

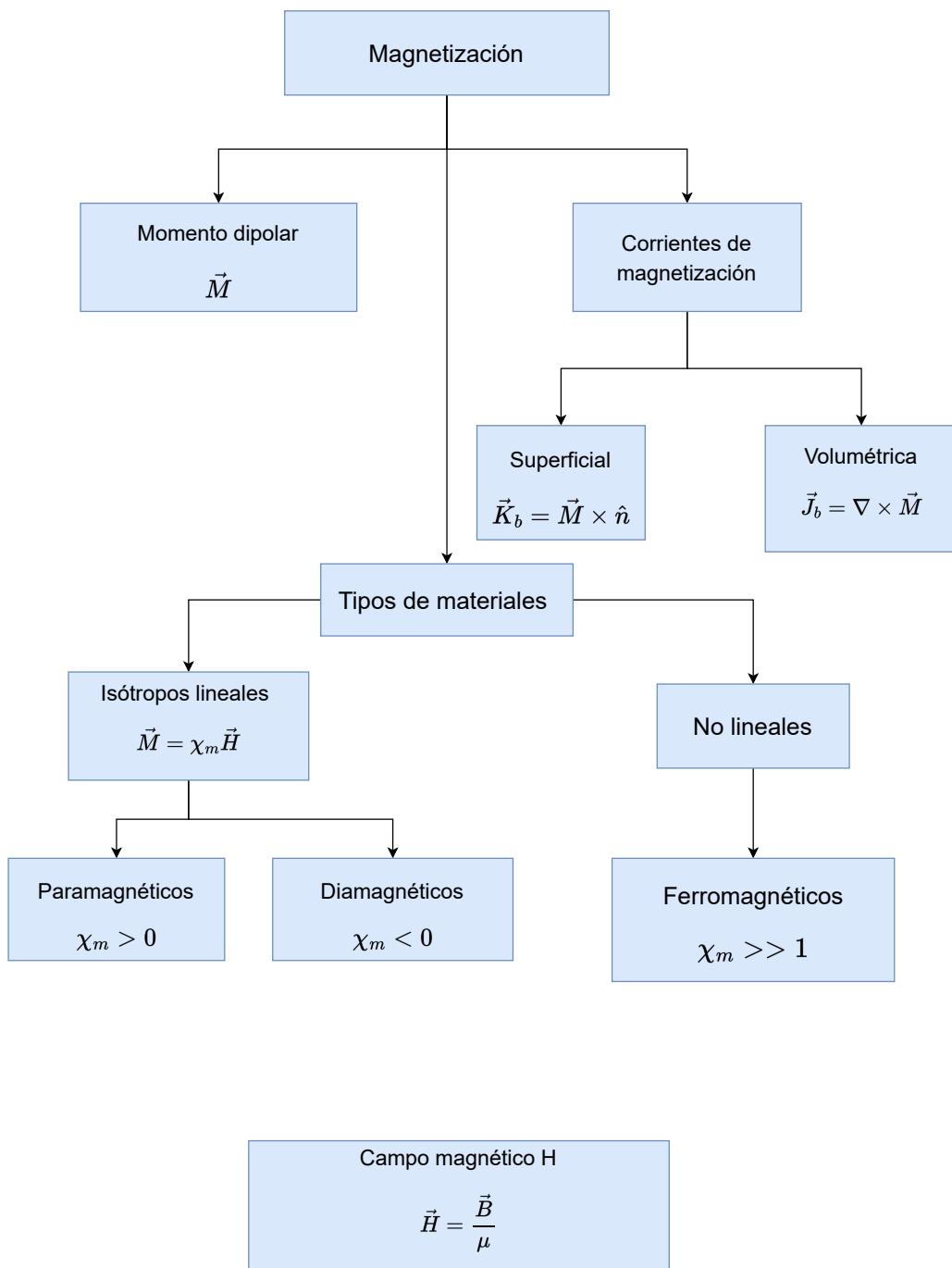
Electromagnetismo I

Magnetismo en presencia de materia

Índice

Esquema	2
Ideas clave	3
9.1 Introducción y objetivos	3
9.2 Magnetización	3
9.3 El campo \vec{H}	10
9.4 Materiales magnéticos isótropos lineales	12
9.5 Materiales ferromagnéticos	16
9.6 Curva de histéresis	17
9.7 Materiales superconductores	19
9.8 Cuaderno de ejercicios	19
9.9 Referencias bibliográficas	20

Esquema



9.1 Introducción y objetivos

A lo largo del estudio de las corrientes eléctricas que producen campos magnéticos siempre hemos supuesto, hasta ahora, que estábamos en el vacío. En este capítulo veremos qué pasa cuando introducimos un medio material. Por ejemplo, los motores siempre tienen un núcleo de hierro para aumentar el campo magnético. En particular podemos encontrar diferentes comportamientos magnéticos según el tipo de material, que pueden ser *paramagnéticos*, *diamagnéticos* o *ferromagnéticos*.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Entender lo que significa que un material esté **magnetizado**.
- ▶ Se aprenderán lo que son las **corrientes de magnetización**.
- ▶ Entender el porqué de la necesidad de introducir un nuevo **campo \vec{H}** .
- ▶ Estudiaremos con detalle el diferente comportamiento de los **materiales isótropos** lineales y los no lineales.

9.2 Magnetización

Como sabemos, la materia está formada por átomos que tienen electrones en movimiento. Estos electrones forman pequeñas espiras de corriente microscópicas que crean su propio campo magnético. A estos campos magnéticos los llamamos *momentos dipolares*. Normalmente estas espiras (o momento dipolar) se orientan de forma aleatoria, por lo tanto no tienen ninguna contribución al campo. Pero en algunos materiales las espiras, en la presencia de un campo magnético externo, se orientan en la

dirección del campo, sumándose al campo. Aquí es cuando se dice que el material está *magnetizado*. También puede pasar que en algunos materiales el material aparece magnetizado aun en ausencia de campo. Esto lo veremos en detalle mas adelante.

Momentos magnéticos de los átomos

Entendamos cómo los átomos ([Solbes, Jordi and Silvestre, Verónica and Furió, Carles, 2010](#)) crean campos magnéticos a nivel microscópico. Si pensamos en un modelo clásico donde los electrones giran en torno al núcleo, el electrón orbital es como una espira de corriente. El momento magnético se asocia con su movimiento orbital. Podemos verlo en la [Figura 1](#).

El electrón con un radio r , un momento angular \vec{L} asociado y opuesto al momento magnético $\vec{\mu}$. Como el electrón tiene una velocidad \vec{v} , y el tiempo que tarda en dar una vuelta es T , y la velocidad orbital es $v = 2\pi r/T$, entonces:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}.$$

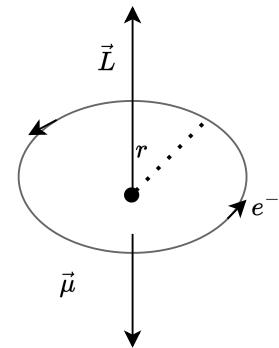


Figura 1: Electrón moviéndose en una órbita circular de radio r , con un momento angular \vec{L} , y momento magnético $\vec{\mu}$.

Sabiendo que el momento magnético del electrón es $\mu = I \cdot S$, siendo S el área que recorre el electrón, tenemos:

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2}.$$

Si nos fijamos , el momento angular $L = mvr$, sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$\mu = \frac{e}{2m} L. \tag{1}$$

Se sabe que el momento angular atómico está cuantizado, es decir, su valor siempre es un múltiplo entero de $h/2\pi$, siendo h una constante fundamental *llamada constante de Planck*, $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Al estar L cuantizado, implica una incertidumbre en su dirección, lo cual también implica una incertidumbre en $\vec{\mu}$. Entonces, cuando hablamos de que el momento magnético se alinea con el campo externo \vec{B} , lo que significa

es que $\vec{\mu}$ tiene su máxima componente en la dirección del campo. Si ahora sustituimos en la [Ecuación \(1\)](#) el valor de $L = h/2\pi$, podemos obtener la unidad fundamental del momento magnético:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

llamado *magnetón de Bohr*.

Regresemos al caso macroscópico de nuevo.

Definición 1: Magnetización y momento dipolar

La magnetización \vec{M} se define como la densidad del momento dipolar en un material, entonces el momento dipolar de un pequeño volumen dV se puede definir como:

$$d\vec{m} = \vec{M} dV,$$

y si tenemos un volumen V , el momento dipolar total será:

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} dV.$$

Notar que la unidad de \vec{M} es Ampere/metro. Ahora \vec{M} se puede considerar una descripción macroscópica del material, y nos interesaría encontrar una relación con \vec{B} .

Corrientes de magnetización

Vimos anteriormente en el desarrollo multipolar del potencial vectorial que, para el término dipolar, definido por el momento dipolar total \vec{m} , este potencial se escribe como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2}.$$

Si consideramos una densidad de momentos dipolares en el espacio definido por la magnetización $\vec{M}(\vec{r}')$, su potencial vectorial se puede expresar como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{\vec{R}}}{R^2} dV' ,$$

donde $\hat{\vec{R}} = \vec{r} - \vec{r}'$. Aquí se ha denotado con el vector \vec{r}' el espacio en el que está distribuida la magnetización y el vector \vec{r} la posición del punto P donde se calcula el potencial, tal y como hemos estado haciendo con anterioridad en el caso electrostático, y como se indica en la [Figura 2](#). De esta expresión se puede llegar a esta otra (no mostraremos aquí los detalles):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' .$$

Observando esta expresión, viene de forma natural definir dos corrientes nuevas, una volumétrica y una superficial (si comparamos con previas expresiones para el potencial vectorial). Así podemos definir una densidad de corriente volumétrica de magnetización \vec{J}_b , y una densidad superficial de corriente de magnetización \vec{K}_b como:

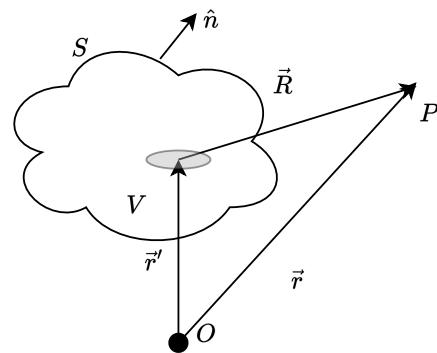


Figura 2: Se pueden ver los vectores usados para el cálculo del potencial vectorial en un punto exterior a un material magnetizado.

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) , \quad (2)$$

$$\vec{K}_b(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n} .$$

Con estas definiciones se puede decir que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' .$$

Lo que significa esto, es que cuando tenemos materia, la cual puede contener dipolos descritos por \vec{M} , podemos definir una densidad de corriente volumétrica y superficial de magnetización equivalente \vec{J}_b y \vec{K}_b . Fijémonos que como en casos anteriores, la

corriente superficial es tangente a la superficie. Si tenemos una magnetización uniforme tendremos una corriente que circula en la superficie exterior del material. Cuando \vec{M} no es uniforme es cuando tendremos en el interior del volumen una densidad de corriente \vec{J}_b .

Ahora podemos usar que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, o usar las ecuaciones donde expresábamos la integral de \vec{B} en función de las corrientes libres \vec{J} y \vec{K} , que vimos en otro capítulo, podemos decir que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} dS'. \quad (3)$$

Veamos unos ejemplos, uno sencillo y otro más elaborado.

Ejemplo 1. Cilindro infinitamente largo magnetizado

Suponemos un cilindro infinitamente largo que está uniformemente magnetizado. Eso significa que como $M = \text{constante}$ entonces $\vec{J}_b = 0$. Sin embargo, tenemos una corriente superficial $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$. Podemos ver en la [Figura 3](#), que \vec{M} es paralela al eje del cilindro, y que siendo \hat{n} perpendicular a la superficie del cilindro, \vec{K}_b circula alrededor del cilindro como vemos en la figura. Anteriormente calculamos el campo inducido por una corriente de este tipo, ya que esta situación es equivalente a un solenoide infinitamente largo, donde su campo era $\vec{B}_{\text{dentro}} = \mu_0 \vec{K}$, y el campo fuera del cilindro es nulo. En nuestro caso:

$$\vec{B}_{\text{dentro}} = \mu_0 \vec{K}_b = \mu_0 \vec{M}.$$

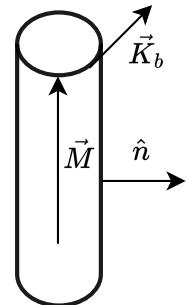


Figura 3:
Cilindro uniformemente magnetizado a lo largo del eje.

Ejemplo 2. Esfera uniforme magnetizada

La magnetización va en la dirección del eje z , y la esfera tiene un radio R . Ver la [Figura 4](#). Tenemos que $\vec{J}_b = 0$ ya que la magnetización es constante. Fijémonos

que la normal a la superficie va en la dirección de \hat{r} , entonces tenemos que:

$$\vec{K}_b = M \hat{z} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\varphi}.$$

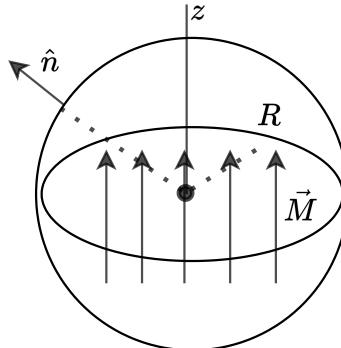


Figura 4: Esfera uniformemente magnetizada a lo largo del eje z .

Si sustituimos en la [Ecuación \(3\)](#), donde $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{M R^2 \sin^2 \theta (\hat{\varphi} \times \vec{R}) d\theta d\varphi}{R^3}.$$

Procedemos a realizar esta integral como hemos hecho anteriormente, y por simplicidad calcularemos el campo en un punto en el eje z . Existen formas más rápidas y eficientes de encontrar este resultado que veremos en los siguientes apartados.

Si vemos la [Figura 5](#), $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r} = R\hat{r}$, $\vec{R} = z\hat{z} - R\hat{r}$, $R^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta$, y $\hat{\varphi} \times \vec{R} = R \sin \theta \hat{z} + (z - R \cos \theta)(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$. Ya tenemos todo para sustituir en la ecuación anterior. Fijémonos que la integral en φ entre 0 y 2π se anula para la componente en \hat{x} y en \hat{y} , como era de esperar por la simetría del problema. Entonces la expresión que nos queda es:

$$B_z = \frac{\mu_0 M R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta d\varphi}{(z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta)^{3/2}}.$$

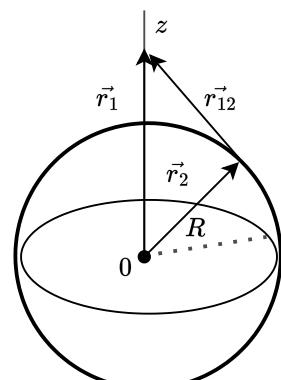


Figura 5: Vectores para el cálculo de B en una esfera uniformemente magnetizada.

Ahora, hagamos un cambio de coordenadas para que sea más sencillo resolver la integral, pongamos $u = \cos \theta$:

$$B_z = \frac{\mu_0 M R^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-u^2)du}{(z^2 + R^2 - 2zRu)^{3/2}}$$

Con tablas de integrales encontramos que:

$$\int \frac{(1-u^2)du}{(z^2 + R^2 - 2zRu)^{3/2}} = -\frac{2(z^2 + R^2 - 2zRu)^{1/2}}{3z^3 R^3} \left(z^2 + R^2 + zRu + \frac{3z^2 R^2(u-1)}{2(z^2 + R^2 - 2zRu)} \right).$$

Entonces el resultado para \vec{B} queda de la forma

$$B_z = \frac{\mu_0 M R^3}{2} \left(\frac{2}{3z^3 R^3} [(z^2 + R^2)(|z + R| - |z - R|) - zR(|z + R| + |z - R|)] \right)$$

Debido al valor absoluto en la expresión tenemos que considerar dos casos por separado:

- ▶ Cuando $z > R$, el caso del campo exterior a la esfera, entonces $|z - R| = z - R$. Sustituyendo tenemos:

$$B_{z\text{fuera}} = \frac{2\mu_0 M R^3}{3z^3}.$$

- ▶ Cuando $z < R$, el caso del campo en el interior de la esfera, entonces $|z - R| = R - z$. Sustituyendo queda que:

$$B_{z\text{dentro}} = \frac{2}{3}\mu_0 M.$$

9.3 El campo \vec{H}

Empecemos por recordar la ecuación que vimos en capítulos anteriores, que relaciona el campo magnético con la corriente. Vimos que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4)$$

En esta ecuación dijimos que \vec{J} era la corriente total, y debido a la nueva definición de corriente que introdujimos, implica que:

$$\vec{J}_{\text{total}} = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M}.$$

Es decir la corriente total es la suma de las corrientes libres, \vec{J}_f , y las corrientes debidas a la magnetización del material, \vec{J}_b , que vimos previamente. Si sustituimos la corriente total en la [Ecuación \(4\)](#) y agrupamos los términos con rotacional, queda:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f. \quad (5)$$

Esto nos puede recordar una situación similar con el campo eléctrico, donde definimos un nuevo campo. En este caso, en la ecuación, el término de la derecha es el único que depende de las corrientes libres, y sugiere también la definición de un nuevo campo \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (6)$$

Ahora podemos reescribir la [Ecuación \(5\)](#) como:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f. \quad (7)$$

Al campo \vec{H} se le llama también campo magnético o excitación magnética. Las dimensiones de \vec{H} podemos ver que son las mismas que \vec{M} , es decir Ampere/metro. Las propiedades de las componentes tangenciales de \vec{H} las podemos extraer de la [Ecuación \(7\)](#) y análogo al caso de \vec{B} :

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{K}_f \times \hat{n},$$

que nos dice que las componentes tangenciales van a ser discontinuas cuando exista una densidad superficial de corriente. Las componentes normales se pueden encontrar a partir de la [Ecuación \(6\)](#), y como las componentes de \vec{B} son continuas, tenemos que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\hat{n} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1),$$

lo que nos dice que son discontinuas, pero no es muy útil esta expresión. Podemos expresar la [Ecuación \(7\)](#) también en su forma integral:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f. \quad (8)$$

Aquí podemos ver la similitud en el rol que \vec{H} hace en magnetismo, análogo al que el campo \vec{D} hace en electrostática. En el caso del campo \vec{D} , nos permitía escribir la ecuación de Gauss en términos de la carga libre. A su vez, el campo \vec{H} nos permite escribir la ley de Ampère en función de las corrientes libres. Eso es una buena noticia porque lo que podemos *excitar* y controlar del exterior son las corrientes libres, no las que el material produce internamente, por eso la gran utilidad de este nuevo campo, al que también se conoce como *excitación magnética*.

Ejemplo 3. Solenoide ideal infinitamente largo

Se considera el eje del solenoide a lo largo del eje z . Recordemos que un solenoide ideal tiene un campo $\vec{B}_{\text{dentro}} = \mu_0 n I \hat{z}$, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud. El solenoide está en el vacío ($M = 0$), por lo tanto no hay corrientes de magnetización, solo tenemos corrientes libres. Entonces el campo \vec{H} se puede expresar mediante la [Ecuación \(6\)](#) como:

$$\vec{H}_{\text{dentro}} = \frac{\vec{B}_{\text{dentro}}}{\mu_0} = n I \hat{z}.$$

Fuera, el campo \vec{B} es cero, y por lo tanto \vec{H} también.

Ejemplo 4. Esfera uniformemente magnetizada

Aquí consideramos la misma esfera que en el [Ejemplo 2](#). Aquí no hay corrientes libres como en el ejemplo anterior, solo corrientes de magnetización. Usamos los resultados obtenidos anteriormente para obtener \vec{H} a partir de la [Ecuación \(6\)](#). Tenemos dos casos:

- En el exterior $\vec{M} = 0$, así que:

$$H_{Z\text{fuera}} = \frac{B_{Z\text{fuera}}}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{z^3} = \frac{2Ma^3}{3z^3}.$$

- En el interior $\vec{M} = M\hat{z}$, donde $M = \text{constante}$, entonces:

$$H_{Z\text{dentro}} = \frac{B_{Z\text{dentro}}}{\mu_0} - M = \frac{2}{3}M - M = -\frac{1}{3}M.$$

Podemos apreciar en la [Figura 6](#), las diferentes sentidos del campo \vec{H} , dentro y fuera de la esfera.

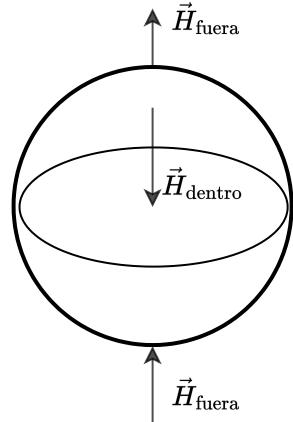


Figura 6: Se puede observar el campo H , producido en una esfera uniformemente magnetizada.

Estos ejemplos que acabamos de ver nos pueden recordar a las esferas polarizadas en el caso del campo eléctrico.

9.4 Materiales magnéticos isótropos lineales

Lo mismo que encontramos para los materiales dieléctricos, que clasificamos según sus propiedades, también es deseable hacerlo con los magnéticos, y clasificarlos en diferentes grupos. Se espera poder encontrar una relación entre \vec{M} y \vec{H} . Se considera \vec{H} y no \vec{B} por razones históricas, y por otro lado porque \vec{H} no cambia en presencia de materia, siempre que la corriente libre se mantenga constante. Esta relación será

simple para el caso de materiales isótropos y lineales, y viene dada por:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (9)$$

La constante de proporcionalidad χ_m se llama *susceptibilidad magnética*, y tiene un valor característico para cada material. Típicamente, su valor está en el rango de 10^{-5} , y es adimensional. Encontramos dos posibilidades para la susceptibilidad según el tipo de material:

- ▶ Si el valor de χ_m es positivo, el material se llama *paramagnético*, y lo que indica es que la inducción magnética es reforzada por la presencia del material.
- ▶ Si el valor de χ_m es negativo, el material se llama *diamagnético*, y la inducción magnética es debilitada por la presencia del material.

Combinando esta [Ecuación \(9\)](#) con la [Ecuación \(6\)](#) tenemos:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H},$$

lo que indica que para medios lineales \vec{B} es proporcional a \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (10)$$

donde:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m).$$

Esta constante μ se llama *permeabilidad* (absoluta) del material. También se puede definir otra variable, $k_m = 1 + \chi_m$, llamada *permeabilidad relativa*. Esta ecuación no es fundamental del electromagnetismo, porque como dijimos, es para un caso particular, por lo que es otro ejemplo de ecuación constitutiva (encontramos otra para el caso electrostático). Nos indica que \vec{B} y \vec{H} , en este caso de un medio lineal isotrópico, son paralelos.

Otra relación interesante que podemos encontrar es que la densidad de corriente ligada es proporcional a la densidad de corriente libre, usando la [Ecuación \(7\)](#) y la [Ecu-](#)

ción (2) podemos decir que:

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \vec{J}_f.$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5. Solenoide ideal infinitamente largo

Tenemos un solenoide con n vueltas por unidad de longitud, con una sección de área S . Lo llenamos con un material homogéneo lineal de susceptibilidad magnética χ_m . Queremos calcular el campo magnético en su interior. Podemos usar aquí la forma integral de la ley de Ampere dada por la [Ecuación \(8\)](#), y tenemos:

$$\vec{H} = nI\hat{z}.$$

En el exterior el campo es cero, no hay corriente. Usando ahora la [Ecuación \(10\)](#) tenemos:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{z} = k_m\mu_0nI\hat{z}.$$

Vemos que \vec{B} aumenta su valor con k_m respecto al caso en el vacío. Eso significa que su flujo por vuelta $\Phi = BS$ aumenta de la misma forma, y por tanto su autoinductancia lo hará también. Si consideramos una longitud l :

$$L = \frac{\Phi}{I} = k_m\mu_0n^2lS = k_mL_0,$$

podemos decir que la presencia de materia aumenta la autoinductancia con respecto al valor en el vacío. Se puede demostrar, aunque no lo haremos aquí, que este resultado puede ser aplicado en casos generales y no solo a este caso particular.

Ejemplo 6. Cable coaxial

Tenemos un cable coaxial como vemos en la [Figura 7](#). Tiene dos corrientes I iguales y opuestas en cada uno de los cilindros, uniformes, suponemos que son muy

largos. El radio del cilindro interior es a , y del cilindro exterior es b . La región entre los dos cilindros se llena con un material paramagnético de permeabilidad $\mu = k_m \mu_0$. Queremos calcular los campos para las tres diferentes regiones posibles, es decir, dentro del cilindro interior, entre los dos cilindros, y en el exterior del cable.

Debido a la simetría del problema, esperamos que \vec{H} solo tenga una componente en $\hat{\varphi}$. Ya trabajamos con un cable coaxial anteriormente, aquí haremos de forma similar. Podemos usar la ley de Ampere para hacer este cálculo, siguiendo un camino circular por el cual el campo \vec{H} es tangente, la [Ecuación \(8\)](#).

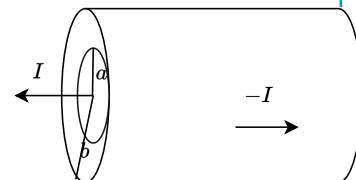


Figura 7: Cable coaxial con corrientes iguales y opuestas.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int H_\varphi \varphi \rho d\varphi = 2\pi\rho H_\varphi = I_{en}.$$

Por otro lado, con la [Ecuación \(10\)](#), a partir de \vec{H} obtenemos \vec{B} . Vayamos por casos:

- ▶ Si $\rho < a$, $I_{en}/I = \pi\rho^2/\pi a^2$, entonces $I_{en} = I\rho^2/a^2$:

$$H_\varphi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}, \quad B_\varphi = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2}.$$

- ▶ Si $a < \rho < b$, entonces $I_{en} = I$:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}, \quad B_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi\rho}.$$

- ▶ Si $\rho > b$, entonces $I_{en} = I - I = 0$, así el campo $H = 0$ y el campo $B = 0$ también.

Podemos fijarnos que el campo magnético \vec{H} no depende de qué material magnético contiene el coaxial, pero la inducción magnética \vec{B} sí que aumenta respecto al caso del vacío según el factor k_m .

9.5 Materiales ferromagnéticos

Ciertos materiales tienen, a nivel atómico, dipolos magnéticos permanentes. Estos materiales se llaman ferromagnéticos, y algunos ejemplos son el hierro, níquel, cobalto y sus aleaciones, y otros materiales no metálicos. Son de gran importancia tecnológica y estudiaremos su comportamiento diferenciado de lo hemos visto hasta aquí. Estos materiales tienen momentos magnéticos a nivel atómico, y ante un campo magnético externo, se alinean entre sí. Aun cuando desaparece el campo magnético externo, la sustancia todavía permanece magnetizada. Más en concreto, este alineamiento se debe a un intenso acoplamiento entre vecinos de sus momentos. La explicación de por qué esto pasa se puede encontrar en la mecánica cuántica.

En los materiales ferromagnéticos existen regiones microscópicas llamadas dominios en las cuales los momentos magnéticos están alineados. Los diversos dominios tienen diferentes orientaciones, y las fronteras entre los diversos dominios se llaman paredes de dominio. Los diferentes dominios están orientados al azar unos respecto a otros. Pero cuando se aplica un campo magnético externo, los dominios tienden a alinearse con el campo externo, lo que da lugar a un material magnetizado. Cuando el campo externo se apaga, todavía el material retiene la magnetización. En este caso la agitación térmica a temperaturas normales no puede alterar la orientación preferida de los dominios. Para medir a estos materiales ferromagnéticos experimentalmente, como no es posible usar una solenoide infinito, y para evitar los efectos en los extremos, lo que se hace es usar un toroide con N vueltas, sección transversal A con el material ferromagnético en el interior del alambre. Esto se llama el *anillo Rowland*. Por otro lado se usa una segunda bobina que medirá el flujo magnético a través de un galvanómetro. Para medir el campo magnético dentro del toroide, lo que se hace es ir aumentando la corriente en la bobina del toroide hasta un valor I . Por otro lado, en la bobina secundaria, debido al flujo cambiante, vamos a tener una fem inducida, que es proporcional a la tasa de cambio en el flujo. Con el galvanómetro, calibrado apropiadamente (haciendo mediciones primero con el toroide sin el material ferromagnético

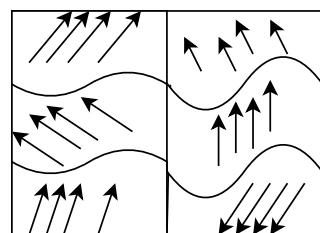


Figura 8: Dominios. Elaboración propia.

dentro), podremos obtener el valor de \vec{B} para diferentes valores de la corriente en el toroide.

9.6 Curva de histéresis

Consideremos un solenoide con un material ferromagnético desmagnetizado. Vamos a ir aumentando el campo \vec{H} a medida que vamos aumentando la corriente I , debido a que $H = nI$. A medida que la corriente aumenta, también aumenta \vec{B} , como podemos ver en la Figura 9. Cuando se representa \vec{B} en frente de \vec{H} , se le llama curva de magnetización. Al comienzo, en el origen 0, los dipolos están orientados al azar. Conforme se va aumentando el campo, se van orientando en la dirección del campo, hasta que H llega a un valor donde todos los dominios están orientados en la dirección del campo. Este punto se llama de saturación, en la figura H_1 y B_1 , dado que la magnetización \vec{M} en la Ecuación (6) llega al valor máximo posible. Ahora, si hacemos disminuir el campo \vec{H} (podemos seguir la curva por la dirección de las flechas), vemos que la curva no recorre el mismo camino de regreso, y podemos observar como el valor de \vec{B} decrece mas despacio de lo que aumentó. Es decir, podemos ver que la relación entre \vec{B} y \vec{H} por un lado no es lineal, y por otro lado no es univaluada.

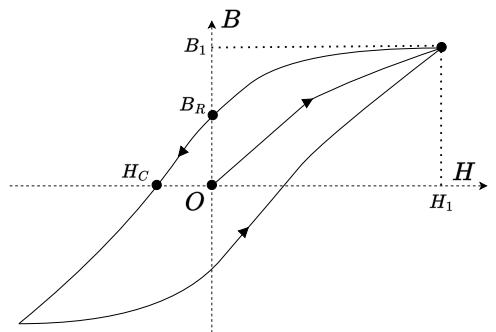


Figura 9: Curva de histéresis. Elaboración propia.

Si disminuimos \vec{H} hasta que $H = 0$, podemos observar en contra de lo esperado que $B \neq 0$. A este valor de \vec{B} se le llama *inducción remanente* o *remanencia*, B_r , en la figura. Si queremos reducir B a cero tenemos que aplicar un H negativo hasta que llegamos a $B = 0$, en un valor de $H = -H_c$, llamado *fuerza coercitiva*. Si seguimos disminuyendo el valor de H , llegaremos al valor de $H = -H_1$, donde una vez más nos encontramos en la situación de saturación, pero en el que los momentos magnéticos de los dominios apuntan en sentido opuesto al anterior.

Si ahora vamos de regreso y empezamos a aumentar el valor de \vec{H} hasta H_1 positivo, la curva se cierra. Esta es la llamada *curva de histéresis*. Notar algo importante: si en vez de empezar a disminuir \vec{H} cuando llegamos al valor H_1 , hubiéramos seguido aumentando su valor, la curva de histéresis sería diferente.

Esta curva lo que nos indica es que la magnetización de un material ferromagnético depende de la historia del material y de la intensidad del campo aplicado. Por otro lado, el área encerrada por la curva de magnetización indica el trabajo necesario para llevar el material por el ciclo de histéresis. Estas curvas, como acabamos de ver, se determinan experimentalmente. Aquí podéis ver un ejemplo ([Cortes, A and Delgado, E and Lopera, W and Prieto, P, 2005](#)).

Ejemplo 7. Magnetización de saturación

Queremos estimar la magnetización máxima en un cilindro de hierro largo. Considerando que hay dos espines del electrón no apareados, que son los que dan lugar a la magnetización. Datos: peso molecular del hierro 55 g/mol, densidad $d = 7.9 \text{ g/cm}^3$. La magnetización máxima es la magnetización de saturación, y como ya dijimos, se obtiene cuando todos los momentos magnéticos se alinean en el material. Si consideramos que la muestra tiene n átomos por unidad de volumen, podemos decir que:

$$M_{\text{saturación}} = n\mu,$$

considerando aquí μ el momento magnético por átomo. Los átomos por unidad de volumen, usando el peso y la densidad obtenemos que son $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$. Suponiendo que cada átomo aporta dos magnetones de Bohr (por los espines no apareados) al momento magnético, tenemos:

$$M_{\text{saturación}} = (8.5 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3) \cdot 2 \cdot (9.27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2/\text{átomo}) = 15.8 \times 10^5 \text{ A/m}.$$

Este es aproximadamente el valor de la saturación del hierro encontrado experimentalmente.

9.7 Materiales superconductores

La superconductividad fue descubierta en los años 1980. Permitió muchos avances a nivel tecnológico. Los materiales superconductores tienen muchas propiedades electromagnéticas inusuales. La más conocida es que el conductor no presenta resistencia eléctrica. Sobre este tema te recomendamos que visualices la siguiente vídeo-píldora:



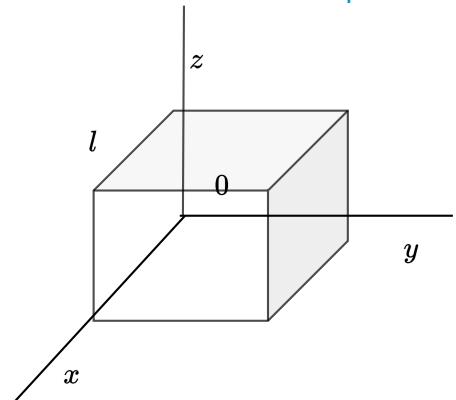
Accede al vídeo: Superconductores.

9.8 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio

1.

Tenemos un cubo de lado l situado como vemos en la figura. El material en el interior de cubo tiene una magnetización expresada por $\mathbf{M} = -(M/l)\mathbf{y}\hat{x} + (M/l)\mathbf{x}\hat{y}$ donde $M = \text{constante}$. Calcular el valor de las corrientes magnéticas J_b y K_b . *Solución:* $J_b = (2M/l)\hat{z}$, K_b : en $x = 0 K_b = 0$, en $x = l K_b = -M\hat{z}$, en $y = 0 K_b = 0$, en $y = l K_b = -M\hat{z}$, en $z = 0 K_b = -(M/l)(x\hat{x} + y\hat{y})$, en $z = l K_b = (M/l)(x\hat{x} + y\hat{y})$.



Ejercicio 2. Tenemos un cilindro infinitamente largo y uniformemente magnetizado. Este es el mismo caso del [Ejemplo 1](#). Indicar el valor del campo \vec{H} dentro y fuera del cilindro. *Solución:* $H_{\text{dentro}} = 0$, $H_{\text{fuera}} = 0$.

Ejercicio 3. Tenemos una varilla de alambre de cobre de radio R , que tiene una corriente uniformemente distribuida. Calcula \vec{H} dentro y fuera de la varilla, y el valor de \vec{B} fuera. *Solución:* $H_{\text{dentro}} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\varphi}$, $H_{\text{fuera}} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$, $B_{\text{fuera}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$.

Ejercicio 4. Un cascarón con radios a y b se encuentra uniformemente magnetizado con $M = M\hat{z}$ entre los cascarones $a \leq r \leq b$. El origen está en el centro de la esfera. Encuentra H_z para los valores positivos de z . *Solución:* $H_z = 0$ en $0 < z < a$, $H_z = -(M/3z^3)(z^3 + 2a^3)$ en $a < z < b$, $H_z = (2M/3z^3)(b^3 - a^3)$ en $b < z$.

Ejercicio 5. Tenemos un cable coaxial como en el [Ejemplo 6](#), pero en este caso entre los dos conductores se coloca un material no homogéneo, donde $K_b = k(\rho/a)$, siendo $k = \text{constante}$. Calcula el valor de \vec{H} y \vec{B} en la región en la que se encuentra el material. *Solución:* $H_\varphi = I/2\pi\rho$, $B_\varphi = k\mu_0 I/2\pi a$.

Ejercicio 6. Consideremos una esfera que tiene su centro en el origen, y que tiene un radio R . Está magnetizada donde $\vec{M} = M(r)\hat{r}$, y $M(0)$ tiene un valor finito. ¿Cuál será el valor de la densidad de corrientes magnéticas J_b y K_b ? Calcula el valor de \vec{B} en el interior de la esfera, y el valor de \vec{H} en el interior, en el exterior, y en la superficie de la esfera. *Solución:* $J_b = 0$, $K_b = 0$, $\vec{B}_{\text{interior}} = 0$, $\vec{H}_{\text{interior}} = -\vec{M}$, $H_{\text{exterior}} = 0$, $\vec{H}(r = R) = 0$.

9.9 Referencias bibliográficas

Cortes, A and Delgado, E and Lopera, W and Prieto, P (2005). Curvas características IV en condensadores ferroelectricos de PZT. *Revista Colombiana de Física*, 37(1), 237.

Solbes, Jordi and Silvestre, Verónica and Furió, Carles (2010). El desarrollo histórico de los modelos de átomo y enlace químico y sus implicaciones didácticas. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*.