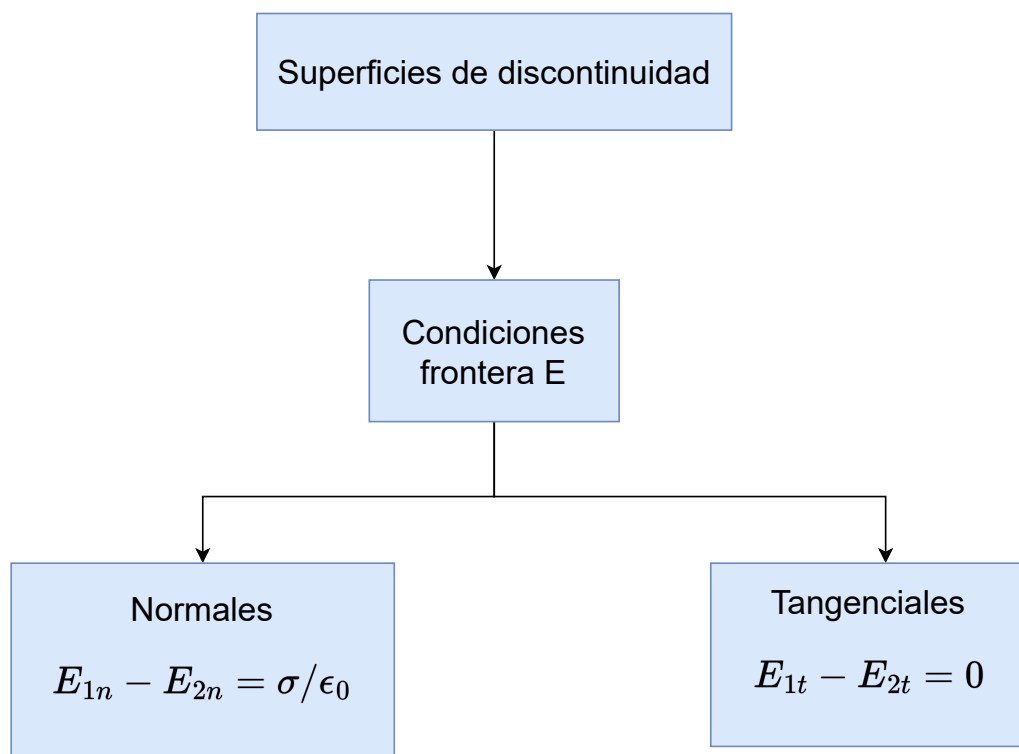
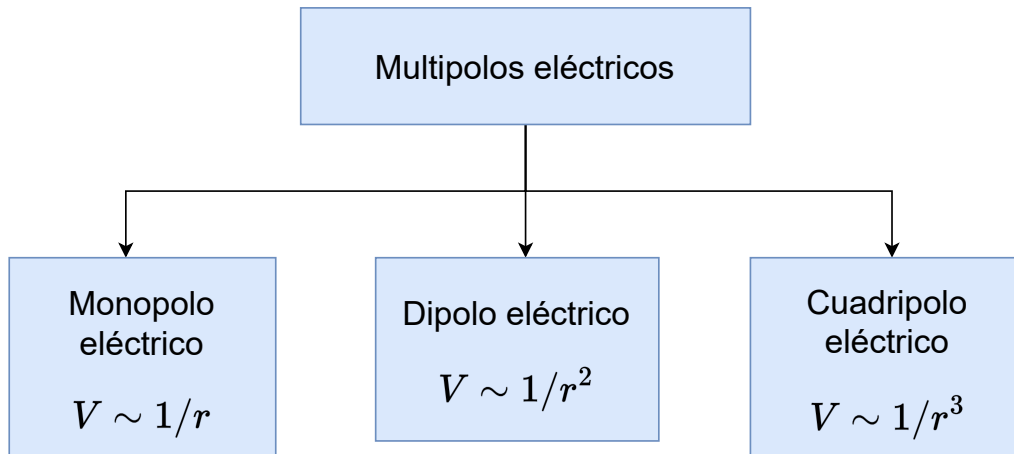


---

# Multipolos eléctricos y condiciones de frontera

# Índice

Esquema. . . . .	2
Ideas clave . . . . .	3
4.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
4.2 Desarrollos multipolares del potencial. . . . .	4
4.3 Dipolo eléctrico. . . . .	6
4.4 Cuadripolo eléctrico . . . . .	8
4.5 Dipolo y campo externo . . . . .	12
4.6 Superficies de discontinuidad . . . . .	13
4.7 Condiciones de frontera . . . . .	14
4.8 Cuaderno de ejercicios . . . . .	16
4.9 Referencias bibliográficas . . . . .	17



### 4.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos visto lo que pasa cuando tenemos cargas en situaciones estáticas, cuál es el campo eléctrico y el potencial de un sistema de cargas, o de una distribución de cargas. La pregunta que queremos resolver ahora en este capítulo es qué pasa si tenemos un sistema de cargas en el que nos encontramos lo suficientemente lejos de las cargas como para que parezcan un punto en la distancia.

Podemos pensar que una buena aproximación para el valor del potencial sería  $V \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ , donde  $Q$  es la carga total. Pero nos interesa tener algo más preciso que ese valor. Para eso se hace lo que se llama un *desarrollo multipolar*. Y como es obvio los términos que van a dominar de este desarrollo son los primeros, que son el término *monopolar* y el *dipolar*.

Añadiremos a este tema un apartado importante que no nos hemos referido hasta ahora, pero será importante saberlo para el capítulo siguiente donde tendremos medios materiales, y encontraremos lo que se llama superficies de discontinuidad, es decir, dos materiales diferentes. Aprenderemos cómo transiciona el campo eléctrico de un medio a otro y si es continuo o no. Con más detalle, los objetivos del tema son:

- ▶ Comprender que se puede hacer un desarrollo multipolar del potencial cuando estamos lo suficientemente lejos de la fuente de carga.
- ▶ Entender cuáles son los términos **monopolar** y **dipolar**.
- ▶ Saber que existe el término **cuadripolar** y superiores, y entender cómo se pueden calcular.
- ▶ Entender qué pasa con el campo eléctrico en una superficie de discontinuidad.

## 4.2 Desarrollos multipolares del potencial

Hemos visto que para calcular el potencial eléctrico debido a una distribución arbitraria de cargas como se muestra en la [Figura 1](#) se determina con la siguiente expresión:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1)$$

donde la suma se toma sobre todas las cargas puntuales,  $\vec{r}_i$  es la posición de cada carga en el sistema de referencia elegido y  $\vec{r}$  es la posición en la que se desea muestrear el valor del campo eléctrico.

Es evidente de la [Ecuación \(1\)](#) que cada sumando tiene una componente que depende de la distancia de cada carga al punto de muestreo en el denominador. En el caso de sistemas complejos estos cálculos se vuelven muy tediosos rápidamente. Sin embargo esta dependencia se puede reescribir así:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \theta_i)^{1/2}} = \frac{1}{r(1+t)^{1/2}}, \quad (2)$$

donde  $t = -2\frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2$ , y donde  $r = |\vec{r}|$  y  $r_i = |\vec{r}_i|$  las distancias respecto al origen de coordenadas. De esta manera la inversa de la distancia

relativa se puede aproximar vía el desarrollo por suma de potencias siguiente:

$$\frac{1}{(1+t)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \dots \quad (3)$$

Es importante notar que usando este desarrollo de potencias cada término de la suma infinita depende de una potencia cada vez mayor de la variable  $t$ , la cual a su vez depende del cociente  $r_i/r$ . Esto nos permite truncar esta expansión a segundo orden, y despreciar los términos  $(r_i/r)^3$  y de orden superior. Considerando este escenario la

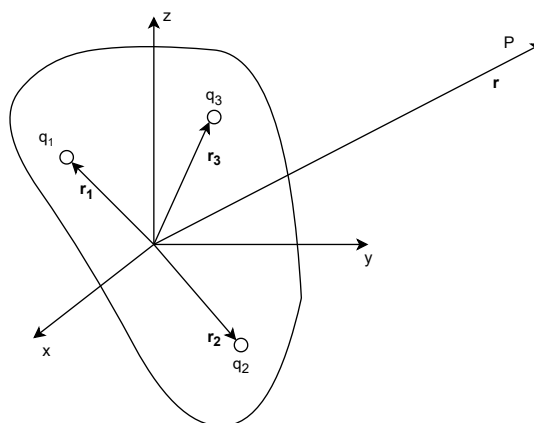


Figura 1: Se muestra el sistema de cargas puntuales para el que se realiza el cálculo multipolar del potencial.

Ecuación (3) puede escribirse así:

$$(1+t)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left[ -2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right] + \frac{3}{8} \left[ -2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right]^2, \quad (4)$$

$$(1+t)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \frac{1}{2} \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1). \quad (5)$$

Reemplazando la Ecuación (5) en la Ecuación (2), la Ecuación (1) puede reescribirse como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i=1}^N \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) + \dots \quad (6)$$

Esta nueva expansión se llama *desarrollo multipolar del potencial eléctrico* y, además de su simplicidad matemática, permite una interpretación física *efectiva* sobre las propiedades eléctricas del sistema de cargas. Matemáticamente es importante notar que ahora cada una de estas sumas depende exclusivamente de la distancia de cada carga al origen de coordenadas, y del ángulo que este forma con la dirección del punto de muestreo. Cada una de estas sumas recibe el nombre de término monopolar, término dipolar, término cuadripolar, etc., y que su contribución al campo eléctrico total depende de la distancia con respecto al punto de muestreo, como  $1/r$ ,  $1/r^2$ ,  $1/r^3$ , etc.

Cabe mencionar que la magnitud de todos estos términos, con excepción del término monopolar, depende fuertemente del sistema de coordenadas (explícitamente del ángulo formado por la dirección  $\vec{r}$  y de  $\vec{r}_i$ ). En la práctica, uno puede escoger un origen de coordenadas que elimine alguno de los términos de la expansión. En muchas ocasiones es útil expresar esta dependencia de la siguiente manera:

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r r_i} = \hat{r} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \quad (7)$$

El primer término, el monopolar, contiene el sumatorio de todas las cargas, es decir la carga neta total del sistema:

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Y para una distribución continua de cargas, este término puede escribirse fácilmente como:

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

A continuación analizaremos con más detalle los términos dipolar y cuadripolar del potencial eléctrico.

## 4.3 Dipolo eléctrico

Muchas veces, especialmente cuando el signo de las cargas se anula, el segundo término de la expansión multipolar se vuelve el dominante en el cálculo del potencial eléctrico. El término dipolar hallado anteriormente es:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i. \quad (8)$$

Usando la expresión en la [Ecuación \(7\)](#), esta ecuación se puede escribir como:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \vec{p}, \quad (9)$$

donde toda la dependencia de la distribución espacial del sistema de cargas es contenido dentro del vector

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i.$$

A este vector  $\vec{p}$  se le denomina *momento dipolar* o *dipolo eléctrico* y, como ya se discutió, es una característica intrínseca del sistema de cargas. Para una distribución continua de cargas, ésta puede presentar una configuración dipolar cuyo momento se obtiene de la siguiente expresión:

$$\vec{p} = \int_V dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}').$$

Si os interesa saber un poco sobre el momento dipolar de un electrón como curiosidad, podéis leer ([Maldonado Luna, Braian Adair, 2020](#)).

### Ejemplo 1. Campo eléctrico de un dipolo

Las cargas  $Q$  y  $-Q$  se encuentran a una distancia  $d$  la una de la otra. Calcula el campo eléctrico producido por ellas a orden  $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ . Debido a que el sistema de cargas tiene una carga neta cero, el término líder de la expansión (6) es el dipolar. Consideremos que ambas cargas se alinean a lo largo del eje  $z$ , escogiendo el origen de coordenadas en el punto medio de la distancia entre ellos (el más conveniente debido a la simetría en el sistema). El momento dipolar es:

$$\vec{p} = (-Q) \left(-\frac{d}{2} \hat{z}\right) + (+Q) \left(+\frac{d}{2} \hat{z}\right) = +Qd \hat{z}.$$

Para un sistema binario de cargas iguales positiva y negativa, el momento dipolar se calcula como el producto de la carga individual por la distancia entre ellas, y el vector apunta desde la carga negativa a la positiva.

Reemplazando el momento dipolar en la ecuación de campo dipolar tenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{z} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta,$$

la cual es válida para todo punto del espacio. Hemos expresado el potencial en términos de la coordenada esférica polar  $\theta$ . Ahora, para hallar el campo eléctrico, el sistema de coordenadas más conveniente es el esférico, donde el gradiente

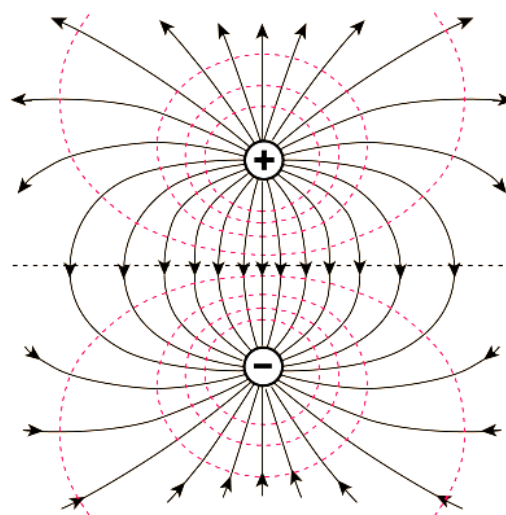


Figura 2: Podemos ver el campo eléctrico de un dipolo (las líneas negras), y las líneas equipotenciales (líneas discontinuas en color rojo). Fuente: Georgia State University.



viene dado por la siguiente terna:

$$E_r(\vec{r}) = -\frac{\partial\phi_D}{\partial r} \quad E_\theta(\vec{r}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi_D}{\partial\theta} \quad E_\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi_D}{\partial\varphi},$$

debido a que  $\phi_D$  solo depende de  $r$  y  $\theta$ , la componente azimutal es cero y el campo eléctrico solo tiene dos componentes:

$$E_r(r, \theta) = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta,$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta.$$

Entonces:

$$\vec{E}_D(r, \theta) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}).$$

La gráfica de superficies equipotenciales para este caso se muestra en la siguiente figura. Las líneas de campo eléctrico (en dirección opuesta al gradiente de campo escalar) también se muestran. Existen simulaciones por ordenador que permiten simular las líneas equipotenciales como podemos ver aquí ([Alzugaray, Gloria E and Massa, Marta B and Moreira, Marco A, 2014](#)).

## 4.4 Cuadripolo eléctrico

El siguiente término dominante de la [Ecuación \(6\)](#) es el término cuadripolar:

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i=1}^N \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1). \quad (10)$$

que reescribiremos de la forma:

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{i=1}^N \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1). \quad (11)$$

Atendiendo al término de dentro del sumatorio, éste se puede reescribir en función de las coordenadas cartesianas de la posición de las cargas:

$$\begin{aligned} \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) &= \frac{q_i}{2} (3 r^2 r_i^2 \cos^2 \theta_i - r^2 r_i^2) = \frac{q_i}{2} [3 (\vec{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r^2 r_i^2] = \\ &= \frac{3q_i}{2} (xx_i + yy_i + zz_i)^2 - \frac{q_i}{2} (x^2 + y^2 + z^2) r_i^2 = \\ &= \frac{3q_i}{2} (xx_i + yy_i + zz_i) (xx_i + yy_i + zz_i) - \frac{q_i}{2} (x^2 + y^2 + z^2) r_i^2. \end{aligned}$$

Utilizaremos la notación de las componentes cartesianas  $x_j$  y  $(x_i)_j$ , con  $j = 1, 2, 3$ , donde  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ , y escribiremos las sumas sobre las tres componentes con un sumatorio, distinguiendo con dos índices distintos ( $j$  y  $k$ ) cuando multipliquemos dos sumatorios por separado:

$$\begin{aligned} \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) &= \frac{3q_i}{2} \left( \sum_{j=1}^3 x_j (x_i)_j \right) \left( \sum_{k=1}^3 x_k (x_i)_k \right) - \frac{q_i r_i^2}{2} \sum_{j=1}^3 x_j x_j = \\ &= \frac{3q_i}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k (x_i)_j (x_i)_k - \frac{q_i r_i^2}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k \delta_{jk} = \\ &= \frac{q_i}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k (3(x_i)_j (x_i)_k - r_i^2 \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Para agrupar términos hemos utilizado convenientemente la *delta de Kronecker*, que recordemos  $\delta_{jk} = 0$ , cuando  $j \neq k$ , y  $\delta_{jk} = 1$  cuando  $j = k$ . Hemos conseguido así agrupar por sí sola la información de las posiciones del sistema de cargas discretas. Sustituyendo en la [Ecuación \(11\)](#), tenemos que:

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \sum_{j,k=1}^3 x_j \left( \sum_{i=1}^N q_i (3(x_i)_j (x_i)_k - r_i^2 \delta_{jk}) \right) x_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \sum_{j,k=1}^3 x_j Q_{jk} x_k, \quad (12)$$

donde  $Q_{jk}$  denota el *tensor momento cuadrupolar*, que condensa las características efectivas del sistema de carga, como habíamos desarrollado para el dipolo eléctrico. En este caso, se trata de un tensor de segundo rango, definido por:

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^N q_i (3(x_i)_j (x_i)_k - r_i^2 \delta_{jk}) , \quad (13)$$

donde distinguimos entre los elementos de mismo índice (en la diagonal del tensor), como por ejemplo:

$$Q_{xx} = \sum_{i=1}^N q_i (3x_i^2 - r_i^2) = \sum_{i=1}^N q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) ,$$

y los elementos con diferentes índices (fuera de la diagonal del tensor), como por ejemplo:

$$Q_{xy} = \sum_{i=1}^N 3q_i x_i y_i$$

De esta manera, la [Ecuación \(12\)](#) puede expresarse de manera compacta como una multiplicación matricial:

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \vec{r}^\dagger \overline{Q} \vec{r} , \quad (14)$$

representado por el vector posición columna  $\vec{r}$ , el vector posición fila  $\vec{r}^\dagger$  y la matriz del tensor  $\overline{Q}$ .

Si en lugar de una distribución de cargas discretas consideramos una distribución continua definida por la densidad de carga, puede deducirse de manera análoga a como venimos haciendo hasta ahora que el tensor momento cuadrupolar se calcula como:

$$Q_{jk} = \int_V dV' \rho(\vec{r}') (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk})$$

### Ejemplo 2. Potencial eléctrico de un cuadrupolo

Tres cargas están alineadas en el eje  $z$ , cada una de las exteriores distanciadas de la central por una distancia  $d$ . La carga central tiene una carga  $-2q$  y las exteriores  $q$  cada una. Calcula el campo eléctrico del sistema de cargas.

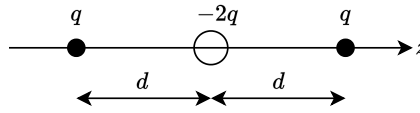


Figura 3: Sistema de cargas cuadrupolar

La carga neta del sistema es cero, por tanto el potencial eléctrico no tiene componente monopolar. De la misma manera, debido a la simetría de disposición de las cargas, el momento dipolar es cero:

$$\vec{p} = q(-d)\hat{z} + (-2q)\vec{0} + qd\hat{z} = \vec{0},$$

por lo que también el término dipolar del potencial es cero.

Calculemos ahora el tensor momento cuadrupolar a partir de la [Ecuación \(13\)](#). Es fácil comprobar que, puesto que las tres cargas están en  $x = y = 0$ , los elementos no diagonales del tensor son nulos:

$$Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0,$$

mientras que los diagonales son:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = q(-d^2) + (-2q) \cdot 0 + q(-d^2) = -2qd^2,$$

$$Q_{zz} = q \cdot 2d^2 + (-2q) \cdot 0 + q \cdot 2d^2 = 4qd^2.$$

El tensor puede escribirse de forma matricial como:

$$\overline{Q} = 2qd^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el potencial eléctrico cuadripolar a partir de la [Ecuación \(14\)](#):

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) = \phi_Q(\vec{r}) &= \frac{2qd^2}{8\pi\epsilon_0 r^5} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (-x^2 - y^2 + 2z^2) = \\ &= \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (-r^2 + 3z^2) = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( 3\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)\end{aligned}$$

Hemos obtenido el potencial en coordenadas esféricas, a partir del cual podemos calcular el campo eléctrico con:

$$E_r(\vec{r}) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad E_\theta(\vec{r}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad E_\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}.$$

De nuevo, debido a que  $\phi_Q$  solo depende de  $r$  y  $\theta$ , la componente azimutal es cero y el campo eléctrico solo tiene dos componentes:

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \left[ (3\cos^2\theta - 1)\hat{r} + \sin(2\theta)\hat{\theta} \right].$$

## 4.5 Dipolo y campo externo

Veamos en detalle que pasa cuando tenemos un dipolo eléctrico en un campo externo. Sabemos que un dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales y opuestas que están separadas cierta distancia. En un presencia de un campo sentirá una fuerza:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Pero no es tan simple. Si quieres saber más, te sugerimos que visualices este vídeo:



Accede al vídeo: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

## 4.6 Superficies de discontinuidad

En todas las situaciones discutidas hasta ahora se ha calculado el campo escalar y el campo eléctrico en el vacío o en algún medio homogéneo. Sin embargo es importante estudiar qué pasa con el campo eléctrico durante la transición de un medio a otro. Como ejemplos prácticos uno puede considerar la transición de un medio conductor a uno dieléctrico, o simplemente la transición entre dos medios dieléctricos. Como se puede esperar, estos cambios de medio producen cambios en el campo que generalmente son suaves y continuos. En este apartado, sin embargo, se discutirá el fenómeno idealizado de una transición abrupta

o discontinua. El estudio de este fenómeno captura las propiedades más representativas de la transición entre dos medios y permite sentar las bases para un estudio mas detallado (a nivel molecular) que está fuera del alcance de este curso.

Como se verá a continuación, en toda superficie de discontinuidad se puede calcular el efecto de la transición en los campos eléctricos usando el teorema de la divergencia y el rotacional. Esto es matemáticamente válido debido a que el campo eléctrico es un campo conservativo. A continuación discutiremos los cambios específicos para el campo eléctrico, aunque el desarrollo de este puede ser generalizado para cualquier campo conservativo.

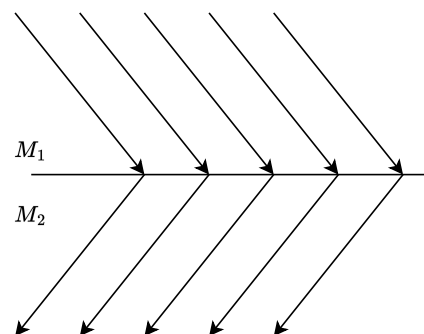


Figura 4: Se muestra la refracción del campo en una superficie de discontinuidad, con dos medios diferentes. Elaboración propia.

## 4.7 Condiciones de frontera

En el caso del fenómeno electromagnético, hay dos ecuaciones que describen el campo eléctrico producido por fuentes estáticas, estas son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (16)$$

### Componentes Normales y teorema de la divergencia

Para este desarrollo nos apoyaremos en el teorema de la divergencia aplicado la [Ecuación \(15\)](#), este es:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (17)$$

En el caso de superficies de discontinuidad ideales, podemos construir un pequeño cilindro recto de altura infinitesimal  $h$  y volumen  $h \times S$ , con las caras paralelas a la superficie de discontinuidad tal como se muestra en la [Figura 5](#).

Si hacemos la altura del cilindro cada vez más pequeña en el límite  $h \rightarrow 0$ , la contribución del flujo en el lateral del cilindro debido a cualquier componente tangencial del campo es nulo pues su superficie también tiende a cero.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_{1,n} - E_{2,n})S. \quad (18)$$

En este mismo límite, la carga encerrada por el cilindro infinitesimalmente pequeño viene dada por la densidad superficial de carga presente en la discontinuidad:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_h dh' \int_S \rho dS' \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S. \quad (19)$$

Si ahora usamos la [Ecuación \(17\)](#), encontraremos que en el límite las componentes

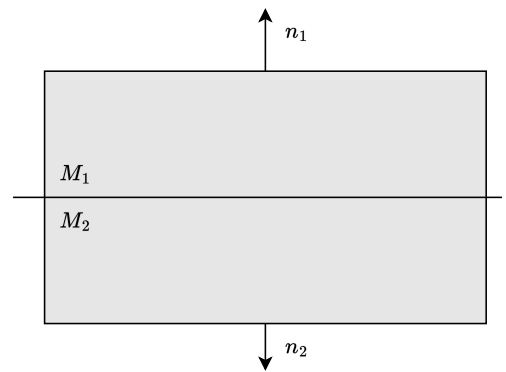


Figura 5: Se muestra el volumen usado para calcular la condición de frontera utilizando el teorema de la divergencia. Elaboración propia.

normales al campo quedan relacionadas por:

$$E_{1,n} - E_{2,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (20)$$

donde  $\sigma$  es la densidad superficial de carga en todo punto de la superficie de discontinuidad. Es decir, en la frontera de una superficie de discontinuidad la diferencia de las componentes normales del campo eléctrico es proporcional a la densidad superficial de carga.

### Componentes Tangenciales y teorema del rotacional

En este caso nos apoyaremos en el teorema del rotacional aplicado la [Ecuación \(16\)](#), esto se escribe así:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) dS = 0, \quad (21)$$

sabiendo que el rotacional del campo es nulo porque es conservativo. Ahora construiremos una pequeña trayectoria rectangular que cruce la superficie de discontinuidad tal como se muestra en la [Figura 6](#). Si estrechamos cada vez más el rectángulo en su dimensión normal a la superficie, en el límite de esta dimensión tendiendo a cero no contribuye a la integral de camino la componente tangencial a ambos lados de la discontinuidad. De esta manera la integral queda reducida a:

$$\int_b db(E_{1,t} - E_{2,t}) = 0. \quad (22)$$

Esto nos dice que, a diferencia de las componentes normales, las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas en la frontera de discontinuidad de dos medios.

$$E_{1,t} = E_{2,t} \quad (23)$$

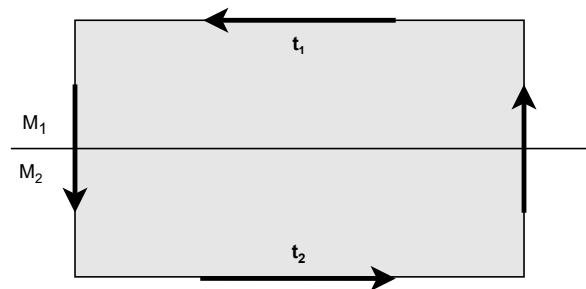


Figura 6: Se muestra el volumen usado para calcular la condición de frontera utilizando el teorema del rotacional.



Una consecuencia directa de esto es que en la superficie de un conductor perfecto, en el que sabemos que el campo eléctrico en su interior es nulo, la componente tangencial en su superficie tiene que ser también nulo. Como ya habíamos analizado con anterioridad, únicamente presentará una componente normal que dependerá de la densidad de carga acumulada en la superficie del conductor.

## 4.8 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** En una trampa iónica se ha conseguido aislar un núcleo de plomo. Considerando que el tamaño de este núcleo no es mayor a 1 fermi ( $10^{-15}$  m), y que los nucleones se encuentran en el estado basal, calcula el potencial eléctrico generado por este núcleo a una distancia de  $0.1 \mu\text{m}$  de su centro. *Solución:*

$$\frac{82q}{4\pi\epsilon_0 10^{-7}} = 1.18 \text{ Volts.}$$

**Ejercicio 2.** Calcula el momento dipolar de un sistema de tres cargas  $+Q$  situadas equidistantes del origen de coordenadas, formando un triángulo equilátero de lado  $d$ . *Solución:*  $\vec{p} = 0$ .

**Ejercicio 3.** Calcula el momento dipolar  $\vec{p}$  de dos cargas  $+Q$  separadas por una distancia  $d$  (según se rote el sistema de coordenadas). Considera que el origen de coordenadas y las dos cargas forman un triángulo equilátero. *Solución:*

- ▶  $\vec{p} = Qd\sqrt{3}\hat{y}$ , alineados paralelos al eje x
- ▶  $\vec{p} = Qd\sqrt{3}\hat{x}$ , alineados paralelos al eje y
- ▶  $\vec{p} = Qd\frac{1}{2}(3\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y})$ , una carga en el eje x y la otra a  $60^\circ$
- ▶  $\vec{p} = Qd\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\hat{x} + 3\hat{y})$ , una carga en el eje y y la otra a  $60^\circ$

**Ejercicio 4.** Para el sistema de cargas descrito en el ejercicio 2, calcula el campo eléctrico a una distancia  $r = 20d$ . *Solución:*  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{(20d)^2} \hat{r}$ .

**Ejercicio 5.** La superficie de separación entre dos regiones está determinada por el plano  $3x + 4z = 5$ , en la cual se acumula una densidad de carga superficial  $\sigma = 1 \cdot \epsilon_0$ . Si el campo eléctrico en  $3x + 4z > 5$  es  $\vec{E} = 10\hat{x}$ , encontrar el campo eléctrico al otro lado de la superficie. *Solución:*  $\vec{E} = 9.4\hat{x} - 0.8\hat{z}$ .

## 4.9 Referencias bibliográficas

Alzugaray, Gloria E and Massa, Marta B and Moreira, Marco A (2014). La potencialidad de las simulaciones de campo eléctrico desde la perspectiva de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. *Latin-American Journal of Physics Education*, 8(1).

Maldonado Luna, Braian Adair (2020). Test de la física fundamental mediante el momento dipolar eléctrico de un electrón.