Teoría de campos

Oscilaciones forzadas

Índice

Esquema

Diagramas fásicos

$$\frac{x^2}{2E/k}+\frac{\dot{x}^2}{2E/m}=1$$

Resonancia en energía

$$\omega_E=\omega_0$$

Oscilaciones armónicas en dos dimensiones

$$A^2y^2-2ABxy\cos^2\delta+B^2x^2\cos^2\delta=B^2\left(A^2-x^2\right)\sin^2\delta$$

Resonancia en amplitud

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

Energía de un oscilador forzado

$$<T>=\frac{mA^2}{4}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2}$$

Oscilaciones forzadas

↓

Fuerza impulsora senoidal

$$m\ddot{x}=-kx-b\dot{x}+F_0\cos\omega t$$

$$x_p(t)=\frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2}}\cos\left(\omega t-\delta\right)$$

Principio de superposición

$$L=\frac{d^2}{dt^2}+a\frac{d}{dt}+b$$

$$L\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_n(t)\right)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n F_n(t)$$

Series de Fourier

$$F(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)$$

Ideas clave

8.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiaremos el concepto de diagrama fásico, para un oscilador armónico. A continuación examinaremos el caso de un oscilador en dos dimensiones. Posteriormente estudiaremos la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado cuando está sometido a una fuerza externa de carácter senoidal. Veremos cómo a través del principio de superposición, los resultados obtenidos para una fuerza con forma senoidal pueden generalizarse, aplicando las series de Fourier. Y por último estudiaremos el teorema de Fourier

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Conocer el concepto de **espacio y diagrama fásico** de un sistema mecánico como el oscilador armónico.
- Saber describir el movimiento vibratorio en **dos dimensiones**.
- Entender la ecuación de movimiento y las soluciones de un oscilador armónico amortiguado al que se le aplica una forma senoidal, lo que se conoce como **oscilaciones forzadas**.
- Comprender el **principio de superposición** para la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado.
- Conocer el **teorema de Fourier** y saber descomponer cualquier fuerza periódica en una serie de senos y cosenos de frecuencia entera creciente.

8.2 Diagrama fásico

Hemos visto, en el capítulo anterior, que la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple en una dimensión se puede resolver, obteniéndose la ecuación temporal del movimiento, es decir, $x = x(t)$. Consideremos ahora un espacio abstracto, cuyas coordenadas será la posición x y la velocidad $\dot{x}$. Las coordenadas de este espacio son dos porque dos son las condiciones iniciales que hay que especificar para resolver el movimiento, puesto que la ecuación dinámica es una ecuación diferencial de segundo orden. Si tuviéramos un sistema con n grados de libertad, construiríamos un espacio de $2n$ dimensiones. A este espacio se lo conoce como *espacio fásico*. En él un punto $P(x, \dot{x})$ especifica el estado de movimiento del sistema y recorre una trayectoria, que en el caso de un oscilador con un grado de libertad, será una trayectoria en un plano. Veamos qué tipo de trayectoria resulta para un oscilador armónico simple. La ecuación temporal de movimiento ya vimos que era:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{1}$$

donde A es la amplitud, ω la pulsación y ϕ la fase. La velocidad se obtiene derivando esta ecuación respecto al tiempo y es:

$$\dot{x} = \omega A\sin(\omega t + \phi)\ . \tag{2}$$

Ahora hacemos uso de la identidad trigonométrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2 A^2} = 1\,, \tag{3}$$

que es la ecuación de una elipse en el espacio de fases. Recordando que la energía es igual a $E = 1/2kA^2$ y que $k = m\omega^2$ podemos escribir:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1\,, \tag{4}$$

que representa una familia de elipses para cada valor de la energía. Al conjunto de todas las trayectorias posibles en el espacio de fases se lo llama *diagrama de fases*.

Dos trayectorias en el espacio de fases no se pueden cortar, pues si se cortaran podríamos escoger como condiciones iniciales $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$ el punto de corte, y entonces, la partícula podría seguir dos trayectorias diferentes, lo que es imposible, puesto que la solución de la ecuación diferencial es única. La trayectoria elíptica en el espacio de fases es recorrida en el sentido de las agujas del reloj, puesto que cuando $x > 0$ entonces la velocidad es negativa y cuando $x < 0$ entonces la velocidad es positiva.

8.3 Oscilaciones armónicas en dos dimensiones

Supongamos ahora que la partícula posee dos grados de libertad y que puede oscilar en un plano. La fuerza recuperadora será entonces:

$$\vec{F} = -k\vec{r}\,, \tag{5}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición respecto al centro de fuerzas. Escribimos ahora esta ecuación en componentes, con coordenadas polares:

$$F_x = -kr\cos\theta = -kx\,, \tag{6}$$

$$F_y = -kr\sin\theta = -ky\,. \tag{7}$$

Las ecuaciones de movimiento son, por tanto:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{8}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0\,, \tag{9}$$

donde, como siempre, $k = m\omega^2$. Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \alpha)\ , \tag{10}$$

$$y(t) = B\cos(\omega t - \beta)\ . \tag{11}$$

Por tanto, la partícula oscila en ambas direcciones ortogonales, con la misma frecuencia, pero en principio con amplitudes y fases diferentes. Vamos a componer ahora ambos movimientos para averiguar la ecuación de la trayectoria. La Ecuación (11) la podemos escribir:

$$y(t) = B\cos\left(\omega t - \alpha + (\alpha - \beta)\right) . \tag{12}$$

Llamando $\delta = \alpha - \beta$ tenemos:

$$y(t) = B\cos\left(\omega t - \alpha + \delta\right) = B\left[\cos\left(\omega t - \alpha\right)\cos\delta - \sin\left(\omega t - \alpha\right)\sin\delta\right], \tag{13}$$

donde en el último paso hemos aplicado la fórmula trigonométrica del coseno de la suma. Ahora, de acuerdo con la Ecuación (10):

$$\cos\left(\omega t - \alpha\right) = \frac{x}{A}, \tag{14}$$

y

$$\sin\left(\omega t - \alpha\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\omega t - \alpha\right)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \tag{15}$$

de donde la Ecuación (13) resulta en:

$$y = B\frac{x}{A}\cos\delta - B\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\delta . \tag{16}$$

Aislamos ahora la raíz cuadrada en el segundo miembro:

$$Ay - Bx\cos\delta = -B\sqrt{A^2 - x^2}\sin\delta , \tag{17}$$

y elevamos al cuadrado:

$$\left(Ay - Bx\cos\delta\right)^2 = B^2\left(A^2 - x^2\right)\sin^2\delta , \tag{18}$$

$$A^2y^2 - 2ABxy\cos^2\delta + B^2x^2\cos^2\delta = B^2\left(A^2 - x^2\right)\sin^2\delta , \tag{19}$$

y reordenado resulta:

$$A^2y^2 - 2ABxy\cos^2\delta + B^2x^2 = A^2B^2\sin^2\delta\,. \tag{20}$$

Si la diferencia de fase es de $\delta = \pm\pi/2$ entonces $\cos\delta = 0$ y $\sin\delta = 1$ y resulta:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,, \tag{21}$$

que es la ecuación de una elipse. Si además las amplitudes son iguales ($A = B$) entonces:

$$x^2 + y^2 = A^2\,, \tag{22}$$

que es la ecuación de una circunferencia. Si la diferencia de fase es cero $\delta = 0$ entonces $\cos\delta = 1$ y $\sin\delta = 0$ y tendremos:

$$A^2y^2 - 2ABxy + B^2x^2 = 0\,, \tag{23}$$

que se puede reescribir como:

$$(Ay - Bx)^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{B}{A}x\,, \tag{24}$$

que es la ecuación de una recta. Si la diferencia de fase es $\delta = \pm\pi$ entonces $\cos\delta = -1$ y $\sin\delta = 0$ y resulta:

$$A^2y^2 + 2ABxy + B^2x^2 = 0\,, \tag{25}$$

que resulta en:

$$(Ay + Bx)^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{B}{A}x\,, \tag{26}$$

que es una recta de pendiente opuesta a la anterior. Si las pulsaciones de los movimientos según x y según y no son iguales, entonces la partícula describe curvas que se llaman *curvas de Lissajous*. Es el caso cuando:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_x t - \alpha\right)\,, \tag{27}$$

$$y(t) = B\cos\left(\omega_y t - \beta\right)\,. \tag{28}$$

Ocurre que si el cociente ω_x/ω_y es un número racional, entonces la curva de Lissajous es una curva cerrada. Sin embargo, si el cociente no es racional, la curva es abierta y se puede demostrar que, conforme transcurre el tiempo los puntos de la trayectoria rellenan todo el rectángulo de lados $2A \times 2B$. Este es un ejemplo de un sistema en el que una pequeña modificación de las condiciones, en este caso del cociente de las pulsaciones, aunque sea en una cantidad infinitesimal, conduce a resultados cualitativamente muy distintos.

8.4 Oscilaciones forzadas

Hemos estudiado el caso de un oscilador armónico amortiguado por una fuerza proporcional a la velocidad. Este tardaría un tiempo infinito en detenerse. Por supuesto, esto se debe a que tratamos con una idealización. En el sistema real, al aproximarse la velocidad de oscilación a cero, intervienen otro tipo de interacciones que hacen detenerse al oscilador en un tiempo finito. Vamos a estudiar ahora el caso de que al oscilador amortiguado se le suministre energía desde una fuente externa. Para ello seguiremos tratando con sistemas lineales y comenzaremos por suponer que la fuerza externa aplicada es armónica. Más adelante comprobaremos la utilidad de esta simplificación al estudiar las series de Fourier.

8.5 Oscilador con fuerza impulsora senoidal

Supongamos una masa m sujeta a un muelle de constante recuperadora k, con una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, cuya constante es b y sujeta a una fuerza impulsora armónica de amplitud F_0 y frecuencia ω. Entonces la ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \,. \tag{29}$$

Reescribimos la ecuación como:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t\,, \tag{30}$$

donde $\beta = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$ y $A = F_0/m$. La solución de esta ecuación diferencial es igual a la suma de la solución de la ecuación homogénea (sin fuerza impulsora) x_h más una solución particular x_p, es decir: $x(t) = x_h(t)+x_p(t)$. La solución de la ecuación homogénea ya la conocemos y es:

$$x_h(t) = e^{-\beta t}\left[A_1\exp\left(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t\right) + A_2\exp\left(-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t\right)\right]\,. \tag{31}$$

Como solución particular ensayamos la función:

$$x_p(t) = D\cos(\omega t-\delta)\,. \tag{32}$$

Sustituimos esta función en la Ecuación (30):

$$-D\omega^2\cos(\omega t-\delta) - 2\beta\omega D\sin(\omega t-\delta) + \omega_0^2 D\cos(\omega t-\delta) = A\cos\omega t\,. \tag{33}$$

Ahora desarrollamos $\cos(\omega t-\delta) = \cos\omega t\cos\delta+\sin\omega t\sin\delta$ y $\sin(\omega t-\delta) = \sin\omega t\cos\delta-\cos\omega t\sin\delta$:

$$\begin{gathered}-D\omega^2\left[\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta\right] - 2\beta\omega D\left[\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta\right] + \\ +\omega_0^2 D\left[\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta\right] = A\cos\omega t\,.\end{gathered} \tag{34}$$

Agrupamos términos:

$$\begin{gathered}\left\{A - D\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\delta + 2\omega\beta\sin\delta\right]\right\}\cos\omega t \\ -\left\{D\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\delta - 2\omega\beta\cos\delta\right]\right\}\sin\omega t = 0.\end{gathered} \tag{35}$$

Los coeficientes de las funciones seno y coseno, puesto que son funciones linealmente independientes, han de ser idénticamente nulos. Del coeficiente del seno podemos deducir:

$$\tan\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\,. \tag{36}$$

Usando ahora la relación trigonométrica $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, deducimos:

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}\,, \tag{37}$$

y usando la fórmula trigonométrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, obtenemos, para el seno:

$$\sin\delta = \sqrt{1-\cos^2\delta} = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}\,. \tag{38}$$

Anulando el coeficiente del coseno de la Ecuación (35), obtenemos para la amplitud:

$$D = \frac{A}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\delta + 2\omega\beta\sin\delta}\,. \tag{39}$$

Y sustituyendo los valores de la Ecuación (37) y la Ecuación (38):

$$D = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}\,. \tag{40}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}\cos\left(\omega t - \delta\right)\,, \tag{41}$$

donde:

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\,. \tag{42}$$

La solución particular es importante porque la solución homogénea (la del oscilador amortiguado sin fuerza impulsora) decae con el tiempo con el factor exponencial $e^{-\beta t}$. A esta solución evanescente se la llama *transitoria,* mientras que la solución particular es la *estacionaria*.

Podemos observar en la Ecuación (40) que conforme la pulsación de la fuerza impulsora ω se acerca a la pulsación propia del oscilador ω_0 el denominador disminuye, por lo que aumenta la amplitud de la solución estacionaria.

Vamos a calcular el valor exacto para el que la amplitud de la oscilación forzada es máxima. Para ello calculamos la derivada:

$$\left[\frac{dD}{d\omega}\right]_{\omega_R} = 0\,, \tag{43}$$

$$\frac{dD}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 8\omega\beta^2\right] \tag{44}$$

$$-\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right) + 2\beta^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \tag{45}$$

En el caso ideal de que no existiese amortiguamiento $\beta = 0$, cuando la frecuencia de la fuerza impulsora fuera igual a la pulsación propia del oscilador $\omega = \omega_0$ la amplitud de la oscilación se haría muy grande, de hecho tendería a infinito. Si, en cambio, hay amortiguación, entonces la amplitud se hace máxima cuando la pulsación de la fuerza impulsora es igual a $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre oscilaciones forzadas:

Accede al vídeo: Oscilaciones forzadas y fuerza impulsora senoidal.

8.6 Energía de un oscilador forzado

Calculemos ahora la energía cinética del oscilador amortiguado sometido a una fuerza impulsora. Para ello calculamos la velocidad (a partir de la solución estacionaria) derivando respecto del tiempo la Ecuación (41):

$$\dot{x} = \frac{-\omega A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \sin(\omega t - \delta) \ . \tag{46}$$

La energía cinética será:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{mA^2}{2}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2} \sin^2(\omega t - \delta) \ . \tag{47}$$

Para hallar un valor de la energía cinética que sea independiente del tiempo calculemos el promedio temporal en un período $\tau = 2\pi/\omega$:

$$\langle T\rangle = \frac{mA^2}{2}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2} \left\langle \sin^2(\omega t - \delta)\right\rangle \ . \tag{48}$$

El promedio temporal en un período del seno al cuadrado es:

$$\left\langle \sin^2(\omega t - \delta)\right\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - \delta)\, dt \, . \tag{49}$$

Para resolver esta integral recordemos la fórmula trigonométrica:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \, , \tag{50}$$

de donde:

$$\left\langle \sin^2(\omega t - \delta)\right\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1-\cos(2(\omega t - \delta))}{2} dt = \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} \, . \tag{51}$$

Por tanto el promedio temporal de la energía cinética queda:

$$\langle T\rangle = \frac{mA^2}{4}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2} \, . \tag{52}$$

Calculamos ahora el valor de la frecuencia de la fuerza impulsora ω_E para el que el promedio de la energía cinética es máximo, y lo hacemos igualando a cero la derivada respecto de la pulsación:

$$\left(\frac{d\langle T\rangle}{d\omega}\right)_{\omega_E}=0\,. \tag{53}$$

Derivamos respecto de ω la Ecuación (52):

$$\frac{d\langle T\rangle}{d\omega}=\frac{mA^2}{4}\frac{2\omega\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2\right]-\omega^2\left[-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\omega\beta^2\right]}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2\right]^2}\,. \tag{54}$$

El numerador (que es el que tenemos que igualar a cero) lo podemos simplificar:

$$2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+8\omega^3\beta^2+4\omega^3\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-8\omega^3\beta^2=$$

$$=2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\omega^2\right]=2\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\omega_0^2+\omega^2\right]\,. \tag{55}$$

Este numerador será cero cuando $\omega=\omega_E$:

$$2\omega_E\left(\omega_0^2-\omega_E^2\right)\left(\omega_0^2+\omega_E^2\right)=0\ \Rightarrow\ \omega_E=\omega_0\,. \tag{56}$$

Es decir, que la máxima energía cinética del oscilador amortiguado forzado se alcanza cuando la frecuencia de la fuerza impulsora iguala la pulsación natural del oscilador.

Al fenómeno consistente en que la amplitud o la energía cinética alcance un máximo se lo conoce como *resonancia*. Hemos visto que la resonancia en amplitud se alcanza cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a $\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, mientras que la resonancia en la energía cinética se alcanza cuando la frecuencia impulsora es ω_0. Como la energía potencial es proporcional al cuadrado de la amplitud, alcanzará la resonancia para la misma frecuencia que la amplitud. Esta diferencia entre la resonancia de la energía cinética y de la potencial se debe a que el sistema no es conservativo, puesto que se está disipando energía a través de la amortiguación.

El fenómeno de la resonancia tiene gran importancia práctica ya que, si las fuerzas que actúan igualan a la pulsación natural, puede tener consecuencias catastróficas. Esto es lo que ocurrió con el puente de Tacoma, que colapsó en 1940. La resonancia tiene aplicaciones importantes, tales como la resonancia magnética o la sintonización de frecuencias en las tecnologías de telecomunicaciones. Para más ejemplos de fenómenos de resonancia en la vida real, puedes consultar (Peralta et al., 2009).

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el tema de las resonancias:

Accede al vídeo: Resonancias.

8.7 Principio de superposición

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\right) x(t) = F(t)\,. \tag{57}$$

Lo que actúa sobre $x(t)$ es un *operador diferencial lineal* y lo representaremos por L:

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\,. \tag{58}$$

Que sea un operador lineal significa que cumple el *principio de superposición*:

$$L\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n L\left(x_n(t)\right)\,. \tag{59}$$

Por tanto, si tenemos $L\left(x_i(t)\right) = F_i(t)$, se cumplirá:

$$L\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n F_n(t)\,. \tag{60}$$

Eso significa que si la fuerza es una suma de fuerzas de tipo senoidal:

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos\left(\omega_n t - \phi_n\right) \; . \tag{61}$$

La solución será de la forma:

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos\left(\omega_n t - \phi_n - \delta_n\right) \; , \tag{62}$$

con

$$\delta_n = \arctan\left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right) \; . \tag{63}$$

Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre el principio de superposición:

Accede al vídeo: Principio de superposición.

8.8 Series de Fourier

Hemos visto, pues, que si la fuerza impulsora puede expresarse como una suma de fuerzas de tipo senoidal, entonces la solución, por el principio de superposición, podrá expresarse también como una suma de soluciones senoidales.

La clave está en que toda función periódica puede expresarse siempre como una suma de senos y cosenos. Es lo que se conoce como *teorema de Fourier.*

Teorema 1: Teorema de Fourier

Toda función periódica, de período $\tau = 2\pi/\omega$, que cumpla:

$$F(t + \tau) = F(t) \, , \tag{64}$$

se puede expresar como suma de senos y cosenos:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right) . \tag{65}$$

El conjunto de funciones:

$$\{1,\ \cos \omega t,\ \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, ..., \cos n\omega t,\ \sin n\omega t, ...\} \ , \tag{66}$$

conocido como *sistema trigonométrico,* es un conjunto de funciones que se pueden concebir como vectores linealmente independientes y ortogonales de un espacio vectorial de funciones periódicas. El producto escalar se define como la integral en un período del producto de dos funciones. Probaremos que son ortogonales:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} 1 \cdot \cos n\omega t dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} 1 \cdot \sin n\omega t dt = 0 \, , \tag{67}$$

puesto que la integral del seno o del coseno en un período es evidentemente cero. Ahora probaremos que si $n \neq m$, entonces:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2} \left(\cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t \right) dt = 0 \, , \tag{68}$$

donde hemos usado la relación $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, y que la integral de un coseno en un período es cero. Si $n = m$ tenemos:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos^2 n\omega t dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2n\omega t \right) dt =$$

$$= \left[\frac{t}{2} \right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = \frac{\pi}{\omega} \, . \tag{69}$$

Del mismo modo se puede proceder para demostrar que los senos son funciones ortogonales y que el seno y el coseno son funciones ortogonales entre sí.

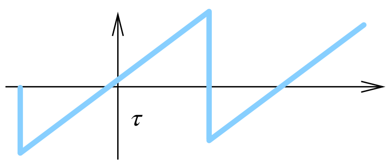

Figura 1: Fuerza impulsora en forma de diente de sierra con período τ. Elaboración propia.

Ahora bien, en un espacio vectorial en

el que se ha definido un producto es-

calar (que en este caso, insistamos, es la integral a un período del producto de las funciones, como vectores), la componente de un vector se puede obtener multiplicando escalarmente ese vector por el vector de la base correspondiente. En este caso, dividiendo por la norma π/ω, puesto que los vectores de la base no están normalizados. Así los coeficientes de la *serie de Fourier* serán:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t)\cos n\omega t dt\,, \tag{70}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t)\sin n\omega t dt\,. \tag{71}$$

Ejemplo 1. Fuerza impulsora en diente de sierra

Sea una fuerza impulsora en forma de diente de sierra, de período $\tau = 2\pi/\omega$, véase la Figura 1. Esta función es impar, pues se cumple $F(-t) = -F(t)$ y tiene la forma:

$$F(t) = A\frac{t}{\tau} = \frac{\omega A}{2\pi}t \qquad -\tau/2 < t < \tau/2\,. \tag{72}$$

Los coeficientes a_n son nulos, porque el integrando de la Ecuación (70) es el producto de una función impar y una función par, el coseno, que es, por tanto, una función impar; y la integral en un período de una función impar es cero. Los coeficientes b_n vienen dados por:

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\frac{\omega A}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t\sin n\omega t dt\,. \tag{73}$$

Esta integral la resolvemos por integración por partes. Recordemos que la integración por partes consiste en que si tenemos $d(uv) = udv + vdu$ esto lleva a $\int udv = uv - \int vdu$. Por tanto, identificando $u = t$ y $v = \sin n\omega t$,resulta:

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left(\left[-\frac{t\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} - \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} -\frac{\cos n\omega t}{n\omega}dt\right) =$$

$$= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left[-\frac{t\cos n\omega t}{n\omega}+\frac{\sin n\omega t}{n^2\omega^2}\right]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\frac{2\pi}{n\omega^2}(-1)^{n+1} = \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}\,. \qquad (74)$$

El resultado es, pues:

$$F(t) = \frac{A}{\pi}\left[\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + ...\right]\,. \qquad (75)$$

8.9 Referencias bibliográficas

Peralta, J. A., Reyes, P., & Muñoz, A. G. (2009). El fenómeno de la resonancia. *Latin-American Journal of Physics Education*, 3(3), 18.

8.10 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Calcular el período que ha de tener un oscilador armónico para que su diagrama en el espacio de fases sea una circunferencia. *Solución*: 6.28 s.

Ejercicio 2. Sean dos osciladores armónicos perpendiculares de la misma frecuencia. Si la amplitud del oscilador en el eje x es de 2 m y la amplitud del oscilador en el eje y es igual a 0.45 m, suponiendo que la diferencia de fase sea cero, entonces la trayectoria es una recta. Calcular la pendiente de la recta. *Solución*: 0.225.

Ejercicio 3. Una masa de 1 kg unida a un muelle de constante de recuperación k tiene una frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = 2\pi/3\,\mathrm{s}^{-1}$. El sistema está amortiguado con $\beta = \omega_0/4$ y es forzado por una fuerza de la forma $F_0\cos\omega t$ con $F_0 =$

2 N . Calcular la amplitud del movimiento estacionario para $\omega = 1/2\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. *Solución*: 0.56 m.

Ejercicio 4. Un objeto de masa 0.2 kg está unido a un muelle de constante elástica 80 Nm^{-1}. El objeto está sujeto a una fuerza de resistencia dada por $-Rv$, donde v es la velocidad y $R = 4\,\mathrm{Nm}^{-1}\mathrm{s}$. Supongamos que el sistema oscila con la frecuencia de un oscilador amortiguado y que está sujeto a una fuerza impulsora de la forma $F(t) = F_0 \sin \omega t$, con $F_0 = 2$ N y $\omega = 30$ rad/s. En el estado estacionario, calcular la amplitud de la oscilación forzada. *Solución*: 1.28 cm.

Ejercicio 5. Dado un cuerpo de masa 2 kg, unido a un muelle de constante elástica 90 N/m y sometido a una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad de constante $R = 6\,\mathrm{Nm}^{-1}\mathrm{s}$, si está sujeto a una fuerza senoidal, calcular la frecuencia angular de la fuerza impulsora para que la amplitud del movimiento estacionario sea máxima. *Solución*: 6.36 rad/s.

Ejercicio 6. Sea un objeto de masa 1 kg unido a un muelle de constante elástica 50 N/m. El objeto está sometido a una amortiguación viscosa, proporcional a la velocidad, de coeficiente $R = 5\,\mathrm{Nm}^{-1}\mathrm{s}$ y a una fuerza impulsora senoidal de amplitud 10 N. Calcular la energía cinética promedio del sistema cuando está en resonancia. *Solución*: 0.1 J.

Ejercicio 7. Considérese una fuerza impulsora en la forma de media sinusoide, de la forma $F(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier. *Solución*: $a_n = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(n^2-1)}, & n\ par \\ 0, & n\ impar \end{cases}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$ si $n \geq 2$.