Teoría de campos

Sistemas de partículas

Índice

Esquema

Momento lineal de un sistema de partículas

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

Segunda ley de Newton para un sistema

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momentos angulares orbital e interno

$$\vec{J} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{v}\,'_i$$

Centro de masas

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Momento del centro de masas

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_i \vec{p}_i$$

Momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas

$$\vec{N}_{CM} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Masa reducida

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Movimiento del centro de masas

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{V}\right)$$

Principio de conservación del momento lineal

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2$$

Energía cinética de un sistema de partículas

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Sistemas de masa variable: ecuación del cohete

$$F + V\dot{m} = m\dot{v}$$

Tercera ley de Newton

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

Energía y trabajo en un sistema de partículas

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T = T - T_0$$

Momento angular de un sistema de partículas

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Teorema de conservación de la energía en un sistema de partículas

$$W_{nc} = 0 \;\Rightarrow\; E = T + U = \text{cte}$$

Ecuación del movimiento

$$N_{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Conservación del momento angular

$$\vec{N}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \text{cte}$$

Energía propia y energía interna de un sistema de partículas

Principios y postulados de conservación

3.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiaremos los sistemas de partículas, idealizadas como masas puntuales, con una interacción que, supondremos, obedece la ley de acción y reacción. Para estos sistemas examinaremos las variables colectivas que mejor los describen dinámicamente, tal como son el momento lineal, el momento angular y la energía cinética. Deduciremos los teoremas de conservación de estas magnitudes, considerando también fuerzas conservativas que derivan de una energía potencial. Estos teoremas de conservación son de tal importancia que han sido elevados a la categoría de principios de conservación.

Los objetivos de este tema son:

- Conocer la definición de **sistema de partículas**.
- Comprender el concepto de momento lineal de un sistema de partículas así como el teorema de conservación para un sistema aislado.
- Conocer el concepto de **centro de masas** y saber que su momento coincide con el momento lineal de un sistema de partículas.
- Saber deducir la **ley de acción y reacción** a partir del principio de conservación del momento lineal.
- Comprender la aplicación de la ley de Newton a **sistemas de masa variable** y saber deducir la fórmula del **cohete**.
- Comprender el concepto de **momento angular** de un sistema de partículas.
- Saber descomponer el momento angular de un sistema de partículas en el **momento angular del centro de masas** y el **momento angular interno**.

- Conocer el concepto de **masa reducida** y saber aplicarlo al **problema de los dos cuerpos**.
- Saber descomponer la energía cinética de un sistema de partículas en **energía cinética del centro de masas** y **energía cinética interna**.
- Conocer la relación entre el **trabajo**, tanto de las fuerzas exteriores como interiores, y la variación de **energía cinética** del sistema.
- Comprender el teorema de **conservación de la energía mecánica** para fuerzas conservativas, de las que se puede derivar una energía potencial.
- Conocer los conceptos de **energía propia** y **energía interna** de un sistema de partículas.
- Entender el alcance de los **principios de conservación** del momento lineal, del momento angular y de la energía cinética.

3.2 Sistema de partículas

Una vez han sido estudiadas las leyes de Newton para un cuerpo, o idealmente, para un punto material, procederemos a aplicarlas a sistemas de partículas. Definimos un sistema de partículas como un conjunto de puntos materiales, en interacción entre sí, y separados del resto de universo por una pared real o imaginaria. Aplicando las leyes de Newton a cada una de las partículas, deduciremos las correspondientes leyes para el sistema, y en particular, obtendremos las leyes de conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía mecánica. Estas leyes de conservación, que serán deducidas como teoremas, han sido elevadas a la categoría de principios. Y cuando se han aplicado a otros campos de la Física, por su importancia teórica y por su fertilidad empírica, han adquirido la categoría de postulados.

Puesto que vamos a aplicar todo el andamiaje de las leyes de Newton al estudio de los sistemas de partículas, conviene repasar sus aciertos y sus debilidades. Para ello pueden consultarse (Hernández & De Melo, 2005) y (Sebastiá, 2013).

3.3 Momento lineal de un sistema de partículas

Supongamos un sistema constituido por n puntos materiales, cuyas posiciones respecto de un sistema de referencia con origen en O son: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ y cuyas masas son $m_1,\ m_2, ..., m_n$. Supongamos que el sistema está sujeto a fuerzas. Estas fuerzas pueden ser de dos naturalezas:

- **Fuerzas externas**, las ejercidas por partes externas al sistema sobre sus partículas.
- **Fuerzas internas**, las que se ejercen las partículas del sistema entre sí, en virtud de la interacción entre ellas.

Para la partícula i denotaremos la resultante de las fuerzas externas ejercidas sobre ella como $\vec{F}_i$ y denotaremos la fuerza interna ejercida por la partícula j sobre la partícula i por el vector $\vec{f}_{ij}$. Por descontado, la resultante de todas las fuerzas internas ejercidas sobre la partícula i será la suma:

$$\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\,, \tag{1}$$

donde hemos descartado la fuerza debida a una posible *autointeracción* $\vec{f}_{ii}$. Seguidamente, planteamos para la partícula i la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{2}$$

donde $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$ es el momento lineal de la partícula i.

A continuación plantearíamos ecuaciones análogas para cada una de las n partículas constitutivas del sistema. El objetivo sería entonces integrar todas esas ecuaciones para resolver por completo el sistema dinámico. Sin embargo, la resolución de todas esas ecuaciones plantea dos problemas:

- Que el sistema puede estar constituido por un número inmenso de partículas, tal como sería el caso si tratáramos con una muestra macroscópica de un gas, compuesto de moléculas. El número de partículas sería entonces del orden del número de Avogadro.

- Que, aun conocida la ley de la fuerzas internas, esta será en general de difícil descripción.

Para soslayar estas dificultades se procede a estudiar el sistema de partículas como un todo. Para ello vamos a sumar, sobre todas las partículas, la Ecuación (2):

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) . \tag{3}$$

Este tratamiento tiene la virtud de que, si se supone que las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton, la ley de acción y reacción, entonces $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ y la doble suma de las fuerzas internas se anula, pues las fuerzas internas se cancelan en parejas. En efecto, matemáticamente el argumento es:

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_j \sum_i \vec{f}_{ji} = \sum_i \sum_j \left(-\vec{f}_{ij}\right) \Rightarrow \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0 , \tag{4}$$

donde hemos usado el hecho de que los índices de los sumatorios son mudos, por lo que los hemos intercambiado. Seguidamente hemos aplicado la ley de acción y reacción. Finalmente, hemos usado que una cantidad que es igual a su opuesta ha de ser necesariamente nula.

Como inciso, hay que destacar que basta con emplear lo que se conoce como ley de acción y reacción débil, es decir, que basta con exigir que las fuerzas emparejadas sean iguales y opuestas, aunque no necesariamente estén sobre la misma recta.

Así, la Ecuación (3) queda:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} , \tag{5}$$

donde $\vec{F}$ es la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema y $\vec{p}$ es la suma de los momentos lineales de todas las partículas del sistema, lo que se conoce como *momento lineal del sistema*.

Definición 1: Momento lineal del sistema

Se llama momento lineal del sistema $\vec{p}$ a la suma vectorial de los momentos lineales de todas las partículas del sistema:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \,. \tag{6}$$

Así pues, tenemos que la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a la derivada temporal del momento lineal del sistema, siempre que las fuerzas internas obedezcan el principio de acción y reacción, en su forma débil al menos.

Como consecuencia tendremos que si la resultante de las fuerzas exteriores es cero $\vec{F} = 0$, el momento lineal del sistema se conserva $\vec{p} =$ cte. Es decir, que, debido a las interacciones internas, los momentos lineales de las partículas pueden variar con el tiempo, pero variarán de forma tal que la suma de todos ellos será una constante.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el momento lineal en los sistemas de partículas:

Accede al vídeo: Momento lineal de un sistema de partículas.

En este punto es conveniente introducir el concepto de *centro de masas* (CM).

3.4 Centro de masas

El centro de masas (a veces, también llamado centro de gravedad) es un punto del sistema conveniente que se define como:

Definición 2: Centro de masas

Se define el centro de masas de un sistema (CM) tal que su posición $\vec{R}$ es el promedio de las posiciones de las partículas del sistema, pesadas por sus masas respectivas. Esto es:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}\,, \tag{7}$$

donde M es la masa total del sistema. Si la distribución de masa es continua, entonces los sumatorios se convierten en integrales:

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}\,, \tag{8}$$

entendiendo que la integral se extiende a toda la distribución de masa.

Su conveniencia se manifiesta en que, si calculamos el momento del CM:

$$M\dot{\vec{R}} = M\vec{V} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i\,, \tag{9}$$

donde $\vec{V}$ es la velocidad del CM, tenemos el resultado de que el momento lineal del CM coincide con el momento lineal del sistema de partículas. Es decir, que dinámicamente el sistema de partículas se comporta como si toda su masa estuviera concentrada en un punto, el CM. La Ecuación (5) queda entonces:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{V}\right)\,, \tag{10}$$

que constituye la segunda ley de Newton para el CM. Y que significa que todo sucede como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en el CM, moviéndose este con un momento que es igual al momento lineal del sistema y como si la resultante de todas las fuerzas exteriores estuviera aplicada en el CM. Obsérvese, además, que las fuerzas interiores no afectan al movimiento del CM.

Si el sistema está aislado, es decir, si la resultante de las fuerzas exteriores es cero, entonces el CM se mueve con velocidad constante (es decir, con movimiento rectilíneo y uniforme), aunque las partículas puedan ir variando sus velocidades como consecuencia de la interacción por las fuerzas internas. En efecto, si $\vec{F} = 0$ entonces $\vec{V} = \text{cte}$, puesto que la masa total es un invariante, ya que estamos considerando un sistema cerrado, que no intercambia materia con los alrededores. Esto constituye la generalización de la primera ley de Newton a los sistemas de partículas. Ahora vamos a demostrar que en el sistema de referencia del CM (es decir, para un observador que se esté moviendo solidariamente con el CM) la suma de momentos del sistema es cero.

Teorema 1: La suma de momentos en el sistema CM es cero

Si llamamos $\vec{r}_i'$ a la posición de la partícula i referida al sistema CM, tendremos:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \, . \tag{11}$$

Si derivamos esta última ecuación respecto del tiempo resultará para las velocidades:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i' \, . \tag{12}$$

La suma de momentos $\vec{p}_i'$ en el sistema CM será:

$$\sum_i \vec{p}_i' = \sum_i m\vec{v}_i' = \sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{V} = \sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M} = 0 \, , \tag{13}$$

donde en el penúltimo paso hemos empleado la derivada de la Ecuación (7).

3.5 Conservación del momento lineal

En los apartados anteriores hemos deducido la conservación del momento lineal de un sistema de partículas como un teorema, suponiendo que las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton, la ley de acción y reacción. Vamos a proceder ahora en sentido inverso. Lo que se hace es elevar la conservación del momento lineal a la categoría de principio o postulado, dándole más importancia que a las propias leyes de Newton. De este principio deduciremos la ley de acción y reacción. En efecto, supongamos dos partículas de momentos iniciales $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ que interactúan y que tras la interacción poseen momentos $\vec{p}_1'$ y $\vec{p}_2'$. Por el principio de conservación del momento tendremos:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \,, \tag{14}$$

de donde:

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_1' = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \,, \tag{15}$$

es decir:

$$-\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2 \,. \tag{16}$$

Dividiendo ahora entre el tiempo que ha durado la interacción Δt:

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \,. \tag{17}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ obtenemos:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \,,$$

con lo que obtenemos la tercera ley de Newton, tal como anunciábamos.

3.6 Sistemas de masa variable (cohetes)

Hasta ahora hemos considerado sistemas cerrados, es decir, que no intercambian materia con los alrededores. Examinemos qué ocurre si disponemos de un sistema de masa variable. Supongamos que tenemos un cohete que se propulsa por la eyección de gases. La segunda ley de Newton para el cohete será la derivada respecto del tiempo del momento del cohete p_c:

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v} + v\dot{m} \,, \tag{18}$$

donde, como vemos, aparece un términos adicional debido a la variación de la masa. Suponemos que los gases son eyectados con una velocidad relativa al cohete V, por tanto, respecto a un sistema de referencia inercial, su velocidad será $V + v$, es decir, la velocidad relativa al cohete más la velocidad del cohete. La variación del momento de los gases eyectados p_g será:

$$\frac{dp_g}{dt} = -(V + v)\,\dot{m}\,. \tag{19}$$

Por tanto, la fuerza total será la derivada de la suma del momento del cohete y el momento de los gases eyectados:

$$F = \frac{d}{dt}\left(p_c + p_g\right) = m\dot{v} + v\dot{m} - (V + v)\,\dot{m} = m\dot{v} - V\dot{m}\,, \tag{20}$$

con lo que resulta:

$$F + V\dot{m} = m\dot{v}\,. \tag{21}$$

Comprobamos que junto a las fuerzas debidas a otras causas (como la fuerza de la gravedad o la resistencia del aire) aparece una fuerza que es debida a la eyección de los gases. Si el cohete se mueve fuera del campo gravitatorio terrestre, en el vacío, podremos integrar la ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = V\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; dv = V\frac{dm}{m}\,, \tag{22}$$

$$\int dv = V\int \frac{dm}{m}\,, \tag{23}$$

$$v = v_0 - V\ln\frac{m_0}{m}\,, \tag{24}$$

Si el cohete está constituido por una carga útil de masa M_0 y una carga de combustible M, la masa inicial será la suma $m_0 = M_0 + M$, y el cohete alcanzará una velocidad máxima en el momento en que haya agotado todo el combustible, es decir, cuando la masa sea $m = M_0$, que será:

$$v_{\text{máx}} = v_0 - V\ln\left(1 + \frac{M}{M_0}\right)\,. \tag{25}$$

Puesto que v_0 y la velocidad de eyección V son opuestas, será necesario que la carga de combustible sea muy superior a la carga útil $M \gg M_0$ para que el cohete alcance una velocidad superior a la de eyección de los gases.

Para una resolución de la ecuación del cohete considerando la fuerza de la gravedad y una fuerza de resistencia del aire proporcional a la velocidad, puede consultarse (Kraff et al., 2015).

3.7 Momento angular de un sistema

Al igual que hicimos con el momento lineal de un sistema de partículas definimos el momento angular de un sistema de partículas como sigue.

Definición 3: Momento angular de un sistema de partículas

Se define el momento angular de un sistema de partículas respecto a un punto O, con posiciones $\vec{r}_i$ y momentos lineales $\vec{p}_i$, como la suma vectorial de los momentos angulares de todas las partículas:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \,. \tag{26}$$

Examinaremos ahora la ecuación del movimiento para el momento angular, que enunciamos como teorema:

Teorema 2: Ecuación del movimiento del momento angular

La variación temporal del momento angular de un sistema de partículas, respecto de un punto O, es igual al momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, respecto al mismo punto O, sin que influyan las fuerzas internas, siempre que estas obedezcan al principio de acción y reacción o tercera ley de Newton en su versión fuerte (que dice que las fuerzas son iguales y opuestas y están dirigidas a lo largo de la línea que une las partículas que interactúan). Matemáticamente se expresa como:

$$N_{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} \,. \tag{27}$$

Para demostrar este teorema derivamos la Ecuación (26):

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i\,. \tag{28}$$

El primer término es nulo puesto que:

$$\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i = 0\,. \tag{29}$$

En el segundo término aparece la derivada del momento que es igual a la suma de la resultante de las fuerzas exteriores y la suma de las fuerzas interiores, la Ecuación (2), por lo que la variación del momento angular quedará:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}\,. \tag{30}$$

Ahora bien, para evaluar el segundo término, consideremos que las fuerzas internas están emparejadas. Si tomamos dos de ellas tendremos:

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \vec{f}_{ij}\,, \tag{31}$$

donde en el último paso hemos usado el hecho de que las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton y por tanto son iguales y opuestas. Ahora, el vector $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ es el vector que une las partículas i y j. Por tanto, si las fuerzas, iguales y opuestas, están además dirigidas en la dirección que une las partículas que interactúan, entonces todas las sumas del tipo de la Ecuación (31) serán cero.

Con ello hemos demostrado que las fuerzas internas, en las susodichas condiciones, no contribuyen a la variación temporal del momento angular del sistema, resultando:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}_{\text{ext}}\,, \tag{32}$$

tal como queríamos demostrar. De aquí se deduce un teorema importante: el teorema de conservación del momento angular:

Teorema 3: Conservación del momento angular del sistema

Si el momento total de las fuerzas exteriores es nulo entonces el momento angular del sistema de partículas se conserva.

En efecto, si $\vec{N}_{\text{ext}} = 0$ entonces $d\vec{J}/dt = 0$, lo que implica $\vec{J} = \text{cte}$.

Al igual que sucedía con el momento lineal del sistema, los momentos angulares de las partículas pueden variar, pero variarán de tal forma que el momento angular del sistema permanezca constante.

3.8 Momentos angulares orbital e interno

Vamos a demostrar que con el sistema de referencia del centro de masas el momento angular de un sistema de partículas respecto de un punto O se descompone en dos partes: Una primera, que es el momento angular que tendría una partícula, cuya masa fuera la masa total del sistema concentrada en el CM, respecto del punto O, con la velocidad del CM, que es el promedio de las velocidades de las partículas, pesadas por las masas, y que se denomina *momento angular orbital*; y una segunda, que es la suma de los momentos angulares de las partículas del sistema respecto del CM, y que se denomina *momento angular interno o espín*.

Teorema 4: Momento angular de un sistema de partículas

Si consideramos el sistema de referencia del CM, entonces el momento angular del sistema de partículas respecto de un punto O se descompone en dos partes:

$$\vec{J} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \,, \tag{33}$$

donde $\vec{R}$ y $\vec{V}$ son la posición y la velocidad del CM y $\vec{r}_i'$ y $\vec{v}_i'$ son las posiciones y las velocidades de las partículas respecto del CM.

En efecto, puesto que la posición de la partícula i respecto al punto O se puede descomponer como $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$, es decir, suma de la posición del CM respecto de O más la posición de la partícula respecto del CM, e igualmente la velocidad $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$, tenemos entonces:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}'_i\right) \times m_i \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right) . \tag{34}$$

Mediante la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos los términos:

$$\vec{J} = \vec{R} \times \sum_i m_i \vec{V} + \vec{R} \times \sum_i m_i \vec{v}'_i + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i . \tag{35}$$

Los términos segundo y tercero del segundo miembro son idénticamente nulos, por la definición de CM:

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 , \tag{36}$$

por lo que obtenemos el resultado:

$$\vec{J} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \vec{L} + \vec{S} , \tag{37}$$

tal como queríamos demostrar. Hemos llamado $\vec{L}$ al momento angular orbital y $\vec{S}$ al momento angular interno o espín (*spin*, en inglés).

Hay dos casos en los que el momento angular interno o espín es cero:

- Cuando $\vec{r}'_i$ y $\vec{v}'_i$ son vectores paralelos. Tal es el caso cuando el movimiento de las partículas es de alejamiento o acercamiento al centro de masas, radialmente.
- Cuando $\vec{v}'_i = 0$, es decir, cuando $\vec{v}_i = \vec{V}$, que es el caso cuando todas las partículas se mueven solidariamente con el centro de masas, esto es, cuando solamente hay un movimiento de traslación puro, sin giro.

Por el contrario, si el único movimiento de que está dotado el sistema es de giro en torno a un eje que pasa por el CM, entonces $\vec{V} = 0$ y el momento angular del sistema es igual a su momento angular interno.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el momento angular orbital:

Accede al vídeo: Momento angular orbital y momento angular interno.

3.9 Momento de fuerzas exterior respecto al CM

Vamos a demostrar que el momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas es igual a la variación temporal del momento angular interno.

Teorema 5: Momento respecto al centro de masas

El momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas $\vec{N}_{\text{CM}}$ es igual a la variación temporal del momento angular interno $\vec{S}$:

$$\vec{N}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{S}}{dt} . \tag{38}$$

Calculamos el momento de las fuerzas exteriores descomponiendo la posición en suma de la posición del CM más la posición respecto al CM:

$$\vec{N}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i'\right) \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{N}_{CM} . \tag{39}$$

Recurrimos ahora a la Ecuación (32) y a la Ecuación (37):

$$\vec{N}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L} + \vec{S}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times M\vec{V}\right) + \frac{d\vec{S}}{dt} =$$

$$= \dot{\vec{R}} \times M\vec{V} + \vec{R} \times \frac{d(M\vec{V})}{dt} + \frac{d\vec{S}}{dt} . \tag{40}$$

El término $\dot{\vec{R}} \times M\vec{V} = \vec{V} \times M\vec{V} = 0$ por ser el producto vectorial de vectores paralelos. El siguiente término, por la Ecuación (10), es igual a $\vec{R} \times \vec{F}$. Empleando la Ecuación (39) resulta:

$$\vec{R} \times \vec{F} + \vec{N}_{\text{CM}} = \vec{R} \times \vec{F} + \frac{d\vec{S}}{dt} , \tag{41}$$

y simplificando:

$$\vec{N}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{S}}{dt}\,, \tag{42}$$

tal como queríamos demostrar.

3.10 Masa reducida

Se llama *problema de los dos cuerpos* a un sistema formado por dos cuerpos que interactúan entre sí, no sometidos a fuerzas exteriores. En tal caso, las ecuaciones de movimiento para ambos cuerpos son:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}\,, \tag{43}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21}\,. \tag{44}$$

Si calculamos ahora la aceleración relativa resulta:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}\,, \tag{45}$$

donde en el último paso hemos usado la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Ahora la ecuación resulta en:

$$\vec{F}_{12} = \mu\vec{a}_r\,, \tag{46}$$

donde μ es la *masa reducida* del sistema de dos cuerpos y es igual a:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{47}$$

Calculemos ahora las posiciones de las partículas respecto al centro de masas:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)\vec{r}_1 - \left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}\,, \tag{48}$$

donde hemos llamado $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ a la posición relativa de ambas partículas.

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{(m_1 + m_2)\,\vec{r}_2 - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\,. \tag{49}$$

Podemos observar que las posiciones relativas al centro de masas son directamente proporcionales a la masa de la otra partícula, de manera que si la masa de 2 $m_2 \gg m_1$ es mucho mayor que la masa de 1, entonces la partícula 2 estará más cerca del centro de masas que la 1. Calculemos ahora los momentos lineales de ambas partículas respecto al centro de masas:

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} = \mu\vec{v}\,, \tag{50}$$

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} = -\mu\vec{v}\,. \tag{51}$$

Si consideramos otra vez el caso de una partícula mucho más masiva que la otra $m_2 \gg m_1$, la partícula masiva se moverá, respecto al centro de masas, a una velocidad menor, pero al multiplicar por su masa se obtiene el mismo momento que para la partícula ligera y que es igual al producto de la masa reducida por la velocidad relativa. Como ya habíamos visto, la suma de momentos respecto al centro de masas es cero:

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \mu\vec{v} + (-\mu\vec{v}) = 0\,. \tag{52}$$

Hallemos ahora el momento angular interno del sistema. Calculemos primero los momentos angulares de cada una de las partículas:

$$\vec{S}_1 = \vec{r}_1' \times \vec{p}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_1}\vec{r} \times \mu\vec{v}\,, \tag{53}$$

$$\vec{S}_2 = \vec{r}_2' \times \vec{p}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_1}\vec{r} \times (-\mu\vec{v})\,. \tag{54}$$

Si los sumamos obtenemos el momento angular interno del sistema:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_1} + \frac{m_1}{m_1 + m_1}\right)\vec{r} \times \mu\vec{v} = \vec{r} \times \mu\vec{v}\,, \tag{55}$$

con lo que vemos que el momento angular del sistema es el de una partícula cuya masa es la masa reducida del sistema y cuya posición y velocidad son la posición y la velocidad relativas, respectivamente. Con todo ello hemos demostrado que un sistema de dos cuerpos en interacción mutua, sin fuerzas exteriores, puede ser reducido al sistema de un solo cuerpo cuya masa es la masa reducida y cuyas coordenadas son las coordenadas relativas.

3.11 Energía cinética

De nuevo consideramos el sistema de referencia del CM, pues tiene la ventaja de que permite descomponer también la energía cinética en dos términos.

Teorema 6: Energía cinética de un sistema de partículas

La energía cinética de un sistema de partículas se puede descomponer en dos términos: la energía cinética del centro de masas (que sería la energía cinética de una partícula cuya masa fuera la masa total del sistema, situada en el CM del sistema, moviéndose a su velocidad) y la suma de las energías cinéticas de las partículas del sistema respecto al CM:

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 . \tag{56}$$

Para demostrarlo, como de costumbre, descomponemos la velocidad de cada partícula como suma de la velocidad del centro de masas y la velocidad respecto al centro de masas:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i \left(\vec{V} + \vec{v}_i'\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \sum_i m_i \vec{V}\cdot\vec{v}_i' + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 . \tag{57}$$

El término $\sum_i m_i \vec{V}\cdot\vec{v}_i' = \vec{V}\cdot\sum_i m_i\vec{v}_i' = 0$ por la Ecuación (13). Por tanto obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 , \tag{58}$$

tal como queríamos demostrar.

3.12 Energía en un sistema de partículas

Recordemos primero el teorema de las fuerzas vivas para una partícula. La ley de fuerza es $\vec{F} = m\vec{a}$, el trabajo realizado por la fuerza es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, por tanto la relación entre el trabajo y la energía cinética se obtiene integrando:

$$W = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \int_A^B m\vec{v}d\vec{v} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \,. \quad (59)$$

Consideremos ahora un sistema formado por dos partículas. Las ecuaciones de movimiento son:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12}\,, \quad (60)$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21}\,. \quad (61)$$

Multiplicamos ahora por el desplazamiento ambas ecuaciones y las sumamos:

$$m_1\vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2\vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}\,. \quad (62)$$

donde en el último paso hemos empleado la tercera ley de Newton para las fuerzas internas, según la cual $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ y hemos usado que $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12}$. Integrando la Ecuación (62) y aplicando el teorema de las fuerzas vivas, la Ecuación (59) obtenemos:

$$\left(\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2B}^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2A}^2\right) = \int_A^B \left(\vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2\right) + \int_A^B \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12}\,, \quad (63)$$

que nos dice que la diferencia entre la energía cinética final y la inicial es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las interiores. Si llamamos:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_{1B}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2B}^2\,, \quad (64)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1v_{1A}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2A}^2\,, \quad (65)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_A^B \left(\vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2\right)\,, \quad (66)$$

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12}\,, \tag{67}$$

resulta:

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T = T - T_0\,. \tag{68}$$

Este resultado se puede generalizar a un sistema compuesto por cualquier número de partículas, donde:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\,, \tag{69}$$

$$T_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2\,, \tag{70}$$

$$W_{\text{ext}} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i\,, \tag{71}$$

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}\,, \tag{72}$$

cumpliéndose entonces:

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T = T - T_0\,. \tag{73}$$

Se tiene entonces que el trabajo realizado por cualquier tipo de fuerzas, ya sean exteriores o interiores, es igual a la variación de energía cinética del sistema.

Como consecuencia, si el trabajo realizado por las fuerzas exteriores o interiores es cero $W = 0$, la energía cinética permanece constante $T = \text{cte}$.

3.13 Conservación de la energía en un sistema

En el apartado anterior hemos distinguido entre el trabajo realizado por las fuerzas exteriores y el trabajo realizado por las fuerzas interiores. Distinguimos ahora entre el trabajo de las fuerzas conservativas W_c y el de las no conservativas W_{nc}. En estos términos el teorema de las fuerzas vivas se expresará:

$$W = W_{\text{c}} + W_{\text{nc}} = \Delta T \,. \tag{74}$$

El trabajo de las fuerzas conservativas puede derivar de un potencial, puesto que las fuerzas conservativas son iguales a menos el gradiente de la energía potencial $\vec{F}_c = -\nabla U$:

$$W_{\text{c}} = \int_A^B -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\Delta U \,. \tag{75}$$

Por tanto la Ecuación (74) queda:

$$-\Delta U + W_{\text{nc}} = \Delta T \,, \tag{76}$$

que resulta en:

$$W_{\text{nc}} = \Delta(T + U) = \Delta E \,, \tag{77}$$

donde hemos llamado energía mecánica total $E = T + U$ a la suma de la energía cinética y la potencial.

Teorema 7: Conservación de la energía mecánica de un sistema de partículas

Si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es cero, entonces la energía mecánica de un sistema de partículas se conserva.

$$W_{\text{nc}} = 0 \;\Rightarrow\; E = T + U = \text{cte} \,.$$

3.14 Energía propia e interna de un sistema

En toda la argumentación anterior hemos trabajado con la hipótesis de que las fuerzas interiores obedecen la tercera ley de Newton, la ley de acción y reacción. Hemos comprobado que para obtener la ley de conservación del momento lineal del sistema de partículas bastaba con atribuir a esta ley el carácter débil, es decir, que las fuerzas sean iguales y opuestas (aunque no necesariamente tengan que estar en la dirección que une las partículas, supuestas puntuales). Hemos corroborado también que para obtener la ley de conservación del momento angular había que añadir la forma fuerte a esta tercera ley de Newton, de manera que las fuerzas, además de ser iguales y opuestas, han de estar dirigidas según la dirección que une las partículas. Nada hemos dicho sobre si estas fuerzas son o no conservativas.

Supongamos ahora que estas fuerzas interiores son, además, conservativas. Entonces derivan de una energía potencial, que llamaremos *energía potencial interna*. Así la Ecuación (73) quedará:

$$W_{\text{ext}} = \Delta T - W_{\text{int}} = \Delta T + \Delta U_{\text{int}} = \Delta\left(T + U_{\text{int}}\right)\ . \tag{78}$$

A la suma de energía cinética del sistema y su energía potencial interna se la conoce como *energía propia*. Por tanto, la ecuación anterior significa que el trabajo de las fuerzas exteriores es igual a la variación de la energía propia del sistema. Si el trabajo de las fuerzas exteriores es nulo $W_{\text{ext}} = 0$ la energía propia del sistema se conserva.

Por ser las fuerzas internas conservativas, la energía potencial interna depende solamente de las distancias entre las partículas, por lo que es independiente del sistema de referencia desde el que se la mida. No sucede lo mismo con la energía cinética, que al depender de la velocidad depende también del sistema de referencia.

De la Ecuación (58) se puede separar la energía cinética en energía cinética del centro de masas y energía cinética de las partículas del sistema respecto del centro de masas, que llamaremos *energía cinética interna*, de manera que la energía propia del sistema será:

$$\frac{1}{2}MV^2 + T_{\text{int}} + U_{\text{int}}\,, \tag{79}$$

donde hemos llamado T_{int} a la energía cinética interna. A la suma de la energía cinética interna y la energía potencial interna se la conoce como *energía interna* del sistema. En un sistema aislado, en el que la velocidad del CM es constante, la energía interna del sistema se conserva.

Para un análisis detallado, empleando el primer principio de la Termodinámica, de los posibles efectos del trabajo de las fuerzas internas en la distribución de la energía interna del sistema, puede consultarse (Güémez & Fiolhais, 2016).

3.15 Principios y postulados de conservación

Como decíamos al principio, de las leyes de Newton, aplicándolas a los sistemas de partículas, hemos deducido, como teoremas, la conservación del momento lineal, el momento angular y la energía cinética. Por su importancia, estos teoremas han sido elevados a la categoría de principios físicos y se consideran más fundamentales que las propias leyes de Newton.

Cuando estos principios parecen no cumplirse, como es el caso, por ejemplo, de la interacción electromagnética de dos cargas, cuya fuerza de interacción no obedece la ley de acción y reacción, por depender de la velocidad, la exigencia de que los principios de conservación se cumplan ha llevado a postular que el campo intermediario, el campo electromagnético, es portador, también, de momento lineal, momento angular y energía cinética.

La *fertilidad* de estos principios es tal que ha llevado incluso a la postulación de partículas desconocidas, que después han sido descubiertas experimentalmente. Tal es el caso del neutrino. Y es que en la desintegración β, en la que un neutrón se desintegraba en un protón y un electrón, parecían no cumplirse ni la conservación del momento ni la conservación de la energía. La postulación de que se cumpliera llevó a predecir la existencia de una partícula, de masa 0 o despreciable y carga neutra, que interactuaría muy débilmente con la materia y a la que se denominó, en consecuencia, *neutrino*. Casi veinte años más tarde de que fuera postulada fue detectada experimentalmente.

3.16 Referencias bibliográficas

Güémez, J. & Fiolhais, M. (2016). Trabajo de las fuerzas internas.

Hernández, L. & De Melo, O. (2005). El laberinto de las leyes de Newton. *Revista Cubana de Fisica*, 22(1).

Kraff, A., Vázquez, G., Mijangos, R., & Heredia-Cancino, J. (2015). Obtención y solución a la ecuación de movimiento de un cohete, actuando sobre él las fuerzas externas del campo gravitacional constante y el rozamiento del aire proporcional a la velocidad. *Revista mexicana de física E*, 61(1), 6–10.

Sebastiá, J. S. M. (2013). Las Leyes de Newton de la mecánica: Una revisión histórica y sus implicaciones en los textos de enseñanza.

3.17 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Una escopeta de masa 5.8 kg dispara una bala de 20 g de masa, con una velocidad de 2700 km/h. Calcular la velocidad de retroceso de la escopeta. *Solución*: 2.59 m/s.

Ejercicio 2. Una pelota de tenis de masa 100 g lleva una velocidad de 20 m/s. Tras ser golpeada por una raqueta, se mueve en sentido contrario con una velocidad de 40 m/s. Si la pelota ha estado en contacto con la raqueta 10^{-2} s, calcular el módulo de la fuerza media del golpe. *Solución*: 600 N.

Ejercicio 3. La masa de la Luna es 0.012 veces la masa de la Tierra; la distancia media entre sus centros es 60.3 radios terrestres. Calcular, en función del radio terrestre R_T,la situación del centro de masas del sistema Luna-Tierra. *Solución*: $0.72 \cdot R_T$ (tomando como origen el centro de la Tierra).

Ejercicio 4. Sean tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 6$ kg que se encuentran en un instante determinado en las posiciones $A(1, 2, 3)$ m, $B(2, -1, -4)$ m, $C(0, 3, 1)$ m, respectivamente. Si sobre ellas actúan las fuerzas externas $\vec{F}_1 = (3, -2, 0)$ N, $\vec{F}_2 = (0, 3, 2)$ N y $\vec{F}_3 = (3, -4, 0)$ N, determinar la posición del centro de masas en el instante considerado y la aceleración del centro de masas en dicho instante. *Solución*: $\vec{R}_{\text{CM}} = \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ m, $\vec{a}_{\text{CM}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ m/s^2.

Ejercicio 5. Sea un disco de forma semicircular de radio a. Determinar la posición del centro de masas. Considérese como sistema de coordenadas aquel cuyo origen esté en el centro del semicírculo y cuyo eje X pase por los extremos del semicírculo. *Solución*: $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi} a \vec{j}$.

Ejercicio 6. En un instante dado dos masas de 2 kg y 3 kg tienen, respecto de un observador, las posiciones $\vec{r}_1 = (1, 1, -1)$ m y $\vec{r}_2 = (2, -3, 0)$ m y las velocidades $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ m/s y $\vec{v}_2 = (3, -2, -1)$ m/s. Determinar el momento angular del sistema en ese instante, respecto al centro de masas. *Solución*: $\vec{L}_{\text{CM}} = \left(\frac{66}{5}, \frac{24}{5}, 6\right)$ kgm^2/s.

Ejercicio 7. Un sistema está formado por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 5$ kg, que en un instante determinado tienen las velocidades $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ m/s, $\vec{v}_2 = (0, 3, -1)$ m/s y $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ m/s respecto a un sistema de referencia. Calcular la energía cinética del sistema respecto a dicho sistema de referencia, la energía del centro de masas y la energía del sistema respecto del centro de masas y comprobar que la primera es igual a la suma de las dos últimas. *Solución*: 49/2 J, 197/20 J, 293/20 J.