# Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden $n$ y sistemas de ecuaciones diferenciales

# Índice

# Esquema

Sistemas de $n$ ecuaciones y ecuaciones de orden $n$

- Existencia y unicidad
- Dependencia continua
- Estabilidad

Sistemas *lineales* de $n$ ecuaciones y ecuaciones *lineales* de orden $n$

- Solución formal

Sistemas *lineales* de $n$ ecuaciones con *coeficientes constantes* y ecuaciones *lineales* de orden $n$ con *coeficientes constantes*

- Solución explícita
- Estabilidad

Sistemas *lineales de dos ecuaciones con coeficientes constantes* y ecuaciones *lineales de segundo orden con coeficientes constantes*

- Solución explícita

Ecuaciones de Euler

# Ideas clave

## 3.1 Introducción y objetivos

Anteriormente vimos las pocas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que se pueden resolver de manera exacta. Como era de esperar, la cosa se complica cuando tratamos con sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden mayor que uno. El motivo de estudiar estos dos tipos de ecuaciones a la vez es que una ecuación de orden $n$ se pueden transformar en un sistema de ecuaciones de primer orden, por lo que aquellos se pueden considerar como un caso especial de sistemas.

Como se puede ver en el esquema, este tema está estructurado de forma anidada. Comenzamos dando las definiciones y propiedades más generales de los sistemas de $n$ ecuaciones y ecuaciones de orden $n$, los cuales no se pueden resolver por lo general. Nos limitaremos a enunciar las condiciones en que el problema de valores iniciales tiene solución y es única, así como su estabilidad frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales. El único caso en el que podremos plantear una solución exacta, al menos de manera formal, será en el caso de ecuaciones *lineales*.

Al igual que hacíamos con las ecuaciones lineales de primer orden, buscaremos la solución general de la ecuaciones homogénea y después utilizaremos el método de variación de las constantes para encontrar la solución de la ecuación no-homogénea, que quedará expresada como la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no-homogénea.

Hasta aquí la solución quedará planteada de una manera meramente formal. Solamente será posible calcular soluciones explícitas en el caso de sistemas de ecuaciones *lineales* en las que los coeficientes sean *constantes*. A lo largo de este tema operaremos con matrices, y será conveniente repasar conceptos de álgebra de matrices, y en particular la *forma canónica de Jordan*. La solución de un sistema lineal o ecuación lineal de orden $n$ con coeficientes constantes quedará determinada si sabemos calcular la forma canónica de Jordan de la matriz de los coeficientes, lo cual es fácil en sistemas de baja dimensionalidad y ecuaciones de orden bajo.

Estudiaremos también la estabilidad de las soluciones de sistemas lineales con coeficientes constantes en función de los autovalores de la matriz de coeficientes, y mencionaremos brevemente las *ecuaciones de Euler*, que son un caso excepcional de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes no-constantes que se puede resolver de manera exacta. Los objetivos de este tema son:

- Resolver **sistemas lineales de dos ecuaciones** y **ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes** mediante matrices.
- En sistemas y ecuaciones no resolubles, determinar la **existencia y unicidad de soluciones**, así como su estabilidad frente a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales.

## 3.2 Definiciones y propiedades

En esta sección vamos a estudiar las definiciones y propiedades generales de los sistemas de ecuaciones y las ecuaciones de orden $n$ que, como veremos, son muy parecidas a las de las ecuaciones de primer orden.

### Sistema de $n$ ecuaciones de primer orden

Consideremos un sistema de $n$ ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = & f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & \vdots \\ y_n' = & f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} . \tag{1}$$

La solución general de este sistema será cualquier conjunto de $n$ funciones $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$, definidas y derivables en un intervalo común $I$, que satisfaga todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Al integrar cada una de las ecuaciones aparece una constante de integración independiente, por lo que la solución general dependerá de $n$ constantes arbitrarias $C_1$, $C_2,\ldots,C_n$. Para determinar una solución particular será necesario pues definir $n$ condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = & y_{10} \\ y_2(x_0) = & y_{20} \\ & \vdots \\ y_n(x_0) = & y_{n0} \end{cases} . \tag{2}$$

Llamaremos problema de valores iniciales al problema de encontrar una solución particular del sistema de la Ecuación (1) que cumpla las condiciones iniciales de la Ecuación (2).

Las expresiones de la Ecuación (1) y la Ecuación (2) se pueden escribir de manera más compacta utilizando la notación vectorial que emplearemos en el resto del tema:

$$\begin{cases} \mathrm{y}' = \mathrm{f}(x, \mathrm{y}) \\ \mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0 \end{cases} , \tag{3}$$

con $\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$. La solución de la Ecuación (3) es entonces una función vectorial $\mathrm{y}(x) : I \to \mathbb{R}^n$.

## Ecuaciones de orden $n$

Consideremos ahora una ecuación diferencial de orden $n$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) . \tag{4}$$

La solución general de la Ecuación (4) es una función $y(x)$, derivable al menos $n$ veces en un intervalo $I$, que al ser sustituida en la ecuación la convierte en una identidad. Al integrar la ecuación $n$ veces aparecerán $n$ constantes de integración arbitrarias $C_1$, $C_2, \ldots, C_n$. Para determinar una solución particular será entonces necesario definir $n$ condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y'_0 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Cualquier ecuación diferencial de orden $n$ se puede transformar en un sistema de $n$ ecuaciones asociando una nueva variable a las sucesivas derivadas de $y$, de modo que la función sin derivar es $y_1$,la primera derivada es $y_2$,y la $(n-1)$-ésima derivada es $y_n$. Este cambio de variables define el siguiente sistema de $n$ ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} y'_1 & = y_2 \\ y'_2 & = y_3 \\ & \vdots \\ y'_n & = f(x, y_1, y_2, ...y_n) \end{cases}.$$

Por tanto, una ecuación de orden $n$ se puede considerar como un caso particular de sistema de ecuaciones. En lo que sigue nos centraremos pues en la resolución de sistemas y sus propiedades. Este artículo (Cooper et al., 2020) contiene una interesante aplicación de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (no lineal) para el modelado de la propagación de enfermedades infecciosas, y en particular Covid-19.

## Existencia y unicidad

Por lo general no es posible resolver analíticamente un sistema de ecuaciones diferenciales. Antes de abordar métodos aproximados de resolución será conveniente averiguar si al menos existe solución y si las condiciones iniciales definen una solución única. Los teoremas de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones, así como los que definen la prolongabilidad y estabilidad de las soluciones, son conceptualmente idénticos a los que enunciamos para las ecuaciones de primer orden.

Si en las ecuaciones de primer orden requeríamos que $f(x, y)$ estuviera definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, en el caso de sistemas de ecuaciones, en los que $\mathrm{y}$ es un vector de $n$ dimensiones, exigiremos que cada función $f_i(x, \mathrm{y})$ con $i = 1 \dots n$ esté definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Un intervalo en $\mathbb{R}^n$ está definido por una *bola* de centro $\mathrm{a}$ y radio $r$:

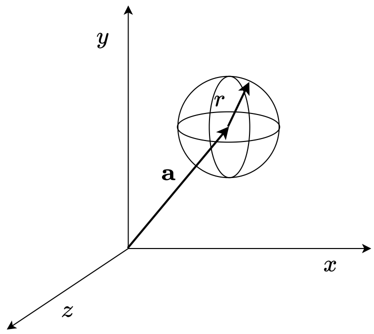

Figura 1: Bola de centro $\mathrm{a}$ y radio $r$. Elaboración propia.

$$B(\mathrm{a}, r) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \, : \, \|\mathrm{y} - \mathrm{a}\| < r\},$$

donde $\|\mathrm{y}\|$ denota la norma euclídea $\|\mathrm{y}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

**Teorema 1**

Si $f_i(x, \mathrm{y})$ y $\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(x, \mathrm{y})$ (con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$) son continuas en un entorno de $(x_0, \mathrm{y}_0)$ definido por $[x_0 - h, x_0 + h] \times B(\mathrm{y}_0, r)$, el problema de la Ecuación (3) posee solución única definida al menos en un intervalo que contiene $x_0$.

Como vimos en el teorema de Peano, si solamente exigimos la continuidad de $f_i(x, \mathrm{y})$ y no la de sus derivadas podemos afirmar que existe solución, pero podría no ser única.

**Teorema 2**

Si $f_i(x, \mathrm{y})$ y $\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(x, \mathrm{y})$ (con $i = 1 \dots n$ y $j = 1 \dots n$) son continuas en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entonces la solución $\mathrm{y}(x)$ del sistema de la Ecuación (3) tiende hacia la frontera de $D$. Si $D = [x_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, o bien existe un $x_1$ tal que $\|\mathrm{y}(x)\| \to \infty$ cuando $x \to x_1$, o bien la solución $\mathrm{y}(x)$ de la Ecuación (3) está definida para todo $x \geq x_0$.

**Ejemplo 1.**

Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= xy_1^{1/3} + \ln y_2 \\ y_2' &= y_1 y_2 - x^3 \end{cases},$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1'(x_0) &= y_{10} \\ y_2'(x_0) &= y_{20} \end{cases},$$

La función $f_1(x, y_1, y_2) = xy_1^{1/3} + \ln y_2$ está definida y es continua para $y_2 > 0$, mientras que $f_2(x, y_1, y_2) = y_1 y_2 - x^3$ es continua en todo $\mathbb{R}^3$. La derivada parcial $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{1}{3}xy_1^{-2/3}$ es discontinua en $y_1 = 0$. Por tanto existen soluciones si el valor inicial $y_{20} > 0$, y además la solución es única si $y_{10} \neq 0$.

## Dependencia continua de los datos iniciales y otros parámetros

Consideremos ahora un problema de valores iniciales con sistema que depende de un conjunto de $n$ parámetros representados por el vector $\mathrm{a}$:

$$\begin{cases} \mathrm{y}' = \mathrm{f}(x, \mathrm{y}, \mathrm{a}) \\ \mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0 \end{cases}, \tag{5}$$

Supongamos que $f_i(x, \mathrm{y}, \mathrm{a})$ y $\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(x, \mathrm{y}, \mathrm{a})$ (con $i = 1 \dots n$ y $j = 1 \dots n$) son continuas respecto a $x, \mathrm{y}, \mathrm{a}$ en un entorno de $(x_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{a})$. El teorema de existencia y unicidad nos asegura entonces que la solución $\mathrm{y}(x, \mathrm{y}_0, \mathrm{a})$ está definida al menos en un intervalo $I = [x_0, x_0 + d]$. En estas condiciones se cumple el siguiente teorema:

**Teorema 3: Existencia y unicidad**

Sean $\mathrm{y}_0^*$ y $\mathrm{a}^*$ valores alternativos de $\mathrm{y}_0$ y $\mathrm{a}$. Si $\|\mathrm{y}_0 - \mathrm{y}_0^*\|$ y $\|\mathrm{a} - \mathrm{a}^*\|$ son suficientemente pequeños, entonces $\mathrm{y}(x, \mathrm{y}_0^*, \mathrm{a}^*)$ está definida en el mismo intervalo que $\mathrm{y}(x, \mathrm{y}_0, \mathrm{a})$, y además cuando $\mathrm{y}_0^* \to \mathrm{y}_0$ y $\mathrm{a}^* \to \mathrm{a}$ se tiene que $\mathrm{y}(x, \mathrm{y}_0^*, \mathrm{a}^*) \to$

$y(x, y_0, a)$ para todo $x$ perteneciente al intervalo.

### Estabilidad

La estabilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones se define de manera similar al caso de ecuaciones de primer orden, sustituyendo los valores absolutos por normas.

**Definición 1: Estabilidad de soluciones de un sistema de ecuaciones**

- $y(x)$ es *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que, si $y^*(x)$ es otra solución tal que $\left\|y^*(0) - y(0)\right\| < \delta$, se cumple que $\left\|y^*(x) - y(x)\right\| < \varepsilon$ para todo $x > 0$. Esto es, si $y(x)$ es estable, entonces una solución aproximada $y^*(x)$ se mantiene próxima a $y(x)$ cuando $\varepsilon$ es suficientemente pequeña.
- $y(x)$ es *asintóticamente estable* si es estable y además $\lim_{x\to\infty} \left\|y^*(x) - y(x)\right\| = 0$. En otras palabras, la solución aproximada $y^*(x)$ se va acercando cada vez más a $y(x)$.
- $y(x)$ es *inestable* si no es estable. En este caso hay soluciones $y^*(x)$ con $\varepsilon$ arbitrariamente pequeña que se separan de $y(x)$.

Al contrario de lo que ocurría en las ecuaciones de primer orden, en un sistema de ecuaciones puede ocurrir que $\lim_{x\to\infty} \left\|y^*(x) - y(x)\right\| = 0$ y sin embargo no sea estable ya que no cumple que $\left\|y^*(x) - y(x)\right\|$ sea menor que $\varepsilon$ para todo $x \geq x_0$.

## 3.3 Sistemas lineales

El único caso en el que podemos abordar la resolución de un sistema de $n$ ecuaciones de manera analítica es cuando las ecuaciones son lineales. Sin embargo, para hallar una solución explícita habrá que exigir además que los coeficientes sean constantes. Comenzaremos estudiando la forma de las soluciones de sistemas lineales generales, lo cual nos proporcionará la pauta para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

## Coeficientes variables y solución formal

Sea el siguiente sistema de $n$ ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1'(x) & = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + f_1(x) \\ y_2'(x) & = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + f_2(x) \\ & \vdots \\ y_n'(x) & = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + f_n(x) \end{cases} . \tag{6}$$

En notación vectorial este sistema se puede escribir como:

$$\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{y}(x) + \mathrm{f}(x)\,, \tag{7}$$

donde:

$$\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

es la matriz de los coeficientes. Suponemos que las funciones $a_{ij}(x)$ así como las $f_i(x)$ son continuas en un intervalo $I$ que contiene a $x_0$, lo que asegura la existencia y unicidad de una solución, definida en todo el intervalo $I$, que satisface las condiciones iniciales $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$. Por ser lineal, la continuidad en todo $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ del lado derecho de la Ecuación (7) y de sus derivadas parciales respecto a $y_i(x)$ $(i = 1 \ldots n)$ es evidente. Comencemos considerando el sistema homogéneo:

$$\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{y}(x)\,. \tag{9}$$

**Teorema 4**

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo Ecuación (9) forma un espacio vectorial de dimensión $n$.

- Corolario 1: Existen $n$ soluciones del sistema homogéneo $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ que son linealmente independientes y por tanto forman una base del espacio vectorial.
- Corolario 2: Cualquier combinación lineal de soluciones del sistema homogéneo es también solución. (Esto no es cierto por lo general, si las ecuaciones son no-homogéneas.) Por tanto la solución general del sistema homogéneo es:

$$\mathrm{y}(x) = c_1\mathrm{y}_1(x) + c_2\mathrm{y}_2(x) + \ldots + c_n\mathrm{y}_n(x)\,,$$

  donde $c_i$ son constantes arbitrarias.

A continuación, vamos a definir una matriz que nos facilitará los cálculos en adelante.

**Definición 2: Matriz fundamental**

Llamamos matriz fundamental $\mathrm{W}(x)$ a una matriz $n \times n$ cuyas columnas $\mathrm{y}_1(x)$, $\mathrm{y}_2(x)$,...,$\mathrm{y}_n(x)$ son soluciones del sistema Ecuación (9).

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \cdots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{n2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

tales que el determinante de la matriz evaluada en $x_0$ es distinta de cero.

**Teorema 5**

La matriz fundamental $\mathrm{W}(x)$ es no singular para todo $x \in I$.

La solución general del sistema homogéneo Ecuación (9) puede escribirse como:

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{W}(x)\mathrm{C}\,, \tag{11}$$

donde $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es un vector constante arbitrario.

Si conocemos la matriz fundamental podremos encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$, resolviendo $\mathrm{W}(x_0)\mathrm{C} = \mathrm{y}_0$, que es un sistema de $n$ ecuaciones algebraicas con $n$ incógnitas. Observemos que la condición $\left|\mathrm{W}(x_0)\right| \neq 0$ hace que este sistema algebraico tenga solución única.

Vamos a considerar ahora el sistema no-homogéneo:

$$\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{y}(x) + \mathrm{f}(x)\,. \tag{12}$$

Procedemos de manera idéntica a como hicimos en el caso de una sola ecuación lineal de primer orden, es decir, sustituyendo la constante de la solución general de la homogénea por una función de $x$ y probando esta solución en la ecuación no-homogénea (método de variación de las constantes.)

Al igual que en aquel caso, llegamos a una solución general para el sistema no-homogéneo que es igual a la solución general del homogéneo más una solución particular de la no-homogénea:

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{W}(x)\mathrm{C} + \mathrm{y}_p(x)\,,$$

y una solución particular de la no-homogénea es:

$$\mathrm{y}_p(x) = \mathrm{W}(x)\int \mathrm{W}^{-1}(x)\mathrm{f}(x)dx\,.$$

Para escribir la solución de la Ecuación (12) que satisface las condiciones iniciales $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$, vamos a definir la siguiente matriz:

**Definición 3: Matriz fundamental canónica en $x_0$**

La matriz fundamental canónica en $x_0$ es una matriz fundamental que en $x_0$ se convierte en la matriz unidad:

$$\mathrm{W_C}(x_0) = \mathrm{I}\,.$$

Entonces la solución particular de Ecuación (12) que satisface $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$, es:

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{W_C}(x)\mathrm{y}_0 + \mathrm{W_C}(x)\int_{x_0}^{x} \mathrm{W_C^{-1}}(s)\mathrm{f}(s)ds\,, \tag{13}$$

como se puede comprobar fácilmente. La matriz fundamental canónica se puede calcular a partir de cualquier matriz fundamental mediante la fórmula:

$$\mathrm{W_C}(x) = \mathrm{W}(x)\mathrm{W}^{-1}(x_0)\,,$$

ya que el producto de una matriz fundamental por una matriz constante $\mathrm{W}^{-1}(x_0)$ sigue siendo fundamental, y evidentemente $\mathrm{W_C}(t_0) = \mathrm{I}$. (Ahora que estamos multiplicando matrices, conviene recordar que el producto de matrices no es conmutativo, es decir, en general $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$, donde $\mathrm{A}$ y $\mathrm{B}$ son dos matrices cualesquiera.)

## Coeficientes constantes

La linealidad de las ecuaciones nos ha permitido obtener información sobre la *forma* de las soluciones en términos de una matriz fundamental, pero nada sabemos sobre cómo calcular esta matriz!

El único caso es el que tenemos un método para calcular una matriz fundamental, y por tanto obtener las soluciones del sistema de manera explícita, es cuando las ecuaciones tienen coeficientes constantes, es decir, cuando la matriz $\mathrm{A}$ es constante. Comenzamos con el sistema homogéneo:

$$\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}\mathrm{y}(x)\,. \tag{14}$$

Recordemos del tema anterior que la solución general de la ecuación $y' = ay$ es $y = Ce^{ax}$. En el caso del sistema de la Ecuación (14), una matriz fundamental es $\mathrm{W}(x) = e^{\mathrm{A}x}$, y la matriz fundamental canónica en $x_0$ es $\mathrm{W}_\mathrm{C}(x) = e^{\mathrm{A}x - \mathrm{A}x_0}$. Por tanto, hallar la solución se reduce a calcular la exponencial de la matriz $\mathrm{A}x$.

La exponencial de una matriz se calcula fácilmente si la matriz es diagonal:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces la exponencial de $\mathrm{A}x$ es otra matriz diagonal:

$$e^{\mathrm{A}x} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}x} \end{pmatrix}.$$

Si la matriz $\mathrm{A}$ no es diagonal, la exponencial se puede calcular a partir de la *forma canónica de Jordan*.

- **Forma canónica de Jordan y exponencial de una matriz**. Una matriz $\mathrm{A}$ es la expresión de una aplicación lineal $\mathscr{A} : V \to V$ en una determinada base $\mathrm{E}$. Si hacemos un cambio de base obtendremos una expresión distinta para la matriz de la aplicación $\mathscr{A}$. Supongamos que tenemos una nueva base $\mathrm{E}'$, tal que $\mathrm{E}' = \mathrm{PE}$, donde $\mathrm{P}$ es la *matriz de cambio de base*, o *matriz de paso*. Entonces la matriz de la aplicación $\mathscr{A}$ en la nueva base es $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. La forma canónica de Jordan $\mathrm{J}$ es la forma más sencilla en que se puede expresar la matriz $\mathrm{A}$, y es igual a la suma de una matriz diagonal $\mathrm{D}$, en la que elementos diagonales son los *autovalores* $\lambda_i$ de la aplicación, y una matriz $\mathrm{N}$ para la que existe un entero positivo $k$ tal que $\mathrm{N}^k = 0$. A tal matriz $\mathrm{N}$ se la llama *nilpotente* y al menor entero positivo $k$ tal que $\mathrm{N}^k = 0$ se le llama *índice de nilpotencia*. Para calcular la exponencial de $\mathrm{A}x$, utilizamos la expansión en serie de la función exponencial en torno a $x = 0$, y expresamos $\mathrm{A}$ en función de la forma canónica de Jordan,

$\mathrm{A} = \mathrm{PJP}^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{A}x} &= \mathrm{I} + \mathrm{A}x + \frac{1}{2}\mathrm{A}^2x^2 + \frac{1}{3!}\mathrm{A}^3x^3 + \ldots \\
&= \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{A}^n x^n \\
&= \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\mathrm{PJP}^{-1}\right)^n x^n \,.
\end{aligned}
$$

Observamos que:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{PJP}^{-1}\right)^n &= \left(\mathrm{PJ}\cancel{\mathrm{P}^{-1}}\right)\left(\cancel{\mathrm{P}}\mathrm{J}\cancel{\mathrm{P}^{-1}}\right)\left(\cancel{\mathrm{P}}\mathrm{J}\cancel{\mathrm{P}^{-1}}\right)\cdots\left(\cancel{\mathrm{P}}\mathrm{JP}^{-1}\right) \\
&= \mathrm{PJ}^n\mathrm{P}^{-1} \,,
\end{aligned}
$$

luego:

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{A}x} &= \mathrm{P}\left(\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{J}^n x^n\right)\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1} \,.
\end{aligned}
$$

Ahora utilizamos la definición de la forma canónica de Jordan como suma de una matriz diagonal $\mathrm{D}$ y una matriz nilpotente $\mathrm{N}$ de índice $k$:

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{A}x} &= \mathrm{P}e^{(\mathrm{D}+\mathrm{N})x}\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}e^{\mathrm{D}x}e^{\mathrm{N}x}\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}e^{\mathrm{D}x}\left(\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{N}^n x^n\right)\mathrm{P}^{-1} \,. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Como $\mathrm{N}^n = 0$ para todo $n \geq k$, el sumatorio se trunca en $n = k - 1$. Hay que decir que en la mayoría de los casos de interés el índice de nilpotencia no será mayor que 2 por lo que la expresión de la Ecuación (15) se calcula fácilmente:

$$
e^{\mathrm{A}x} = \mathrm{P}e^{\mathrm{D}x}\left(\mathrm{I} + \mathrm{N}x\right)\mathrm{P}^{-1} \,.
$$

La matriz de paso $\mathrm{P}$ está formada por los *autovectores* linealmente independientes $\left\{\mathrm{v}_j\right\}_i$ asociados a los autovalores $\lambda_i$. Cuando $\mathrm{J}$ no es diagonal, significa que la dimensión del *subespacio propio* asociado a alguno de los autovalores $\lambda_i$ es menor que su *multiplicidad algebraica*, es decir, no hay suficientes vectores linealmente independientes tales que:

$$\left(\mathrm{A}-\lambda_i \mathrm{I}\right) \mathrm{v}_{j,i} = 0\,.$$

Entonces, los vectores $\mathrm{w}_{j,i}$ que hacen falta para completar la base se pueden calcular haciendo:

$$\left(\mathrm{A}-\lambda_i \mathrm{I}\right) \mathrm{w}_{j,i} = \mathrm{v}_{j,i}\,.$$

- **Solución del sistema lineal con coeficientes constantes**. Una vez tenemos la forma canónica de Jordan $\mathrm{J}$ y la matriz de paso $\mathrm{P}$, podemos calcular la matriz fundamental como:

$$\mathrm{W}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1}\,,$$

y la matriz fundamental canónica en $x_0$:

$$\mathrm{W}_{\mathrm{C}}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x-\mathrm{J}x_0}\mathrm{P}^{-1}\,,$$

las cuales nos dan la soluciones generales así como la solución particular con $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$, para el sistema homogéneo y para el no-homogéneo que resumimos en la Tabla 1:

| Sistema homogéneo $\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}\mathrm{y}(x)$ | |
|---|---|
| Solución general | $\mathrm{y}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}$ |
| Solución particular con $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$ | $\mathrm{y}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x-\mathrm{J}x_0}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{y}_0$ |

| Sistema no-homogéneo $\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}\mathrm{y}(x) + \mathrm{f}(x)$ | |
|---|---|
| Solución general | $\mathrm{y}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{C} + \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\int e^{-\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{f}(x)dx$ |
| Solución particular con $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$ | $\mathrm{y}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x-\mathrm{J}x_0}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{y}_0 + \mathrm{P}\int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{J}x-\mathrm{J}s}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{f}(s)ds$ |

Tabla 1: Soluciones generales para sistema homogéneo y no-homogéneo.

**Ejemplo 2. Sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales con autovalores distintos.**

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 \end{cases}, \qquad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix}. \tag{16}$$

La matriz de los coeficientes es $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores se calculan haciendo $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = 1, 5$. Por tanto la matriz de Jordan es $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

El autovector asociado a $\lambda = 1$ se calcula haciendo $(\mathrm{A} - \mathrm{I})\,\mathrm{v} = 0 \Rightarrow \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, y el autovector asociado a $\lambda = 5$ es $(\mathrm{A} - 5\mathrm{I})\,\mathrm{v} = 0 \Rightarrow \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Por tanto la matriz de paso es $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,y su inversa $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución de Ecuación (16) es:

$$\begin{aligned} \mathrm{y}(x) &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^x & e^{5x} \\ -e^x & 3e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^x + e^{5x} \\ e^x + 3e^{5x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} y_1(x) &= \frac{1}{4}\left(-e^x + e^{5x}\right) \\ y_2(x) &= \frac{1}{4}\left(e^x + 3e^{5x}\right) \end{cases}.$$

**Ejemplo 3. Sistema no-homogéneo de dos ecuaciones lineales con autovalores iguales.**

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 + 6xe^x \end{cases}, \qquad \begin{matrix} y_1(1) = 0 \\ y_2(1) = 0 \end{matrix}. \tag{17}$$

La matriz de los coeficientes es $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, cuya raíz es $\lambda = 1$ (raíz doble). La matriz de Jordan es $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto $e^{\mathrm{J}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} e^x$.

Un autovector $\mathrm{v}$ se calcula haciendo $(\mathrm{A} - \mathrm{I})\,\mathrm{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El otro autovector $\mathrm{w}$ se obtiene de hacer $(\mathrm{A} - \mathrm{I})\,\mathrm{w} = \mathrm{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow -w_1 + w_2 = 1$. Elegimos $\mathrm{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nótese que cualquier otro vector con $-w_1 + w_2 = 1$ sería igualmente válido ya que sería una combinación lineal de $\mathrm{v}$ y $\mathrm{w}$.

Por tanto la matriz de paso es $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,y su inversa $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La solución de Ecuación (17) es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_1^x \begin{pmatrix} e^{(x-s)} & 0 \\ (x-s)e^{(x-s)} & e^{(x-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_1^x \begin{pmatrix} e^{(x-s)} & 0 \\ (x-s)e^{(x-s)} & e^{(x-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6se^s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_1^x \begin{pmatrix} 6se^s e^{(x-s)} \\ 6se^s (x-s)e^{(x-s)} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_1^x 6se^x ds \\ \int_1^x 6s(x-s)e^x ds \end{pmatrix} \\
&= 6e^x \begin{pmatrix} \int_1^x (xs-s^2) ds \\ \int_1^x s ds + \int_1^x (xs-s^2) ds \end{pmatrix} \\
&= 6e^x \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^3-x) - \frac{1}{3}(x^3-1) \\ \frac{1}{2}(x^2-1) + \frac{1}{2}(x^3-x) - \frac{1}{3}(x^3-1) \end{pmatrix} \\
&= e^x \begin{pmatrix} x^3 - 3x + 2 \\ x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esto es:

$$
\begin{cases} y_1(x) &= \left(x^3 - 3x + 2\right) e^x \\ y_2(x) &= \left(x^3 + 3x^2 - 3x - 1\right) e^x \end{cases}.
$$

## Estabilidad de sistemas lineales

Volvamos ahora al sistema lineal general descrito por la Ecuación (6) para estudiar la estabilidad de sus soluciones. Recordemos que la ecuación en forma vectorial era:

$$
\mathrm{y}'(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{y}(x) + \mathrm{f}(x).
$$

Supongamos que $\mathrm{A}(x)$ y $\mathrm{f}(x)$ son continuas en $I = [x_0, \infty)$ por lo que las soluciones están definidas para todo $x > x_0$, y consideremos dos soluciones $\mathrm{y}(x)$ y $\mathrm{y}^*(x)$. La distancia entre ellas en el espacio $\mathbb{R}^n$ viene dada por $\left\|\mathrm{y}(x) - \mathrm{y}^*(x)\right\|$.

Recordemos que la solución de la Ecuación (6) que satisface la condición $\mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0$

tiene la forma:

$$y(x) = W_C(x)y_0 + W_C(x)\int_{x_0}^{x} W_C^{-1}(s)f(s)ds\,,$$

donde la matriz fundamental canónica en $x_0$ es $W_C(x) = W(x)W^{-1}(x_0)$. Por tanto:

$$\left\|y(x) - y^*(x)\right\| = \left\|W(x)W^{-1}(x_0)\left(y(x_0) - y^*(x_0)\right)\right\|\,.$$

En esta expresión se ve claramente que la distancia entre $y(x)$ y $y^*(x)$ para todo $x$ está limitada por la norma de $W(x)$, y no depende ni de los valores iniciales ni del término no-homogéneo. Por tanto, al igual que ocurría con las ecuaciones lineales de primer orden, podemos hablar de estabilidad de la ecuación, ya que todas las soluciones se comportarán del mismo modo. Si $\|W(x)\|$ está acotada, la ecuación es estable; si $\lim_{x\to\infty}\|W(x)\| = 0$ la ecuación es asintóticamente estable; y si $\|W(x)\|$ no está acotada la ecuación es inestable. Además la estabilidad es la misma que la de la solución trivial $y(x) = 0$ como solución de la homogénea. En el caso de un sistema lineal con coeficientes constantes, la matriz fundamental es:

$$W(x) = Pe^{Jx}P^{-1}\,.$$

Por tanto, la estabilidad de la ecuación se puede deducir examinando la forma de canónica de Jordan de la matriz de coeficientes A. Los elementos de $e^{Jx}$ son exponenciales $e^{\lambda x}$ (multiplicados por polinomios de $x$ si J no es diagonal). Si los autovalores son complejos, su parte imaginaria no afecta a la estabilidad del sistema, ya que los términos $e^{i\lambda x}$ permanecen acotados. Examinemos las diferentes posibilidades:

- Si todos los autovalores tienen parte real negativa ($\mathfrak{R}(\lambda) < 0$) entonces el sistema es asintóticamente estable.
- Si todos los autovalores tienen parte real menor o igual que cero ($\mathfrak{R}(\lambda) \leq 0$), entonces es necesario examinar los términos con $\mathfrak{R}(\lambda) = 0$. Si estos tienen tantos autovectores linealmente independientes como su multiplicidad algebraica, esto es, la matriz J es diagonal, entonces el sistema es estable.
- Si los autovalores con $\mathfrak{R}(\lambda) = 0$ y multiplicidad $m$ no tienen $m$ autovectores linealmente independientes, o algún autovalor tiene $\mathfrak{R}(\lambda) > 0$ entonces el sis-

tema es inestable.

## 3.4 Ecuaciones lineales de orden $n$

Como ya hemos dicho, las ecuaciones diferenciales de orden $n$ se pueden transformar en un sistema de $n$ ecuaciones de primer orden, por lo que se pueden considerar como un caso particular de estos. Vamos a proceder con estas ecuaciones del mismo modo que hicimos con los sistemas, planteando primero una solución formal para las ecuaciones con coeficientes variables, y viendo luego como se puede obtener una solución explícita cuando los coeficientes son constantes.

### Coeficientes variables

Consideremos la siguiente ecuación lineal no-homogénea:

$$y^{(n)} + a_n(x)y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_2(x)y' + a_1(x)y = f(x)\,. \tag{18}$$

Suponemos que las funciones $a_i(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo $I$ que contiene a $x_0$, lo cual, unido a la linealidad de la ecuación, asegura la existencia y unicidad de la solución que satisface las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_0' \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

La Ecuación (18) es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= -a_n(x)y_n - a_{n-1}(x)y_{n-1} - \ldots - a_2(x)y_2 - a_1(x)y_1 + f(x) \end{cases} .$$

Por tanto podemos definir una matriz fundamental $\mathrm{W}(x)$ formada por $n$ soluciones de la ecuación homogénea y sus sucesivas derivadas hasta $n-1$:

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

tales que el determinante de la matriz $\mathrm{W}(x)$, llamado determinante *wronskiano*, es no nulo para $x_0$. Entonces la solución general de la Ecuación (18) será la primera fila de:

$$\mathrm{W}(x)\mathrm{C} + \mathrm{W}(x)\int \mathrm{W}^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} dx\,.$$

**Teorema 6: Solución general de la ecuación lineal de orden $n$ no-homogénea**

Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son $n$ soluciones de la ecuación lineal homogénea tales que su $|\mathrm{W}(x)|$ es distinto de cero para algún $x \in I$, y $y_p(x)$ es una solución particular de la no-homogénea, entonces la solución de Ecuación (18) es de la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots c_ny_n(x) + y_p(x)\,,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

En el caso más sencillo de ecuaciones de segundo orden, $\mathrm{W}(x)$ es una matriz $2 \times 2$ y su inversa se puede calcular fácilmente como:

$$\mathrm{W}^{-1}(x) = \frac{1}{|\mathrm{W}(x)|} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} .$$

Por tanto la solución particular de la ecuación no-homogénea, definida por la primera fila de $\mathrm{W}(x) \int \mathrm{W}^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} dx$ es:

$$y_p(x) = y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{|\mathrm{W}(x)|} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{|\mathrm{W}(x)|} dx . \tag{19}$$

Al igual que ocurría con el caso más general de sistemas de ecuaciones lineales, estos teoremas nos dan información sobre la forma de las soluciones, pero no nos dicen nada sobre cómo calcularlas. Solamente cuando los coeficientes son constantes disponemos de un método para obtener las soluciones de manera explícita. Más adelante veremos otro método para resolver ecuaciones lineales de segundo orden, por medio de series, que nos permitirán abordar problemas con coeficientes variables.

## Coeficientes constantes

Consideremos la ecuación lineal no-homogénea con coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} + \ldots + a_2 y' + a_1 y = f(x) .$$

La matriz de los coeficientes es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{pmatrix} ,$$

Como vimos antes, la solución general del sistema homogéneo es $\mathrm{y}(x) = \mathrm{P}e^{\mathrm{J}x}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}$, donde $\mathrm{J}$ es la matriz de Jordan asociada a $\mathrm{A}$. La solución general de la ecuación homogénea es pues una combinación lineal de los elementos de la matriz $e^{\mathrm{J}x}$, los cuales dependen de los autovalores de $\mathrm{A}$ y de sus multiplicidades.

Los autovalores $\lambda_i$ se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0\,.$$

El siguiente teorema nos da la forma de las $n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea en función de los autovalores y sus multiplicidades. La solución general será una combinación lineal de todas ellas.

**Teorema 7: Ecuación lineal de orden $n$ homogénea con coeficientes constantes**

Supongamos que la ecuación característica $\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1 = 0$ tiene $m$ raíces reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_m$, y $2k$ raíces complejas $p_1 \pm iq_1, p_2 \pm iq_2, \ldots, p_2 \pm iq_2$ con multiplicidades $s_1, s_2, \ldots, s_k$, de modo que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_k) = n$. Entonces:

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \ldots, & x^{r_m-1}e^{\lambda_m x}, \\
e^{p_1 x}\cos q_1 x, & xe^{p_1 x}\cos q_1 x, & \ldots, & x^{s_1-1}e^{p_1 x}\cos q_1 x, \\
e^{p_1 x}\sin q_1 x, & xe^{p_1 x}\sin q_1 x, & \ldots, & x^{s_1-1}e^{p_1 x}\sin q_1 x, \\
e^{p_2 x}\cos q_2 x, & xe^{p_2 x}\cos q_2 x, & \ldots, & x^{s_2-1}e^{p_2 x}\cos q_2 x, \\
e^{p_2 x}\sin q_2 x, & xe^{p_2 x}\sin q_2 x, & \ldots, & x^{s_2-1}e^{p_2 x}\sin q_2 x, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
e^{p_k x}\cos q_k x, & xe^{p_k x}\cos q_k x, & \ldots, & x^{s_k-1}e^{p_k x}\cos q_k x, \\
e^{p_k x}\sin q_k x, & xe^{p_k x}\sin q_k x, & \ldots, & x^{s_k-1}e^{p_k x}\sin q_k x,
\end{array}$$

son $n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

**Ejemplo 4.**

Obtener la solución general de:

$$y^{v} - 4y'' + 3y' = 0\,.$$

La ecuación característica es $\lambda^5 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$, cuyas raíces son: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ (doble), y $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$. Por tanto la solución general es:

$$y(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{x} + (c_4 \cos\sqrt{2}x + c_5 \sin\sqrt{2}x)e^{-x}\,.$$

El Teorema 7 adopta una forma mucho más sencilla en el caso de ecuaciones de segundo orden $y'' + ay' + by = 0$. Entonces la matriz de los coeficientes es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

y la ecuación característica es $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, que tiene dos soluciones distintas o una solución doble. Si hay dos soluciones distintas y reales la matriz $e^{\mathrm{J}x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$; si hay una solución doble (y real, ya que $\mathrm{A}$ es real), $e^{\mathrm{J}x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ x & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$. Si las dos soluciones son complejos conjugados:

$$e^{\mathrm{J}x} = \begin{pmatrix} (\cos qx + i \sin qx)e^{px} & 0 \\ 0 & (\cos qx - i \sin qx)e^{px} \end{pmatrix}.$$

En la Tabla 2 se recoge la forma de la solución general de la ecuación homogénea en cada una de las situaciones.

| | |
|---|---|
| $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ | $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| $\lambda$ doble (real) | $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ |
| $\lambda = p \pm iq$ | $y(x) = (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)e^{px}$ |

Tabla 2: Solución general de la ecuación lineal de segundo orden homogénea.

**Ejemplo 5.**

Resolver la ecuación:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 6xe^x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} . \tag{20}$$

La ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ (la misma que en el Ejemplo 3), con raíz doble $\lambda = 1$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es $y = (c_1 + c_2x)e^x$. Nótese que usando el Teorema 7 podemos llegar a la solución general sin tener que calcular la matriz de Jordan y las matrices de paso, por tanto, si nos hubiésemos dado cuenta de que la ecuación homogénea del Ecuación (17) se puede convertir en una ecuación de segundo orden, nos habríamos ahorrado mucho trabajo.

Para calcular una solución particular de la ecuación no-homogénea aplicamos la Ecuación (19).

Tomamos dos soluciones particulares $y_1 = e^x$ y $y_2 = xe^x$ para formar la matriz fundamental $\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}$, de la cual obtenemos el wronskiano $|\mathrm{W}(x)| = e^{2x}$. La solución particular que buscamos es:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= xe^x \int e^{-2x}e^x 6xe^x dx - e^x \int e^{-2x}xe^x 6xe^x dx \\ &= 6xe^x \int x dx - 6e^x \int x^2 dx \\ &= 3x^3e^x - 2x^3e^x \\ &= x^3e^x . \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la Ecuación (20) es:

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^x + x^3e^x .$$

Imponemos las condiciones iniciales para encontrar el valor de $c_1$ y $c_2$:

$$\begin{cases} y(1) = 0 & \rightarrow \quad \left(c_1 + c_2 + 1\right) e \quad = 0 \\ y'(1) = 0 & \rightarrow \quad \left(c_1 + 2c_2 + 4\right) e \quad = 0 \end{cases},$$

de donde obtenemos $c_1 = 2$, $c_2 = -3$. Por tanto la solución es:

$$y(x) = \left(x^3 - 3x + 2\right) e^x ,$$

que es la misma que obtuvimos en el Ejemplo 3.

**Ejemplo 6.**

Resolver la ecuación:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} . \tag{21}$$

La ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = 1 \pm 2i$. Por tanto la solución general es:

$$y(x) = \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) e^x .$$

Imponemos las condiciones iniciales para encontrar el valor de $c_1$ y $c_2$:

$$\begin{cases} y(0) = 1 & \rightarrow \quad c_1 \quad = 1 \\ y'(0) = 3 & \rightarrow \quad 2c_2 + c_1 \quad = 3 \end{cases},$$

de donde obtenemos $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Por tanto la solución es:

$$y(x) = (\cos 2x + \sin 2x) e^x .$$

En el siguiente vídeo explicamos cómo se abordan los problemas más comunes de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Accede al vídeo: Ecuaciones lineales de 2º orden con coeficientes constantes.

Para resolver la ecuación no-homogénea podríamos recurrir a la fórmula de variación de los constantes, pero para ecuaciones de orden mayor que dos esto es excesivamente complicado. Si el término no-homogéneo $f(x)$ está formado por sumas y productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos, podemos utilizar el *método de los coeficientes indeterminados* que describimos en el siguiente teorema:

**Teorema 8: Método de los coeficientes indeterminados**

- Si $f(x) = e^{\lambda x}\mathrm{p}_m(x)$, donde $\mathrm{p}_m(x)$ es un polinomio de grado $m$:
  - Si $\lambda$ NO es autovalor de la ecuación homogénea, entonces existe una solución particular de la no-homogénea de la forma:

$$y_p(x) = e^{\lambda x}\mathrm{P}_m(x)\,,$$

    donde $\mathrm{P}_m(x)$ es otro polinomio de grado $m$ cuyos coeficientes se calculan llevando $y_p(x)$ a la ecuación no-homogénea.
  - Si $\lambda$ es autovalor de la ecuación homogénea con multiplicidad $r$, entonces una solución particular de la no-homogénea es:

$$y_p(x) = x^r e^{\lambda x}\mathrm{P}_m(x)\,.$$

- Si $f(x) = e^{px}[\mathrm{p}_j(x)\cos qx + \mathrm{q}_k(x)\sin qx]$, donde $\mathrm{p}_j(x)$ y $\mathrm{q}_k(x)$ son polinomios de grados $j$ y $k$ respectivamente:
  - Si $p \pm iq$ NO son autovalores de la ecuación homogénea, entonces existe una solución particular de la no-homogénea de la forma:

$$y_p(x) = e^{px}[\mathrm{P}_m(x)\cos qx + \mathrm{Q}_m(x)\sin qx]\,,$$

    donde $\mathrm{P}_m(x)$ y $\mathrm{Q}_m(x)$ son polinomios de grado $m = \max(j,k)$ cuyos coeficientes se calculan llevando $y_p(x)$ a la ecuación no-homogénea.

- Si $p \pm iq$ son autovalores de la ecuación homogénea con multiplicidad $s$, entonces existe una solución particular de la no-homogénea de la forma:

$$y_p(x) = x^s e^{px}[\mathrm{P}_m(x)\cos qx + \mathrm{Q}_m(x)\sin qx]\,.$$

- Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, y $y_i(x)$ es solución de la ecuación en que el término no-homogéneo es solamente uno de los términos $f_i(x)$, entonces $y_1(x)+y_2(x)+\ldots+y_n(x)$ es solución de la ecuación no-homogénea con $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.

**Ejemplo 7.**

Hallar una solución particular de:

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x\,. \tag{22}$$

El coeficiente que multiplica el exponente del término no-homogéneo es 1. Como 1 es autovalor de la ecuación homogénea, aplicamos el caso 1(b) del Teorema 8:

$$y_p(x) = x^r e^{\lambda x}\mathrm{P}_m(x)\,.$$

La multiplicidad del autovalor es $r = 2$, y el grado del polinomio es $m = 1$. Por tanto la solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = x^2 e^x(ax + b)\,.$$

Calculamos las derivadas primera y segunda de esta $y_p(x)$ y las llevamos a la ecuación Ecuación (22) de donde llegamos a:

$$(6ax + 2b)\,e^x = 6xe^x\,,$$

para obtener $a = 1$ y $b = 0$. Así que la solución particular que buscamos es:

$$y_p(x) = x^3 e^x \,,$$

que es la misma que obtuvimos en el Ejemplo 5.

**Ejemplo 8.**

Hallar una solución particular de:

$$y'' + y = e^x \cos x \,. \tag{23}$$

El término no-homogéneo es de la forma $f(x) = e^{px}[\mathrm{p}_j(x) \cos qx + \mathrm{q}_k(x) \sin qx]$, con $\mathrm{p}_j(x) = 1$, $q_k(x) = 0$, $p = 1$, $q = 1$. Los autovalores de la ecuación homogénea son $\lambda = \pm 1$. Como $p \pm iq$ no son autovalores aplicamos el caso 2(a) del Teorema 8:

$$y_p(x) = e^{px}[\mathrm{P}_m(x) \cos qx + \mathrm{Q}_m(x) \sin qx] \,.$$

El orden $m$ de los polinomios es 0, es decir, $\mathrm{P}_m(x)$ y $\mathrm{Q}_m(x)$ son constantes, así que probamos soluciones del tipo:

$$y_p(x) = e^x[a \cos qx + b \sin x] \,.$$

Introduciendo esta solución en la Ecuación (23) obtenemos:

$$(a + 2b) \cos x + (b - 2a) \sin x = \cos x \,,$$

de donde deducimos el valor de las constantes $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$. Por tanto la solución particular que buscamos es:

$$y_p(x) = e^x[\frac{1}{5} \cos qx + \frac{2}{5} \sin x] \,.$$

### Ecuaciones de Euler

Aunque solo los sistemas lineales con coeficientes constantes nos ofrecen un método para encontrar soluciones exactas, cabe destacar un tipo de ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables que se puede resolver mediante un cambio de variable. Estas son las ecuaciones de Euler, y tienen la forma general:

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x)\,, \tag{24}$$

donde $a$ y $b$ son constantes, y la variable independiente $x$ es siempre positiva. En ese caso se puede hacer el cambio de variable $x = e^z$ que transforma la Ecuación (24) en una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{dy}{dz}\frac{1}{x} \\ &= e^{-z}\frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{1}{x} + \frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2} \\ &= e^{-2z}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación (24) obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(e^z)\,,$$

que como ya habíamos avanzado es una ecuación lineal con coeficientes constantes y ecuación característica $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$, que podemos resolver mediante los métodos vistos anteriormente.

## 3.5 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + y = 0\,,$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + \sin y_2 \\ y_2' &= x y_1^{2/3} - y_2 \end{cases}.$$

**Ejercicio 2.** Resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2y_2 + 2 \\ y_2' &= 5y_1 - y_2 + 1 \end{cases}, \qquad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{matrix},$$

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -6y_1 - 4y_2 + x\sin x \end{cases}, \qquad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{matrix},$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2y_2 - x \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 - x \end{cases}, \qquad \begin{matrix} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix}.$$

**Ejercicio 3.** Estudiar la existencia, unicidad y prolongabilidad de soluciones y hallar la solución general de:

$y'' + y = x\sin 2x - 1.$

**Ejercicio 4.** Hallar la solución general de:

$$y^{iv} + y = \cos x\,,$$

$$y^{v} + 2y''' + y' = x\,.$$

**Ejercicio 5.** Encontrar la matriz fundamental canónica del sistema asociado a las siguientes ecuaciones:

$$y'' + 2y' + y = 0\,,$$

$$y''' + y'' + y' + y = 0\,.$$

**Ejercicio 6.** Determinar un valor de $a$, si existe, para que el sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + ay_3 \\ y_3' &= ay_2 - y_3 \end{cases},$$

sea 1) asintóticamente estable, 2) estable no asintóticamente, 3) inestable.

**Ejercicio 7.** Resolver la ecuación:$y'' - y = 2\delta(x-1)$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

**Ejercicio 8.** Hallar la solución de: $y'' + 2y' + 2y = f(x)$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Escribir la solución si $f(x) = \delta(x - \pi)$.

## 3.6 Referencias bibliográficas

Cooper, I., Mondal, A., & Antonopoulos, C. G. (2020). A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110057.