singulares regulares

Un punto x_0 es un *punto singular regular* de la Ecuación (2) si $(x - x_0)a(x)$ y $(x - x_0)^2 b(x)$ son analíticas en dicho punto.

Suponemos entonces que x_0 es un punto singular de la Ecuación (2), y por simplicidad suponemos que $x_0 = 0$. Para puntos singulares regulares distintos de cero no hace falta más que hacer el cambio de variable $z \equiv x - x_0$ para llevar el punto singular regular al origen. Si multiplicamos la Ecuación (2) por x^2:

$$x^2 y''(x) + x^2 a(x) y'(x) + x^2 b(x) y(x) = 0\,,$$

y definimos:

$$a^*(x) \equiv x a(x)\,,$$
$$b^*(x) \equiv x^2 b(x)\,,$$

obtenemos la ecuación:

$$x^2 y''(x) + x a^*(x) y'(x) + x^2 b^*(x) y(x) = 0\,, \tag{4}$$

donde $a^*(x)$ y $b^*(x)$ son analíticas en $x = 0$:

$$a^*(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k^* x^k$$
$$b^*(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k^* x^k\,.$$

Estas expresiones son válidas para $x \in (-R, R)$, siendo R el menor de los rangos de convergencia de $a^*(x)$ y $b^*(x)$. Para establecer las soluciones de la Ecuación (4) en forma de serie vamos a emplear el llamado *método de Frobenius* que expresaremos en forma de teorema sin demostración:

Teorema 2: Método de Frobenius

La ecuación Ecuación (4) tiene siempre una solución $y_1(x)$ de la forma:

$$y_1(x) = x^{r_1} \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad c_0 \neq 0\,,$$

donde r_1 es la mayor de las dos raíces reales del *polinomio indicial* de Ecuación (4), definido como:

$$q(r) = r^2 + (a_0^* - 1) r + b_0^*\,.$$

La segunda solución linealmente independiente $y_2(x)$ es, según los casos:

Si $r_1 - r_2$ no es cero ni entero positivo	$y_2(x) = x^{r_2}\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k \,, \quad b_0 \neq 0$
Si $r_1 = r_2$	$y_2(x) = x^{r_1+1}\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1(x)\ln x$
Si $r_1 - r_2 = n$ entero positivo	$y_2(x) = x^{r_2}\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k + a y_1(x)\ln x \,,\ b_0 \neq 0, a \in \mathbb{R}$

Todas las soluciones están definidas al menos para $x \in (0, R)$ y los coeficientes c_k,b_k,y la constante a se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

A partir de estas soluciones se obtienen otras que son válidas para $x \in (-R, 0)$ sin más que sustituir $\ln x$ por $\ln |x|$ y las expresiones del tipo x^r por $|x|^r$.

A continuación, vamos a ver dos de las ecuaciones más relevantes que son resolubles por medio de series. Estas ecuaciones servirán como ejemplo ilustrativo de los métodos descritos anteriormente.

5.4 Ecuación de Legendre

La ecuación de Legendre es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0\,, \tag{5}$$

donde p es un número entero. Esta ecuación aparece de forma natural al resolver la ecuación de Laplace, que veremos en los temas sobre ecuaciones en derivadas parciales, mediante separación de variables en coordenadas esféricas. También aparece al resolver la ecuación de Schrödinger para un potencial central en tres dimensiones, por ejemplo, en el átomo de hidrógeno. La Ecuación (5) se puede escribir como:

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{p(p+1)}{(1-x^2)}y = 0\,,$$

en donde se ve claramente que $x = \pm 1$ son puntos singulares regulares. La Ecuación (5) por tanto tiene soluciones analíticas al menos en el intervalo$|x| < 1$. Vamos a buscar una solución en torno al punto regular $x = 0$ de la forma:

$$y(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,. \tag{6}$$

Sus derivadas respecto a x son:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \Sigma_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} & &= \Sigma_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k \,, \\ y''(x) &= \Sigma_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} & &= \Sigma_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k \,. \end{aligned}$$

Introduciendo estas series en Ecuación (5) obtenemos:

$$\Sigma_{k=0}^{\infty} \left[c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - c_{k+2}(k+2)(k+1)x^{k+2} - 2c_{k+1}(k+1)x^{k+1} + p(p+1)c_k x^k \right] = 0 \,.$$

A partir de esta ecuación tenemos que encontrar la regla de recurrencia para los coeficientes c_k. Para ello nos damos cuenta de que los términos en cada potencia de x se deben anular. Si nos fijamos en el término en x^k vemos que es:

$$\left[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - 2c_k k + p(p+1)c_k \right] x^k = 0 \,.$$

Para que se cumpla la igualdad para todo x el coeficiente debe ser cero, por tanto:

$$c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k \left(k(k+1) - p(p+1) \right) = 0 \,.$$

De donde obtenemos la regla de recurrencia:

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - p(p+1)}{(k+2)(k+1)} c_k \,,$$

o expresada de otra manera que nos resultará más práctica:

$$c_k = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)} c_{k-2} \,,$$

que determina todos los coeficientes c_k de la serie Ecuación (6) a partir de dos constantes arbitrarias c_0 y c_1:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{p(p+1)}{2\times 1}c_0\,,\\
c_3 &= -\frac{(p-1)(p+2)}{3\times 2}c_1\,,\\
c_4 &= -\frac{(p-2)(p+3)}{4\times 3}c_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4\times 3\times 2\times 1}c_0\,,\\
c_5 &= -\frac{(p-3)(p+4)}{5\times 4}c_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5\times 4\times 3\times 2}c_1\,,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

De estas expresiones podemos obtener la fórmula general para los coeficientes pares e impares de la serie:

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &= (-1)^n\frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}c_0\,,\\
c_{2n+1} &= (-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}c_1\,.
\end{aligned}
$$

Así que la solución general de la Ecuación (5) es:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \Sigma_{k=0}^{\infty}c_k x^k\\
&= c_0 + c_1 x + \Sigma_{n=1}^{\infty}c_{2n}x^{2n} + \Sigma_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1}\,,
\end{aligned}
$$

esto es:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)\,,$$

donde:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}\,,\\
y_2(x) &= x + \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,,
\end{aligned}
$$

que convergen en $|x| < 1$. Las series $y_1(x)$ y $y_2(x)$ se truncan para valores de p pares positivos e impares positivos respectivamente. Si $p = 2m$, $y_1(x)$ se convierte en un polinomio de grado $2m$:

$$p = 0 \rightarrow \qquad y_1(x) = 1\,,$$

$$p = 2 \rightarrow \qquad y_1(x) = 1 - 3x^2\,,$$

$$p = 4 \rightarrow \qquad y_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\,,$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Mientras que si $p = 2m + 1$, $y_2(x)$ se convierte en un polinomio de grado $2m + 1$:

$$p = 1 \rightarrow \qquad y_2(x) = x\,,$$

$$p = 3 \rightarrow \qquad y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3\,,$$

$$p = 5 \rightarrow \qquad y_2(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5\,,$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Estos polinomios $P_n(x)$, debidamente normalizados de forma que $P_n(1) = 1$, definen los llamados *polinomios de Legendre de grado n*:

$$P_0(x) = 1\,,$$

$$P_1(x) = x\,,$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\,,$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\,,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}\,,$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\,,$$

$$\ldots$$

Los polinomios de Legendre tienen muchas propiedades interesantes y numerosas aplicaciones, como la expansión en serie de un potencial de la forma $1/r$ y expansiones multipolares.

El polinomio $P_n(x)$ tiene n ceros reales, todos ellos en el intervalo $(-1, 1)$. Como $P_n(-x) = (-x)^n P_n(x)$, los $P_n(x)$ con n par tienen simetría par, y aquellos con n impar tienen simetría impar (ver la Figura 1). Los polinomios de Legendre se pueden definir de muchas maneras, por ejemplo mediante la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \,,$$

o mediante una fórmula de recurrencia:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,.$$

Los polinomios de Legendre forman un sistema completo de polinomios ortogonales. El que son ortogonales significa que la integral:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

es 0 cuando $n \neq m$. Si $n = m$ entonces la integral es $\frac{2}{2n+1}$. Utilizando la *delta de Kronecker* podemos expresar esta propiedad como:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}\,.$$

El que formen un sistema completo significa que cualquier función $f(x)$ continua por partes en el intervalo $[-1, 1]$ se puede expandir en serie de polinomios de Legendre de la forma:

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\,.$$

En el próximo tema profundizaremos sobre el significado de estas expansiones.

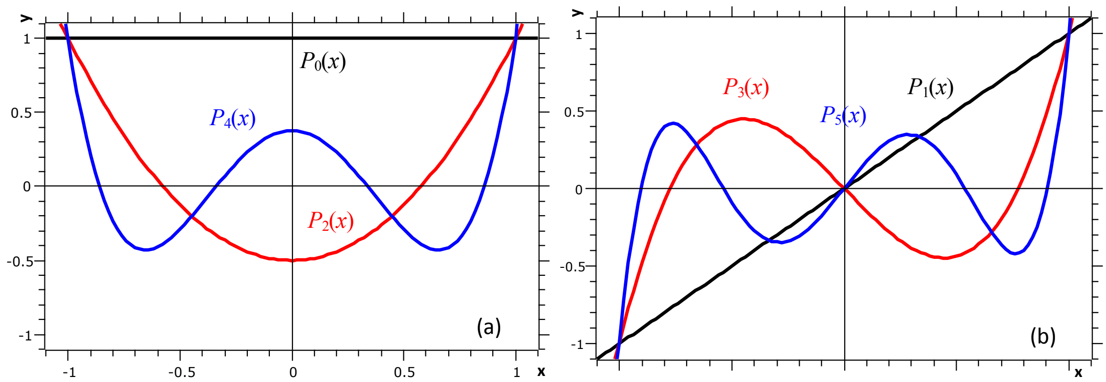


Figura 1: Polinomios de Legendre. (a) $P_0(x)$, $P_2(x)$, $P_4(x)$; (b) $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$.

5.5 Ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel es:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \,. \qquad p \geq 0 \,. \tag{7}$$

Esta ecuación también aparece al resolver la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y la *ecuación de Helmholtz* en coordenadas esféricas (La ecuación de Helmholtz es una forma independiente del tiempo de la ecuación de ondas que veremos más adelante). Reescribiendo la ecuación de Bessel en la forma:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0 \,,$$

vemos claramente que $x = 0$ es un punto singular regular de la Ecuación (7). Además, comparando la Ecuación (7) con Ecuación (4) vemos que $a^*(x) = 1$ y $b^*(x) = x^2 - p^2$, y el primer término de su *desarrollo* es $a_0^* = 1$ y $b_0^* = -p^2$. Podemos aplicar el método de Frobenius y proponer una solución de la forma:

$$y_1(x) = x^{r_1}\Sigma_{k=0}^{\infty}c_kx^k \,,$$

donde r_1 es la mayor de las raíces del polinomio indicial, que en este caso es:

$$\begin{aligned} q(r) &= r(r-1) + r - p^2 \\ &= r^2 - p^2 \,, \end{aligned}$$

con raíces $r = \pm p$. Por tanto, debemos probar la solución:

$$y_1(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty}c_kx^{p+k} \,, \tag{8}$$

que converge en todo $\mathbb{R}$. Sus derivadas son:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \Sigma_{k=0}^{\infty}c_k(p+k)x^{p+k-1} \,, \\ y_1''(x) &= \Sigma_{k=0}^{\infty}c_k(p+k)(p+k-1)x^{p+k-2} \,. \end{aligned}$$

Llevando estas expresiones a la Ecuación (7) obtenemos:

$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\left[c_k(p+k)(p+k-1)x^{p+k}+c_k(p+k)x^{p+k}+c_kx^{p+k+2}-p^2c_kx^{p+k}\right]=0\Rightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\left[c_k(\cancel{p^2}+pk-\cancel{p}+pk+k^2-\cancel{k}+\cancel{p}+\cancel{k}-\cancel{p^2})x^{p+k}+c_kx^{p+k+2}\right]=0\Rightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\left[c_k(2p+k)kx^{p+k}+c_kx^{p+k+2}\right]=0\,. \qquad (9)$$

Como los términos en cada potencia de x se deben anular, tenemos que:

$$c_k(2p+k)k+c_{k-2}=0\,,$$

lo cual nos da la regla de recurrencia:

$$c_k=-\frac{1}{(2p+k)k}c_{k-2}\,.$$

Además, si escribimos los primeros términos de la Ecuación (9):

$$c_0x^{p+2}+(2p+1)c_1x^{p+1}+c_1x^{p+3}+2(2p+2)c_2x^{p+2}+c_2x^{p+4}+\cdots=0\,,$$

vemos que la única manera de que el término en x^{p+1} se anule es haciendo $c_1=0$. Por tanto, todos los coeficientes c_k con k impar son cero, mientras que los coeficientes con k par son:

$$\begin{aligned}
c_2&=-\frac{1}{2\times 2(p+1)}c_0\,,\\
c_4&=-\frac{1}{4\times 2(p+2)}c_2=-\frac{1}{2^4\times 2(p+2)(p+1)}c_0\,,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
c_{2n+1}&=0\,,\\
c_{2n}&=\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)}c_0\,.
\end{aligned}$$

Así que la primera solución de la ecuación de Bessel es:

$$y_1(x) = c_0 x^p \left(1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)} x^{2n}\right) . \tag{10}$$

Esta solución suele expresarse en términos de la *función gamma*, que se define como:

Definición 3: Función gamma

La función gamma viene definida:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx\,, \qquad x > 0\,.$$

La función gamma tiene la siguiente importante propiedad:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\,,$$

por tanto:

$$\Gamma(s+n+1) = (s+n)(s+n-1)\cdots(s+1)s\Gamma(s)\,,$$

y si $s \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(s+1) = s!$

Utilizando la función gamma, la solución Ecuación (10) se puede escribir como:

$$y_1(x) = c_0 x^p \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} .$$

Esta solución, con $c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$, define la llamada *función de Bessel de primera especie y orden p*:

Definición 4: Función de Bessel de primera 1ª y orden p

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} .$$

Como ejemplo, veamos la forma de las funciones de Bessel de primera especie con

$p = 0$ y $p = 1$:

$$J_0(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} ,$$
$$J_1(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} .$$

Al igual que J_0 y J_1 todas la J_p son funciones oscilatorias (Figura 2), de hecho, para x suficientemente grande se tiene que:

$$J_p \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - (2p+1)\frac{\pi}{4}) . \tag{11}$$

Cada J_p tienen un número infinito de ceros en $(0, \infty)$ que se pueden encontrar tabulados en cualquier libro de funciones especiales. Las funciones de Bessel son especialmente importantes en la propagación de ondas y en los problemas con potenciales estáticos. Al resolver problemas en sistemas de coordenadas cilíndricas se obtienen funciones de Bessel de orden entero ($p = n$); en coordenadas esféricas se obtienen ordenes semi-enteros ($p = n + 1/2$).

Las funciones de Bessel también se pueden definir de forma recursiva mediante la fórmula:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) .$$

Para valores no-enteros de p las funciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes. Por otro lado, si p es entero ($p = n$) se cumple que:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) .$$

Además, las funciones de Bessel con p semi-entero se pueden expresar de manera exacta por medio de senos y cosenos:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$
$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\frac{1}{x} \sin x - \cos x) \qquad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\sin x + \frac{1}{x} \cos x)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

Ahora vamos a tratar de encontrar una segunda solución de Ecuación (7)linealmente independiente de la primera. El Teorema 2 nos da tres posibles soluciones dependiendo de si la diferencia entre las raíces del polinomio indicial $r_1 - r_2$ es entera, no entera, o cero. En este caso, $r_1 - r_2 = 2p$. Veamos las diferentes posibilidades:

- Si $2p$ no es cero ni entero. La segunda solución a la ecuación de Bessel es de la forma:

$$y_2(x) = x^{-p}\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k\,, \qquad x > 0\,,$$

 que es idéntica a la Ecuación (8) excepto por el signo de p. Por tanto, para encontrar los coeficientes b_k no hay más que repetir los cálculos anteriores sustituyendo p por $-p$. Así llegamos a la solución $y_2(x) = J_{-p}(x)$, con:

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\,.$$

- Si p es cero. Entonces el Teorema 2 nos propone la siguiente solución:

$$y_2(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} + J_0(x)\ln x\,. \qquad x > 0$$

 Introduciendo esta solución en la Ecuación (7) se determinan los coeficientes b_k, dando lugar a:

$$y_2(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x)\ln x\,, \qquad x > 0\,,$$

 la cual define la *función de Bessel de segunda especie y orden* 0:

Definición 5: Función de Bessel de segunda especie y orden 0

Esta función se expresa matemáticamente como:

$$Y_0(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x)\ln x\,, \qquad x > 0\,.$$

- Si $2p$ es entero. Entonces la segunda solución a la ecuación de Bessel es:

$$y_2(x) = x^{-p}\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k + aJ_p(x)\ln x\,, \qquad x > 0\,,$$

Si $2p$ es impar ($p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$), se puede demostrar que $a = 0$ y la solución tiene la misma forma que en el caso a), es decir, $y_2(x) = J_{-p}(x)$. Si $2p$ es par ($p = 1, 2, 3, \dots$) la solución es una *función de Bessel de segunda especie y orden* p, definida como:

Definición 6: Función de Bessel de segunda especie y orden p ($p \in \mathbb{N}$)

$$Y_p(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\left(\frac{1}{p!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \Sigma_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(n-p)!}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$+ J_p(x)\ln x\,, \qquad x > 0$$

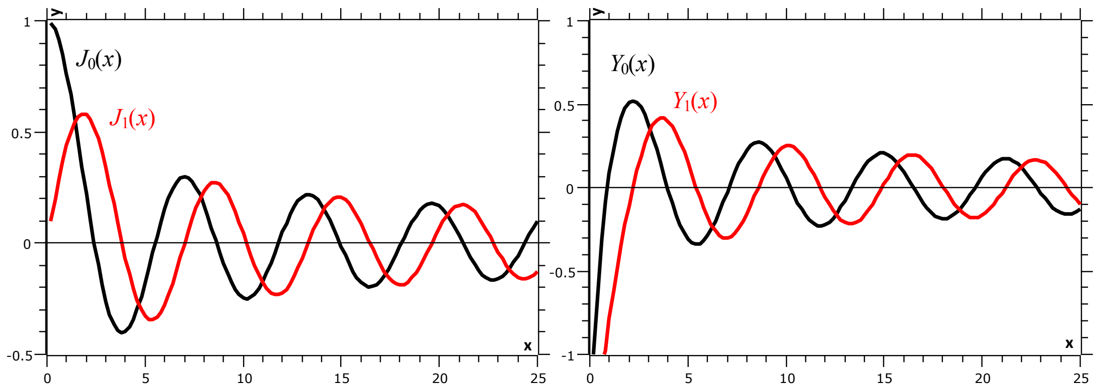


Figura 2: Funciones de Bessel de primera especie y funciones de Bessel de segunda especie. Elaboración propia.

Las funciones de Bessel de segunda especie están relacionadas con las de primera especie mediante la siguiente fórmula:

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J\_p(x)}{\sin(p\pi)}\,.$$

En el caso de orden entero ($p = n$) las funciones se definen tomando el límite:

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} Y_p(x)\,,$$

de lo cual se puede deducir que cuando p es entero ($p = n$) se cumple que:

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)\,.$$

5.6 Otras ecuaciones

A continuación, vamos a ver brevemente otras ecuaciones con nombre propio que tienen relevancia en física y que definen otras series de funciones especiales. En este vídeo demostramos algunas de las propiedades de las funciones especiales más importantes.

Accede al vídeo: Funciones especiales.

Ecuación general de Legendre

La ecuación general de Legendre es:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0\,, \tag{12}$$

cuyas soluciones son las *funciones asociados de Legendre* $P_\ell^m(x)$. Los indices ℓ y m (que son enteros) se llaman *grado* y *orden* respectivamente de la función asociada de Legendre. La Ecuación (12) tiene soluciones no-nulas y no-singulares en $[-1,1]$ solo si ℓ y m son enteros no-negativos con $0 \leq m \leq \ell$ o alguno de ellos es negativo con $0 \leq |m| \leq |\ell|$. Además, cuando m es par, la función $P_\ell^m(x)$ es un polinomio. Cuando $m = 0$ y ℓ es un entero, las funciones $P_\ell^m(x)$ son idénticas a los polinomios de Legendre.

Las funciones asociadas de Legendre forman parte de la definición de otras funciones especiales, los *esféricos armónicos*, que tienen un papel fundamental en el estudio del momento angular en mecánica cuántica.

- Definición para ℓ y m enteros no-negativos. Las funciones $P_\ell^m(x)$, están relacionadas con los polinomios de Legendre mediante la fórmula:

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)\,,$$

Las funciones asociadas de Legendre no son mutuamente ortogonales en general. Por ejemplo, P_1^1 no es ortogonal a P_2^2. Sin embargo, algunos sub-conjuntos sí son ortogonales. Suponiendo que $0 \leq m \leq \ell$, para m fijo las funciones satisfacen la condición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_k^m P_\ell^m dx = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!}\,\delta_{k\ell}\,.$$

- Definición para m negativo y/o ℓ negativo. La Ecuación (12) es claramente invariante bajo un cambio de signo de m. Las funciones con m negativo son proporcionales a la de m positivo:

$$P_\ell^{-m} = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m\,.$$

A partir de su definición, se puede comprobar que las funciones asociadas de Legendre son pares o impares de acuerdo a la relación:

$$P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m}P_\ell^m(x)\,,$$

y cumplen la fórmula de recurrencia:

$$(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(x) = (2\ell+1)xP_\ell^m(x) - (\ell+m)P_{\ell-1}^m(x)\,.$$

Ecuación de Hermite

La ecuación de Hermite de orden λ es:

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0\,,$$

y aparece en el problema del oscilador armónico cuántico entre otros. La ecuación de Hermite admite como soluciones linealmente independientes en series de potencias las siguientes:

$$y_1(x) = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\,,$$

$$y_2(x) = x + \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,.$$

Para λ = entero par, la función $y_1(x)$ es polinómica, y cuando λ = entero impar, es la función $y_2(x)$ la que es un polinomio. Los polinomios se suelen escoger de forma que el coeficiente dominante para el de grado n sea 2^n. Estos son los llamados *polinomios de Hermite* $H_n(x)$. Pueden obtenerse mediante la fórmula general:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\,.$$

Los primeros son:

$$H_0(x) = 1\,,$$
$$H_1(x) = 2x\,,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2\,,$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x\,,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\,,$$
$$\cdots$$

Los polinomios de Hermite tienen simetría par o impar dependiendo del orden n:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)\,,$$

verifican la ley de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Los polinomios de Hermite son ortogonales respecto a la función peso $w(x) = e^{-x^2}$ en $(-\infty, \infty)$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x)\, e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}\,,$$

y además forman un sistema completo.

Ecuación de Laguerre

La ecuación de Laguerre es:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0\,, \tag{13}$$

tiene soluciones no-singulares solo si n es un entero no-negativo. Esta ecuación aparece en mecánica cuántica en la parte radial de la ecuación de Schrödinger para un átomo hidrogenoide, entre otros problemas.

Las soluciones de la Ecuación (13) son los polinomios de Laguerre $L_n(x)$, cuya fórmula general es:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

Los polinomios de Hermite también se pueden definir mediante la fórmula de Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right)\,,$$

o mediante la fórmula de recurrencia:

$$L_{k+1}(x) = \frac{(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)}{k+1}\,,$$

a partir de los dos primeros polinomios:

$$L_0(x) = 1\,,$$

$$L_1(x) = 1 - x\,.$$

Además, los polinomios de Laguerre son ortogonales en $[0, \infty)$ respecto a la función peso $w(x) = e^{-x}$, es decir:

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \delta_{mn}\,.$$

Ecuación generalizada de Laguerre

La ecuación de Laguerre es un caso particular de la ecuación generalizada de Laguerre:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0\,,$$

cuyas soluciones son los *polinomios generalizados* (o asociados) *de Laguerre* $L_n^{(\alpha)}(x)$. Los polinomios de Laguerre son un caso especial de los generalizados con $\alpha = 0$, es decir, $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$.

Los polinomios generalizados de Laguerre se pueden definir mediante la fórmula general:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \Sigma_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\,,$$

mediante la fórmula de Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right)\,,$$

o de manera recursiva, utilizando la fórmula de recurrencia:

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(2k+1+\alpha-x)L_k^{(\alpha)}(x) - (k+\alpha)L_{k-1}^{(\alpha)}(x)}{k+1}\,,$$

a partir de los dos primeros polinomios:

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1\,,$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x\,.$$

Los polinomios generalizados de Laguerre son ortogonales en $[0, \infty)$ respecto a la función peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$:

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{mn}\,.$$

5.7 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no, y clasificarlos:

1. $x^2 y'' - 2y = 0$.
2. $xy'' + 2y' + \ln x\, y = 0$.
3. $x \sin x y'' + 3y' + xy = 0$.

Ejercicio 2. Resolver por medio de series en torno a $x = 0$:

1. $y'' + x^2 y = 0$.
2. $xy'' + (1 - x)y' + y = 0$.
3. $y'' - e^x y = 0$.

Ejercicio 3. Deducir a partir de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre las siguientes fórmulas de recurrencia:

- $nP_n = xP_n' - P_{n-1}'$.
- $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$.

Ejercicio 4. Comprobar que la ecuación de Bessel tiene un punto singular no-regular en el infinito.

Ejercicio 5. Comprobar:

1. $J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{x} J_p$.
2. $J_p' = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$.

Ejercicio 6. Hallar $J_{5/2}$ y $J_{-5/2}$.

5.8 Referencias bibliográficas

Berry, M. (2001). Why are special functions special? *Physics Today*, 54(4), 11–12.

González, J. A. A. & Manotas, A. T. (2016). Una breve discusión sobre algunas funciones especiales. *Sigma*, 12(2), 1–30.

M.R. Spigel, L. A. (2005). *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*.