Teoría de campos

# El problema de los dos cuerpos

# Índice

# Esquema

Ecuaciones del movimiento

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, m_1 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

Ecuación de la trayectoria

$$-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = \mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \mu\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$r = \frac{L^2/G(M+m)\mu^2}{1 + \frac{CL^2}{\mu^2 G(M+m)}\cos\theta}$$

Movimiento del centro de masas

$$\vec{F}_{ext} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}$$

Velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{cte}$$

Tipos de trayectorias

$$E = \frac{GMm}{2r_0}(e-1)$$

Masa reducida

$$\vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Órbitas elípticas

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Área de una elipse

$$A = \pi ab$$

Conservación del momento angular

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{r} = 0$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

Período orbital

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}$$

Coordenadas polares

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

Cónicas en coordenadas polares

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta}$$

# Ideas clave

## 10.1 Introducción y objetivos

En este tema veremos, por primera vez, una aplicación de la importantísima segunda ley de Newton, formulando las ecuaciones, primero, en general, para un campo de fuerzas central, y seguidamente, a la ley de gravitación universal. Estudiaremos el problema de los dos cuerpos, que es resoluble con exactitud, y que, por la tercera ley de Newton, se reduce al problema de un solo cuerpo. Veremos cómo la conservación del momento angular, por las simetrías del problema, conduce a que el problema se restrinja a un plano, por lo que introduciremos la velocidad y la aceleración en coordenadas polares. Finalmente, resolveremos la ecuación diferencial de segundo orden para la ley de gravitación universal y obtendremos la confirmación de las leyes empíricas de Kepler, enunciadas en un capítulo anterior.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Saber plantear las **ecuaciones del movimiento** y aplicar la tercera ley de Newton, para fuerzas centrales.
- Saber separar el movimiento del **centro de masas** del movimiento relativo de los dos cuerpos.
- Entender el concepto de **masa reducida**.
- Conocer la ley de **conservación del momento angular** para campos de fuerzas centrales.
- Saber obtener la velocidad y la aceleración en **coordenadas polares** para un movimiento restringido a un plano.
- Conocer la expresión y la deducción de la **ecuación de las cónicas**, en particular de la elipse, en coordenadas polares.

- Saber obtener la ecuación del movimiento y deducir a partir de ella la **ecuación de la trayectoria**.
- Entender el concepto de **velocidad areolar** y saber deducirlo para el caso general de campos de fuerzas centrales.
- Saber **clasificar las trayectorias**, para un movimiento que obedezca la ley de gravitación universal, y la relación entre la energía y la excentricidad.
- Entender cómo se obtienen los valores de los parámetros que caracterizan una **órbita elíptica**.
- Saber deducir el **período orbital** de una órbita elíptica.
- Entender la demostración de la fórmula del **área de una elipse**.

## 10.2 Ecuaciones del movimiento

Vamos a estudiar el problema de los dos cuerpos en un campo de fuerzas centrales. Posteriormente estudiaremos el caso particular de que el campo de fuerzas sea el correspondiente al campo gravitatorio, que, como hemos visto en el tema anterior, depende inversamente del cuadrado de la distancia entre los centros de los cuerpos. Sea $\vec{F}_{12}$ la fuerza que el cuerpo 2, de masa $m_2$ ejerce sobre el cuerpo 1, de masa $m_1$, y $\vec{F}_{21}$ la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la de acción y reacción, y por tratarse de fuerzas centrales, ambas fuerzas son iguales, en módulo, y de sentidos opuestos, esto es:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \,. \tag{1}$$

Ahora aplicamos la ley del movimiento, la segunda ley de Newton, a ambos cuerpos, resultando:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \,, \tag{2}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \,. \tag{3}$$

En principio lo que tenemos es dos cuerpos en movimiento, por lo que para describir las condiciones iniciales del sistema necesitamos de 12 cantidades, 6 que especifiquen el vector de posición y la velocidad del primer cuerpo y otras 6 que especifiquen el vector de posición y la velocidad del segundo cuerpo. Como veremos, las simetrías del problema, y sus correspondientes leyes de conservación, reducirán estos grados de libertad a solamente 2.

## 10.3 Movimiento del centro de masas

Puesto que las fuerzas del campo de fuerzas central, por ser centrales, obedecen la tercera ley de Newton, la Ecuación (1), y suponiendo que no hay otras fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, entonces es conveniente considerar el sistema del centro de masas. La posición del centro de masas $\vec{R}$, en función de la posición de los cuerpos, se define como:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \,. \tag{4}$$

La velocidad del centro de masas $\vec{V}$ se obtiene derivando respecto del tiempo:

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \,, \tag{5}$$

donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades de los cuerpos 1 y 2 respectivamente. La ecuación del movimiento para el centro de masas rezará:

$$\vec{F}_{ext} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM} \,, \tag{6}$$

donde $\vec{a}_{CM}$ es la aceleración del centro de masas. Como suponemos que no hay fuerza exterior neta, entonces el movimiento del centro de masas es a velocidad constante, es decir, o bien está en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme. Dado que ya conocemos el movimiento del centro de masas, podemos emplear esta información para simplificar el problema. Para ello definimos la posición relativa $\vec{r}$ como:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,. \tag{7}$$

Ahora empleamos la Ecuación (4) y la Ecuación (7) para despejar $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de la posición del centro de masas $\vec{R}$ y la posición relativa $\vec{r}$. Para ello reordenamos la Ecuación (4) quedando:

$$\left(m_1 + m_2\right)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\,. \tag{8}$$

Ahora multiplicamos la Ecuación (7) por $m_2$:

$$m_2\vec{r} = m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2\,. \tag{9}$$

Sumamos la Ecuación (8) y la Ecuación (9), con lo que se cancela el término que va con $\vec{r}_2$ y resulta:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}\,. \tag{10}$$

Para obtener $\vec{r}_2$ en función de la posición del centro de masas y de la posición relativa sustituimos la Ecuación (10) en la Ecuación (7), resultando:

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\,. \tag{11}$$

De la Ecuación (10) y la Ecuación (11) deducimos, que puesto que se conoce el movimiento del centro de masas, es decir, $\vec{R}$ como función del tiempo, el problema se simplifica a hallar $\vec{r}$, es decir, la posición relativa.

## 10.4 Masa reducida

Vamos a demostrar ahora que el movimiento de dos cuerpos en un campo de fuerzas central se reduce al problema de un solo cuerpo, cuya masa es la masa reducida del sistema y cuya distancia al centro de fuerza es la distancia relativa entre ambos cuerpos. Para ello restamos miembro a miembro la Ecuación (2) y la Ecuación (3):

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \,. \tag{12}$$

Ahora aplicamos la tercera ley de Newton, la Ecuación (1):

$$\vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \,. \tag{13}$$

De esta ecuación resulta

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12} \,, \tag{14}$$

donde: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida del sistema. Es decir, que el resultado que hemos obtenido es que el sistema de dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ y de posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente, que interactúan mediante un campo de fuerzas central se puede reducir a un sistema de un solo cuerpo, cuya masa es la masa reducida $\mu$ y cuya distancia al centro de fuerzas es la distancia relativa entre los dos cuerpos originales $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, conforme a la Ecuación (14). Veamos ahora dos casos límite:

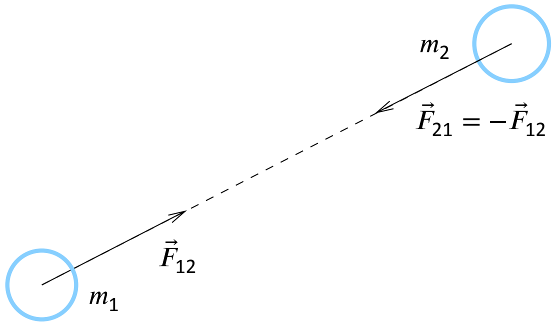

Figura 1: Interacción entre dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ con fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ que obedecen al principio de acción y reacción $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Fuente: elaboración propia.

1. Que la masa de uno de los cuerpos $M$ sea mucho mayor que la masa del otro cuerpo $m$, es decir, $M \gg m$ (tal es el caso de los planetas con respecto al sol o de los satélites, naturales o artificiales, con respecto a un planeta). En tal caso la masa reducida es aproximadamente igual a la masa del cuerpo de menor masa:

$$\mu = \frac{M \cdot m}{M + m} \simeq \frac{M \cdot m}{M} = m \,. \tag{15}$$

2. Que las dos masas sean iguales. En tal caso la masa reducida es justo la mitad de la masa de una cualquiera de ella

$$\mu = \frac{m \cdot m}{2m} = \frac{m}{2} \,. \tag{16}$$

Para otro planteamiento del problema puede consultarse (Feynman, 1967).

## 10.5 Conservación del momento angular

Como se trata de un campo de fuerza central el que estamos estudiando resulta que este posee simetría esférica. Es decir, la dinámica del sistema no cambia si realizamos rotaciones respecto a un eje que pase por el centro de fuerzas. De esta simetría (como demostraremos con el teorema de Noether en mecánica analítica) se desprende la conservación del momento angular.

Otra forma de ver la conservación del momento angular es hallar el momento de la fuerza central, cuya forma más general es $\vec{F} = f(r)\vec{r}/r$, respecto al centro de fuerzas. El momento de la fuerza es el producto vectorial de $\vec{r}$ y la fuerza:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{r} = 0\,. \tag{17}$$

Como el momento de la fuerza (respecto al centro de fuerzas) se anula, se sigue que el momento angular $\vec{L}$ se conserva:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \mathrm{cte}\,. \tag{18}$$

Con la simplificación de los apartados anteriores, que nos permitía reducir el problema de dos cuerpos a un problema de un solo cuerpo, cuya masa es la masa reducida y cuyo vector de posición es la posición relativa, el momento angular se expresaría:

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \vec{v}\,. \tag{19}$$

Ahora vamos a mostrar otra de las simplificaciones, resultado de esta simetría esférica del problema que conduce a la conservación del momento angular. Para ello tenemos que recordar una propiedad del producto mixto (producto escalar combinado con producto vectorial), que es:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\,. \tag{20}$$

Ahora tomemos el producto $\vec{r} \cdot \vec{L}$:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \mu \vec{r} \cdot \left( \vec{r} \times \vec{v} \right) = \mu \vec{v} \cdot \left( \vec{r} \times \vec{r} \right) = 0 \,. \tag{21}$$

Como el producto escalar del vector posición relativa y el momento angular es cero, eso implica que ambos vectores son perpendiculares. Y como el momento angular respecto al centro de fuerzas se conserva, es decir, es un vector constante, resulta que el vector posición es siempre perpendicular a una dirección del espacio (la del momento angular) por lo que yace en un plano. Esta clave de la susodicha simplificación. Ahora el problema de los dos cuerpos en el espacio tridimensional se reduce al problema de un solo cuerpo en un plano. Este hecho revela que las coordenadas polares son las más convenientes para la descripción del problema.

## 10.6 Coordenadas polares

Por convención, pero sin pérdida de generalidad, supondremos que el movimiento transcurre en el plano $xy$, mientras que el eje $z$ es el del momento angular. En coordenadas polares, ver Figura 2:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \,. \tag{22}$$

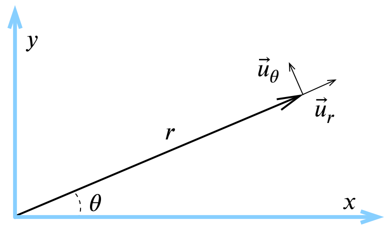

Figura 2: Coordenadas polares. Elaboración propia.

El vector posición se escribe:

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \,, \tag{23}$$

donde $r$ es el módulo del vector y el vector unitario:

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \,. \tag{24}$$

Derivamos ahora la Ecuación (23) respecto al tiempo para obtener la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\vec{u}}_r = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \,, \tag{25}$$

donde hemos usado $\dot{\vec{u}}_r = \left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Derivamos ahora la Ecuación (24) para obtener la aceleración en coordenadas polares:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta\,, \tag{26}$$

donde hemos usado la regla de la derivada del producto. Ahora bien, ya sabemos que $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ y tenemos:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \left(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right)\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_r\,, \tag{27}$$

con lo que la Ecuación (26) queda:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\,. \tag{28}$$

Por último, te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre coordenadas polares:

Accede al vídeo: Aceleración en coordenadas polares.

## 10.7 Cónicas en coordenadas polares

Según vimos, las trayectorias de los planetas en el sistema solar eran elipses (según la primera ley de Kepler), con uno de sus focos en el Sol. En general, veremos que la solución de la segunda ley de Newton, cuando se aplica un campo de fuerzas central que obedezca la ley de gravitación universal, es una cónica, que puede ser una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola.

La solución de la segunda ley de Newton, con la aceleración en coordenadas polares y la ley de gravitación universal, será una cónica, que vendrá expresada en coordenadas polares. Por ello, es conveniente detenerse a deducir la forma de las cónicas en coordenadas polares. Primero nos centraremos en el caso de la elipse, que se visualiza en la Figura 3. La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los dos ejes es una constante (que es el doble del semieje mayor):

$$r' + r = 2a\,. \tag{29}$$

Aplicando la definición en coordenadas cartesianas se obtiene la ecuación para una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{30}$$

Para obtener la ecuación en coordenadas polares aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r'^2 = r^2 \sin^2\theta + (2ae + r\cos\theta)^2\,. \tag{31}$$

Ahora aplicamos la relación trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, resultando:

$$r'^2 = r^2 + 4ae(ae + r\cos\theta)\,. \tag{32}$$

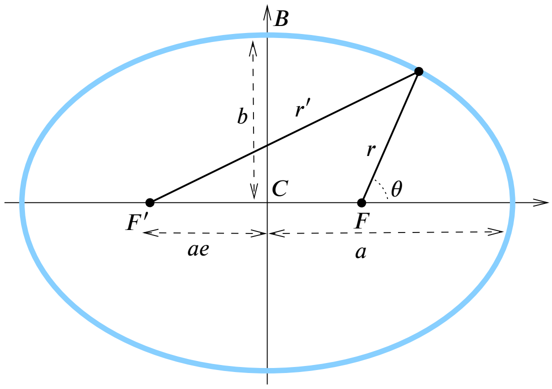


Figura 3: Elipse con los focos $F'$ y $F$ y los radiovectores $r'$ y $r$. Se puede apreciar en la figura el semieje mayor $a$, el semieje menor $b$ y la definición de excentricidad, como cociente entre la distancia de un foco al origen $c$ y el semieje mayor $e = c/a$. Elaboración propia.

Introducimos la Ecuación (29), quedando:

$$(2a - r)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4ae(ae + \cos\theta)\,. \tag{33}$$

Simplificando resulta:

$$a^2 - (ae)^2 = ar(1 + e\cos\theta)\,. \tag{34}$$

Y despejando la $r$ se obtiene:

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta}\,, \tag{35}$$

que es la ecuación de la elipse en coordenadas polares.

## 10.8 Ecuación de la trayectoria

Ya estamos en disposición de obtener e interpretar la ecuación de la trayectoria. Para ello, hacemos uso de la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \mu \vec{a} \,, \tag{36}$$

donde la fuerza es la de la gravitación universal:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \,, \tag{37}$$

y la aceleración viene dada por la Ecuación (28). Resulta, pues, la ecuación diferencial:

$$-G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r = \mu \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + \mu \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \vec{u}_\theta \,, \tag{38}$$

que puede descomponerse en:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G \frac{M + m}{r^2} \,, \tag{39}$$

y:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \,. \tag{40}$$

Donde hemos usado que $Mm/\mu = M + m$.

Como ya vimos, al tratarse de un campo de fuerzas centrales, el momento angular se conserva. Haciendo uso de la expresión de la velocidad en coordenadas polares, la Ecuación (25), resulta:

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu \vec{r} \times \left( \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \right) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \,, \tag{41}$$

de donde se obtiene:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \,. \tag{42}$$

Combinando la Ecuación (42) y la Ecuación (39) podemos obtener la ecuación de la trayectoria, como $r = f(\theta)$, es decir, el radiovector en función del ángulo polar. Para ello, realizamos las siguientes transformaciones, empleando la regla de la cadena:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{43}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{44}$$

Sustituimos la Ecuación (44) en la Ecuación (39), resultando:

$$-\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -G\frac{M+m}{r^2}. \tag{45}$$

Para resolverla, hacemos el cambio de variables $u = 1/r$, obteniéndose:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G(M+m)}{L^2}\mu^2. \tag{46}$$

Hacemos el nuevo cambio de variable $z = u - G(M+m)\mu^2/L^2$, reduciéndose a:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0. \tag{47}$$

La solución a esta ecuación es de la forma $z = C\cos\left(\theta - \theta_0\right)$. Deshacemos los cambios de variable y escogemos el eje polar de tal modo que $\theta_0 = 0$. Resulta entonces:

$$\frac{1}{r} = \frac{G(M+m)}{L^2}\mu^2 + C\cos\theta. \tag{48}$$

Y despejando $r$ resulta:

$$r = \frac{L^2/G(M+m)\mu^2}{1 + \frac{CL^2}{\mu^2 G(M+m)}\cos\theta}, \tag{49}$$

que es la ecuación de una cónica: circunferencia, elipse, hipérbola o parábola, cuyo foco es el centro de masas del sistema formado por los dos cuerpos. Con este hemos visto el primer ejemplo de resolución exacta de la segunda ley de Newton. Hemos visto también que la ley de gravitación universal reproduce la primera ley de Kepler, que enunciaba que las trayectorias de los planetas en el sistema solar son elipses, con el Sol ocupando uno de los focos.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre la trayectoria para la ley de gravitación universal:

Accede al vídeo: Ecuación de la trayectoria para la ley de gravitación universal.

## 10.9 Velocidad areolar

Vamos a comprobar ahora que la ley de gravitación universal también reproduce la segunda ley de Kepler, que afirmaba que la velocidad de barrido de área del radiovector de un planeta es constante, o en otras palabras, que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales.

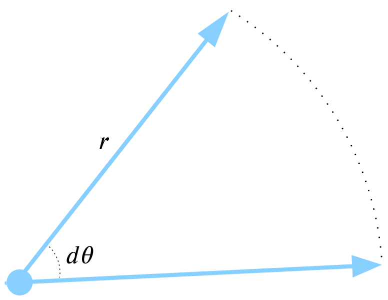

Figura 4: Barrido de área del radiovector de un planeta. Elaboración propia.

Para ángulos pequeños, el arco de la Figura 4 se puede aproximar por un triángulo. De esa manera, el área $dA$ será un medio del producto del radiovector $r$ por la longitud del arco, que es igual al producto del radiovector por el ángulo $d\theta$:

$$dA = \frac{1}{2} r\,(r d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta \,. \tag{50}$$

Y dividiendo por el diferencial de tiempo resulta, para la velocidad areolar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \,. \tag{51}$$

Ahora bien, como se conserva el momento angular, cuyo valor ya sabemos que es $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ resulta evidente la constancia de la velocidad areolar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{cte} \,. \tag{52}$$

## 10.10 Tipos de trayectorias

Supongamos que se lanza un cohete hasta la altura $r_0$ en la que tiene una velocidad $v_0$ paralela a la superficie terrestre, es decir, una velocidad transversal en ese punto. Tomamos la recta que pasa por el centro de la Tierra y ese punto como eje polar, en el que $\theta = 0$ y por tanto $\cos 0 = 1$. Entonces, de acuerdo con la Ecuación (48) resulta para la constante $C$:

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{G(M+m)}{L^2}\mu^2 . \tag{53}$$

En el punto citado la velocidad es $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$ y, por tanto, el momento angular es:

$$L = \mu r_0^2\dot{\theta}_0 = \mu r_0 v_0 . \tag{54}$$

La excentricidad, que deducimos de la Ecuación (35), resulta:

$$e = \frac{CL^2}{\mu^2 G(M+m)} = \frac{L^2}{\mu^2 G(M+m)}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{G(M+m)}{L^2}\mu^2\right) . \tag{55}$$

Sustituyendo en esta última ecuación la Ecuación (54), resulta:

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{G(M+m)} - 1 . \tag{56}$$

La energía total del satélite es:

$$E = U_0 + T_0 = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{\mu v_0^2}{2} . \tag{57}$$

Despejamos ahora $v_0^2$ de la Ecuación (56) y utilizamos la ecuación de una parábola:

$$E = \frac{GMm}{2r_0}(e-1) . \tag{58}$$

Vemos, pues, que hay una relación entre la energía y la excentricidad de la órbita. Estudiemos los casos:

- Órbita **circular**. En este caso la excentricidad es cero $e = 0$ y la energía es por tanto negativa $E = -GMm/2r_0$, y es la mínima posible.

- Órbita **elíptica**. En este caso la excentricidad está comprendida entre cero y uno $0 < e < 1$. La energía también es negativa y está comprendida entre el valor de la energía mínimo para la órbita circular y cero.

- Órbita **parabólica**. La excentricidad es igual a uno $e = 1$. La energía es cero. Este caso corresponde al de un proyectil que ha sido lanzado con la velocidad de escape y alcanza el infinito con energía cinética cero.

- Órbita **hiperbólica**. La excentricidad es mayor que uno $e > 1$. Corresponde al caso de un proyectil que es lanzado con una velocidad mayor que la de escape y alcanza el infinito con una velocidad positiva. Las hipérbolas se caracterizan por que sus ramas se aproximan asintóticamente a rectas. Estas asíntotas son el movimiento rectilíneo uniforme al que tiende el proyectil conforme se aleja del cuerpo que genera el campo gravitatorio.

## 10.11 Órbitas elípticas

Sea un proyectil que se lanza desde una cierta altura con una velocidad transversal, de modo que describa una trayectoria elíptica. Al punto más alejado al centro de fuerzas se lo llama *apocentro* y al punto más cercano se lo llama *pericentro*. Ambos puntos reciben el nombre genérico de *ápsides*. En el caso de que el centro de fuerzas sea el Sol estos puntos se denominan, respectivamente, *afelio* y *perihelio*. Y en el caso de que sea la Tierra, se denominan *apogeo* y *perigeo*. Sean $r_a$ y $r_p$ las distancias del apocentro y del pericentro, respectivamente. Hacemos coincidir el pericentro con la distancia inicial $r_0$, donde la velocidad transversal es $v_0$. De la Ecuación (49), con $\theta = 0$:

$$r_p = \frac{L^2/G(M+m)\mu^2}{1 + \frac{CL^2}{\mu^2 G(M+m)}}, \tag{59}$$

y haciendo $\theta = \pi$:

$$r_a = \frac{L^2/G(M+m)\mu^2}{1 - \frac{CL^2}{\mu^2 G(M+m)}}. \tag{60}$$

Y teniendo en cuenta que $L = \mu r_0 v_0$ y el valor de $C$ dado por la Ecuación (53), por transformaciones algebraicas sencillas, se obtiene:

$$r_p = r_0 \,, \qquad r_a = \frac{r_0^2 v_0^2}{2G(M+m) - r_0 v_0^2} \,. \tag{61}$$

El semieje mayor de la órbita elíptica es la semisuma de los radiovectores del apocentro y del pericentro, esto es:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \,. \tag{62}$$

Sustituyendo la Ecuación (61) en la Ecuación (62), resulta:

$$a = \frac{G(M+m)r_0}{2G(M+m) - r_0 v_0^2} \,. \tag{63}$$

Empleamos ahora la fórmula de la excentricidad, la Ecuación (56) para obtener:

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{G(M+m)}} = \frac{r_0}{2 - (e+1)} = \frac{r_0}{1-e} \,, \tag{64}$$

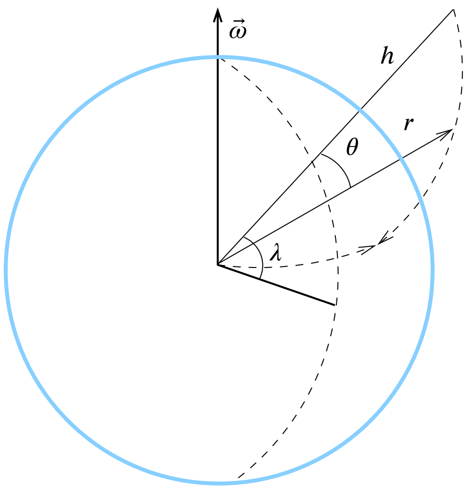

Figura 5: Órbita elíptica de caída de una partícula desde una altura $h$. Elaboración propia.

que sustituida en la fórmula de la energía, la Ecuación (58), da:

$$E = \frac{GMm}{2r_0}(e-1) = -\frac{GMm}{2r_0}(1-e) = -\frac{GMm}{2a} \,. \tag{65}$$

Con lo que obtenemos el importante resultado de que la energía en una órbita elíptica es función únicamente del semieje mayor. Para obtener ahora el semieje menor usamos el teorema de Pitágoras en el triángulo $FBC$ de la Figura 3, de donde se deduce:

$$b^2 = FB^2 - FC^2 = a^2 - \left(a - r_p\right)^2 = r_p\left(2a - r_p\right) = r_p r_a \tag{66}$$

Es decir, que el semieje menor es la media geométrica de las *distancias apsidales* $b =$

$\sqrt{r_a r_p}$. Sustituyendo la Ecuación (61) en esta fórmula, queda:

$$b = r_0 v_0 \sqrt{\frac{r_0}{2G(M+m) - r_0 v_0^2}}\,. \tag{67}$$

Puede consultarse (Ceballos, 2006) para un cálculo alternativo de los parámetros de la órbita en función de la energía y para saber cómo la órbita de un planeta en el sistema solar es afectada por los otros planetas.

**Ejemplo 1. Desviación de una partícula en una caída con la ecuación de la órbita**

Supongamos una partícula de masa pequeña $m$ que cae desde una altura $h$ a una latitud $\lambda$ del hemisferio norte. Llamaremos $r_0$ al radio de la Tierra. La partícula, al caer, desde un sistema de referencia inercial (situado fuera de la Tierra), seguirá una trayectoria cónica, en particular una elipse de excentricidad $\epsilon \simeq 1$, cuyo foco será el centro de la Tierra, ver la Figura 5. En el momento de soltar la partícula, esta tendrá una velocidad horizontal, dirigida hacia el este (debido a la rotación de la Tierra) de:

$$v_{\text{hor}} = r\omega \cos\lambda = \left(r_0 + h\right) \omega \cos\lambda\,. \tag{68}$$

Su momento angular valdrá:

$$L = m r v_{\text{hor}} = m \left(r_0 + h\right)^2 \omega \cos\lambda\,. \tag{69}$$

La ecuación de la órbita es:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \epsilon \cos\theta\,. \tag{70}$$

Si medimos el ángulo $\theta$ desde el momento en el que la partícula es dejada caer, tendremos:

$$\frac{\alpha}{r_0 + h} = 1 - \epsilon\,. \tag{71}$$

Despejamos $\alpha$ y sustituimos en la Ecuación (70):

$$r = \frac{\left(r_0 + h\right)(1 - \epsilon)}{1 - \epsilon \cos\theta}\,. \tag{72}$$

Por la fórmula de la velocidad areolar:

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}\,. \tag{73}$$

Separamos variables e integramos:

$$t = \frac{m}{L}\int_0^\theta r^2 d\theta\,.$$

Ahora sustituimos el valor de $L$ dado por la Ecuación (69) y el valor de $r$ dado por la Ecuación (72):

$$t = \frac{m}{m\left(r_0+h\right)^2\omega\cos\lambda}\int_0^\theta \frac{\left(r_0+h\right)^2(1-\epsilon)^2}{(1-\epsilon\cos\theta)^2}d\theta = \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^\theta\left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta}\right)^2 d\theta\,. \tag{74}$$

Haciendo $\theta=\theta_0$ cuando la partícula alcance la superficie de la Tierra, tendremos, por la Ecuación (72):

$$\frac{r_0}{r_0+h} = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta_0}\,. \tag{75}$$

Si invertimos ambos miembros, resulta:

$$1+\frac{h}{r_0} = \frac{1-\epsilon\cos\theta_0}{1-\epsilon} = \frac{1-\epsilon\left[1-2\sin^2\left(\theta_0/2\right)\right]}{1-\epsilon} = 1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\theta_0/2\right)\,, \tag{76}$$

donde hemos usado la fórmula trigonométrica $2\sin^2(\alpha/2) = 1-\cos\alpha$. De la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{h}{r_0} = \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\theta_0/2\right)\,. \tag{77}$$

Por otra parte, como la trayectoria es casi vertical, el ángulo $\theta_0$ será pequeño, por lo que podemos aproximar el seno por el argumento, quedando:

$$\frac{h}{r_0} \simeq \frac{\epsilon\theta_0^2}{2(1-\epsilon)}\,. \tag{78}$$

Ahora aplicamos a la Ecuación (74) el método empleado en la Ecuación (76):

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\left[1 + \frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \sin^2 (\theta/2)\right]^2} \, . \tag{79}$$

Y como el ángulo $\theta$ es pequeño:

$$t \simeq \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\left[1 + \frac{\epsilon\theta^2}{2(1-\epsilon)}\right]^2} \, . \tag{80}$$

Ahora despejamos $\epsilon/2\,(1-\epsilon)$ de la Ecuación (78) y llamamos $T = t\left(\theta = \theta_0\right)$ al tiempo de caída:

$$T \simeq \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left[1 + \frac{h\theta^2}{r_0\theta_0^2}\right]^2} \simeq \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{2h}{r_0\theta_0^2}\theta^2\right) d\theta \, , \tag{81}$$

donde en el último paso hemos usado el desarrollo en serie de Taylor, quedándonos solo con el primer término del desarrollo, puesto que el ángulo $\theta$ es pequeño. Evaluamos ahora la integral:

$$T \simeq \frac{1}{\omega \cos \lambda} \left(1 - \frac{2h}{3r_0}\right) \theta_0 \, . \tag{82}$$

Despejamos ahora $\theta_0$:

$$\theta_0 \simeq \frac{\omega T \cos \lambda}{1 - \frac{2h}{3r_0}} \simeq \omega T \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3r_0}\right) \, . \tag{83}$$

Durante el tiempo de caída la Tierra ha girado un ángulo $\omega T$ y el punto de la superficie terrestre por debajo de donde se soltó la partícula habrá recorrido una distancia $r_0\omega T \cos \lambda$. La partícula en su caída se desvía hacia el este en una cantidad $r_0\theta_0$, por lo que la desviación $d$ es:

$$d = r_0\omega T \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3r_0}\right) - r_0\omega T \cos \lambda = \frac{2}{3} h\omega T \cos \lambda \, . \tag{84}$$

Y tomando como tiempo de caída $T = \sqrt{2h/g}$ (como si no hubiera desviación y la trayectoria de caída libre fuera rectilínea) obtenemos:

$$d = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda = \frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cos\lambda\,, \tag{85}$$

que es el mismo resultado que se obtiene con la desviación debida a la aceleración de Coriolis, desde el sistema de referencia no inercial de la Tierra en rotación.

## 10.12 Período orbital

Para hallar el *período orbital* utilizamos la Ecuación (52):

$$dt = \frac{2\mu}{L}dA\,. \tag{86}$$

Cuando el planeta o el satélite ha completado una órbita, el tiempo será igual al período orbital y el área será igual al área de la elipse (cuya área es $\pi ab$). Integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$T = \frac{2\mu}{L}\pi ab\,. \tag{87}$$

Sustituimos ahora $b$ por el valor dado por la Ecuación (67), el momento angular por $L = \mu r_0 v_0$ y utilizamos la Ecuación (63), resultando:

$$T = \frac{2}{r_0 v_0}\pi a r_0 v_0\sqrt{\frac{r_0}{2G(M+m) - r_0 v_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}\,. \tag{88}$$

Con ello obtenemos la tercera ley de Kepler, según la cual los períodos de revolución de los planetas son tales que sus cuadrados son proporcionales al cubo del semieje mayor de la órbita. En principio, el período depende también de la masa del planeta. Pero como las masas de los planetas son despreciables frente a la masa del Sol, se cumple que esta ley es independiente (con muy buena aproximación) de la masa del planeta. La fórmula quedaría finalmente:

$$T^2 \simeq \frac{4\pi^2 a^3}{GM}\,. \tag{89}$$

En un artículo muy interesante de la Revista Mexicana de Física (Garza & del Rıo Correa, 2005) se sigue, primero, el procedimiento contrario: deducir la ley de gravitación universal a partir de las leyes de Kepler, y seguidamente, se resuelve el problema newtoniano utilizando el método de Hamilton y el vector de Laplace-Runge-Lenz.

Para un estudio del movimiento orbital rectilíneo, que o bien puede ser de caída hacia el Sol o de despegue, y con el que se puede aproximar el estudio del movimiento orbital de los cometas con trayectorias rasantes con el Sol, remitimos a (Portilla, 2015). Un relato histórico de cómo se obtuvo la ley de gravitación universal a partir de la tercera ley de Kepler (aplicada a órbitas circulares) e, inversamente, de cómo Newton empleó la ley de gravitación para demostrar las leyes de Kepler puede encontrarse en (Tratado, 1999).

## 10.13 Área de una elipse

Por su importancia en el razonamiento anterior, que condujo a la confirmación por la teoría de Newton de la tercera ley de Kepler, presentamos la demostración del valor del área de una elipse.

Partimos de la ecuación en coordenadas cartesianas, la Ecuación (30), y despejamos la $y$:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,. \tag{90}$$

Integramos sobre un cuarto de la elipse y multiplicamos por 4:

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx\,. \tag{91}$$

Para efectuar la integral realizamos el cambio de variable siguiente:

$$x = a\sin t\,, \tag{92}$$

$$dx = a\cos t dt\,. \tag{93}$$

Con lo que la integral se transforma en:

$$A = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1-\sin^2 t}a\cos t dt. \tag{94}$$

Como $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$=1, la integral se convierte en:

$$A = 4\int_0^{\pi/2} ab\cos^2 t dt. \tag{95}$$

Ahora empleamos la identidad trigonométrica:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\ , \tag{96}$$

resultando para la integral:

$$A = 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 2ab\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi ab\,, \tag{97}$$

como queríamos demostrar.

**Ejemplo 2. Precisión de la órbita de Mercurio**

Si la ley de gravitación universal de Newton es correcta y la fuerza decrece con la inversa del cuadrado de la distancia, entonces las órbitas elípticas deberían ser tales que las líneas apsidales se mantuvieran constantes. Es decir, que los ápsides permanecerían fijos una vez completada una revolución. Por esta razón la observación astronómica de cualquier desplazamiento del perihelio de un planeta en el sistema solar (recordemos que el perihelio es el punto de la órbita en el que el planeta se encuentra más cercano al Sol) tenía un gran interés para poner a prueba la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. A ese desplazamiento del perihelio se le conoce como *precesión del perihelio* y se encontró que los planetas exhibían una pequeña precesión de sus perihelios, que era mayor para el planeta Mercurio. Una posible explicación de esa precesión estaba en la influencia gravitatoria de los otros planetas. Esta influencia de otros planetas fue la que llevó al descubrimiento del planeta Neptuno por las anomalías en la órbita del conocido planeta Urano.

Sin embargo, los cálculos basados en la influencia gravitatoria de otros planetas, dentro del marco de la teoría de la gravitación de Newton, explicaban gran parte de la precesión del perihelio de Mercurio pero quedaba una pequeña cantidad, de unos $43''$ (segundos) de arco por siglo que no podía ser explicada satisfactoriamente.

Se propusieron diversas hipótesis, como la existencia de un planeta más cercano al Sol, llamado *Vulcano*, o la existencia de un cinturón de asteroides entre Mercurio y el Sol, pero estas hipótesis tuvieron que ser descartadas. También se propusieron otras teorías gravitatorias que tenían en cuenta los avances en la comprensión de la interacción electromagnética, e incluían términos que dependían de la velocidad y el hecho de que la interacción gravitatoria se propagara a velocidad finita, sin embargo los cálculos no conseguían reproducir el valor de la precesión del perihelio de Mercurio.

Finalmente, fue Einstein quien tras desarrollar su teoría general de la relatividad llegó a la fórmula correcta para reproducir esos $43''$ de arco por siglo. Esto es lo que en ciencia se conoce como una *postdicción*, frente a una predicción de la teoría, tal como sería la predicción de que la luz se deflectaba cuando pasaba cerca del Sol y que fue confirmada por la famosa observación astronómica de Eddington en 1919. Aquí vamos a obtener la fórmula de Einstein para la precesión del perihelio de Mercurio introduciendo una corrección a la ley de gravitación en la ecuación del movimiento.

La ecuación de la trayectoria, la Ecuación (46), la podemos escribir, en función de la fuerza como:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2}\frac{1}{u^2}F(u)\,, \tag{98}$$

donde recordemos que $u = 1/r$, y donde vamos a suponer que la masa reducida es muy aproximadamente igual a la masa del planeta $\mu \simeq m$. Ahora, con la expresión de la fuerza de la ley de gravitación de Newton esta ecuación queda:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2M}{L^2}\,. \tag{99}$$

A continuación lo que se hace es introducir una corrección relativista que depende de la inversa de la cuarta potencia de la distancia $1/r^4$, con lo que la Ecuación (98) resulta:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2M}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \,. \tag{100}$$

Obsérvese que la constante de proporcionalidad de la corrección relativista, además de contener la constante universal de la gravedad y la masa del Sol, contiene en el denominador la velocidad de la luz, de manera que si esta fuera infinita esta corrección se cancelaría. Hay que añadir que la mitad de esta corrección se puede entender dentro del marco de la relatividad especial, siendo 1/3 de ella debida a la dilatación del tiempo, 1/6 debido al aumento de la masa relativista con la velocidad, y la mitad restante debida a que la interacción gravitatoria se propaga con una velocidad finita, que es la de la luz. De manera que la coincidencia de la predicción teórica de la precesión del perihelio de Mercurio con la observación astronómica será una confirmación de la velocidad de propagación de la interacción gravitatoria.

Definamos ahora las constantes:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{Gm^2M}{L^2} \,, \tag{101}$$

$$\delta = \frac{3GM}{c^2} \,. \tag{102}$$

Con estas definiciones la Ecuación (100) se puede escribir:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} + \delta u^2 \,. \tag{103}$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal. Para resolverla se utiliza el procedimiento de aproximaciones sucesivas. Primero se ensaya la solución sin el término $\delta u^2$:

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \epsilon\cos\theta\right) \,, \tag{104}$$

donde se toma como origen del ángulo $\theta = 0$ la posición del perihelio, donde $r$ es mínimo y, por tanto, $u$ es máximo. Esta es la solución de una cónica que corresponde a una fuerza que varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Ahora introduciendo la Ecuación (104) en el segundo miembro de la Ecuación (103):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\left(1 + 2\epsilon\cos\theta + \epsilon^2\cos^2\theta\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\left[1 + 2\epsilon\cos\theta + \frac{\epsilon^2}{2}(1+\cos 2\theta)\right], \tag{105}$$

donde hemos empleado la fórmula trigonométrica:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{106}$$

El siguiente paso es ensayar otra función de prueba $u_p$ que reproduzca el segundo miembro de la Ecuación (105) y que es:

$$u_p = \frac{\delta}{\alpha^2}\left[\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right) + \epsilon\theta\sin\theta - \frac{\epsilon^2}{6}\cos 2\theta\right]. \tag{107}$$

Para comprobar que reproduce el segundo miembro calculamos la primera derivada:

$$\frac{du_p}{d\theta} = \frac{\delta}{\alpha^2}\left[\epsilon\sin\theta + \epsilon\theta\cos\theta + \frac{\epsilon^2}{3}\sin 2\theta\right]. \tag{108}$$

Calculamos ahora la segunda derivada:

$$\frac{d^2u_p}{d\theta^2} = \frac{\delta}{\alpha^2}\left[\epsilon\cos\theta + \epsilon\cos\theta - \epsilon\theta\sin\theta + \frac{2\epsilon^2}{3}\cos 2\theta\right]. \tag{109}$$

Sumamos ahora la Ecuación (109) y la Ecuación (107):

$$\frac{d^2u_p}{d\theta^2} + u_p = \frac{\delta}{\alpha^2}\left[1 + 2\epsilon\cos\theta + \frac{\epsilon^2}{2}(1+\cos 2\theta)\right]. \tag{110}$$

Así pues, la $u_1$ reproduce el primer término del segundo miembro de la Ecuación (105), mientras que $u_p$ reproduce el resto del segundo miembro de dicha ecuación. La segunda función de prueba es la suma de las anteriores $u_2 = u_1 + u_p$. En este punto detenemos el proceso, con lo que la solución aproximada es:

$$u \simeq u_2 = u_1 + u_p = \left[\frac{1}{\alpha}(1 + \epsilon\cos\theta) + \frac{\delta\epsilon}{\alpha^2}\theta\sin\theta\right] + \left[\frac{\delta}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) - \frac{\delta\epsilon^2}{6\alpha^2}\cos 2\theta\right] . \tag{111}$$

En el segundo corchete tenemos una constante en un término que es periódico, pues va con el $\cos 2\theta$, así que no puede contribuir a la precesión secular del perihelio. En cambio, en el primer corchete aparece un término que contiene $\theta$ que sí da una contribución a la precesión secular. Nos centramos ahora en esos términos:

$$u_{\text{secular}} = \frac{1}{\alpha}(1 + \epsilon\cos\theta) + \frac{\delta\epsilon}{\alpha^2}\theta\sin\theta . \tag{112}$$

Por otra parte, se cumple que:

$$1 + \epsilon\cos\left(\theta - \frac{\delta}{\alpha}\theta\right) = 1 + \epsilon\left(\cos\theta\cos\frac{\delta}{\alpha}\theta + \sin\theta\sin\frac{\delta}{\alpha}\theta\right) \simeq$$

$$\simeq 1 + \epsilon\cos\theta + \frac{\delta\epsilon}{\alpha}\theta\sin\theta , \tag{113}$$

donde hemos hecho uso de que $\delta$ es una cantidad pequeña y por tanto hemos aproximado $\cos\frac{\delta}{\alpha}\theta \simeq 1$ y $\sin\frac{\delta}{\alpha}\theta \simeq \frac{\delta}{\alpha}\theta$.

Entonces, podemos escribir la Ecuación (112):

$$u_{\text{secular}} = \frac{1}{\alpha}\left[1 + \epsilon\cos\left(\theta - \frac{\delta}{\alpha}\theta\right)\right] . \tag{114}$$

Cuando haya transcurrido un ciclo, y el cuerpo orbitando vuelva a pasar por el perihelio, el argumento del término cosenoidal de $u_{\text{secular}}$ habrá recorrido un valor $2\pi$ lo que se traduce en que:

$$\theta - \frac{\delta}{\alpha}\theta = 2\pi . \tag{115}$$

Despejando ahora el ángulo resulta:

$$\theta = \frac{2\pi}{1 - \dfrac{\delta}{\alpha}} \simeq 2\pi\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) . \tag{116}$$

Por tanto, lo que se ha desplazado el perihelio en una vuelta $\Delta$ es:

$$\Delta \simeq \frac{2\pi\delta}{\alpha} . \tag{117}$$

Sustituimos ahora los valores de $\alpha$ y $\delta$ dados por la Ecuación (101) y la Ecuación (102):

$$\Delta \simeq 2\pi \frac{3GM}{c^2}\frac{Gm^2M}{L^2} = 6\pi\left(\frac{GMm}{cL}\right)^2 . \tag{118}$$

De la Ecuación (35) y la Ecuación (49), haciendo $\mu \simeq m$ y despreciando $m$ (la masa del planeta) frente a $M$ (la masa del Sol), obtenemos:

$$L^2 = GMm^2a\left(1 - e^2\right) , \tag{119}$$

que sustituida en la Ecuación (118) resulta:

$$\Delta \simeq \frac{6\pi GM}{ac^2\left(1 - e^2\right)} . \tag{120}$$

Esta fórmula expresa el desplazamiento del perihelio en radianes por revolución. En ella se observa que la precesión del perihelio será tanto mayor cuanto menor sea el semieje mayor de la órbita elíptica y cuando más excéntrica sea esta. Estas son precisamente las condiciones que cumple el planeta Mercurio, en el sistema solar. A la cantidad $GM/c^2$, donde $M$ es la masa del Sol, se la conoce como radio gravitacional del Sol y es igual para todos los planetas. Calculemos ahora el valor de $\Delta$ para la órbita de Mercurio, con los datos $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$, $M = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $e = 0.2056$, $a = 5.834 \cdot 10^{10}$ m:

$$\Delta = \frac{6\pi \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{5.834 \cdot 10^{10} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \left(1 - 0.2056^2\right)} = 4.97 \cdot 10^{-7} \text{ rad/rev} .$$

El período orbital de Mercurio es de 88 días, por lo que tenemos que dividir por 88 y multiplicar por 365 y por 100 para obtener el valor del desplazamiento en un siglo. Luego tenemos que pasar el resultado a grados sexagesimales, dividiendo entre $\pi$ y multiplicando por 180, y finalmente multiplicamos por 3600 para pasar de grados a segundos. El resultado es: $42.54''$.

## 10.14 Referencias bibliográficas


Ceballos, S. P. (2006). Trayectoria de la órbita terrestre alrededor del sol. *Scientia et technica*, 2(31), 241–246.

Feynman, R. (1967). The character of physical law (1965). *Cox and Wyman Ltd., London*.

Garza, E. P. & del Rıo Correa, J. (2005). Tres aspectos del problema de Kepler. *Revista Mexicana de Fisica E*, 51(1), 13–17.

Portilla, J. G. (2015). El movimiento rectilıneo en el problema de los dos cuerpos. *Revista de la Academia Colombiana*.

Tratado, G. (1999). Newton y las leyes de Kepler. *ContactoS*, 31, 33–37.


## 10.15 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Sabiendo que la masa del Sol es 332800 veces la masa de la Tierra, calcular el error que se comete al tomar, en los cálculos del sistema Sol-Tierra, la masa de la Tierra en lugar de la masa reducida de ambos. *Solución*: $3 \cdot 10^{-4}$ %.

**Ejercicio 2.** Calcular la masa reducida de un sistema formado por dos cuerpos de masa $m$ y $3m$. *Solución*: $\frac{3}{4}$ m.

**Ejercicio 3.** Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $10^8$ km con un período de rotación de 2 años, mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es $10^8$ km y la más alejada $1.8 \cdot 10^8$ km. *Calcular el período de rotación del planeta* 2. *Solución*: 3.3 años.

**Ejercicio 4.** Calcula el momento angular de la Tierra respecto del centro del Sol, despreciando el movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma y considerando a la órbita de la Tierra como circular. Datos: Masa de la Tierra $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, radio de la órbita $r_T = 1.5 \cdot 10^8$ km. *Solución*: $2.7 \cdot 10^{40}$ kgm$^2$/s.

**Ejercicio 5.** La Tierra en su perihelio está a una distancia de 147 millones de kilómetros del Sol y lleva una velocidad de 30.3 km/s. Calcular la velocidad de la Tierra en su afelio, si dista 152 millones de kilómetros del Sol. *Solución*: 29.3 km/s.

**Ejercicio 6.** Sabiendo que la masa del Sol es 332800 veces la masa de la Tierra, que es $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, que la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio es de 147 millones de kilómetros y en el afelio de 152 millones de kilómetros, calcular la energía de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, tomando como origen de la energía potencial el infinito. Dato: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ kgm$^3$/s$^2$. *Solución* $-2.67 \cdot 10^{33}$ J.

**Ejercicio 7.** Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio es de 147 millones de kilómetros y la distancia al Sol en el afelio es de 152 millones de kilómetros, calcular la excentricidad de la órbita. *Solución*: 0.0167.