Teoría de campos

# Introducción a la teoría de campos

# Índice


Esquema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

Ideas clave . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.1 Introducción y objetivos . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2 Campos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.3 Campos escalares . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.4 Vector gradiente . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.5 Campos vectoriales . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.6 La circulación. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

1.7 El flujo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.8 La divergencia de un campo vectorial . . . . . . . . 10

1.9 Teorema de Gauss. . . . . . . . . . . . . . . . . 11

1.10 Rotacional de un campo vectorial . . . . . . . . . 11

1.11 Teorema de Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.12 El laplaciano . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

1.13 Campos irrotacionales . . . . . . . . . . . . . . 14

1.14 Campos conservativos . . . . . . . . . . . . . . 14

1.15 Campos solenoidales . . . . . . . . . . . . . . . 16

1.16 Campos centrales . . . . . . . . . . . . . . . . 17

1.17 El ángulo sólido . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.18 Campos armónicos . . . . . . . . . . . . . . . . 20

1.19 La delta de Dirac . . . . . . . . . . . . . . . . 22

1.20 Teorema de Helmholtz . . . . . . . . . . . . . . 24

1.21 Referencias bibliográficas . . . . . . . . . . . . . 27

1.22 Cuaderno de ejercicios . . . . . . . . . . . . . . 28

# Esquema

**Campos escalares**

$$\phi(x, y, z, t)$$

**Campos vectoriales**

$$\vec{E}(x, y, z, t)$$

**Vector gradiente**

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\hat{e}_i$$

**Circulación**

$$\Gamma = \int_{A(\gamma)}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

**Flujo**

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

**Divergencia**

$$\nabla\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}$$

**Rotacional**

$$\nabla \times \vec{E}$$

**Teorema de Gauss**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{E}dV$$

**Teorema de Stokes**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

**Laplaciano**

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

**Campos irrotacionales. Campos conservativos.**

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

**Campos solenoidales**

$$\nabla\vec{E} = 0$$

**Campos centrales**

$$\vec{E} = f(r)\vec{u}_r$$

**Campos armónicos**

$$\nabla^2\phi = 0$$

**Ángulo sólido**

$$d\Omega = \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

**Delta de Dirac**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

**Teorema de Helmholtz**

$$\nabla\vec{E} = \rho, \nabla \times \vec{E} = \vec{j}$$

# Ideas clave

## 1.1 Introducción y objetivos

En este tema estudiaremos la teoría matemática de los campos escalares y vectoriales. Introduciremos los operadores vectoriales más destacados: el gradiente de un campo escalar y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial, así como el laplaciano. Definiremos la circulación y el flujo de un campo vectorial y enunciaremos los teoremas que relacionan este tipo de integración con la divergencia y el rotacional. Estudiaremos en detalle las propiedades de los campos solenoidales, irrotacionales, conservativos y centrales. Definiremos el ángulo sólido y la delta de Dirac y, por último, enunciaremos y demostraremos el teorema de Helmholtz.

Con más detalle, los objetivos del tema son:

- Conocer la definición de **campo escalar** y **campo vectorial**.
- Entender la definición de las integrales de campo: la **circulación** y el **flujo**.
- Comprender la definición de la **divergencia** de un campo vectorial y saber aplicar el **teorema de Gauss**.
- Comprender la definición de **rotacional** de un campo vectorial y saber aplicar el **teorema de Stokes**.
- Conocer la definición de **laplaciano** de un campo escalar.
- Conocer la definición y las propiedades de los campos **solenoidales**, **irrotacionales**, **conservativos** y **centrales**.
- Comprender la definición de **ángulo sólido** y de la **delta de Dirac**, tanto en una dimensión como en tres dimensiones, así como sus propiedades.
- Conocer el enunciado y la demostración del **teorema de Helmholtz**.

## 1.2 Campos

La teoría de campos es una teoría matemática con aplicación en la Física. Los campos son simplemente funciones escalares o vectoriales. Su introducción en la Física se debió a la necesidad de reemplazar el concepto de fuerza. La fuerza es una magnitud capaz de alterar el estado de movimiento de un cuerpo. Sin embargo, se daba problema de que parecían existir *fuerzas a distancia* y que estas actuaban instantáneamente. El desarrollo del electromagnetismo fue dando forma a la idea física de campo. Así, por ejemplo, si se disponen limaduras de hierro en torno a un imán o un conductor por el que circule una corriente, estas adoptan una configuración que se denominó líneas de fuerza. De la noción de líneas de fuerza se pasó a la de campo. La idea es que una magnitud activa, como la carga para la electricidad o la masa para la gravedad, genera un campo que se extiende por todo el espacio. Otra magnitud activa siente la acción de este campo en el lugar en el que se encuentre y entonces se manifiesta una fuerza.

## 1.3 Campos escalares

Veamos qué es un *campo escalar*:

**Definición 1: Campo escalar**

Se llama campo escalar a toda función que en cada punto del espacio toma como valor un escalar. Esta función debe ser monovaluada, es decir, no puede tener dos valores distintos en el mismo punto, de lo contrario no tendría significado físico. Se representa como:

$$\phi = \phi(x, y, z, t)\,. \tag{1}$$

El campo escalar es, pues, una función de las coordenadas espaciales, pero también del tiempo. Si no depende del tiempo entonces hablamos de un campo escalar *estacionario*:

$$\phi = \phi(x, y, z)\,. \tag{2}$$

Al lugar geométrico de los puntos del espacio donde el campo escalar es constante se lo denomina *superficie de nivel* o también *superficie isoescalar.* Si al campo escalar lo llamamos potencial entonces estaríamos hablando de *superficies equipotenciales*. La ecuación de una superficie de nivel viene dada por

$$\phi(x, y, z) = C\,. \tag{3}$$

Al valor del campo escalar en una superficie de nivel o *equiescalar* se lo llama *cota.* Un ejemplo de ello son los mapas topográficos, en los que las superficies de nivel pasan a ser líneas de nivel. Otro ejemplo son los mapas meteorológicos, en los que se representan las líneas isobaras (presión constante), que son la intersección de las superficies isobáricas con el nivel del mar.

## 1.4 Vector gradiente

Para caracterizar la variación de un campo escalar se emplea el vector gradiente.

**Definición 2: Gradiente**

Se define el *vector gradiente* de un campo escalar $\phi$ en coordenadas cartesianas como:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\,, \tag{4}$$

o en notación más compacta:

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\vec{e}_i\,, \tag{5}$$

donde hemos llamado $\vec{e}_i$ a los vectores unitarios (y ortonormales) en coordenadas cartesianas.

Al operador $\nabla$ se lo llama *operador nabla* y tiene la forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{6}$$

Si llamamos $d\vec{r}$ al vector que une dos puntos infinitamente próximos $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \sum_{i=1}^{3} dx_i\vec{e}_i$ y lo multiplicamos escalarmente por el gradiente obtenemos:

$$\nabla\phi \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i = d\phi. \tag{7}$$

Es decir, que la variación del campo escalar en una dirección es la proyección del vector gradiente en dicha proyección, véase la Figura 1. Si ahora asumimos que $\phi = \text{cte}$, entonces $d\phi = 0$ y el producto escalar $\nabla\phi\cdot d\vec{r} = 0$. Como ahora $d\vec{r}$ está contenido en la superficie de nivel, el vector gradiente es perpendicular a la superficie de nivel y además va en el sentido en el que el campo escalar aumenta.

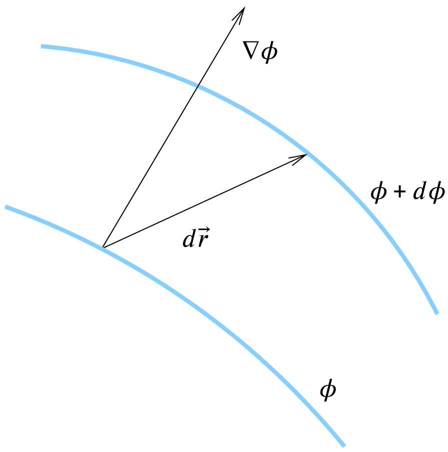

Figura 1: Vector gradiente perpendicular a las superficies de nivel del campo escalar.

Ejemplos de campos escalares son: la temperatura, la densidad, la presión.

## 1.5 Campos vectoriales

Estudiemos ahora la definición de un *campo vectorial*:

**Definición 3: Campo vectorial**

Se llama campo vectorial a una función vectorial $\vec{E}$ monovaluada que toma en cada punto del espacio (y posiblemente, en función del tiempo) valores vectoriales.

Como con los campos escalares, si el campo vectorial no depende del tiempo hablamos de un campo vectorial estacionario. Los campos vectoriales pueden ser caracterizados por las *líneas de campo*, que son aquellas líneas que son tangentes al campo en todos los puntos. Para obtenerlas se emplea la siguiente ecuación (en coordenadas cartesianas):

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \,. \tag{8}$$

Ejemplos de campos vectoriales son: el campo electrostático, el campo magnetostático, el campo electromagnético, el campo gravitatorio, el campo de velocidades de un fluido.

## 1.6 La circulación

Sobre los campos vectoriales se puede definir la circulación.

**Definición 4: Circulación**

Sea $\vec{E}$ un campo vectorial y $\gamma$ una curva en el espacio que une los puntos $A$ y $B$, a la que llamamos circulación $\Gamma$:

$$\Gamma = \int_{A(\gamma)}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}\left(\vec{r}_i\right) \cdot \Delta\vec{r}_i \,, \tag{9}$$

donde $\Delta\vec{r}_i$ es un elemento de la partición de la curva $\gamma$ en $N$ segmentos orientados.

Si la curva se puede parametrizar en función de un parámetro $t$, esto es $\gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t);\ t\epsilon[t_A, t_B]\}$ entonces la circulación se puede calcular como:

$$\Gamma = \int_{t_A}^{t_B} \vec{E}\left(\vec{r}(t)\right) \frac{d\vec{r}}{dt} dt \,. \tag{10}$$

La circulación es precisamente, como veremos, el tipo de integración que se efectúa para calcular el trabajo de una fuerza.

## 1.7 El flujo

Para entender el concepto de flujo consideremos un fluido en movimiento por una tubería, con un campo de velocidades (que es un campo vectorial). El caudal $Q$ se define como la cantidad de fluido que atraviesa la sección transversal en la unidad de tiempo. Durante el intervalo de tiempo $dt$ las partículas que atraviesan la sección $d\vec{S}$ serán $dSvdt\cos\alpha$, donde hemos multiplicado la sección por la generatriz del tubo $vdt$ y por el coseno del ángulo que forman la generatriz y el vector normal a la superficie. Por tanto, el caudal se obtendrá dividiendo entre el tiempo $dt$:

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{S} = vdS\cos\alpha\,. \tag{11}$$

Y el caudal será:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}\,. \tag{12}$$

Ya estamos en disposición de definir el flujo.

**Definición 5: Flujo**

El *flujo* de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie $S$ se define como:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}\left(\vec{r}_i\right) \cdot \Delta\vec{S}\,, \tag{13}$$

donde $\Delta\vec{S}$ son los $N$ elementos en que se divide el área $S$. El módulo de $d\vec{S}$ es igual al área a la que corresponde. Su dirección es perpendicular al área y su sentido es tal que apunta hacia afuera del volumen que el área encierra.

## 1.8 La divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial $\vec{E}$ es un concepto diferencial relacionado con el flujo. Dado un volumen $V$ y la superficie $S$ que lo envuelve, se puede definir la divergencia como el límite, cuando el volumen tiende a cero, del cociente del flujo a través de dicha superficie y el volumen:

$$\nabla \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \,. \tag{14}$$

Una definición más matemática es:

**Definición 6: Divergencia de un campo vectorial**

Sea un campo vectorial $\vec{E}$ definido en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que el campo es diferenciable en un punto $a \in \Omega$, lo que equivale a que sean diferenciables sus componentes $E_i$, con $i = 1, 2, ..., n$. El gradiente de la componente $i$–ésima $\nabla E_i$ es la fila $i$–ésima de la matriz jacobiana del campo en $a$. Pues bien, la divergencia del campo en $a$, que se representa por $\nabla \vec{E}$, es la traza de dicha matriz:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}(a) + \ldots + \frac{\partial E_n}{\partial x_n}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(a) \,. \tag{15}$$

Cuando el campo $\vec{E}$ es diferenciable en todos los puntos de $\Omega$ tenemos una función $\nabla \vec{E} : \Omega \to \mathbb{R}$,que asigna a un vector un escalar, que es la *divergencia*.

En tres dimensiones, las tres dimensiones espaciales, la divergencia de un campo vectorial, se puede visualizar como el producto escalar simbólico del operador nabla y el campo vectorial:

$$\nabla \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \left( E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \,. \tag{16}$$

Volviendo al símil hidrodinámico, y puesto que la divergencia tiene que ver con el flujo de un campo en un elemento infinitesimal de volumen, tenemos que si el campo es homogéneo su divergencia será cero, puesto que las líneas de campo que entran al volumen por un lado de la superficie son las mismas que las que salen por el otro lado, cancelándose sus efectos. Ahora bien, si hay un manantial o *fuente* de la que emergen líneas del campo, entonces su divergencia será positiva, mientras que si hay un *sumidero* o desagüe, las líneas del campo desaparecerán en ese volumen originando una divergencia negativa.

## 1.9 Teorema de Gauss

Enunciamos sin demostración el teorema de Gauss, o *teorema de la divergencia*, que nos dice que el flujo de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie $S$ es igual a la integral de volumen de la divergencia de dicho campo en el volumen $V$ que encierra tal superficie:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{E} dV \,. \tag{17}$$

A los campos cuya divergencia es nula en todos los puntos se los llama *campos solenoidales*.

## 1.10 Rotacional de un campo vectorial

Del mismo modo que hemos visto que la divergencia de un campo vectorial se puede visualizar simbólicamente como el producto escalar del operador nabla por el campo vectorial, podemos ensayar el producto vectorial entre ambos. A esta cantidad, que también es un vector, se la denomina *rotacional* y vale:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} \,. \tag{18}$$

Otra definición de rotacional es que, dado un vector unitario $\hat{n}$, la componente del rotacional de $\overrightarrow{E}$ en la dirección de $\hat{n}$ se puede definir como el cociente de la circulación del campo en una línea cerrada dentro de un plano perpendicular a $\hat{n}$, $C$, y la superficie encerrada por dicha línea, $S$:

$$\nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \,. \tag{19}$$

Al campo vectorial $\vec{J}$ que se obtiene del rotacional de otro campo vectorial $\vec{E}$ se le conoce como *fuente vectorial* del campo $\vec{E}$, mientras que al escalar que se obtiene de su divergencia $\rho = \nabla \vec{E}$ se le conoce como *fuente escalar*. Los campos vectoriales cuyo rotacional es cero se conocen como campos *irrotacionales*.

**Teorema 1: Rotacional de un gradiente**

Todo campo que derive de un potencial, es decir, que sea igual al gradiente de un campo escalar, es irrotacional, esto es, su rotacional es cero:

$$\vec{E} = \nabla\phi \;\Rightarrow\; \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\phi = 0 \,. \tag{20}$$

Para demostrarlo, calculemos la componente $x$:

$$\left(\nabla \times \vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} = 0 \,, \tag{21}$$

donde en el último paso hemos empleado el teorema de Schwarz o teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \,. \tag{22}$$

Igualmente se puede proceder con las restantes componentes, quedando demostrado el teorema.

**Teorema 2: Divergencia del rotacional**

Un campo rotacional es siempre solenoidal, es decir, su divergencia es nula:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0\,. \tag{23}$$

Calculemos, en coordenadas cartesianas, la divergencia de la Ecuación (18):

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} = 0\,, \tag{24}$$

donde nuevamente hemos empleado el teorema de Schwartz. Para un estudio exhaustivo de la Física de los operadores diferenciales, puede consultarse (López Rupérez et al., 1979).

## 1.11 Teorema de Stokes

El teorema de Stokes afirma que la integral a lo largo de una línea cerrada $C$ de un campo vectorial $\vec{E}$ es igual a la integral sobre cualquier superficie encerrada por dicha línea cerrada $S$ (es decir, el flujo) del rotacional del campo. Es decir:

$$\oint_c \vec{E}{\cdot}d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}\,. \tag{25}$$

Para una demostración intuitiva de los teoremas de Gauss y de Stokes, puede consultarse (Conde, 2023).

## 1.12 El laplaciano

Una identidad útil de los rotacionales es el rotacional de un rotacional, que vale:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \left( \nabla \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E}\,, \tag{26}$$

donde $\nabla^2$ es el operador laplaciano que en coordenadas cartesianas se expresa:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{27}$$

y que puede visualizarse como el producto escalar simbólico de dos operadores nabla:

$$\nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)\,.$$

Las funciones cuyo laplaciano es cero $\nabla^2 \phi = 0$ se conocen como funciones *armónicas*.

## 1.13 Campos irrotacionales

Los campos irrotacionales son aquellos cuyo rotacional es cero $\nabla \times \vec{E} = 0$. Ejemplos de campos irrotacionales son el campo electrostático y el campo gravitatorio. Son equivalentes a los campos conservativos, que estudiamos a continuación.

## 1.14 Campos conservativos

Se dice que un campo es conservativo cuando se cumplen cualquiera de las tres condiciones siguientes:

- Que la integral de línea es independiente de la trayectoria.
- Que la integral a lo largo de un circuito cerrado es cero.

- Que el campo es irrotacional, es decir, que su rotacional es cero y por tanto el campo es igual al gradiente de cierta función escalar (que suele llamarse potencial).

Estas tres condiciones son equivalentes entre sí. En efecto, si la integral de línea es independiente del camino podemos tomar dos trayectorias que conecten los mismos puntos $A,B$. Llamemos a estas trayectorias $C_1$ y $C_2$. Entonces, por la independencia de la trayectoria tendremos:

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}\,, \tag{28}$$

que es equivalente a:

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0\,. \tag{29}$$

Ahora bien, el signo menos aparece cuando una trayectoria se recorre en sentido inverso, luego la Ecuación (29) es equivalente a:

$$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0\,, \tag{30}$$

donde $C$ es la línea cerrada que se forma con la $C_1$ y la $C_2$ recorrida en sentido inverso. Por otra parte, por el teorema de Stokes, el que la circulación sea cero para una trayectoria cerrada implica que el rotacional es cero, por lo que el campo es irrotacional:

$$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{S} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \;\Rightarrow\; \nabla \times \vec{E} = 0\,. \tag{31}$$

Y el que el rotacional de un campo vectorial sea cero implica que ese campo vectorial se puede expresar como el gradiente de una función escalar $\phi$ (el potencial):

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = \nabla\phi\,. \tag{32}$$

Ahora bien, si partimos de que el campo es el gradiente de una función escalar, entonces, por la Ecuación (7) podemos escribir:

$$\int_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_{C} d\phi = \phi_2 - \phi_1\,,$$

donde, obviamente, la circulación del campo depende únicamente de la diferencia entre el valor final del potencial y el valor inicial, por lo que tendrá el mismo valor cualquiera que sea la trayectoria que conecte los mismos puntos final e inicial. Si la trayectoria es un circuito cerrado, como el punto inicial y el final son iguales, $\phi_1 = \phi_2$ y por tanto la circulación en un circuito cerrado es cero.

## 1.15 Campos solenoidales

Los *campos solenoidales* son aquellos cuya divergencia es cero $\nabla \vec{E} = 0$. Un ejemplo de un campo solenoidal es el campo magnético. Los campos solenoidales tienen las siguientes propiedades:

- El flujo a través de una superficie cerrada $S_V$ (que envuelve el volumen $V$) es cero: $\oint_{S_V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$.
- El flujo a través de dos superficies distintas, delimitadas por la misma curva, es igual: $\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad$ si $\gamma_{S_1} = \gamma_{S_2}$.
- El flujo es constante a lo largo de un tubo de campo.
- El campo puede expresarse como el rotacional de un campo vectorial $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$.

Para demostrar la primera propiedad aplicamos el teorema de Gauss, la Ecuación (17):

$$\oint_{S_V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{E} dV = 0\,. \tag{33}$$

Para demostrar la segunda propiedad basta considerar que $S_1 \cup (-S_2) = S$ es una superficie cerrada.

Para demostrar la tercera consideramos una superficie constituida por las paredes del tubo $S_{\text{tubo}}$ y dos secciones $S_1$ y $S_2$, de tal modo que entre las tres superficies formen una superficie cerrada. Como el flujo a través de la superficie del tubo es nula, puesto que el campo es perpendicular el vector superficie en ella, y el flujo es saliente por una de las secciones y entrante por la otra, se tiene que $-\phi_1 + \phi_2 = 0$, por la primera propiedad, por lo que el flujo $\phi$ es igual en ambas secciones del tubo de campo. Y por último, la cuarta propiedad se deduce de que la divergencia de un rotacional es cero, así que se puede expresar el campo como el rotacional de un campo vectorial $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$.

Para una historia del surgimiento de la idea de campo, desde una concepción meramente abstracta a una concepción de él como realidad física, puede consultarse (Criado Pérez et al., 1991).

## 1.16 Campos centrales

Un campo central es aquel que se puede expresar de la forma:

$$\vec{E} = f(r)\vec{u}_r\,, \tag{34}$$

es decir, como una función de la distancia $r$ y en la dirección del vector unitario en coordenadas polares $\vec{u}_r$. Su rotacional es siempre cero, como es fácil probar si se expresa el rotacional en coordenadas esféricas:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right)\right]\vec{u}_\theta + $$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta\right) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\vec{u}_\phi\,. \tag{35}$$

Y como $E_r = f(r)$, $E_\theta = 0$ y $E_\phi = 0$ es fácil ver que el rotacional es igual a cero. Esto significa que un campo central es *irrotacional* y por tanto conservativo, como por ejemplo el campo gravitatorio o el campo electrostático.

## 1.17 El ángulo sólido

Antes de definir el ángulo sólido recordemos la definición de un ángulo plano. El ángulo plano es cada una de las dos partes en que dividen el plano dos semirrectas con el mismo origen. Si trazamos una circunferencia y hallamos el cociente entre el arco delimitado por las dos semirrectas $s$ y el radio de la circunferencia $r$, encontramos que el cociente $s/r$ es independiente del tamaño de la circunferencia. A este cociente es a lo que se llama medida del ángulo, que es, por tanto, adimensional, aunque su medida se expresa en radianes (rad). El ángulo de una circunferencia completa es $2\pi r/r = 2\pi$ radianes.

De la misma manera, si tenemos una curva cerrada $c$, la superficie de todas las rectas que unen un punto con los puntos de la curva forma un cono. Cada una de las dos partes en que queda dividido el espacio por dicho cono es lo que se conoce como *ángulo sólido*. Si ahora concebimos una superficie esférica con origen en el vértice del cono, el cociente del área delimitada por la curva $c$, que llamaremos $S$, y el cuadrado del radio de la esfera $r$: $S/r^2$, es independiente del tamaño de la esfera. A esta cantidad constante es a lo que se llama medida del ángulo sólido, que es también adimensional. A su unidad se la conoce como *estereorradián* (sr).

Si tenemos un elemento diferencial de superficie y queremos determinar el ángulo sólido que subtiende respecto a un punto, el vértice, como la superficie está orientada en el espacio según una dirección caracterizada por un vector perpendicular a ella $d\vec{S}$, para hallar el ángulo sólido habrá que calcular la proyección de esa superficie elemental según la dirección del vector $\vec{r}$, que la une al vértice: $d\vec{S} \cdot \vec{u}_r = dS \cdot \cos\alpha$, donde $\vec{u}_r = \vec{r}/r$. Así que el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ será:

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}\,. \tag{36}$$

Y el ángulo sólido será la integral:

$$\Omega = \int_S \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2}\,. \tag{37}$$

El ángulo sólido subtendido por una superficie $S$ desde una posición $\vec{r}_0$ será:

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|^3} \,. \tag{38}$$

Si la superficie está orientada en sentido opuesto, entonces $\Omega(\vec{r}_0, -S) = -\Omega(\vec{r}_0, S)$. Varias propiedades son las siguientes:

- El ángulo sólido desde un punto situado fuera del volumen que encierra la superficie que subtiende es cero, es decir:

$$\Omega\left(\vec{r}_0, S_V\right) = 0 \text{ si } \vec{r}_0 \notin V \,.$$

Para demostrarlo recurrimos al teorema de Gauss:

$$\Omega(\vec{r}_0, S_V) = \int_{S_v} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|^3} = \int_V \nabla\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) dV \,.$$

donde $\nabla\left(\vec{R}/R^3\right) = \nabla\left(\vec{u}_R/R^2\right)$, que calculamos en coordenadas esféricas $\{R, \phi, \theta\}$ :

$$\nabla\left(\frac{\vec{u}_R}{R^2}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{1}{R^2}\right) = 0 \quad \text{si R} \neq 0 \,. \tag{39}$$

- Otra propiedad es que el ángulo sólido que subtiende cualquier superficie cerrada respecto a un punto que está dentro del volumen que encierra es:

$$\Omega(\vec{r}_0, S_V) = 4\pi \quad \text{si } \vec{r}_0 \in \text{V} \,. \tag{40}$$

Para probar esta propiedad basta con percatarse que el ángulo sólido subtendido por una superficie cerrada respecto a un punto interior es igual al ángulo sólido que subtiende una esfera, cuya superficie es $4\pi r^2$, por lo que $\Omega = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$. Por último, otra propiedad es que el ángulo sólido es el mismo para dos superficies distintas delimitadas por la misma curva $\gamma$:

$$\Omega\left(\vec{r}_0, S_1\right) = \Omega\left(\vec{r}_0, S_2\right) \quad \text{si } \gamma_{S_1} = \gamma_{S_2} \,. \tag{41}$$

Para demostrarlo consideremos que $S_1 \cup (-S_2) = S$ constituye una superficie cerrada y que para ella $\vec{r}_0$ es un punto exterior, por lo que:

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \Omega(\vec{r}_0, S_1) - \Omega(\vec{r}_0, S_2) = 0 \,. \tag{42}$$

## 1.18 Campos armónicos

Se llaman *campos armónicos* a aquellos que cumplen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \,, \tag{43}$$

es decir, que su laplaciano es cero. Tal es el caso del potencial gravitatorio o del potencial electrostático cuando la densidad de masa o la densidad de carga, respectivamente, son cero. Estos campos son muy comunes en la Física, por lo que vale la pena detenerse a estudiar sus propiedades más destacadas.

Una primera propiedad es el *teorema del valor medio*:

**Teorema 3: Valor medio**

El valor de un campo escalar en una posición $\phi(\vec{r}_0)$ es igual a la integral del campo sobre una superficie esférica centrada en dicha posición $S_{\text{esf}(R)}$ de radio $R$ dividida por el área de dicha superficie $4\pi R^2$, es decir:

$$\phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S_{\text{esf}}(R)} \phi(\vec{r}) \, dS(\vec{r}) \,. \tag{44}$$

Otra propiedad es la inexistencia de máximos o mínimos en un volumen esférico en el que la función sea armónica.

**Teorema 4: Inexistencia de máximos o mínimos**

Si el campo escalar $\phi$ es una función armónica en un volumen esférico $V$ entonces no presenta ni máximos ni mínimos en dicho volumen.

Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es, que presenta un máximo en una posición $\vec{r}_0$. Entonces se cumplirá que en un entorno esférico centrado en $\vec{r}_0$ y de radio $\epsilon$, y contenido en el volumen $V$, que se representa por $B\left(\epsilon, \vec{r}_0\right) \in V$, se cumple $\phi\left(\vec{r}\right) < \phi\left(\vec{r}_0\right)$. Ahora bien, esto implica que:

$$\oint_{S(B)} \phi\left(\vec{r}\right) dS < \oint_{S(B)} \phi\left(\vec{r}_0\right) dS = 4\pi\phi\left(\vec{r}_0\right) , \tag{45}$$

lo que está en contradicción con el teorema del valor medio. El mismo procedimiento se emplea para demostrar que los mínimos están descartados. Otra propiedad que se deriva de esta es:

**Teorema 5: Constancia de una función armónica**

Si un campo escalar armónico es constante en la frontera de un volumen $V$ entonces es constante en todo el volumen $V$.

Si el campo escalar es constante en la frontera, para no serlo en el interior del volumen debería presentar un máximo o un mínimo, hecho que está descartado por la propiedad anterior.

Otra propiedad es la de *unicidad del campo*:

**Teorema 6: Unicidad del campo armónico dadas las condiciones de frontera**

Si de un campo escalar armónico se conocen las condiciones de frontera, es decir, su valor $\phi$ en la frontera o el valor de su derivada normal $\vec{n}\cdot\nabla\phi$, entonces el campo armónico está unívocamente determinado, salvo una constante aditiva.

Para demostrarlo supongamos que hay dos campos $\phi_1$ y $\phi_2$ que cumplen las mismas condiciones de frontera. Entonces construimos el campo $\psi = \phi_1 - \phi_2$, que también es armónico, por ser la diferencia de dos campos escalares armónicos y cuyas condiciones de frontera $S_V$ son $\psi = 0$ y $\vec{n}\nabla\psi = 0$. Se tiene entonces:

$$0 = \oint_{S_V} \psi\nabla\psi \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\left(\psi\nabla\psi\right) dV\,, \tag{46}$$

donde hemos aplicado el teorema de Gauss. Ahora usamos la identidad vectorial $\nabla\left(\psi\nabla\psi\right) = \psi\nabla^2\psi + |\nabla\psi|^2$, con lo que resulta:

$$0 = \int_v \left(\psi\nabla^2\psi + |\nabla\psi|^2\right) dV\,. \tag{47}$$

El primer término del integrando es cero, por ser el campo armónico. Ahora, si la integral de una cantidad positiva (un cuadrado) es nula, entonces esa cantidad es nula, lo que implica $|\nabla\psi| = 0$. Pero si el módulo del gradiente de una función es nulo, entonces el gradiente también es nulo, lo que implica que esa función es una constante $\psi = \text{cte}$. Por tanto, las soluciones $\phi_1$ y $\phi_2$ difieren en una constante.

## 1.19 La delta de Dirac

Se define la delta de Dirac y se representa como $\delta(x)$ a una función tal que:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si x} = 0 \end{cases}\,, \tag{48}$$

y tiene la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1\,. \tag{49}$$

La delta de Dirac no es propiamente una función sino una *distribución,* que es el límite de una sucesión de funciones que dependen de un parámetro. Una clase de estas funciones, utilizada para definir la delta de Dirac, es una gaussiana:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2} \,. \tag{50}$$

Esta familia de funciones cumple la propiedad dada por la Ecuación (49), puesto que están normalizadas a la unidad. Otra propiedad de la delta de Dirac es:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b) \\ 0 & si \quad x_0 \notin [a, b] \end{cases} \,.$$

También se puede definir la delta de Dirac en tres dimensiones de la siguiente manera:

$$\delta\left(\vec{r}\right) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \,, \tag{51}$$

que tiene la siguiente propiedad:

$$\int_V f\left(\vec{r}\right) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) dV = \begin{cases} f\left(\vec{r}_0\right) & si\ \vec{r}_0 \in V \\ 0 & si\ \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \,. \tag{52}$$

Vamos a demostrar ahora un importante resultado que involucra a la delta de Dirac:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \right) = -4\pi\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \,. \tag{53}$$

Para ello hay que demostrar que si $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ entonces la función vale cero. Para demostrarlo escribimos el laplaciano en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \,, \tag{54}$$

y utilizamos la función $f = 1/r$, con $r \neq 0$, entonces:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2 \frac{1}{r^2}\right) = 0 \,. \tag{55}$$

Ahora, la función del miembro izquierdo de la Ecuación (53) es singular en $\vec{r} = \vec{r}_0$, por lo que para demostrar que es una delta de Dirac basta probar que su integral en un volumen $V$ es igual a $-4\pi$:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right), \tag{56}$$

donde hemos calculado el gradiente $\nabla(1/r)$, empleando el gradiente en coordenadas esféricas, que es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\,, \tag{57}$$

de donde resulta:

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{58}$$

Ahora, en la Ecuación (56) aplicamos el teorema de Gauss, convirtiendo la integral de volumen de la divergencia de una función vectorial en la integral sobre la superficie cerrada que envuelve dicho volumen de la función vectorial:

$$-\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right) = -\oint_S \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\cdot d\vec{S} = -\Omega\left(\vec{r}_0, S\right) = -4\pi\,. \tag{59}$$

En el penúltimo paso hemos usado la definición de ángulo sólido, que extendido a toda la superficie que envuelve un volumen es $4\pi$. Te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre la delta de Dirac:

Accede al vídeo: Delta de Dirac.

## 1.20 Teorema de Helmholtz

Vamos a ver que dado un campo vectorial, en ciertas condiciones, queda totalmente determinado si se conoce su divergencia y su rotacional. Es lo que se conoce como *teorema de Helmholtz*.

**Teorema 7: Teorema de Helmholtz**

Sea un campo vectorial $\vec{F}$ del que se conocen su divergencia, que es una función escalar $\rho$, y su rotacional, que es una función vectorial $\vec{j}$, es decir:

$$\nabla \vec{F} = \rho \,, \tag{60}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{j} \,, \tag{61}$$

donde $\nabla \vec{j} = 0$ (pues la divergencia de un rotacional es siempre cero). Si se cumplen en todo el espacio las siguientes condiciones:

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \rho\left(\vec{r}\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} r^2 \vec{j}\left(\vec{r}\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \vec{F}\left(\vec{r}\right) = 0 \,, \tag{62}$$

entonces el campo vectorial $\vec{F}$ está unívocamente determinado y tiene solución:

$$\vec{F} = -\nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \,, \tag{63}$$

donde:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{esp}} \frac{\rho\left(\vec{r}'\right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,, \tag{64}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{esp}} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,, \tag{65}$$

donde las integrales se extienden a todo el espacio. A $\rho$ se la denomina *fuente escalar* del campo y a $\vec{j}$ *fuente vectorial.* Al término $\phi$ se le denomina *potencial escalar* y $\vec{A}$ *potencial vector*. Las condiciones de la Ecuación (62) aseguran la existencia de las integrales que definen los potenciales escalar y vectorial.

Para demostrarlo calculemos primero la divergencia del campo vectorial $\vec{F}$:

$$\nabla \vec{F} = -\nabla \left(\nabla \phi\right) + \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla^2 \phi \,, \tag{66}$$

$$-\nabla^2 \phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{esp}} \nabla^2 \left(\frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) dV' \,. \tag{67}$$

Ahora $\nabla^2$ actúa sobre las coordenadas $\vec{r}$, pero no sobre las $\vec{r}'$, por lo que:

$$\nabla^2 \left( \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \rho\left(\vec{r}'\right) \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = -4\pi\rho\left(\vec{r}'\right) \delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right). \tag{68}$$

que llevada a la Ecuación (67):

$$\nabla\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{esp}} 4\pi\rho\left(\vec{r}'\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) dV' = \rho\left(\vec{r}\right). \tag{69}$$

Calculamos ahora el rotacional del campo vectorial:

$$\nabla\times\vec{F} = \nabla\times(-\nabla\phi) + \nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}. \tag{70}$$

Ahora el segundo término es:

$$-\nabla^2\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \left(-\nabla^2 A_i\right) \vec{e}_i\,, \tag{71}$$

donde $\vec{e}_i$ son los vectores unitarios de la base cartesiana. Por analogía con el cálculo de la Ecuación (68), se obtiene:

$$-\nabla^2\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} j_i\vec{e}_i = \vec{j}\,. \tag{72}$$

Solo falta por demostrar que $\nabla\vec{A} = 0$:

$$4\pi\nabla\vec{A} = \nabla\int_{\text{esp}} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_{\text{esp}} \nabla\left(\frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dV' =$$

$$= \int_{\text{esp}} \vec{j}\left(\vec{r}'\right) \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dV'\,. \tag{73}$$

Cambiando las coordenadas del operador nabla, es decir, derivando respecto a las coordenadas $r'$:

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right), \tag{74}$$

$$\nabla'\left(\frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \vec{j}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) + \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\nabla'\vec{j}\left(\vec{r}'\right), \tag{75}$$

y como $\nabla' \vec{j}\left(\vec{r}'\right) = 0$, obtenemos:

$$\nabla' \left( \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \vec{j} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) . \tag{76}$$

Sustituyéndola en la Ecuación (73) resulta:

$$\nabla \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{esp}} \nabla' \left( \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = - \lim_{R\to\infty} \oint_{S(R)} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S}' , \tag{77}$$

donde en el último paso hemos aplicado el teorema de la divergencia. $S(R)$ es una superficie esférica cuyo radio hacemos tender al infinito para que cubra todo el espacio. Por la condición:

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \vec{j}\left(\vec{r}\right) = 0 , \tag{78}$$

y como

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S}' \simeq \frac{|\vec{j}|}{R} R^2 , \tag{79}$$

la integral de la Ecuación (77) se anula, quedando demostrado el teorema. Por último, te recomendamos ver el siguiente vídeo sobre este teorema:

Accede al vídeo: Teorema de Helmholtz.

## 1.21 Referencias bibliográficas

Conde, L. (2023). Cálculo vectorial y operadores diferenciales.

Criado Pérez, A. M., Criado García-Legaz, A. M., & Martínez Gobantes, L. I. (1991). El concepto de campo en su evolución histórica: de Newton a Maxwell. *Actas de los XI Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales (pp. 121-127). Burgos: Universidad de Valladolid, EU del Profesorado de EGB de Burgos*.

López Rupérez, F. et al. (1979). La física de los operadores vectoriales diferenciales. *Revista de bachillerato*.

## 1.22 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Dado el campo escalar $\phi = x^2yz + 3x^2z - y$, calcular la integral de línea $\int_C \phi d\vec{r}$, con $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = 2$ entre los puntos $A(1, 1, 2)$ y $B(2, 4, 2)$. *Solución*: $\int_C \phi d\vec{r} = \frac{361}{15}\vec{i} + \frac{159}{2}\vec{j}$.

**Ejercicio 2.** Dado el campo vectorial $\vec{v} = (x + y)^2\vec{i} + xy\vec{j}$, calcular la circulación $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, con $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, a lo largo de la recta $y = x + 1$ entre los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 2)$. *Solución*: $\frac{31}{6}$.

**Ejercicio 3.** Dado el campo vectorial $\vec{v} = (x + 3y)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (x + az)\vec{k}$, hallar el valor de la constante $a$ para que el campo sea solenoidal. *Solución*: $a = -2$.

**Ejercicio 4.** Dado el campo vectorial $\vec{A} = xz^3\vec{i} - 2x^2yz\vec{j} + 2yz^4\vec{k}$, hallar su rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ en el punto $(1, -1, 1)$. *Solución*: $3\vec{j} + 4\vec{k}$.

**Ejercicio 5.** Sea el campo vectorial $\vec{v} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$. Hallar el valor de las constantes $a$, $b$ y $c$ para que el campo sea irrotacional. *Solución*: $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

**Ejercicio 6.** Si $\vec{A}$ es un vector constante y $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, determinar $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{r} \cdot \vec{A}\right)$. *Solución*: $\vec{A}$.

**Ejercicio 7.** Calcular $\nabla^2 \ln r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Solución*: $\frac{1}{r^2}$.