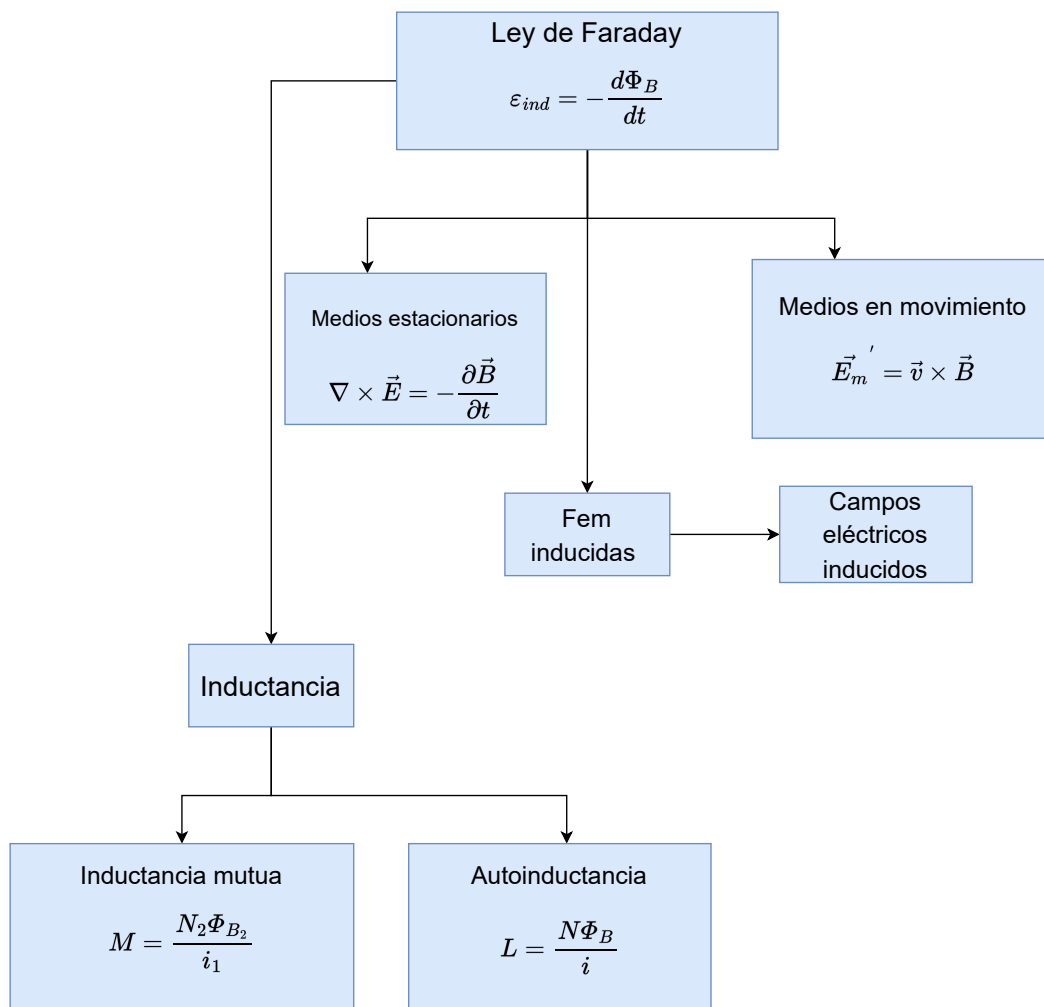


Electromagnetismo I

Inducción electromagnética

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
7.1 Introducción y objetivos	3
7.2 Experimentos de inducción	3
7.3 Ley de Faraday	5
7.4 Fem inducidas y campos eléctricos	8
7.5 Medios estacionarios	10
7.6 Medios en movimiento.	13
7.7 Inductancia	17
7.8 Generadores y motores	21
7.9 El efecto Hall	21
7.10 Cuaderno de ejercicios	22
7.11 Referencias bibliográficas	23



7.1 Introducción y objetivos

Al principio de la asignatura estuvimos hablando de cargas estáticas y del campo \vec{E} . Después introducimos las cargas en movimiento en situaciones estáticas. Y en este capítulo empezaremos a hablar de cargas en situaciones cambiantes con el tiempo. Hablaremos de la ley de Faraday como el objetivo central de este capítulo. Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Entender el fenómeno de la **inducción magnética**.
- ▶ Comprender las diferencias en la inducción en **medios estáticos** o en medios en **movimiento**.
- ▶ Entender que ante una **FEM inducida** también se produce un campo eléctrico inducido.
- ▶ Aprender cómo se define la **inductancia**, en particular la inductancia mutua y la autoinductancia.

7.2 Experimentos de inducción

En la década de 1830, fue la época de los experimentos pioneros de Michael Faraday en Inglaterra ([Martínez, José Antonio Díaz, 2003](#); [Miranda, Cabildo and del Pilar, María, 2017](#)). Independientemente, Joseph Henry en Estados Unidos, observó corrientes inducidas magnéticamente. Veamos algunos ejemplos de estos experimentos:

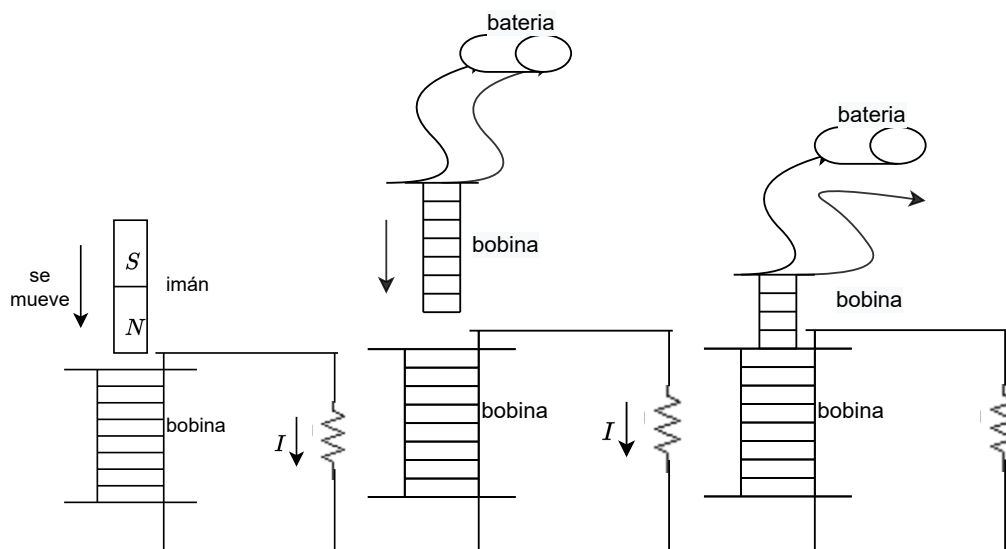


Figura 1: El primer dibujo representa un imán que se mueve hacia una bobina induciendo una corriente eléctrica en la bobina. El segundo dibujo representa una bobina conectada a una batería moviéndose hacia una bobina. Esto da lugar a una corriente eléctrica en la bobina. En el tercer dibujo, tenemos una segunda bobina introducida en otra bobina. Si se abre y cierra el circuito de la segunda bobina conectada a la batería, se induce una corriente en la primera bobina.

- Tenemos una bobina de alambre conectada a un galvanómetro, que nos indicará si pasa corriente o no por la espira. Inicialmente la bobina no está conectada a ninguna fuente que proporcione voltaje. Tenemos un imán cerca de la bobina. En este momento, no se observa corriente. Cuando empezamos a mover el imán cerca de la bobina, ya sea acercándolo o alejándolo, se ve la presencia de corriente en la bobina. Se observa corriente también si dejamos estacionario el imán y movemos la bobina. Esta corriente producida recibe el nombre de *corriente inducida*, y la diferencia de potencial necesaria para producir esa corriente se llama *fuerza electromotriz (FEM) inducida*.
- Ahora, en vez de tener un imán, tenemos una segunda bobina conectada a una batería. Mientras no se mueve la segunda bobina, no se observa corriente. Cuando se mueve la segunda bobina con respecto a la primera o viceversa, se observa una corriente eléctrica en la primera.
- Una tercera situación que podemos considerar: tenemos la segunda bobina estacionaria, pero realizamos la operación de abrir y cerrar el circuito de la segunda bobina. Lo que hace es que la corriente caiga a cero. Mientras se está

abriendo o cerrando el circuito, como está variando la corriente de la segunda bobina, se puede observar corriente producida en la primera bobina.

El elemento común en estos experimentos es el flujo magnético cambiante que atraviesa la bobina. La explicación de por qué está pasando esto es la ley de Faraday que veremos seguidamente.

7.3 Ley de Faraday

Antes de pasar directamente a la ley de Faraday, necesitamos recordar la definición de flujo magnético. Si tenemos un área infinitesimal $d\vec{A}$, atravesada por un campo \vec{B} , podemos definir el flujo a través de esa área como:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \phi, \quad (1)$$

donde ϕ es el ángulo entre \vec{B} y $d\vec{A}$. Necesitamos definir una segunda cantidad, la *fuerza electromotriz* o *FEM* que es el trabajo realizado por unidad de carga cuando esta transita por una trayectoria cerrada. Las unidades de la FEM son voltios.

Para enunciar la ley de Faraday consideremos el caso que usó Faraday simplificado. Consideremos un circuito cerrado C . Supongamos que al circuito lo atraviesa un campo \vec{B} , lo cual implica que también existe la presencia de un flujo magnético Φ_B , en concreto a través de la superficie A que está encerrada por el circuito C , véase la [Figura 2](#). Podemos ver que, por la definición que dimos anteriormente, el flujo en la figura es positivo. Un dato importante es que el circuito no posee batería ni ninguna otra fuente. Cuando el flujo es constante, $d\Phi_B/dt = 0$, no se observa corriente en el circuito. En contraposición, si el flujo no es constante, Faraday observó que se producía una corriente *inducida* en C . Se dice que esta corriente fue inducida debido al cambio de flujo, y se puede

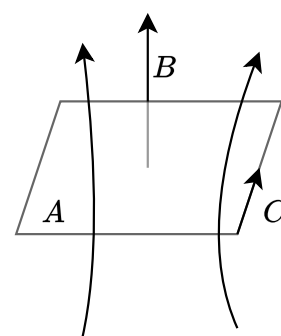


Figura 2: Circuito que muestra un campo \vec{B} , y un flujo positivo a través de él.

decir que se ha creado una FEM inducida. En resumen, la ley de Faraday se puede enunciar como:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (2)$$

Es decir, la FEM inducida en un circuito cerrado es igual a menos la tasa de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito.

La variación del flujo puede darse por diversas razones:

- ▶ El campo \vec{B} puede variar con el tiempo.
- ▶ El circuito puede moverse por translación o rotación, o bien se deforma, por la cual el valor de \vec{B} dentro de él varía.
- ▶ Combinación de las anteriores.

El significado del signo negativo en la [Ecuación \(2\)](#) viene dado por la *ley de Lenz*. Y representa el sentido de la FEM inducida en comparación con el sentido original elegido para el recorrido de C. La *ley de Lenz* dice que la FEM inducida tiene un sentido tal que se opone al cambio que lo provoca. Veamos algunos ejemplos de esto. Fijémonos en la [Figura 3](#). Tenemos un circuito C, sin corriente a través de él inicialmente, que es atravesado por un campo magnético \vec{B} . El campo magnético varía con el tiempo de dos maneras:

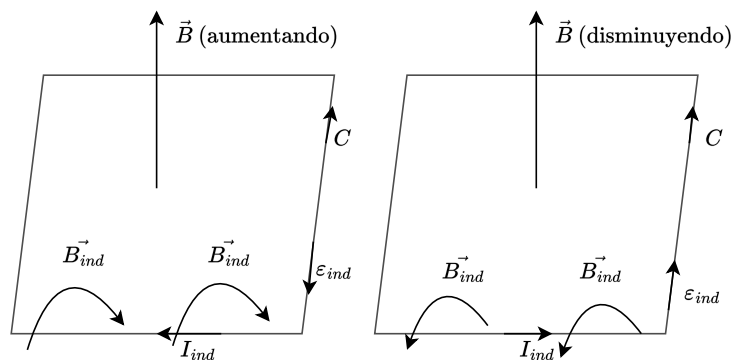


Figura 3: Se ve la dirección de la corriente inducida, y asimismo del campo inducido, cuando cambiamos la magnitud de \vec{B} aumentándolo (izquierda) o disminuyéndola (derecha).

- ▶ Si el campo magnético aumenta con el tiempo (figura de la izquierda), la variación del flujo $d\Phi_B/dt$ es positiva. Por consiguiente, se crea una FEM inducida negativa, y una corriente inducida asociada que se opone a ese cambio, en el

sentido contrario a la dirección positiva de la corriente que se ha tomado en el circuito. A su vez, esa corriente crea un campo como se puede ver en la [Figura 3](#) (podemos usar la regla de la mano derecha para entender la dirección del campo creado) que se opone a ese aumento en el flujo en la superficie encerrada en concordancia con la ley de Lenz.

- Si el campo magnético disminuye con el tiempo (figura de la derecha). En este caso la variación del flujo $d\Phi_B/dt$ es negativa, lo que indica que se crea una FEM inducida positiva, en el mismo sentido de la corriente que está definida como positiva en el circuito C. Y a su vez, también se crea un campo inducido que quiere ayudar a aumentar el flujo, oponiéndose al cambio, en concordancia con la ley de Lenz.

Ejemplo 1. Bobina en un campo \vec{B} que cambia

Tenemos una bobina de alambre que tiene 400 vueltas circulares con un radio de 4 cm. Esta bobina está entre los polos de un electroimán, como se ve en la [Figura 4](#). El campo magnético creado por el imán es uniforme, y forma un ángulo de 60° con el plano de la bobina. El campo disminuye a razón de 0.2 T/s . Calcula el valor de la FEM inducida. ¿Cuál es su dirección?

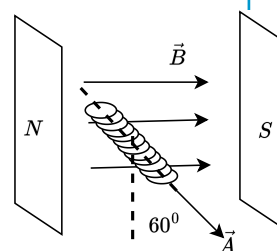


Figura 4: Bobina entre los polos de un electroimán. Se puede ver el campo \vec{B} , y la inclinación de la bobina.

Tenemos que el ángulo entre el vector área \vec{A} y el campo \vec{B} , si lo vemos en la figura podemos darnos cuenta que es 30° . Sustituimos en la [Ecuación \(2\)](#), teniendo en cuenta que tenemos N espiras, y donde $\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} A \cos \phi$

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -400 \cdot ((-0.2 \text{ T/s})(0.005 \text{ m}^2) \cos 30^\circ) = 0.347 \text{ V}$$

La bobina crea una fuerza electromotriz positiva, en la misma dirección que la corriente en la bobina, si suponemos que los extremos del alambre están conectados entre sí. Y podemos darnos cuenta que el flujo magnético creado es en la misma dirección que el flujo del electroimán, oponiéndose a la disminución del

mismo.

Ejemplo 2. Circuito que varía su área en un campo \vec{B}

Tenemos un circuito en forma de herradura que en la apertura tiene una barra conductora que se mueve de forma uniforme, como podemos ver en la [Figura 5](#).

La barra se mueve hacia la derecha con una velocidad \vec{v} constante. Los lados del circuito son de longitud l constante, y x variable con el tiempo. Existe un campo \vec{B} perpendicular al circuito y saliendo. Queremos calcular la FEM inducida.

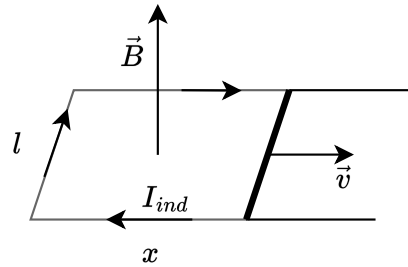


Figura 5: Circuito cerrado por una barra conductora que se mueve hacia la derecha.

El flujo a través del circuito es:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = Blx.$$

Por la [Ecuación \(2\)](#) de Faraday obtenemos la FEM inducida como

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv.$$

Observemos que la FEM es negativa, es decir, se opone al cambio. Como el flujo aumenta con el tiempo, la FEM inducida crea una corriente y un campo (hacia dentro de la página) que se opone a ese incremento en el flujo.

7.4 Fem inducidas y campos eléctricos

Anteriormente vimos que la densidad de corriente volumétrica se relaciona de forma proporcional a través de una constante con el campo eléctrico. Hasta ahora con la ley de Faraday vimos cómo un flujo magnético que varía con el tiempo induce una

FEM y una corriente en un circuito. Debemos decir que en consecuencia de ese flujo magnético cambiante, se crea un campo eléctrico en el conductor (recordemos que en una situación dinámica $\vec{E} \neq 0$ en contraposición en una situación estática donde $\vec{E} = 0$, dentro de un conductor). Tened en cuenta que este *campo eléctrico inducido* tiene propiedades muy diferentes a las que tenía un campo producido por cargas estacionarias.

Se mostrará cómo se obtiene el valor del campo eléctrico inducido a través de un ejemplo. Consideremos una espira circular de radio a . Se encuentra en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira y entrando en el plano (ver Figura 6).

Al hacer que el campo magnético varíe con el tiempo, por la ley de Faraday tenemos una FEM $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Como comentamos en el párrafo anterior, esta corriente inducida implica la presencia de un campo eléctrico inducido. Este campo \vec{E} es tangente a la espira en el plano de la espira. Pongamos una carga de prueba que queramos mover en la espira, el trabajo necesario será $W =$

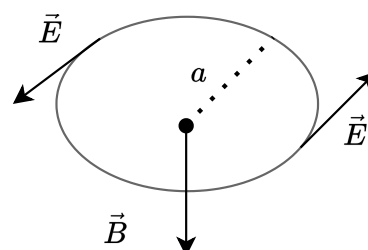


Figura 6: Espira de radio a con un campo magnético variable que la atraviesa perpendicular a la espira, debido al cambio de \vec{B} en el tiempo, se ve el campo \vec{E} inducido tangente a la espira.

$q\varepsilon_{ind}$. Por otro lado, la fuerza eléctrica sobre la carga es $q\vec{E}$, y el trabajo realizado para mover esa carga alrededor de la espira será $W = qE(2\pi a)$. Si igualamos ambas expresiones sobre el trabajo realizado tenemos

$$E_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{2\pi a}.$$

Ahora, sabiendo que el flujo magnético es $\Phi_B = BA = B\pi a^2$, y sustituyendo el valor de ε_{ind} en el valor del campo E tenemos:

$$E_{ind} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{a}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Si observamos el signo negativo en la ecuación, nos dice que el campo eléctrico se opone al cambio en el campo magnético. Notar que aunque este resultado lo hemos

obtenido a partir del ejemplo de un conductor, se puede generalizar a casos fuera de un conductor, como por ejemplo una carga libre en presencia de un campo magnético variable. Para cualquier trayectoria cerrada, la FEM puede expresarse como la integral de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$, y con la [Ecuación \(2\)](#) podemos decir:

$$\oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (3)$$

Es importante resaltar aquí que el campo eléctrico inducido en la ecuación es no conservativo y variable en el tiempo, producido por el campo magnético variable. El campo eléctrico total será la suma del campo conservativo \vec{E}_c y el campo eléctrico inducido, $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_{ind}$. Recordando que la integral cerrada de un campo conservativo es cero, podemos generalizar en la [Ecuación \(3\)](#) \vec{E}_{ind} por el campo total. Así la expresión que obtenemos al final es la ley de Faraday general:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (4)$$

Como comentamos anteriormente, el flujo puede variar por diversas razones, y nos gustaría estudiar más en detalle en los siguientes apartados dos posibilidades por separado: por un lado cuando el sistema se encuentra en reposo y por otro lado cuando se encuentra en movimiento.

7.5 Medios estacionarios

Consideramos primero el caso de un sistema en reposo. Esto lo que significa es que la curva limitante C no va a variar. En este caso, el flujo Φ_B variará su valor debido a que el campo \vec{B} cambia con el tiempo. Si usamos el teorema de Stokes para \vec{E} tenemos $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$, la [Ecuación \(4\)](#) se puede expresar como:

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A},$$

y despejando:

$$\int_A \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = 0.$$

La [Ecuación \(4\)](#) es válida para la integración en cualquier superficie A, podemos considerar una superficie infinitesimal, y eliminar la integral, así que llegamos a un nuevo enunciado de la ley de Faraday para un medio estacionario como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Aquí encontramos una primera ecuación que establece una relación entre la electricidad y el magnetismo. Seguidamente veremos algunos ejemplos en medios estacionarios.

Ejemplo 3. Espira rectangular fija en un campo \vec{B} alterno

Tenemos una espira cuadrada de lado l . El eje z es paralelo a uno de los lados de la espira, mientras que forma un ángulo φ respecto al plano yz , como se muestra en la [Figura 7](#).

La espira se encuentra dentro de un campo \vec{B} alterno, de la forma $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \hat{x}$, siendo B_0 una constante. Entonces el campo es constante en el espacio pero varía con el tiempo de forma armónica. El valor del ángulo α depende de la elección del cero en t . La variable ω es la llamada *frecuencia angular*, que si nos fijamos se tiene que medir en s^{-1} .

El valor del flujo que atraviesa la espira lo podemos calcular con la [Ecuación \(1\)](#):

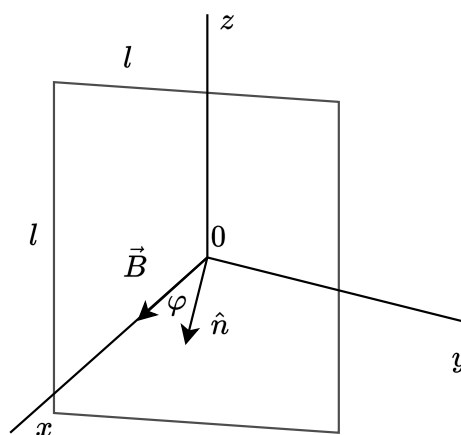


Figura 7: Espira cuadrada fija dentro de un campo \vec{B} alterno.

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos \varphi \int_A dA = B_0 l^2 \cos \varphi \cos(\omega t + \alpha).$$

A su vez, podemos calcular la FEM inducida en la espira usando la [Ecuación \(4\)](#):

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B_0 l^2 \sin \varphi \sin(\omega t + \alpha).$$

Observando las dos expresiones que hemos obtenido, podemos decir que cuando el flujo es máximo, la FEM inducida es mínima y viceversa. Notar también que si queremos extender este resultado para N espiras, como la FEM es aditiva, podemos simplemente multiplicar por N el resultado.

Ejemplo 4. Cilindro infinito en presencia de una campo \vec{B} variable.

El cilindro tiene un radio a , y se encuentra en la dirección del eje z . El campo \vec{B} en el interior del cilindro es de la forma $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \hat{z}$. Este campo solo es distinto de cero dentro del cilindro, es decir, cuando $\rho \leq a$. Este campo es similar al ejercicio anterior. En este caso queremos calcular el valor del campo \vec{E} . Para ello usamos la [Ecuación \(5\)](#), y podemos ver que:

$$\nabla \times \vec{E} = \omega B_0 \sin(\omega t + \alpha) \hat{z}.$$

Si consideramos la simetría cilíndrica del problema y vemos el resultado del rotacional que acabamos de obtener, esperamos encontrar el campo \vec{E} en el plano xy , y tangente a círculos de radio ρ , es decir $E = E_\varphi \hat{\varphi}$. Por otro lado, usando la [Ecuación \(4\)](#), elegimos que la trayectoria cerrada a integrar sean círculos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C E_\varphi \rho d\varphi = E_\varphi 2\pi \rho.$$

Si integramos el resultado del rotacional:

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \omega B_0 \sin(\omega t + \alpha) \int dA_z.$$

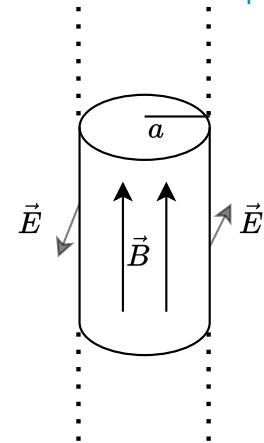


Figura 8: Cilindro infinito dentro de una inducción alterna. Debido a ese campo variable se crea un campo \vec{E} inducido.

Ahora podemos igualar la integral de \vec{E} anterior a la integral del rotacional, según el teorema de Stokes, y despejar E_φ . Sin embargo aquí tenemos que considerar dos casos:

1. Si $\rho \leq a$, la $\int dA_z = \pi\rho^2$ entonces $E_\varphi = \frac{1}{2}\omega\rho B_0 \sin(\omega t + \alpha)$
2. Si $\rho > a$, la $\int dA_z = \pi a^2$ entonces $E_\varphi = \frac{1}{2}\omega\frac{a^2}{\rho} B_0 \sin(\omega t + \alpha)$

Más adelante comentaremos la aplicación de este resultado a la hora de diseñar un acelerador de partículas que se llama *Bevatrón*, y que produce estos campos inducidos.

7.6 Medios en movimiento

Cuando el medio se mueve nos encontramos en una situación más compleja, pero también las aplicaciones más útiles de la ley de Faraday. Para un sistema en movimiento, haciendo algunos cálculos, se puede llegar a la misma expresión que para el caso estacionario:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Es decir, esta fórmula se puede aplicar independiente del movimiento del medio. Para un medio en movimiento existen dos sistemas de referencia.

- Por un lado, tenemos el sistema de referencia desde el cual se ve el objeto en movimiento, normalmente llamado el *sistema de laboratorio*.
- Por otro lado, tenemos el sistema en movimiento con el objeto donde las cantidades se observan como si estuvieran en reposo.

Teniendo esto presente, pensemos el sistema en términos de fuerza ejercida. En el sistema de laboratorio, habiendo un campo \vec{B} constante, lo que vemos es una carga q moviéndose a una velocidad constante \vec{v} , por lo que podemos decir que la fuerza que actúa sobre esta carga es $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, donde \vec{E} es el campo eléctrico. Ahora, para el sistema donde el observador se mueve con el sistema, la única fuerza que se ve es

$\vec{F}' = q\vec{E}'$ (la prima nos indica el sistema de referencia de movimiento). Aquí estamos considerando que la aceleración es nula, por tanto ambos sistemas son inerciales. Eso nos indica que $\vec{F} = \vec{F}'$, y entonces llegamos a que:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

Algunos problemas se pueden resolver de forma más sencilla desde el sistema de referencia en movimiento (el prima). Las expresiones para calcular la *FEM de movimiento*, nombre que adquieren los términos dependientes de la velocidad, y el *campo eléctrico de movimiento* son:

$$\vec{E}'_m = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (6)$$

$$\epsilon'_m = \oint_C \vec{E}'_m \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}. \quad (7)$$

Importante notar aquí que los términos que no dependen de la velocidad, pero dependen de la variación de \vec{B} (los que vimos en el apartado de medios estacionarios), se llaman términos del *transformador*, ya que aquí estamos considerando los dos casos por separado, pero pueden suceder al mismo tiempo. Seguidamente veremos algún ejemplo de medios en movimiento.

Ejemplo 5. Circuito que varía su área en un campo \vec{B} .

Vamos a considerar el mismo caso que en el [Ejemplo 2](#). Recordemos que \vec{B} es constante y que la barra se mueve, por tanto la FEM inducida solo puede venir dada por el término de movimiento. Fijémonos una vez más en la [Figura 5](#). La magnitud del campo eléctrico de movimiento \vec{E}'_m viene dada por la [Ecuación \(6\)](#) y es solo distinta de cero en la barra móvil, $E'_m = Bv$. Además, en la integral de la FEM inducida de la [Ecuación \(7\)](#) el sentido de este campo de movimiento es opuesto a $d\vec{l}$ (descrito por la ley de la mano derecha):

$$\epsilon'_m = \oint_C -Bv dl = -Bvl.$$

Este es el mismo resultado que obtuvimos anteriormente, pero aquí entendemos un poco mejor el proceso físico de lo que está sucediendo. Es la barra la que de-

bido a una fuerza sobre las cargas por estar en un campo \vec{B} crea esa corriente inducida, poco tiene que ver la parte estática del circuito. Y además, el signo negativo es equivalente a la oposición del cambio de flujo magnético de la ley de Lenz.

Ejemplo 6. Espira en rotación

Vamos a considerar una vez más la espira que consideramos en el caso estático (Figura 7). Pero ahora el campo presente es $\vec{B} = B_0 \hat{x}$ constante. En este caso, es la espira la que estará girando alrededor del eje z . La velocidad angular de la espira es ω , y en consecuencia es el ángulo φ el que varía en función del tiempo, de la forma $\varphi = \omega t + \varphi_0$. En este caso que-remos calcular la FEM inducida, lo haremos de dos formas diferentes:

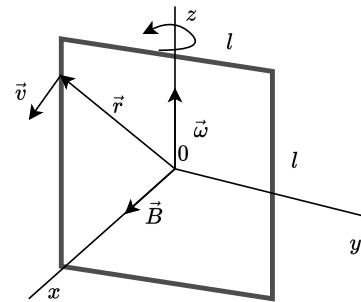


Figura 9: Espira cuadrada con una velocidad angular $\vec{\omega}$ dentro de un campo \vec{B} constante.

- Podemos calcular el flujo de la misma manera que lo hicimos para la espira estática:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 l^2 \cos \varphi = B_0 l^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ahora sustituimos en la Ecuación (2) obteniendo la FEM inducida:

$$\varepsilon_{ind} = \omega B_0 l^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Vemos que este resultado es muy similar a la espira estática en un campo alterno, pero hay que darse cuenta que los mecanismos físicos por los que se produce la FEM son diferentes. El primero era una inducción cambiante sobre una bobina estática, mientras que aquí es la bobina la que se mueve en un campo constante. Lo mismo sucede aquí para el caso donde hay N espiras: se multiplica por N el resultado. Este ejemplo es una forma sim-

plificada de cómo está construido un generador eléctrico, y es por lo que la ley de Faraday fue y es tan importante. Es la base de los mecanismos que producen energía eléctrica.

- Ahora resolvamos el mismo ejemplo pero con lo que aprendimos en este apartado de los medios en movimiento. Hemos dibujado la velocidad y la espira se mueve con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Si queremos calcular la velocidad lineal, debemos definir un \vec{r} (véase la [Figura 9](#)) tal que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Vimos que el campo eléctrico de movimiento se calcula por la [Ecuación \(6\)](#), y aquí será:

$$\vec{E}'_m = \vec{v} \times \vec{B} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = -(\vec{B} \cdot \vec{r})\vec{\omega} = -B_0 x \omega \hat{z}.$$

Ahora sustituimos este valor en la [Ecuación \(7\)](#). Aquí tenemos que darnos cuenta que si \vec{E}'_m es perpendicular a $d\vec{l}$ el valor de la integral para esa contribución de la FEM va a ser cero, es decir, que a la FEM solo contribuyen los lados de la espira paralelos a la velocidad angular. Así que tenemos dos miembros en la integral, el lado de la izquierda y el de la derecha de la espira paralelos a $\vec{\omega}$:

$$\epsilon'_m = \int_{l/2}^{-l/2} -B_0 x_{izq} \omega dz + \int_{-l/2}^{l/2} -B_0 x_{der} \omega dz = B_0 l \omega (x_{izq} - x_{der}).$$

donde nos referimos a x_{izq} como la posición x del lado izquierdo de la espira, y x_{der} como la posición del lado derecho. Este valor de x se puede poner en función del ángulo de la forma $x_{izq} = -1/2l \sin \varphi$, $x_{der} = 1/2l \sin \varphi$, y entonces llegamos a la expresión:

$$\epsilon'_m = \omega B_0 l^2 \sin(\omega t + \alpha).$$

Este es el mismo resultado que encontramos en el punto 1, pero gracias a usar este método aprendimos algo nuevo, que no todo el circuito da origen a una FEM inducida, solo las partes de el que son paralelas a la velocidad angular, y esto es debido a que son las únicas que realizan un trabajo sobre

las cargas.

Ejemplo 7. Generador de dinamo de disco de Faraday

Faraday inventó este aparato que vamos a describir y calcular su FEM inducida. Se tiene un disco de radio R , con una velocidad angular constante ω . El disco se encuentra en el plano xy , dentro de un campo magnético constante perpendicular al plano del disco. Se puede ver en la [Figura 10](#), cómo existen contactos en el origen O y en el punto P con el borde del disco, y cómo se completa el circuito con una resistencia. Como el disco se mueve, tenemos un campo eléctrico del movimiento, donde $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, siendo \vec{r} el vector de posición con respecto al origen:

$$\vec{E}'_m = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = \omega B \vec{r}.$$

El campo está dirigido radialmente hacia afuera. Y la FEM la podemos encontrar con [Ecuación \(7\)](#):

$$\varepsilon'_m = \int_0^P \vec{E}'_m \cdot d\vec{l} = \int_0^R \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B R^2.$$

Si en lugar de hacer girar el disco para obtener una FEM, ponemos una batería al circuito, el disco va a girar, y tendremos lo que se llama un *motor homopolar*.

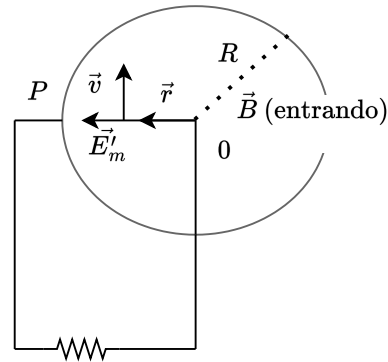


Figura 10: Se muestra el esquema de un generador de dinamo de disco.

7.7 Inductancia

La inductancia es una propiedad geométrica del sistema. Esta propiedad es usada en muchos dispositivos, por ejemplo en el encendido del motor del coche. Estudiaremos dos casos particulares.

Inductancia mutua

Pensemos en la siguiente situación, tenemos dos bobinas. Si están cerca la una de la otra y por una de ellas circula una corriente variable, inducirá una FEM en la bobina adyacente. Este fenómeno entre las dos bobinas se explica mediante la llamada *inductancia mutua*. A su vez, esa corriente variable induce en la propia bobina una FEM. A esta bobina se le llama *inductor*. Y la relación entre la FEM y la corriente viene dada por la llamada *inductancia*. Pongamos esto por escrito en ecuaciones. Consideremos el sistema de la [Figura 11](#).

Tenemos dos bobinas: en la bobina 1 tenemos una corriente i_1 , que crea un campo en ella \vec{B} , y a su vez este campo crea un flujo magnético en la bobina 2, Φ_{B_2} . Ahora si la corriente varía en la bobina 1, se induce una FEM en la bobina 2. Como el flujo magnético es proporcional a la corriente i_1 , también lo será Φ_{B_2} . Si i_1 cambia asimismo cambia Φ_{B_2} . La variación del flujo induce una FEM en la bobina dos ε_2 , que se puede expresar como:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B_2}}{dt}. \quad (8)$$

Como dijimos, existe una relación de proporcionalidad entre i_1 y Φ_{B_2} , que se puede expresar introduciendo una constante M_{21} , llamada *inductancia mutua*:

$$N_2 \Phi_{B_2} = M_{21} i_1, \quad (9)$$

Consideramos aquí Φ_{B_2} , el flujo a través de una sola vuelta en la bobina 2, usando esto tenemos:

$$N_2 \frac{d\Phi_{B_2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Entonces la [Ecuación \(8\)](#) queda:

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Volvamos a la [Ecuación \(9\)](#). A partir de ella, podemos expresar la inductancia mutua como $M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{i_1}$. Observando esta ecuación podemos decir que como el flujo es

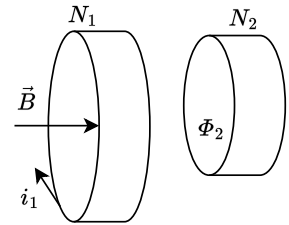


Figura 11: La bobina de la izquierda con corriente i_1 que crea un flujo magnético a través de la bobina de la derecha.

proporcional al cambio de corriente, el valor de M_{21} depende únicamente de la geometría de las bobinas. Si repetimos el ejercicio que acabamos de hacer a la inversa, encontramos que $M_{21} = M_{12}$ que es lo esperado ya que solo depende de la geometría, y por tanto lo podemos llamar M sin índices, y podemos decir que:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B_1}}{i_2}. \quad (10)$$

Las unidades de la inductancia son el *henry* (H). Las equivalencias del henry son:

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ Vs/A} = 1 \Omega \text{ s}.$$

A la hora de diseñar un circuito a veces la inductancia es un inconveniente, por lo que se intenta que sea lo más pequeña posible poniendo las bobinas lejos o perpendiculares la una de la otra. Otras veces es algo conveniente que se quiere tener, como es el caso de los transformadores.

Dejamos aquí estas ecuaciones y cuando enseñemos el potencial vectorial, veremos cómo podemos expresar de una forma más generalizada el resultado que acabamos de obtener para un caso particular.

Ejemplo 8. Bobina de Tesla

Originalmente se usaba como generador de alto voltaje. Se tiene un solenoide enrollado N_1 vueltas, de longitud l , y área transversal A . Una bobina con N_2 vueltas rodea al solenoide en su centro (ver la [Figura 12](#)). Queremos calcular el valor de M . Si por el solenoide circula una corriente i_1 , se produce un campo \vec{B}_1 , que vimos anteriormente que es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}.$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide

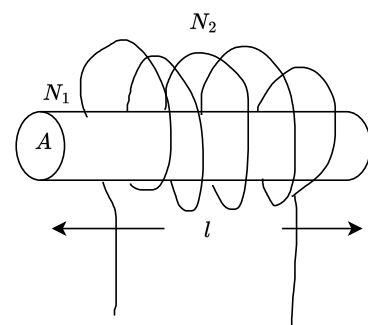


Figura 12: Un solenoide largo con N_1 vueltas está rodeado en su centro por una bobina con N_2 vueltas, esta disposición es un ejemplo de la bobina de Tesla.

de es $\Phi_1 = B_1 A$, recordando que un solenoide muy largo no produce un campo \vec{B} fuera de la bobina, se espera que el flujo que pasa por la bobina exterior sea igual a Φ_1 . Entonces si aplicamos la [Ecuación \(10\)](#):

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 A}{l}.$$

Una vez más vemos que M es un valor geométrico y proporcional al número de espiras $N_1 N_2$. Si ponemos los valores $N_1 = 1000$ vueltas, $N_2 = 20$ vueltas, $l = 0.5$ m, $A = 10 \text{ cm}^2$. El valor numérico es:

$$M = 50 \mu H.$$

Autoinductancia e inductores

Lo que vimos en el apartado anterior puede ocurrir también para un solo circuito. Es lo que vamos a tratar aquí. Si tenemos un circuito donde la corriente varía, se va a producir una FEM inducida, llamada FEM autoinducida, que se opone al cambio del flujo, lo que implica por la ley de Lenz que esa FEM autoinducida se opone al cambio, es decir, ayuda a impedir la variación en la corriente. De forma similar a la que definimos M , podemos definir la llamada autoinductancia L para una bobina con N vueltas y un flujo magnético Φ_B como:

$$L = \frac{N \Phi_B}{i}.$$

La FEM autoinducida, de forma similar a la mutua, se puede expresar como:

$$\epsilon_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Podemos ver que igual que en la ley de Lenz, el signo negativo nos indica que la FEM autoinducida se opone al cambio en la corriente. Los circuitos que se diseñan para producir una autoinductancia se llaman *inductores*.

Ejemplo 9. Solenoide toroidal

Tenemos este solenoide toroidal enrollado con N vueltas, con un área transversal A y un radio R del toroide. Suponemos un campo B uniforme. Queremos calcular la autoinductancia L . Sabemos que el campo magnético en un toroide a una distancia r del eje del mismo es $B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$. El flujo será:

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 N i A}{2\pi R}.$$

Entonces L resulta ser:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}.$$

Sustituimos los valores $A = 0.5 \text{ cm}^2$, $R = 0.1 \text{ m}$, $N = 300$ vueltas, entonces $L = 60 \mu\text{H}$.

7.8 Generadores y motores

Aunque no os hayáis dado cuenta, hemos puesto las piezas básicas para entender el funcionamiento de un generador de electricidad y un motor.

Por último te recomendamos la siguiente vídeo-píldora sobre generadores.



Accede al vídeo: Generadores.

7.9 El efecto Hall

Este efecto fue observado por primera vez por Edwin Hall en 1879. Vio que cuando un conductor que está conduciendo corriente se pone en un campo magnético, se ge-

nera un voltaje en una dirección perpendicular, tanto a la corriente como al campo magnético. Si quieres entender por qué esto sucede, puedes leer este artículo ([Uzcategui, Manuel Antonio Villarreal and Nieto, Gladys Gutiérrez and Barrios, Jesús Ramón Briceño and Sosa, Hebert Elías Lobo and Daboín, Frank, 2020](#)).

7.10 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Tenemos una bobina enrollada de alambre con 200 vueltas. Se encuentra enrollada en un armazón en forma de cuadrado de 20 cm de lado, donde cada vuelta tiene el mismo área del armazón. La resistencia total de la bobina es $2\ \Omega$. Se aplica un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la bobina. El campo va de 0 a $0.5\ \text{Wb/m}^2$ en 0.8 s. Calcula la FEM inducida en la bobina durante la aplicación del campo, e indica cuál es el valor de la corriente producida en ese intervalo. *Solución:* $\varepsilon_{ind} = 5\ \text{V}$, $I_{ind} = 2.5\ \text{A}$.

Ejercicio 2. Tenemos un lazo con un área A , que es atravesado por un campo magnético perpendicular al plano donde se encuentra el lazo, cuyo campo varia de la forma $B = B_0 e^{-bt}$, siendo B_0 en valor del campo inicial, y b una constante. Calcula la FEM inducida en el lazo. *Solución:* $\varepsilon_{ind} = bB_0 A e^{-bt}$.

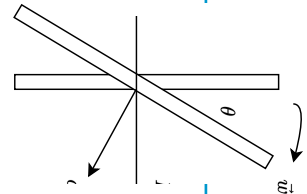
Ejercicio 3. Consideramos el [Ejemplo 5](#) y suponemos los siguientes valores. La longitud $l = 0.1\ \text{m}$, la velocidad $v = 2.5\ \text{m/s}$, el valor del campo $B = 0.5\ \text{T}$, por último la resistencia de la espira, $0.03\ \Omega$. Calcula el valor de la FEM, la corriente inducida y el valor de la fuerza que actúa sobre la varilla en movimiento. *Solución:* $\varepsilon_{ind} = 0.125\ \text{V}$, $i = 4.2\ \text{A}$, $F = 0.21\ \text{N}$.

Ejercicio 4. Vamos ahora a considerar una variación del [Ejemplo 5](#). Supongamos que la varilla tiene una masa m , y una velocidad inicial v_0 en $t = 0$. Recordemos que el campo \vec{B} es perpendicular al plano de la varilla y entrando y la varilla se mueve a la derecha, donde solo le damos una velocidad inicial y la soltamos (suponemos rozamiento cero). Calcula la velocidad de la varilla en función del tiempo, la corriente inducida y la fuerza electromotriz inducida. *Solución:* $v = v_0 e^{-t/\kappa}$, donde $\kappa = mR/B^2 l^2$, $i = \frac{Blv}{R}$, $\epsilon_{ind} = -Blv$.

Ejercicio

5.

Una bobina rectangular de lados L y h , de N vueltas, gira con una velocidad angular constante ω , en un campo \vec{B} uniforme. Calcula el voltaje inducido en la bobina. *Solución:* $\epsilon_{ind} = NBLh\omega \sin \omega t$.

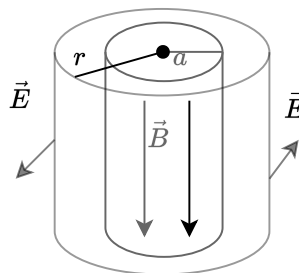


Ejercicio

6.

Tenemos un cilindro en el espacio de radio a . Existe un campo magnético que varía como $d\vec{B}/dt$. Calcular \vec{E} para trayectorias circulares, donde $r > a$.

Solución: $E = -\frac{a^2}{2r} \frac{dB}{dt}$.



7.11 Referencias bibliográficas

Martínez, José Antonio Díaz (2003). Michael Faraday: El encuadernador que revolucionó la ciencia. *Anales de la Real Sociedad Española de Química*, 1, 36–43.

Miranda, Cabildo and del Pilar, María (2017). Efemérides: 150 años de la muerte de un gran genio: Michael Faraday. *Revista 100cias@ UNED, Nueva época*, 10, 200–206.

Uzcategui, Manuel Antonio Villarreal and Nieto, Gladys Gutiérrez and Barrios, Jesús Ramón Briceño and Sosa, Hebert Elías Lobo and Daboín, Frank (2020). El efecto

de Hall en tres tiempos (clásico, cuántico entero y cuántico fraccionario) desde un contexto histórico-experimental. *Latin-American Journal of Physics Education*, 14(3), 8.