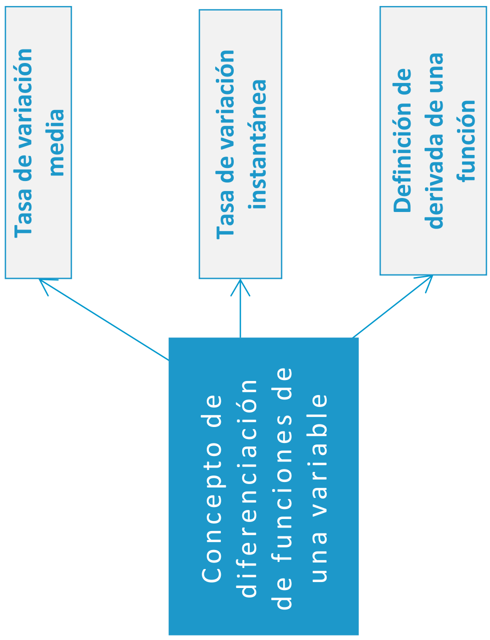
Cálculo

Diferenciación de funciones en una variable

Índice

Esquema


Tasa de variación media
Tasa de variación instantánea
Definición de derivada de una función
Concepto de diferenciación de funciones de una variable

7.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que te presentamos a continuación.

Acto seguido, tendrás que leer las páginas 113-137, correspondientes al capítulo 2 del siguiente libro, disponible en la biblioteca virtual de UNIR:

Robert, A. (2009). *Cálculo* (Portillo, I.) (6 ed.). Madrid: Addison Wesley.

En este capítulo nos centramos en la derivación de funciones de una variable real desde su definición motivada por los siguientes dos problemas clásicos: el problema de la tangente y el problema de la variación instantánea. Analizaremos las distintas reglas para su cálculo en ejemplos prácticos, destacaremos la regla de la cadena y veremos algunos de los teoremas clásicos de la diferenciación de funciones.

El tema terminará con las aplicaciones prácticas de la derivada. Se analizará su uso en la representación y análisis de gráficas de funciones de una variable, finalizará con los problemas de optimización, el método de Newton para aproximar los ceros de una función y una introducción a las diferenciales.

7.2. Un poco de historia

Antes de hablar del concepto de derivada es necesario que hablemos un poco de dónde viene este concepto y de su historia. El bloguero Rubén Selaya dice lo siguiente:

«Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia (s. III a. C.), pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después (en el siglo XVII pro obra de Isaac Newton y Gottfried Leibniz).» Selaya, R., s.f.

Puedes acceder al artículo a través del aula virtual o del siguiente enlace:
http://todosobreladerivada.blogspot.com.es/p/historia-de-la-derivada.html

También expone que, en lo que atañe a las derivadas, existen dos conceptos de tipo geométrico que le dieron origen:

- El problema de la tangente a una curva.
- El teorema de los extremos: máximos y mínimos.

En su conjunto dieron origen a lo que modernamente se conoce como cálculo diferencial.

Las matemáticas perdieron el miedo que los griegos le habían tenido a los infinitos. Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri fueron los primeros en usarlos y empezaron a andar un camino que medio siglo después llevaría al descubrimiento del cálculo infinitesimal.

A mediados del siglo XVII las cantidades infinitesimales fueron cada vez más usadas para resolver problemas de cálculos de tangentes, áreas y volúmenes. Los primeros darían origen al cálculo diferencial, los otros al integral.

Por lo tanto, el concepto de derivada es muy antiguo, pero ¿cómo podemos presentarlo?

A continuación, vamos a ver dos posibles caminos que nos llevan a su introducción.

7.3. El problema de la tangente

Comenzamos con el llamado **problema de la recta tangente,** que es uno de los motivantes principales de la definición de derivada.

Dada una función $y = f(x)$, se busca encontrar la recta tangente en un punto P. Como la recta tiene por ecuación $y = mx + b$ el problema se reduce a hallar la pendiente m de la recta tangente en ese punto. Para resolverlo vamos a considerar un **recta secante**, es decir, una recta que corta a la función en $P = (c, f(c))$, en un punto cercano a P.

Como el valor de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es de la forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tenemos que la pendiente de la recta secante es $m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ (ver figura 1).

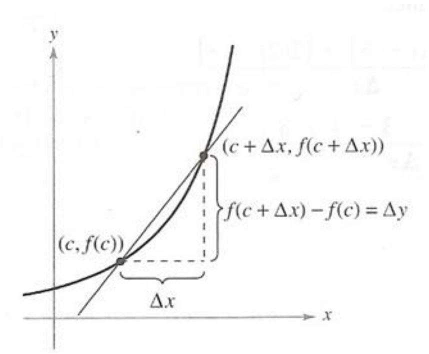


Figura 1. Recta secante que une $(c, f(c))$ con $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$. Fuente: Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 107

Una vez conocemos la recta secante que pasa por los puntos $P = (c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$, la idea para obtener la recta tangente en P es hacer que el intervalo Δx se haga lo más pequeño posible, es decir $\Delta x \to 0$. De esta manera la recta secante se irá aproximando cada vez más a la recta tangente, para llegar a la noción de límite (ver figura 2).

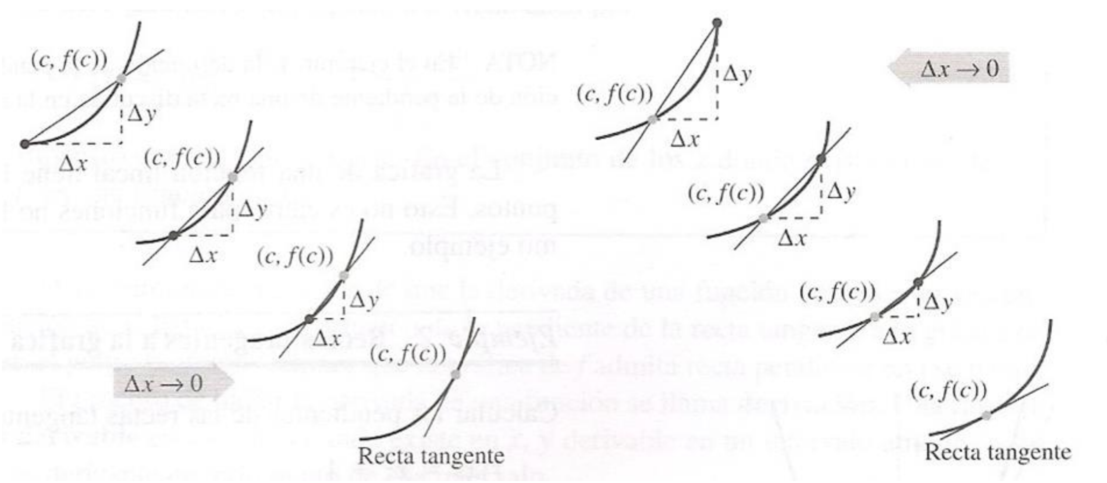


Figura 2. Aproximaciones de la recta tangente. Fuente: Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 108

Si f es una función continua en un intervalo abierto que contenga al punto c, la recta que pasa por el punto $(c, f(c))$, y tiene pendiente $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P = (c, f(c))$.

7.4. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea

Otra alternativa para llegar al concepto de derivada es partiendo de la tasa de variación media de una función f entre los puntos a y b, que se define como al cociente entre la tasa de variación de la función f y la amplitud del intervalo $[a,b]$ considerado sobre el eje de abscisas y se denota por:

$$TV[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación media tiene su equivalente físico en el cálculo de la velocidad media de un móvil considerando la función f a la función posición que depende del tiempo transcurrido.

Ejemplo 1

Calcula la tasa de variación media de la función x^2 en los intervalos *[1,2], [0,2] , [0,5]*:

$$TV[1,2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 - 1^2}{1} = 3$$

$$TV[0,2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2^2 - 0^2}{2} = 2$$

$$TV[0,5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{5^2 - 0^2}{5} = 5$$

Vemos como esta tasa de variación media varía dependiendo del intervalo que tomemos, y que incluso podemos encontrarnos con valores muy dispares considerando una misma función con un intervalo diferente.

Ahora bien, si fijamos el valor de a sustituyendo b por a más una cierta cantidad h, la tasa de variación media se puede definir como:

$$TV[a, a + h] = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si ahora hacemos que esa cantidad h sea cada vez más pequeña, veamos qué ocurre con la tasa de variación media:

Ejemplo 2

Calcula la tasa de variación media de la función x^2 en los intervalos *[1,1.1] [1,1.01] [1,1.001] [1,1.0001]*

$$TV[1,1.1] = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$$

$$TV[1,1.01] = \frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1} = \frac{1.01^2 - 1^2}{0.01} = 2.01$$

$$TV[1,1.001] = \frac{f(1.001) - f(1)}{1.001 - 1} = \frac{1.001^2 - 1^2}{0.001} = 2.001$$

$$TV[1,1.0001] = \frac{f(1.0001) - f(1)}{1.0001 - 1} = \frac{1.0001^2 - 1^2}{0.0001} = 2.0001$$

Vemos como a medida que el intervalo se va concentrando en un único punto, la tasa de variación se va estableciendo cada vez más cerca del 2.

Y esto nos lleva al segundo concepto que necesitamos antes de poder definir el concepto de derivada que es el de tasa de variación instantánea:

$$TVI = \lim_{h \to 0} TV[a, a + h] \ = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Volviendo a la visión física de la tasa de variación, la tasa de variación instantánea es equivalente a la velocidad instantánea de un móvil en un momento dado.

7.5. La derivada

LLegamos, por tanto, a la definición de una de las dos operaciones fundamentales del cálculo, la derivada o diferenciación de una función.

Definición 1

La derivada de f con respecto a x viene dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, suponiendo que este límite existe.

La derivada $f'(x)$ es de hecho una función en los puntos donde el límite de la definición existe, es decir, es una función en todos los puntos en los que se puede definir la recta tangente a $f(c)$.

Hay numerosas maneras de escribir la derivada $f'(x)$, $y', D_x[y]$, etc., una de las más comunes es la llamada **formulación de Leibnitz** $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}f(x)$.

Ejemplo 3

Calcular la derivada de las siguientes funciones usando la definición 1:

- $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x$$

- $g(x) = 3x - 5$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-5-(3h-5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3hx}{h} = \lim_{h\to 0}3x = 3x$$

- $h(x) = 2/x$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{2}{x^2}$$

Si tomamos $\Delta x = x - c$, podemos definir la derivada en un punto $x = c$ de la siguiente forma (ver figura 3): $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

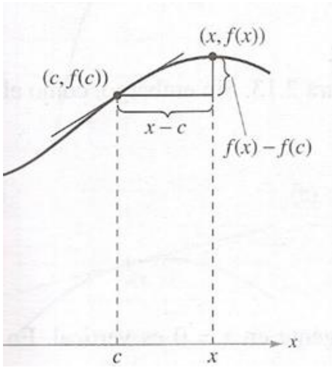


Figura 3. La recta secante se acerca a la recta tangente cuando $x \to c$ tangente. Fuente: Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 112

Ejemplo 4

Calcular la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado:

- $f(x) = x2 \text{ en } x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{1^2 - x^2}{1 - x}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim_{x \to 1} (1 + x) = 2$$

- $g(x) = 3x - 5 \text{ en } x_0 = 0$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(0) - g(x)}{0 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{-5 - (3x - 5)}{-x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-5 - 3x + 5}{-x} = \lim_{x \to 0} \frac{-3x}{-x} = 3$$

- $h(x) = 2/x \text{ en } x_0 = 2$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{g(2) - g(x)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2}{2} - \frac{2}{x}}{2 - x}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x - 4}{2x}}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Esta expresión es equivalente a la definición 1 (obsérvese que $\Delta x \to 0$ es equivalente a que $x \to c$) y permite analizar de manera más cómoda la relación entre la diferenciación y la continuidad. Podemos definir las **derivadas laterales**, por la izquierda y por la derecha, por medio de los límites laterales:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Tenemos la siguiente relación entre la diferenciabilidad y la continuidad de una función.

Teorema 1

Si f es derivable en $x = c$ entonces f es continua en $x = c$.

El recíproco de este resultado no es cierto. Pueden existir funciones que sean continuas, pero no diferenciables como demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

La función $f(x) = |x - 2|$ es una función continua en todo $x \in \mathbb{R}$ (ver figura 4).

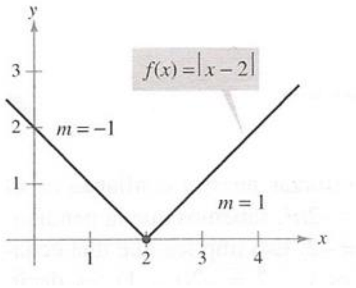


Figura 4. $f(x)$ no es derivable en $x = 2$. Fuente: Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B., 2002, p. 113

Sin embargo, la función no es diferenciable en $x = 2$, ya que los límites:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1$$

No coinciden.

De hecho se observa de manera gráfica que si consideramos el método de las rectas secantes, en $x = 2$ la recta tangente que obtenemos si nos aproximamos por la izquierda no coincide con la que obtenemos al aproximarnos por la derecha.

Derivadas de orden superior

Si calculamos la derivada de una función f obtenemos una nueva función f', si continuamos el proceso y derivamos de nuevo f' obtenemos $(f')' = f''$, y así sucesivamente. El ejemplo clásico en física de esta derivación sucesiva viene dado cuando tenemos una función $s(t)$ que representa la posición de un objeto en función del tiempo t. En este caso la primera y segunda derivadas de $s(t)$ se interpretan como la velocidad $v(t) = s'(t)$ y la aceleración $a(t) = v'(t) = s''(t)$ del objeto en función del tiempo respectivamente.

En general, estas derivadas son ejemplos de **derivadas de orden superior** que se denotan como:

$$y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots \text{ o bien } f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots \text{ o bien } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}, \ldots \text{ etc.}$$

Reglas de derivación

El siguiente cuadro resume las reglas de derivación:

REGLAS DE DERIVACIÓN	
Sean f, g y u funciones derivables de x y $c \in \mathbb{R}$.	
Reglas del múltiplo constante	$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$
Regla de la suma o diferencia	$\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$
Regla del producto	$\frac{d}{dx}[fg] = fg' + fg'$
Regla del cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{fg' - fg'}{g^2}$
Regla de la constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$
Regla (simple) de las potencias	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
Regla de las funciones trigonométricas	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = cos\ x,$ $\frac{d}{dx}[sec\ x] = sec\ x\ tg\ x$
	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -sen\ x,$ $\frac{d}{dx}[cot\ x] = -cosec\ x\ cotg\ x$
	$\frac{d}{dx}[tg\ x] = sec^2\ x,$ $\frac{d}{dx}[cotg\ x] = -cosec^2\ x$

Tabla 1. Reglas de derivación. Fuente: elaboración propia

Ejercicio: Usando la definición 1 demostrar las derivadas de la tabla anterior.

7.6. Referencias bibliográficas

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2002). *Cálculo I*. (7 ed.) Madrid: Houghton Mifflin.

Selaya, R. (s.f.). Historia de la Derivada [Mensaje de un blog]. Recuperado de: http://todosobreladerivada.blogspot.com/p/historia-de-la-derivada.html