Ecuaciones diferenciales

Sistemas autónomos: mapas de fase y sistemas dinámicos

Índice

Esquema

Sistemas autónomos

Mapas de fases
- Órbitas
- Puntos críticos

Clasificación de puntos críticos
- Sistemas lineales
- Sistemas no-lineales

Sistemas dinámicos (autónomos)
- Propiedades
- Teoría de la estabilidad
- Sistemas integrables y no-integrables

Ideas clave

4.1 Introducción y objetivos

En este tema vamos a centrarnos en un tipo de sistemas de dos ecuaciones, no necesariamente lineales, que tienen interés por poder representarse sus soluciones en el llamado *plano de fases*. Estos son los sistemas *autónomos*, que como recordamos, son aquellos que no dependen explícitamente de la variable independiente:

$$y' = f(y)\,.$$

Aunque los sistemas autónomos no lineales no se pueden resolver por lo general, el dibujo aproximado de las soluciones en el plano de fases nos da información sobre sus propiedades más importantes.

Un caso particular de sistemas autónomos son los *sistemas dinámicos*. Los sistemas dinámicos en física representan cualquier partícula o conjunto de partículas cuyo estado varía con el tiempo, y por tanto su evolución obedece a una ecuación diferencial con derivadas respecto al tiempo. Sin embargo, la teoría de sistemas dinámicos es muy general y se aplica en campos tan diversos como la mecánica clásica y la ecología. La potencia, y belleza, de esta teoría está precisamente en la utilización de las mismas ecuaciones y las mismas herramientas en sistemas aparentemente tan distintos como la población de peces en el Adriático o al excitación del medio activo en un láser, descubriendo patrones de comportamiento similares. Además, los sistemas dinámicos proporcionan el marco teórico adecuado para estudiar el *caos determinista* que mencionaremos brevemente al final de este tema. . En el estudio de los sistemas dinámicos los mapas de fase constituyen una herramienta esencial, ya que permiten visualizar de manera efectiva el comportamiento futuro del sistema a partir de sus condiciones iniciales.

En este tema vamos a hacer una excepción con la notación, y llamaremos t a la variable independiente, en vez de x como lo hemos hecho hasta ahora. Esto se debe evidentemente a que en la mayoría de las aplicaciones de los sistemas autónomos, y en particular en los sistemas dinámicos, la variable independiente representa el tiempo. A las variables dependientes las llamaremos x e y por comodidad ya que consideraremos exclusivamente sistemas de dos dimensiones.

En el tratamiento de sistemas dinámicos, que son básicamente sistemas de ecuaciones de segundo orden, consideraremos el caso general de m dimensiones y llamaremos a las x_i $(i = 1, \dots, m)$ a las variables independientes e y_i $(i = 1, \dots, m)$ as sus primeras derivadas respecto al tiempo. Asimismo, para las derivadas respecto del tiempo utilizaremos la notación más habitual que es poner un punto encima de la variable, así: $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$.

Los objetivos de este tema son los siguientes:

- Ser capaces de encontrar los puntos críticos de un sistema de ecuaciones autónomo.
- Determinar el tipo y estabilidad de cada uno de los puntos críticos del sistema.
- Dibujar el mapa de fases de un sistema de ecuaciones y extraer conclusiones sobre su comportamiento.

4.2 Mapas de fases

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones autónomas de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} ,$$

o escrito en forma vectorial:

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})\,.$$

Los sistemas autónomos tienen dos importantes propiedades que enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 1

1. Si $\mathrm{x}(t)$ es solución $\mathrm{x}(t + C)$ también es solución.
2. Solución de equilibrio $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_0$ si $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = 0$.

La primera propiedad significa que las soluciones son invariantes bajo traslación temporal, (suponemos que t representa el tiempo), lo cual es obvio si consideramos que las ecuaciones no dependen explícitamente de t. La segunda significa que un punto en el que el sistema no varía, y por tanto la derivada es 0, es un punto de equilibrio. La solución $(x(t), y(t))$ describe de forma paramétrica una curva en el espacio t, x, y. La proyección de esta curva en el plano x, y, llamado *plano de fases*, se llama *órbita* de la solución. El conjunto de órbitas de las soluciones de un sistema forman el llamado *mapa de fases*, el cual proporciona información valiosa sobre el comportamiento del sistema de una manera visual e intuitiva.

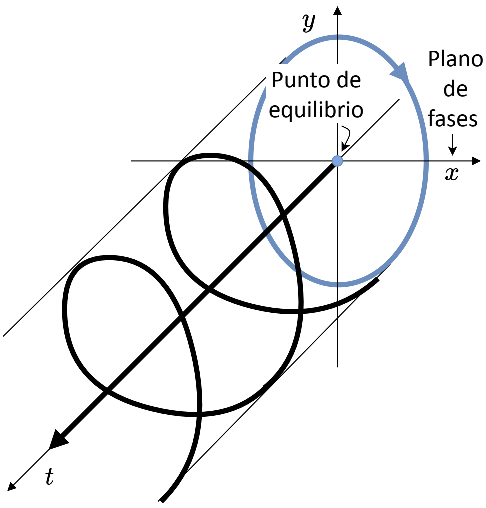

Figura 1: Proyección en el plano de fases de una solución de la ecuación del oscilador armónico. Elaboración propia.

Ejemplo 1.

Consideremos por ejemplo el oscilador armónico: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ que en forma de sistema es:

$$\dot{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{x}\,, \tag{1}$$

y cuya solución general es:

$$\mathrm{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \\ -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

El valor inicial $\mathrm{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lleva a la solución de equilibrio $\mathrm{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por otro lado, la solución que cumple $\mathrm{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathrm{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$. Esta solución describe una hélice en el espacio, y su proyección sobre el plano de fases es una elipse.

La flecha en la órbita indica el sentido en el que se recorre la órbita al avanzar t. La solución de una solución de equilibrio es un punto que llamamos *punto crítico* o *punto de equilibrio*. Nótese que al variar t se recorre la misma órbita, es decir, la órbita en sí no depende de t debido a que la ecuación es autónoma y por tanto las soluciones no dependen explícitamente de t. A esto nos referíamos cuando decíamos que las soluciones de un sistema autónomo son invariantes bajo traslación temporal.

La forma de las órbitas se puede calcular directamente, sin necesidad de resolver el sistema, a partir de una ecuación diferencial que relaciona directamente x e y. El sistema es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} .$$

Como $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$ entonces la segunda ecuación nos da $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} f_1(x, y) = f_2(x, y)$ de donde obtenemos la *ecuación diferencial de las órbitas*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)} .$$

Ejemplo 2.

Aplicando esta ecuación al ejemplo anterior, la ecuación de las órbitas es:

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y} ,$$

que se puede integrar fácilmente ya que es separable:

$$\int y dx = -\omega^2 \int x dx \, ,$$

dando la ecuación de una elipse, como esperábamos:

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C \, . \tag{2}$$

También se puede obtener información sobre la forma de las órbitas a partir del campo vectorial $\mathrm{V}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ que proporciona en cada punto del plano de fases un vector tangente a las órbitas.

Ejemplo 3.

El campo vectorial para el oscilador armónico es:

$$\mathrm{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix},$$

que representamos en la figura (para $\omega^2 = 1$).

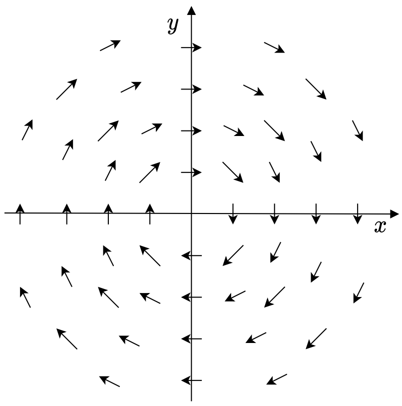

Figura 2: Campo vectorial de las órbitas de $\ddot{x} + x = 0$. Elaboración propia.

Las órbitas tienen una serie de propiedades que enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 2

Sea el sistema autónomo $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$. Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita del sistema. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

Como consecuencia, las órbitas en un mapa de fases solo pueden ser de tres tipos:

- Puntos críticos, correspondientes a las soluciones de equilibrio.
- Curvas cerradas simples, correspondientes a soluciones periódicas.
- Arcos simples, correspondientes a soluciones no-periódicas.

En un punto crítico puede convergir más de una órbita, pero esto no viola el Teorema 2 ya que las órbitas no llegan a tocarse en un tiempo finito sino que *tienden* a la solución de equilibrio cuando $t \to \infty$. Las órbitas de un sistema no-autónomo, las cuales dependen de t, sí que pueden cortarse en el plano de fases.

4.3 Clasificación de puntos críticos

Las soluciones de equilibrio son quizás las soluciones más importantes del sistema, y la mayor información sobre el mapa de fases nos las dan las órbitas en las cercanías de los puntos críticos. Vamos a ver ahora los diferentes tipos de puntos críticos que se pueden dar en un mapa de fases que se clasifican según el comportamiento de las órbitas en sus cercanías. Vamos a comenzar con los sistemas lineales, que siempre se pueden resolver de manera exacta, y pasaremos después a analizar los sistemas no-lineales, para los cuales utilizaremos un método aproximado.

Sistemas lineales

Consideramos el sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases},$$

es decir, $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{A}\mathrm{x}$ con $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Suponemos que $\|\mathrm{A}\| \neq 0$ por lo que el único punto crítico es $\mathrm{x}_0 = 0$ y los autovalores son no-nulos. Recordemos que la solución general de este sistema es:

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}t}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}\,,$$

donde $\mathrm{P} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ es la matriz de paso, siendo v_1 y v_2 autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente; $e^{\mathrm{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \varepsilon & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, con $\varepsilon = 0$ ó t; y C es un vector constante que podemos redefinir absorbiendo P^{-1} en un nuevo vector constante $\mathrm{C} \equiv \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}$. Entonces podemos distinguir cuatro casos dependiendo de la forma de $e^{\mathrm{J}t}$:

1) Autovalores reales y distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

La solución general tiene la forma: $\mathrm{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathrm{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathrm{v}_2$, y un vector tangente a las órbitas es: $\mathrm{x}'(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\mathrm{v}_1 + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\mathrm{v}_2$. Llamamos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a v_1 y v_2 respectivamente.

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, entonces cuando $t \to \infty$ todas las soluciones tienden al punto crítico, y el vector $\mathrm{x}'(t)$ tiende a v_1 (si $c_1 \neq 0$). Todas las órbitas entran en el punto crítico con la pendiente dada por el autovector asociado al mayor de los autovalores (v_1 en este caso), excepto dos órbitas, asociadas a soluciones con $c_1 = 0$, que entran en el punto crítico a lo largo de L_2. El punto crítico en este caso se llama *nodo estable*.

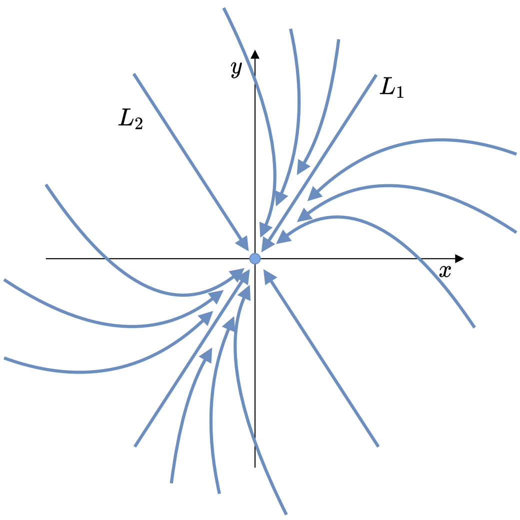

Figura 3: Nodo estable. Elaboración propia.

Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ las órbitas tienen la misma forma pero sentido opuesto. Esto equivale a invertir la flecha del tiempo, y el punto crítico se denomina *nodo inestable*.

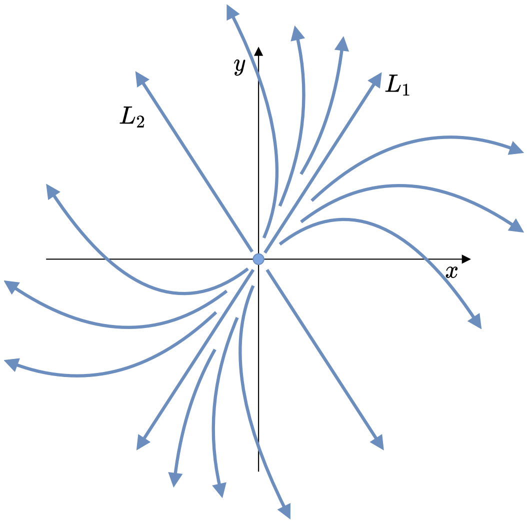

Figura 4: Nodo inestable. Elaboración propia.

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ las órbitas sobre L_2 se aproximan al punto crítico y las órbitas sobre L_1 se alejan de él. El resto de órbitas tiende asintóticamente a L_1 cuando $t \to \infty$ y hacia L_2 cuando $t \to -\infty$. El punto crítico se llama *punto de silla*.

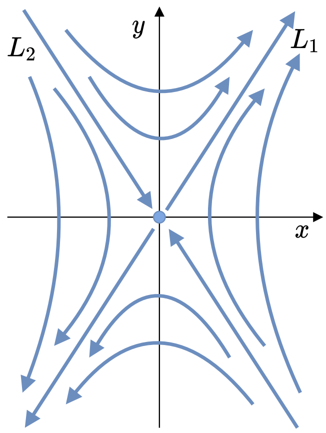

Figura 5: Punto de silla. Elaboración propia.

2) Autovalor doble y J diagonal

La solución general del sistema tiene la forma $\mathrm{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$.

Si $\lambda < 0$ las órbitas se acercan al punto crítico siguiendo semirrectas definidas por los vectores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. El punto crítico se llama *nodo estelar estable*.

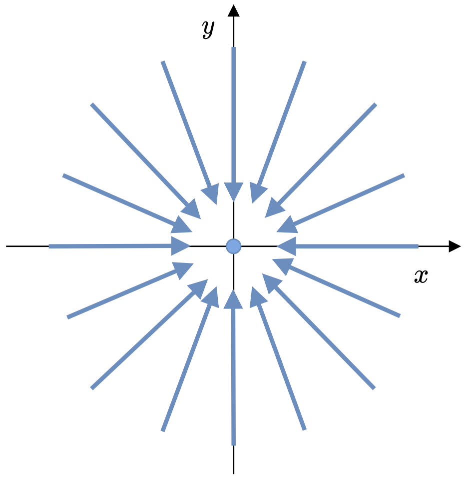

Figura 6: Nodo estelar estable. Elaboración propia.

Si $\lambda > 0$ las órbitas están formadas por las mismas semirrectas recorridas en sentido opuesto. En este caso el punto crítico se llama *nodo estelar inestable*.

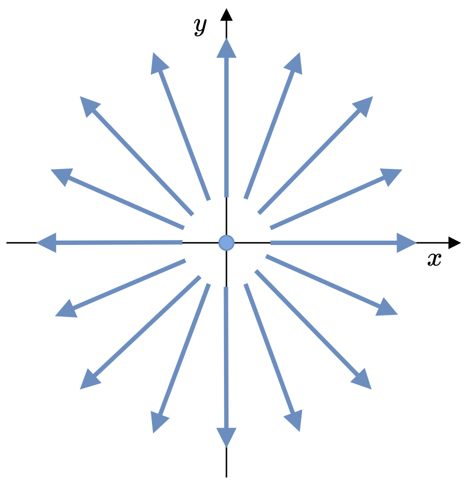

Figura 7: Nodo estelar inestable. Elaboración propia.

3) Autovalor doble y J no-diagonal

Si la forma canónica de Jordan de A no es diagonal, entonces la solución general del sistema es: $\mathrm{x}(t) = [c_1\mathrm{w} + (c_1 t + c_2)\mathrm{v}]e^{\lambda t}$, donde v es el único autovector asociado a λ. Un vector tangente a las órbitas es: $\mathrm{x}(t) = c_1\mathrm{v}]e^{\lambda t} + \lambda[c_1\mathrm{w} + (c_1 t + c_2)\mathrm{v}]e^{\lambda t}$.

Si $\lambda < 0$, cuando $t \to \infty$ todas las órbitas entran en el punto crítico con la pendiente dada por v. El punto crítico se llama *nodo de una tangente estable*.

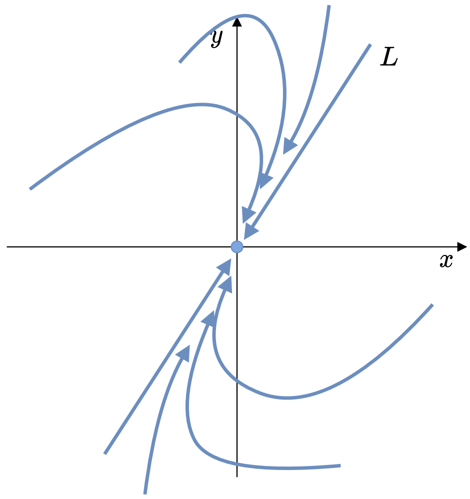

Figura 8: Nodo de una tangente estable. Elaboración propia.

Si $\lambda > 0$, el sentido de las órbitas se invierte, alejándose del punto crítico. En este caso el punto crítico se llama *nodo de una tangente inestable*. Elaboración propia.

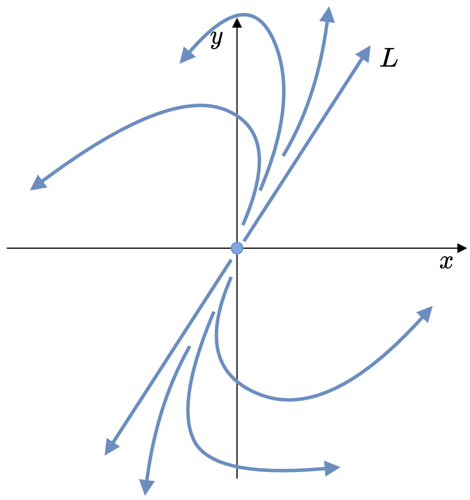

Figura 9: Nodo de una tangente inestable. Elaboración propia.

4) Autovalores complejos $\lambda = p \pm iq$

Entonces la solución es: $\mathrm{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \sin qt \end{pmatrix} e^{\lambda t}$,donde las c_i son constantes reales de las cuales solo dos son independientes.

Si $p = 0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas que rodean al punto crítico, que se llama *centro*. El sentido de giro se puede averiguar a partir del campo V.

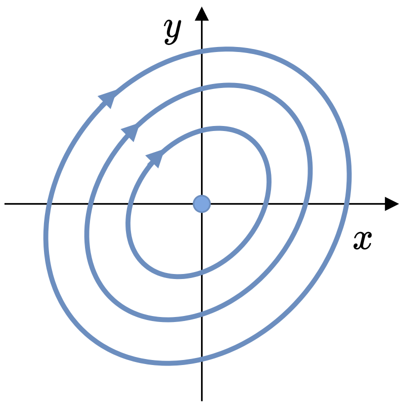

Figura 10: Centro. Elaboración propia.

Si $p < 0$ las órbitas son espirales decrecientes que tienden hacia el punto crítico cuando $t \to \infty$. El punto crítico se llama *foco estable*.

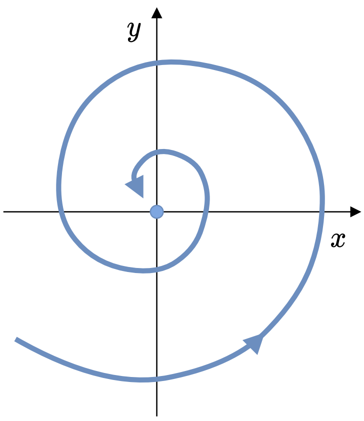

Figura 11: Foco estable. Elaboración propia.

Si $p > 0$ las espirales se alejan del punto crítico y éste se llama *foco inestable*. La quiralidad de las espirales nos la proporciona el campo V.

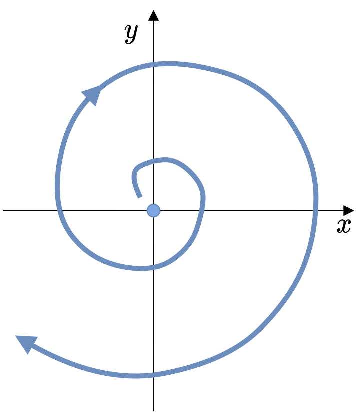

Figura 12: Foco inestable. Elaboración propia.

Sistemas no-lineales

Consideramos ahora el sistema no-lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} , \tag{3}$$

en el que $\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es punto crítico.

Para tratar los sistemas no-lineales desarrollamos las funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en serie de Taylor en torno al punto crítico e investigamos el carácter del punto crítico en la aproximación lineal, lo cual nos da información preliminar sobre las soluciones del sistema. El desarrollo en serie de las funciones es:

$$f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} + \left.\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} + R_{f_1}(x, y),$$
$$f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} + \left.\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} + R_{f_2}(x, y),$$

donde R_{f_1} y R_{f_2} representan todos los términos no-lineales del desarrollo, que tienden a cero cuando x e y se acercan al punto crítico. Como estos términos son pequeños cerca del punto crítico, es de esperar que las órbitas cercanas al punto crítico sean similares a las de la aproximación lineal.

$f_1(x_0, y_0)$ y $f_2(x_0, y_0)$ son cero por definición de punto crítico, por lo que el sistema en aproximación lineal queda:

$$x' = f_{1x}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{1y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$
$$y' = f_{2x}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{2y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

Por comodidad conviene llevar el punto crítico al origen mediante el cambio de variable:

$$u = x - x_0$$
$$v = y - y_0 .$$

El sistema queda entonces como $u' = Au$ con $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Suponemos que $|A| \neq 0$, entonces se dice que x_0 es un punto crítico elemental. Esto significa que x_0 es aislado, es decir, existe un entorno de x_0 en el que no hay puntos críticos. Si $|A| = 0$ será necesario acudir a la ecuación diferencial de las órbitas y resolverla si es posible. El siguiente teorema que expresamos en forma de tabla relaciona el carácter y estabilidad de un punto crítico del sistema no-lineal de la Ecuación (3) con las del mismo punto crítico en la aproximación lineal.

Teorema 3

Si en la *aproximación lineal* x_0 es:	En la *ecuación no-lineal* :
Nodo	x_0 es un punto crítico de igual tipo y estabilidad que en la ecuación linealizada.
Punto silla	
Foco	
Nodo estelar	Si f_1 y f_2 tienen derivadas parciales de 2º orden continuas, x_0 es un punto crítico de igual estabilidad que la ecuación linealizada.
Nodo de una tangente	
Centro	Si f_1 y f_2 son analíticas, entonces x_0 es centro o foco estable o foco inestable.

Así pues, analizando la aproximación lineal del sistema podemos casi siempre conocer la forma de las órbitas en las cercanías de un punto crítico. Fuera de este entorno las órbitas pueden ser completamente distintas a las del lineal. Es de esperar que los centros sean los únicos puntos críticos que no se conservan pues los pequeños términos no-lineales pueden perturbar las órbitas cerradas y convertirlas en una espiral hacia adentro o hacia afuera. Si el sistema es exacto, es decir, si $f_x(x, y) + g_y(x, y) = 0$ entonces los puntos críticos elementales solo pueden ser centros o puntos silla. Por tanto los centros de la aproximación lineal lo son también del sistema no-lineal.

También se conservará un centro si las órbitas del sistema no-lineal Ecuación (3) poseen simetría respecto a alguna recta que pase por x_0. El análisis de las simetrías se puede hacer a la vista de las propias órbitas o a partir del campo V como se muestra en este teorema:

Teorema 4

Si x_0 es un punto crítico del sistema $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$, la aproximación lineal posee un centro y, o bien:

1. x_0 está sobre el eje x, $f_1(x, -y) = -f_1(x, y)$, $f_2(x, -y) = f_2(x, y)$ (órbitas simétricas respecto al eje x),
2. x_0 está sobre el eje y, $f_1(-x, y) = f_1(x, y)$, $f_2(-x, y) = -f_2(x, y)$ (órbitas simétricas respecto al eje y),

entonces el punto crítico x_0 es un centro del sistema no-lineal.

Ejemplo 4.

Sea la ecuación no lineal $\ddot{x} = \cos(x + \dot{x}^2)$, o en forma de sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = \cos(x + y^2) \end{cases},$$

cuyos puntos críticos son:

$$\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2k+1}{2}\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La aproximación lineal en torno a los puntos críticos es:

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = (-1)^{k+1} x \end{cases}.$$

Por tanto, la matriz de los coeficientes de la ecuación linealizada es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos la ecuación característica $\lambda^2 = (-1)^{k+1}$ con soluciones $\lambda = \pm 1$ si k es impar, y $\lambda = \pm i$ si k es par. Por tanto,

- Si k es impar $\rightarrow \mathrm{x}_0$ es punto silla de la aproximación lineal, y también lo es de la ecuación no-lineal por el Teorema 3.
- Si k es par $\rightarrow \mathrm{x}_0$ es centro de la aproximación lineal. Como x_0 está sobre el eje x, $f_1 = y$ es impar y f_2 es par respecto a y, también es centro de la ecuación no-lineal por el Teorema 4.

El significado geométrico de la estabilidad de las soluciones de equilibrio es evidente. x_0 es estable si las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio prefijado, y es asintóticamente estable si además las órbitas tienden a x_0 cuando $t \rightarrow \infty$.

La inestabilidad de algunas soluciones no-constantes también se ve claramente en el mapa de fases. Si las órbitas se alejan del punto crítico, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad no se puede ver tan fácilmente ya que órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes. Por ejemplo, las órbitas de un sistema lineal con un punto silla se acercan entre sí, y sin embargo todas las soluciones son inestables.

4.4 Ecuaciones autónomas de 2° orden

Todo lo dicho hasta ahora sobre sistemas autónomos se puede aplicar evidentemente al caso particular de las ecuaciones autónomas.

Definición 1: Definición de sistema dinámico

Un sistema dinámico en física es una partícula (o conjunto) cuyo estado varía en el tiempo y por tanto obedece a ecuaciones diferenciales con derivadas respecto al tiempo, las cuales en mecánica se llaman *ecuaciones del movimiento*.

Hay que destacar que esta definición es muy amplia y la teoría de sistemas dinámicos se aplica en una gran variedad de campos como la biología, la química, la economía, o la medicina. Un sistema dinámico posee un número n de grados de libertad, los cuales se representan mediante n coordenadas generalizadas x_i ($i = 1, \ldots, n$). Las coordenadas generalizadas pueden estar asociadas a cualquier cantidad que varíe en el tiempo, dependiendo del sistema en estudio estas pueden representar posiciones en el espacio, ángulos, poblaciones animales, cotizaciones en bolsa, etc.

La mayoría de los sistemas dinámicos de interés se describen mediante ecuaciones autónomas de segundo orden, no necesariamente lineales, por tanto contaremos con un sistema de n ecuaciones de segundo orden $\ddot{x}_i = f_i(x_i, \dot{x}_i)$ ($i = 1, \ldots, n$), o $2n$ ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = f_i(x_i, y_i) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Las soluciones de este sistema describen trayectorias en un espacio de fases de $2n$ dimensiones $(x_i, \dot{x}_i)$. Bajo condiciones muy generales (ver el teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones), una trayectoria particular queda determinada de manera única por un conjunto de $2n$ valores iniciales $x_1(0), \ldots, x_n(0), \dot{x}_1(0), \ldots, \dot{x}_n(0)$. La evolución de un sistema dinámico, tanto hacia el futuro o el pasado, queda completamente determinada por el estado del sistema en un instante de tiempo dado.

Los mapas de fases nos ayudan a entender el comportamiento de un sistema dinámico y, como veremos más adelante, proporciona una herramienta para el estudio del caos. Sin embargo es imposible representar un espacio de fases de más de dos dimensiones por lo que en los ejemplos nos limitaremos a sistemas con un solo grado de libertad.

Propiedades de sistemas dinámicos autónomos

Consideremos por tanto un sistema dinámico de un solo grado de libertad, descrito por una ecuación autónoma de segundo orden $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, o en forma de sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} .$$

La matriz de la aproximación lineal es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix},$$

evaluada en cada punto crítico. La ecuación de las órbitas tiene la forma:

$$y\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

y el campo de vectores tangentes a las orbitas es:

$$\mathrm{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ f(x, y) \end{pmatrix} .$$

De estas expresiones se deducen las siguientes propiedades de los mapas de fases de ecuaciones autónomas de segundo orden:

- Los puntos críticos de las ecuaciones están sobre el eje $y = 0$, y vienen dados por los ceros de la función $f(x, y)$.
- Las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior $(y > 0)$ y hacia la izquierda en el inferior $(y < 0)$.
- Las órbitas que cortan el eje $y = 0$ lo hacen perpendicularmente.
- Las ecuaciones no poseen nodos estelares.
- Un autovector asociado a un autovalor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

El Ejemplo 1 es un sistema dinámico autónomo.

Teoría de la estabilidad

Las ecuaciones que describen un sistemas dinámico suelen cumplir el teorema de existencia y unicidad. Como el estado de un sistema en un instante de tiempo dado (condiciones iniciales) determinan de manera única su evolución tanto hacia el futuro como hacia el pasado, dichos sistemas se llaman *deterministas*. Sin embargo, el hecho de que un sistema dinámico sea determinista no quiere decir que sea *predecible* en la práctica. Por un lado, nuestro conocimiento sobre las condiciones iniciales nunca es total, cualquier medida está sometida a un cierto error; por otro lado, muchos sistemas dinámicos no se pueden resolver exactamente y su solución requiere métodos numéricos que introducen un cierto error de precisión en cada paso. Ya sabemos que estos pequeños errores pueden lugar a soluciones muy distintas a tiempos alejados del origen. Aunque ya nos hemos encontrado varias veces con las nociones de estabilidad e inestabilidad, conviene repasarlas ya que son fundamentales en la teoría de sistemas dinámicos, distinguiendo entre la estabilidad de puntos críticos (caso estático) y la estabilidad de soluciones o estabilidad orbital (caso dinámico).

Consideremos un sistema dinámico autónomo $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, y sea x_0 un punto crítico del sistema en el espacio de fases.

Definición 2: Caso estático - Estabilidad de puntos críticos

1. x_0 es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que, si $\mathrm{x}(t)$ es una solución tal que $\left\|\mathrm{x}(0) - \mathrm{x}_0\right\| < \delta$,se cumple que $\left\|\mathrm{x}(t) - \mathrm{x}_0\right\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Es decir, si en $t = 0$ una solución $\mathrm{x}(t)$ está suficientemente cerca de un punto de equilibrio x_0, entonces la solución nunca se aleja de ese punto.

2. x_0 es *asintóticamente estable* si existe un δ tal que, $\mathrm{x}(t) \to \mathrm{x}_0$ cuando $t \to \infty$ si $\left\|\mathrm{x}(0) - \mathrm{x}_0\right\| < \delta$. En este caso las trayectorias próximas a x_0 se acercan de manera asintótica al punto. Este punto en el espacio de fases se llama apropiadamente *atractor*. La región del espacio de fases en que las trayectorias tienden al atractor se llama *cuenca de atracción*.

3. En el resto de casos x_0 es *inestable*. Esto quiere decir que hay trayectorias que pasan arbitrariamente cerca de x_0 y luego se alejan.

Los nodos estables, nodos estelares estables y nodos de una tangente estables y focos estables de la sección anterior son *asintóticamente estables* de acuerdo con la Definición 2. Los centro son solamente *estables*, no asintóticamente; y todos los demás tipos, incluidos los puntos silla, son inestables.

Definición 3: Caso dinámico - Estabilidad de soluciones o estabilidad orbital

1. $x(t)$ es *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que, si $x^*(t)$ es otra solución tal que $\left\|x^*(0) - x(0)\right\| < \delta$, se cumple que $\left\|x^*(t) - x(t)\right\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Esto es, si $x(t)$ es estable, entonces la solución aproximada $x^*(t)$ se mantiene próxima a $x(t)$ cuando ε es suficientemente pequeño.

2. $x(t)$ es *asintóticamente estable* si es estable y además $\lim_{t\to\infty} \left\|x^*(t) - x(t)\right\| = 0$. En otras palabras, la solución aproximada $x^*(t)$ se va acercando cada vez más a $x(t)$. Por tanto, las ideas de atractor y cuenca de atracción se pueden generalizar del caso estático al dinámico. Si existe una cuenca de atracción, esta es la región más importante del espacio de fases, ya que las trayectorias que pasan por ella al cabo de un tiempo suficiente acaban convergiendo en la misma órbita, olvidando por así decirlo sus condiciones iniciales.

3. $x(t)$ es *inestable* si no es estable. En este caso hay soluciones $x^*(t)$ con ε arbitrariamente pequeño que se separan de $x(t)$. Las órbitas inestables también se pueden definir como aquellas en las que $\lim_{t\to\infty} \left\|x^*(t) - x(t)\right\| = \infty$, y cabe distinguir varios tipos, según lo rápido que tienda al infinito la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada. Si el error tiende a infinito de modo exponencial, se dice que el sistema tiene *sensibilidad fuerte a las condiciones iniciales*. Este es uno de los elementos que caracterizan el llamado *movimiento caótico*.

La Figura 13 ilustra los diferentes casos de estabilidad orbital:

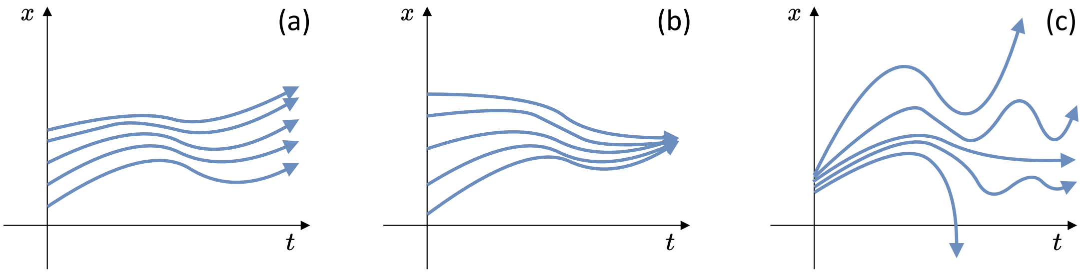

Figura 13: Diferentes casos de estabilidad orbital: (a) trayectorias estables; (b) trayectorias asintóticamente estables; (c) trayectorias inestables.

Este vídeo muestra algunos ejemplos de órbitas en el espacio de fases de un sistema dinámico.

Accede al vídeo: Órbitas en el espacio de fases de un sistema dinámico.

Sistemas integrables y no-integrables

Un *sistema integrable* es aquel cuya ecuación del movimiento se puede resolver por *cuadraturas*, es decir, su solución general se puede encontrar realizando un número finito de integraciones de funciones. Todos los sistemas lineales y los sistemas exactos con un grado de libertad son integrables, pero en la práctica los sistemas integrables son la excepción. En los sistemas integrables es posible encontrar una solución general al problema, bien de manera exacta o bien con un margen de precisión arbitrario para todo tiempo t, mediante un número finito de operaciones que no depende de t. A esta situación se le llama *comportamiento regular*.

Para los *sistemas no-integrables* no existe ningún algoritmo finito que de la solución para todo t, y la cantidad de operaciones que habría que realizar para encontrar la solución en el instante de tiempo t con cierta precisión crece más deprisa que t. Esta situación ocurre cuando la inestabilidad juega un papel importante en el sistema, de modo que mantener una cierta precisión cuesta cada vez más esfuerzo en términos de operaciones matemáticas. A esta situación se le llama *comportamiento irregular* o *caótico*.

El descubrimiento del comportamiento caótico en los años 70 produjo un profundo impacto en la teoría de sistemas dinámicos y, por extensión, a todas las disciplinas en que se aplica, desde la meteorología hasta la biología. Como el comportamiento caótico solamente se da cuando las ecuaciones no son lineales, es habitual referirse a la teoría del caos como *dinámica no-lineal*, aunque hay ecuaciones no-lineales que sí son integrables.

La alta sensibilidad a las condiciones iniciales que caracteriza a los sistemas no-integrables se suele ilustrar con el paradigma de una mariposa cuyo aleteo (condición inicial) causa un huracán en la otra punta del mundo (solución en el tiempo t), por eso la teoría del caos ha trascendido a la cultura popular como el *efecto mariposa*.

Es preciso señalar que los sistemas integrables pueden tener y de hecho tienen soluciones inestables (como ya hemos visto) y los no-integrables pueden tener soluciones estables. La diferencia entre los sistemas integrables y no-integrables está realmente en la *proporción* de soluciones inestables y en su *sensibilidad* a las condiciones iniciales.

En la integrabilidad de un sistema juega un papel esencial la existencia de *integrales primeras* que definimos a continuación:

Definición 4: Integral primera

Una integral primera (o *constante de movimiento*, en sistemas mecánicos) es una función de las variables x_i y sus derivadas $\dot{x}_i$ que es constante a lo largo de una trayectoria en el espacio de fases, es decir, una función C es integral primera si y solo si $C\,(t, \mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t)) = \mathrm{cte.}$ donde $(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t))$ es una órbita en el espacio de fases.

El nombre *integral primera* proviene del hecho de que antiguamente los matemáticos intentaban resolver todas las ecuaciones diferenciales mediante integraciones sucesivas. Un ejemplo de integral primera o constante de movimiento es la energía de una partícula en un campo conservativo, que en una dimensión es $E\,(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x)$ donde $V(x)$ es el potencial.

Teorema 5

Un sistema dinámico de orden m tiene exactamente m integrales primeras independientes entre sí. Para demostrarlo, sea el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots & \dots \\ \dot{x}_m & = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases},$$

con solución definida y única en un $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$; y sean las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_1(t_0) & = x_{10} \\ x_2(t_0) & = x_{20} \\ \dots & \dots \\ x_m(t_0) & = x_{m0} \end{cases},$$

con $t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0} \in D$. La solución general tiene la forma:

$$x_k = C_k(t; t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}), \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

donde se indica la dependencia de los valores iniciales. Si consideramos ahora t_0 como el tiempo actual y los $x_k(t)$ como los valores iniciales, obtenemos las expresiones:

$$x_{k0} = C_k(t_0; t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

las cuales tienen forma de integrales primeras. Queda entonces demostrado que hay al menos m integrales primeras independientes entre sí. Puede demostrarse también que si hubiera otra constante de movimiento no dependería de t, y por tanto sería una función de las x_{k0} ya definidas. Por tanto hay exactamente m constantes independientes, ni más ni menos.

Del Teorema 5 se deduce que si se conocen un conjunto de m integrales primeras independientes entre sí la solución del sistema es inmediata, veamos por qué. Suponemos que conocemos m integrales primeras:

$$C_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) = c_k \,. \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

Entre ellas al menos una debe depender explícitamente del tiempo, de lo contrario no habría movimiento. Como las C_k son funcionalmente independientes, en principio se pueden invertir, obteniéndose así:

$$x_k = f_k(t, c_1, c_2, \ldots, c_m) \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

que es la solución general del sistema, dependiente de m integrales primeras.

Aunque el sistema tenga m integrales primeras independientes y las funciones de la Ecuación (4) se pueden invertir, ocurre que cuando las constantes están dadas por funciones que no son algebraicas pueden ser *no-aislantes*, lo cual significa que la región del espacio de fases que definen está infinitesimalmente próxima a las definidas por otras constantes. Por ello las integrales primeras no-aislantes no sirven para resolver la ecuación del movimiento. En estas situaciones además se producen inestabilidades ya que en un intervalo infinitesimal de unos datos iniciales se cruzan trayectorias distintas que van a regiones separadas del espacio de fases. Por tanto la integrabilidad de un sistema depende de la existencia de un número suficiente de cantidades conservadas con buenas propiedades.

Sistemas exactos

Veamos ahora qué es un *sistema exacto*:

Definición 5: Sistema exacto

Un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} , \tag{5}$$

se llama exacto si $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$.

Si el sistema es exacto, entonces la ecuación diferencial de las órbitas también lo es:

$$f_2(x, y) - f_1(x, y)\frac{dy}{dx} = 0\,, \tag{6}$$

y por tanto se puede resolver encontrando la función $H(x, y)$ que cumple $f_1(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}$ y $f_2(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Entonces la solución de la Ecuación (6), es decir, las órbitas de la Ecuación (5) vienen dadas por $H(x, y) = C$, donde C es una constante. Además sus puntos críticos cumplen la siguiente propiedad:

Teorema 6

Los puntos críticos elementales de un sistema exacto solo pueden ser centros o puntos silla. Para demostrarlo, tengamos en cuenta que la matriz de coeficientes de la aproximación lineal en torno a x_0, y_0 es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

Por lo que la ecuación de autovalores es:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \lambda\right) - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \cancel{\lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0\,.$$

El término en λ es cero por la definición de sistema autónomo y los dos últimos términos son justamente el determinante de A, por lo que la ecuación de autovalores queda:

$$\lambda^2 + |\mathrm{A}| = 0\,.$$

Si $|\mathrm{A}|$ es negativo, los autovalores son reales de distinto signo y el punto crítico, tanto del sistema lineal como del no-lineal, es un punto silla. Si $|\mathrm{A}|$ es positivo, entonces las raíces de la ecuación de autovalores son imaginarias puras y el punto crítico en la aproximación lineal es un centro. Además, se puede ver que el término en λ de la ecuación de autovalores se sigue anulando cuando incluimos los términos sucesivos del desarrollo de Taylor, por tanto el punto crítico que es centro en la aproximación lineal lo sigue siendo en el sistema no-lineal.

Ejemplo 5. Sistemas hamiltonianos

Entre los sistemas dinámicos tienen una importancia especial los sistemas *hamiltonianos*, que son aquellos sistemas que están gobernados por las *ecuaciones de Hamilton*:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} ,$$

donde q_i son las *coordenadas generalizadas* que determinan la posición del sistema en un instante de tiempo dado, p_i son los llamados *momentos conjugados* a cada una de las coordenadas q_i, y H es una función de las q_i y p_i llamada *hamiltoniano*. De esta definición se deduce que los sistemas hamiltonianos son exactos ya que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = 0\,.$$

y por tanto las órbitas en el espacio de fase vienen dadas por $H(q_i, p_i) = C$. El oscilador armónico del Ejemplo 1 es un sistema hamiltoniano:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)\,.$$

A partir de este hamiltoniano es fácil obtener tanto la ecuación de movimiento (Ecuación (1)) como la ecuación de las órbitas (Ecuación (2)).

La mecánica hamiltoniana tiene un papel central en física. Además de ofrecer un método elegante para encontrar la ecuación de movimiento de cualquier sistema sin rozamiento, proporciona una conexión teórica entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica.

4.5 Ejemplos

Vamos a ver ahora unos ejemplos de interés histórico tomados de (Abellanas, 1964) y que ilustran la versatilidad de los conceptos estudiados en este tema.

Modelo de predadores-presas

En un intento de dar un modelo matemático capaz de describir las fluctuaciones de carácter periódico que se habían observado en la población de tiburones (y) y de los peces que les servían de alimento (x) en el Adriático, V. Volterra propuso el sistema (propuesto independientemente por A. J. Lotka):

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{cases} . \tag{7}$$

Los términos ax y $-cy$ dan cuenta de lo que sería el crecimiento ($a > 0$) natural de la población de peces si no hubiese tiburones y del decrecimiento ($-c < 0$) de la población de tiburones en ausencia de presas. Por su parte, los términos en xy corrigen ese comportamiento de forma proporcional al número de encuentros predador-presa. Su efecto es positivo para la población de tiburones y negativo para la de peces.

La Ecuación (7) tienen dos puntos críticos. El $(0, 0)$ carece de interés (punto silla, especies extinguidas). El relevante es $(x_0 = c/d, y_0 = a/b)$. En esos niveles precisos de población x_0, y_0 (que suponemos mayores que cero), las poblaciones estarían en equilibrio. Pero, ¿qué ocurre con unos niveles de población distintos iniciales?

Para trasladar al origen el punto crítico que nos interesa, hagamos $u = x - x_0$ y $v =$

$y - y_0$, con lo cual el sistema Ecuación (7) se expresa así:

$$\begin{cases} u' &= -(bc/d)v - buv \\ v' &= (ad/b)u + duv \end{cases},$$

con raíces $\pm i\sqrt{ac}$ para la ecuación característica de su parte lineal. Luego es un centro (estable) con trayectorias elípticas a su alrededor, de ecuación $(ad^2)u^2 + (b^2c)v^2 = \text{cte.}$, para el sistema linealizado. Sin embargo por ser centro en la aproximación lineal no es posible deducir nada concreto acerca del sistema completo. Afortunadamente, es fácil deducir de la Ecuación (7) que $(c/x - d)\,\mathrm{d}x + (a/y - b)\,\mathrm{d}y = 0$, ecuación de variables separadas con solución $\ln(x^c y^a) = (by + dx) + \text{cte.}$

Puede demostrarse que son curvas cerradas en tono al punto crítico, deformación de las elipses del sistema lineal (Figura 14), de manera que el punto crítico es un centro estable. De hecho, el carácter cerrado de las trayectorias en el plano de fases explica el comportamiento periódico observado en el Adriático para el problema antes citado.

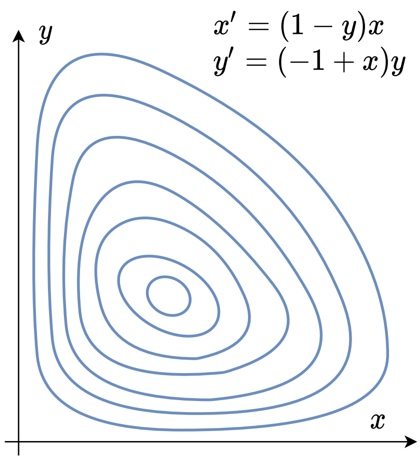

Figura 14: Mapa de fases de la ecuación de Lotka-Volterra. Elaboración propia.

La lucha entre las especies

Si se intenta describir mediante un modelo sencillo la lucha por la supervivencia entre dos especies que se disputan una fuente común de alimentos, parece plausible recurrir a este sistema:

$$\begin{cases} x' &= ax - bx^2 - cxy \\ y' &= a^*y - b^*y^2 - c^*xy \end{cases},$$

donde a, b, c, a^*, b^*, y c^* son constantes positivas.

El término en xy da cuenta de la competencia mutua. Corrige lo que en ambas poblaciones x, y, eran ecuaciones logísticas de población limitada superiormente.

Hay cuatro puntos críticos. Tres de ellos suponen la desaparición de alguna especie: $(0, 0)$, $(a/b, 0)$ y $(0, a^*/b^*)$. El cuarto, solución simultánea de $bx + cy = a$ y $c^*x + b^*y = a^*$, es el candidato a representar una posición de equilibrio ecológico entre ambas especies. Según la influencia de la competitividad sea grande ($cc^* > bb^*$) o pequeña ($cc^* < bb^*$), el comportamiento a grandes t del sistema resulta drásticamente diferente, como muestran los ejemplos siguientes:

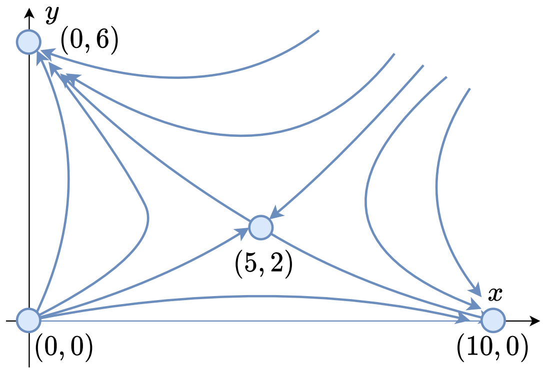

Figura 15: Mapa de fases de la Ecuación (8). Elaboración propia.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} x' &= 20x - 2x^2 - 5xy \\ y' &= 30y - 5y^2 - 4xy \end{cases} \tag{8}$$

$(cc^* = 20 > bb^* = 10)$

Los cuatro puntos críticos son $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(10, 0)$, y $(5, 2)$.

- En $(0, 0)$ es sistema linealizado es $x' = 20x$, $y' = 30y$, luego $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 30$, ambos positivos. Es un nodo estable.
- En $(0, 6)$, tras hacer el cambio $u = x$, $v = y - 6$ para trasladarlo al origen de (u, v), se ve que el sistema linealizado es $u' = -10u$, $v' = -24u - 30v$ con λ_1 y λ_2 negativos. Es un nodo asintóticamente estable.
- En $(10, 0)$ el cambio $u = x - 10$, $v = y$ lleva a la linealización $u' = -20u - 50v$, $v' = -10v$, de nuevo con λ_1 y λ_2 negativos. Nodo asintóticamente estable.
- En $(5, 2)$ el cambio $u = x - 5$, $v = y - 2$ produce la linealización $u' = -10u - 25v$, $v' = -8u = 10v$, con $\lambda_1 = 10(\sqrt{2} - 1) > 0$ y $\lambda_2 = -10(\sqrt{2} + 1) < 0$. Es un punto silla (inestable).

Todo lo expuesto se recoge cualitativamente en la Figura 15. El modelo representa una situación en la que solo sobrevive una de las dos especies (cual de ellas sea depende de las condiciones iniciales).

Ejemplo 7.

$$\begin{cases} x' &= 20x - 4x^2 - 2xy \\ y' &= 25y - 4y^2 - 3xy \end{cases} \tag{9}$$

$$(cc^* = 6 < bb^* = 16)$$

Los cuatro puntos críticos son $(0, 0)$, $(0, 25/4)$, $(6, 0)$, y $(3, 4)$. Por un procedimiento análogo se ve que son del tipo que indica la Figura 16. Ahora ambas especies tienden en su evolución a un punto de existencia en equilibrio, sobreviviendo ambas.

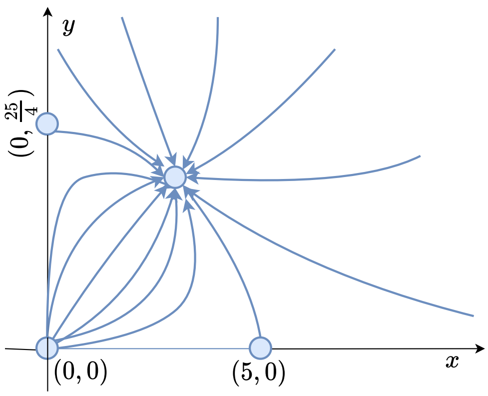

Figura 16: Mapa de fases de la Ecuación (9). Elaboración propia.

4.6 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Dibujar el mapa de fases de:

- $\ddot{x} = -2\dot{x} - 2x$
- $\begin{cases} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= x + y^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \dot{x} &= y(x+1) \\ \dot{y} &= x(1+y^3) \end{cases}$

Ejercicio 2. Encontrar la ecuación de las órbitas y dibujar el mapa de fases de los sistemas:

1. $\begin{cases} \dot{x} &= x + 2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} &= x(x-1) \\ \dot{y} &= (x-y)(x-2) \end{cases}$

Ejercicio 3. Clasificar los puntos críticos de:

1. $\begin{cases} \dot{x} &= x^3 - y \\ \dot{y} &= x + y^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y \\ \dot{y} &= xe^y \end{cases}$

Ejercicio 4. Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución $x = 0$ de las ecuaciones:

1. $\ddot{x} = a \sin x \cos x$

2. $\ddot{x} + a\dot{x} + e^x = 1$

Ejercicio 5. Clasificar los puntos críticos de $\ddot{x} = 1 - x^2 - k\dot{x}$ con $k \geq 0$ en función de los valores de k. Dibujar aproximadamente el mapa de fases para $k = 0$, $k = 1$, y $k = 3$. Interpretar físicamente.

4.7 Referencias bibliográficas

Abellanas, L y Galindo, A. (1964). *Métodos de cálculo*. McGraw-Hill.