Teoría de campos

El campo gravitatorio

Índice

Esquema

Ley de gravitación universal

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Leyes de Kepler

Velocidad de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Primera ley: órbitas elípticas

Segunda ley: velocidad areolar constante

$$m r_a v_a = m r_p v_p$$

Campo gravitatorio

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Tercera ley

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$$

Potencial gravitatorio

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$

Rotacional del campo gravitatorio

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

Divergencia del campo gravitatorio

$$\nabla \vec{g} = -4\pi G\rho$$

Las mareas

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$$

Período de revolución de un planeta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}}$$

Satélites artificiales

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Variación de g con alturas pequeñas

$$g \simeq g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

Variación de g con la profundidad

$$g = g_0\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

Principio de equivalencia

9.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiaremos la ley de gravitación universal formulada por Newton. Enunciaremos también las tres leyes de Kepler del movimiento planetario, que la ley de gravitación universal fue capaz de explicar. Posteriormente introduciremos y caracterizaremos los conceptos de campo y potencial gravitatorios. Veremos cómo surge la tercera ley de Kepler al aplicar la fuerza de la gravedad a una órbita circular. Estudiaremos la velocidad de escape y las variaciones de la aceleración de la gravedad en la Tierra con la altura y la profundidad. Finalmente expondremos una introducción a la teoría relativista de la gravitación presentando pormenorizadamente el principio de equivalencia.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Conocer la ley de **gravitación universal**, así como su potencia explicativa y su alcance y sus límites.
- Conocer las tres **leyes de Kepler** con las que se describió matemáticamente las observaciones astronómicas del movimiento planetario del sistema solar.
- Comprender los conceptos de **campo y potencial gravitatorios** así como las ecuaciones que los determinan.
- Saber obtener la **tercera ley de Kepler** para una órbita circular a partir de la fuerza de la gravedad y de la fórmula de la fuerza centrípeta.
- Entender la deducción de las fórmulas de la variación de la **aceleración de la gravedad en la Tierra** con pequeñas y grandes alturas y con la profundidad.
- Comprender el concepto de **velocidad de escape** de un astro y saber deducir su fórmula.

- Entender el **principio de equivalencia**, base de la teoría de la relatividad general, teoría relativista de la gravitación.

9.2 Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal fue formulada por Isaac Newton en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en 1687, junto a sus tres leyes de la mecánica. Constituye la primera gran unificación en Física: la unificación del fenómeno de la gravedad, por el que los cuerpos gravitan o pesan (hacia el centro de la Tierra), y las fuerzas que originan el movimiento de los astros en el firmamento. Es decir, se trata de una unificación de la mecánica terrestre con la mecánica celeste.

Newton comprendió que la fuerza que atrae a un cuerpo sobre la superficie de la Tierra es la misma que la que hace que la Luna se mantenga en órbita. Para visualizarlo imaginemos que se lanza un objeto desde la cima de una montaña de gran altitud. Este describirá una trayectoria parabólica (en realidad elíptica, como veremos) hasta chocar con la superficie de la Tierra. Sin embargo, si vamos aumentando la velocidad con la que proyectamos horizontalmente el objeto, este comenzará a sentir la esfericidad de la Tierra, hasta que llegue un punto en el que el objeto no caiga, sino que su trayectoria se cierre sobre sí misma. Esto es lo que llamamos una *órbita*, véase la Figura 1.

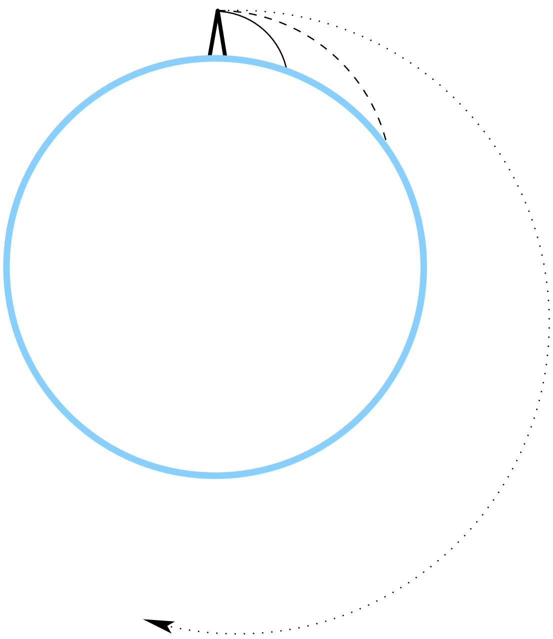

Figura 1: Dibujo empleado por Newton en sus Principia para ilustrar cómo, según aumenta la velocidad de lanzamiento, una trayectoria de caída en la Tierra se puede convertir en una órbita. Fuente: elaboración propia.

Así la Luna, o cualquier otro satélite, en su órbita, que con muy buena aproximación supondremos de momento circular, por *inercia* tiende a seguir una línea recta. Lo que se desvía, en su movimiento circular, de esta trayectoria rectilínea es precisamente su caída hacia la Tierra. De esta manera, así como se puede decir de un satélite que orbita que está constantemente cayendo hacia la Tierra (sin alcanzarla nunca) se puede decir, de un cuerpo que es lanzado horizontalmente, que describe un tramo de una órbita.

Hasta ahora hemos explicado la ley de gravitación cualitativamente. Para obtener su forma matemática era necesario que esta fuera capaz de explicar las tres leyes de Kepler del movimiento de los planetas en torno al Sol, que eran conocidas entonces (y que expondremos en el siguiente apartado).

La ley matemática de la gravitación universal reza pues así:

Ley 1: Ley de gravitación universal

La fuerza entre dos cuerpos de masas m_1y m_2, separados por una distancia r, es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa y su dirección es la de la recta que une sus centros, véase la Figura 2. Se trata de una fuerza atractiva. En forma matemática:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r\,. \tag{1}$$

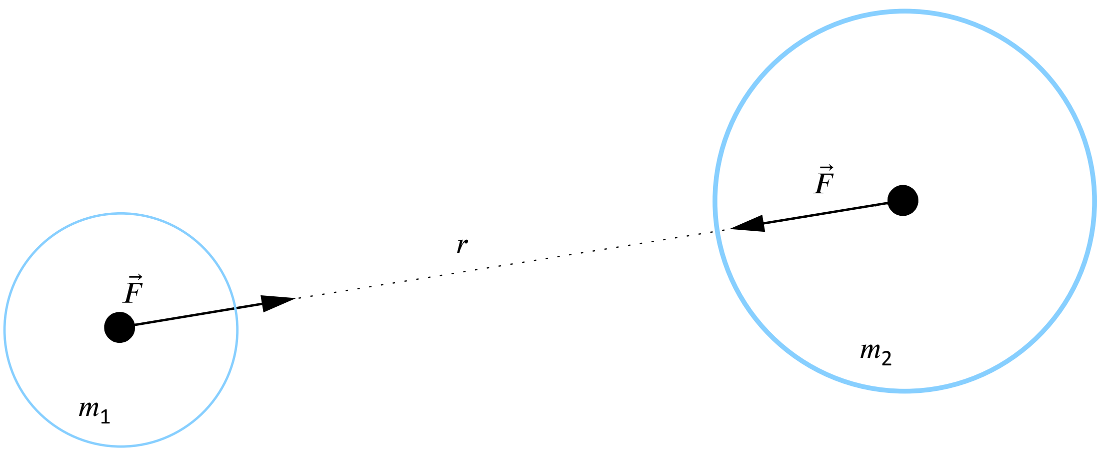

Figura 2: Ley de gravitación universal (Ley 1). La fuerza de gravedad entre dos masas m_1 y m_2 está dirigida según la dirección de la recta que une sus centros y es atractiva. Fuente: elaboración propia.

Nótese que hemos hablado de masas, sin especificar si son las masas *inerciales* o las masas *pesantes*. En principio, las masas que deberían figurar en la ley son las masas pesantes, o masas gravitatorias, pero puesto que, como ya sabemos, estas coinciden con las masas inerciales hasta un alto grado de precisión, por lo que se ha podido medir, se pueden considerar ambos conceptos como equivalentes.

En la Ecuación (1), $\vec{u}_r$ representa el vector unitario de la dirección que une los cuerpos que se atraen. El signo menos se debe a que la fuerza es siempre atractiva. Y la G es la constante de gravitación universal que tiene unidades, en el sistema internacional, de $\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$. Sus dimensiones son:

$$[G] = \left[\frac{F \cdot r^2}{m^2}\right] = \frac{M L T^{-2} L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2} \,. \tag{2}$$

Su significado físico es la fuerza que se ejerce entre dos masas de 1 Kg separadas por una distancia de 1 m. Esta constante no pudo ser determinada por Newton, aunque tenía indicios de que debía ser pequeña.

Habría que esperar al experimento de Cavendish, que consistía esquemáticamente en dos bolas pesadas que al atraerse hacían girar un péndulo de torsión, y a experimentos posteriores del mismo tipo para determinar su valor, que es:

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11}\, \mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2} \,. \tag{3}$$

Esta fuerza es, pues, débil, y el hecho de que la notemos se debe a la enorme cantidad de materia acumulada, en el caso de la Tierra, por ejemplo, o en el caso del Sol. En (García Sanz, 1998) hay una descripción detallada del experimento del péndulo de torsión.

La teoría de Newton de la gravitación permitió explicar el movimiento de los astros y predecir incluso la existencia de planetas, que posteriormente fueron observados, por las pequeñas perturbaciones que ejercían en la órbita de otros planetas del sistema solar. Su éxito fue rotundo. No obstante, esta teoría fue superada por una teoría de la gravitación, consistente con los principios de la relatividad especial, la que se conoce como teoría de la Relatividad General, expuesta por Albert Einstein en 1916. En esta teoría la gravedad deja de ser una fuerza y pasa a ser una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Sin embargo, la ley de gravitación de Newton sigue siendo válida en dos sentidos:

- En que se puede obtener como límite no relativista de la gravitación de la teoría de la relatividad general cuando las masas implicadas son relativamente pequeñas.
- En que puede seguir aplicándose, incluso actualmente, para los cálculos de trayectorias y órbitas, siempre que no se requiera de una gran precisión.

La fuerza de la gravitación, tal como se presenta en la teoría de Newton, es una *fuerza a distancia que actúa instantáneamente*. Este aspecto generó problemas filosóficos desde el mismo comienzo y hasta la actualidad. La noción de fuerza a distancia puede ser sustituida por el concepto de campo, que procede de la teoría de Maxwell del electromagnetismo, que a su vez se inspiró en el concepto de líneas de fuerza de los trabajos de Faraday. En las siguientes secciones daremos una primera definición operativa del concepto de campo en Física.

Para una exposición del camino seguido por Newton en su obra Principia Mathematica hasta llegar a la ley de gravitación universal puede consultarse (Marquina, 2005).

Ejemplo 1. Cálculo de la masa y de la densidad media de la Tierra

Puesto que se sabe, por métodos geodésicos, que el radio medio de la Tierra es $R = 6370\,\mathrm{km}$ y que la aceleración de la gravedad en el vacío es $g = 9.8\,\mathrm{ms^{-2}}$ tenemos, igualando el peso de un cuerpo mg a la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra, de masa M:

$$mg = G\frac{M \cdot m}{R^2}\,. \tag{4}$$

Despejamos la masa de la Tierra:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{9.8 \cdot \left(6.37 \cdot 10^6\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,. \tag{5}$$

Suponiendo que la Tierra es esférica su volumen sería:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19\left(6.37 \cdot 10^6\right)^3 = 1.083 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^3\,. \tag{6}$$

La densidad media de la Tierra será pues:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{1.083 \cdot 10^{21}} = 5.54 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\,. \tag{7}$$

Para una breve historia de la ley de gravitación universal puede consultarse (Bravo, 1995).

9.3 Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler fueron enunciadas por Johannes Kepler para los planetas que orbitan alrededor del sol en el sistema solar, a partir del estudio matemático de las observaciones astronómicas de Tycho Brahe. Estas, en su forma moderna, rezan así:

Ley 2: Primera ley de Kepler

Los planetas orbitan alrededor del sol en órbitas elípticas, estando el sol situado en uno de los focos de la elipse.

Estas trayectorias, son, además, evidentemente planas. Kepler se percató también de que en la órbita elíptica la velocidad del planeta no es constante, pero sí es constante la velocidad con que la línea que une el foco con el planeta (el *radiovector*) barre un área, conocida como velocidad areolar.

Ley 3: Segunda ley de Kepler

El movimiento de los planetas es tal que el radiovector (línea que une el foco con el planeta) barre áreas iguales en tiempos iguales. O en otras palabras, la velocidad areolar es constante.

Esta segunda ley se desprende, como veremos, de que el momento angular, por tratarse de una fuerza central, se conserva. En el afelio (punto de la órbita más alejado del sol) y en el perihelio (punto de la órbita más cercano al sol) el radiovector y la velocidad son perpendiculares, por lo que se cumple:

$$m r_a v_a = m r_p v_p \,, \tag{8}$$

donde el subíndice a se refiere al *afelio* y el subíndice p se refiere al *perihelio*. Así pues, vemos que en el *afelio* (punto más alejado) la velocidad es menor, puesto que el radiovector, más largo, necesita un arco menor para barrer un área; y en el perihelio (punto más cercano) la velocidad es mayor, puesto que al ser menor el radiovector necesita barrer en el mismo tiempo un arco más grande, para que las áreas barridas en ambos casos sean iguales, véase la Figura 3. Por último, la tercera ley reza:

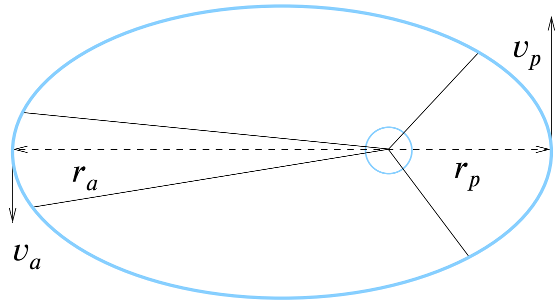

Figura 3: Órbita elíptica, en uno de cuyos focos está el sol. Se muestra el radiovector del perihelio r_p con velocidad v_p y el radiovector del afelio r_a con velocidad v_a. Se ejemplifica que se barren áreas iguales en tiempos iguales. Elaboración propia.

Ley 4: Tercera ley de Kepler

Para cualquier planeta, el cuadrado del período T de su órbita en torno al sol es proporcional al cubo del semieje mayor a y es independiente de la masa del planeta. Matemáticamente:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}\,. \tag{9}$$

Así, cuanto mayor sea la distancia al sol, mayor será el período de la órbita. Para más detalles sobre las leyes de Kepler puede consultarse (De Bernardini, 2010).

Estas leyes pudieron ser obtenidas aplicando a la ley de gravitación universal la segunda ley de Newton, es decir, resolviendo la ecuación diferencial:

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r = m_1\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \tag{10}$$

La resolución de esta ecuación, por su complejidad, la expondremos en el tema siguiente, al resolver el problema de los dos cuerpos.

9.4 El campo y el potencial gravitatorios

Como dijimos el concepto de fuerza a distancia presentaba problemas filosóficos, incluso para el propio Newton, que llegó a decir que se abstenía de hacer hipótesis, es decir, que se abstenía de pronunciarse sobre la naturaleza esencial de ese concepto, más allá de su evidente utilidad operativa.

Sin embargo, el desarrollo del electromagnetismo durante el siglo XIX condujo a la idea de campo, que se aplicó también a la gravitación. La idea es que una magnitud activa, ya sea la masa en el caso de la gravitación, ya sea la carga eléctrica o las corrientes en el caso del electromagnetismo, genera un campo en el espacio que sienten, localmente, otras magnitudes activas del campo, manifestándose como una fuerza.

Una primera aproximación al concepto de campo es definirlo como fuerza por unidad de magnitud activa, en el caso de la gravedad como fuerza por unidad de masa:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}\,, \tag{11}$$

donde $\vec{g}$ es el símbolo para el campo gravitatorio (que coincide con la aceleración de la gravedad). No obstante, dada una masa que genera un campo que siente otra, esta otra genera a su vez un campo que se suma, vectorialmente, al primero. Por lo que para evitar este efecto de superposición y considerar el campo de una masa, puramente, se toma el límite, cuando la masa de prueba tiende a cero. Todo esto, *mutatis mutandi*, se puede aplicar al campo eléctrico y las cargas eléctricas. Así pues, una primera definición operativa de campo que vamos a presentar durante este curso es la siguiente:

Definición 1: Campo gravitatorio

Se define el *campo gravitatorio* generado por una masa M en un punto a distancia r sobre una masa de prueba m como el límite:

$$\vec{g} = \lim_{m \to 0} \frac{\vec{F}}{m} . \tag{12}$$

Así pues, aplicando este concepto de masa a la Ecuación (1) tenemos, como expresión matemática para el campo gravitatorio generado por una masa M:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r . \tag{13}$$

Ahora surge la pregunta de qué sucede si tenemos una distribución de masas M_i, donde i es el subíndice que representa a cada una de las masas. Pues que el campo, al igual que la fuerza, es la suma vectorial de los campos generados por cada una de las masas. A esta propiedad se la conoce como principio de superposición. Matemáticamente:

$$\vec{g} = -\sum_i G\frac{M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} . \tag{14}$$

En el caso de que tengamos una distribución continua de masa, de densidad $\rho(\vec{r})$, el sumatorio se convierte en una integral sobre el elemento de volumen dV:

$$\vec{g} = -\int_V G\frac{\rho(\vec{r})}{r^2}\vec{u}_r dV . \tag{15}$$

Sabemos, por el teorema de Helmholtz, que un campo vectorial queda determinado si conocemos su divergencia y su rotacional. Y que un campo con rotacional cero deriva de un gradiente, y por tanto es un campo conservativo.

Para demostrar este último aserto, calculemos el trabajo necesario para llevar una masa de prueba desde un punto A a B, a las distancias respectivas del campo gravitatorio

r_A y r_B:

$$W_A^B = -\int_A^B G\frac{M}{r^2}dr = GM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) . \tag{16}$$

Así pues, el trabajo entre dos puntos del campo depende únicamente de las distancias y no del camino seguido entre ellas, por lo que el trabajo en una trayectoria cerrada será cero, es decir:

$$\oint \vec{g}d\vec{r} = 0 . \tag{17}$$

O, equivalentemente, por el teorema de Stokes, el rotacional del campo gravitatorio es nulo:

$$\nabla \times \vec{g} = 0 . \tag{18}$$

Así pues, el campo gravitatorio deriva de un potencial, el potencial gravitatorio ϕ:

$$\vec{g} = -\nabla\phi , \tag{19}$$

donde el potencial gravitatorio es igual a:

$$\phi = -G\frac{M}{r} . \tag{20}$$

Obsérvese que el potencial gravitatorio queda indefinido por una constante, puesto que el gradiente de una constante es cero. Es decir, que podemos escoger arbitrariamente el origen de potencial. Cuando se consideran situaciones en las que se puede considerar que el campo es constante, a pequeñas alturas sobre la superficie de la Tierra, y para dimensiones tales que esta se pueda considerar plana, se toma como origen el suelo, o cualquier otra altura conveniente y el potencial adquiere la forma $\phi = Mgh$.

Sin embargo, para cuando la variación con la distancia es notable, se toma como origen de potenciales el infinito, donde $1/r$ se hace cero. En este caso el potencial gravitatorio (y con él la energía potencial que se obtiene multiplicando el potencial por la masa de prueba) es negativo, tal como expresa la Ecuación (20).

Estudiemos ahora su divergencia. Para ello consideremos el flujo del campo gravitatorio de una masa M sobre una superficie que la envuelve a distancia r:

$$\oiint_S \vec{g} d\vec{S} = -\oiint_S G\frac{M}{r^2} r^2 d\Omega = -4\pi G M \,. \tag{21}$$

donde hemos usado la definición de ángulo sólido Ω:

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \,, \tag{22}$$

y que el ángulo sólido de una esfera es 4π. Ahora, por el teorema de Gauss tenemos:

$$\oiint_S \vec{g} d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV \,, \tag{23}$$

por lo que la divergencia del campo gravitatorio es:

$$\nabla \vec{g} = -4\pi G \rho \,, \tag{24}$$

Así pues, ya tenemos totalmente caracterizado al campo gravitatorio. Ahora, puesto que el campo es menos el gradiente del potencial, de acuerdo con la Ecuación (19), obtenemos la ecuación:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \,, \tag{25}$$

que es la *ecuación de Poisson del campo gravitatorio*. La Ecuación (24), en forma diferencial y la Ecuación (21), en forma integral, nos dicen que el campo gravitatorio en una superficie cerrada cualquiera depende únicamente de la masa encerrada en ella. Esto se debe a que la ley de gravitación varía con la inversa del cuadrado de la distancia y a que la superficie, en un espacio de tres dimensiones, crece con el cuadrado de la distancia, por lo que ambos factores se cancelan idénticamente.

Para una reseña histórica de la evolución de los conceptos mecanicistas de la Física newtoniana hasta la idea de campo puede consultarse (Pineda, 2015).

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el campo gravitatorio:

Accede al vídeo: Campo gravitatorio y ley de Poisson.

9.5 Período de revolución de un planeta

Vamos a suponer que las órbitas son circulares. En este caso la fuerza de la gravedad es igual a la fuerza centrípeta (o si lo interpretamos desde el sistema de referencia del cuerpo que orbita, la fuerza de la gravedad es igual a la fuerza centrífuga):

$$G\frac{M \cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \, . \tag{26}$$

Podemos escribir la velocidad lineal en función de la velocidad angular ω así $v = \omega \cdot R$, y como la relación entre la velocidad angular y el período de revolución T viene dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \, , \tag{27}$$

resulta:

$$G\frac{M \cdot m}{R^2} = m\frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2} \, . \tag{28}$$

Despejamos el período, resultando la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}} \, . \tag{29}$$

Esta relación de proporcionalidad entre el cuadrado del período de revolución y el cubo del radio de la órbita concuerda con la tercera ley de Kepler, para órbitas circulares.

Ejemplo 2. Satélites geoestacionarios

Los satélites geoestacionarios son aquellos que orbitan, en el plano del ecuador, con un período que igual al período de revolución de la Tierra en torno a su eje, por lo que son vistos desde la Tierra ocupando un punto fijo del firmamento. Conocido, pues, su período, calculemos a qué distancia de la superficie de la Tierra orbitan. De la Ecuación (29) despejamos el radio (la órbita del satélite geoestacionario es circular):

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{R^3}{GM} \, . \tag{30}$$

Usemos que $g_0 = GM/R_T^2$, donde $g_0 = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (el promedio, supuesta la Tierra esférica) y R_T es el radio de la Tierra $R_T = 6370\,\text{km}$

Así tenemos:

$$R^3 = g_0 R_T^2 \frac{T^2}{4\pi^2} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{g_0 R_T^2 \frac{T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{9.8 \cdot \left(6.37 \cdot 10^6\right) \frac{(24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 42208\,\text{km}\,.$$

La distancia sobre la superficie de la Tierra se obtendrá restando a esta cantidad el radio terrestre:

$$h = R - R_T = 42208 - 6370 = 35838\,\text{km}\,.$$

9.6 Variación de g con la altura y profundidad

Vamos a estudiar la variación del campo gravitatorio, y por tanto de la aceleración de la gravedad, en la Tierra para tres casos:

- Variaciones con alturas pequeñas.
- Variaciones con alturas grandes.
- Variación con la profundidad.

Variación con alturas pequeñas

Supongamos que la Tierra es una esfera de radio R. Supongamos ahora un cuerpo situado a la distancia $r = R + h$ del centro de la Tierra, donde h es la altura sobre la superficie y suponemos que la altura es mucho menos que el radio terrestre $h \ll R$.

Llamemos g_0 a la intensidad del campo gravitatorio sobre la superficie y g a la intensidad del campo a la distancia r. Entonces sus valores vendrán dados por las ecuaciones:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}\,, \tag{31}$$

$$g = G\frac{M}{r^2}\,. \tag{32}$$

Tomamos ahora logaritmos en la Ecuación (32):

$$\ln g = \ln G + \ln M - 2 \ln r \,, \tag{33}$$

donde hemos empleado la propiedad de que el logaritmo del producto es la suma de logaritmos (y el logaritmo del cociente es la diferencia de logaritmos) y la de que el logaritmo de una potencia es el producto del exponente por el logaritmo de la base. Ahora derivamos esta ecuación, resultando:

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r} \,, \tag{34}$$

puesto que las derivadas de los dos primeros términos del segundo miembro de la Ecuación (33) son cero, por tratarse de constantes. Esta ecuación, la Ecuación (34), nos dice que la variación relativa de la intensidad del campo es el doble de la variación relativa de la altura:

$$\frac{g - g_0}{g_0} = -2\frac{h}{R} \,, \tag{35}$$

Despejamos ahora g:

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \,. \tag{36}$$

Habríamos podido llegar a este mismo resultado aplicando el desarrollo de Taylor a la expresión:

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \simeq g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \,, \tag{37}$$

donde hemos despreciado los términos de orden $(h/R)^2$ y superiores.

Te recomendamos ver el vídeo:

Accede al vídeo: Variación de g con pequeñas alturas.

Variación con alturas grandes

Para alturas grandes tenemos:

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2}\,. \tag{38}$$

Sacamos ahora R^2 como factor común del denominador y empleamos la Ecuación (31):

$$g = G\frac{M}{R^2}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}\,. \tag{39}$$

Variación con la profundidad

Supongamos un cuerpo situado en un casquete esférico en el interior de la Tierra. De acuerdo con el teorema de Gauss para el campo gravitatorio, solamente contribuye al campo la masa encerrada por ese casquete, véase la Figura 4. Digamos que la masa situada por fuera está distribuida espacialmente de modo tal que sus efectos gravitatorios en el interior se anulan. Así pues, el campo en la superficie g_0 y el campo a la distancia $r = R - h$ del centro de la Tierra, donde h es ahora la profundidad, son:

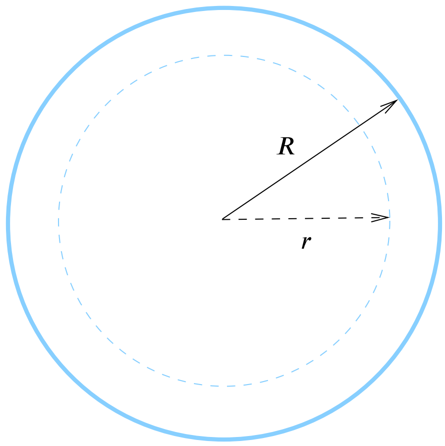

Figura 4: Gravedad en el interior de la Tierra. Elaboración propia.

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}\,, \tag{40}$$

$$g = G\frac{m}{r^2}\,, \tag{41}$$

donde m representa la masa encerrada por el casquete esférico de radio r. Ahora bien, la masa es igual al producto del volumen de la esfera por la densidad ρ (que supondremos uniforme), por lo que:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\,, \tag{42}$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,. \tag{43}$$

Si ahora despejamos la densidad de la Ecuación (42) y la sustituimos en la Ecuación (43), resulta:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\frac{r^3}{R^3}\,. \tag{44}$$

Sustituimos ahora la Ecuación (44) en la Ecuación (41):

$$g = G\frac{M}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = G\frac{M}{R^2}\frac{r}{R}\,. \tag{45}$$

Empleamos ahora en la Ecuación (40) en la Ecuación (45), resultando:

$$g = g_0\frac{r}{R} = g_0\frac{R-h}{R} = g_0\left(1-\frac{h}{R}\right)\,, \tag{46}$$

ecuación que nos dice que la aceleración de la gravedad disminuye linealmente con la profundidad haciéndose nula en el centro de la Tierra.

Te recomendamos ver el vídeo sobre la variación de g con la profundidad:

Accede al vídeo: Variación de g con la profundidad.

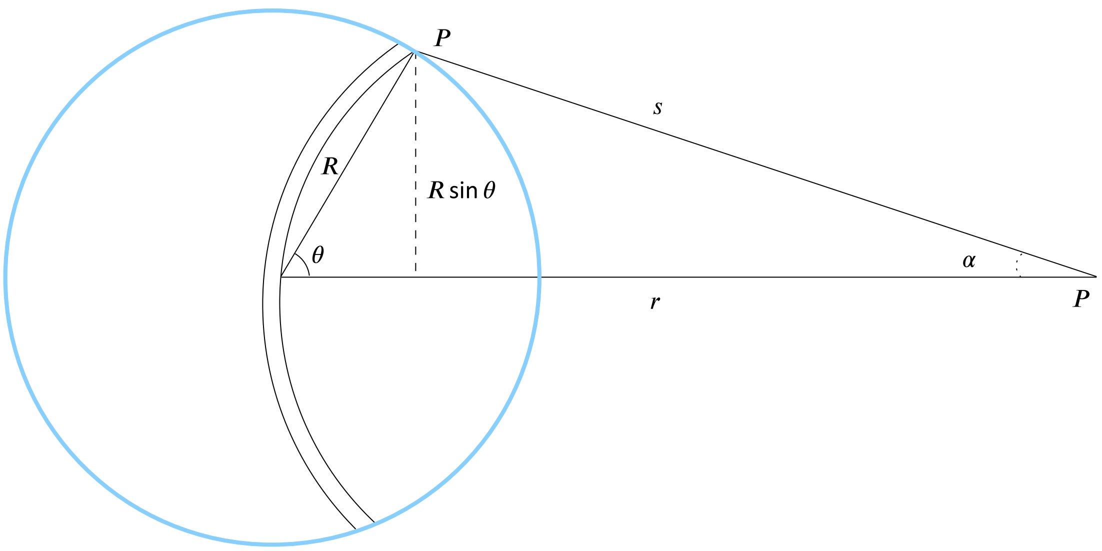

Figura 5: Fuerza de la gravedad de un casquete esférico en un punto exterior a él. Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 3. Fuerza de la gravedad de un casquete esférico

Vamos a demostrar que la fuerza de la gravedad de un casquete esférico en un punto situado fuera de él es tal que es como si toda la masa del casquete estuviera concentrada en el centro, razón por la cual la fuerza de la gravedad de un astro esférico se puede calcular suponiendo que toda su masa está acumulada en su centro.

Supongamos un casquete esférico de radio R, y tomemos una corona circular infinitesimal que forma un ángulo θ con el vector que une al centro del casquete con el punto donde queremos calcular la fuerza P. La distancia del centro del casquete a dicho punto es r, y la distancia del punto P a un elemento infinitesimal de la corona es s. Al ángulo que forman s y r lo llamaremos α, y σ a la densidad superficial de masa del casquete, ver la Figura 5. La densidad superficial será:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2} \, . \tag{47}$$

El elemento de masa de la corona es:

$$dM = \sigma 2\pi R \sin\theta R d\theta \, , \tag{48}$$

porque el radio de la corona es $R\sin\theta$ y el grosor de la corona es $Rd\theta$. Ahora, las fuerzas perpendiculares a la recta que une el centro del casquete con P se cancelan, mientras que las fuerzas paralelas se suman, por lo que el diferencial de fuerza debido a una corona infinitesimal será:

$$dF = -\frac{GmdM}{s^2}\cos\alpha \, . \tag{49}$$

donde se ha multiplicado por $\cos\alpha$ para tener en cuenta la proyección de la fuerza paralela a la distancia del centro a P. Sustituyendo ahora el diferencial de masa de la Ecuación (48) e integrando desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, es decir, para todo el casquete esférico, obtenemos:

$$F = -2\pi G\sigma m R^2 \int_0^\pi \frac{1}{s^2}\cos\alpha \sin\theta d\theta \, . \tag{50}$$

Ahora calculamos s utilizando el teorema del coseno y el ángulo θ:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\,. \tag{51}$$

Diferenciamos esta expresión:

$$2s\,ds = 2Rr\sin\theta d\theta\,. \tag{52}$$

$$\sin\theta d\theta = \frac{s\,ds}{Rr}\,. \tag{53}$$

Usamos ahora el teorema del coseno para el ángulo α:

$$R^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha\,, \tag{54}$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs}. \tag{55}$$

Con estas expresiones podemos cambiar de la variable θ a la variable s, teniendo en cuenta que para $\theta = 0$, $s = r - R$ y para $\theta = \pi$, $s = r + R$:

$$F = -2\pi G\sigma mR^2 \int_{r-R}^{r+R} \frac{1}{s^2}\frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs}\frac{s\,ds}{Rr}\,, \tag{56}$$

$$F = -\pi G\sigma mR\frac{1}{r^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right)ds\,.$$

Empleando la Ecuación (47), la fuerza resulta:

$$F = -\frac{GmM}{4Rr^2}\left[s - \left(r^2 - R^2\right)\frac{1}{s}\right]_{r-R}^{r+R} \tag{57}$$

$$F = -\frac{GmM}{4Rr^2}\left[(r + R) - (r - R) - \left(r^2 - R^2\right)\left(\frac{1}{r + R} - \frac{1}{r - R}\right)\right]\,, \tag{58}$$

$$F = -\frac{GmM}{4Rr^2}\left[2R - \left(r^2 - R^2\right)\frac{(r - R) - (r + R)}{(r + R)(r - R)}\right] = -\frac{GmM}{4Rr^2}\left[2R + 2R\right]\,, \tag{59}$$

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\,. \tag{60}$$

Con lo que hemos demostrado lo que enunciábamos al principio.

9.7 Velocidad de escape

Definamos ahora el concepto de *velocidad de escape*:

Definición 2: Velocidad de escape

La velocidad de escape se define como aquella velocidad mínima que ha de poseer o ser comunicada a un cuerpo para que escape del campo gravitatorio de un astro dado.

En ausencia de atmósfera, esta velocidad se halla empleando el principio de conservación de la energía. Como se trata de la velocidad mínima para escapar del campo gravitatorio del astro se supone que en el infinito (es decir, a grandes distancias, donde el campo gravitatorio es despreciable) la velocidad, y por tanto la energía cinética, es cero. También es cero, por convención, la energía potencial. En cambio en la superficie del astro, de radio R y masa M la energía cinética será $1/2mv_e^2$, donde v_e es la velocidad de escape y m la masa del cuerpo. La energía potencial en la superficie desde la que el cuerpo es lanzado es $-GMm/R$. Por tanto, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0\,. \tag{61}$$

Despejamos v_e:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,. \tag{62}$$

Calculemos ahora la velocidad de escape de la Tierra. Este cálculo fue necesario hacerlo cuando se planteó el realizar viajes interplanetarios. Despreciaremos la resistencia de la atmósfera terrestre, puesto que supone solamente una reducción del 2 % de esta velocidad. En lugar de usar la masa de la Tierra haremos uso del hecho de que $g = GM_T/R_T^2$, donde hemos usado el subíndice T para referirnos al caso de la Tierra. En este caso g es la aceleración de la gravedad, bien conocida. Así pues, la Ecuación (62) queda:

$$v_{e,T} = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6.37 \cdot 10^6} = 11.2 \cdot 10^3 \ \mathrm{m/s}.$$

Así pues, se requiere de una velocidad inicial de 11.2 km/s (aproximadamente 40300 km/h) para lanzar una cohete desde la superficie terrestre.

Te recomendamos ver el vídeo:

Accede al vídeo: Velocidad de escape.

9.8 Satélites artificiales

Desde hace décadas se han puesto en órbita multitud de satélites con diversos fines: algunos con fines pacíficos, como satélites de comunicaciones y de investigación científica y otros con fines militares (satélites espía). Si se lanza un dispositivo desde cierta altura h sobre la superficie de la Tierra, pueden ocurrir las siguientes situaciones:

- Si la velocidad de lanzamiento es relativamente pequeña, el objeto describirá un arco de elipse, colisionando finalmente con la Tierra.
- Si se dota al cuerpo de suficiente velocidad, la trayectoria se cerrará sobre sí misma, quedando el cuerpo en órbita, que podrá ser o bien una órbita circular o bien una órbita elíptica.
- Si se imprime al cuerpo una velocidad igual a la velocidad de escape, la órbita será abierta y el cuerpo escapará del campo gravitatorio terrestre describiendo una órbita parabólica, si la velocidad es justo la de escape, o una órbita hiperbólica, si su velocidad supera a la de escape.

Suponiendo ahora que un satélite describe una órbita circular, para calcular su velocidad igualamos la fuerza de la gravedad a la fuerza centrípeta:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}, \tag{63}$$

donde M es la masa de la Tierra, m la masa del satélite y R su distancia al centro de la Tierra. Despejando la velocidad obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \tag{64}$$

Comparando esta expresión con la Ecuación (62) vemos que para un satélite en órbita, la velocidad de escape es un factor $\sqrt{2}$ mayor que su velocidad en dicha órbita.

9.9 Las mareas

El fenómeno de las mareas, por el que el nivel de mar sube y baja (bajamar y pleamar, respectivamente) dos veces al día, fue explicado satisfactoriamente por la ley de gravitación universal, constituyendo uno de los éxitos de la teoría, junto a la explicación de las leyes de los movimientos planetarios de Kepler y a la unificación de la fuerza que actúa sobre los astros en los cielos y los cuerpos sobre la Tierra.

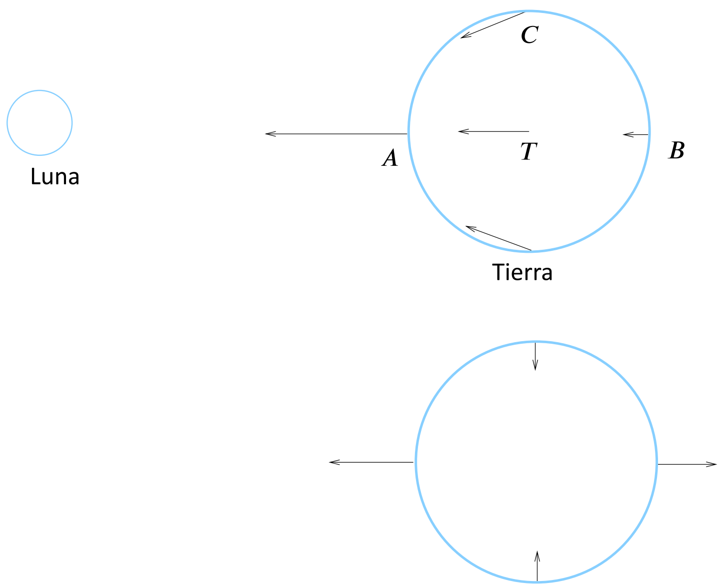

Figura 6: Fuerzas de marea de la Luna sobre la Tierra. En el dibujo de abajo podemos ver las fuerzas una vez sustraída la fuerza sobre el centro, el centro de masas. Elaboración propia.

Las mareas debidas a la Luna y al Sol se deben a que sus campos gravitatorios no son uniformes. Centrémonos en la Luna, cuyos efectos son más grandes, por estar el Sol mucho más alejado. La fuerza de marea es la diferencia entre la fuerza de atracción de la Luna en un punto de la superficie menos la fuerza de atracción en el centro de la Tierra.

Supongamos que la Tierra es una esfera rígida de radio R, cubierta toda ella por un océano de poca profundidad sin movimiento relativo. Supongamos, además, que la Luna se encuentra en el plano ecuatorial de la Tierra. Sea r la distancia desde el centro de la Luna al centro de la Tierra (que llamaremos T), m la masa de un cuerpo y M la masa de la Luna (véase la Figura 6). La fuerza de atracción de la Luna en el centro de la Tierra es, entonces:

$$\vec{F}_T = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{i}\,. \tag{65}$$

En un punto A situado en la superficie de la Tierra, enfrente de la Luna, la fuerza de atracción será:

$$\vec{F}_A = -G\frac{Mm}{(r-R)^2}\vec{i}\,. \tag{66}$$

La fuerza de marea en dicho punto $\vec{f}_A$ será:

$$\vec{f}_A = \vec{F}_A - \vec{F}_T = -GMm\left(\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{r^2}\right)\vec{i} \simeq$$

$$\simeq -\frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{2R}{r} + \ldots - 1\right)\vec{i} = -GMm\frac{2R}{r^3}\vec{i}\,, \tag{67}$$

donde hemos usado la aproximación:

$$\frac{1}{(r-R)^2} = \frac{1}{r^2\left(1-\frac{R}{r}\right)^2} \simeq \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2R}{r} + \ldots\right)\,, \tag{68}$$

y hemos despreciado términos con potencias $(R/r)^2$ y superiores, puesto que el radio de la Tierra $R = 6.37 \cdot 10^6$ m es pequeño en comparación con la distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra $r = 384.4 \cdot 10^6$ m.

Ahora, en un punto situado en el antípoda B la fuerza de atracción de la Luna es:

$$\vec{F}_B = -G\frac{Mm}{(r+R)^2}\vec{i}\,, \tag{69}$$

y la fuerza de marea:

$$\vec{f}_B = \vec{F}_B - \vec{F}_T = -GMm\left(\frac{1}{(r+R)^2} - \frac{1}{r^2}\right)\vec{i} \simeq$$

$$\simeq -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{2R}{r} + \dots - 1\right)\vec{i} = GMm\frac{2R}{r^3}\vec{i}\,. \tag{70}$$

Así pues, vemos que en los puntos situados enfrente de la Luna hay una fuerza de marea hacia ella, mientras que en los puntos de los antípodas hay una fuerza de marea en sentido contrario. Esta es la razón de que las mareas aparezcan dos veces al día: una cuando la Luna está en cenit y otra cuando está en el lado opuesto.

En un punto C la fuerza de atracción será:

$$\vec{F}_C = -G\frac{Mm}{R^2 + r^2}\left(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}\right)\,. \tag{71}$$

El ángulo ϕ es tal que su tangente vale $\tan\phi = R/r$ y por tanto $\phi = 0.017$ rad, por lo que $\cos\phi \simeq 1$ y $\sin\phi \simeq \tan\phi = R/r$, luego la fuerza de marea en C es:

$$\vec{f}_C = \vec{F}_C - \vec{F}_T \simeq -GMm\frac{R}{r^3}\vec{j}\,, \tag{72}$$

que como vemos es la mitad en módulo de las fuerzas de marea en A y B y va dirigida hacia abajo. Para un punto P situado en un punto cualquiera de la superficie terrestre, si r_p es la distancia de este punto al centro de la Luna, la fuerza de atracción es:

$$F_p = G\frac{Mm}{r_p^2}\,, \tag{73}$$

que está dirigida según la dirección que ese punto con el centro de la Luna. En ese punto la fuerza de marea es:

$$\vec{f}_p = -GMm\left(\frac{\vec{r}_p}{r_p^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -GMm\left(\frac{\vec{r} + \vec{R}}{r_p^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\,. \tag{74}$$

Ahora bien:

$$r_p^2 = \left(\vec{r} + \vec{R}\right)^2 = r^2 + R^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{R} \simeq r^2\left(1 + \frac{2\vec{r}\cdot\vec{R}}{r^2}\right) , \tag{75}$$

por lo que:

$$\vec{f}_p \simeq -\frac{GMm}{r^3}\left[\left(\vec{r} + \vec{R}\right)\left(1 + \frac{2\vec{r}\cdot\vec{R}}{r^2}\right)^{-3/2} - \vec{r}\right] \simeq -\frac{GMm}{r^3}\left[\left(\vec{r} + \vec{R}\right)\left(1 - \frac{3\vec{r}\cdot\vec{R}}{r^2}\right) - \vec{r}\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{GMm}{r^3}\left(\vec{R} - \vec{r}\frac{3\vec{r}\cdot\vec{R}}{r^2}\right) . \tag{76}$$

- Si $\theta = 0$, $\vec{r}$ y $\vec{R}$ son vectores de la misma dirección y sentido y recuperamos $\vec{f}_B$.
- Si $\theta = \pi/2$, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares y recuperamos $\vec{f}_C$.
- Si $\theta = \pi$, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{R}$ tienen la misma dirección y sentido opuesto y obtenemos $\vec{f}_A$.

Para saber más sobre las complejidades del fenómeno de las mareas terrestres puede consultarse (Gratton & Perazzo, 2009).

9.10 Principio de equivalencia

Vamos a presentar ahora las ideas fundamentales que motivaron a Einstein la formulación de su teoría de la relatividad general, la teoría relativista de la gravitación. Supongamos un ascensor sobre la superficie terrestre. Si el ascensor acelera hacia arriba y medimos el peso de un objeto en su interior, este aumentará, debido a la inercia. Si por el contrario el ascensor decelera el peso objeto disminuirá, también debido a la inercia. Si ahora imaginamos una caja en el espacio exterior, con un observador dentro, que, por acción de unos propulsores, experimenta una aceleración, en el interior de la caja el observador y cualquier objeto experimentará una fuerza de inercia en sentido contrario a la aceleración de la caja.

Esta fuerza de inercia que hace que el observador sienta una fuerza hacia abajo, equivalente al peso, y que los objetos que el observador suelte parezcan caer hacia abajo, es en todo equivalente a la acción de la gravedad de un campo gravitatorio uniforme. Esto es debido a que la masa inercial y la masa gravitatoria, como dijimos, son, de facto, iguales. Vemos que hay una conexión íntima entre la inercia y la gravedad. Einstein lo que hizo fue elevar esa igualdad de la masa inercial con la gravitatoria, que había sido medida con un alto grado de precisión, a la naturaleza de principio físico. Y esto constituye el núcleo del *principio de equivalencia*.

Ley 5: Principio de equivalencia

Los efectos de un campo gravitatorio uniforme son indistinguibles de los efectos en de un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Ahora exponemos la que Einstein consideró la idea más feliz de su vida. Supongamos que dejamos caer una caja con un observador dentro, en caída libre. Si este observador tiene un objeto en su mano y lo suelta, este no caerá, puesto que ya está cayendo, y además al mismo ritmo, es decir, con la misma aceleración de la gravedad. Si el observador imprime al objeto una velocidad en cualquier dirección, este se moverá en esa dirección, conforme a la inercia, con movimiento rectilíneo uniforme. Nos encontramos pues con las condiciones de un sistema de referencia inercial.

Ahora bien, si suponemos que el observador tiene dos objetos en ambas manos y los suelta, estos quedarán en reposo, pero conforme la caída libre avance (suponemos una caída en un gran abismo) estos cuerpos se acercarán entre sí, debido a que la fuerza de la gravedad está dirigida hacia el centro de la Tierra, donde sus trayectorias convergen. Si por el contrario los dos objetos están uno arriba y el otro debajo del observador, pasado un tiempo suficientemente largo, estos se alejarán entre sí y del observador, debido a que la gravedad disminuye con la distancia. Estos son los conocidos como efectos marea.

Así pues, tenemos que para espacios reducidos y tiempos cortos un sistema en caída libre es totalmente equivalente a un sistema inercial. O dicho más formalmente: localmente un sistema de referencia en caída libre constituye un sistema de referencia inercial. Este fue un gran hallazgo teórico que sentó las bases de la teoría. Porque ahora el sistema de referencia en caída libre (u orbitando), localmente, equivalía a un espacio-tiempo plano. Mientras que si se consideran los efectos a gran escala, al aparecer las fuerzas de marea, lo que tenemos es la manifestación de un *espacio-tiempo curvo*.

Quedaba claro, pues, que la gravedad no es sino la manifestación del movimiento inercial de los cuerpos en un espacio-tiempo curvado. Es decir, que los cuerpos se mueven en el espacio-tiempo siguiendo líneas geodésicas, es decir, se mueven inercialmente. Lo que curva al espacio-tiempo es la materia y la energía, que, conforme a la relatividad especial, son equivalentes. Dicho en palabras sencillas:

> la materia y la energía dicen al espacio-tiempo cómo curvarse y el espacio-tiempo curvado dice a la materia cómo moverse a lo largo del equivalente a líneas rectas en una geometría no euclídea (*líneas geodésicas*).

Estas fueron las ideas clave que inspiraron a Einstein en su formulación de la nueva teoría. Para su *plasmación* matemática concreta necesitó de 10 años y de la ayuda de un amigo suyo matemático, Grassmann, que conocía las matemáticas ya desarrolladas de las geometrías no euclídeas. Para saber más sobre el principio de equivalencia y la teoría de la relatividad general puedes consultar (Galindo, 2011).

9.11 Referencias bibliográficas

Bravo, S. (1995). Historia de la teoría de gravitación universal. *Ciencias*, (037).

De Bernardini, E. (2010). Leyes de Kepler. *Astronomía*.

Galindo, A. (2011). En recuerdo de Albert Einstein. *Revista Española de Física*, 19(4).

García Sanz, J. J. (1998). Efemérides: el experimento de Cavendish. *Revista 100cias@ uned*, 1, 65–69.

Gratton, J. & Perazzo, C. A. (2009). La fuerza de marea y el límite de Roche.

Marquina, J. (2005). La construcción newtoniana de la gravitación universal. *Revista mexicana de física*, 51(1), 45–53.

Pineda, G. (2015). La evolución de la física. *Revista Universidad de Antioquia*.

9.12 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. La masa de Marte es la décima parte de la masa de la Tierra y su radio la mitad del terrestre. Con estos datos calcular el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie marciana. *Solución*: 3.92 m/s^2.

Ejercicio 2. El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.96 m/s^2. Se sabe que el radio terrestre es 4 veces mayor que el lunar ¿En qué relación están la masa de la Tierra y la masa de la Luna? *Solución*: 80 veces mayor la masa de la Tierra.

Ejercicio 3. La estación espacial internacional se encuentra a 400 km de altitud sobre la superficie terrestre. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6370 km y suponiendo que la órbita de la estación es aproximadamente circular, calcular la velocidad a la que orbita y su período de revolución. *Solución*: 27590 km/h, 92.5 min.

Ejemplo 4.

Calcular la energía con la que hay que dotar a un satélite de 3 t de masa para colocarlo en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 35000 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $g_0 = 9.8$ m/s^2, $R_T = 6370$ km. *Solución*: $1.73 \cdot 10^{11}$ J.

Ejercicio 4. Calcular la intensidad del campo gravitatorio creado por una varilla delgada y homogénea de masa M y longitud L en un punto situado en el eje de la varilla y a una distancia a de su extremo. Comprobar que cuando $L = 0$ se recupera la intensidad del campo producida por una masa puntual. *Solución*: $-\frac{GM}{a(a+L)}$.

Ejercicio 5. Calcular la intensidad del campo gravitatorio generado por un disco homogéneo de masa M y radio R en un punto situado sobre su eje a una distancia x del centro. Comprobar que cuando $R \to 0$ se obtiene la intensidad del campo producida por una masa puntual a la distancia x. *Solución*: $g = \frac{2GMx}{R^2}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{x}\right]$.

Ejercicio 6. Desde la superficie de la Tierra se lanza hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 8 km/s. Calcular la altura que alcanzaría si no existiese atmósfera. Datos: radio terrestre $R_T = 6370$ km. *Solución*: 6700 km.

Ejercicio 7. Calcular la intensidad del campo gravitatorio de un anillo de masa M y radio R en un punto de su eje situado a una distancia x del centro. Demostrar que la intensidad del campo gravitatorio en el centro es cero y que si el radio del anillo tiende a cero la intensidad del campo es la equivalente a la producida por una masa puntual. *Solución*: $g = -G\frac{Mx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$.