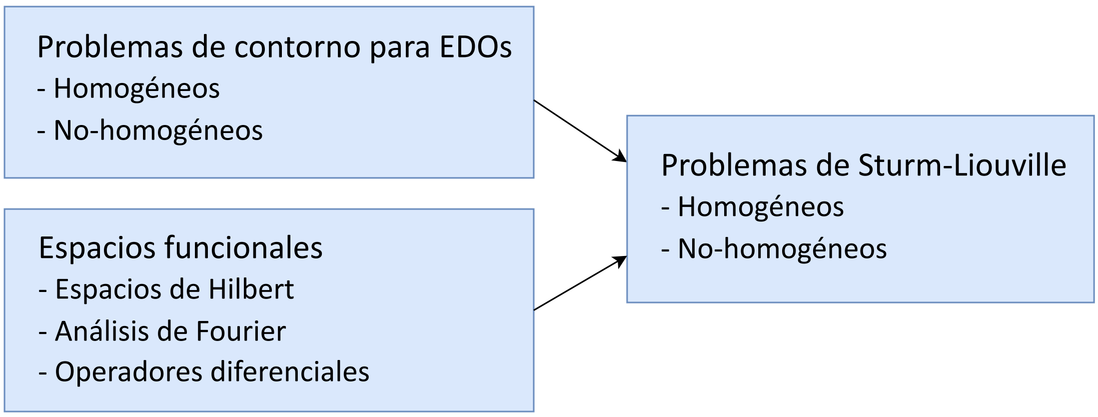
Tema 6

Ecuaciones diferenciales

Problemas de contorno

Índice

Esquema


Problemas de contorno para EDOs
- Homogéneos
- No-homogéneos
Espacios funcionales
- Espacios de Hilbert
- Análisis de Fourier
- Operadores diferenciales
Problemas de Sturm-Liouville
- Homogéneos
- No-homogéneos

Ideas clave

6.1 Introducción y objetivos

A lo largo del curso hemos visto que para fijar de manera única una solución particular de una ecuación diferencial de orden n, hace falta determinar al menos n condiciones iniciales. En concreto, la solución particular de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes continuos queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado.

Sin embargo, si en vez de condiciones iniciales (valor de la solución y sus derivadas en un punto dado) imponemos condiciones de contorno (valor de la solución y/o sus derivadas en una serie de puntos) las cosas cambian y el problema por lo general tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, dada la ecuación:

$$y'' + y = 0\,,$$

cuya solución general es:

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x\,,$$

las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}\,,$$

determinan unívocamente la solución particular $y(x) = \sin x$. En cambio las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}\,,$$

se cumplen con cualquier solución del tipo $y(x) = C \sin x$, donde C es una constante arbitraria (Figura 1).

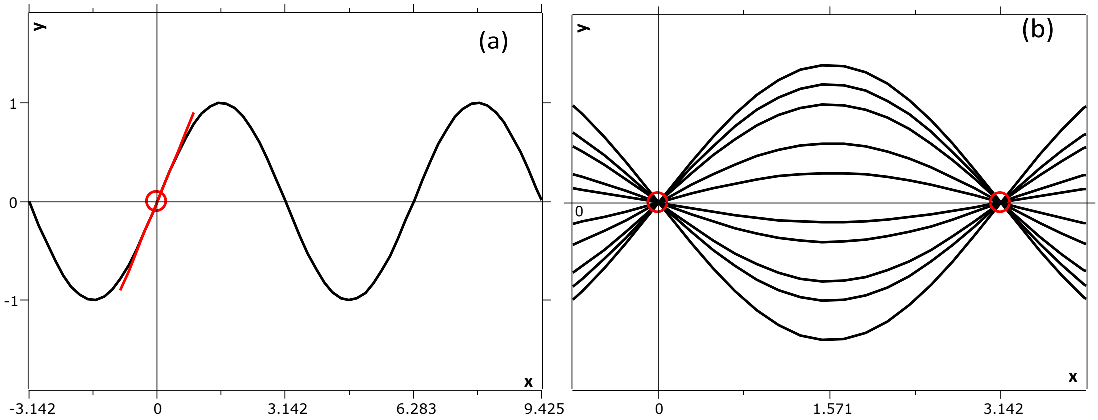


Figura 1: (a) Solución de $y'' + y = 0$ con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (b) Soluciones de $y'' + y = 0$ con condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

Los problemas de contorno que más nos interesan, porque tienen más importancia en física, dependen de un parámetro λ. Por ejemplo, ecuaciones del tipo:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y - \lambda y = 0\,, \tag{1}$$

son importantes porque aparecen en el *método de separación de variables* que utilizaremos al resolver *ecuaciones en derivadas parciales*. Una ecuación diferencial ordinaria se puede considerar como una ecuación en la que un operador actúa sobre una función. Por ejemplo, la ecuación lineal:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0\,, \tag{2}$$

se puede escribir como:

$$\mathscr{A}\, y(x) = 0\,,$$

donde:

$$\mathscr{A} \equiv a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\,,$$

es un *operador diferencial lineal* que actúa sobre el vector $y(x)$. Aunque inicialmente resulte raro, el considerar las funciones como elementos de un espacio vectorial es tremendamente útil, y nos permitirá analizar y expresar las propiedades de ecuaciones diferenciales de una manera fácil e intuitiva. Por ejemplo, la Ecuación (1) se puede expresar como un *problema de autovalores*:

$$\mathscr{A}\, y(x) = \lambda y(x)\,. \tag{3}$$

Al tratar las ecuaciones del tipo Ecuación (1) con condiciones de contorno, convendrá escribirla en la llamada *forma de Sturm-Liouville*:

$$\left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0\,, \tag{4}$$

lo cual es posible para cualquier ecuación lineal de segundo orden. El motivo de escribir la ecuación de esta forma, a primera vista tan extraña, es que el *operador de Sturm-Liouville* definido como:

$$\mathscr{L} \equiv \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} - q(x)\,,$$

es *autoadjunto*. Esta propiedad, que definiremos más adelante, nos asegura que las soluciones de Ecuación (4) y sus autovalores cumplen una serie de propiedades importantes. Todos los problemas de contorno que veremos en este tema involucran una ecuación lineal de segundo orden. Comenzaremos resolviendo los problemas más sencillos, y a la vez más importantes, en los que la ecuación depende de un parámetro λ. A continuación, introduciremos los conceptos asociados a espacios funcionales que son necesarios para entender y apreciar las propiedades de los problemas de Sturm-Liouville, y terminaremos el tema estudiando los problemas de contorno no-homogéneos, los cuales resolveremos (cuando sea posible) mediante la llamada *función de Green*.

En este vídeo se da una visión general del tema, conectando de manera intuitiva los problemas de contorno con el análisis de Fourier y los espacios de funciones.

Accede al vídeo: Problemas de contorno, Fourier y espacios de funciones.

Los objetivos de este tema son:

- Resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden dependientes de un parámetro con diferentes tipos de condiciones de contorno. Determinar los valores del parámetro para los que la ecuación tiene soluciones no-triviales (autovalores) así como sus soluciones asociadas (autofunciones).

- Comprender los conceptos de *espacio de Hilbert*, *producto interno*, *norma de una función*, *desarrollo de Fourier*, y *operadores diferenciales*.
- Escribir una ecuación lineal de segundo orden en forma de Sturm-Liouville.
- Entender las propiedades de las soluciones de un problema de Sturm-Liouville.
- Determinar cuándo un problema de contorno no-homogéneo tiene solución y si ésta es única. Utilizar la función de Green para resolver problemas de contorno no-homogéneos.

6.2 Problemas de contorno para EDO's

En la mayor parte de los problemas de contorno que nos interesan, la ecuación diferencial incluye tanto la función incógnita $y(x)$ como una constante desconocida λ. Parte del problema es determinar los valores de λ para los cuales existen soluciones no-triviales.

Los caso más sencillos de problemas de contorno se ven en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad . \tag{5}$$

La ecuación característica es $\alpha^2 + \lambda = 0$ con raíces $\alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$. Vemos que las soluciones pueden ser de tres tipos dependiendo de si λ es negativo, positivo, o cero:

- $\lambda < 0$. Las raíces son reales y distintas, $\alpha = \pm\sqrt{|\lambda|}$, por tanto, la solución general es de la forma:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} .$$

Imponiendo las condiciones de contorno tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 && \Rightarrow && c_2 = -c_1 , \\ y(1) &= c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0 && \Rightarrow && c_1 = 0 . \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones no triviales para ningún $\lambda < 0$.

- $\lambda = 0$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 + c_2 x .$$

Imponiendo las condiciones de contorno tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 , \\ y(1) &= c_2 = 0 . \end{aligned}$$

Tampoco hay soluciones no triviales para $\lambda = 0$.

- $\lambda > 0$. Las raíces son imaginarias, $\alpha = \pm i\sqrt{\lambda}$, por tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x .$$

Imponiendo las condiciones de contorno tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 , \\ y(1) &= c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 . \end{aligned}$$

Para que la solución sea no-trivial tiene que ser $\sqrt{\lambda} = n\pi$, esto es, $\lambda = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Para cada uno de estos valores de λ existen soluciones no triviales $y_n(x) = c \sin n\pi x$ (Figura 2).

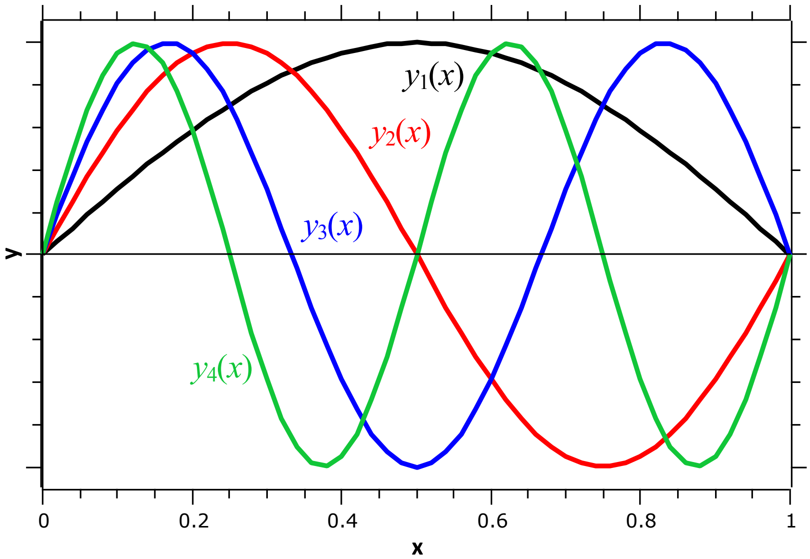


Figura 2: Soluciones del problema Ecuación (5) asociadas a los valores de $\lambda = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} . \tag{6}$$

Las soluciones generales son las mismas que en el ejemplo anterior según sea \lambda negativo, positivo, o cero. Imponiendo las condiciones de contorno en cada caso tenemos:

- $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= \sqrt{|\lambda|}(c_1 - c_2) = 0 && \Rightarrow && c_2 = c_1\,, \\ y'(1) &= c_1\sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0 && \Rightarrow && c_1 = 0\,. \end{aligned}$$

La única solución es la trivial $y = 0$.

- $\lambda = 0$:

$$y'(0) = c_2 = 0$$
$$y'(1) = c_2 = 0$$

Estas condiciones no determinan c_1, por tanto $\lambda = 0$ admite las soluciones no triviales $y = c_1$.

- $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= c_2\sqrt{\lambda} = 0 & \Rightarrow \quad & c_2 = 0\,, \\ y'(1) &= -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0\,. \end{aligned}$$

Para que las solución sea no-trivial tiene que ser $\lambda = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Estos valores de λ dan lugar a las soluciones $y_n(x) = c_1 \cos n\pi x$ (Figura 3).

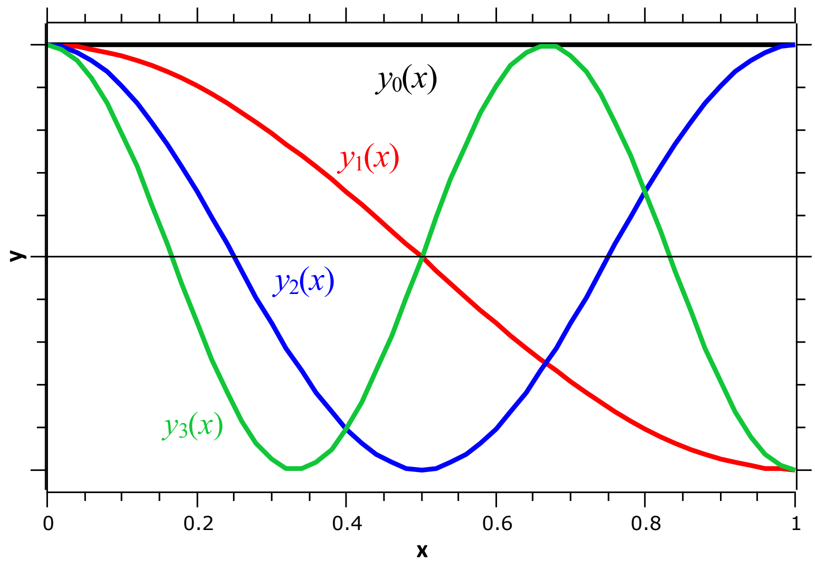


Figura 3: Soluciones del problema Ecuación (6) asociadas a los valores de $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

6.3 Espacios de funciones

En este tema vamos a pensar en las funciones $y(x)$ como vectores de un espacio vectorial de *dimensión infinita*. Aunque nos desviemos un poco del tema de ecuaciones diferenciales, conviene introducir ahora una serie de conceptos que son muy importantes en la física matemática y que nos ayudarán a entender las ideas que siguen a continuación.

Espacios de Hilbert

Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial en el que se define un *producto interno* y, a partir de éste una *norma*. Los espacios de Hilbert permiten generalizar a dimensión infinita los conceptos asociados a espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ tales como distancia y ortogonalidad. Los espacios de Hilbert que nos interesan son típicamente espacios de funciones (espacios en los que funciones hacen las veces de *vectores*) de dimensión infinita. Tales espacios son los formados por las funciones de *cuadrado integrable* en $\mathbb{R}$, es decir, funciones $f(x)$,por lo general complejas que cumplen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \,,$$

y por las funciones de cuadrado integrable sobre el intervalo unidad $[0,1]$:

$$\int_{0}^{1} |f(x)|^2 \, dx < \infty \,.$$

El primero se llama espacio $L^2(\mathbb{R})$ y el segundo $L^2([0,1])$. En el primer caso el producto interno entre dos vectores $f(x)$ y $g(x)$ se define como:

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx \,,$$

donde la raya horizontal significa el complejo conjugado de la función. Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ distintas de cero se dicen *ortogonales* si y solo si su producto interno es cero, $\langle f, g \rangle = 0$.

La norma se define como:

$$\|f\| \equiv \langle f, f\rangle\,,$$

y se dice que una función está *normalizada* cuando $\|f\| = 1$. Las mismas definiciones se aplican al espacio $L^2([0,1])$ sin más que cambiar los límites de integración.

En un espacio de Hilbert H se puede definir una *base ortonormal* B como un conjunto de elementos de H, tales que: 1) Si e_k y $e_j$son dos elementos distintos de la base entonces $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ para todo $k, j \in B$; y 2) $\left\|e_k\right\| = 1$ para todo $k \in B$. Además, la base B es *completa* si cualquier elemento de H se puede representar como una combinación lineal de elementos de la base.

En ocasiones la definición de producto interno, incluye una función $w(x)$, llamada *función peso*, tal que:

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}w(x)dx\,.$$

Los espacios de Hilbert así definidos se llama espacios *ponderados*, y en este caso se trata de espacio ponderado $L^2_w([0,1])$. Los espacios ponderados como este se utilizan con frecuencia en el estudio de polinomios ortogonales, ya que diferentes familias de polinomios son ortogonales *con respecto a* diferentes funciones de peso.

Análisis de Fourier

Estas definiciones nos permiten generalizar el concepto de *análisis de Fourier*. Recordemos que el análisis de Fourier consiste en descomponer una función en una combinación lineal (posiblemente infinita) de funciones de una base dada, esto es, una *serie de Fourier*. La serie de Fourier clásica de una función $f(x)$ definida sobre el intervalo $[0,1]$ es:

$$f(x) = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i\,nx}\,, \tag{7}$$

donde:

$$a_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\,nx}dx\,.$$

Las funciones $u_n(x) = e^{2\pi i\, nx}$ forman una base ortonormal del espacio $L^2([0,1])$. Por tanto, cualquier función de cuadrado integrable en $[0,1]$ se puede expresar como

$$f(x) = \Sigma_n a_n u_n(x)\,, \qquad\qquad a_n = \langle f(x), u_n \rangle\,.$$

Para todo espacio de Hilbert se puede definir una base ortonormal, y cada elemento del espacio de Hilbert se puede escribir de manera única como una combinación lineal de elementos de la base. Los coeficientes que aparecen en dicha combinación lineal se conocen como *coeficientes de Fourier*, y tienen la misma interpretación que las coordenadas de un vector respecto a una determinada base en un espacio euclídeo. En ciertas ocasiones conviene descomponer una función, no en funciones trigonométricas, sino en polinomios ortogonales tales como los polinomios de Legendre.

El análisis de Fourier también ayuda a entender los fundamentos matemáticos de la música, como se explica en este artículo (The,).

Operadores diferenciales

Una expresión del tipo:

$$a_n(x)y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y\,,$$

se puede considerar como una aplicación lineal $\mathscr{A}$ actuando sobre una función y. Donde la aplicación:

$$\mathscr{A} \equiv a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)\,, \qquad (8)$$

se representa como un operador diferencial. Si la función $y(x)$ es suficientemente suave, $\mathscr{A}y(x)$ se obtiene derivando la $y(x)$ y multiplicándola por los coeficientes $a_i(x)$ de la manera indicada en Ecuación (8). Es decir la aplicación $\mathscr{A} : H_1 \to H_2$ transforma un «vector» perteneciente al espacio funcional H_1 de dimensión infinita, en otro «vector» $\mathscr{A}y(x)$ pertenece al espacio de dimensión infinita H_2. La aplicación $\mathscr{A}$ es lineal, ya que si $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, entonces $\mathscr{A}y(x) = c_1\mathscr{A}y_1(x) + c_2\mathscr{A}y_2(x)$.

La mayor parte de los problemas de contorno que nos interesan en física se limitan a ecuaciones lineales de segundo orden, en los $\mathscr{A}$ es un operador diferencial de segundo orden. Cuando la ecuación diferencial depende de un parámetro λ se puede expresar como un problema de autovalores:

$$\begin{aligned} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y - \lambda y = 0 \Rightarrow \\ \mathscr{A}\, y = \lambda y\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Recordemos que un problema de autovalores consiste en encontrar un conjunto de vectores tales que la acción del operador $\mathscr{A}$ sobre estos es equivalente a multiplicar el vector por un escalar. A las constantes λ se les llama *autovalores* de $\mathscr{A}$, y a los vectores asociados a cada autovalor se les llama *autovectores*. En este caso, los autovectores son las *funciones* $y(x)$ (elementos de un espacio vectorial de dimensión infinita) que satisfacen la Ecuación (9), por lo que se les llama también *autofunciones*. Estos problemas aparecen continuamente en mecánica cuántica al resolver la *ecuación de Schrödinger*. En ese caso, los autovalores tienen un significado físico concreto como la energía o el momento angular de un sistema.

6.4 Problemas de Sturm-Liouville regulares homogéneos

Cuando nos encontramos con ecuaciones del tipo de Ecuación (9), conviene reescribirlas en la llamada forma de Sturm-Liouville:

$$\left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0\,, \tag{10}$$

o bien:

$$\mathscr{L}\, y = -\lambda w(x)y\,.$$

Donde $\mathscr{L}$ es el *operador de Sturm-Liouville* definido como:

$$\mathscr{L} \equiv \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} - q(x) \, .$$

Como veremos más adelante, cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden se puede expresar en forma de Sturm-Liouville sin más que multiplicándola por un factor integrante. El motivo de hacer esta operación es que el operador de Sturm-Liouville $\mathscr{L}$ tiene la propiedad de ser *autoadjunto*. Esto significa que:

$$\langle \mathscr{L} f, g \rangle = \langle f, \mathscr{L} g \rangle \, ,$$

donde $\langle \; , \; \rangle$ expresa el producto escalar respecto al peso definido por $w(x)$.

Esta propiedad nos garantiza que las soluciones del problema de contorno, con condiciones de contorno apropiadamente definidas cumple una serie de importantes propiedades que enunciaremos en el teorema Teorema 1, pero antes vamos a definir debidamente el problema de Sturm-Liouville:

Definición 1: Problemas de Sturm-Liouville regulares

Se llama *problema de Sturm-Liouville regular* a la resolución de la ecuación:

$$\left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \, ,$$

con condiciones de contorno, o bien separadas:

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} ,$$

(donde las α's y las β's son constantes) o bien periódicas:

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases} ,$$

en el que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $p(x)$ es derivable en $[a, b]$;
2. $q(x)$ y $w(x)$ son continuas en $[a, b]$;
3. $p(x)$ y $w(x)$ son mayores que cero en $[a, b]$;
4. $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$; y
5. $|\beta| + |\beta'| \neq 0$.

Si no se cumple alguna de estas, el problema se llama de Sturm-Liouville *singular*.

Para diferentes valores de las α's y las β's se tienen diferentes tipos de condiciones de contorno. Para $\alpha' = \beta' = 0$, es decir $y(a) = 0$ y $y(b) = 0$, son *condiciones de Dirichlet*. Para $\alpha = \beta = 0$, es decir $y'(a) = 0$ y $y'(b) = 0$, son *condiciones de Neumann*.

Teorema 1: Autovalores y autofunciones en problemas de Sturm-Liouville regulares

1. Los autovalores de un problema de Sturm-Liouville regular son reales, contables, y forman una sucesión infinita: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ que tiende a infinito, es decir, $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
2. Si $\alpha \times \alpha' \leq 0$, $\beta \times \beta' \geq 0$, y $q(x) \geq 0$, para $x \in [a, b]$, entonces todos los autovalores del problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno separadas son mayores o iguales que 0. En particular, si $\alpha' = \beta' = 0$, es decir, $y(a) = y(b) = 0$, entonces todos los autovalores son estrictamente positivos.
3. Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso $w(x)$, es decir:
$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = 0 \qquad \text{si } y_n(x),\, y_m(x) \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m\,.$$
4. Las autofunciones $\{y_n\}$ del problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno separadas forman cada una un espacio vectorial de dimensión 1, y cada y_n posee exactamente $n - 1$ ceros en (a, b).
5. El conjunto de autofunciones $\{y_n\}$ del problema de Sturm-Liouville, de-

bidamente normalizadas, forman una base ortonormal completa del espacio de Hilbert ponderado $L^2_w([a,b])$ (en el que el producto interno está definido respecto a la función peso $w(x)$). Esto es, cualquier función $f(x) \in L^2_w([a,b])$ se puede representar por una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)\,,$$

donde:

$$c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}\,.$$

Estas propiedades justifican el expresar una ecuación en forma de Sturm-Liouville. Si podemos escribir la ecuación en forma de Sturm-Liouville, podremos averiguar de antemano muchas de las propiedades de sus soluciones. Por ejemplo sabremos que las autofunciones son ortogonales respecto a la función peso $w(x)$ que viene dada por la expresión de la Ecuación (10).

En un problema de Sturm-Liouville la determinación exacta de los autovalores no será siempre posible. Sin embargo, se puede obtener información sobre su localización comparando el problema en cuestión con otro que sea resoluble gracias a la propiedad que enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 2

Aumentando $p(x)$, aumentando $q(x)$, o disminuyendo $w(x)$ aumentan todos los autovalores positivos del problema:

$$\begin{cases} \left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}.$$

Ejemplo 3.

Podemos comparar el problema:

$$\begin{cases} \left[(1+x^2)y'\right]' + xy + \lambda(1+x^2)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

que no sabemos resolver, con el problema:

$$\begin{cases} py'' - qy + \lambda wy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases},$$

con p, q, w constantes, cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \frac{pn^2\pi^2 + q}{w}.$$

Del primer problema tenemos $p(x) = 1 + x^2$, $q(x) = -x$, y $w(x) = 1 + x^2$. En el intervalo de interés $1 \leq p(x) \leq 2$, $0 \geq q(x) \geq -1$, y $1 \leq w(x) \leq 2$, por tanto, los autovalores de Ecuación (11) satisfacen:

$$\frac{1}{2}\left(n^2\pi^2 - 1\right) < \lambda_n < 2n^2\pi^2.$$

6.5 Transformación en forma de Sturm-Liouville

Como ya hemos dicho, cualquier ecuación lineal de segundo orden se puede expresar en forma de Sturm-Liouville. Consideremos la ecuación:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + \lambda y = 0. \tag{12}$$

Comenzamos dividiendo por $a_2(x)$:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y + \frac{\lambda}{a_2(x)}y = 0\,.$$

Ahora multiplicamos la ecuación por $\mu(x)$:

$$\mu(x)y'' + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \mu(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y + \mu(x)\frac{\lambda}{a_2(x)}y = 0\,.$$

Los dos primeros términos se pueden combinar en una derivada exacta $(\mu(x)y')'$ si $\mu(x)$ satisface $\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$,lo cual nos da la función $\mu(x)$ como:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\,.$$

Por tanto, multiplicando la Ecuación (12) por el factor $\frac{1}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$ obtenemos la ecuación:

$$\left[e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}y'\right]' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}y + \frac{\lambda}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}y = 0\,,$$

que es equivalente a la forma de Sturm-Liouville,

$$\left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0\,,$$

con

$$\begin{aligned}
p(x) &= e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\,,\\
q(x) &= -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\,,\\
w(x) &= \frac{1}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Convertir en forma de Sturm-Liouville la ecuación $x^2y''+xy'+2y = 0$

Multiplicamos la ecuación por el factor $\frac{1}{x^2}e^{\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x^2}e^{\ln x} = \frac{1}{x^2}x = \frac{1}{x}$ para obtener:

$$xy'' + y' + \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow$$
$$(xy')' + \frac{2}{x}y = 0\,.$$

6.6 Problemas de contorno no-homogéneos y función de Green

Vamos a estudiar ahora los problemas de contorno no-homogéneos, comenzando por aquellos que no dependen de un parámetro λ. Más tarde consideraremos los problemas dependientes de λ, o problemas de Sturm-Liouville no-homogéneos.

Consideramos pues el problema no-homogéneo con condiciones de contorno separadas:

$$\begin{cases} \left[p(x)y'\right]' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \quad , \tag{13}$$

donde $p(x)$ es mayor que 0 y derivable en $[a, b]$ y tanto $g(x)$ como $f(x)$ son continuas en $[a, b]$. Este problema puede tener solución única, o infinitas soluciones, o bien no tener solución alguna dependiendo de la función $f(x)$ y de las soluciones del problema homogéneo.

Teorema 3

El problema Ecuación (13) tiene solución única si y solo si el problema homogéneo asociado tiene únicamente la solución $y = 0$. Si el problema homogéneo tiene soluciones no-triviales $\{y_H\}$ entonces el no-homogéneo tiene infinitas soluciones o no tiene solución según sea, respectivamente, igual o distinta de cero la integral $\int_a^b f(x)y_H(x)dx$.

En el caso en que la solución sea única, el teorema siguiente nos da una fórmula para la solución de la ecuación no-homogénea para cualquier $f(x)$, en función de las soluciones de la ecuación homogénea, de manera semejante a la fórmula de variación de las constantes que vimos en los problemas de valores iniciales:

Teorema 4

Supongamos que el problema homogéneo asociado a Ecuación (13) tiene solamente la solución $y = 0$, y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones no-triviales de la ecuación homogénea satisfaciendo, respectivamente, $\alpha y_1(a) + \alpha' y_1'(a) = 0$ y $\beta y_2(b) + \beta' y_2'(b) = 0$. Entonces la solución única de Ecuación (13) es:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds\,, \qquad \text{con } G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(x)}{p(x)|W|}\,, & a \leq s \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(s)}{p(x)|W|}\,, & x \leq s \leq b \end{cases} \tag{14}$$

donde $p(x)$ viene dada por la ecuación diferencial en cuestión (Ecuación (13)) y $|W|$ es el wronskiano:

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\,.$$

Tomando la derivada de $p(x)|W|$ se puede comprobar que el denominador de la función de Green es constante.

A la función $G(x,s)$ se le llama *función de Green* del problema. La función de Green también se puede definir como la solución del problema:

$$\begin{cases} \left[p(s)y'\right]' + g(s)y = \delta(s-x) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases},$$

para $x \in (a,b)$ fijo, donde $\delta(s-x)$ es la función delta de Dirac. Si conocemos la $G(x,s)$, podemos encontrar la solución del problema de contorno no-homogéneo (Ecuación (13)) para cualquier término no-homogéneo $f(x)$, sin más que realizar un par de integraciones. La idea de la función de Green se puede generalizar a otros problemas no-homogéneos de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales.

Ejemplo 5.

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

El problema homogéneo tiene como única solución la trivial $y = 0$. Por tanto, el no-homogéneo tiene solución única. La solución general de $y'' = 0$ es $y = c_1 + c_2 x$. Imponiendo cada una de las condiciones de contorno por separado obtenemos las siguientes soluciones no triviales:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y(x) = c_2 x\,, \\ y(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y(x) = c_1(1-x)\,. \end{aligned}$$

Para calcular la función de Green podemos tomar: $y_1(x) = x \; y_2(x) = x - 1$; $p(x) = 1$ y el wronskiano es: $|W| = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Por tanto, la función de Green es:

$$G(x,s) = \begin{cases} s(x-1) & 0 \leq s \leq x \\ x(s-1) & x \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

y la solución de la ecuación no-homogénea es:

$$y(x) = (x-1)\int_0^x s f(s) ds + x \int_x^1 (s-1) f(s) ds\,.$$

Veamos ahora el problema no-homogéneo con *condiciones de contorno no-homogéneas*:

$$\begin{cases} \left[p(x)y'\right]' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = A \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases} . \tag{15}$$

Si conocemos una función $v(x)$ que satisfaga estas condiciones de contorno, podemos reducir el problema Ecuación (15) a otro con condiciones de contorno homogéneas. Si hacemos el cambio de variable $w(x) = y(x) - v(x)$, gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones de contorno, obtenemos:

$$\begin{cases} \left[p(x)w'\right]' + g(x)w = f(x) - \left[p(x)v'\right]' - g(x)v \\ \alpha w(a) + \alpha' w'(a) = 0 \\ \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases},$$

que es del mismo tipo que la Ecuación (13) que ya hemos visto. Por tanto, el problema Ecuación (15) tiene solución única si y solo si el problema homogéneo asociado con condiciones de contorno homogéneas tiene únicamente la solución trivial $y = 0$.

Ejemplo 6.

Resolver:

$$\begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ ay(1) + y'(1) = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}.$$

Buscamos una función de la forma $v(x) = c_1 x + c_2$ que satisfaga las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} v(2) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 2c_1 + c_2 = 1 \quad \Rightarrow c_2 = 1 - 2c_1\,, \\ av(1) + v'(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a(c_1 + c_2) + c_1 = 0 \quad \Rightarrow a(1 - c_1) + c_1 = 0\,, \end{aligned}$$

luego:

$$c_1 = \frac{a}{a-1}\,,$$
$$c_2 = \frac{1+a}{1-a}\,,$$

y la función que buscamos es:

$$v(x) = \frac{1 + a - ax}{1 - a}\,.$$

Por tanto, el cambio de variable:

$$w = y - \frac{1 + a - ax}{1 - a}$$

nos lleva a las condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} aw(1) + w'(1) = 0 \\ w(2) = 0 \end{cases},$$

pero ahora la ecuación diferencial es no-homogénea:

$$xw'' - w' = \frac{a}{a - 1}.$$

Estudiamos el problema homogéneo cuya solución general es:

$$w(x) = c_1 + c_2 x^2.$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} aw(1) + w'(1) = ac_1 + ac_2 + 2c_2 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad c_1 = -\frac{2 + a}{a} c_2, \\ w(2) = c_1 + 4c_2 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad c_1 = -4c_2, \end{aligned}$$

vemos que el problema solamente tiene soluciones no-triviales cuando $a = \frac{2}{3}$. Entonces la solución es:

$$w(x) = c_2(x^2 - 4).$$

Por tanto, si $a \neq \frac{2}{3}$ la única solución del problema homogéneo es la trivial $y = 0$ y el problema no-homogéneo tiene solución única, dada por la Ecuación (14) del Teorema 4. Si $a = \frac{2}{3}$ entonces el problema no-homogéneo tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna, veamos cuál es el caso.

Reescribimos la ecuación $xw'' - w' = -2$ en forma de Sturm-Liouville como:

$$\left(\frac{1}{x} w'\right)' = -\frac{2}{x^2}.$$

Aplicando el Teorema 3 con $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ y $w_H(x) = x^2 - 4$, vemos que:

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2}(x^2 - 4)dx \neq 0\,,$$

por tanto, el problema no-homogéneo con $a = \frac{2}{3}$ no tiene solución.

Para terminar, consideremos el problema de Sturm-Liouville no-homogéneo:

$$\begin{cases} \left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} . \tag{16}$$

Para cada valor de λ, el problema es idéntico al de la Ecuación (13) con $g(x) = -q(x) + \lambda w(x)$, por tanto podemos enunciar un teorema de existencia y unicidad de soluciones similar al Ecuación (16).

Teorema 5

El problema Ecuación (16) tiene solución única (calculable a partir de la función de Green $G_\lambda(x,s)$) si y solo si λ no es autovalor del problema homogéneo asociado. Si $\lambda = \lambda_n$ autovalor con autofunción $\{y_n\}$ entonces Ecuación (16) no tiene solución (si $\int_a^b f y_n dx \neq 0$), o tiene infinitas soluciones (si $\int_a^b f y_n dx = 0$).

Ejemplo 7.

Hallar cuántas soluciones tiene el problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) - y'(1) = 0 \end{cases} . \tag{17}$$

Empezamos calculando los autovalores y autofunciones del problema homogéneo. Las soluciones generales son las mismas que en Ejemplo 1 y Ejemplo 2.

- $\lambda < 0$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} \,.$$

Imponemos las condiciones de contorno tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \,, \\ y(1) - y'(1) &= c_1 \left(e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}} \right) - c_1 \sqrt{|\lambda|} \left(e^{\sqrt{|\lambda|}} + e^{-\sqrt{|\lambda|}} \right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Para que hubiera soluciones no-triviales se tendría que cumplir:

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}}}{e^{\sqrt{|\lambda|}} + e^{-\sqrt{|\lambda|}}} = \tanh \sqrt{|\lambda|} \,,$$

lo cual no es posible para $\sqrt{|\lambda|} > 0$. La única solución con $\lambda < 0$ es la trivial, por tanto, la ecuación no tiene autovalores negativos.

- $\lambda = 0$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 + c_2 x \,.$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \,, \\ y(1) - y'(1) &= c_2 - c_2 = 0 \,. \end{aligned}$$

La segunda condición no determina c_2, por tanto $\lambda = 0$ es autovalor con autofunciones $y(x) = c_2 x$.

- $\lambda > 0$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \,.$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$y(0) = c_1 = 0\,,$$
$$y(1) - y'(1) = c_2(\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}) = 0\,.$$

La ecuación tiene infinitas soluciones con $\sqrt{\lambda} = \tan\sqrt{\lambda}$ (Figura 4). Por tanto $\lambda_n = \tan^2\sqrt{\lambda}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ son autovalores de la ecuación, con autofunciones:

$$y_n(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda_n}x\,.$$

Aplicando el Teorema 3 (la ecuación ya está escrita en forma de Sturm-Liouville con el término no-homogéneo $f(x) = x$) vemos que:

- Si $\lambda \neq \lambda_n$ el problema no-homogéneo tiene solución única calculable a partir de la función de Green.
- Si $\lambda = 0$ una solución de la homogénea es $y_H(x) = x$. Como $\int_0^1 x^2 dx \neq 0$ la ecuación no-homogénea con $\lambda = 0$ no tiene solución.
- Si $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ una solución de la homogénea es $y_H(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$. Como $\int_0^1 x\sin\sqrt{\lambda}x dx = 0$ la ecuación no-homogénea con $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ tiene infinitas soluciones.

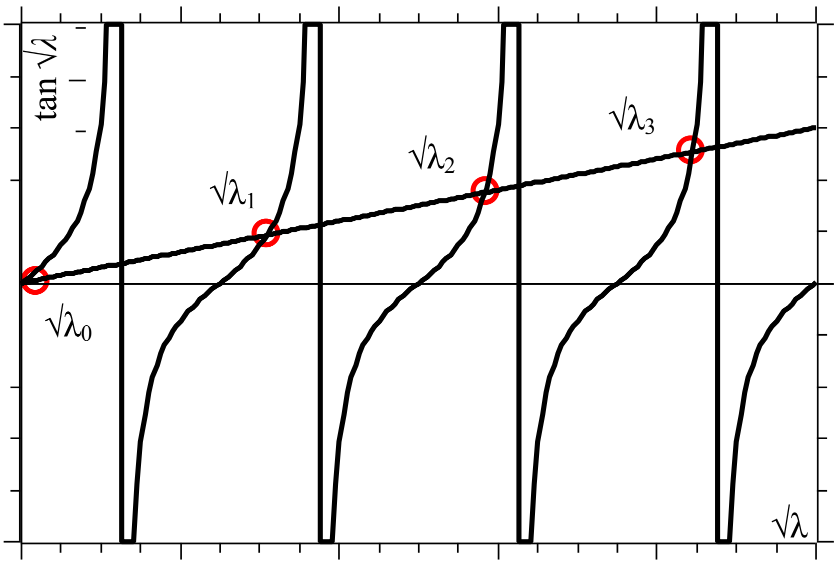


Figura 4: Autovalores de la Ecuación (17).

6.7 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Determinar los autovalores y autofunciones asociadas de:

1. $$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Desarrollar $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ en series de Fourier.

Ejercicio 3. Escribir en forma de Sturm-Liouville las ecuaciones de Bessel y de Legendre.

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de α existe solución al problema:

$$\begin{cases} y'' = e^{-(x-1)^2} \\ \alpha y(0) + (1-\alpha) y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Hallar la función de Green y la solución para $f(x) = x$ de:

1. $$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x^2 y'' + x y' - y = f(x) \\ y(1) + y'(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Averiguar para qué valores de λ tiene solución única el problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = -4\pi^2 x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

6.8 Referencias bibliográficas

The Physics Hypertextbook, https://physics.info/music/.