

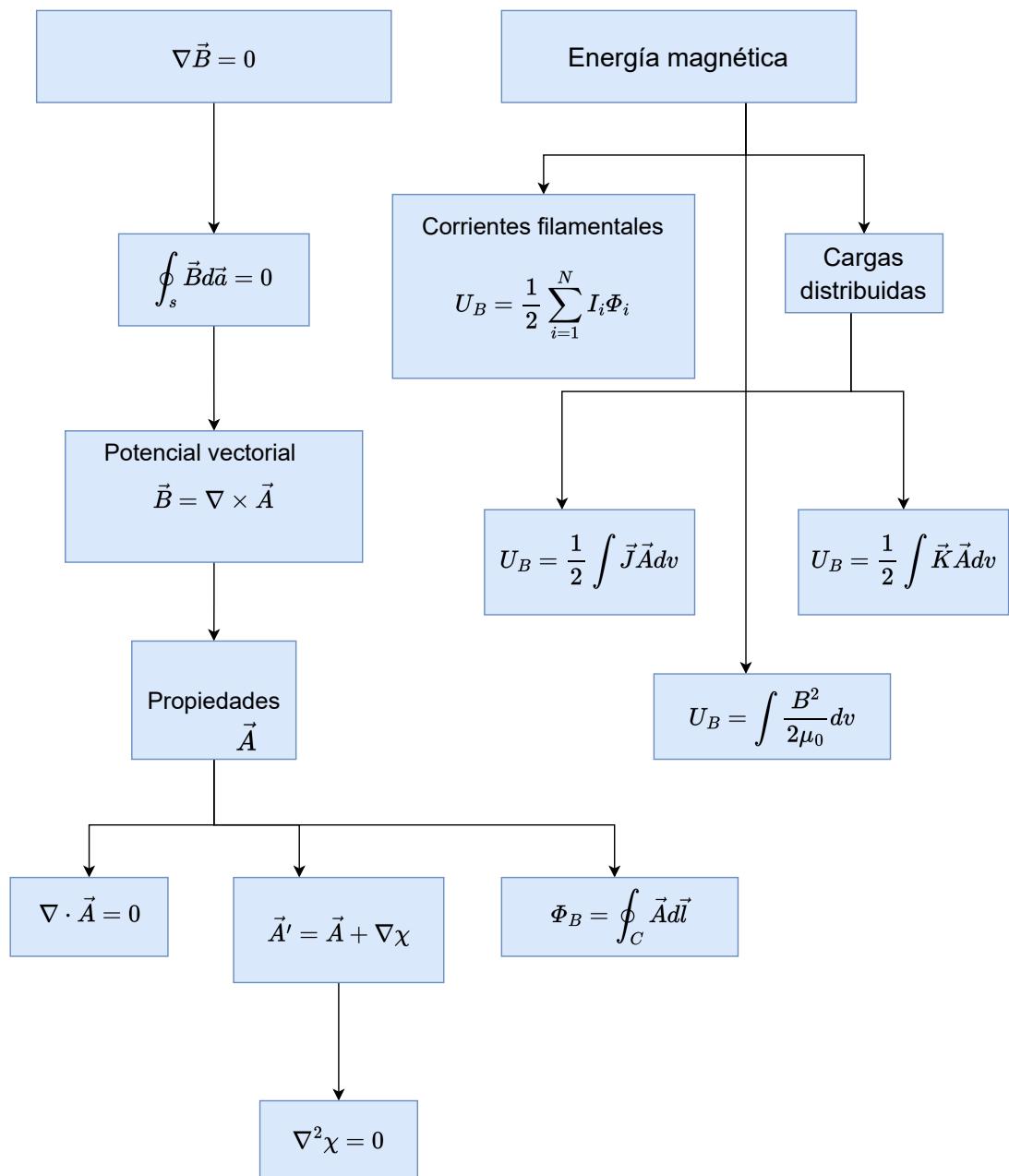
Electromagnetismo I

Potencial vectorial y energía magnética

Índice

Esquema	2
Ideas clave	3
8.1 Introducción y objetivos	3
8.2 El potencial vectorial.	3
8.3 Inductancia	11
8.4 Energía de un sistema de corrientes libres	13
8.5 Energía en función de la inducción magnética.	16
8.6 Multipolos magnéticos	18
8.7 Cuaderno de ejercicios	21
8.8 Referencias bibliográficas	22

Esquema



8.1 Introducción y objetivos

En el caso electrostático hemos definido un potencial escalar y una energía eléctrica del sistema en función del campo \vec{E} . De la misma forma, para el campo \vec{B} , queremos encontrar el potencial del que se origina, y la energía que se encuentra almacenada en los circuitos. Este es el llamado potencial vectorial ([Rozo-Clavijo, Mauricio and Ávila-Torres, Sandra and Walteros-Rodríguez, Angélica and others, 2015](#)). También veremos cómo la inductancia se puede obtener a partir del potencial vectorial.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Entender la definición del **potencial vectorial**.
- ▶ Entender las propiedades del potencial vectorial y cómo se relaciona con el campo \vec{B} .
- ▶ Realizar cálculos del potencial vectorial.
- ▶ Aprender a hacer el cálculo de la **energía magnética** a partir del campo \vec{B} .

8.2 El potencial vectorial

La divergencia $\nabla \cdot \vec{B}$ y su paralelismo con el campo \vec{E}

Para el campo eléctrico \vec{E} estudiamos el valor del rotacional y de la divergencia. Y es lo que falta por investigar respecto al campo magnético \vec{B} . Es aquí en este cálculo donde surge un concepto, es el *potencial vectorial*. Podemos ver la similitud con el potencial escalar que surgió en el caso del campo \vec{E} .

Empecemos por calcular la divergencia del campo $\nabla \cdot \vec{B}$. Para ello recordando la definición de \vec{B} para una corriente filamental tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{(I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \right) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \nabla \cdot \left(\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right).$$

Recordemos aquí que el campo \vec{B} expresado es generado por una distribución de corriente filamental $I_2 d\vec{l}_2$ y calculado en una posición \vec{r}_1 , de manera que $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Aplicando diferentes propiedades vectoriales (que no es el objetivo de este manual desarrollar, se deja como ejercicio), se encuentra a partir de esta expresión que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1)$$

Esto se cumple para cualquier tipo de corriente, no solo las filamentales. Esta ecuación veremos más adelante que es una de las ecuaciones de Maxwell. Comparemos este resultado con el análogo para el campo \vec{E} para ayudarnos con la interpretación, donde $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Recordando que ρ es la densidad neta de cargas y que en el caso magnético se vio que los llamados monopolos magnéticos todavía no se han encontrado experimentalmente, justamente explica por qué la divergencia magnética es igual a cero: porque no tenemos cargas magnéticas similares a las cargas eléctricas.

De la [Ecuación \(1\)](#) se puede obtener directamente la condición de frontera de las componentes normales de \vec{B} , deben satisfacer que son:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = B_{2n} - B_{1n} = 0.$$

Este resultado indica que las componentes normales de \vec{B} siempre son continuas. Otra propiedad que podemos extraer, si aplicamos el teorema de la divergencia, $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$, es:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Esto lo que significa es que la integral del campo \vec{B} a través de cualquier superficie cerrada S va a ser siempre igual a cero. Esto no pasaba en el caso del campo eléctrico, donde las líneas de campo eléctrico que entran en una superficie no tienen porque ser las mismas que salen. A partir de aquí podemos llegar al potencial vectorial. Si

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$, y recordando que la divergencia del rotacional de un vector cualquiera es cero, es decir $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$, podemos expresar \vec{B} como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2)$$

Podremos ver más adelante las similitudes del potencial vectorial con el potencial escalar ϕ . Las unidades de \vec{A} son $1 \text{ weber/metro} = 1 \text{ volt}\cdot\text{segundo/metro}$. Después de hacer unas cuantas transformaciones podemos encontrar que el potencial vectorial \vec{A} producido por una corriente filamental $I_2 d\vec{l}_2$ es:

Definición 1: Potencial vectorial para una corriente filamental

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2}{r_{12}}. \quad (3)$$

Recordemos de nuevo que el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}_1)$ expresado aquí se describe para la posición \vec{r}_1 .

Si tuviéramos corrientes distribuidas se podrían expresar como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V_2} \frac{\vec{J}_2 dV_2}{r_{12}},$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_2} \frac{\vec{K}_2 dS_2}{r_{12}}.$$

De forma análoga, el potencial vectorial para una carga en movimiento se puede expresar como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r_{12}}.$$

Con estas expresiones podemos extraer del campo vectorial, una vez que se ha calculado el campo \vec{B} , como hicimos en planteamientos anteriores de electrostática para el potencial escalar.

Propiedades de \vec{A}

- ▶ Si calculamos la divergencia de \vec{A} encontramos de forma general que:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (4)$$

- ▶ Derivaremos las ecuaciones diferenciales que \vec{A} cumple, lo mismo que hicimos en el caso electrostático será útil hacerlo aquí. Recordemos de capítulos anteriores que $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Usando la relación vectorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$ con la [Ecuación \(4\)](#), si lo sustituimos en el rotacional de \vec{B} , tenemos:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J},$$

es decir, obtenemos la ecuación que dice que:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Si la expresamos en forma de componentes, podemos decir que las componentes del potencial vectorial cumplen la ecuación de Poisson, que la vimos en capítulos anteriores para el potencial escalar:

$$-\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \quad -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \quad -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z.$$

- ▶ Las condiciones de frontera de la componente normal se puede extraer de la [Ecuación \(4\)](#) donde obtenemos que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = A_{2n} - A_{1n} = 0,$$

de manera que las componentes normales de \vec{A} son continuas. Para las componentes tangenciales usando la [Ecuación \(2\)](#), y el límite cuando h va a cero tenemos:

$$\hat{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h \vec{B}) = 0.$$

Lo que indica que el potencial vectorial es continuo, en todas sus componentes

vectoriales, a través de cualquier superficie, es decir:

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

- ▶ El flujo magnético se puede expresar en función de \vec{A} , usando el teorema de Stokes $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$ (siendo \vec{A} cualquier vector):

$$\Phi_B = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (5)$$

- ▶ Recordemos que todas las cantidades que se llaman potenciales tienen cierta ambigüedad, y no se puede definir un valor absoluto, siempre hay un término extra. En el caso del potencial escalar, el término extra era una constante. Veámos qué pasa con el potencial vectorial. Podemos definir un potencial prima como:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi.$$

El término que se añade es el gradiente de un escalar χ , debido a que si recordamos la propiedad vectorial de que el rotacional de un gradiente es igual a cero, $\nabla \times (\nabla \chi(\vec{r})) = 0$, entonces el valor del campo magnético que viene dado por los potenciales \vec{A} y \vec{A}' es el mismo. Veámoslo explícitamente:

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \chi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

Además, si como dijimos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, entonces $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$ también debe cumplirse. Eso implica que:

$$\nabla^2 \chi = 0.$$

Para finalizar, comentar que el potencial vectorial es útil cuando las integrales para el cálculo de \vec{B} resultan muy complicadas. Para \vec{A} son más sencillas, y similares a veces al caso electrostático. Veremos algunos ejemplos del potencial escalar seguidamente para estudiar las propiedades que hemos descrito.

Potencial vectorial en un campo uniforme

Tenemos un campo magnético uniforme en la dirección del eje z . $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Entonces según la [Ecuación \(2\)](#) tenemos:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0.$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver por inspección. Se puede ver que una solución posible es:

$$A_x = 0, \quad A_y = xB_0, \quad A_z = 0.$$

Otra solución posible sería:

$$A_x = -yB_0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Y también otra posible solución es la combinación de las dos soluciones anteriores:

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0, \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0, \quad A_z = 0$$

Esto es un ejemplo de que el potencial vectorial no es único y hay muchas posibilidades. Las propiedades de simetría de \vec{A} van a reflejar, por lo general, la simetría de la distribución fuente. Fíjemonos en la tercera solución que encontramos para la distribución uniforme, $A^2 = A_x^2 + A_y^2 = \frac{1}{4}B_0^2(x^2 + y^2)$, que no es más que la ecuación de una circunferencia, y nos indica que A es perpendicular al eje z . Basado en esto, una forma de expresar esta tercera solución es:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}.$$

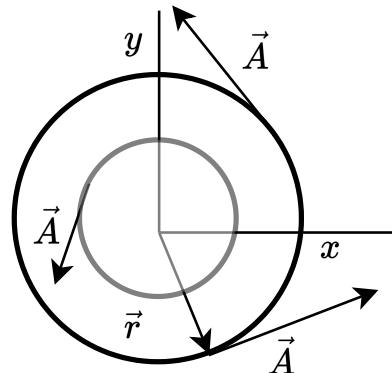


Figura 1: Potencial vectorial que rota alrededor del eje z , que corresponde con un campo magnético uniforme B en la dirección del eje z .

Puede verse en la [Figura 1](#) que el potencial A rota alrededor del eje z . En el caso de

un campo uniforme dentro de un solenoide el potencial vectorial circularía en el sentido de la corriente del solenoide. Si el solenoide tiene una densidad n de vueltas por longitud y circula una corriente I , el campo magnético en su interior es $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ y el potencial vectorial es:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \mu_0 n I r \hat{\varphi}.$$

Ejemplo 1. Corriente recta de longitud finita

En el capítulo donde presentamos el campo \vec{B} , obtuvimos el campo para este caso. Consideremos el mismo caso, [Figura 2](#), un alambre en el eje z , donde tenemos la misma corriente filamental $I_2 dz_2$. Como solo tenemos corriente en el eje z , inmediatamente sabemos que $A_x = 0$, $A_y = 0$. Usando la [Ecuación \(3\)](#), y que $r_{12} = \rho \hat{\rho} - z_2 \hat{z}$ tenemos que:

$$A_z(\rho) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz_2}{(\rho^2 + z_2^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \ln \left(\frac{(\rho^2 + L_2)^{1/2} + L_2}{(\rho^2 + L_1^2)^{1/2} - L_1} \right).$$

Si queremos verificar que el campo \vec{B} que se obtiene del potencial vectorial es el mismo, como \vec{A} solo tiene componente z no nula, \vec{B} solo tendrá componente en la coordenada φ en cilíndricas. Calculémoslo:

$$B_\varphi(\rho) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi \rho} \left(\frac{L_2}{(\rho^2 + L_2^2)^{1/2}} + \frac{L_1}{(\rho^2 + L_1^2)^{1/2}} \right).$$

Fijémonos en que es el mismo campo que habíamos encontrado con el cálculo directo del campo a partir de la integral. Si hacemos el límite cuando el alambre es infinito, tendríamos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln \frac{(4L_1 L_2)^{1/2}}{\rho} \hat{z}.$$

Si hacemos lo mismo que hicimos con una linea infinita para calcular el potencial escalar, donde elegimos un punto conveniente donde el potencial se

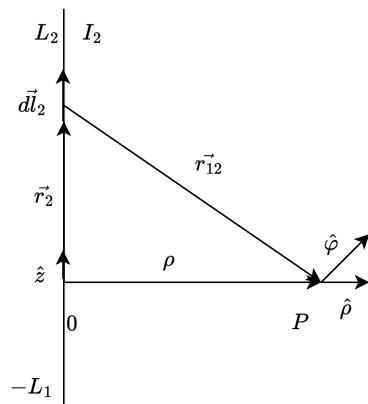


Figura 2: Alambre de longitud finita donde calculamos el potencial vectorial.

haga cero, (fijémonos que con la expresión que obtuvimos, el potencial se hace infinito para una longitud infinita) podemos poner el potencial como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln \frac{\rho_0}{\rho} \hat{z}.$$

Aquí ρ_0 es el lugar donde elegimos que el potencial sea igual a cero.

Ejemplo 2. Solenoide ideal infinitamente largo

Para este caso ya encontramos anteriormente el campo \vec{B} . En este ejemplo usaremos una estrategia diferente para el cálculo del potencial vectorial. Usaremos la [Ecuación \(5\)](#). Tenemos en el solenoide una corriente \vec{K} , y como vimos anteriormente, el potencial \vec{A} sigue la dirección de la corriente. Para entender si tendríamos una componente en la dirección de $\hat{\rho}$, además de la componente en $\hat{\phi}$, podemos observar el [Figura 3](#), y podemos ver que por simetría siempre se va a anular la componente en $\hat{\rho}$. Lo que nos indica esto es que \vec{A} serán círculos en el plano de $\hat{\phi}$ es decir $\vec{A} = A_\varphi \hat{\phi}$.

Pensemos ahora en la dependencia de \vec{A} , como el solenoide es infinitamente largo, no puede depender de z , y tal como vimos, por simetría no podría depender de φ tampoco. Entonces se espera una dependencia en la variable ρ . Usando la [Ecuación \(5\)](#), podemos decir que:

$$\Phi_B = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C A_\varphi \hat{\phi} \cdot \rho d\varphi \hat{\phi} = 2\pi\rho A_\varphi.$$

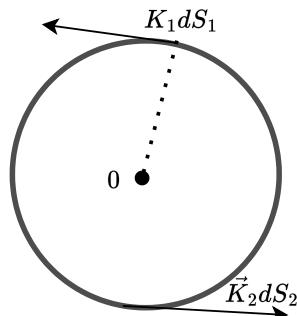


Figura 3: Se muestran dos elementos de corriente situados de forma simétrica, lo que muestra que las únicas componentes que no se anulan entre ellas son las componentes $\hat{\phi}$.

Entonces:

$$A_\varphi = \frac{\Phi_B}{2\pi\rho}.$$

Como la situación es diferente fuera del solenoide, debemos considerar estos dos casos por separado:

- ▶ Dentro del solenoide, $\rho < a$, y vimos anteriormente que B_{in} es uniforme, y $\vec{B}_{in} = \mu_0 n I \hat{z}$, tenemos:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}_{in} d\vec{S} = \mu_0 n I \int_S dS = \mu_0 n I \pi \rho^2.$$

Sustituyendo:

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \mu_0 n I \rho.$$

- ▶ Fuera del solenoide, $\rho > a$, tenemos que $B_0 = 0$. Entonces el flujo encerrado en la superficie es constante, $\Phi_B = \mu_0 n I \pi a^2$, sustituyendo queda:

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{a^2}{\rho} \right).$$

Podemos comprobar que las dos expresiones dan el mismo valor de \vec{A} en la superficie, que muestra una propiedad de continuidad.

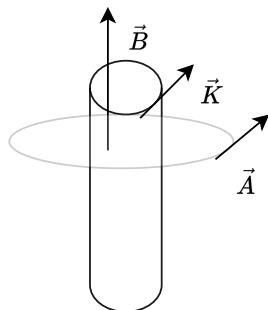


Figura 4: Un solenoide infinito con una densidad de corriente \vec{K} , donde podemos ver el campo \vec{B} y \vec{A} .

8.3 Inductancia

Ahora que vimos la definición del potencial vectorial podemos ver otra forma de expresar la inductancia. Algunas de estas expresiones las usaremos después para definir la energía. Anteriormente vimos la inductancia en función del flujo y la corriente. Aquí daremos una definición más general.

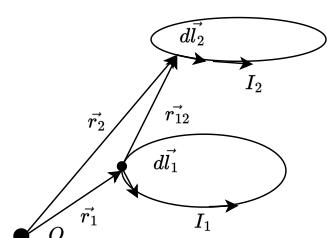


Figura 5: Inductancia.

Empecemos considerando dos circuitos C_1 con su propiedades I_1 , $d\vec{l}_1$, r_1 y C_2 con sus propiedades I_2 , $d\vec{l}_2$, r_2 y el vector de posición relativo entre ellos $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (véase la [Figura 5](#)).

Tenemos un campo B_2 en la superficie L_1 , por eso podemos definir un flujo $\Phi_{2 \rightarrow 1}$. Ese flujo lo podemos poner en función del potencial vectorial, usando la [Ecuación \(3\)](#) como:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \oint_{C_1} \vec{A}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{l}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{12}}.$$

A partir de esta expresión, podemos definir la inductancia mutua, ahora de forma integral:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{12} I_2, \quad (6)$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{12}}. \quad (7)$$

Aquí podemos ver claramente en la [Ecuación \(7\)](#) que el signo de M_{12} puede ser positivo o negativo, según la elección que se haga para los recorridos de C_1 y C_2 . Si recordamos M_{11} con el mismo índice lo llamamos autoinductancia, que de forma integral se puede expresar como:

$$M_{11} = L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}'_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|}.$$

Hacer hincapié aquí que la autoinductancia siempre será una cantidad positiva. Y se puede determinar experimentalmente ([Burstin, Jerry Nathan Reider, 2018](#)). Estas ecuaciones las dejamos como un formalismo para entender un poco mejor el concepto de inductancia, pero el cálculo de las inductancias se hace de forma sencilla, como lo hicimos en el capítulo anterior por medio del flujo mediante la [Ecuación \(6\)](#). Si usamos la [Ecuación \(7\)](#), podemos encontrarnos integrales realmente complicadas.

8.4 Energía de un sistema de corrientes libres

Para corrientes filamentales

Si recordamos cómo calculábamos la energía eléctrica, lo hacíamos en función del trabajo necesario para tener una determinada configuración de cargas. En el caso de la energía magnética, esperaríamos poder hacer un ejercicio similar, donde el trabajo sería el necesario para tener una determinada configuración de corrientes, como veremos en este apartado.

Aquí hay que resaltar que el campo magnético en este caso no tiene una variable similar al caso de la carga en electrostática, pero sí se podrá representar la energía en función del campo magnético, similar a como encontrábamos la energía en función del campo eléctrico.

Para llegar a una expresión de la energía de un sistema de corrientes libres, en particular, de corrientes de conducción, hacemos lo siguiente. Partimos de un sistema con N circuitos. Queremos calcular el trabajo reversible que tenemos que realizar para pasar de una situación en que todas las corrientes son igual a cero, a una situación donde la corriente final del circuito C_i sea I_i . Supongamos una situación intermedia primero, donde la corriente en C_i es i_i . En un tiempo dt se produce un cambio $d\Phi_B$ en el flujo a través de C_i , y también debido a ello una fem inducida, ε_{in_i} . Podemos decir que una determinada carga pasará por el circuito, $dq_i = i_i dt$. Entonces ahora podemos decir que el trabajo realizado por una fuente externa será:

$$dW_{ext_i} = V_{ext} dq_i = -\varepsilon_{in_i} i_i dt = i_i d\Phi_i .$$

Como ya dijimos, este es el trabajo reversible realizado por la fuente externa. Y como vimos también para el caso electrostático, esto es justo la energía magnética. Si queremos poner la contribución de todas las corrientes tenemos que añadir una suma:

$$dU_B = \sum_{i=1}^N i_i d\Phi_i .$$

Si recordamos la [Ecuación \(6\)](#), podemos decir que $d\Phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} di_j$. Al sustituir en

la ecuación anterior tenemos:

$$dU_B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} i_j d i_j .$$

Este diferencial de energía debemos integrarlo. De una forma sencilla, podemos suponer que la corriente i_i es una fracción de la corriente final total I_i , es decir, que $i_i = I_i f(t)$. Esa fracción varía con el tiempo. De la misma forma, $d i_j = I_j d f$, sustituyendo $dU_B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j f d f$. Ahora simplemente tenemos que integrar para obtener la energía magnética. Inicialmente elegimos $U_B = 0$:

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j . \quad (8)$$

Este cálculo lo hemos hecho suponiendo siempre que el proceso es reversible, que pasa de forma lenta, sin cambios bruscos. Usando la [Ecuación \(6\)](#), podemos expresar la energía también en función del flujo como:

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i . \quad (9)$$

Caso de dos circuitos

Consideremos el caso particular de $N = 2$, que será en de mayor interés. Para ello partimos de la [Ecuación \(8\)](#), sabiendo que M_{ii} es la inductancia mutua L_i que definimos en capítulos pasados. Tenemos entonces:

$$U_B = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 .$$

Analicemos qué significan los términos por separado. Vemos que tenemos un término que depende solo del circuito 1, y otro término que solo depende del circuito 2. Podemos decir que este término indica la energía de un solo circuito debido a la autoinductancia del mismo, expresado como:

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 . \quad (10)$$

El otro término que nos queda depende de los dos circuitos, y viene dado por la interacción que se produce entre ambos circuitos que da lugar a una fem inducida.

Para corrientes distribuidas

En el caso de corrientes distribuidas, tomemos la expresión que obtuvimos para expresar la energía magnética en función del flujo [Ecuación \(9\)](#), y expresemos en esa ecuación el flujo en función del potencial vectorial, $\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$. Entonces obtenemos:

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{l}_i I_i .$$

Y sabiendo que el potencial se puede expresar según el tipo de distribución, recordando que $I d\vec{l} = \vec{J} dV = \vec{K} dS$, obtenemos la expresión de la energía magnética para la corriente de volumen como $U_B = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$, donde V es el volumen donde está la corriente, pero como la corriente es igual a cero fuera del volumen, se puede extender la integral a todo el espacio, y la expresión final quedaría sin un volumen límite para la integral:

$$U_B = \frac{1}{2} \int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) dV . \quad (11)$$

De similar manera se obtiene la expresión para corrientes superficiales:

$$U_B = \frac{1}{2} \int \vec{K}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) dS . \quad (12)$$

Si recordamos el caso en electrostática, teníamos la energía $U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$.

Vemos que es en función del potencial ahora también y muy similar.

Ejemplo 3. Solenoide ideal infinitamente largo

Vimos este sistema anteriormente, donde encontramos que su corriente superficial es $\vec{K} = nI\hat{\phi}$ en la superficie exterior, mientras que su potencial vectorial es $\vec{A} = \frac{1}{2}\mu_0 n I R \hat{\phi}$, donde R es el radio del solenoide. Consideremos un trozo de solenoide de longitud l . Usando la [Ecuación \(12\)](#) tenemos que:

$$U_B = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R dS = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \pi l .$$

Si comparamos este resultado con [Ecuación \(10\)](#), podemos decir que la autoinductancia es igual a $L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$, si expresamos el área de la sección como S , $S = \pi R^2$, se puede ver más claro que $L = \mu_0 n^2 l S$, y que L depende básicamente del volumen del solenoide.

8.5 Energía en función de la inducción magnética

Previamente, para electrostática, habíamos visto cómo se puede expresar la energía eléctrica en función de \vec{E} . Ahora, de forma similar, nos interesa una función que exprese la energía magnética en función de \vec{B} . Para ello partimos de la [Ecuación \(11\)](#), y usando que $\vec{J} = (\nabla \times \vec{B})/\mu_0$, tenemos:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} dV .$$

Mediante operaciones vectoriales y aproximaciones que no se harán explícitas aquí, se puede encontrar a partir de la ecuación:

$$U_B = \int \frac{B(\vec{r})^2}{2\mu_0} dV .$$

La integral es a todo el espacio por la misma razón que comentamos anteriormente. Este resultado tiene una forma similar que el caso eléctrico, $U_e = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$. Y de la misma manera, lo que hacemos es integrar una densidad de energía magnética por todo el volumen, que podemos definir como:

$$u_B(\vec{r}) = \frac{B(\vec{r})^2}{2\mu_0} . \quad (13)$$

Las unidades de la densidad deben ser las mismas que para la electromagnética o cualquier definición Joules/m³. Comentar que cuando vimos la formula para la energía eléctrica, fue útil usarla para el calculo de la capacitancia. De forma análoga para el caso magnético, puede usarse para extraer el valor de la inductancia.

Ejemplo 4. Cable coaxial

Sobre el cable coaxial ya hicimos cálculos anteriormente para el caso electrostático. Fijémonos en la figura.

El cilindro interior tiene un radio a , el exterior tiene un radio externo c y un radio interno b . Consideremos que está pasando una corriente I por el cilindro interior, y una corriente $-I$ (en sentido opuesto) por el cilindro exterior. El cable tiene una longitud l .

Queremos calcular la energía magnética usando [Ecuación \(13\)](#). Para ello primero tenemos que calcular el campo. Usaremos la ley de Ampère, que dice $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in}$, como hicimos anteriormente. Aquí una vez mas podemos suponer por simetría que \vec{B} solo tendrá una componente en la coordenada $\hat{\varphi}$. Con la ley de Ampere llegamos a que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi\rho} \hat{\varphi}.$$

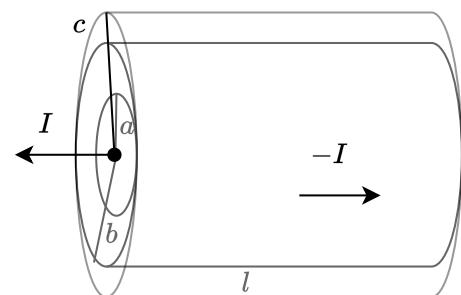


Figura 6: Cable coaxial con corrientes opuestas iguales. Elaboración propia.

A la hora de calcular el I_{in} nos encontramos 4 casos diferentes según el radio ρ . Veámoslos por separado.

1. Cuando $\rho \leq a$, sabiendo que $J = I/\pi a^2$, entonces $I_{in} = J(\pi\rho^2) = I\rho^2/a^2$, así que tenemos que el campo dentro del cilindro interior será:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\varphi}.$$

Para la densidad de energía usamos la [Ecuación \(13\)](#):

$$u_{B_1} = \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4}.$$

La energía total la obtenemos integrando:

$$U_{B_1} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}.$$

2. Cuando $a < \rho \leq b$, $I_{in} = I$, entonces:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad u_{B_2} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2}, \quad U_{B_2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{8\pi^2} \ln(b/a).$$

3. Cuando $b \geq \rho \geq c$, $I_{in} = I - I(\rho^2 - b^2)/(c^2 - b^2) = I(c^2 - \rho^2)/(c^2 - b^2)$, tenemos:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I(c^2 - \rho^2)}{2\pi(c^2 - b^2)\rho} \hat{\phi}, \quad u_{B_3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left(\frac{c^4}{\rho} - 2c^2 + \rho^2 \right).$$

Para la densidad hemos puesto los miembros que dependen de ρ , de una manera que sea fácil integrar para obtener la energía total, aunque como veremos, el resultado será un tanto largo y no simplificable.

$$U_{B_3} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln(c/b) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right).$$

4. Cuando $c < \rho$, $I_{in} = I - I = 0$, lo que indica que $B_4 = 0$, y por tanto, la densidad de energía y la energía también lo serán.

La energía total del sistema será la suma de las energías U_B para cada caso particular. Y si recordamos la [Ecuación \(10\)](#), de nuestro resultado podemos obtener el valor de L . Lo dejamos como ejercicio.

8.6 Multipolos magnéticos

Lo mismo que vimos con detalle en el caso del campo eléctrico, la expansión multipolar eléctrica, se puede hacer en el caso del campo magnético, por eso lo haremos aquí con menos detalle. Debemos recordar que la idea de la expansión multipolar es escribir el potencial en la forma de unas series de potencias de $\frac{1}{r}$, donde r es la distancia al punto P donde queremos calcular el

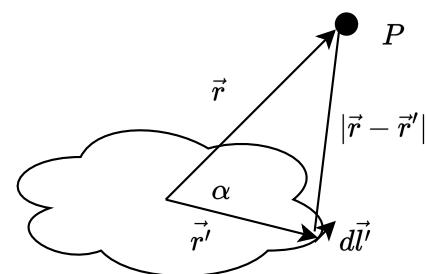


Figura 7: Multipolo.

valor del potencial (véase Figura 7). Si el punto P está lo suficientemente lejos, entonces \vec{r} será tan grande como para que dominen solo los términos de bajo orden de la serie, y los términos de orden más alto los podemos ignorar. Lo que ya encontramos en el desarrollo del caso eléctrico que dice que:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha)^{1/2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \alpha),$$

donde α es el ángulo entre \vec{r} y \vec{r}' , como podemos ver la figura. Usando la expresión anterior, podemos ahora escribir el potencial vectorial como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{r_{12}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint r'^n P_n(\cos \alpha) d\vec{l}'.$$

Aquí cambiamos la notación r_1 y r_2 por r y r' para ser consistente con las expresiones del multipolos eléctricos. Poniendo de forma explícita los términos del desarrollo multipolar para poder analizarlos tenemos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \alpha d\vec{l}' + \frac{1}{r^3} \oint r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) d\vec{l}' + \dots \right].$$

Tal como hicimos con la expansión multipolar de V , vamos a considerar los diferentes términos por separado. El primer término que va con $1/r$ se llama *término monopolar*. El segundo término, que va como $1/r^2$, se llama *dipolo*. Y el tercer término que va como $1/r^3$, *cuadrupolo*.

El primer término, dado que la integral cerrada de un vector de desplazamiento es siempre cero, es decir $\oint d\vec{l}' = 0$, indica que el monopolo magnético es siempre cero. Esto ya lo habíamos visto con la $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Lo que una vez más, indica que no hay monopolos magnéticos. El segundo término, el dipolo magnético, será entonces el dominante:

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \alpha d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}'.$$

Usamos la propiedad que dice que $\oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}' = -\vec{r} \times \int d\vec{S}'$, y definimos el *momento magnético dipolar* como:

$$\vec{m} = I \int d\vec{S}' = I \vec{S}, \quad (14)$$

siendo \vec{S} el vector de área de la integral cerrada. Así que el potencial vectorial dipolar se expresa como:

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (15)$$

Si observamos la [Ecuación \(14\)](#), indica que el momento dipolar es independiente de la elección del origen. En el caso del momento dipolar eléctrico, solo sucede cuando la carga total desaparece. En este caso, como el momento monopolar es siempre cero, es la causa que hace que el momento dipolar sea siempre independiente del origen.

Ejemplo 5. Momento dipolar magnético de un circuito

Queremos calcular el momento dipolar de un circuito en forma de hoja doblada, como se puede apreciar en la [Figura 8](#). Los lados tienen una longitud l , y por el hilo circular una corriente I . Como para calcular el momento dipolar necesitamos usar el área, podemos calcular el momento como la superposición de los dos momentos que se producen en las dos áreas, véase figura. La corriente extra que tenemos (azul en [Figura 8](#)) se cancela debido a que fluye en dirección opuesta en cada parte. Entonces el momento dipolar neto usando [Ecuación \(14\)](#) es:

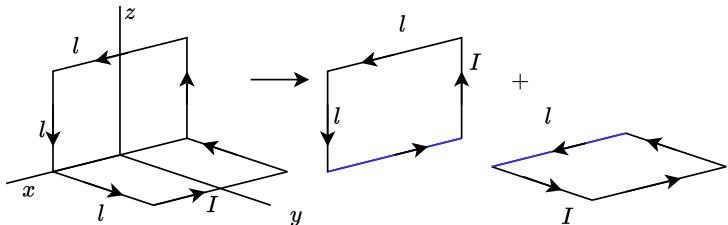
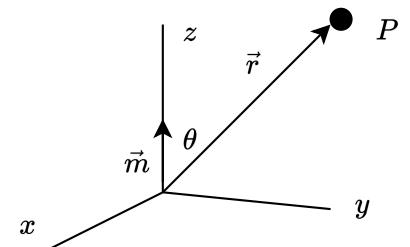


Figura 8: Dipolo magnético.

$$\vec{m} = Il^2 \hat{y} + Il^2 \hat{z}.$$

Sabemos que tenemos otros términos superiores al momento dipolar, aunque no los enunciaremos aquí. El término dipolar domina y será una buena aproximación al potencial real. El campo magnético de un dipolo lo podemos calcular fácilmente. Pongamos \vec{m} en el origen en la dirección positiva de z . En coordenadas esféricas,



si usamos la [Ecuación \(15\)](#):

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}.$$

A partir de aquí es trivial calcular \vec{B} como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}).$$

Recordando el campo de un dipolo eléctrico, podemos decir que es simétrico al caso eléctrico.

Por último, te recomendamos que visualices esta vídeo-píldora sobre el cálculo de la distribución de corriente en el caso de una inducción externa.



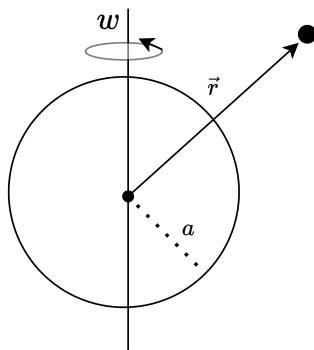
Accede al vídeo: Energía de corriente en una inducción externa.

8.7 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Tenemos un cilindro infinitamente largo, con un radio R , por el que circula una corriente I uniforme y en la dirección positiva del eje z . Se encuentra a lo largo del eje z . Encuentra el valor del potencial vectorial para todo el espacio.
Solución: $A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2}{R^2}$ para $\rho < R$, $A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho}{R} + \frac{1}{2} \right)$ para $\rho > R$. Notar que se trata de una posible solución en la que el origen del potencial vector está en el centro del cilindro.

Ejercicio 2. Un cascarón esférico de radio a , tiene una densidad de carga superficial σ , y se mueve a una velocidad angular w . Calcula el valor del potencial vectorial a una distancia r . Véase el dibujo. Recomendación: poner r en el eje z para hacer la integración. *Solución:* $\vec{A} = \frac{\mu_0 R w \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi}$ para $r \leq R$, $\vec{A} = \frac{\mu_0 R w \sigma}{3} \frac{r \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$

para $r \geq R$.



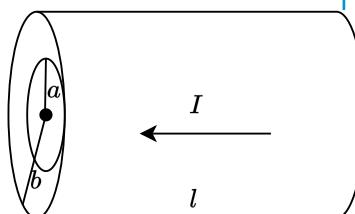
Ejercicio 3. Tenemos un cable conductor con un $R = 1\text{ mm}$ de radio, y $L = 1\text{ m}$ de longitud, por el que circula una corriente de $I = 10\text{ A}$. Calcula la energía magnética total almacenada. *Solución:* $U_B = \frac{\mu_0 I L}{16\pi}$.

Ejercicio 4. Tenemos un solenoide ideal infinitamente largo. Tiene n vueltas por unidad de volumen, y una sección S . Tiene una corriente superficial $K = nI$. Indica cual es la energía de un trozo de solenoide de longitud l . *Solución:* $U_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 S l$.

Ejercicio

5.

Tenemos un cilindro largo, no magnético, de radio b , que tiene un conductor coaxial en su centro de radio a . Circula una corriente I distribuida uniformemente. Calcula la energía magnética relacionada con la inducción en un trozo de longitud l . *Solución:* $U_B = \frac{\mu_0 l}{16\pi(b^2-a^2)} [(b^2-a^2)(b^2-3a^2) + 4a^4 \ln(b/a)]$.



8.8 Referencias bibliográficas

Burstin, Jerry Nathan Reider (2018). Método para la medición de la inductancia bajo condiciones reales de operación. *Pistas Educativas*, 36(112).

Rozo-Clavijo, Mauricio and Ávila-Torres, Sandra and Walteros-Rodríguez, Angélica and others (2015). Sobre el estado electro-tónico y su interpretación: el potencial vectorial. *Revista Científica*, 22(2), 45–56.