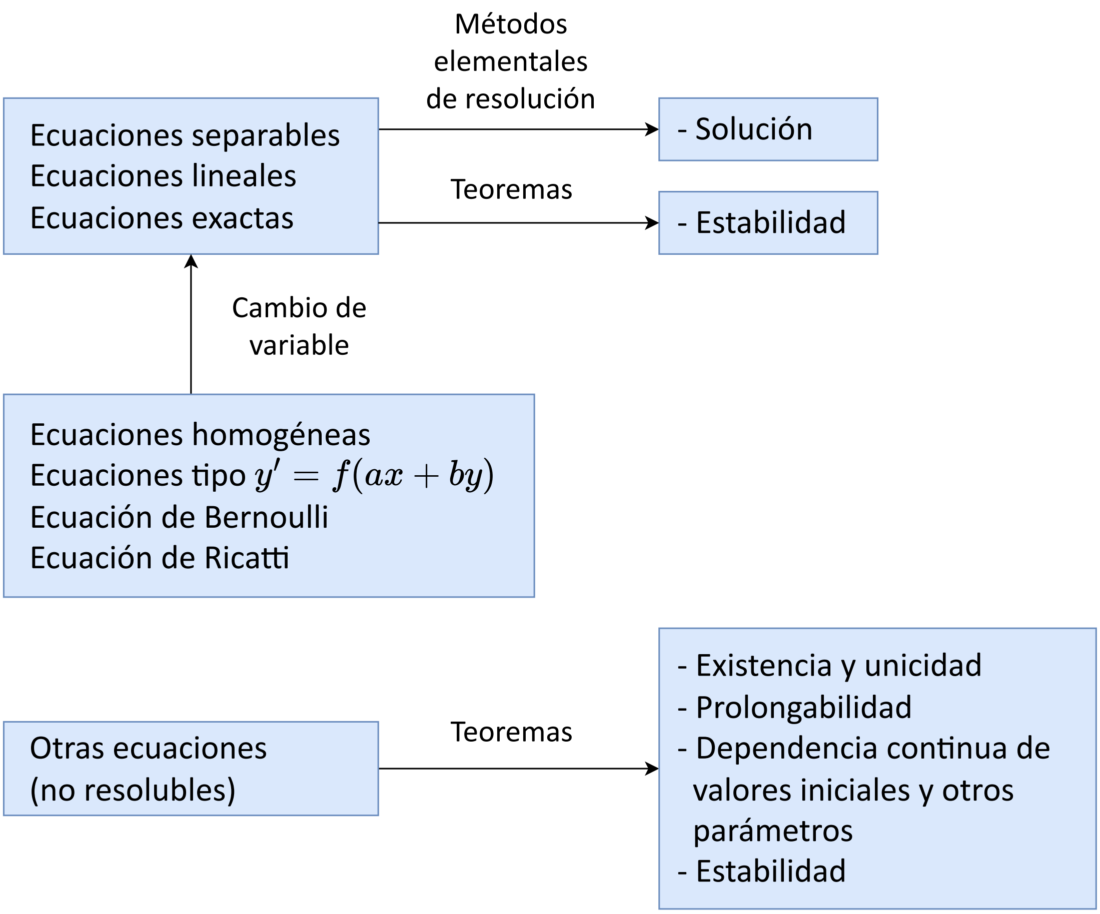
Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Índice

Esquema



Métodos elementales de resolución
Ecuaciones separables
Ecuaciones lineales
Ecuaciones exactas
- Solución
Teoremas
- Estabilidad
Cambio de variable
Ecuaciones homogéneas
Ecuaciones tipo $y' = f(ax + by)$
Ecuación de Bernoulli
Ecuación de Ricatti
Otras ecuaciones (no resolubles)
Teoremas
- Existencia y unicidad
- Prolongabilidad
- Dependencia continua de valores iniciales y otros parámetros
- Estabilidad

Ideas clave

2.1 Introducción y objetivos

En este tema trataremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, aquellas ecuaciones en las que solamente aparece la derivada primera de la función $y(x)$:

$$f(\frac{dy}{dx}, y, x) = 0. \tag{1}$$

La solución general será cualquier función $y(x)$ que satisfaga dicha ecuación, y una solución particular será una de aquellas funciones que además cumpla una condición inicial dada. Al problema de resolver la Ecuación (1) con una condición inicial $y(x_0) = y_0$ se le llama *problema de Cauchy* o *problema de valores iniciales*.

Las EDO de primer orden incluyen algunos de los pocos tipos de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver exactamente. Estas ecuaciones aparecen en algunos problemas interesantes, como por ejemplo la evolución de la pandemia de COVID19 (Shur, 2021) o el crecimiento de tumores (Tabassum et al., 2019; Vaghi et al., 2020), y además nos servirán para introducir los conceptos que utilizaremos en problemas más complicados y con más relevancia en física.

Cuando una ecuación diferencial no se puede resolver exactamente es posible encontrar una solución aproximada por los métodos gráficos y numéricos que veremos más adelante. Sin embargo, en ocasiones es posible obtener información sobre las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla, y muchas veces esta información es suficiente para tratar el problema físico en cuestión.

Antes de acudir a métodos aproximados para encontrar la solución a un problema de valores iniciales, es importante saber en primer lugar si tal solución existe y, en caso que exista, si es única. Veremos un teorema que establece el criterio para averiguar la existencia y unicidad de la solución a un problema de valores iniciales.

También nos interesa saber si las soluciones particulares dependen de las condiciones iniciales (y otros parámetros de la ecuación) de manera continua. Si esta dependencia no es continua significaría que un pequeño error experimental en la determinación de las condiciones iniciales y los parámetros de la ecuación daría lugar a soluciones muy distintas.

Otra propiedad importante de las soluciones que podemos averiguar sin necesidad de resolver la ecuación es su comportamiento en el infinito. Debido al posible error en la determinación de las condiciones iniciales necesitamos saber si las soluciones de la ecuación son estables. Aunque hubiera una dependencia continua de las condiciones iniciales, dos soluciones que inicialmente permanecieran próximas entre sí podrían divergir en el infinito.

Los conceptos que se introducen en este tema servirán como base para abordar problemas más complicados que trataremos en los temas siguientes.

Los objetivos de este tema son:

- Reconocer los tipos de ecuaciones de primer orden que pueden resolverse de manera exacta y aplicar los correspondientes métodos de resolución para encontrar la solución general o una solución particular.
- Determinar cuándo un problema de valores iniciales dado tiene solución única.
- Determinar cuándo la solución de un problema de valores iniciales dado depende de manera continua de los datos iniciales u otros parámetros.
- Identificar cuándo una determinada solución de un problema de valores iniciales es estable.

2.2 Métodos elementales de resolución de EDOs

Como ya hemos dicho, encontrar la solución general de una ecuación diferencial de manera exacta es imposible en la mayoría de los casos. Sin embargo, hay ciertos tipos de EDO de primer orden en los que se pueden aplicar métodos de resolución analíticos. Éstas son las *ecuaciones separables*, *ecuaciones lineales*, y *ecuaciones exactas*. En el vídeo siguiente puedes ver cómo se resuelven estas ecuaciones con algunos ejemplos:

Accede al vídeo: Resolución de EDOs de primer orden.

Ecuaciones separables

Son ecuaciones que se pueden escribir de la forma:

$$y' = p(x)q(y)\,, \tag{2}$$

es decir, ecuaciones en las que la dependencia explícita de la variable independiente x y la variable dependiente y se pueden expresar como funciones separadas:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y) \Rightarrow \frac{1}{q(y)}dy = p(x)dx\,.$$

La ecuación se puede integrar directamente:

$$\int \frac{1}{q(y)}dy = \int p(x)dx + C\,. \tag{3}$$

Donde C es la constante de integración. Si podemos calcular estas integrales, la solución general a la Ecuación (2) se obtiene despejando y de la Ecuación (3). Si no podemos despejar la y entonces diremos que la solución viene dada implícitamente por la Ecuación (3). Al hecho de expresar la solución de una ecuación en forma de integrales, resolubles o no, se le llama *resolución por cuadraturas*. La expresión «cuadratura» es un término histórico con el que se denomina el proceso para determinar el área de una figura geométrica, lo que hoy en día se hace mediante integrales.

Ejemplo 1. Resolver $y' = xy^2$

$y' = xy^2$ es una ecuación separable con $p(x) = x$ y $q(y) = y^2$. Integrando obtenemos:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + C}\,.$$

Para asegurarnos de que la solución es correcta podemos derivar esta función respecto de x y comprobar que satisface la ecuación.

Un caso particular de ecuaciones separables son las *ecuaciones autónomas*, en las que la variable independiente x no aparece explícitamente:

$$y' = f(y)\,. \tag{4}$$

En este caso la solución se obtiene resolviendo la integral en la ecuación:

$$\int \frac{1}{f(y)} dy = x + C\,,$$

y despejando y. Si esto no es posible, al menos obtendremos una expresión implícita para la solución y.

Ejemplo 2. Solución general de la ecuación de desintegración $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$

La ecuación que describe la pérdida de materia de una sustancia radiactiva por desintegración es un ejemplo típico de ecuación autónoma ya que no depende explícitamente de t. En dicha ecuación N es el número total de partículas en la muestra y λ es el ritmo de desintegración. Las integrales:

$$\int \frac{1}{N} dN = -\lambda \int dt\,,$$

dan como resultado:

$$\ln|N| = -\lambda t + C \Rightarrow$$

$$|N| = e^C e^{-\lambda t}\,.$$

Esta expresión incluye valores negativos de N que podemos ignorar en el problema físico, ya que no tiene sentido hablar de cantidades de materia negativas, pero matemáticamente son soluciones válidas.

Podemos redefinir la constante C de manera que la nueva C es igual al logaritmo de la antigua C. De esta manera la solución queda:

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}\,.$$

Esta expresión incluye las soluciones positivas y negativas, así como la solución trivial $N = 0$ que habíamos obviado al dividir la ecuación por N.

Las ecuaciones autónomas $y' = f(y)$ tienen algunas propiedades interesantes que enunciamos a continuación. Supongamos que $f(y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ son continuas en $\mathbb{R}$. Entonces se cumple que:

Teorema 1: Propiedades de las ecuaciones autónomas

1. Si $y(x)$ es solución de $y' = f(y)$, entonces $y(x + C)$ también es solución.
2. Si existe una constante real a tal que $f(a) = 0$, entonces $y(x) = a$ es solución de $y' = f(y)$. A estas soluciones constantes se les llama *soluciones de equilibrio*.
3. Cada solución de $y' = f(y)$ es o bien constante, o estrictamente creciente, o estrictamente decreciente.
4. Toda solución de $y' = f(y)$ acotada a la derecha de un punto x_0 tiende a una solución de equilibrio cuando $x \to \infty$. Si está acotada a la izquierda entonces lo hace cuando $x \to -\infty$.

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son ecuaciones definidas por un polinomio lineal en la función incógnita $y(x)$ y sus derivadas, esto es, ecuaciones de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,,$$

donde $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ y $f(x)$ son funciones derivables arbitrarias, no necesariamente lineales. Si $f(x) = 0$ la ecuación lineal se llama *homogénea*, en caso contrario se llama *no-homogénea*.

Dejaremos el estudio de las ecuaciones lineales de orden n para temas posteriores y en este tema nos centramos en las ecuaciones lineales de primer orden, que tienen la forma:

$$y' = a(x)y + f(x).$$

y que se pueden resolver por cuadraturas. Como veremos más adelante, las ecuaciones lineales de orden n también se pueden resolver por cuadraturas pero solamente si los coeficientes a_n son constantes.

La ecuación lineal homogénea:

$$y' = a(x)y,$$

es además separable y por tanto podemos aplicar el método de la sección anterior:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy = \int a(x)dx \Rightarrow \qquad\qquad \ln|y| &= \int a(x)dx + C \Rightarrow \\ |y| &= e^{\int a(x)dx + C} \Rightarrow \\ y(x) &= Ce^{\int a(x)dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí hemos usado el mismo «truco» de redefinir la constante C que utilizamos en el Ejemplo 2 para incluir las soluciones positivas y negativas, así como la solución trivial $y = 0$.

La solución de la ecuación no-homogénea:

$$y' = a(x)y + f(x),$$

se halla sustituyendo la constante C de la solución general de la homogénea (Ecuación (5)) por una función $C(x)$ y probando esta solución en la ecuación no-homogénea:

$$\frac{d}{dx}\left[C(x)e^{\int a(x)dx}\right] = a(x)C(x)e^{\int a(x)dx} + f(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{\int a(x)dx} + \cancel{a(x)C(x)e^{\int a(x)dx}} = \cancel{a(x)C(x)e^{\int a(x)dx}} + f(x) \Rightarrow$$

$$C'(x) = f(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int f(x) e^{-\int a(x)dx} dx + C \,.$$

Introduciendo esta $C(x)$ en la solución general de la homogénea (Ecuación (5)) obtenemos la solución general de la ecuación no-homogénea:

$$y(x) = Ce^{\int a(x)dx} + e^{\int a(x)dx} \int f(x) e^{-\int a(x)dx} dx \,. \tag{6}$$

Este método de resolución de la ecuación no-homogénea a partir de la solución general de la homogénea se llama *método de variación de las constantes* y se puede aplicar en situaciones más generales, como en las ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones que veremos más adelante.

Podemos observar que la solución general de la ecuación no-homogénea es igual a la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no-homogénea. (Se puede probar que el segundo término de Ecuación (6) es solución particular de la no-homogénea comprobando que satisface la ecuación $y' = a(x)y + f(x)$.)

La solución particular de la ecuación no-homogénea que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se halla inmediatamente imponiendo dicha condición en la Ecuación (6):

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \int_{x_0}^{x} f(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(u)du} ds \,. \tag{7}$$

Ejemplo 3. Intensidad de corriente en un circuito

Consideremos el circuito de la Figura 1 con una fuente de voltaje $V(t)$, una resistencia R, y una inductancia L. Según la *ley de Kirchoff*, la variación de la intensidad de corriente con el tiempo viene dada por una EDO lineal de primer orden no-homogénea:

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t) \,.$$

La solución con condición inicial $I(0) = I_0$ es:

$$I(t) = e^{-\frac{Rt}{L}} \left[\int_0^t \frac{V(\tau)}{L} e^{\frac{R\tau}{L}} d\tau + I_0 \right] .$$

El término $I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$ se conoce como régimen transitorio y tiende a cero rápidamente. Si la fuente es una pila que produce un voltaje constante $V(t) = V_0$, e inicialmente no hay corriente ($I_0 = 0$), tenemos:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right] ,$$

que parte de cero y tiende a $I(t) = \frac{V_0}{R}$, es decir a un régimen estacionario con la intensidad dictada por la *ley de Ohm*.

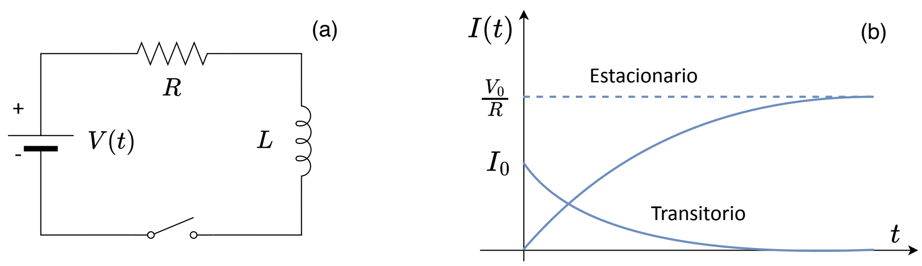


Figura 1: (a) Circuito eléctrico; (b) Intensidad de corriente al cerrar el circuito.

Ecuaciones exactas

Consideremos una ecuación escrita en la forma:

$$N(x,y)y' + M(x,y) = 0 \,. \tag{8}$$

Dicha ecuación se llama *exacta* si existe una función de dos variables $u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$.

En ese caso la solución general de la ecuación viene dada implícitamente por $u(x,y) = C$ ya que la derivada total de $u(x, y(x))$ respecto a x viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= N(x,y)y' + M(x,y) \,. \end{aligned}$$

y al ser $u(x, y)$ constante esta derivada total es cero, satisfaciendo así la Ecuación (8).

Para averiguar si la ecuación es exacta se puede probar si:

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) \,.$$

Esta condición es *necesaria* para que exista $u(x, y)$, y es condición *suficiente* si además $\frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} M(x, y)$ son continuas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ abierto simplemente conexo.

La función $u(x, y)$ se encuentra integrando $M(x, y)$ en x y $N(x, y)$ en y. Las constantes de integración de cada integral se pueden considerar como una función de y y de x respectivamente, y estas funciones se hayan igualando las integrales. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 4. Ecuación exacta

Resolvamos la ecuación:

$$y' = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2 y + 4y^3} \,.$$

Escribiéndola como:

$$3x^2 + 6xy^2 + \left(6x^2 y + 4y^3\right) y' = 0 \,,$$

vemos que la ecuación es exacta, ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 6xy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2 y + 4y^3\right) \,.$$

La función $u(x, y)$ debe cumplir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 + 6xy^2 &\quad \Rightarrow \quad & u = x^3 + 3x^2 y^2 + f(y) \,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 6x^2 y + 4y^3 &\quad \Rightarrow \quad & u = 3x^2 y^2 + y^4 + g(x) \,. \end{aligned}$$

Comparando estas dos últimas expresiones vemos que:

$$u(x, y) = y^4 + 3x^2 y^2 + x^3 \,,$$

por tanto la solución viene dada implícitamente por:

$$y^4 + 3x^2y^2 + x^3 = C\,.$$

2.3 Cambios de variable

Existe otro tipo de ecuaciones que aunque a primera vista no son ni separables, ni lineales, ni exactas, pueden transformarse en uno de estos tipos mediante un cambio de variables. Veamos algunas de ellas.

Ecuaciones homogéneas

No deben confundirse con las ecuaciones *lineales* homogéneas que hemos visto antes. Una ecuación diferencial homogénea de primer orden es aquella que puede escribirse de la forma:

$$y' = f(y/x)\,.$$

Esta ecuación se convierte en separable si hacemos el cambio de variable $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. La derivada de z respecto de x es:

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\,.$$

Eliminamos las y de esta expresión haciendo $y' = f(z)$ y $y = zx$ para obtener la ecuación diferencial en términos de la nueva función $z(x)$:

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}\,,$$

que, como se puede ver, es separable.

La solución vendrá dada implícitamente por:

$$\int \frac{1}{f(z) - z} dz = \ln|x| + C\,,$$

si sabemos resolver la integral de la izquierda. Deshaciendo el cambio de variable podemos volver a una expresión en términos de $y(x)$.

Ejemplo 5. Ecuación homogénea

Resolvamos la ecuación:

$$x^2 y' = xy + 2y^2 .$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por x^2vemos que:

$$y' = \frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 ,$$

es una ecuación homogénea. Por tanto podemos hacer el cambio de variable $z \equiv \frac{y}{x}$ que transforma la ecuación en:

$$z' = 2\frac{z^2}{x} ,$$

que es separable:

$$\int \frac{1}{z^2} dz = 2 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = 2 \ln |x| - C .$$

Deshaciendo el cambio de variable llegamos a la solución:

$$y = \frac{x}{C - 2 \ln |x|} .$$

Ecuaciones tipo $y' = f(ax + by)$, con a y b constantes

Estas ecuaciones también se convierten en separables haciendo el cambio de variable $z(x) = ax + by(x)$. La derivada de z respecto de x es:

$$z' = a + by' .$$

De nuevo expresamos la ecuación diferencial en términos de la nueva función $z(x)$ haciendo $y' = f(z)$:

$$z' = a + bf(z) ,$$

que no solamente es separable sino que además es autónoma, ya que no depende explícitamente de x. La solución se obtiene integrando la ecuación:

$$\int \frac{1}{a + bf(z)} dz = x + C\,. \tag{9}$$

Si sabemos resolver la integral obtendremos una expresión implícita para la solución $z(x)$ que podemos reescribir en términos de $y(x)$ deshaciendo el cambio de variable.

Ejemplo 6. Ecuación del tipo $y' = f(ax + by)$, con a y b constantes

Resolvamos la ecuación:

$$y' = \frac{1}{(y + 2x)^2} - 1\,.$$

Esta es una ecuación del tipo $y' = f(ax+by)$ donde $f(z) = \frac{1}{z^2} - 1$, $a = 2$, y $b = 1$. La solución viene dada por la Ecuación (9):

$$\int \frac{z^2}{1 + z^2} dz = x + C\,.$$

La integral de la izquierda es $z - \arctan z$, luego la solución viene dada implícitamente por:

$$y - \arctan(y + 2x) = C - x\,.$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación del tipo:

$$y' = a(x)y + f(x)y^p\,, \tag{10}$$

con $p \neq 1$. Esta ecuación es especial porque es una de las pocas ecuaciones diferenciales no-lineales que se puede resolver de manera exacta. Para ello se hace el cambio de variable $z(x) = y^{1-p}$ que convierte la ecuación en lineal.

Ejemplo 7. Ecuación logística

Un ejemplo de ecuación de Bernoulli es la *ecuación logística* que describe la evolución de la población de un colectivo sujeto a una cantidad limitada de recursos.

Sea $P(t)$ la población en el instante t. Suponiendo que tanto el número de nacimientos como el de fallecimientos son proporcionales a la población presente, se puede adoptar como modelo de evolución de $P(t)$ la ecuación $P'(t) = \lambda P(t)$. Pero su solución $P(t) = ce^{\lambda t}$ no es aceptable, pues si $\lambda > 0$ la población crece sin límite. La siguiente aproximación, conocida como ecuación logística, consiste en añadir un término correctivo que da cuenta de la competición entre individuos por la escasez de productos que se produce al aumentar el nivel de población, de modo que:

$$P'(t) = \lambda P - \mu P^2 = \mu P \left(P_M - P \right) , \tag{11}$$

donde $P_M \equiv \lambda/\mu$ juega el papel de límite máximo de la población, de tal manera que ahora P' es proporcional a la población P y a la capacidad restante $(P_M - P)$, factor que tiende a cero cuando P se acerca a su tope P_M. Esto tenderá a estabilizar la población en el valor $P_M < \infty$. Si λ y μ son constantes, la Ecuación (11) es separable.

Ecuación de Ricatti

La ecuación de Ricatti es otro tipo de ecuación diferencial no-lineal que se puede resolver exactamente, pero solo si conocemos una solución particular $y_0(x)$ de la misma. La ecuación de Ricatti tiene la forma:

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + f(x) , \tag{12}$$

que se puede convertir en una ecuación de Bernoulli con $p = 2$ haciendo el cambio de variable $u(x) = y(x) - y_0(x)$. Para expresar la Ecuación (12) en función de la nueva variable comenzamos derivando esta:

$$\begin{aligned} u'(x) &= y'(x) - y_0'(x) \\ &= a(x)y + b(x)y^2 + f(x) - \left[a(x)y_0 + b(x)y_0^2 + f(x)\right] \\ &= a(x)(y - y_0) + b(x)(y^2 - y_0^2) \, . \end{aligned}$$

Nótese que $y^2 - y_0^2 = (y + y_0)(y - y_0) = (u + 2y_0)u = 2y_0u + u^2$. Entonces:

$$u'(x) = \left(a(x) + 2b(x)y_0\right) u + b(x)u^2 \, .$$

que como ya habíamos anticipado es una ecuación de Bernoulli (Ecuación (10)) con $p = 2$.

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, mediante el cambio de variable $z(x) = u^{-1}$ llegamos a una ecuación lineal que podemos resolver del modo convencional.

2.4 Existencia y unicidad de soluciones

Hasta ahora hemos visto algunos tipos de ecuaciones que se podían resolver de manera exacta, bien directamente o mediante un cambio de variable podíamos encontrar la solución general, al menos de manera implícita, e imponer unas condiciones iniciales que determinan la solución de manera única.

Sin embargo, en la mayoría de ecuaciones esto no es posible. Antes de abordar los métodos aproximados de resolución de ecuaciones y los algoritmos numéricos que veremos más adelante, será interesante averiguar si el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} , \tag{13}$$

al menos tiene solución y si esta es única.

Suponemos que $f(x, y)$ está definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. Definimos rigurosamente la solución de la Ecuación (13) como una función $y(x)$ derivable al menos en un intervalo de x que contiene a x_0, tal que para todo x del intervalo se cumple que $y'(x) = f(x, y)$.

La condición de existencia de soluciones al problema de valores iniciales viene dada por el siguiente *teorema de existencia de Peano*:

Teorema 2: Teorema de existencia Peano

Si $f(x, y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) entonces el problema de valores iniciales de la Ecuación (13) posee *al menos una* solución definida en un entorno de x_0.

La continuidad de $f(x, y)$ garantiza la existencia de soluciones al problema de valores iniciales, pero no que la solución sea única.

La condición de unicidad de la solución al problema de la Ecuación (13) viene definida rigurosamente por el *teorema de Picard–Lindelöf*. Este teorema exige que $f(x, y)$ sea *Lipschitz-continua*, concepto en el que no entraremos. Sin embargo, en la práctica podemos sustituir la condición de *lipschitzianidad* por la de continuidad de $f(x, y)$ y de su derivada parcial respecto a y, por tanto podemos definir el siguiente teorema de existencia y unicidad, tan solo un poco más débil que el teorema de Picard–Lindelöf y que contiene al de Peano:

Teorema 3: Existencia y unicidad de soluciones del problema de valores iniciales

Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas en un entorno de (x_0, y_0) el problema de valores iniciales de la Ecuación (13) posee solución *única* definida al menos en un intervalo que contiene a x_0.

Ejemplo 8. Existencia y unicidad de soluciones

Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} y' = \cos\left(x - \ln(y^2 + e^x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

Aunque $f(x, y)$ parece muy complicada, se puede ver que no tiene discontinuidades, y lo mismo se puede decir de su derivada parcial respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{2y}{y^2 + e^x} \sin\left(x - \ln(y^2 + e^x)\right) ,$$

por tanto la ecuación tiene solución única para todo x_0 y todo $y_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 9. Existencia y unicidad de soluciones

Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} , \tag{14}$$

$f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, luego existe solución para cualquier x_0, y_0. Sin embargo $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y^{-\frac{1}{3}}$ tiene una discontinuidad en $y = 0$, por tanto la ecuación tiene solución única si $y_0 \neq 0$.

Podemos comprobar esto representando las soluciones de la ecuación, que son $y = (x + C)^3$ y $y = 0$ (Figura 2), y viendo que la condición $y(x_0) = 0$ se cumple tanto para $y = 0$ como para $y = (x - x_0)^3$.

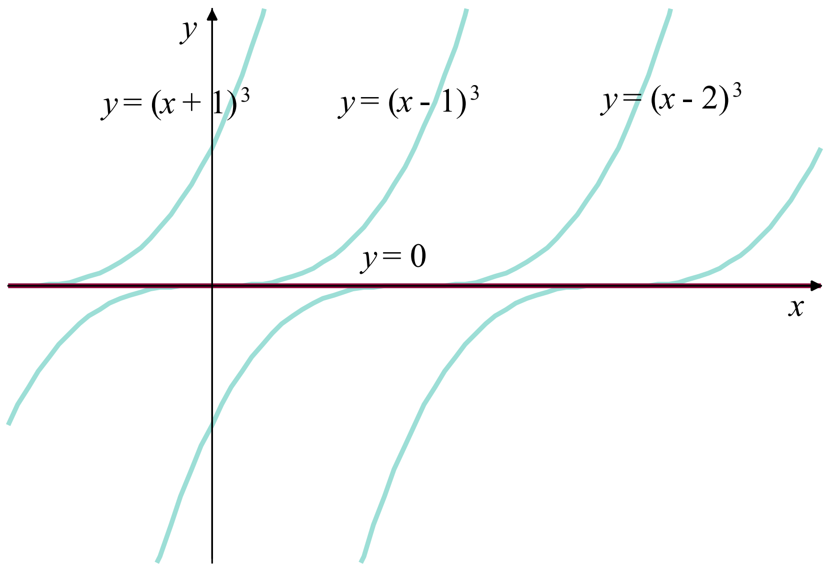


Figura 2: Soluciones de la Ecuación (14).

2.5 Prolongabilidad

Los teoremas de existencia y unicidad descritos arriba nos dicen que la solución está definida *al menos* en un intervalo que contiene a x_0. Pero podemos preguntarnos cómo de grande es ese intervalo o, dicho de otro modo, hasta qué valor de x se puede extender esa solución.

En particular nos interesa saber si la solución $y(x)$ al problema de valores iniciales de la Ecuación (13) está definida en todo el intervalo desde x_0 hasta el infinito y de x_0 hasta menos infinito. El hecho de que $f(x, y)$ esté definida en todo $\mathbb{R}^2$ no garantiza que la solución lo esté, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. Dominio de las soluciones

Sea la ecuación:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} . \tag{15}$$

la cual tiene solución única para cualquier valor de y_0. Sin embargo, las soluciones:

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 x},$$

tienen una discontinuidad en $x = \frac{1}{y_0}$ (Figura 3).

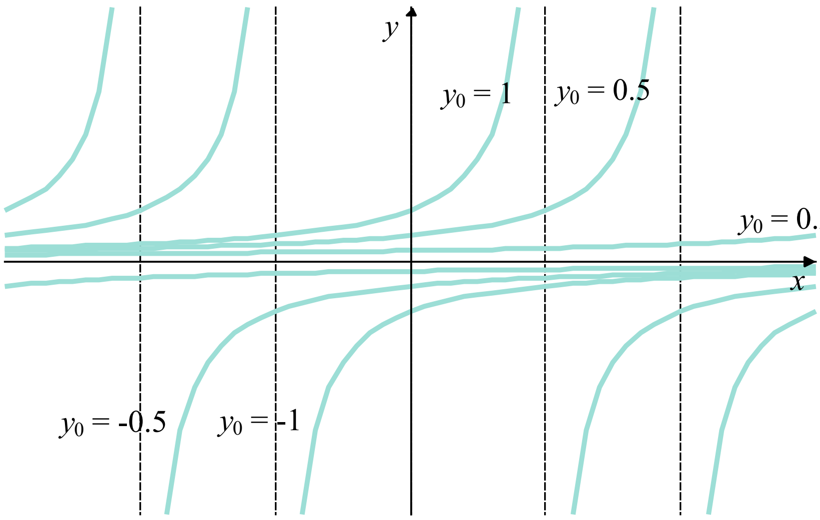


Figura 3: Soluciones de la Ecuación (15).

Si $y_0 > 0$ la solución solo puede prolongarse hacia la derecha hasta $x = \frac{1}{y_0}$; y del mismo modo, si $y_0 < 0$ la solución no puede prolongarse hasta $-\infty$ ya que se encuentra antes con la asíntota. Solamente para $y_0 = 0$ la solución está definida para todo x.

El siguiente teorema nos da información sobre la *prolongabilidad* de las soluciones del problema de valores iniciales, lo cual es útil cuando no se puede resolver la ecuación:

Teorema 4: Prolongabilidad de soluciones del problema de valores iniciales

Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, la solución $y(x)$ de la Ecuación (13) tiende hacia la frontera de D, o hacia el infinito si D es no-acotado.

Por ejemplo, si D es $\mathbb{R}^2$ el Teorema 4 viene a decir que o bien existe un $x_1 > x_0$ tal que $|y(x)| \to \infty$ cuando $x \to x_1$, o bien $y(x)$ está definida en todo $[x_0, \infty)$. Lo mismo se puede decir respecto a la prolongabilidad hacia menos infinito, o bien existe un $x_1 < x_0$ tal que $|y(x)| \to \infty$ cuando $x \to x_1$, o bien $y(x)$ está definida en todo $(-\infty, x_0]$.

Para averiguar el comportamiento en el intervalo $[x_0, \infty)$ y $(-\infty, x_0]$ de la solución $y(x)$ de una ecuación complicada, puede ser útil compararla con la de otras ecuaciones fáciles de resolver. Para ello enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 5: Solución aproximada de ecuaciones

Sean dos problemas de valores iniciales $\begin{cases} y' = f_1(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ y $\begin{cases} y' = f_2(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ con f_1, f_2,$\frac{\partial f_1}{\partial y}$ y $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ continuas en D y cuyas soluciones respectivas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ están definidas en el mismo intervalo I en torno a x_0. Si $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ en D entonces:

1. $y_1(x) \leq y_2(x)$ para todo $x \geq x_0$ perteneciente al intervalo I, y
2. $y_1(x) \geq y_2(x)$ para todo $x \leq x_0$ perteneciente al intervalo I.

Este teorema viene a decir que si la pendiente de $y_1(x)$ es menor que la de $y_2(x)$, entonces la propia función $y_1(x)$ es menor que $y_2(x)$ a la derecha de x_0, y mayor que $y_2(x)$ a la izquierda de x_0.

Ejemplo 11. Solución aproximada de ecuaciones

Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} y' = 2x - \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases}, \tag{16}$$

que no se puede resolver de manera elemental. $f(x,y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, por tanto sabemos que el problema tiene solución única. Consideremos ahora dos problemas resolubles:

$$\begin{cases} y' = 2x - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y' = 2x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

cuyas soluciones son $y = x^2 - x + 1$ y $y = x^2 + x + 1$ respectivamente. El Teorema 5 nos dice que la solución de la Ecuación (16) está comprendida entre estas dos funciones (Figura 4).

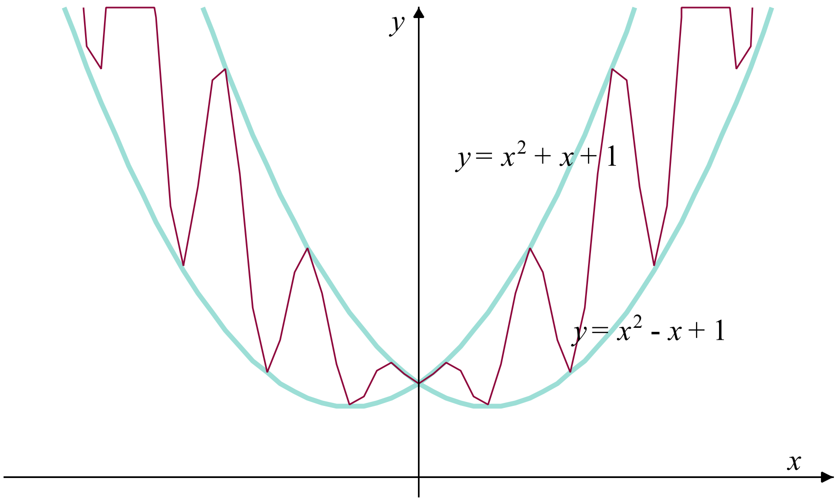


Figura 4: Solución aproximada de la Ecuación (16).

Ejemplo 12. Solución aproximada de ecuaciones

Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}. \tag{17}$$

$f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas para $y > 0$, por tanto según el Teorema 4 la solución tiende hacia cero o hacia el infinito, bien cuando $x \to x_0$ (asíntota en x_0) o, cuando $x \to \infty$.

Podemos comparar la Ecuación (17) con:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

cuya solución es $y = \frac{1}{1-x}$. Como $y^2 + x^2\sqrt{y}$ es siempre mayor que y^2 sabemos que la solución de la Ecuación (17) está por encima de $y = \frac{1}{1-x}$, y por tanto tiene una asíntota antes de $x = 1$.

2.6 Dependencia de datos iniciales y parámetros

Un determinado modelo físico puede estar descrito por una ecuación diferencial que depende de un parámetro empírico a. En la determinación experimental tanto del parámetro a como de las condiciones iniciales existirán inevitablemente errores de medición, por tanto es importante conocer el impacto que estos errores pueden tener sobre nuestra predicción del comportamiento del modelo físico, esto es, si las soluciones de la ecuación diferencial dependen del parámetro y condiciones iniciales de manera continua o si, por el contrario, una pequeña variación de estos dará lugar a soluciones completamente distintas.

La dependencia continua de los datos iniciales y otros parámetros de la solución a un problema de valores iniciales se puede establecer mediante el teorema que definiremos a continuación. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, a) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{18}$$

con a y y_0 dados. Podemos expresar la solución como una función de tres variables $y(x, y_0, a)$, ya que depende del valor inicial y_0 y del parámetro a tanto como de x. Supongamos que $f(x, y, a)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, a)$ son continuas respecto a x, y, a en un entorno de (x_0, y_0, a). El teorema de existencia y unicidad nos asegura entonces que la solución $y(x, y_0, a)$ está definida al menos en un intervalo $I = [x_0, x_0 + d]$. En estas condiciones se cumple el siguiente teorema:

Teorema 6: Dependencia continua de los datos iniciales y otros parámetros

Sean y_0^* y a^*valores alternativos de y_0 y a. Si $|y_0 - y_0^*|$ y $|a - a^*|$ son suficientemente pequeños, entonces $y(x, y_0^*, a^*)$ está definida en el mismo intervalo que $y(x, y_0, a)$, y además cuando $y_0^* \rightarrow y_0$ y $a^* \rightarrow a$ se tiene que $y(x, y_0^*, a^*) \rightarrow y(x, y_0, a)$ para todo x perteneciente al intervalo.

Este teorema asegura que si $f(x, y, a)$ es regular, existe siempre dependencia continua de parámetros y datos iniciales.

Ejemplo 13. Dependencia continua de un parámetro

Estudiar la dependencia en a y y_0 de la ecuación:

$$\begin{cases} y' = ay^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} . \tag{19}$$

La ecuación tiene como solución $y = \frac{y_0}{1 - ay_0 x}$, la cual tiene una singularidad en $x = \frac{1}{ay_0}$. Pequeñas variaciones en a y y_0 no hacen más que trasladar ligeramente la posición de la asíntota (Figura 5), por tanto, en un intervalo en el que las soluciones están definidas éstas dependen de manera continua de los parámetros.

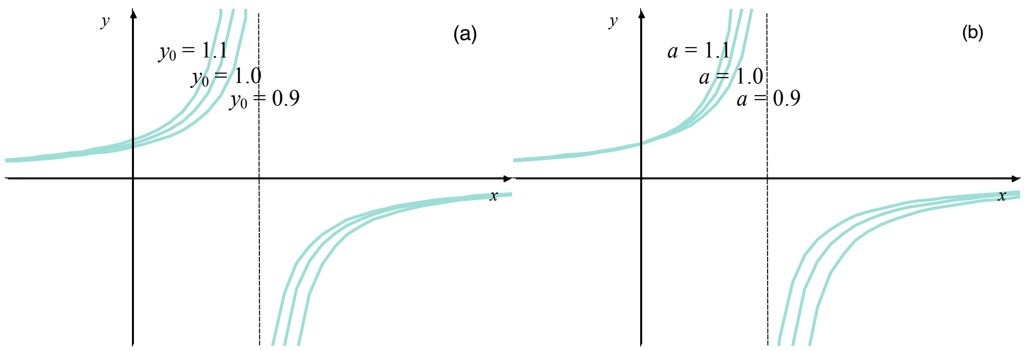


Figura 5: Soluciones de la Ecuación (19) (a) con $a = 1$; (b) con $y_0 = 1$. Elaboración propia.

Ejemplo 14. Dependencia continua de un parámetro

Estudiar la dependencia en a de la ecuación:

$$\begin{cases} y' = \frac{a}{x}y - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

$f(x, y, a) = \frac{a}{x}y - 1$ es continua para todo a en un entorno de $x = 1$, $y = 0$. Por tanto, las soluciones dependen del parámetro a de manera continua. Resolviendo la ecuación obtenemos la solución:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-a}(x^a - x) & \text{para } a \neq 1 \\ -x \ln x & \text{para } a = 1 \end{cases} .$$

Aunque no lo parezca, esta función es continua en $a = 1$, como podemos comprobar calculando el límite cuando $a \to 1$ mediante la regla de l'Hopital:

$$\lim_{a \to 1} \frac{x^a - x}{1 - a} = \lim_{a \to 1} \frac{\frac{d}{da}\left(x^a - x\right)}{\frac{d}{da}(1 - a)} = -x \ln x \, .$$

2.7 Estabilidad de soluciones

En muchos problemas físicos lo que nos interesa es conocer el comportamiento de las soluciones $y(x)$ cuando la variable independiente x tiende a infinito. Por ejemplo, si queremos predecir la evolución de un determinado sistema dinámico en el futuro, necesitamos saber si éste alcanzará un estado de equilibrio, si divergirá en alguno de sus parámetros o si se quedará en algún tipo de estado estable fuera del equilibrio.

La evolución del sistema dependerá de unas condiciones iniciales que normalmente se determinan experimentalmente y por tanto conllevan cierto error. Si queremos hacer predicciones fiables sobre la evolución del sistema a largo plazo, más que una dependencia continua de las condiciones iniciales, debemos exigir que dos soluciones cualesquiera inicialmente próximas *permanezcan* próximas para todo valor de $x > x_0$.

Llamaremos *estables* a aquellas soluciones definidas hasta el infinito para las que, modificando ligeramente los datos iniciales, se obtienen soluciones próximas en todo el intervalo $[x_0, \infty)$.

El mismo problema aparece cuando calculamos la solución de la ecuación mediante un cálculo numérico por ordenador. En cada paso de integración de x_i a $x_i + \Delta x$ se introduce un error de *truncado* o redondeo. Cada uno de estos errores se traduce en un desplazamiento de la función, de $y(x_i)$ a $y(x_i) + \Delta y$. Si la solución es inestable entonces este desplazamiento tiende a aumentar.

Una ecuación en la que hay dependencia continua con las condiciones iniciales puede incluir soluciones inicialmente próximas pero divergentes entre sí, dando lugar a estados completamente distintos al cabo de un tiempo, por lo que las predicciones no tendrían ninguna validez.

Por ejemplo, una pequeña variación en la presión atmosférica puede modificar las probabilidades de lluvia para el día siguiente, pero es imposible saber su efecto sobre el tiempo que hará dentro de tres meses (ver por ejemplo el interesante artículo (Martín León, 2016)).

Ejemplo 15. Estabilidad de soluciones

Analizar la estabilidad de la ecuación:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} .$$

Esta ecuación ya la resolvimos en el Ejemplo 10 y sus soluciones están representadas en la Figura 3. Las soluciones con $y_0 > 0$ son claramente inestables pues ni siquiera están definidas para todo $x > 0$. La solución $y = 0$ también es inestable pues las que parten cerca de ella por arriba divergen hacia el infinito cuando se aproximan a la asíntota. Cualquier solución con $y_0 < 0$ es asintóticamente estable ya que si $|y_0^* - y_0|$ es suficientemente pequeño, la diferencia $|y^*(x) - y(x)| = \left|\frac{y_0^*}{1-y_0^* x} - \frac{y_0}{1-y_0 x}\right|$ tiende a cero cuando x tiende a infinito.

Consideremos el problema de valores iniciales de la Ecuación (13):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad .$$

con $f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ continuas en un entorno de (x_0, y_0). Los teoremas vistos anteriormente nos aseguran que la solución de la Ecuación (13) existe al menos en un entorno de (x_0, y_0), es única, y además depende de manera continua de las condiciones iniciales.

Supongamos ahora que la solución $y(x)$ es única y definida en todo el intervalo $[x_0, \infty)$. Definimos la estabilidad de la siguiente manera:

Definición 1: Estabilidad de soluciones

1. $y(x)$ es *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que, si $y^*(x)$ es otra solución tal que $\left|y^*(0) - y(0)\right| < \delta$, se cumple que $\left|y^*(x) - y(x)\right| < \varepsilon$ para todo $x > 0$.

   Esto es, si $y(x)$ es estable, entonces una solución aproximada $y^*(x)$ se mantiene próxima a $y(x)$ cuando ε es suficientemente pequeña.

2. $y(x)$ es *asintóticamente estable* si es estable y $\lim_{x\to\infty} \left|y^*(x) - y(x)\right| = 0$.

   En otras palabras, la solución aproximada $y^*(x)$ se va acercando cada vez más a $y(x)$.

3. $y(x)$ es *inestable* si no es estable.

   En este caso hay soluciones $y^*(x)$ con ε arbitrariamente pequeña que se separan de $y(x)$.

En las ecuaciones diferenciales de primer orden que estamos considerando, la condición $\lim_{x\to\infty} \left|y^*(x) - y(x)\right| = 0$ implica necesariamente que $y(x)$ es estable, sin embargo esto no es cierto por lo general para sistemas y ecuaciones de mayor orden.

La estabilidad de una solución se puede determinar fácilmente si sabemos resolver la ecuación, sin embargo, esto no es posible la mayoría de las veces. En casos muy particulares, como el de las ecuaciones autónomas y las ecuaciones lineales, es posible obtener información sobre la estabilidad de las soluciones estudiando la propia ecuación sin necesidad de resolverla.

Estabilidad en ecuaciones autónomas

Sea la ecuación autónoma $y' = f(y)$ con $\frac{df}{dy}$ continua en $\mathbb{R}$, y consideremos la solución de equilibrio $y(x) = a$, con a constante. Entonces:

Teorema 7: Estabilidad de las soluciones de ecuaciones autónomas

- Si $f'(a) < 0$, entonces $y(x) = a$ es asintóticamente estable.
- Si $f'(a) > 0$, entonces $y(x) = a$ es inestable.

Si $\frac{df}{dy}$ tiene pendiente negativa en a, las funciones $y(x)$ pasan de tener pendiente positiva por debajo del valor constante $y(x) = a$, a tener pendiente negativa por encima de este. O sea, las soluciones $y(x)$ a ambos lados de a tienden a acercarse a la solución de equilibrio, por lo que es asintóticamente estable.

Si $\frac{df}{dy}$ tiene pendiente positiva en a, las funciones $y(x)$ pasan de tener pendiente negativa por debajo del valor constante $y(x) = a$, a tener pendiente positiva por encima de este. Las soluciones $y(x)$ a ambos lados de a tienden a alejarse de la solución de equilibrio, por tanto esta es inestable.

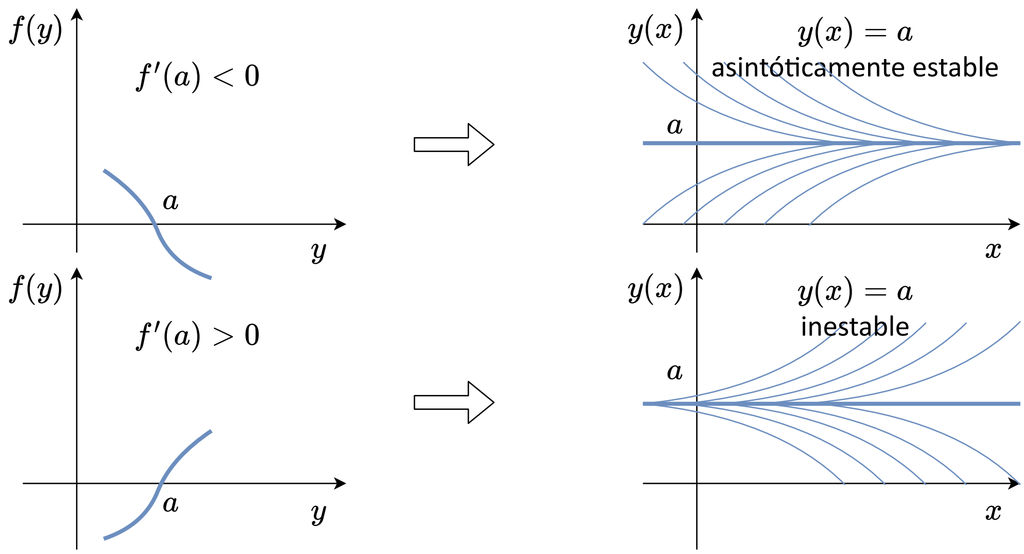


Figura 6: Ilustración del Teorema 7 sobre la estabilidad de las soluciones de ecuaciones autónomas. Elaboración propia.

Ejemplo 16. Estabilidad de ecuaciones autónomas

Estudiar la estabilidad de la ecuación autónoma:

$$y' = y(b - y) \quad \text{con } b > 0\,. \tag{20}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones de equilibrio: $y = 0$ y $y = b$.

$$\frac{d}{dy}\left(y(b-y)\right) = b - 2y = \begin{cases} b \quad (> 0) & \text{para } y = 0 \\ -b \quad (< 0) & \text{para } y = b \end{cases}.$$

Por tanto, la solución $y = 0$ es inestable, mientras que la solución $y = b$ es estable (Figura 7).

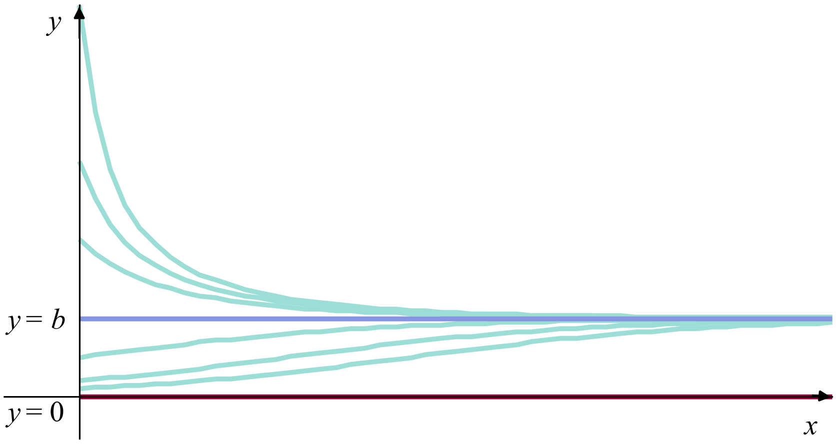


Figura 7: Soluciones de la Ecuación (20). Elaboración propia.

Ecuaciones lineales

Consideremos la ecuación lineal:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{21}$$

con $a(x)$ y $f(x)$ continuas en $[x_0, \infty)$. Recordemos que una solución particular venía dada por la Ecuación (7):

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \int_{x_0}^{x} f(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(u)du} ds\,.$$

Por tanto la diferencia entre dos soluciones cualesquiera es:

$$\left|y(x) - y^*(x)\right| = \left|y_0 - y_0^*\right| e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\,,$$

y podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 8: Estabilidad de las soluciones de ecuaciones lineales

La solución de la Ecuación (21) es estable si y solo si $e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ está acotada, y es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Como vemos, la estabilidad de las soluciones de la ecuación lineal solo depende de

$e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$, y no de las condiciones iniciales, por lo que todas las soluciones de la ecuación lineal tienen la misma estabilidad: o son todas estables, o todas asintóticamente estables, o todas inestables. Por este motivo, en el caso de ecuaciones lineales podemos hablar de la estabilidad de la propia ecuación.

Como la estabilidad tampoco depende del término no-homogéneo $f(x)$, podemos enunciar además el siguiente teorema:

Teorema 9: Condición de estabilidad de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es estable (asintóticamente estable) si y solo si lo es la solución $y = 0$ de la homogénea.

Ejemplo 17. Estabilidad de ecuaciones lineales

Estudiar la estabilidad de la ecuación lineal:

$$y' = axy + \tan^2(\ln x) \, .$$

La exponencial $e^{a\int_{x_0}^{x} s\,ds} = e^{\frac{a}{2}(x^2 - x_0^2)}$ tiende a cero cuando $a < 0$, simplemente está acotada cuando $a = 0$, y tiende a infinito cuando $a > 0$, por tanto la ecuación es asintóticamente estable para $a < 0$, simplemente estable para $a = 0$, e inestable para $a > 0$.

Accede al vídeo: Demostración de Symbolab.

2.8 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Hallar las soluciones particulares de los siguientes problemas de valores iniciales:

- $\begin{cases} y' = 1 + \cos^2(y - x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x^2 y' = 2xy - y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$.
- $\begin{cases} xy' = 2y + x \\ y(1) = 2 \end{cases}$.
- $\begin{cases} 3y' + y = (1 - 2x)y^4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

Ejercicio 2. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de:

- $y' = \frac{y-x}{y+x}$.
- $y' = -\frac{2y}{x} + 4x$.
- $y' = y \ln |x|$.

Ejercicio 3. Sea $y' = y^{\frac{2}{3}} - y$. Averiguar si existe una única solución que satisfaga $y(0) = 0$ y si es estable la solución que verifica $y(0) = 1$.

Ejercicio 4. Estudiar la estabilidad de las solución que satisface $y(1) = a$, según los valores de a, para las ecuaciones:

- $y' = \sin y$.
- $y' = -y^3 - y\cos^2 x$.
- $y' = \frac{y-y^2}{x}$.

Ejercicio 5. Supongamos que tenemos un gramo de una substancia radiactiva que se desintegra a un ritmo proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año solo queda un cuarto de gramo, ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gramos? Calcular que tiempo que tarda la substancia en desintegrarse totalmente. *Solución:* 0.1 gramos a los $1,056$ años, y 0 gramos a $1,067$ años.

Ejercicio 6. Una reacción química se produce por la interacción de una molécula de una substancia A con otra de una substancia B para dar una molécula nueva X: $A + B \to X$. Sea $x(t)$ la concentración de X en el tiempo t, y sean a y b las concentraciones iniciales de A y B respectivamente. Suponiendo que la variación de $x(t)$ es proporcional al producto de las concentraciones de A y B, y que $x(0) = 0$, hallar la expresión de $x(t)$.

2.9 Referencias bibliográficas

Martín León, F. (2016). ¿hasta cuántos días de antelación se puede predecir el tiempo?

Shur, M. (2021). w. *Journal of healthcare informatics research*, 5(2), 168–180.

Tabassum, S., Rosli, N. B., & Mazalan, M. S. A. B. (2019). Mathematical modeling of cancer growth process: A review. *Journal of Physics: Conference Series*, 1366(1), 012018.

Vaghi, C., Rodallec, A., Fanciullino, R., Ciccolini, J., Mochel, J. P., Mastri, M., Poignard, C., Ebos, J. M., & Benzekry, S. (2020). Population modeling of tumor growth curves and the reduced gompertz model improve prediction of the age of experimental tumors. *PLoS computational biology*, 16(2), e1007178.