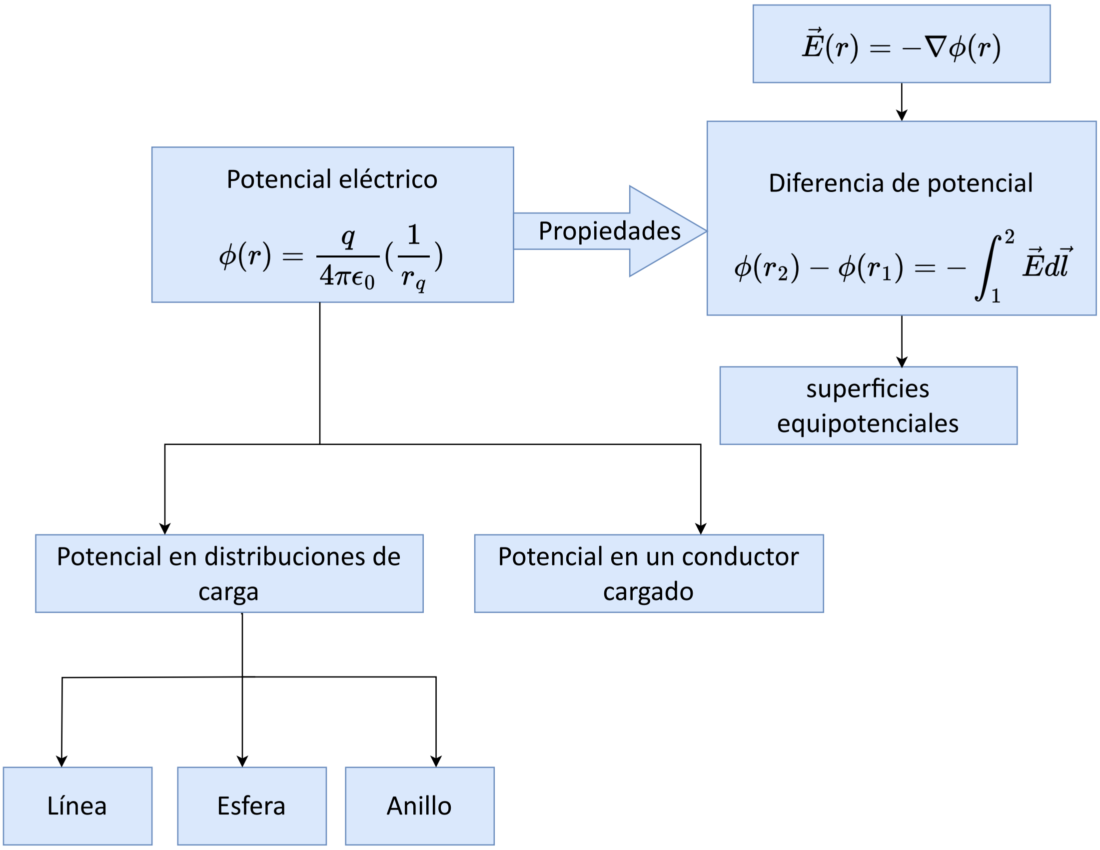
Electromagnetismo I

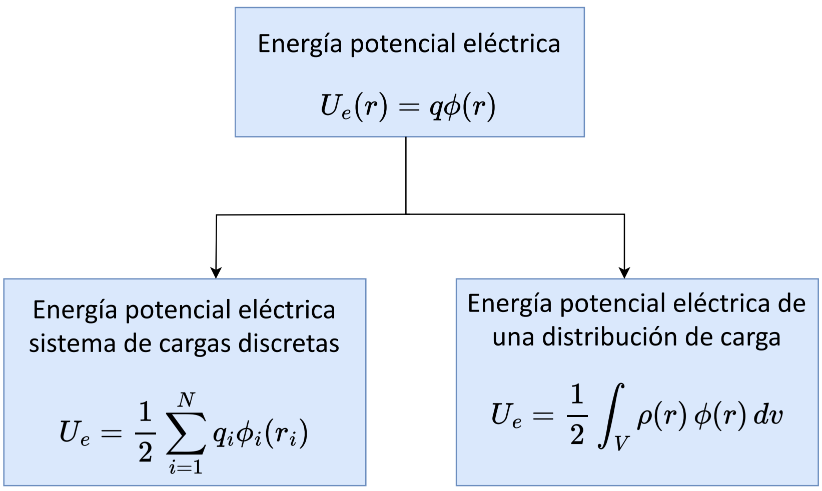
Potencial eléctrico y energía

Índice

Esquema



$\vec{E}(r) = -\nabla\phi(r)$
Potencial eléctrico
$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_q})$
Propiedades
Diferencia de potencial
$\phi(r_2) - \phi(r_1) = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$
superficies equipotenciales
Potencial en distribuciones de carga
Potencial en un conductor cargado
Línea
Esfera
Anillo



Energía potencial eléctrica
$U_e(r) = q\phi(r)$
Energía potencial eléctrica sistema de cargas discretas
$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\phi_i(r_i)$
Energía potencial eléctrica de una distribución de carga
$U_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)\,\phi(r)\,dv$

Ideas clave

3.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos visto mayormente cómo se relacionan los efectos electrostáticos con el campo eléctrico $\vec{E}$. En este capítulo introduciremos un nuevo concepto, el *potencial eléctrico*, o también llamado *potencial escalar*, que será muy útil para expresar la misma información en función de este potencial, en lugar del campo $\vec{E}$.

Debido a que el potencial es una cantidad escalar (no vectorial) nos permite expresar los mismos fenómenos de una manera más sencilla que el campo eléctrico. También veremos el concepto de *energía electrostática*. Como la fuerza electrostática (ley de Coulomb) es conservativa, los fenómenos electrostáticos pueden describirse a través de la llamada *energía potencial eléctrica*.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Entender el significado del **potencial escalar**.
- Aprender a calcular el *potencial escalar* en sistemas de cargas discretas y en distribuciones continuas.
- Comprender qué son las *superficies equipotenciales*.
- Entender el concepto de **energía potencial eléctrica** y cómo se calcula.

3.2 El potencial eléctrico

Recordemos la definición del campo eléctrico que vimos anteriormente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{qi}^2} \hat{r}_{qi},$$

donde $\vec{r}_{qi} = \vec{r} - \vec{r}_i$ es el vector posición de cada carga individual $\vec{r}_i$ relativo a la posición $\vec{r}$ donde se hace el cálculo del campo eléctrico que genera. Podemos hacer uso del siguiente cálculo con el operador gradiente:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2},$$

con la que reemplazar en la ecuación del campo el término $\hat{r}_{qi}/r_{qi}^2$ por $-\nabla(1/r_{qi})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_{qi}}\right).$$

Ahora usamos la propiedad que nos dice que $\vec{\nabla}(a+b) = \vec{\nabla}a + \vec{\nabla}b$, y nos queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{qi}}\right).$$

Si ahora definimos esa cantidad que está después del gradiente como:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{qi}}, \tag{1}$$

podemos escribir que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \tag{2}$$

Esta nueva cantidad ϕ recibe el nombre de *potencial electrostático* o *potencial escalar* (nótese que ciertamente es una cantidad escalar y no un vector). La unidad de medida del potencial escalar son volt (V). Las unidades del campo eléctrico también se pueden expresar como volt/metro, donde 1 volt = 1 joule/coulomb. En resumen, hemos visto que el campo electrostático se puede escribir como el gradiente negativo del potencial escalar.

La expresión de la Ecuación (1) se aplica a cargas discretas. Si nos encontramos en el caso de cargas continuas, podemos sumar la contribución de cada diferencial de carga dq en una integral, como hicimos en temas anteriores, pudiendo expresar el potencial como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|r-r'|}\,, \tag{3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{|r-r'|}\,, \tag{4}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda(\vec{r}\,')dl'}{|r-r'|}\,. \tag{5}$$

El potencial escalar en un punto, igual que el cálculo del campo, será igual a la suma de la contribución proporcionada por las diferentes cargas tanto continuas como discretas. Veremos en el siguiente apartado algunas propiedades del potencial escalar.

3.3 Propiedades del potencial eléctrico

Regresando a la ecuación Ecuación (2), si aplicamos el rotacional a ambos lados de la ecuación, y usando la propiedad de que el rotacional de un gradiente es cero, es decir $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$, entonces tenemos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\,.$$

Ahora debemos aplicar el teorema de Stokes que dice que $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$, y podemos escribir:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0\,,$$

siendo esta integral en una trayectoria cerrada cualquiera. Esto justamente lo que demuestra es que el campo eléctrico es un *campo conservativo*, como lo es cualquier campo cuyo rotacional es nulo, ya que como veremos a continuación su integral de línea es independiente del camino de circulación por el espacio.

Un punto interesante del potencial es que, como es escalar, es más fácil evaluar el potencial y después calcular sus derivadas para obtener el campo, que calcular directamente el campo eléctrico vectorial. Otro punto muy interesante a observar es que el campo obtenido por el potencial de la Ecuación (1), y el campo dado por este otro potencial:

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{qi}} + A\,.$$

siendo A una constante, darían lugar al mismo campo eléctrico. ¿Qué significa esto? Lo único que nos dice es que el *origen* del potencial está a priori indefinido, por lo que sería necesario elegir un punto de referencia en el espacio donde el potencial sea cero, y así determinar el valor de la constante. Normalmente, por conveniencia, se elige $A = 0$, que indica que el potencial escalar se anula en el infinito.

3.4 Diferencia de potencial y superficie equipotencial

Veamos una manera diferente de relacionar $\vec{E}$ con ϕ. Consideremos una integral de línea de $\vec{E}$ entre un punto p_1 en $\vec{r}_1$ y un punto p_2 en $\vec{r}_2$, y usando que $du = \vec{\nabla}u \cdot d\vec{l}$:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 -\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 d\phi = -(\phi(r_2) - \phi(r_1))\,.$$

Esto se puede expresar como:

$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}\,. \tag{6}$$

Lo que nos indica esta expresión es que la diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la integral de línea del campo eléctrico, y el resultado depende únicamente de los valores del potencial en los puntos inicial y final, es decir, el valor de la integral es independiente de la trayectoria, indicándonos una vez más que el campo $\vec{E}$ es conservativo. Esta expresión será muy útil para calcular el potencial cuando tenemos carga en el infinito si conocemos $\vec{E}$.

La superficie donde ϕ es constante se llama *superficie equipotencial*. Estas superficies ayudan a visualizar el potencial escalar, igual que las líneas de campo ayudan a visualizar el campo eléctrico (Gillermo Terán Acosta, 2017). Se sabe que el gradiente de un escalar es normal a la superficie en la que ese escalar es constante, y la dirección viene dada por la máxima razón de cambio. Esto nos dice que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales, y el signo negativo del gradiente $-\nabla\phi$ indica que su sentido es hacia donde el potencial disminuye. En el siguiente ejemplo veremos esto en la Figura 1, para el caso de una carga puntual positiva, en el que las líneas de campo son radiales hacia fuera de la carga.

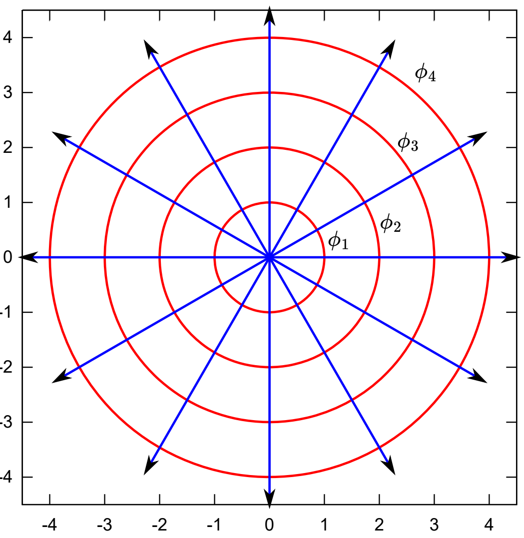


Figura 1: Líneas de campo (azul) y superficies equipotenciales (rojo).

Ejemplo 1. Carga puntual aislada

Usaremos el ejemplo más simple para ver esto en la práctica. Tenemos una carga puntual q. Su potencial escalar es:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_q}\,, \tag{7}$$

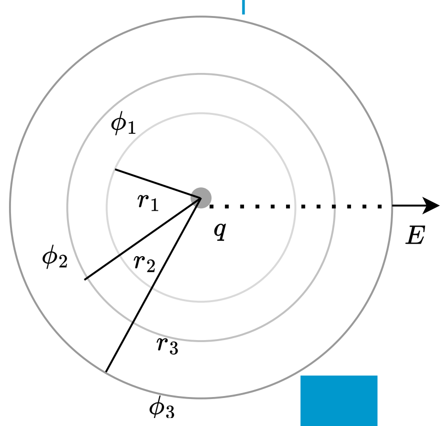
donde $r_q = |\vec{r}|$. Si usamos la propiedad que dice que $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, y usando Ecuación (2) queda:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_q^2}\hat{r}_q\,,$$

que es lo que ya habíamos visto anteriormente. Para calcular las superficies equipotenciales tenemos que despejar r_q en la expresión del potencial, y considerar $r_q =$ constante:

$$r_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\phi}\,.$$

Estas superficies equipotenciales son esferas con centro en la



carga q. Tomamos la carga como positiva, por lo que $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$. Por lo dicho anteriormente, sabemos que E es perpendicular a estas esferas, o sea que es radial y el sentido es hacia afuera.

La Ecuación (3) es una buena solución para resolver problemas en electrostática. Pero a veces hay problemas que son muy difíciles de resolver con esta ecuación directamente, sobre todo en problemas con superficies limitantes. En ese caso es muy útil la expresión que vamos a calcular. Si usamos la Ecuación (2), y la ley de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, se obtiene que:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

donde hemos utilizado el laplaciano definido como la divergencia del gradiente: $\nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi$. Esta es la llamada *ecuación de Poisson,* que vemos que se satisface por el potencial escalar. En una región del espacio libre de cargas, $\nabla^2 \phi = 0$, esta ecuación también es conocida como la *ecuación de Laplace*.

3.5 Potencial eléctrico de distribuciones de carga

Potencial de una esfera cargada uniformemente

Esta es la misma distribución que vimos anteriormente y sería útil recordar que en ese momento usamos coordenadas esféricas. También se puede realizar sin usar coordenadas esféricas, y así lo haremos en los ejercicios. La esfera tiene un radia a y una carga total q , con una densidad de carga constante $\rho = 3q/4\pi a^3$.

Para calcular el potencial aplicamos la Ecuación (3), donde $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$ (recordar que estamos considerando el cálculo del potencial con esta expresión en un punto del eje z, por simplicidad, como hicimos en el caso del calculo de la fuerza de Coulomb), y nos queda:

$$\phi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \frac{r'^2 \sin\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\varphi'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta')^{1/2}} .$$

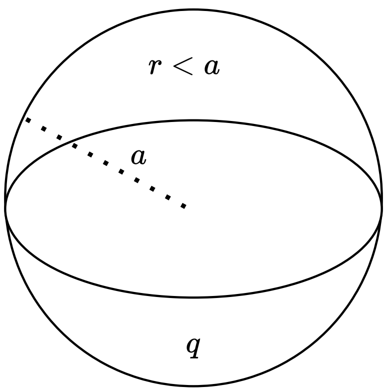


Figura 2: Esfera carga uniformemente de radio a y carga total q.

Realizaremos la misma sustitución que previamente para resolver la integral en θ, $u = \cos\theta'$, y haciendo la integral trivial en φ, que es 2π, tenemos:

$$\phi = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{a}\frac{r'^2 dr' du}{(z^2 + r'^2 - 2zr'u)^{1/2}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{0}^{a} r'^2 dr' \int_{-1}^{1}\frac{du}{(z^2 + r'^2 - 2zr'u)^{1/2}}\,.$$

Si primero nos concentramos en la integral en u, podemos buscar la solución en tablas:

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{(z^2 + r'^2 - 2zr'u)^{1/2}} = -\left.\frac{(z^2 + r'^2 - 2zr'u)^{1/2}}{zr'}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{zr'}\left(|z + r'| - |z - r'|\right)\,.$$

Debido que tenemos este tipo de solución, debemos considerar dos casos por separado.

- Fuera de la esfera. En este caso $z > a$ (consideremos z positivo por simplificar), sabiendo que $r' < a$ siempre, ya que indica la posición de la densidad de carga, la expresión $|z + r'| - |z - r'| = 2r'$, y la integral sobre u es $2/z$. Sustituyendo tenemos:

$$\phi_{\text{fuera}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{0}^{a} r'^2 dr'\left(\frac{2}{z}\right) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 z}\,.$$

  Sustituyendo el valor de ρ en función de la carga queda:

$$\phi_{\text{fuera}}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z}\,.$$

- Dentro de la esfera. En este caso $z < a$.
  - Si $z < r' < a$, entonces $|z + r'| - |z - r'| = (r' + z) - (r' - z)$ y la integral de u es igual a $2/r'$.
  - Si $r' < z < a$, entonces la integral sobre u es igual a $2/z$ como antes.

A la hora de hacer la integral en r debemos considerar estos dos casos con los rangos de integración adecuados, quedando:

$$\phi_{\text{dentro}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(\int_{0}^{z} r'^2 dr'\left(\frac{2}{z}\right) + \int_{z}^{a} r'^2 dr'\left(\frac{2}{r'}\right)\right) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - z^2)\,.$$

Sustituyendo ρ en función de la carga queda:

$$\phi_{\text{dentro}}(z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3 - \frac{z^2}{a^2}\right) .$$

Ahora nos gustaría generalizar el resultado, ya que por conveniencia estábamos calculando el potencial en un punto en el eje z, pero como la esfera es simétrica podemos sustituir ese z por un r, y tenemos:

$$\phi_{\text{fuera}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} , \tag{8}$$

$$\phi_{\text{dentro}}(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) . \tag{9}$$

A partir de estos potenciales escalares podemos calcular el campo eléctrico, a partir de la Ecuación (2), usando que el gradiente en coordenadas esféricas es $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$, el cálculo es directo:

$$E_{\text{fuera}} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} ,$$

$$E_{\text{dentro}} = \frac{qr\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} .$$

Y podemos comprobar que estos son los mismos resultados que habíamos obtenido anteriormente.

Potencial de una línea cargada uniforme

Consideremos la línea de carga para la cual en el capítulo uno ya calculamos el campo eléctrico. Recordemos que para una línea de carga infinita el campo es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}\hat{\rho} .$$

Si partimos de ese valor del campo ya calculado, y usando la Ecuación (6), podremos extraer el valor del potencial integrando el campo $\vec{E}$. Usando coordenadas cilíndricas el diferencial de línea es $d\vec{l} = d\rho\hat{\rho}$. Considerando dos puntos a una distancia ρ_1 y ρ_2

de la línea, tenemos:

$$\phi(\rho_1) - \phi(\rho_2) = \int_1^2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} d\rho\lambda = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} .$$

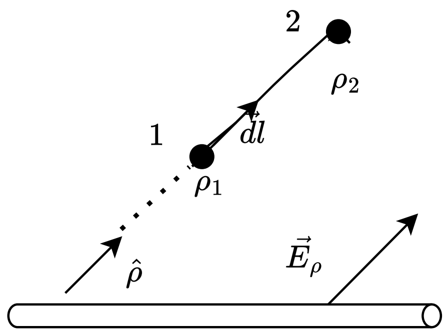


Figura 3: Campo eléctrico en un línea infinita cargada. También está representada la trayectoria de integración $d\vec{l}$, y el punto inicial ρ_1 y final ρ_2.

Este cálculo nos proporciona la diferencia de potencial entre los dos puntos considerados, pero lo que deseamos es el valor del potencial en cada uno de estos puntos. Si consideramos que el punto 2 está en el infinito e imponemos que el potencial en el infinito se anule, es decir, $\phi(\rho_2) = 0$, tendríamos que $\phi(\rho_1) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\infty}{\rho_1} = \infty$. Vemos que considerar esta referencia no es la solución, ya que al hacer el potencial cero en el infinito, obtenemos que el valor del potencial será infinito en cualquier otro punto finito. Pero como comentamos en un apartado anterior, podemos definir el potencial cero en cualquier punto conveniente. Entonces, para solucionar el problema, introducimos una distancia arbitraria ρ_0 donde $\phi(\rho_0) = 0$, y sustituyendo en la ecuación de arriba, podemos decir que el potencial a una distancia ρ de una línea de carga es de la forma:

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho} .$$

Es interesante pensar cómo sería este resultado si en vez de una línea infinita tenemos un cilindro de radio R. La segunda pregunta es cuál sería el potencial si la línea fuera finita.

Potencial debido a un anillo cargado uniforme

Tenemos un anillo cargado uniformemente de radio a, y carga total q. El plano del anillo se encuentra perpendicular al eje x. Calcular el potencial en un punto P situado sobre el eje del anillo.

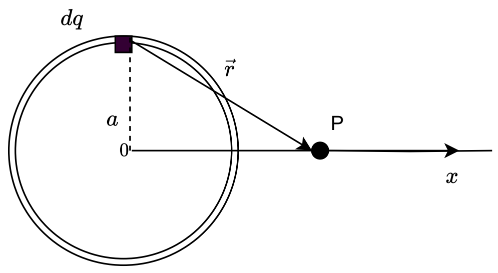


Figura 4: Anillo cargado uniforme de radio a. El eje del anillo se encuentra en el eje x, por lo que todos los puntos del anillo están a la misma distancia de un punto P coaxial.

Dado que queremos calcular el potencial en un punto que está en el eje del anillo, todos los segmentos están a la misma distancia del punto P. Consideremos que P está a una distancia x del anillo. La distancia de dq a P es $\sqrt{x^2 + a^2}$ para todos los dq. Así que podemos considerar el potencial como:

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, .$$

Vemos que el potencial que calculamos solo depende de x, porque nuestro calculo solo es válido para puntos a lo largo del eje x (estamos considerando $y = 0$ y $z = 0$). Si nos fijamos en la simetría del problema podemos ver que en el eje x el campo solo va a tener una componente x. Usando la Ecuación (2) podemos obtener el campo de forma directa:

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x} \, .$$

Se trata del mismo resultado que obtuvimos como valor del campo, mientras que anteriormente lo habíamos hecho mediante integración.

3.6 Potencial de un conductor cargado

Anteriormente, vimos cómo la carga neta de un conductor se encuentra solo en su superficie. También vimos que el campo $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie del conductor, y su valor es igual a cero en su interior. Ahora nos gustaría saber cuál es el valor del potencial escalar. Para ello, consideremos dos puntos a y b en la superficie del conductor y hagamos la integral de camino del campo eléctrico entre ellos a través de la superficie. Como sabemos que en la superficie del conductor no hay componente tangencial del campo, sino que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie, entonces $\vec{E}$ siempre va a ser perpendicular a $d\vec{l}$ y $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Según la Ecuación (6), tenemos:

$$\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0\,.$$

Que este resultado se pueda aplicar a dos puntos cualquiera sobre el conductor nos indica que el potencial escalar en la superficie del conductor es igual en todos sus puntos, es decir, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Además, debido a que el campo eléctrico es cero dentro del conductor, por la Ecuación (2), podemos concluir que el potencial es constante en el interior del conductor y su valor es igual al valor en su superficie.

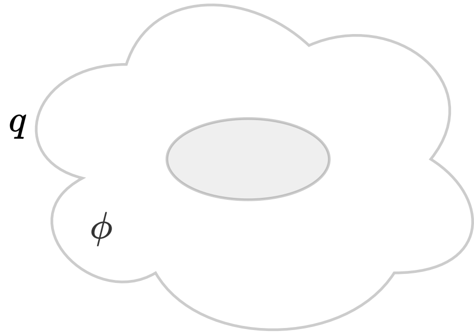


Figura 5: Conductor en equilibro electrostático con una cavidad vacía en su interior. El campo eléctrico en la cavidad es cero.

Otra propiedad que podemos inducir de que el potencial sea constante, es que si tenemos una cavidad sin carga dentro del conductor, el campo dentro de esa cavidad también debe ser cero.

Ejemplo 2. Dos esferas cargadas conectadas

Tenemos dos esferas conductoras cargadas con un radio R_1 y R_2. Estas esferas están separadas por una distancia mucho mayor que el valor de sus radios. Y estas esferas están conectadas por un cable conductor, véase la Figu-

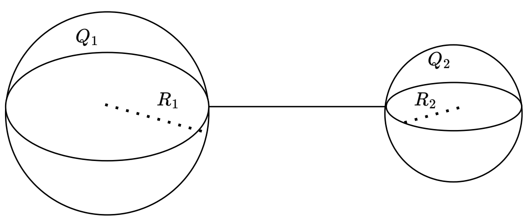


Figura 6: Esferas conductoras conectadas con un cable conductor.

ra 6. Las esferas están en equilibrio y poseen una carga Q_1 y Q_2. Calcula la razón de los respectivos campos en la superficie de las esfera.

Como las esferas están conectadas, eso nos indica que deben estar al mismo potencial. Entonces podemos decir que:

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}\right).$$

De esta expresión extraemos la razón de las cargas ${}^{Q_1}\!/_{Q_2} = {}^{R_1}\!/_{R_2}$. Dado que las cargas están separadas lo suficiente, las superficies están cargadas de forma uniforme y entonces el campo eléctrico en sus superficies viene dado por:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1^2}\right),\ E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2^2}\right).$$

Haciendo la razón de estos dos campos, y usando la razón de las cargas que encontramos antes, obtenemos que:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

3.7 Energía potencial eléctrica

Para llegar a la expresión de la energía potencial debemos hacer el siguiente ejercicio. Entendemos que los cambios en un potencial deben estar asociados a cambios en la energía. Consideremos una carga q, que está en equilibrio, y esta sometida a una fuerza electrostática $\vec{F}_q = q\vec{E}$, y a una fuerza mecánica $\vec{F}_m$. Para que estén en equilibrio $\vec{F}_q + \vec{F}_m = 0$, tenemos que $\vec{F}_m = -q\vec{E}$.

Ahora consideremos que movemos la carga de una posición $\vec{r}_a$ a una posición $\vec{r}_b$, si consideremos que lo hacemos infinitamente despacio, al no haber aceleración podemos considerar que estamos en equilibro. Lo que queremos calcular ahora es el trabajo realizado para mover esa carga de el punto a al punto b. Usando la Ecuación (6):

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}_m \cdot d\vec{s} = \int_a^b -q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q(\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)) \,.$$

Llegamos a que el trabajo realizado es igual a la carga multiplicada por la diferencia de potencial entre los dos puntos. Vemos que el trabajo depende únicamente de los puntos inicial y final. Ahora podemos igualar el trabajo realizado a la variación en la energía potencial eléctrica, expresada como U_e:

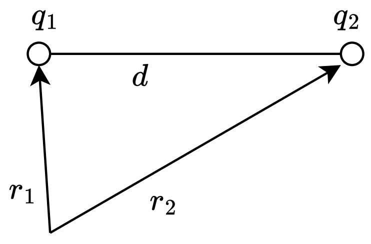
$$\Delta U_e = q(\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)) = q\Delta\phi \,.$$

Si incluimos cualquier constante en ϕ, la diferencia de energía potencial tampoco sufre ninguna variación. Suponiendo que $\Delta U_e = U_e(\vec{r}_b) - U_e(\vec{r}_a)$, con esto podemos decir que la energía potencial en un punto $\vec{r}$, por una carga q, se puede expresar como:

$$U_e(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}) \,. \tag{10}$$

Ejemplo 3. Dos cargas puntuales

Tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2, en la posición r_1 y r_2 sabiendo que el potencial de una carga es la Ecuación (7). Las cargas están separadas por una distancia d. Queremos calcular la energía potencial de este sistema de dos cargas. Sabiendo que el potencial en la posición de q_1 creado por q_2, es Ecuación (7), $\phi = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$, y $r_{12} = |r_2 - r_2| = d$, entonces usando Ecuación (10) queda:



$$U_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \,. \tag{11}$$

3.8 Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas

Consideremos N cargas de las que conocemos su posición y la separación entre ellas. La energía potencial, usando Ecuación (11) sería, para un par arbitrario:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \, .$$

Para que sea el potencial de todas las cargas debemos hacer la suma en ambos índices, excluyendo el caso donde $i = j$. Se puede expresar como:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) .$$

donde el 1/2 aparece al evitar que los pares se repitan. El término entre paréntesis es el potencial escalar en el punto q_i debido a todas las otras cargas, entonces la expresión nos queda como:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(\vec{r}_i) \, .$$

En el caso de que las cargas estén distribuidas de forma continua debemos cambiar la suma por una integral, como ya hicimos en previas ocasiones:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\, \phi(\vec{r})\, dV \, , \tag{12}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})\, \phi(\vec{r})\, dS \, , \tag{13}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda(\vec{r})\, \phi(\vec{r})\, dl \, . \tag{14}$$

Tenemos que notar aquí que la integral no necesita estar limitada al volumen donde está la carga, ya que en las regiones en las que no hay carga, no contribuyen a la integral, así que la integral se puede extender a todo el espacio.

Ejemplo 4. Distribución esférica y uniforme de carga

Consideremos una esfera de radio a, que posee una densidad de carga por unidad de volumen ρ. Este ejemplo ya lo vimos en otro apartado del tema, donde calculamos el potencial dado por Ecuación (9) para dentro de la esfera que es el único que necesitamos:

$$\phi = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2)\,.$$

Usando Ecuación (12), podemos usar coordenadas esféricas, aunque no es necesario, porque solo hay dependencia de r en la integral:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^a \rho^2 \frac{1}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2)4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0}\int_0^a (3a^2r^2 - r^4)dr = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}\,.$$

Y si sustituimos ρ en función de la carga total de la esfera $q = 4\pi\rho a^3/\epsilon_0$, tenemos:

$$U_e = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\,.$$

Fijémonos que esta energía potencial es menor que la que producen dos cargas puntuales de la misma carga q y a una distancia igual al radio de la esfera.

3.9 Energía en función del campo eléctrico

Es de especial interés poder expresar la energía no solo en función de las cargas, sino también en función del campo $\vec{E}$. Usaremos la Ecuación (12) como punto de partida para encontrar la expresión deseada. A partir de la ley de Gauss expresada en términos de la divergencia del campo, tenemos que $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, que podemos sustituir en la Ecuación (12):

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})dV\,.$$

No vamos a hacer el desarrollo del cálculo aquí, pero después de aplicar diferentes propiedades vectoriales y límites en las integrales resultantes podemos llegar a la siguiente expresión:

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0}{2} \left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 dV \,,$$

Podemos decir así que existe una densidad de energía eléctrica $u_e(\vec{r})$ distribuida en el espacio que es directamente proporcional al cuadrado del valor del campo eléctrico:

$$u_e(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 \,.$$

3.10 Aplicaciones de la electrostática

Veamos ahora algunas aplicaciones y descubrimientos interesantes que sucedieron con la ayuda de la electrostática que hemos visto durante estos capítulos. No solo se pueden aplicar a la física, sino a otras áreas como la biología. Podéis leer en este artículo (Julio Enrique Duarte, 2005) una aplicación de los campos eléctricos para la manipulación de microorganismos.

El generador de Van de Graaf

En 1929, Robert Van de Graaf construyó un generador electrostático partiendo del concepto de que cuando tenemos un conductor cargado que se pone en contacto con un conductor hueco, toda la carga del primer conductor se transfiere al conductor hueco. Si quieres saber los detalles, puedes ver el vídeo:

Accede al vídeo: Generador de Van de Graaf.

El experimento de la gota de aceite de Millikan

Robert Millikan descubrió, alrededor de 1913, que la carga está cuantizada. Es decir descubrió que:

$$q = ne \qquad n = 0, -1, -2, -3\,,$$

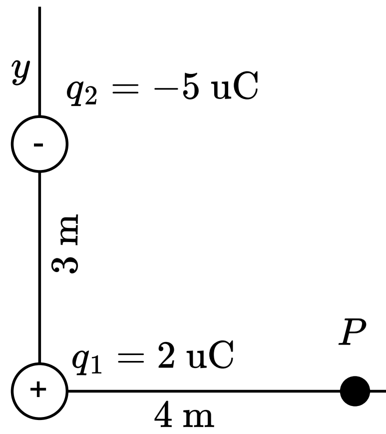
donde $e = 1.6 \times 10^{-19} C$, que es la carga de un electrón. Lo hizo gracias a un experimento que diseñó. En el mismo aplica un campo eléctrico, y esto fue clave a la hora de su descubrimiento. Si queréis saber más, podéis leer este artículo (Rodríguez, María A and Niaz, Mansoor, 2001).

3.11 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Dado el campo $\vec{E} = (yz - 4x)\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z}$, ¿podría ser un campo electrostático? Si la respuesta es afirmativa, encontrar el potencial escalar. *Solución*: Sí, ya que $\nabla \times \vec{E} = 0$, $\phi = -xyz + 2x^2 + \text{cte}$

Ejercicio 2. Dado un potencial escalar $\phi = 4x^2 - 3y^2$ en una cierta región del espacio, queremos saber cuál es el valor del campo eléctrico en un punto $P = (-2, -4, 6)$. *Solución*: $\vec{E} = 16\hat{x} - 24\hat{y}$.

Ejercicio 3.
Tenemos dos cargas puntuales. Una carga de 2 uC se encuentra en el origen, y otra carga de −5 uC se encuentra en el eje y positivo a un distancia de 3 m de la otra carga, como se ve en la figura.

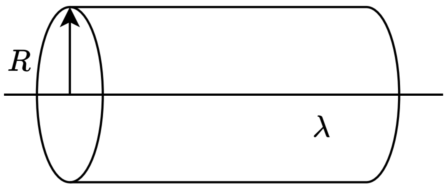


- Calcula el potencial eléctrico en un punto P situado en el eje x a 4 m del origen.
- ¿Qué trabajo se necesita realizar para llevar una carga de 4 uC desde el infinito al punto P?

Solución: $\phi = -4.5 \times 10^3$ V y $W = -18 \times 10^{-3}$ J.

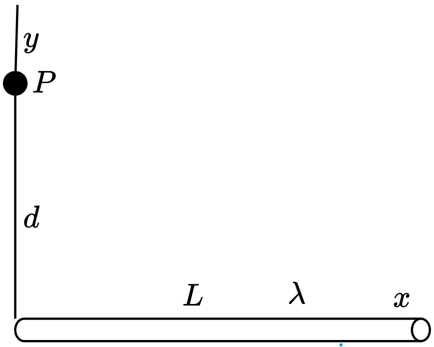
Ejercicio 4.

Encuentra el potencial de un cilindro conductor con carga infinita. La densidad de carga lineal es λ. El radio del cilindro es R. *Solución*: $\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\rho}$.



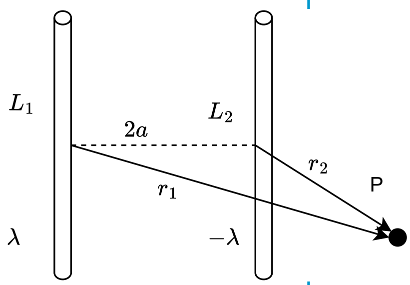
Ejercicio 5.

Tenemos una línea de carga finita, de longitud L, con una densidad de carga lineal λ, y una carga total Q. La línea se encuentra a lo largo del eje x. ¿Cuál sería el potencial eléctrico en un punto P a lo largo del eje y, a una distancia d de la línea de carga (el cálculo puede realizarse en coordenadas rectangulares)? *Solución*: $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}$.



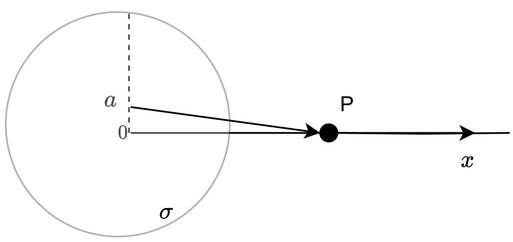
Ejercicio 6.

Tenemos dos líneas paralelas de signo opuesto. Consideremos una línea de carga tiene densidad λ y la otra densidad $-\lambda$. La longitud de las líneas es L_1 y L_2. Queremos calcular el potencial en un punto P. Consideramos que la longitud de las líneas es mucho más grande que la distancia al punto P. La separación entre las líneas es a,y la distancias de las líneas al punto P, es r_1 y r_2. Para el cálculo se puede partir de la solución del ejercicio anterior (del potencial en una línea finita). *Solución*: $\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$.



Ejercicio 7.

Tenemos un disco cargado uniformemente con una carga por unidad de área σ. El disco tiene un radio a, y su eje se encuentra en le eje x. Encuen-

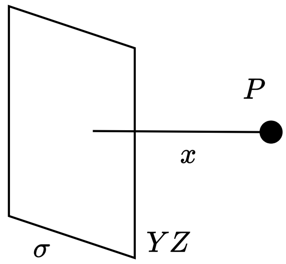


tra el valor del potencial en el eje x,

en un punto P. A partir del potencial

deduce el valor del campo eléctrico. *Solución*: $\phi = \frac{1\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{x^2+a^2} - x)$, $\vec{E} = \frac{1\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})\hat{x}$.

Ejercicio 8.
Tenemos un plano infinito, con una densidad superficial σ. calcular cuál es su potencial eléctrico en un punto P. El plano se encuentra en el eje YZ. *Solución*: $\phi = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$.



Ejercicio 9. Tenemos una esfera conductora con radio R, que tiene una cavidad central con un radio a. En el centro de la cavidad hay una carga Q positiva. Hallar el potencial para:

- $r \geq R$.
- $a \leq r \leq R$.
- $r < a$.

Solución: $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, y $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a})$.

Ejercicio 10. Tenemos una esfera conductora, de radio a con una carga total Q. Indica cuál es la energía potencial dentro de la esfera y fuera de ella. *Solución*: $U_{\text{dentro}} = 0$,$U_{\text{fuera}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$.

3.12 Referencias bibliográficas

Gillermo Terán Acosta, V. C. C. (2017). Diseño y construcción de un prototipo de superficies equipotenciales como proceso de enseñanza investigadora.

Julio Enrique Duarte, J. S. M. y. F. H. F. M. (2005). Potencial de los campos eléctricos para la manipulación de microorganismos. *Revista UIS ingenierías*, 4(1), 53–63.

Rodríguez, María A and Niaz, Mansoor (2001). Experimento de la gota de aceite en manuales de laboratorio de física: una perspectiva basada en la historia y filosofía de la ciencia/Physics Laboratory Manuals' presentation of the oil drop experiment: a history and philosophy of science perspective. *Journal of Science Education*, 2(2), 81.