

Ecuaciones diferenciales

Resolución numérica de EDPs

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
10.1 Introducción y objetivos	3
10.2 Problemas de valores iniciales	4
10.3 Problemas de contorno	8
10.4 Referencias bibliográficas	10

Problemas de valores iniciales
(Ecuación de ondas, ecuación del calor)

Condición de estabilidad

Problemas de contorno
(Ecuación de Laplace y Poisson)

10.1 Introducción y objetivos

Ya vimos en un tema anterior algunos métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales y de contorno asociados a *ecuaciones diferenciales ordinarias*. En los primeros utilizábamos diferencias finitas para «propagar» las condiciones iniciales hasta la solución en un instante de tiempo dado. Para resolver los segundos, utilizábamos un método de propagación similar, dejando cierta libertad en las condiciones de un extremo para poder cumplir las condiciones en el otro extremo del intervalo de integración (método de disparo), o bien partiendo de una función arbitraria que ya cumplía todas las condiciones de contorno y dejándola evolucionar hacia la solución (método de relajación).

En este tema vamos a ver algunos de los métodos numéricos que se utilizan para resolver *ecuaciones en derivadas parciales*. Estos métodos son necesariamente más complicados que los que vimos para las EDOs, y explicar la variedad y sofisticación de los algoritmos existentes exigiría mucho más tiempo del que disponemos, por tanto nos limitaremos a dar una introducción muy breve a algunos de ellos sin entrar en muchos detalles. El alumno interesado puede consultar la bibliografía especializada, por ejemplo ([Press et al., 2007](#)).

Hasta ahora hemos dividido las EDPs en tres tipos: hiperbólicas, parabólicas y elípticas, siendo la ecuación de ondas, la ecuación del calor, y la ecuación de Laplace (Poisson) ejemplos prototípicos de cada una de ellas. Desde el punto de vista computacional, sin embargo, esta clasificación no tiene mucho sentido, y la principal distinción que haremos será, como en los métodos numéricos para EDOs, entre problemas de valores iniciales y problemas de contorno.

Las ecuaciones de ondas y del calor describen la *evolución temporal* de un sistema, por tanto los problemas asociados a estas ecuaciones consisten en encontrar el estado

$u(x, t)$ del sistema en un instante dado a partir de unas condiciones iniciales $u(x, t_0) = f(x)$; $u_t(x, t_0) = g(x)$.

Por el contrario, la ecuación de Laplace (Poisson) describe un sistema *estático*, en el que la solución $u(x, y)$ es aquella que se comporta de un cierto modo en una región de interés, es decir, que adquiere unos determinados valores en unos puntos del contorno.

En los problemas de contorno no es posible por lo general integrar la ecuación desde un extremo del intervalo, del modo en que un problema de valores iniciales se integra hacia adelante en el tiempo. El algoritmo numérico que apliquemos a los problemas de contorno debe convergir a la solución correcta en todos los puntos *a la vez*.

Los métodos que mencionaremos aquí se basan en las *ecuaciones en diferencias finitas*, es decir, ecuaciones que se obtienen al sustituir en las ecuaciones diferenciales las cantidades infinitesimales dx por intervalos finitos Δx . Sin embargo, hay que advertir que existen otros muchos métodos para resolver EDPs: métodos de *elementos finitos*, *Monte Carlo*, métodos *espectrales*, y *variacionales*, que pueden ser más convenientes para resolver una determinada ecuación pero que se salen del ámbito de este curso.

Los objetivos de este tema son:

- ▶ Entender la problemática de la resolución numérica de EDPs.
- ▶ Conocer algunos métodos numéricos basados en diferencias finitas para resolver problemas de valores iniciales y problemas de contorno asociados a EDPs.

10.2 Problemas de valores iniciales

Al considerar los métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales asociados a EDPs la principal preocupación debe ser la estabilidad del algoritmo. Esto significa que en cada paso de integración la solución calculada se mantiene dentro de unos límites de precisión respecto a la solución real. Muchos algoritmos en apariencia

adecuados resultan ser numéricamente inestables.

Gran parte de las EDPs de evolución temporal con una dimensión espacial se pueden escribir de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x},$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{F} son vectores. La función $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, que puede depender también de la derivada espacial de \mathbf{u} se llama *flujo conservado*.

Por ejemplo, la ecuación de ondas unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

se puede reescribir como un sistema de dos ecuaciones acopladas de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= c \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= c \frac{\partial r}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} r &\equiv c \frac{\partial u}{\partial x}, \\ s &\equiv \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

En este caso, r y s son las dos componentes del vector \mathbf{u} , y el flujo viene dado por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}.$$

En lo que sigue, vamos a considerar como ejemplo una ecuación de flujo conservado en la que u es un escalar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

con c constante.

A continuación, expresamos la [Ecuación \(2\)](#) en forma de diferencias finitas. Una manera de hacerlo es dividiendo el intervalo de integración de x en un número J de pasos

Δx y el de t en K pasos Δt , de manera que:

$$\begin{aligned}x_j &= x_0 + j\Delta x, & j &= 0, 1, 2, \dots, J \\t_k &= t_0 + k\Delta t, & k &= 0, 1, 2, \dots, K\end{aligned}$$

Llamando $u_j^k \equiv u(x_j, t_k)$, podemos escribir la derivada parcial de u respecto de t como:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{j,k} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Esta expresión es similar a la del método de Euler que vimos en el tema sobre EDOs. Aunque no es muy precisa, tiene la ventaja de que uno puede calcular los valores de la solución en el paso temporal $k + 1$ a partir únicamente de los valores en el paso k .

Para la derivada espacial podemos utilizar una aproximación de segundo orden utilizando únicamente las cantidades conocidas en el paso temporal k :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

La ecuación en diferencias finitas que resulta como aproximación a la [Ecuación \(2\)](#) se llama representación *FTCS* por las siglas de *Forward Time Centered Space*:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -c \left(\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} \right). \quad (3)$$

Esta expresión se puede reescribir para dar u_j^{k+1} en función de las otras cantidades.

El método FTCS es relativamente sencillo de implementar, sin embargo, resulta ser inestable incluso para tiempos de evolución muy cortos. Afortunadamente, la inestabilidad del método FTCS se puede solucionar de manera sencilla mediante una simple modificación a la [Ecuación \(3\)](#) llamada *método de Lax*. El procedimiento consiste en sustituir el término u_j^k en la derivada temporal por su promedio:

$$u_j^k \rightarrow \frac{1}{2} (u_{j+1}^k + u_{j-1}^k),$$

lo cual convierte la [Ecuación \(3\)](#) en:

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2} \left(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k \right) - \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k \right). \quad (4)$$

La estabilidad del algoritmo se puede estimar asumiendo que las soluciones u_j^k de la ecuación en diferencias finitas son de la forma:

$$u_j^k = \xi^k \exp(2\pi i \frac{j \Delta x}{\lambda}), \quad (5)$$

es decir, funciones oscilantes con una «longitud de onda» λ/j y una «amplitud» que es la potencia k -ésima de un número complejo ξ . El número ξ , que depende de λ , se llama *factor de amplificación*. Si $|\xi(\lambda)| > 1$ para algún λ entonces la ecuación en diferencias finitas es inestable.

Para encontrar $\xi(\lambda)$ no hay más que sustituir la [Ecuación \(5\)](#) en la ecuación en diferencias finitas. Así el método FTCS daría:

$$\xi(\lambda) = 1 - i \frac{c \Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}),$$

cuyo módulo es mayor que uno para todo λ , por tanto el método FTCS es intrínsecamente inestable. Para hallar el factor de amplificación del método de Lax, sustituimos la [Ecuación \(5\)](#) en la [Ecuación \(4\)](#) obteniendo:

$$\xi(\lambda) = \cos(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}) - i \frac{c \Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}).$$

El criterio de estabilidad $|\xi|^2 \leq 1$ lleva a la condición:

$$\frac{|c| \Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

que se conoce como *condición de estabilidad de Courant*.

En este artículo puedes encontrar una aplicación práctica del método de diferencias finitas para resolver la ecuación del calor en dos dimensiones ([McDougall & Ayars, 2014](#)), y en el siguiente vídeo puedes ver una demostración de estos métodos en la resolución de la [Ecuación \(2\)](#):



10.3 Problemas de contorno

Al contrario de lo que ocurriría con los problemas de valores iniciales, en los problemas de contorno es más fácil conseguir estabilidad. Por tanto, la principal preocupación en cuanto a los algoritmos para resolver problemas de contorno es la eficiencia, tanto en términos de coste computacional como en requisitos de memoria.

Como todas las condiciones del problema de contorno deben satisfacerse simultáneamente, estos problemas se reducen conceptualmente a la resolución simultánea de un gran número de ecuaciones algebraicas.

Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (6)$$

y resolvámosla por el método de diferencias finitas. Representamos la función $u(x, y)$ por sus valores en un conjunto discreto de puntos:

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + j\Delta, & j &= 0, 1, 2, \dots, J \\ y_k &= y_0 + k\Delta, & k &= 0, 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

donde Δ es el espaciado de la red. Llamando $u_{j,k} \equiv u(x_j, y_k)$, y $\rho_{j,k} \equiv \rho(x_j, y_k)$, podemos expresar la [Ecuación \(6\)](#) en forma de diferencias finitas como:

$$\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta^2} = \rho_{j,k},$$

o lo que es lo mismo:

$$u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k} = \Delta^2 \rho_{j,k}. \quad (7)$$

Para escribir este sistema de ecuaciones lineales en forma de matriz necesitamos construir un vector a partir de u . Podemos transformar la malla bidimensional en una secuencia de puntos unidimensional definiendo:

$$i \equiv j(K + 1) + k \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, J; \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

La Ecuación (7) se convierte en:

$$u_{i+K+1} + u_{i-(K+1)} + u_{i+1} + u_{i-1} - 4u_i = \Delta^2 \rho_i. \quad (8)$$

Esta ecuación se satisface solamente en los puntos interiores: $j = 1, 2, \dots, J - 1; k = 1, 2, \dots, K - 1$. Los puntos en los que $j = 0, j = J, k = 0, k = K$, son los puntos del contorno en los que ya se ha definido el valor de la función u o de sus derivadas. Si llevamos esta información conocida al lado derecho de la Ecuación (8), ésta toma la forma:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (9)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{b} son matrices.

Los métodos de relajación hacen uso de la estructura de la matriz \mathbf{A} . Esta matriz se puede dividir en dos partes:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} - \mathbf{F},$$

donde \mathbf{E} es una matriz que se puede invertir fácilmente y \mathbf{F} es el resto. Entonces la Ecuación (9) se convierte en:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b}.$$

El método de relajación se basa en hacer una estimación inicial $\mathbf{u}^{(0)}$ y después resolver iterativamente para sucesivas aproximaciones $\mathbf{u}^{(r)}$ a partir de:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}^{(r)} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^{(r-1)} + \mathbf{b}.$$

Como la matriz \mathbf{E} se elige de modo que sea fácilmente invertible, cada iteración se puede calcular rápidamente.

10.4 Referencias bibliográficas

McDougall, P. & Ayars, E. (2014). Two-dimensional heat flow apparatus. *American Journal of Physics*, 82(6), 620–623.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.