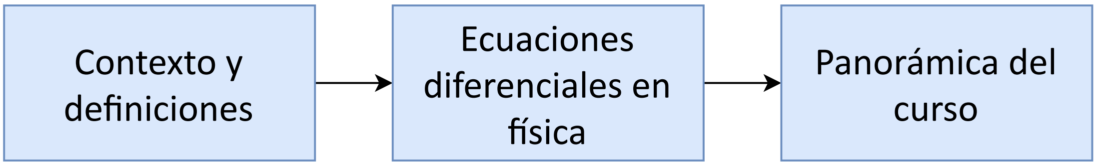
Ecuaciones diferenciales

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Índice

Esquema


Contexto y definiciones
Ecuaciones diferenciales en física
Panorámica del curso

Ideas clave

1.1 Introducción y objetivos

Los métodos de resolución y análisis de ecuaciones diferenciales forman parte esencial del arsenal de herramientas matemáticas que todo físico debe poseer. Como se verá a lo largo del grado, una gran parte de los problemas que aparecen en Física se reducen a plantear -y resolver- una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales.

El objetivo general de este curso es suministrar al alumno los conocimientos y herramientas necesarias para abordar este tipo de problemas. Como se verá más adelante, solamente una muy pequeña parte de ecuaciones diferenciales se pueden resolver exactamente. Para el resto de problemas -la mayoría- nos centraremos en buscar soluciones aproximadas, tanto por métodos analíticos como numéricos, y en estudiar ciertas propiedades de las soluciones, tales como su estabilidad, que pueden deducirse a partir de la ecuación sin necesidad de resolverla, y que proporcionan información muy útil sobre la física del sistema.

Si bien no nos detendremos demasiado en la física de los problemas asociados a cada una de las ecuaciones -esto se dejará a la correspondiente asignatura- sí que intentaremos plantear las ecuaciones en un contexto práctico.

Los objetivos de este tema introductorio son:

- Conocer el concepto de **ecuación diferencial**.
- Reconocer los diferentes tipos de **ecuaciones diferenciales ordinarias** y ecuaciones en **derivadas parciales**.
- Reconocer los **problemas físicos** en los que aparecen los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
- Familiarizarse con los conceptos que se verán a lo largo del curso.

- Familiarizarse con el tipo de problemas que se tratarán de resolver en el curso.

En este vídeo puedes ver una introducción a las ecuaciones diferenciales con una panorámica del curso:

Accede al vídeo: Introducción al curso

1.2 Contexto y definiciones

En este curso de ecuaciones diferenciales suponemos que el alumno ya ha adquirido ciertas nociones de cálculo infinitesimal durante el primer año y está familiarizado en particular con los conceptos de límite, derivada e integral en una y varias variables reales. También será necesario manejar ideas del álgebra lineal (operaciones con matrices, cálculo de autovalores y autovectores, y diagonalización de matrices) para tratar los sistemas de ecuaciones.

A continuación, introduciremos el tema de las ecuaciones diferenciales, situándolo en el contexto más amplio del cálculo infinitesimal, y definiremos las ideas fundamentales que aparecerán a lo largo del curso, intentando conectarlas con los conceptos que ya conoce el alumno.

Funciones

Las funciones son el objeto central del análisis matemático. El alumno se habrá encontrado a lo largo de su carrera con funciones de diversos tipos: funciones escalares $f(x)$ y vectoriales $\mathbf{F}(x)$; de una sola variable o de varias variables; polinomios de grado n, funciones racionales, trigonométricas, exponenciales, y logarítmicas, cualquier combinación de ellas, y funciones definidas por partes. Dichas funciones pueden ser continuas o discontinuas en un intervalo dado, así como *derivables* o *no derivables* en un punto.

Los problemas típicos con los que nos encontramos en el cálculo de funciones de una sola variable son de los siguientes tipos:

- Representar gráficamente una función $f(x)$ en el plano (x, y).
- Hallar los *ceros* de una función $f(x)$. Es decir, hallar los valores de x para los que la función $f(x)$ se hace cero. Gráficamente equivale a hallar los puntos x_1,x_2..., en los que la gráfica de $f(x)$ corta el eje de abscisas ($y = 0$).
- Hallar las sucesivas *derivadas* de una función $f(x)$ respecto de x.
- Hallar los *puntos extremos* de una función (máximos, mínimos y de inflexión).
- Hallar la *integral* de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.
- *Desarrollar en serie* de potencias una función $f(x)$ en torno al punto x_0:

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} (x - x_0)^n .$$

  (Si esta operación es posible, se dice que $f(x)$ es *analítica* en el punto x_0.)

En el caso de funciones de varias variables aparecen también los problemas de hallar las sucesivas *derivadas parciales* de una función $f(x, y, ...)$ respecto a una de las variables; máximos y mínimos sobre (hiper)superficies e integrales múltiples.

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función desconocida con alguna de sus derivadas.

Definición 1: Ecuación diferencial ordinaria

Si la función es de una sola variable -llamemos a esta función $y(x)$- la ecuación:

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, ..., \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 ,$$

se llama *ecuación diferencial ordinaria* (EDO).

Definición 2: Ecuación en derivadas parciales

Si la función es de varias variables -por ejemplo $u(x, y)$-, entonces la ecuación:

$$f\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y\right) = 0\,,$$

se llama en *ecuación en derivadas parciales* (EDP).

En el estudio de las EDOs por lo general llamaremos y a la variable dependiente y x a la variable dependiente. Aunque no escribamos explícitamente $y(x)$, hay que tener siempre en cuenta que y es una función de x mientras no se especifique lo contrario. En las EDPs llamaremos u a la función de variables independientes x, y (y z).

Las variables x, y, z, que aparecen en estas ecuaciones no tienen por qué referirse necesariamente a coordenadas espaciales. Uno de los atractivos de las ecuaciones diferenciales es que un mismo tipo de ecuación puede aparecer en contextos muy diferentes, que nada tienen que ver entre sí en el mundo real. Tanto las variables dependientes como las independientes se pueden referir a una temperatura, una densidad, o al valor de una determinada acción en bolsa. En los ejemplos en que utilicemos las ecuaciones en un contexto físico, sin embargo, utilizaremos la notación tradicional. Es decir, cuando la variable dependiente se refiere a una posición la llamaremos x, mientras que a la variable independiente la llamaremos t cuando se refiera al tiempo.

A lo largo del curso utilizaremos la notación habitual para referirnos a las sucesivas derivadas de una función $y(x)$ respecto de x:

$$\begin{aligned} y'(x) &\equiv \tfrac{dy}{dx} \\ y''(x) &\equiv \tfrac{d^2y}{dx^2} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ y^{(n)}(x) &\equiv \tfrac{d^ny}{dx^n} \end{aligned}$$

En el caso de las derivadas parciales de una función $u(x, y)$ utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &\equiv \tfrac{\partial u}{\partial x} \\ u_y(x,y) &\equiv \tfrac{\partial u}{\partial y} \\ u_{xx}(x,y) &\equiv \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{xy}(x,y) &\equiv \tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ u_{yy}(x,y) &\equiv \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Cuando hay más de una función, las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales se suelen presentar simultáneamente formando *sistemas de ecuaciones*. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. La *solución* de una ecuación diferencial es una función, tantas veces derivable como sea el orden de la ecuación, que al ser sustituida en ésta la convierte en una identidad.

Una ecuación diferencial tiene por lo general infinitas soluciones dependientes de una o más constantes de integración (según sea el orden de la ecuación). A la expresión que recoge todas las soluciones de la ecuación se le llama *solución general*.

Para determinar el valor de las constantes de integración es necesario exigir que la solución (y sus derivadas) adquieran un determinado valor en un punto dado (*condiciones iniciales*) o bien en una serie de puntos (*condiciones de contorno*). La *solución particular* de una ecuación diferencial es la solución que cumple unas condiciones dadas.

Ejemplo 1. Solución general y solución particular - Problema de valores iniciales

Sea la ecuación de segundo orden $y'' = a$, siendo a una constante conocida. Integrando una vez vemos que la primera derivada de la función solución es:

$$y' = ax + C_1 .$$

Integrando por segunda vez obtenemos la solución general:

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + C_1 x + C_2 ,$$

que contiene dos constantes de integración por ser la ecuación diferencial de segundo orden.

Si imponemos un valor para la función $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ en un punto dado, por ejemplo $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$, podemos obtener la solución particular que cumple dichas condiciones:

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + 5x + 2\,.$$

Problemas típicos de ecuaciones diferenciales

La clase de problemas con los que nos encontraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales serán:

- **Resolver la ecuación.** Se trata de encontrar la función o funciones que satisfacen la igualdad expresada en la ecuación (solución general). Además, se nos puede plantear el problema de encontrar la solución particular que cumple unas condiciones iniciales dadas (*problema de valores iniciales*) y/o adquiere unos determinados valores en unos puntos dados (*problema de contorno*). Al problema de resolver una ecuación diferencial con unas determinadas condiciones iniciales o de contorno se le llama generalmente *problema de Cauchy*.

  Por lo general no es posible resolver una ecuación diferencial de manera exacta, solamente una pequeña fracción de ecuaciones diferenciales es resoluble exactamente. En la mayoría de los casos tendremos que contentarnos con definir una solución formal o hallar una solución aproximada mediante métodos numéricos o mediante el dibujo aproximado de las soluciones.

- **Existencia y unicidad de soluciones.** En muchos casos nos interesará averiguar simplemente si la ecuación tiene solución y, si la tiene, si dicha solución es única. Para ello definiremos algunos teoremas que establecen los criterios de existencia y unicidad de las soluciones para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.

- **Dependencia continua de los datos iniciales y otros parámetros.** Como hemos dicho, las condiciones iniciales determinan la solución particular de una ecuación diferencial, sin embargo, puede ocurrir que una pequeña variación en los datos iniciales dé lugar a soluciones muy distintas.

Un cierto problema físico puede estar descrito por una ecuación diferencial que dependa de un parámetro con unas condiciones iniciales. En la determinación experimental del parámetro y de las condiciones iniciales existirán inevitablemente errores de medición. Ciertos teoremas nos permitirán averiguar si a valores semejantes de los parámetros corresponden soluciones parecidas. En tal caso se dirá que hay dependencia continua.

- **Estabilidad.** En otros casos será interesante conocer el comportamiento de las soluciones cuando la variable independiente x tiende a infinito (recordemos que en un problema físico la variable independiente puede representar el tiempo).

  De modo semejante al problema anterior, una pequeña diferencia en los valores iniciales puede dar lugar a soluciones con comportamientos muy distintos en el infinito, aunque en un intervalo finito sean semejantes, es decir, tengan dependencia continua con los datos iniciales. Los teoremas de *estabilidad* nos darán información sobre la diferencia entre dos soluciones, definidas por datos iniciales ligeramente distintos, en todo el intervalo en que están definidas las soluciones.

- **Problemas de autovalores.** En ciertos problemas físicos de interés, la ecuación diferencial depende de un parámetro λ. El problema consiste en encontrar los valores de λ para los cuales la ecuación tienen soluciones no-triviales, es decir, distintas de $y = 0$. A estos valores de λ se les llama *autovalores*, y a las soluciones asociadas a cada uno de los autovalores se les llama *autofunciones*.

1.3 Ecuaciones diferenciales en Física

Las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales son fundamentales en la Física (y juegan también un papel esencial en otras ramas de la ciencia como la química, la biología, la economía, e incluso las ciencias sociales.) Prácticamente cualquier fenómeno físico que se pueda describir como una función es solución de una ecuación diferencial. A continuación veremos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales importantes en Física.

Ecuaciones de movimiento

En mecánica clásica, la función que describe la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ de una partícula es solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden llamada *ecuación de movimiento*. La ecuación del Ejemplo 1 es la *ecuación del movimiento uniformemente acelerado*, si consideramos que y es la posición y x es el tiempo. La segunda derivada de y es precisamente la aceleración a. Las condiciones iniciales no son más que la posición y la velocidad en el instante cero. (Nótese que las condiciones iniciales no tienen por qué definirse exclusivamente en $x = 0$. Cualquier otro punto x perteneciente al intervalo en que están definidas las soluciones se puede utilizar para fijar el valor de una solución particular.)

Otro ejemplo de ecuación de movimiento es la *ecuación del oscilador armónico libre*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{1}$$

donde ω_0 es la frecuencia de oscilación. Esta es una ecuación diferencial *lineal homogénea*, ya que no contiene ningún término que no dependa de $x(t)$. En este caso se puede comprobar que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de la Ecuación (1), se puede comprobar que cualquier combinación lineal $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ (donde α y β son constantes) también es solución de la ecuación.

Las soluciones del oscilador armónico libre son invariantes bajo inversión temporal, es decir, permanecen iguales por el cambio $t \to -t$. Esto se debe a que la única derivada respecto a t que aparece en la Ecuación (1) es la segunda. En general, cualquier ecuación en la que las únicas derivadas respecto a t sean de orden par describirá un movimiento reversible. Esta propiedad se suele ilustrar diciendo que si tomamos una película del movimiento en cuestión y la proyectamos al revés, no se notará la diferencia.

La *ecuación del oscilador armónico amortiguado* es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{2}$$

donde ζ es el *coeficiente de amortiguamiento*, también es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, aunque en este caso aparece además un término de primer orden, por lo cual no es invariante bajo inversión temporal. La irreversibilidad del movimiento de un péndulo amortiguado es evidente.

La *ecuación del oscilador armónico forzado* es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}\,, \tag{3}$$

donde $F(t)$ es una fuerza externa y m es la masa de la partícula, es una ecuación *lineal no-homogénea* y en este caso una combinación lineal de soluciones no es por lo general solución de la Ecuación (3).

Ecuación de desintegración

La ecuación que rige la desintegración de una sustancia radiactiva es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N\,, \tag{4}$$

donde N es el número total de partículas en la muestra y λ es el ritmo de desintegración. Este tipo de ecuación se llama *autónoma*, ya que no depende explícitamente de la variable independiente, y su resolución es muy sencilla, como veremos más adelante.

Ecuación de ondas

La ecuación de ondas es prácticamente ubicua en Física, ya que describe cualquier fenómeno ondulatorio, desde la propagación de la luz hasta las ondas sísmicas. Si la función $u(x, t)$ representa un desplazamiento respecto a un punto de equilibrio, la ecuación de ondas (no-homogénea) en una dimensión es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,, \tag{5}$$

donde c es la denominada *velocidad de fase* de las ondas, y $f(x,t)$ es una fuerza externa. La ecuación de ondas es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, y junto con la ecuación del calor y la ecuación de Laplace, constituye una de las EDPs clásicas. La ecuación de ondas es la única EDP para la que podremos encontrar la solución general.

Ecuación del calor

La ecuación que rige la propagación del calor por conducción en un medio material es también una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,. \tag{6}$$

En este caso unidimensional, la función $u(x,t)$ representa la distribución de temperaturas a lo largo de una varilla delgada (donde podemos despreciar las dimensiones transversales); α es la *difusividad* térmica del medio y la función $f(x,t)$ representa una fuente externa de calor actuando sobre la varilla en el punto x en el instante t.

Ecuación de difusión

Esta ecuación describe la difusión de un material de densidad $\phi(x,t)$ en un medio unidimensional:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\phi,x)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right] = 0\,, \tag{7}$$

donde $D(\phi,x)$ es el *coeficiente de difusión*. Si este coeficiente no depende de ϕ la ecuación es lineal; si además tampoco depende de x entonces la ecuación adopta la misma forma que la ecuación del calor homogénea:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\,. \tag{8}$$

Ecuación de Laplace y Poisson

La *ecuación de Laplace* es la tercera de las ecuaciones clásicas en derivadas parciales lineales de segundo orden, y aparece en muchas ramas de las Física. Desde un punto de vista matemático puede decirse que la *teoría clásica de campos* es en su mayor parte un estudio de las soluciones de la ecuación de Laplace. En dos dimensiones se escribe como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{9}$$

La versión no-homogénea (con fuentes de campo) se llama *ecuación de Poisson*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)\,. \tag{10}$$

Ecuación de Schrödinger

La *ecuación de Schrödinger* es la ecuación central de la mecánica cuántica y describe la evolución de un sistema cuántico en términos de las *funciones de onda* $\psi(x, t)$, las cuales representan la *densidad de probabilidad* de encontrar una partícula en la posición x en el instante t. La versión dependiente del tiempo en una dimensión se puede escribir como:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi\,, \tag{11}$$

donde $V(x, t)$ es el potencial al que está sometido la partícula. Esta ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden tiene la particularidad de que actúa sobre funciones complejas. Por un lado, la ecuación de Schrödinger es similar a una ecuación de difusión, de hecho si el potencial no depende del tiempo, se puede considerar como una ecuación de difusión en tiempo imaginario, esto es, haciendo el cambio de variable $t = i\tau$. Por otro lado, la ecuación de Schrödinger se parece más a una ecuación de ondas en el sentido que admite soluciones de forma ondulatoria.

Ecuación maestra para un sistema de dos niveles

Las fórmulas que describen la evolución de la densidad de dos poblaciones ligadas entre sí forman un *sistema* de ecuaciones lineales de primer orden llamada ecuación maestra. Si n_1 y n_2 son las densidades de las poblaciones 1 y 2 respectivamente, su evolución en el tiempo viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} & = -p_{1\to 2}n_1 + p_{2\to 1}n_2 \\ \frac{dn_2}{dt} & = p_{1\to 2}n_1 - p_{2\to 1}n_2 \end{cases} . \tag{12}$$

Los coeficientes $p_{1\to 2}$ y $p_{2\to 1}$ son las probabilidades de transición de la población 1 a la 2 y de la 2 a la 1 respectivamente. El lado derecho de cada ecuación consta de una serie de términos. Los positivos representan la ganancia de densidad, y los negativos la pérdida de densidad de la población correspondiente. Estos términos son el producto de la probabilidad de transición por la densidad de la población de origen.

La ecuación maestra se puede generalizar para un número n de poblaciones, formando un sistema de n ecuaciones diferenciales acopladas. El lado derecho de cada ecuación consta de $n(n-1)$ términos, y las probabilidades de transición forman una matriz $n \times n$ con $n(n-1)$ elementos independientes. La población puede referirse a la concentración de una determinada substancia, en el caso de una reacción química, o a la población de un nivel de energía de un sistema cuántico.

Estos son tan solo algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de entre la infinidad de ecuaciones que aparecen entre las diversas ramas de la Física. Algunas ecuaciones, como la del oscilador armónico, son tan comunes que se trabaja directamente sobre sus soluciones, sin necesidad de plantear la ecuación. A lo largo de este curso estudiaremos las propiedades de algunas de estas ecuaciones y trataremos de resolverlas cuando esto sea posible.

1.4 Panorámica del curso

En este curso de ecuaciones diferenciales se pueden distinguir dos partes. En la primera parte nos centraremos en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y en la segunda abordaremos las ecuaciones en derivadas parciales (EDP).

Iniciaremos el estudio de las EDOs con las ecuaciones de primer orden y veremos algunos de los pocos casos en que una ecuación diferencial se puede resolver de manera exacta. Definiremos también algunos teoremas que permiten determinar la existencia y unicidad de las soluciones, así como la dependencia continua de las condiciones iniciales, y su estabilidad. Este tema servirá también para introducir algunos conceptos elementales que aparecerán en temas posteriores, aplicados a problemas más complicados.

El tema siguiente está dedicado a los sistemas de ecuaciones de primer orden y las ecuaciones de orden superior que, como veremos, pueden expresarse en forma de sistemas de ecuaciones de primer orden. Estos sistemas por lo general no se pueden resolver analíticamente y tendremos que conformarnos con una solución formal. Estudiaremos la existencia y unicidad de dichas soluciones, así como los criterios para averiguar su estabilidad. El único caso en el que podremos encontrar una solución explícita será en el de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden con *coeficientes constantes*. Para eso será conveniente repasar algunas nociones del álgebra de matrices y, en concreto, el cálculo de la *forma canónica de Jordan*.

A continuación, veremos un caso particular de sistemas de ecuaciones de primer orden llamados *sistemas dinámicos*, los cuales tienen especial importancia, no solo en Física sino en otras ramas de la ciencia. Introduciremos los *mapas de fase* como herramienta fundamental para estudiar los sistemas dinámicos y su estabilidad. Las técnicas que veremos en este tema son las que permiten abordar el fenómeno del *caos*.

En el tema siguiente trataremos la resolución por medio de series de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables. Este tipo de ecuaciones incluyen algunas de particular interés en Física, como la *ecuación de Legendre* y la *ecuación de Bessel*. Estas ecuaciones definen una serie de funciones muy interesantes llamadas *funciones especiales* que aparecen a menudo en diversos problemas. Las funciones especiales incluyen los *polinomios de Legendre*, las *funciones de Bessel de primera y segunda especie*, los *polinomios de Hermite*, etc. Estudiaremos la definición de estas funciones y algunas de sus propiedades.

A continuación abordaremos los problemas de contorno, cuyas propiedades son muy diferentes de las de los problemas puros de valores iniciales. Si bien el valor de una solución y sus derivadas en un punto dado pueden determinar la solución de manera única, los problemas de contorno tienen en principio infinitas soluciones.

Los problemas de contorno aparecen asociados a las ecuaciones en derivadas parciales que estudiaremos en la segunda parte del curso. En particular, el *método de separación de variables* que veremos al tratar las ecuaciones de ondas, del calor y de Laplace, da lugar a unos problemas de contorno que dependen de un parámetro λ. Estos problemas, llamados *problemas de autovalores*, consisten en hallar los valores del parámetro λ para los que hay soluciones no-triviales. Los problemas de autovalores tienen particular importancia en mecánica cuántica, donde los autovalores λ representan propiedades particulares del sistema, como la energía o el momento angular. Veremos que las soluciones de un problema de autovalores forman un espacio vectorial de dimensión infinita y nos servirán para generalizar el concepto de *desarrollo en serie de Fourier*.

Finalizaremos la parte de ecuaciones diferenciales ordinarias con un tema dedicado a la integración numérica de ecuaciones diferenciales. Analizaremos varios métodos para resolver problemas de valores iniciales y problemas de contorno fácilmente programables en un ordenador.

A continuación introduciremos las ecuaciones en derivadas parciales, sus propiedades generales y métodos generales de resolución. El tema siguiente tratará específicamente cada una de las tres EDPs clásicas: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación de Laplace (así como su versión no-homogénea, la ecuación de Poisson). El último tema está dedicado a los métodos de integración numérica específicos para EDPs.

El contenido de este curso se trata con mucho detalle en diversos libros. Para profundizar en la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales se invita al alumno a consultar, por ejemplo (Boyce & DiPrima, 1971; de Guzmán, 1975; Plaat, 2021; Simmons & Robertson, 1993; Strauss, 2007; Zill & Cullen, 2009). Todos estos libros contienen ejercicios, pero si el alumno quiere encontrar más problemas resueltos con detalle puede utilizar (Kiseliov et al., 1968). Los métodos numéricos se encuentran descritos en (Boyce & DiPrima, 1971), pero (Press et al., 2007) contiene además *recetas* numéricas para incluir directamente en un código. El libro citado es de recetas en lenguaje C, pero hay versiones del mismo libro para C++, Fortran, etc.

Accede al vídeo: Demostración de SciDAVis.

1.5 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Clasificar las siguientes ecuaciones:

- $x^2y'' - y' = e^x$.
- $y' + \sin y = x$.
- $y^{iv} + 3y'' - y + \ln x = 0$.
- $u_{xx} + xu_{yy} = 0$, ó ecuación de Tricomi.
- $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, ó ecuación de Bernoulli.
- $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, ó ecuación de Bessel.
- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma$, ó ecuación de continuidad.
- $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$, ó de Schrödinger independiente del tiempo.
- $\dfrac{\partial}{\partial t}p(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,t)p(x,t)\right] + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x,t)p(x,t)\right]$, ó Fokker-Planck.

- $y' = y(1-y)$, ó ecuación logística.
- $\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} & = \delta xy - \gamma y \end{cases}$ con $\alpha, \beta, \delta, \gamma =$ constantes, ó Ecuación de Lotka-Volterra.

Ejercicio 2. Hallar la solución general de $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$. ¿Cuántas condiciones iniciales hay que imponer para determinar una condición inicial?

Sea $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ la solución general de una determinada ecuación de segundo orden, donde A y B son constante. Hallar la solución (o soluciones) particulares que cumplen:

- $\begin{cases} y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0 \end{cases}.$
- $\begin{cases} y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{cases}.$
- $\begin{cases} y(0) & = 0 \\ y(\pi) & = 0 \end{cases}.$

1.6 Referencias bibliográficas

Boyce, W. & DiPrima, R. (1971). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa-Wiley.

de Guzmán, M. (1975). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*. Alhambra Universidad. Alhambra.

Kiseliov, A., Krasnov, M. L., Makarenko, G., & Bernardo, E. A. (1968). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, volume 107. Mir.

Plaat, O. (2021). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Reverté.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.

Simmons, G. & Robertson, J. S. (1993). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.

Strauss, W. (2007). *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley.

Zill, D. & Cullen, M. (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Cengage Learning Editores S.A. de C.V.