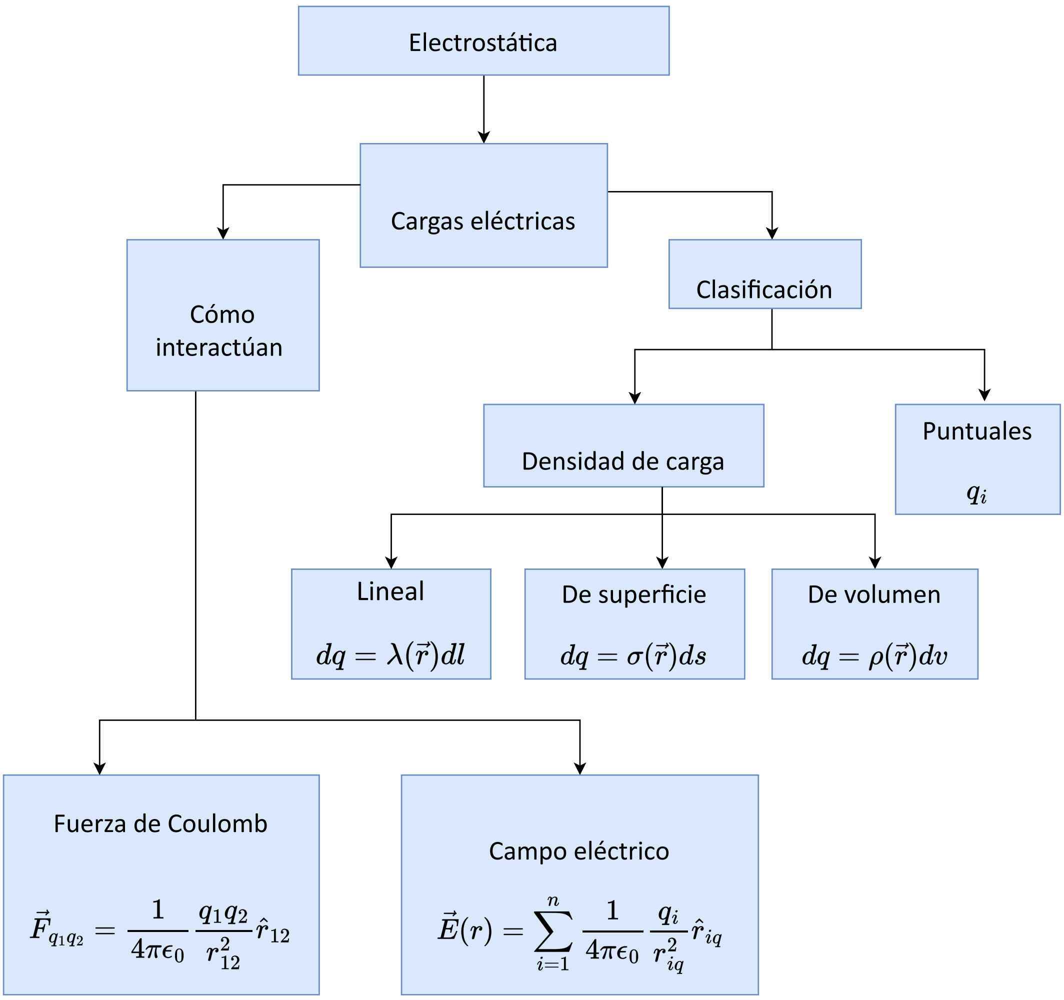
Electromagnetismo I

Campos eléctricos

Índice

Esquema


Electrostática
Cargas eléctricas
Cómo interactúan
Clasificación
Densidad de carga
Puntuales
q_i
Lineal
$dq = \lambda(\vec{r})dl$
De superficie
$dq = \sigma(\vec{r})ds$
De volumen
$dq = \rho(\vec{r})dv$
Fuerza de Coulomb
$\vec{F}_{q_1 q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$
Campo eléctrico
$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_{iq}^2}\hat{r}_{iq}$

Ideas clave

1.1 Introducción y objetivos

A lo largo de la asignatura vamos a hablar de cargas eléctricas en diferentes situaciones. En este capítulo nos referiremos a cargas estáticas (conocido como *electrostática*), cómo interactúan entre ellas y cómo ellas mismas pueden crear lo que llamamos *campo*.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Entender la **ley de Coulomb**, que explica cómo las cargas interactúan entre sí.
- Realizar cálculos de la fuerza que realiza una carga sobre otras.
- Comprender el concepto de **campo eléctrico** creado por una carga.
- Realizar cálculos del campo eléctrico que crean tanto **cargas discretas** como **cargas continuas**.
- Conocer el concepto de **líneas de campo**.

1.2 Fundamentos de la electrostática

La electrostática es una teoría deductiva que posee solamente dos datos empíricos. El problema fundamental de la electrostática es, dada una distribución de cargas q_1, q_2, ...,q_n, que se denominan *cargas fuente*, determinar la fuerza sobre una carga Q, la cual se denomina *carga de prueba*.

Los datos empíricos se basan en la determinación empírica de la ley de Coulomb, que veremos más adelante. Estos son:

- La fuerza de Coulomb constituye una ley según la cual la fuerza es conservativa, central y de tipo newtoniano.

- El segundo dato es que la fuerza entre las cargas depende del producto de las cargas en interacción. Esto implica que se verifica el *principio de superposición*, que consiste en que la fuerza debida a una carga fuente no depende de las fuerzas debidas a las otras cargas fuente, sino que las fuerzas se suman, siendo unas independientes de otras. Esto no pasaría si, por ejemplo, la fuerza electrostática dependiera del cuadrado de la suma de las cargas, pues entonces $\left(Q + q_i\right)^2 = Q^2 + q_i^2 + 2Qq_i$ y habría un término cruzado. El principio de superposición no es, entonces, una necesidad lógica, sino que tiene su origen en un hecho empírico.

En general, las fuerzas electromagnéticas, suponiendo que las cargas están animadas por una velocidad y una aceleración, dependerá de estas magnitudes, haciendo el problema más complicado. Además, hay que tener en cuenta que la señal eléctrica no es instantánea, sino que se propaga a una velocidad finita, la velocidad de la luz, de manera que el influjo eléctrico no depende del estado de movimiento de las cargas fuente en el instante presente, sino que depende de la posición, la velocidad y la aceleración de las cargas fuente en un tiempo anterior, que se determina a partir del tiempo que necesita la señal para alcanzar la carga de prueba.

Sin embargo, este problema general presenta dificultades matemáticas, razón por la cual se pospone a los capítulos finales de la asignatura de Electromagnetismo II. La razón de ser de la electrostática es abordar el problema general empezado por un caso más sencillo, que es aquel en el que la distribución de cargas fuente es estacionaria, es decir, que las cargas fuente están en reposo.

1.3 La carga eléctrica

Empecemos mirando al pasado (Valverde, 2001). Ya en la antigüedad los griegos sabían que si frotaban cierto tipo de materiales contra otros, estos adquirían la propiedad de atraer a otros objetos (Poveda Ramos, 2003). En particular, el material que utilizaban los griegos era el ámbar. Probablemente, muchos recordaréis cuando éramos niños y hacíamos el siguiente juego con el bolígrafo de plástico: lo frotábamos contra la ropa y veíamos cómo el bolígrafo atraía trocitos de papel. Este proceso se llama *electrificación por rozamiento*, y para describir la nueva propiedad del material, se dice que ha sido cargado o que ha adquirido *carga eléctrica*. La palabra *eléctrica* proviene de la palabra griega *elektron*, que significa ámbar.

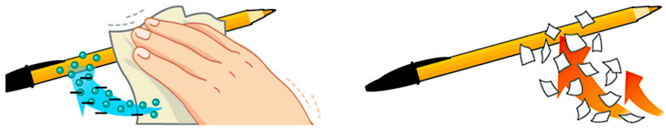


Figura 1: *Electrificación por rozamiento* de un bolígrafo con un paño de seda. El bolígrafo atrae los trocitos de papel. Fuente: Wikimedia Foundation.

Experimentos simples y similares a lo descrito anteriormente es lo que llevó a *Benjamín Franklin* (1706-1790) a descubrir que existen dos tipos de cargas eléctricas, a las cuales les puso el nombre de *positiva* y *negativa*. También se observó que los materiales normalmente presentan un número igual de cargas positivas y negativas, es decir, se encuentran en estado *neutro.* Las cargas no se crean, sino que se separan. Así la carga positiva se define como la que queda en una barra de vidrio después de que esta ha sido frotada por un paño de seda. A su vez, la seda quedará cargada negativamente con la misma cantidad de carga con la que ha sido cargado el vidrio. Hoy en día, conociendo la estructura de un átomo, sabemos que los electrones son los que se transfieren a la seda en ese proceso de frotamiento.

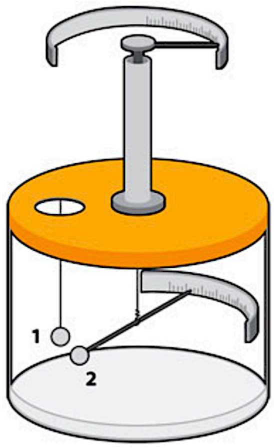


Figura 2: Balanza de torsión que Coulomb fabricó para medir la fuerza eléctrica entre dos esferas cargadas. Fuente: Wikimedia Foundation.

Más tarde, Franklin descubrió que la carga se conserva, esto significa que la carga total neta no varía: no podemos crear o destruir la carga, solo se transfiere. Las fuerzas que unas cargas ejercen sobre otras fueron enunciadas por Charles-Augustin Coulomb (1736-1806), nombre por el cual se conoce la unidad de medida en el Sistema Internacional de la magnitud «carga», el *coulomb* o *culombio* (C). Coulomb lo midió cuantitativamente usando una *balanza de torsión* que él mismo inventó. La podemos ver en la Figura 2. Con este aparato midió que la fuerza eléctrica entre dos pequeñas esferas cargadas es proporcional al inverso del cuadrado de su separación, es decir $F \sim k/r^2$. La ley de Coulomb la veremos con detalle en las siguientes secciones.

Otro punto importante es cómo se cuantiza una carga, representada por el símbolo q. En 1909, *Robert Millikan* (1868-1953) hizo un experimento en el que comprobó que la carga siempre se presenta como un múltiplo N de cierta unidad fundamental de carga e:

$$q = Ne\,.$$

Es decir, la carga q está *cuantizada,* lo que significa que existe en paquetes de forma discreta. Esa carga e es el valor de la carga de un electrón:

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\,.$$

Conservación de la carga eléctrica

Es un hecho experimental que la carga eléctrica en un sistema aislado se conserva. Pueden generarse cargas eléctricas en el sistema, pero se generarán de tal modo que la carga neta se conserve.

Como ejemplos podemos poner el de la incidencia en el sistema de un fotón de rayos gamma, el cual se materializa en un par electrón-positrón. Se ha creado carga, pero de tal modo que la carga eléctrica negativa de los electrones $-e$ queda compensada por la carga positiva de los electrones $+e$, la cual es igual a la del electrón pero de signo contrario.

Asimismo, si frotamos un vidrio con un paño, el vidrio queda cargado porque se han desprendido cargas negativas, por pérdida de electrones, quedando el vidrio cargado positivamente, aunque esas cargas quedan compensadas por la carga del paño que queda cargado negativamente a causa de que ha retenido las cargas eléctricas negativas arrancadas al vidrio. Un ejemplo más en el que la carga neta del sistema vidrio-paño permanece constante.

Más adelante veremos que no es solamente que la carga eléctrica se conserve, sino que lo hace localmente, lo cual significa que no se da el caso de que una carga desparezca en un sistema y reaparezca en otro lugar arbitrariamente alejado, sino que lo que ocurre es que la carga que desaparece o que aparece en un infinitésimo de volumen es la misma carga que entra o que sale de dicho volumen. Este hecho posee una formulación matemática denominada ecuación de continuidad, la cual se estudiará más adelante.

Principio de cuantificación de la carga eléctrica

La teoría electromagnética está basada en distribución continuas de carga eléctrica y de corriente. Sin embargo, como ya se sabe que la carga existe en la forma indivisible de electrones y protones que constituyen los átomos, cuando se considere un diferencial de carga en un diferencial de volumen, se hará de tal modo que dicho elemento de volumen sea lo suficientemente pequeño como para que sea válida la aproximación de que la distribución de carga es continua, pero lo suficientemente grande como para que comprenda varias cargas elementales, de manera que no se note el carácter atómico o indivisible de las carga. Este procedimiento se lo conoce como *principio de cuantificación* de la carga eléctrica.

Carga dual y cuerpos eléctricamente neutros

Ya sabemos que las cargas de la materia proceden de la constitución de los átomos en cargas positivas, lo protones, y cargas negativas, los electrones. Esto determina que un cuerpo con exceso de protones presentará una electricidad positiva, y las cargas positivas se repelen entre sí. Por otro lado, un cuerpo con exceso de electrones, presenta una electricidad negativa, y las cargas negativas se repelen también entre sí. Además, se sabe también que las cargas positivas y las negativas se atraen entre sí.

Cuando un cuerpo presenta el mismo número de protones que de electrones, su carga neta es cero, y se habla entonces de cuerpo eléctricamente neutro. Lo que ocurre es que la repulsión sobre una carga de prueba positiva por la electricidad positiva de un cuerpo, sus protones, queda compensada exactamente por la atracción debida a las cargas negativas, los electrones. El efecto neto es que sobre la carga de prueba no actúa ningún tipo de fuerza eléctrica.

1.4 Conductores y aislantes

Si clasificamos los materiales en términos de su capacidad para conducir la carga eléctrica, nos encontramos:

- Los *conductores* son sustancias en las que las cargas eléctricas se mueven con bastante libertad a lo largo del material. Contienen un gran número de portadores libres, electrones en la mayoría de los casos. Normalmente los metales son buenos conductores, como por ejemplo el cobre.
- Los *aislantes* (dieléctricos) son sustancias donde las cargas tienen mucha dificultad para moverse. Es decir, son materiales donde las partículas cargadas están ligadas muy fuertemente a sus constituyentes. Un ejemplo sería el nailon.
- En los *semiconductores*, vemos que sus propiedades se encuentran entre las de los aislantes y conductores. Presentan una pequeña concentración de portadores libres que dependen de condiciones térmicas y ópticas. Un ejemplo serían el germanio y el silicio, que se usan en diversos dispositivos electrónicos. Las propiedades eléctricas de los semiconductores pueden modificarse añadiendo a los materiales cantidades controladas de impurezas de ciertos átomos.

1.5 Ley de Coulomb

Si tenemos dos cargas puntuales en el espacio vacío, y consideramos un sistema rectangular de coordenadas, tal como podemos apreciar en la Figura 3, entonces la ley de Coulomb se puede expresar como:

$$\vec{F}_{q_1 q_2} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}\,, \tag{1}$$

que nos indica que la fuerza de una carga puntual sobre otra es proporcional al producto del valor de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de la fuerza es la misma que tiene el vector de posición relativa entre las dos cargas. El sentido de la fuerza lo indica el signo de las cargas, dependiendo de si son del mismo signo o signo opuesto. Las cargas de signo opuesto se atraen, apareciendo un signo menos en la ley de Coulomb, y las cargas del mismo signo se repelen, manifestándose a través de un signo positivo en la ley de fuerzas. En nuestro caso la fuerza $\vec{F}_{q_1 q_2}$ es la fuerza ejercida sobre la carga q_1 por la carga q_2. La unidad de la carga es el $\mathrm{coulomb}$. La unidad de corriente es el ampere. Siendo $1\,\mathrm{coulomb} = 1\,\mathrm{ampere} \cdot \mathrm{segundo}$. La constante $K = 1/4\pi\epsilon_0$ recibe el nombre de *capacidad inductiva* del vacío o constante de Coulomb, y es análoga a la constante de gravitación universal. En este caso, las unidades y el valor son :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\, \frac{\mathrm{metro}}{\mathrm{faradio}}\,,$$

donde $1\,\mathrm{faradio} = 1\,\mathrm{coulomb}^2/\mathrm{newton} \cdot \mathrm{metro}$. Y por último hay que indicar que el vector $\hat{r}_{12}$ es el vector unitario en la dirección de q_2 a q_1. Nótese que el valor de su modulo se expresa como $r_{12} = |r_1 - r_2|$.

Por otra lado, la fuerza $\vec{F}_{q_2 q_1}$ sería la fuerza sobre la carga q_2, que es igual y de sentido opuesto a la fuerza $\vec{F}_{q_1 q_2}$, es decir $\vec{F}_{q_1 q_2} = -\vec{F}_{q_2 q_1}$. Esto significa que las fuerzas electrostáticas obedecen la tercera ley de Newton, por lo que las fuerzas entre ellas son iguales en módulo y de sentido opuesto. Vemos, ahora, a través de la ley de Coulomb, lo que decíamos antes: que la fuerza electrostática entre cargas es una fuerza conservativa (ya veremos cómo caracterizar este hecho matemáticamente), central, puesto que está dirigida según la línea definida por la posición relativa

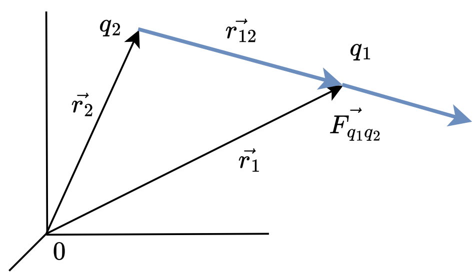
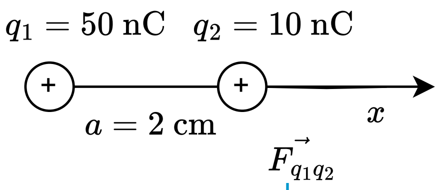


Figura 3: Sistema de dos cargas eléctricas. Podemos ver sus vectores de posición y la fuerza eléctrica resultante. Elaboración propia.

de las cargas, y de tipo newtoniano, dado que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas.

Ejemplo 1. Fuerza entre dos cargas puntuales

Tenemos dos cargas $q_1 = 50\,\mathrm{nC}$ y $q_1 = 10\,\mathrm{nC}$, que se encuentran a una distancia de $2\,\mathrm{cm}$ entre si, como se puede ver en el la figura. Se pide calcular la fuerza que una carga ejerce sobre la otra (magnitud y dirección), es decir, calcula $\vec{F}_{q_1q_2}$ y $\vec{F}_{q_2q_1}$. Usando la fórmula de Coulomb, y poniendo atención en las unidades en el sistema internacional, y sabiendo que las cargas se encuentran en el eje x:



$$\vec{F}_{q_1q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{x_{12}^2}\hat{x} = \left(9.0 \times 10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2\right)\cdot$$
$$\cdot\,\frac{\left|(50 \times 10^{-9}\mathrm{C})(10 \times 10^{-9}\mathrm{C})\right|}{(0.02\,\mathrm{m})^2}\hat{x} = 0.011\hat{x}\,\mathrm{N}\,.$$

Como las cargas tienen el mismo signo la fuerza es repulsiva, es decir la fuerza hace que q_1 se aleje de q_2 en la dirección positiva del eje x. Y recordando que:

$$\vec{F}_{q_2q_1} = -\vec{F}_{q_1q_2} = -0.011\hat{x}\,\mathrm{N}\,.$$

Unidades de carga

Ya sabemos, pues, que la carga eléctrica viene en la forma de entidades discretas o cuantos, mediante electrones o protones. La carga eléctrica, entonces, no varía de forma continua, sino que lo hace de forma discreta, conforme se añaden o se quitan dichos cuantos de carga, denominada *unidad natural* de carga eléctrica.

En el sistema cgs (cegesimal), la unidad electrostática de carga UEE se define como la cantidad de carga que puesta frente a otra igual, a una distancia de $1\,\mathrm{cm}$ produce una fuerza de una dina 1 dyn. En el sistema cgs la ley de Coulomb reza:

$$F = \frac{qq'}{r^2}\,. \tag{2}$$

En el sistema internacional SI la unidad de carga es el culombio, el cual vale $1\,\mathrm{C} = 3 \cdot 10^9$ UEE. Podemos determinar con esto el valor de la constante de Coulomb en el SI:

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{(100)^2} = 9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{dyn} = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N}\,. \tag{3}$$

Por tanto, la constante de Coulomb vale:

$$K = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,, \tag{4}$$

,donde ϵ_0 es la denominada permitividad eléctrica del vacío, siendo su valor:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2\,. \tag{5}$$

Sistema de cargas puntuales

Si tuviéramos un sistema con n cargas puntuales, distribuidas en posiciones fijas en el espacio, siendo cada una de estar cargas $q_{i,}$ la ley de Coulomb para un sistema de cargas que ejerce una fuerza sobre una carga q se puede expresar como (véase Figura 4).

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{qq_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_{qi}^2} \hat{r}_{qi}\,, \tag{6}$$

donde $\hat{r}_i$ es el vector unitario en la dirección de la carga q_i a la carga q, y $\vec{r}_{qi} = \vec{r} - \vec{r}_i$, es el vector de posición de la carga q_i a la carga q.

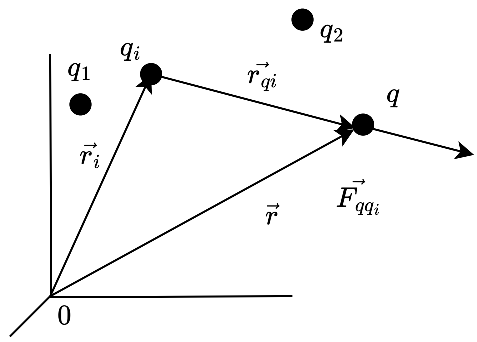


Figura 4: n cargas con vectores de posición y fuerza sobre una carga q (por la carga q_i).

Distribuciones continuas de carga

En la Ecuación (6), si tenemos que la separación entre elementos en la distribución de carga es pequeña comparada con la distancia a la carga q , entonces la distribución de carga puede considerarse continua. Entonces el término suma se convierte en una integral. Aquí es el punto donde debemos definir las diferentes densidades de carga.

- La *densidad de carga lineal* $\lambda(\vec{r})$ que tiene unidades de $\mathrm{C/m}$, y donde su elemento de carga diferencial se puede expresar como (siendo l la linea y dl el elemento diferencial en la linea):

$$dq(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})dl\,. \tag{7}$$

- La *densidad de carga superficial* $\sigma(\vec{r})$ que tiene unidades de $\mathrm{C/m^2}$, y donde su elemento de carga diferencial se puede expresar como (siendo S la superficie y dS el elemento diferencial de superficie):

$$dq(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})dS\,. \tag{8}$$

- La *densidad de carga en un volumen* $\rho(\vec{r})$ que tiene unidades de $\mathrm{C/m^3}$, y donde su elemento de carga diferencial se puede expresar como (siendo V el volumen y dV el elemento diferencial de volumen):

$$dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV\,. \tag{9}$$

Y entonces la fuerza que una distribución de carga volumétrica ejercería se expresa de la forma:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{r^2}\hat{r}\,. \tag{10}$$

Y la fuerza que realiza una distribución de carga superficial se expresa de la forma:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{r^2}\hat{r}\,. \tag{11}$$

Por último la fuerza que realiza una distribución de carga lineal sería:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda(\vec{r}\,')dl'}{r^2}\hat{r}\,. \tag{12}$$

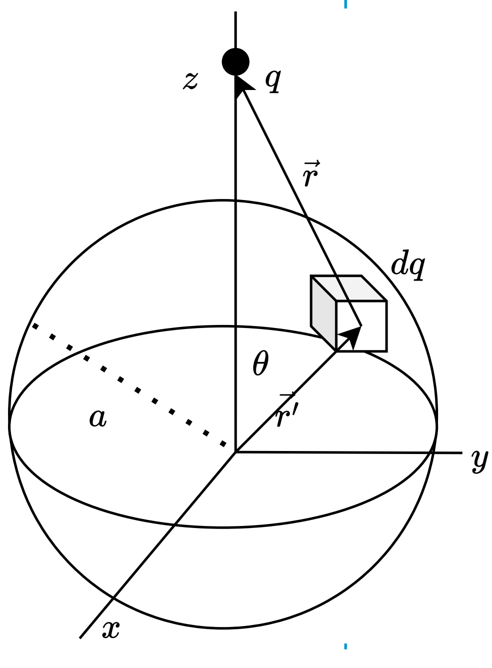
En estas tres expresiones, el vector $\vec{r}$, y por tanto su vector unitario $\hat{r}$, equivalen a los vectores $\vec{r}_{12}$, $\hat{r}_{12}$ de la Ecuación (1), en este caso entre la distribución de carga $dq(\vec{r}\,')$ y la carga de prueba q. Nótese que habitualmente se denota con una tilde, $\vec{r}\,'$, la variable de posición de la distribución de carga sobre la cual se va realizar la integral, ya sea en el volumen dV', superficie dS' o línea dl'. Estas fórmulas pueden expresarse de forma rigurosa en función de la posición $\vec{r}_q$de la carga prueba, por ejemplo para la distribución volumétrica de carga continua, como:

$$\vec{F}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V dV'\rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}_q - \vec{r}\,'}{|\vec{r}_q - \vec{r}\,'|^3}\,. \tag{13}$$

donde se ha sustituido el vector unitario por el vector relativo entre cargas normalizado a su módulo $(\vec{r}_q - \vec{r}\,')/|\vec{r}_q - \vec{r}\,'|$.

Ejemplo 2. Fuerza sobre una carga puntual fuera de una esfera cargada

La esfera tiene una distribución uniforme de carga ρ constante. Consideramos que el centro de la esfera está en el origen de coordenadas, y tiene un radio $r = a$. La carga puntual se encuentra en el eje z, a una distancia z del origen y fuera de la esfera. Recordando la Ecuación (10), en ella debemos sustituir nuestros valores. El valor de r será, teniendo que $\vec{r}_q = z\hat{z}$ y $\vec{r}_{\text{esfera}} = r'\hat{r}$, si expresamos un punto de carga diferencial dentro de la esfera en coordenadas esféricas. Entonces, como ya vimos anteriormente:



$$\vec{r} = z\hat{z} - r'\hat{r}, r^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta\,.$$

Aquí hemos empleado el teorema del coseno. Ahora, si sustituimos en la Ecuación (10), considerando un elemento diferencial de carga volumétrica, recordando que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|}$:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)dV}{r^2}\hat{r} = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{esfera}} \frac{(z\hat{z} - r'\hat{r'})dv'}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta')^{3/2}} . \tag{14}$$

En coordenadas esféricas $dV' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$, y recordando que $\hat{r'} = \sin\theta' \cos\varphi' \hat{x} + \sin\theta' \sin\varphi' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z}$, podemos hacer la resolución para cada una de las componentes en coordenadas cartesianas, dado que r' no es constante durante la integración, es más fácil hacerlo así:

$$F_{qz=}\frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \frac{(z - r'\cos\theta')r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta')^{3/2}} . \tag{15}$$

La integral en φ es 2π. Para integrar en θ usamos que $\mu = \cos\theta'$, $d\mu = -\sin\theta^{'} d\theta^{'}$, sustituyendo en la parte de la integral que depende de θ tenemos:

$$F_{qz=}\frac{q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{a} r'^2 dr' \int_1^{-1} \frac{-(z - r'\mu)d\mu}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{3/2}} .$$

La integral sobre μ tiene solución analítica pero el cálculo es largo y engorroso. En consecuencia, lo omitimos, escribiendo directamente el resultado. La resolución de la integral puede encontrarse en tablas o bien en calculadoras de integrales en internet en las que se resuelven, con todos los pasos, integrales con solución analítica. En el siguiente ejemplo detallaremos el cálculo analítico de esta integral, que adquiere la forma:

$$\int \frac{-(a - bx)}{\left(a^2 + b^2 - 2abx\right)^{3/2}} dx = \frac{-(ax - b)}{a^2\left(a^2 + b^2 - 2abx\right)^{1/2}} .$$

donde a y b son constantes y x es la variable de integración. El resultado es, pues:

$$\int \frac{-(z - r'\mu)d\mu}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{3/2}} = \frac{-(z\mu - r')}{z^2(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{1/2}} .$$

Calculamos la integral definida:

$$\frac{1}{z^2}\int_1^{-1}\frac{-(z-r'\mu)d\mu}{(z^2+r'^2-2zr'\mu)^{1/2}}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{(z+r')}{|z+r'|}+\frac{(z-r')}{|z-r'|}\right).$$

En los denominadores aparecen los valores absolutos, ya que proceden de raíces cuadradas positivas. Ahora bien, como $a<z$ y $r'<a$, podemos omitir los valores absolutos, con lo cual los términos entre paréntesis arrojan un valor 2.

$$\frac{1}{z^2}\left(\frac{(z+r')}{|z+r'|}+\frac{(z-r')}{|z-r'|}\right)=\frac{2}{z^2}.$$

Al no tener dependencia con r', podemos hacer la integral sobre r' que habíamos dejado fuera:

$$\int_0^a r'^2 dr' = a^3/3\,,$$

Recordemos que estamos tomando z de la parte positiva del eje, y que $z>r'$ siempre, así que nuestra solución se puede escribir como:

$$F_{qz=}\frac{q\rho a^3}{3\epsilon_0 z^2}.$$

Y ahora nos tenemos que preguntar qué pasa con las otras componentes de la fuerza:si calculamos un elemento infinitesimal, y obtenemos su elemento opuesto en el otro extremo de la esfera por simetría, se van a anular el uno con el otro porque las fuerzas son opuestas, así que solo nos queda la componente en la dirección z.

Dicho de otra forma, las componentes de la fuerza en la dirección x e y son de la forma:

$$F_{qx}=\hat{x}\cdot\vec{F}_q\sim\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi=0\,,$$

$$F_{qy}=\hat{y}\cdot\vec{F}_q\sim\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi=0\,.$$

Si expresamos la carga total en la espera como:

$$q_{\text{esfera}}=\int dq=\int_{\text{esfera}}\rho dV=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\,,$$

sustituyéndolo queda:

$$\vec{F}_q = \frac{q q_{\text{esfera}}}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{z}\,.$$

Fijémonos en que al final tenemos una expresión como la ley de Coulomb, es decir, que al final la esfera actúa como si fuera una carga puntual. Esto sucede para una carga *fuera*: el punto clave es que la carga está fuera de la esfera.

Se ha escogido el eje z para realizar el cálculo, sin embargo, el mismo resultado valdría para cualquier otra dirección, por lo que la fuerza sobre la carga se puede expresar en función del vector $\vec{r}$ de posición de la carga fuera de la esfera como:

$$\vec{F}_q = \frac{q q_{\text{esfera}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\,.$$

Ejemplo 3. Integral

Vamos a calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{-(a-bx)}{\left(a^2+b^2-2abx\right)^{3/2}}dx\,.$$

Esta integral, que tiene solución analítica, se resuelve por sustitución. Definimos la nueva variable:

$$u = a^2 + b^2 - 2abx\,.$$

Despejando bx resulta:

$$bx = \frac{a^2+b^2-u}{2a}.$$

Diferenciamos:

$$du = -2ab dx.$$

con lo que la integral queda:

$$-\int \frac{a - \frac{1}{2a}\left(a^2+b^2-u\right)}{u^{3/2}}\frac{du}{-2ab} = \int \frac{1}{4a^2 b}\frac{a^2-b^2+u}{u^{3/2}}du =$$

$$= \int \frac{1}{4a^2b} \left(u^{-1/2} + a^2u^{-3/2} - b^2u^{-3/2}\right) du =$$

$$= \frac{1}{4a^2b} \left(2u^{1/2} - \frac{2a^2}{u^{1/2}} + \frac{2b^2}{u^{1/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2b} \left(2u^{1/2} - \frac{2a^2}{u^{1/2}} + \frac{2b^2}{u^{1/2}}\right) \frac{u^{1/2}}{u^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b} \left(2u - 2a^2 + 2b^2\right) \frac{1}{u^{1/2}} = \cdots$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\cdots = \frac{1}{4a^2b} \left(\frac{2a^2 + 2b^2 - 4abx - 2a^2 + 2b^2}{\left(a^2 + b^2 - 2abx\right)^{1/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2b} \frac{4b^{2-}4abx}{\left(a^2 + b^2 - 2abx\right)^{1/2}} = \frac{-ax + b}{\left(a^2 + b^2 - 2abx\right)^{1/2}} .$$

Veremos más ejemplos para casos continuos en el siguiente apartado.

Principio de superposición

Supongamos que tenemos una distribución discreta de cargas, más distribuciones continuas volumétricas, superficiales y lineales. Entonces, la fuerza neta que actúa sobre la carga de prueba q es la suma de todas ellas:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r^2}\hat{r} + \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dv'}{r^2}\hat{r} + \int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')ds'}{r^2}\hat{r} + \int_L \frac{\lambda(\vec{r}\,')dl'}{r^2}\hat{r} \right] . \qquad (16)$$

Para que el problema se ajuste a los supuestos de la electrostática, se ha de suponer que tanto las cargas fuente como la carga de prueba se mantienen fijas en el espacio, por ejemplo, mediante algún tipo de fuerzas mecánicas.

1.6 Campo eléctrico

Llegados a este punto, nos podemos preguntar: cuando dos cargas interactúan en el vacío, ¿qué es lo que hace que estas cargas sepan que la otra está ahí? Una de las cargas crea *algo*, que en este caso llamaremos *campo*, que hace que la otra *sepa que está ahí*. Y con este concepto podemos escribir la fuerza de Coulomb como:

$$\vec{F} = q\vec{E}\,. \tag{17}$$

Una definición más rigurosa tiene en cuenta que la carga prueba también produce un campo que altera el campo total. Entonces, lo que se hace para definir el campo eléctrico es tomar el límite cuando la carga de prueba tiende a cero, a saber:

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}}{q}\,. \tag{18}$$

Ese campo recibe el nombre de *campo eléctrico*. Y se puede expresar como:

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{iq}^2} \hat{r}_{iq}\,. \tag{19}$$

Fijémonos en que el campo eléctrico tiene unidades de fuerza por unidad de carga, $\mathrm{N/C}$. Podemos pensar en la similitud con el campo gravitatorio g. Esta fórmula nos dice cómo calcular el campo eléctrico en la posición r (el valor del campo varía con la distancia a las cargas, lo mismo que la fuerza eléctrica), debido a una distribución de cargas puntuales. Si en vez de cargas puntuales, tenemos distribuciones continuas de carga (recordemos la Ecuación (10), la Ecuación (11) y la Ecuación (12)), serán por similitud casi idénticas: solo tenemos que eliminar la carga externa q, y ya tenemos el campo. Veamos algunos ejemplos de campo eléctrico creado por distribuciones continuas de carga.

Ejemplo 4. Campo de una línea de carga

Supóngase una distribución uniforme lineal de carga a lo largo del eje z entre $z = -a$ y $z = a$, como se puede ver en la figura. Nuestra distribución lineal de carga se puede expresar como (recordando la Ecuación (7)):

$$dq = \lambda dz\,.$$

Y si tomamos que el punto donde queremos calcular el campo se encuentra situado en el plano xy, $\vec{r}_{p\lambda} = \vec{r}_p - \vec{r}_\lambda$, la posición de la linea de carga es en $\vec{r}_\lambda = z\hat{z}$, y la posición donde queremos calcular el campo la expresamos en coordenadas cilíndricas $\vec{r}_p = \rho\hat{\rho}$, entonces $\vec{r}_{p\lambda} = \rho\hat{\rho} - z\hat{z}$ y $r^2_{p\lambda} = \rho^2 + z^2$. Entonces, el campo eléctrico se puede expresar de la forma (recordemos que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|}$):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\hat{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{(\rho\hat{\rho} - z\hat{z})dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,. \tag{20}$$

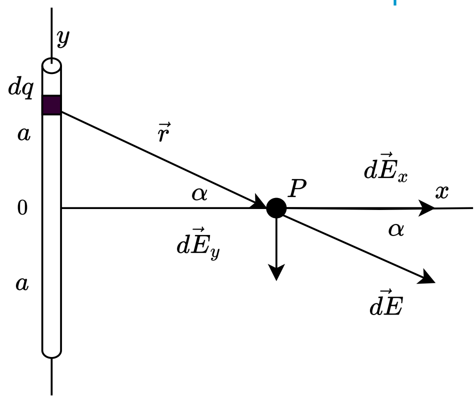


Figura 5: Campo de una carga. Elaboración propia.

Integrando entre los dos valores en los que se encuentra la linea de carga en el eje z, y sabiendo que la integral:

$$\int_{-a}^{a}\frac{z\hat{z}dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 0\,,$$

es nula porque es una función impar de la variable z, nos queda el resultado de la integral como:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{a}{\rho(\rho^2+a^2)^{1/2}}\hat{\rho}\,. \tag{21}$$

Esta integral es de la forma:

$$\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C\,.$$

La resolución de esta integral la hacemos en el siguiente ejemplo para quien esté interesado en los detalles matemáticos. Vamos a analizar el resultado: fijémonos que si hacemos el limite cuando $\rho \gg a$, es decir, estamos muy lejos de la linea de carga, y usando $q = \lambda 2a$, entonces nuestra expresión queda:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\hat{\rho}\,. \tag{22}$$

Y el campo en el punto P es el mismo que el generado por una carga puntual. Por otra parte, si la línea de carga es infinita, haciendo $a \to \infty$ resulta:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}\,,$$

donde vemos que el campo eléctrico tiene solamente componente radial y que, además, es inversamente proporcional a la distancia (no al cuadrado de la distancia.

Ejemplo 5. Integral

Efectuamos la integral utilizada en el ejemplo anterior:

$$\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\,.$$

Hacemos la siguiente sustitución trigonométrica:

$$x = a\tan u\,.$$

Diferenciamos

$$dx = a\frac{1}{\cos^2 u}du\,.$$

Evaluamos el denominador:

$$\left(a^2 + a^2\tan^2 u\right)^{3/2} = a^3\frac{1}{\cos^3 u}\,.$$

En total:

$$\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{1}{a^2}\cos u\, du = \frac{1}{a^2}\sin u\,.$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$u = \arctan(x/a) \ ,$$

$$\frac{1}{a^2} \sin(\arctan(x/a)) \ .$$

Pero sabemos que conocida la tangente, el seno es:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

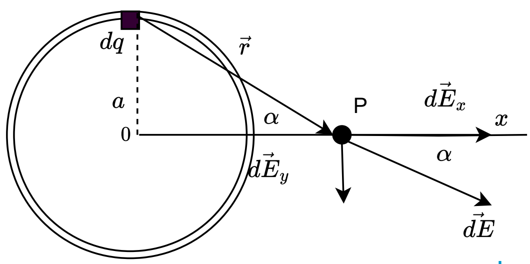
Por lo tanto:

$$\frac{1}{a^2} \sin(\arctan(x/a)) = \frac{1}{a^2} \frac{x/a}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C \ ,$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo 6. Campo de un anillo cargado uniformemente

Tenemos un anillo de radio a, con una carga positiva q uniformemente distribuida a lo largo del anillo. Queremos encontrar el campo eléctrico en un punto P, que se encuentra a una distancia x del centro del anillo. Sabemos que vamos a tener una componente del campo en el eje x a lo largo del eje del anillo. También vamos a tener una componente perpendicular al eje, pero como el anillo es simétrico, estas componentes se van a cancelar con cualquier elemento opuesto. Por tanto, solo encontraremos una componente del campo en la dirección del eje x. Si nos fijamos en la figura



$$\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$$

$$E_x = E\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{anillo}} \frac{\cos\alpha\, dq}{(x^2+a^2)^{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{anillo}} \frac{x\, dq}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xq}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,.$$

En este caso usamos un criterio de simetría para resolver el problema, porque el punto está centrado en el centro del anillo. Si este no fuera el caso, tendríamos que calcular también la componente perpendicular. Como la carga es constante, simplemente tomamos un elemento diferencial de la carga, que no depende de la posición, por eso no la expresamos en función del elemento de área.

Una manera de comprobar que el cálculo es correcto es considerar los casos límite:

Supongamos que $x = 0$, es decir, que el punto donde se calcula el campo está en el centro del anillo. Entonces, por simetría los diversos valores del campo en dicho centro se cancelan unos a otros, dando como resultado que el campo en ese punto vale cero.

Supongamos que $x \to \infty$, entonces tenemos que:

$$E \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xq}{x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\,.$$

es decir, que el campo es el mismo que el que originaría una carga puntual, lo cual está conforme con el hecho de que al alejarnos del anillo este se va pareciendo cada vez más a una carga puntual, siendo una carga puntual en el límite en que x vale infinito.

1.7 Lineas de campo eléctrico

Una línea de campo eléctrico se define como una línea curva imaginaria, de manera que su tangente en cualquier punto tiene la dirección del campo eléctrico en ese punto. Cuando tenemos una sola carga las líneas están dirigidas radialmente. Si la carga es positiva, se alejaría de la carga, y si es negativa iría hacia la carga. Cuando tenemos distribuciones de cargas, las líneas empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas, aunque si la carga neta es cero, las líneas pueden empezar o acabar en el infinito. Veamos algunos dibujos de estas líneas campo.

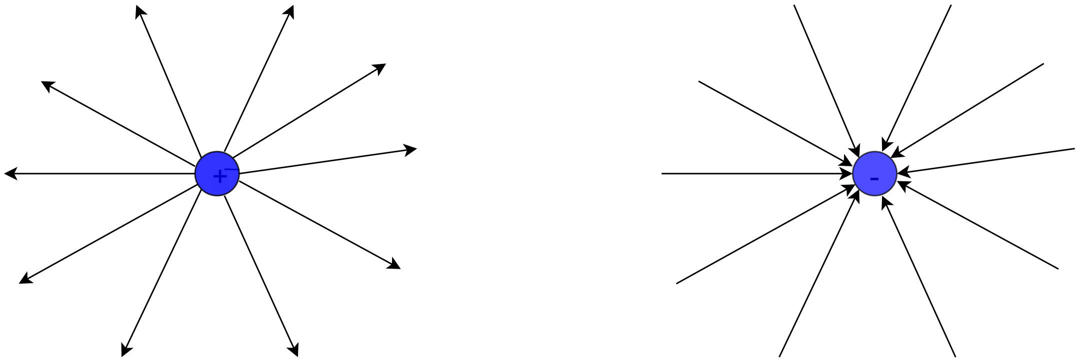


Figura 6: Líneas de campo de una carga. Elaboración propia.

En realidad las líneas del campo son infinitas y se despliegan por todo el espacio de tres dimensiones. No obstante, gráficamente, como no podemos dibujar infinitas líneas, se dibuja una cantidad finita de ellas, cuidando de que si la carga es doble, por ejemplo, se ha de dibujar el doble de las líneas de fuerza, y así sucesivamente.

La densidad de las líneas del campo decrece con la distancia. Esto está relacionado con el hecho de que el campo se atenúa con la distancia. La densidad de líneas del campo es pues una medida de la intensidad del campo.

Si tenemos dos o más cargas, las líneas del campo en el espacio no se pueden cruzar, pues si se cruzasen en el punto de cruce, el campo tendría valores distintos, lo cual es absurdo.

El campo eléctrico es tangente a las líneas de fuerza o líneas del campo. Estas se pueden determinar, en general, si disponemos de una carga de prueba infinitesimal y seguimos su movimiento a lo largo de un infinitésimo, deteniéndola una vez lo ha recorrido la carga de prueba. Uniendo todos los segmentos infinitesimales, se obtiene la línea del campo.

La ecuación que determina las líneas del campo para un diferencial de posición $d\vec{r}$ viene dada por:

$$\vec{E} \times d\vec{r} = 0\,. \tag{23}$$

Como vemos, pues, el que el campo sea tangente en cada punto a la línea del campo se expresa exigiendo que el producto vectorial del campo eléctrico y el vector infinitesimal de posición sea cero. Esto nos da, por ejemplo para la componente z, la siguiente ecuación:

$$E_x dy - E_y dx = 0\,, \tag{24}$$

de la que deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = f\,(x, y)\ , \tag{25}$$

lo cual nos da una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que, en general, como el campo puede depender de las coordenadas espaciales, no será fácil de resolver.

1.8 Partículas cargadas en un campo eléctrico

El campo eléctrico $\vec{E}$, se puede usar para diferentes aplicaciones, que incluyen partículas cargadas. ¿Cómo se mueven las partículas cargadas en un campo eléctrico? Si situamos una partícula cargada con una masa m en un campo eléctrico, tenemos una fuerza ejercida sobre la carga. Por otro lado, también tenemos la segunda ley de Newton que se aplica a la carga, y podemos decir que:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}.$$

De esta expresión podemos decir que la aceleración de la partícula será:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

La aceleración sobre la partícula va a ser constante cuando lo sea el campo $\vec{E}$. Podemos notar que si la carga es positiva la aceleración va en la dirección del campo, y si q es negativa, va en sentido contrario.

1.9 El osciloscopio

El osciloscopio es un instrumento que se usa para hacer mediciones y tiene una pantalla donde podemos ver las señales eléctricas. Está construido como los antiguos televisores, con un tubo de rayos catódicos. Si queréis saber más, podéis ver el siguiente vídeo:

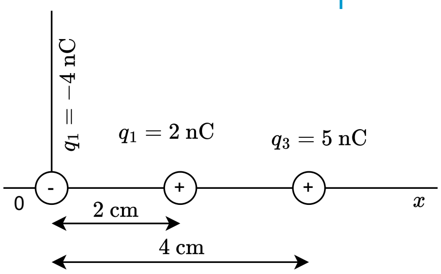
Accede al vídeo: El osciloscopio.

1.10 Cuaderno de ejercicios

Te proponemos los siguientes ejercicios para practicar los conceptos vistos en el tema:

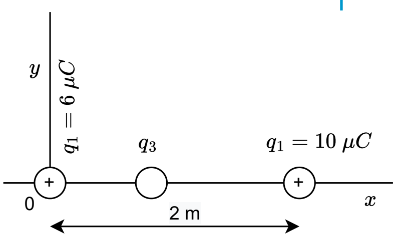
Ejercicio 1.

Cálculo de la fuerza eléctrica en un sistema de tres cargas que se encuentran en una línea, como se puede ver en la figura. Las cargas se encuentran en el eje x. La carga $q_1 = 2$ nC que se encuentra a x=2 cm del origen, $q_2 = -4$ nC que se encuentra en el origen, por último la carga 3 $= 5$ nC se encuentra en $x = 4$ cm. Calcula la fuerza total ejercida sobre la carga q_3. *Solución*: $\vec{F}_{q_3} = 112.5\hat{x}\ \mu\text{N}$.



Ejercicio 2.

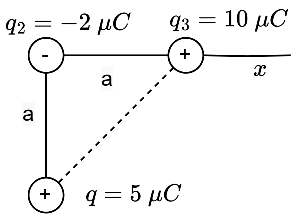
Tenemos tres cargas eléctricas en el eje x, como se puede ver en la figura. La carga $q_1 = 10\ \mu$C se encuentra en $x = 2$ m, la carga $q_2 = 6\ \mu$C está en $x = 0$ m. ¿Dónde se debería encontrar en el eje x una carga q_3 para que la fuerza ejercida sobre ella sea nula? *Solu-*



ción: $x = 0.87\,\mathrm{m}$.

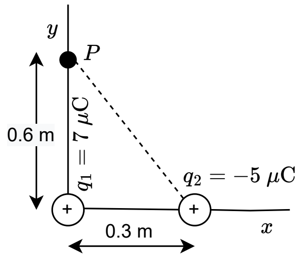
Ejercicio 3.

Tenemos un sistema de tres cargas formando un triángulo como se ve en la figura, donde $q_1 = 5\,\mu\mathrm{C}$, $q_3 = 10\,\mu\mathrm{C}$, y $q_2 = -2\,\mu\mathrm{C}$. El lado del triángulo es $a = 0.10$ m. Calcular la fuerza resultante sobre la carga q_3. *Solución*: $\vec{F}_{q_3} = -2.1\hat{x} + 15.9\hat{y}\,\mathrm{N}$.



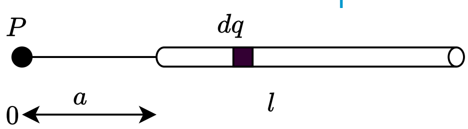
Ejercicio 4.

Calcula el campo eléctrico debido a dos cargas situadas en el eje x, una carga $q_1 = 7\ \mu C$ que se encuentra en el origen y una carga $q_2 = -5\ \mu C$ que se encuentra en $x = 0.3$ m. Calcula el valor del campo eléctrico en un punto P que se encuentra en el eje y a una distancia 0.6 m del origen. *Solución*: $\vec{E} = 4.5 \times 10^4\hat{x} + 8.6 \times 10^4\hat{y}\,\mathrm{N/C}$.



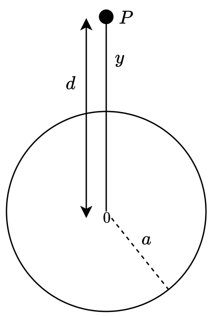
Ejercicio 5.

Tenemos una barra cargada uniforme y positiva, con una densidad lineal de carga λ, de longitud l. Calcula el campo eléctrico en el punto P, que se encuentra a lo largo del eje de la barra como muestra la figura, a una distancia a de uno de los extremos de la barra. *Solución*: $\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{l}{a(a+l)}\hat{x}$.



Ejercicio 6.

Tenemos un disco cargado uniformemente. El disco tiene un radio a. La densidad de carga superficial en el disco es uniforme y positiva, σ.



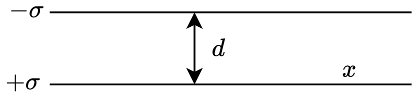
- Calcula el campo en un punto situado en el eje y perpendicular al disco que pasa por su centro a una distancia d de su centro.

- Si $a \ggg d$, ¿cuál sería el resultado (es decir si fuera un disco infinito, equivalente a un plano infinito)?

Solución: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2/d^2+1}}\right)\hat{y}$ y $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{y}$.

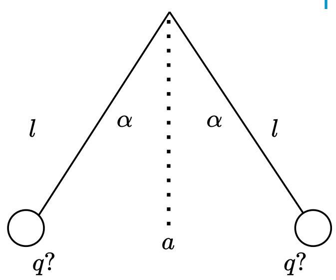
Ejercicio 7.

Cálculo del campo eléctrico de dos láminas infinitas con cargas opuestas. ¿Cuál será el campo resultante entre las láminas. ¿Cuál es el campo en la parte superior o inferior? Nota: podemos usar el resultado del campo en una lámina infinita calculado en el ejercicio anterior. *Solución*: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{y}$ y el campo es nulo encima de la lámina superior o debajo de la lámina inferior.



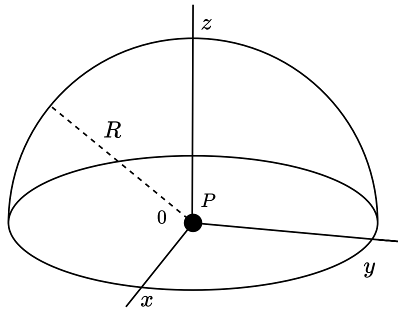
Ejercicio 8.

Dos esferas cargadas idénticas cuelgan de una cuerda de longitud $l = 0.15\,\mathrm{m}$. El sistema está en equilibrio. Las cargas tienen una masa de 60 g, y el ángulo que forma la cuerda es $\alpha = 5^\circ$. Encuentra la magnitud de la carga de las esferas. *Solución*: $q = 6.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$.



Ejercicio 9.

Una semiesfera cargada en su superficie, que se encuentra en la parte positiva del eje, tiene una carga uniforme con una densidad superficial de carga σ, y un radio R. Calcula el valor del campo en el centro de curvatura del cascarón. *Solución*: $E = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}\hat{z}$.



1.11 Referencias bibliográficas

Poveda Ramos, G. (2003). La electricidad antes de Faraday. *Revista Faculta de Ingeniería de Antiaquia*, (30), 130–147.

Valverde, R. L. (2001). Historia del electromagnetismo. *Ediciones IES, Pablo Picasso*.