

Electromagnetismo I

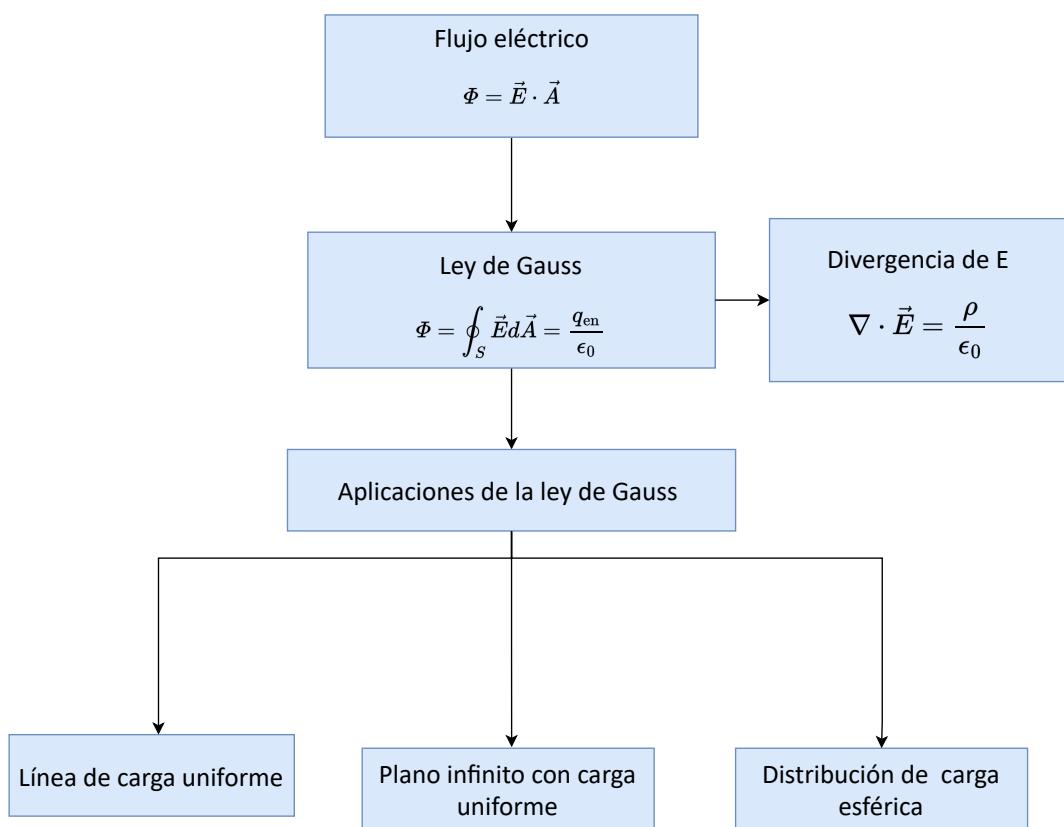
---

# Ley de Gauss

# Índice

<b>Esquema . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>Ideas clave . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
2.2 Flujo eléctrico . . . . .	3
2.3 Ley de Gauss . . . . .	5
2.4 Aplicaciones de la ley de Gauss . . . . .	7
2.5 El teorema de la divergencia o de Gauss . . . . .	15
2.6 La divergencia del campo eléctrico . . . . .	16
2.7 Cuaderno de ejercicios . . . . .	17
2.8 Referencias bibliográficas . . . . .	19

# Esquema



## 2.1 Introducción y objetivos

Ya vimos cómo calcular el campo eléctrico. A veces nos encontramos integrales complicadas de resolver. Otras veces teníamos sistemas simétricos que nos permiten evitar cálculos complejos. En este capítulo veremos otra forma de calcular el campo eléctrico. Este procedimiento usa lo que se conoce como ley de Gauss. Esta ley nos ayudará a simplificar el cálculo del campo eléctrico en sistemas que contienen simetrías, y además nos ayudará a entender mejor el concepto de campo eléctrico.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Entender el concepto de **flujo eléctrico**.
- ▶ Aprender la **ley de Gauss**.
- ▶ Comprender cómo se puede aplicar la ley de Gauss para el cálculo del **campo eléctrico**.
- ▶ Entender que la **divergencia del campo** es otra forma de expresar la ley de Gauss.

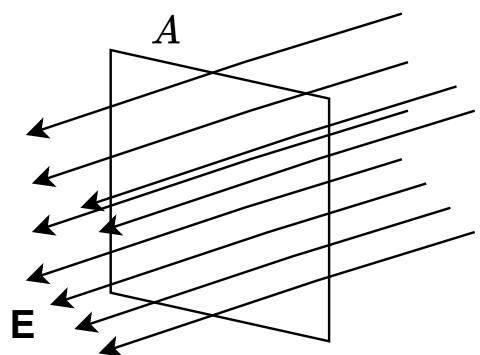
## 2.2 Flujo eléctrico

También se habló anteriormente de las líneas de campo eléctrico de una manera cualitativa. Veamos ahora ese concepto de manera cuantitativa con el flujo eléctrico. El flujo eléctrico se representa a través del número de líneas de campo que atraviesan una superficie. Si dentro de la superficie existe una carga eléctrica, el número de líneas de campo es proporcional a esta carga neta. Esto es una anticipación a la ley de Gauss.

Si tenemos un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , y una superficie plana  $A$ , que es perpendicular al campo, como podemos ver en la [Figura 1](#), su flujo eléctrico se expresa como:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (1)$$

Nótese que las unidades del flujo eléctrico son Nm<sup>2</sup>/C.



Si nos fijamos en la expresión del flujo, vemos que es un producto escalar del campo y el área,  $\vec{A}$ , que siempre viene definida con un vector normal a la superficie: eso indica que si el campo y el área no son perpendiculares, el área efectiva en este caso sería el área proyectada perpendicular a la dirección del campo, es decir,  $A' = A \cos \theta$ , donde el ángulo  $\theta$  es el ángulo entre la normal a la superficie  $A$  y el campo eléctrico. Por tanto, el flujo es  $\Phi = EA \cos \theta$ .

Figura 1: Líneas de un campo eléctrico uniforme que atraviesan un área  $A$  perpendicular al campo.

Pensemos ahora en situaciones más generales. Imaginemos que tenemos una superficie que es curva o que el campo eléctrico no es constante ([Figura 2](#)). Tendríamos que dividir  $A$  en elementos pequeños  $\Delta A$ , cuya dirección sería perpendicular a la superficie, si tenemos  $i$  elementos de área, nos queda que el flujo a través de ese elemento es  $\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$ . Para obtener el flujo total a través de toda la superficie debemos sumar los flujos a través de todos los elementos. Si hacemos que el área de cada elemento tienda a cero, pasamos de una suma a una integral, y a la definición general de flujo eléctrico:

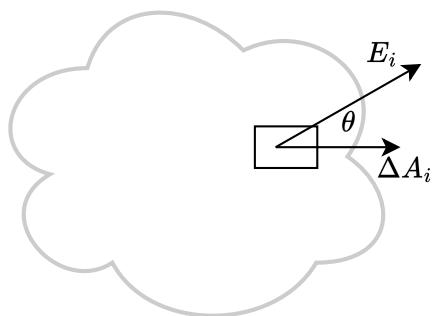


Figura 2: Elemento de área de una superficie, y campo eléctrico en ese elemento de superficie, que forma un ángulo  $\theta$  con la superficie.

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (2)$$

Normalmente estaremos interesados en el flujo a través de una superficie cerrada (superficie cerrada es aquella que encierra un volumen y en la que no podemos cruzar de su parte interior a su parte exterior sin atravesar la superficie). Se define como positivo el flujo cuando el número neto de líneas de campo que salen de la superficie

es mayor que el número de líneas que entran. Y si hay más las líneas que entran que las que salen de la superficie, el flujo es negativo. Nótese aquí que para expresar una integral sobre una superficie cerrada utilizamos el símbolo  $\oint$ .

## 2.3 Ley de Gauss

La ley de Gauss expresa la relación entre la carga y el campo eléctrico, y es considerada una forma alternativa a la ley de Coulomb. Karl Friedrich Gauss (1777-1855), un gran matemático, fue el que la formuló. Hizo no sólo contribuciones en Física, sino también influyó en el campo de las matemáticas. Si quieras saber un poco más sobre la vida de Gauss, te recomendamos ([Wittmann, 2020](#)).

La ley de Gauss establece la relación entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada y la carga encerrada por la superficie. Para llegar a la ley de Gauss, primero consideremos un caso sencillo. Pongamos una carga puntual positiva  $q$ , en el interior de una esfera de radio  $r$ . Las superficies cerradas que nos sirven como herramienta matemática, que no son reales, se llaman *superficies gaussianas*. Por la ley de Coulomb sabemos que el valor del campo en la superficie de la esfera es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

y las líneas de campo la atraviesan perpendicularmente hacia afuera. Eso significa que  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y, por la [Ecuación \(2\)](#), podemos escribir que el flujo a través de la esfera, donde  $E$  es constante, es:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Fijémonos que este resultado nos indica que, independiente del valor de  $r$ , el flujo neto a través de una superficie gaussiana esférica es proporcional a la carga  $q$  dentro

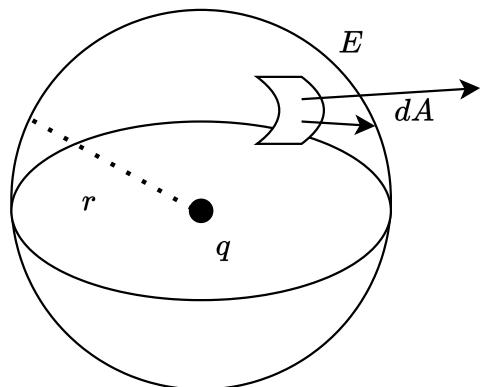


Figura 3: Esfera gaussiana de radio  $r$  que rodea a carga  $q$ .

de la superficie. El flujo es independiente del radio  $r$ .

Supongamos diferentes superficies gaussianas arbitrarias, como vemos en la [Figura 4](#), con una carga  $q$  en su interior. Observemos qué cantidad de líneas de flujo que pasan por todas las superficies son las mismas, independientemente de la forma de la superficie. Y como sabemos que el flujo a través de una superficie gaussiana esférica es  $q/\epsilon_0$ , el mismo valor será para cualquier superficie.

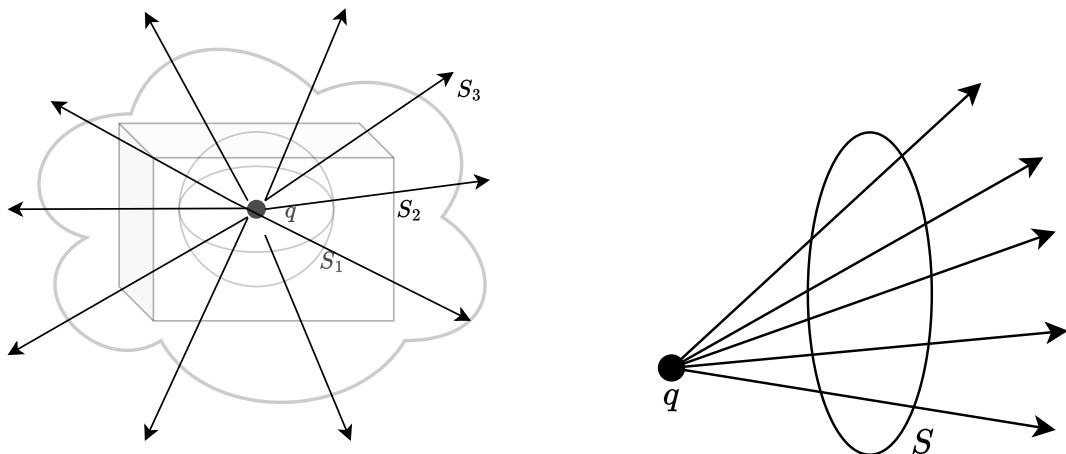


Figura 4: Izquierda: diferentes superficies cerradas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  que rodean a un carga  $q$ . Vemos las líneas de flujo atravesando las superficies. Derecha: carga fuera de una superficie. Líneas de campo la atraviesan. Elaboración propia.

Consideremos ahora que tenemos una carga fuera de una superficie cerrada, como podemos ver en la [Figura 4](#). Podemos ver que el número de líneas de campo que entran es igual al número de líneas de campo que salen de la superficie, y es por eso que el flujo neto en esta superficie cerrada que no encierra carga será cero. Recapitulando, todo lo dicho anteriormente y generalizándolo, llegamos a la llamada ley de Gauss:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

que nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada  $S$  es igual a la carga que contiene dentro esa superficie  $q_{in}$  dividido por la constante  $\epsilon_0$ , y es independiente de la forma de la superficie.

La ley de Gauss sirve para calcular el campo eléctrico, pero solo será útil donde nuestro sistema tenga un alto grado de simetría, en particular en casos donde las distribuciones de carga tienen simetría esférica, cilíndrica o plana. Cabe recordar que podemos

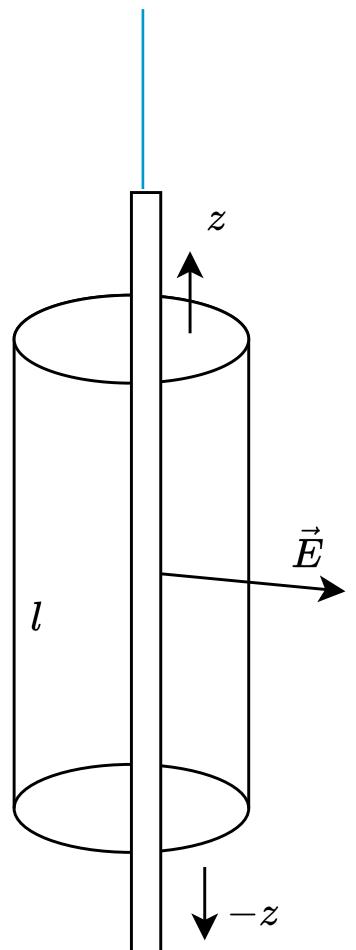
elegir la superficie gaussiana como más nos convenga: no es una superficie física real, solo una herramienta matemática.

## 2.4 Aplicaciones de la ley de Gauss

Veremos a continuación algunos ejemplos de las posibles aplicaciones de la ley de Gauss para el cálculo del campo eléctrico:

### Ejemplo 1. Línea infinita con una carga uniforme

La densidad de carga lineal  $\lambda$  es constante y positiva. Calcula el campo eléctrico a una distancia  $r$  de la línea. Primero tenemos que razonar en qué dirección apunta el campo  $E$ . Dada la simetría de la distribución de carga, el campo tiene que ser el mismo miremos desde donde lo mirremos, así que  $E$  no puede depender de  $z$ . La única posibilidad es que  $E$  sea perpendicular a la distribución de carga, y apunte radialmente hacia afuera (carga positiva), véase figura, ya que cualquier elemento infinitesimal de carga  $dq$  que produzca una componente  $z$  del campo en la posición  $\vec{r}$  analizada se compensa con otro elemento infinitesimal simétrico que produzca la misma componente pero de signo opuesto. La superficie gaussiana que consideraremos, usando la simetría del problema será un cilindro coaxial a la línea de carga, con radio  $r$ , y de longitud  $l$ . El campo en la parte curva del cilindro será perpendicular a su superficie y constante. Sin embargo, en los extremos del cilindro, el flujo será cero, ya que  $E$  es paralelo a esa superficie. Ahora usemos la ley de Gauss para calcular el campo  $E$ . Nótese que  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos, y la carga dentro del cilindro es  $q_{in} = \lambda l$ . Entonces tenemos que:



$$\Phi = E \oint dA = E(2\pi rl) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$$

Y despejando en la ecuación el valor de  $E$ , nos queda que el campo para una linea infinita de carga es:

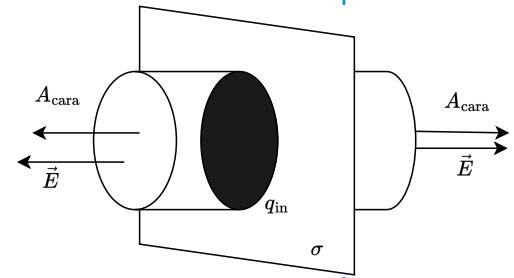
$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$

Este valor ya lo habíamos calculado en el capítulo 1 a través de la ley de Coulomb. Aquí hay que resaltar algo muy importante, este resultado es para una linea de carga infinita, si tuviéramos una linea finita no podríamos usar la ley de Gauss porque la simetría se pierde cuando estamos cerca de los bordes de la linea.

### Ejemplo 2. Plano infinito con una carga uniforme

La densidad de carga superficial  $\sigma$  es constante y positiva. Calcula el campo eléctrico en el plano.

Por la situación de simetría en la que nos encontramos, el campo solo puede ser perpendicular al plano, y como es infinito,  $E$  va a ser constante, independientemente de la distancia a la que nos encontremos del plano. Nótese que la dirección es hacia afuera, lo que hace que sea opuesta en un lado del plano con respecto al lado opuesto. Para beneficiarnos de las simetrías, consideramos como superficie de Gauss un cilindro que atraviesa al plano, cuyos extremos son equidistantes al plano. Como las líneas de campo son paralelas a la superficie del cilindro (y el vector de área es perpendicular a la superficie), el flujo a través de la superficie lateral del cilindro es cero; solo es no nulo en las caras del cilindro. La cara del cilindro tiene un área  $A_{\text{cara}}$ . Teniendo en cuenta que tenemos dos caras en el cilindro, y que  $q_{\text{in}} = \sigma A_{\text{cara}}$  en el plano, el valor del flujo será:



$$\Phi = 2EA_{\text{cara}} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_{\text{cara}}}{\epsilon_0}.$$

Y de la expresión obtenemos:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Con esto llegamos al mismo resultado que con un cálculo mas complicado. En este caso, si el plano no es infinito pero estamos lo suficiente lejos de los extremos, el

valor del campo es el mismo que en el caso de un plano infinito.

En el caso de que tuviéramos una distribución de carga de forma arbitraria dentro de la superficie de Gauss, o bien, si esta superficie fuera ella misma de forma arbitraria, el teorema de Gauss no sería de ayuda puesto que, al no saber la forma del campo, no podríamos extraer dicho campo fuera de la integral del flujo.

Esto significa que la ley de Gauss es útil para calcular el campo solamente en los casos en que el problema presente alguna de las siguientes simetrías:

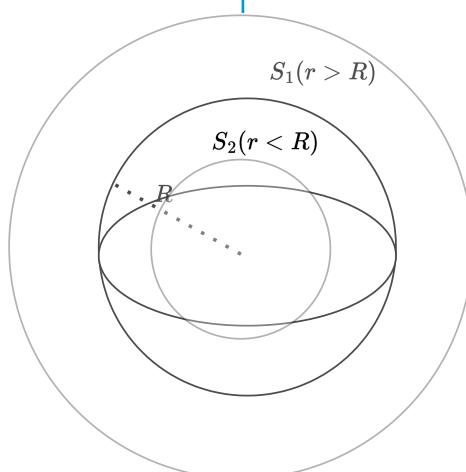
1. Simetría esférica: se escoge como superficie de Gauss una esfera concéntrica a la distribución de carga.
2. Simetría cilíndrica: se escoge como superficie de Gauss un cilindro coaxial a la distribución de carga.
3. Simetría plana: se escoge como superficie de Gauss una caja de píldoras que atravesese el plano cargado.

Tanto la simetría 2 como la 3 suponen que estamos tratando con un cilindro de carga de longitud infinita o bien un plano cargado infinito. Como estos dos casos son idealizaciones, en la práctica lo que se hace es calcular el campo para cilindros o planos lo suficientemente grandes y de manera que en los lugares donde se calcula el campo se puedan despreciar los efectos del borde.

### Ejemplo 3. Distribución de carga esférica uniforme

La densidad de carga por unidad de volumen en esta esfera es  $\rho$  y positiva. Notar que la esfera es no conductora. El radio de la esfera es  $R$ . Calcula el campo eléctrico en un punto  $P$  que se encuentra a una distancia  $r$  del centro de la esfera.

La superficie gaussiana elegida es una esfera, concéntrica con la carga esférica, y de radio  $r$ . El valor de  $E$  es constante y radial en cada punto de la superficie. El área de la esfera gaussiana es  $4\pi r^2$ . Así que vemos que el flujo total a través de la superficie



es  $\Phi = E \cdot 4\pi r^2$ . Tenemos que:

$$E = \frac{q_{\text{in}}}{4\pi r^2 \epsilon_0},$$

donde  $q_{\text{in}} = \int_{\text{esfera}} \rho dV$ . Debemos en este punto considerar dos casos:

- ▶ Para puntos fuera de la esfera cargada, es decir donde  $r > R$ , la carga se reduce a la carga total en el volumen de la esfera de carga de radio  $R$ , de manera que:

$$q_{\text{in}} = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q,$$

definiendo  $Q$  como la carga total que la esfera cargada contiene. Entonces nos queda:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}.$$

Si nos fijamos, esto nos indica que el campo fuera de la esfera es igual que si tuviéramos una carga puntual con valor  $Q$ .

- ▶ Para puntos dentro de la esfera de carga, es decir, donde  $r < R$ , la carga en el interior de la esfera de radio  $r$  es:

$$q_{\text{in}} = \rho V' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Entonces nos queda  $E$  como:

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r.$$

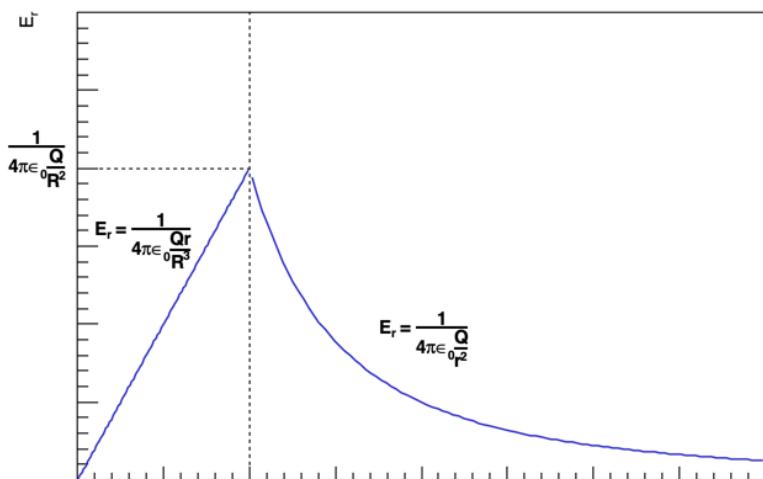


Figura 5: Campo eléctrico de una esfera uniformemente cargada en función de  $r$ . Podemos ver el comportamiento del campo  $\vec{E}$  como cambia dentro y fuera de la esfera. Fuente: Wikimedia Foundation.

Observemos que dentro de la esfera el campo varía linealmente con  $r$ , mientras que el campo fuera de la esfera es el mismo que el de una carga puntual  $Q$  localizada en el origen. Esto lo podemos ver en la figura, donde representamos el campo  $E$  en función de  $r$ .

## Conductores en equilibrio

Como ya dijimos, en un conductor, las cargas (electrones en la mayoría de los casos) están libres y se pueden mover a través del material, fenómeno que sucede cuando existe un campo eléctrico. Cuando están en una situación de equilibrio, la carga neta dentro del conductor es cero.



Figura 6: Izquierda: Campo eléctrico en la superficie de un conductor. Podemos ver las descomposición en sus componentes normal y tangencial de un campo  $E$  ficticio. Derecha: Conductor con una superficie de forma arbitraria, y considerando una superficie gaussiana en forma de cilindro que en parte lo atraviesa. Elaboración propia.

Los conductores en equilibrio electrostático poseen las siguientes propiedades. El campo eléctrico en el interior de un conductor es igual a cero. Si dentro del conductor existiera un campo eléctrico, las cargas se moverían, y entonces ya no nos encontraríamos en un estado estático, que es lo que estamos suponiendo. Esto nos lleva a concluir que el campo en todos los puntos dentro del conductor debe ser  $\vec{E} = 0$ .

El campo eléctrico de un conductor aislado es perpendicular a la superficie del conductor. Supongamos que el campo tiene una componente normal  $E_n$  y una componente tangencial  $E_t$  a la superficie como se muestra en la [Figura 6](#). Si existiera esa componente  $E_t$ , haría que las cargas móviles se movieran paralelamente a la superficie, rompiendo la situación de equilibrio electrostático. Y como  $E_t = 0$ , la única posibilidad es que la componente  $E_n$  sea distinta de cero.

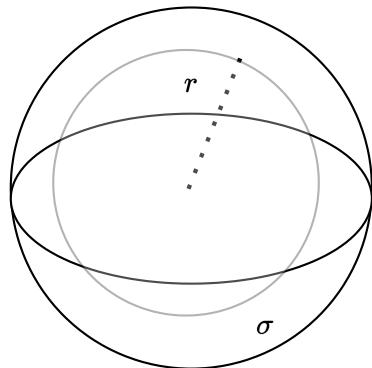


Figura 7: Conductor esférico cargado, con una superficie gaussiana en su interior.

Toda la carga de un conductor aislado se encuentra en su superficie. Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie cerrada que se encuentre dentro del conductor, como se ve en la [Figura 7](#), y dado que sabemos que el campo dentro del conductor es  $\vec{E} = 0$ , también será igual a cero en esa superficie. Entonces la expresión del flujo queda:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{q_{\text{en}}}{\epsilon_0},$$

indicándonos que la carga en el interior de la superficie es  $q_{\text{en}} = 0$ . Y si hacemos la superficie gaussiana lo más cercana posible a la superficie del conductor, nos damos cuenta de que la única posibilidad es que la carga del conductor se encuentre completamente en su superficie únicamente.

El campo eléctrico en un conductor aislado es igual a:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

donde  $\sigma$  es la carga superficial en el punto donde estamos calculando el campo. Consideremos la superficie de un conductor como vemos en la [Figura 6](#). Como superficie gaussiana elegimos un cilindro. Aplicando la ley de Gauss a ese cilindro, sabiendo que en los lados (como el elemento de área es perpendicular al campo) el flujo es cero, y como en la tapa que está en el interior del conductor el campo es cero, solo tenemos flujo atravesando la tapa superior del cilindro. Notar que la carga  $q_{\text{en}} = \sigma A$ , siendo  $A$  la superficie de la tapa del cilindro. Por tanto:

$$\int_{\text{tapa}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Así que despejando obtenemos el resultado esperado,  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Recordando que este campo es siempre perpendicular a la superficie del conductor, como ya razonamos en apartados anteriores. Si  $\sigma$  es positiva el campo apunta hacia afuera de la superficie y si  $\sigma$  es negativa el campo apunta hacia dentro del conductor.

#### Ejemplo 4. Una esfera dentro de cascarón esférico

Consideremos una esfera conductora sólida con una carga positiva neta  $3Q$  y radio  $a$  ([Figura 8](#)). El cascarón esférico concéntrico tiene un radio interior  $b$  y un radio exterior  $c$ , con una carga neta de  $-Q$ . El radio  $b$  es mayor que el radio de la esfera ( $b > a$ ). Usamos la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico  $\vec{E}$  en las diferentes regiones del sistema. Dado:

- ▶ La esfera tiene una carga positiva neta  $+3Q$  y un radio  $a$ .
- ▶ El cascarón es concéntrico con la esfera, tiene un radio interior  $b$  y un radio exterior  $c$ , y tiene una carga neta  $-Q$ .

Recordemos que, debido a la simetría esférica, el campo eléctrico solo depende de la distancia radial  $r$  desde el centro.

- ▶ Cuando  $a < r < b$ . En esta región, estamos dentro del espacio vacío entre la

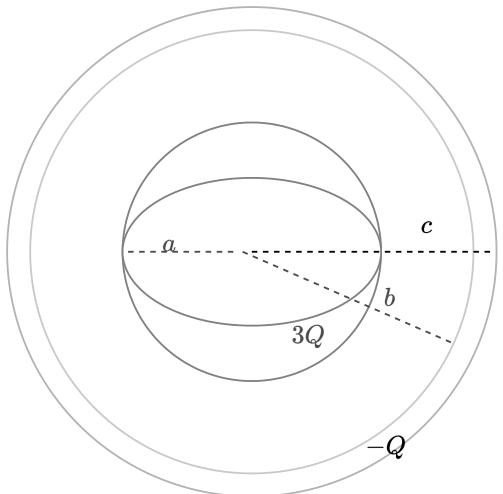


Figura 8: Esfera cargada del [Ejemplo 4](#).

esfera y el cascarón. La superficie gaussiana es una esfera de radio  $r$  tal que  $a < r < b$ . La carga encerrada por esta superficie gaussiana es simplemente la carga de la esfera, que es  $+3Q$ . Usamos la ley de Gauss:

$$\oint_{\text{gaussiana}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} .$$

Dado que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es radial y uniforme sobre la superficie gaussiana de radio  $r$ :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{3Q}{\epsilon_0} .$$

Despejando  $E$ :

$$E(r) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

- ▶ Cuando  $b < r < c$ . En esta región, estamos dentro del material del cascarón esférico conductor. Dado que el conductor en equilibrio electrostático tiene el campo eléctrico interno cero, el campo eléctrico dentro del material del conductor (en esta región) es:

$$E = 0 .$$

Esto implica que la carga neta  $-Q$  que posee el cascarón se distribuye desigualmente entre su superficie interior (radio  $b$ ) y la exterior (radio  $c$ ). Si hacemos la superficie esférica gaussiana en  $b < r < c$ , la carga neta que encierra debe ser cero. Por tanto en la superficie interior debe acumularse una carga  $-3Q$ , mientras que en la exterior (sabiendo que la carga neta del cascarón conductor es  $-Q$ ) debe ser  $+2Q$ .

- ▶ Cuando  $r > c$ . En esta región, estamos fuera del cascarón esférico. La superficie gaussiana es una esfera de radio  $r$  tal que  $r > c$ . La carga total encerrada por esta superficie gaussiana es la suma de la carga de la esfera y la carga del cascarón:

$$Q_{\text{enc}} = 3Q + (-Q) = 2Q .$$

Usamos la ley de Gauss nuevamente, dado que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es radial y uniforme sobre la superficie gaussiana de radio  $r$ :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\epsilon_0}.$$

Despejando  $E$ :

$$E(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Resumiendo, los campos eléctricos en las distintas regiones son:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } b < r < c \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > c \end{cases}.$$

## 2.5 El teorema de la divergencia o de Gauss

El teorema de la divergencia o teorema de Gauss en matemáticas relaciona el flujo de un campo vectorial  $\vec{E}$  en una superficie cerrada  $S$  con la integral de volumen  $V$  (del volumen encerrado por dicha superficie cerrada) de la divergencia de dicho campo vectorial. El teorema reza:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV. \quad (3)$$

No presentaremos una demostración matemática rigurosa pero sí un argumento heurístico que capta el contenido físico del teorema.

En efecto, supongamos que la superficie es un cubo. Nos centraremos en una de sus caras, valiendo el argumento para todas las otras. Tomamos un elemento de área en una cara ubicada en el plano  $yz$ . Entonces el elemento de área es  $dy \cdot dz$ . El campo en el interior inmediato del área vale  $\vec{E}$ , pero al flujo sólo contribuye la componente  $x$  que es perpendicular al plano  $yz$ . El mismo campo inmediatamente fuera de la superficie

es el mismo aumentado por un infinitésimo, esto es:

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx, \quad (4)$$

puesto que el campo varía a lo largo del eje  $x$  y la variación infinitesimal viene dada por la derivada parcial del campo vectorial a lo largo del eje  $x$ . Entonces el flujo del campo en ese elemento de área es:

$$d\Phi = \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx - E_x \right) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV. \quad (5)$$

Este razonamiento es válido para las tres direcciones del espacio, de manera que el flujo se convierte en:

$$d\phi = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV. \quad (6)$$

El término encerrado entre paréntesis es precisamente la divergencia del campo vectorial que se representa, utilizando el operador nabla, como  $\nabla \cdot \vec{E}$ . La integral de superficie se convierte, pues, en una integral de volumen de la divergencia del campo, con lo que queda probado el teorema. El teorema matemático de Gauss es muy importante y se utiliza con frecuencia tanto en electromagnetismo como en otras áreas de la Física.

## 2.6 La divergencia del campo eléctrico

La ley de Gauss se puede escribir en función de la divergencia del campo eléctrico. Recordemos el teorema de la divergencia de Gauss, que dice que si tenemos un volumen  $V$  encerrado por una superficie  $S$ , entonces

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV.$$

Aplicando este teorema a la ley de Gauss de la electrostática tenemos:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

y sabiendo que:

$$\frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

sustituyéndolo en la expresión tenemos:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

En esta ecuación, como el volumen de la integral es arbitrario, podemos elegir un volumen infinitesimal y deshacernos de la integral, de manera que nos queda:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Esta es otra forma de expresar el teorema de Gauss. Esta expresión será muy importante más adelante para entender el formalismo de las Ecuaciones de Maxwell.

En la siguiente vídeo-píldora podemos encontrar una demostración de la ley de Gauss.



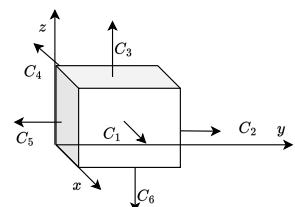
Accede al vídeo: Demostración de la Ley de Gauss.

## 2.7 Cuaderno de ejercicios

### Ejercicio

1.

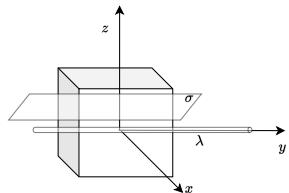
Tenemos un campo  $E = 2x\hat{x} + y\hat{y}$ . Calcula el flujo eléctrico que atraviesa cada una de las caras de un cubo de lado 1m. ¿Cuál es el flujo total? Solución:  $C_1 = 2, C_2 = 1, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = 0, \Phi_{total} = 3$ .



**Ejercicio****2.**

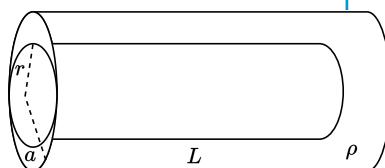
Tenemos un plano infinito con densidad superficial  $\sigma_s = 4 \mu\text{C/m}^2$  situado en  $z = 1 \text{ m}$ , y también tenemos una linea uniforme situada en el eje  $y$ , con una densidad  $\lambda = -3 \mu\text{C/m}$ . Calcula qué flujo neto atraviesa un cubo de lado 2 m que está centrado en el origen.

*Solución:*  $10/\epsilon_0 \mu\text{C}$ .

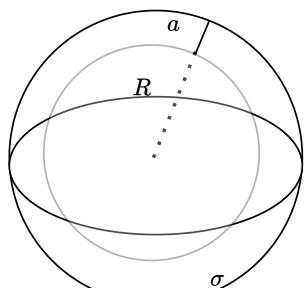
**Ejercicio****3.**

Un cilindro infinitamente largo tiene una carga por unidad de volumen  $\rho = \rho_0(1 - \frac{r^2}{a^2})$ . Si tenemos un cilindro concéntrico a este cilindro de radio  $r$  y longitud  $L$ : ¿cuál será la carga dentro de ese cilindro? ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior del cilindro de radio  $r$ ? *Solución:*

$$q_{\text{in}} = \pi \rho_0 L r^2 (2a^2 - r^2) / 2a^2 \text{ y } E = \frac{\rho_0 r (2a^2 - r^2)}{4\epsilon_0 a^2}.$$

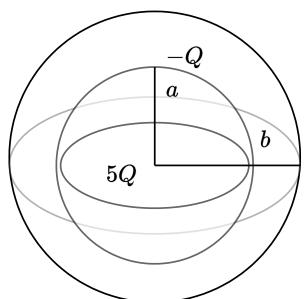
**Ejercicio****4.**

Tenemos una esfera metálica que tiene una densidad de carga superficial  $\sigma$ . El radio de la esfera es  $R$ . Calcula el campo eléctrico fuera de la esfera a un distancia  $a$  de la superficie exterior. *Solución:*  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(1 + \frac{a}{R})^{-2}$ .

**Ejercicio****5.**

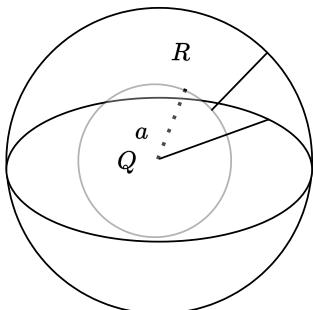
Tenemos dos cascarones esféricos conductores, de radios  $a$  y  $b$ . La carga en su interior es de  $5Q$  y  $-Q$ . Calcula el campo eléctrico en: a)  $r < a$ , b)  $a < r < b$  y c)  $r > b$ .

$$\text{Solución: a) } E = 0, \text{ b) } E = \frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ y c) } E = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 r^2}.$$



**Ejercicio****6.**

Tenemos una esfera conductora de radio  $R$ . Esta esfera tiene una cavidad central de radio  $a$ , y en el centro de la cavidad hay una carga  $Q$ . Calcula: a) ¿Cuál es la carga en la superficie externa del conductor, y en la interna? b) Calcula el campo en todos los puntos ( $r < a$ ,  $a < r < R$ ,  $r > R$ ). Solución: a)  $q_e = Q$ ,  $q_i = -Q$  y b)  $r < a$ ,  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $a < r < R$ ,  $E = 0$ ,  $r > R$ ,  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .



## 2.8 Referencias bibliográficas

Wittmann, A. D. (2020). Carl Friedrich Gauss and the Gauss Society: a brief overview.

*History of Geo-and Space Sciences*, 11(2), 199–205.